

SERGIO LUIZ SCHUBERT DUQUE

TRANSIÇÃO DE FASE AUTO-INDUZIDA
PELA GRAVITAÇÃO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, RJ, 1989

- À Nãdia,
pelo incentivo constante.

AGRADECIMENTOS

- A Mario Novello pela sugestão do tema e orientação desde a época de minha Iniciação Científica.
- A Henrique pela ajuda nos estudos das técnicas da Análise Qualitativa.
- A José Claudio, José Luis, Álvaro e Felipe, pela ajuda em algumas questões de álgebra e solução de sistemas.
- A Maurício, Edison e Vinícius por discussões sobre aspectos gerais do trabalho.
- À Helena pelo trabalho de datilografia.
- Aos professores pela contribuição que deram à minha formação.
- Aos funcionários pela ajuda que nos prestam através de seu trabalho.
- Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.
- Aos meus pais por criarem condições para que eu chegasse até aqui.

R E S U M O

Neste trabalho, mostramos como a interação gravitacional entre as partes de um fluido viscoso é capaz de auto-induzir um mecanismo de transição de fase.

No Capítulo I introduzimos os objetos fundamentais à análise deste problema. No Capítulo II estabelecemos através da escolha de uma métrica do tipo Bianchi I, o sistema de equações de Einstein para a situação descrita. A análise destas equações é objeto de estudo do Capítulo III onde algumas soluções exatas são apresentadas. A possibilidade de reduzirmos este sistema de equações a um sistema autônomo planar não linear permite-nos utilizar no Capítulo IV as técnicas da análise qualitativa e constatar a presença deste fenômeno.

A aplicação destas idéias ao problema cosmológico fornece um quadro alternativo à explicação do alto grau de isotropia observado hoje no Universo.

S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vi
<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO I</u> - TRANSIÇÃO DE FASE	5
1.1 - Observadores Fundamentais	5
1.2 - Fluidos Stokesianos	18
1.3 - Transição entre as Fases Anisotrópica e Isotrópica do Fluido	20
<u>CAPÍTULO II</u> - EQUAÇÕES DE EINSTEIN	31
<u>CAPÍTULO III</u> - SOLUÇÕES EXATAS	45
<u>CAPÍTULO IV</u> - ANÁLISE QUALITATIVA	76
4.1 - Análise da Região Finita	78
4.2 - Análise do Infinito	97
<u>CONCLUSÕES</u>	134
<u>APÊNDICE A</u> - ELEMENTOS DA GEOMETRIA TIPO BIANCHI I	136
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	144

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PÁG.</u>
1.1 - Linha de Universo e hipersuperfícies tridimensionais de repouso instantâneo para as partículas do fluido	6
1.2 - Decomposição de um deslocamento infinitesimal na direção paralela e ortogonal ao vetor velocidade....	7
1.3 - Sistema Comóvel	11
1.4 - Vetor conexão e sua projeção em Σ	13
4.1 - Configuração das curvas integrais na vizinhança da origem do sistema (4.7)	96
4.2 - Posição dos eixos \bar{x} e \bar{y} no plano (x,y)	96
4.3 - Configuração das curvas integrais na vizinhança da origem do sistema (4.1)	97
4.4 - Esfera de Poincaré	99
4.5 - Transformações de Poincaré	101
4.6 - Configuração das curvas integrais na vizinhança de $p_{C_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$	109
4.7 - Deformação de uma vizinhança sob ação do mapeamento (4.86)	115
4.8 - Correspondência entre trajetórias dos planos $(\bar{u}, \bar{\eta})$ e (x,y)	116
4.9 - Configuração das curvas integrais na vizinhança da origem do sistema (4.94)	121
4.10 - Correspondência entre trajetórias dos planos $(\bar{u}, \bar{\eta})$ e (\bar{u}, \bar{z})	122
4.11 - Configuração das curvas integrais na vizinhança de $p_{C_2} = (1, 0)$	123

4.12 - Análise do infinito	125
4.13 - Projeções sucessivas de uma vizinhança de B^* e α^* e sua imagem final em α	126
4.14 - Imagens em $\bar{\Gamma} \cup \bar{K}$ das vizinhanças de $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $p_{c_2} = (1, 0)$	127
4.15 - Comportamento global das curvas integrais do sistema (4.1)	129
4.16 - Representação no círculo projetado de regiões com energia negativa	131
4.17 - Transição de fase	132

INTRODUÇÃO

A tentativa de compreender o Universo e sua dinâmica, tem atraído através de séculos a atenção de inúmeros pesquisadores de diversas áreas. O estabelecimento de uma linguagem matemática precisa para a descrição do Cosmos, resultado direto das investigações de A. Einstein sobre a gravitação, possibilitou um grande avanço na criação e discussão de modelos em Cosmologia. Os critérios utilizados na elaboração destes modelos são de caráter físico, matemático e filosófico e naturalmente tendem a se alterar à medida que estendemos nosso conhecimento. Atualmente, o pequeno número de observações astronômicas capazes de decidir entre um ou outro modelo em Cosmologia, cria espaço para uma grande quantidade de propostas que ao serem desenvolvidas às suas últimas consequências, nos levam à formação de conceitos sobre o Universo, alguns bastante distintos dos tradicionais. Assim, uma das questões cuja solução via observação astronômica é hoje em dia, e possivelmente para sempre, impossível e que tem merecido grande atenção é o da existência de uma singularidade cosmológica.

Um grande número de cientistas concorda que o modelo singular idealizado por Friedman no início do século, reúne hoje condições para uma explicação viável à criação e evolução do Cosmos até nossos dias e o toma como base para o desenvolvimento de outras áreas do nosso conhecimento.

No entanto, as dificuldades que este modelo enfrenta gera condições para que propostas alternativas sejam consideradas, resultando em um quadro complexo cuja compreensão total está longe de ser obtida. Um dos problemas apresentados pelo modelo singular é sua dificuldade em explicar o alto grau de isotropia observado nos nossos dias, revelado em precisas medidas da radiação de fundo que aparentemente permeia todo o Universo e que chega até nós sob forma de um espectro térmico característico da temperatura de 2.7K. Interpretada como herança da fase mais compactada do Cosmos, esta radiação confirmaria o modelo expansionista com início singular idealizado por Friedman. Entretanto, sabemos que em modelos cosmológicos desta natureza o problema de horizontes se faz presente, isto é, o modelo prevê a existência de regiões do espaço-tempo causalmente desconectadas, fato que impediria o contato de todo o conteúdo energético e sua consequente termalização. É natural portanto nos perguntarmos como regiões que nunca estiveram em contato contribuíram para compor esta radiação perfeitamente isotrópica que hoje observamos. Os procedimentos adotados pelos cosmólogos na tentativa de eliminar estes problemas tem sido diversos.

Uma possibilidade é questionar a própria existência de uma região singular no modelo, uma vez que sua presença gera o desconforto de estabelecer um limite além do qual as leis da física, na sua atual formulação, não podem ser aplicadas. Uma investigação sistemática sobre modelos que não apresentam singularidade tem sido realizada pelo Grupo de Gravitação e Cosmologia do CBPF, resultando em uma série de trabalhos^(1,2,3)

onde a introdução de termos extras à lagrangeana cosmológica de Einstein, representando o acoplamento não mínimo da gravitação com o campo eletromagnético bem como por outro lado a utilização de fluidos dissipativos como fonte de curvatura, mostraram-se eficientes mecanismos para evitar o colapso do Universo.

Uma outra atitude possível é procurar dentro do esquema tradicional, alterações que nos levariam a resolver algumas de suas dificuldades. A utilização de fluidos dissipativos para modelar o conteúdo energético do Universo é uma das modificações capazes de enriquecer conceitualmente o quadro de pesquisas em Cosmologia, fornecendo indicação para a solução de alguns de seus problemas.

Neste trabalho estudaremos o comportamento de um fluido Stokesiano, que identificaremos ao fluido cosmológico e mostraremos ser possível a existência de um mecanismo de transição entre as fases anisotrópica e isotrópica do Universo. Para isto, investigamos os estados de equilíbrio deste fluido, obtidos através da minimização da função que descreve a energia livre devido à interação gravitacional entre suas partes. Esta função, construída para o caso gravitacional em analogia ao já bem estudado caso do campo magnético, fornece estados de equilíbrio cuja caracterização relativa ao grau de anisotropia depende do valor de um parâmetro característico do fluido denominado fator de expansão (θ), cuja dinâmica é fornecida pelas equações de Einstein. Deparâmo-nos aqui com a interessante possibilidade de auto-estruturação do conteúdo energético, induzida pela interação gravitacional.

Com o objetivo de observar o efeito descrito acima

em uma geometria do tipo Bianchi I, realizamos um estudo do sistema de equações de Einstein para o modelo em questão. Estas equações, reduzidas a um sistema autônomo não linear de segunda ordem e analisadas segundo as técnicas que compõem a chamada análise qualitativa, confirma a possibilidade de alterações dos estados de anisotropia ao longo da evolução do parâmetro de expansão do sistema.

O resultado obtido nos motiva a pensar neste mecanismo como uma alternativa possível à explicação da existência de uma fase completamente isotrópica como a que observamos hoje.

CAPÍTULO I

TRANSIÇÃO DE FASE

1.1 - OBSERVADORES FUNDAMENTAIS

Ao longo deste trabalho admitiremos como hipótese básica a validade das equações de Einstein para a gravitação que relacionam o conteúdo energético do Universo com alterações das propriedades métricas do espaço-tempo. Caracterizaremos esta distribuição de energia como um fluido hidrodinâmico, sobre o qual construiremos um campo de observadores que chamaremos de fundamentais.

Se utilizarmos uma escala de observação onde os aglomerados de galáxias desempenham o papel de "partículas elementares" na aproximação de continuum citada acima, fica definido em cada ponto do espaço-tempo um campo de velocidades $V^\alpha(x^\mu)$, representando a velocidade média do conteúdo material no ponto considerado. Temos portanto definida uma classe de observadores, aqueles que em cada ponto do espaço-tempo se movimentam com a velocidade média da matéria, denominados de observadores fundamentais (4).

As trajetórias percorridas no espaço-tempo pelas partículas do fluido são denominadas de linhas de Universo. Em cada ponto desta trajetória, um observador movendo-se ligado a estas partículas é capaz de definir um espaço tridimensional

(aquele que ele ocupa) e uma direção temporal caracterizada por duas regiões: o seu passado e o seu futuro (Fig. 1.1).

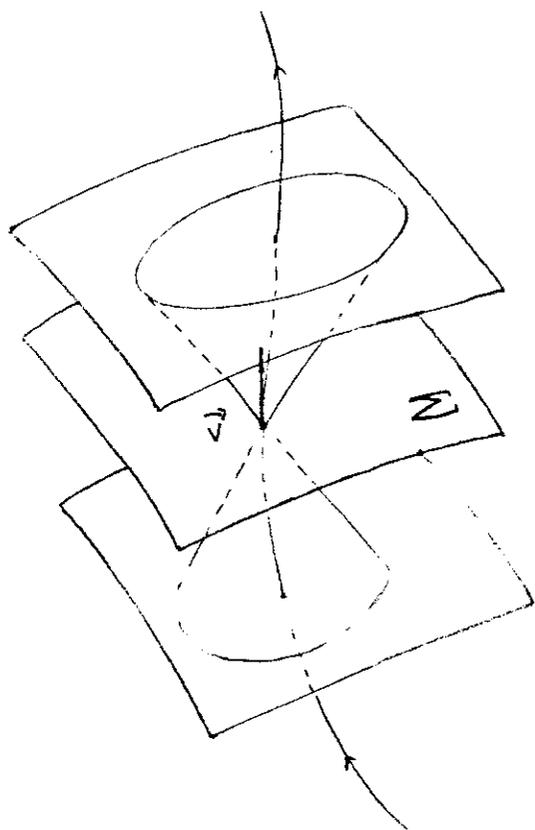


FIGURA 1.1 - Linha de Universo e hipersuperfícies tridimensionais de repouso instantâneo para as partículas do fluido.

Um deslocamento in finitesimal dx^α no espaço - -tempo pode agora ser decomposto em duas componentes distintas ⁽⁵⁾; uma na direção do vetor velocidade V^α e outra no subespaço tridimensional Σ cujos vetores são ortogonais a V^α ($\vec{W} \in \Sigma \rightarrow \langle \vec{W}, \vec{V} \rangle = 0$).

Seja dx^α este deslocamento arbitrário no espaço-tempo:

$$dx^\alpha = aV^\alpha + b^\alpha \quad (1.1)$$

nal a V^α (Fig. 1.2):

$$b^\alpha V_\alpha = 0 \quad (1.2)$$

Podemos, sem perda de generalidade, normalizar a quadrivelocidade:

$$V^\alpha V_\alpha = 1 \quad (1.3)$$

Temos portanto:

$$a = \frac{V_\alpha dx^\alpha}{|\vec{V}|^2} = V_\alpha dx^\alpha \quad (1.4)$$

$$b^\alpha = dx^\alpha - (V_\beta dx^\beta) V^\alpha = (\delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta) dx^\beta \quad .$$

$$b^\alpha = h^\alpha_\beta dx^\beta \quad (1.5)$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta \quad (1.6)$$

A matriz h^α_β funciona como um projetor no subespaço tridimensional (espaço de repouso do observador comóvel).

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\rho = h^\alpha_\rho \quad (\hat{h}^2 = \hat{h}) \quad (1.7)$$

Tomemos agora $g_{\mu\nu}(x)$ como a métrica do espaço-tempo. O elemento invariante desta geometria é dado por:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Realizando a decomposição dos deslocamentos infinitesimais dx^μ segundo os observadores comóveis ao fluido de velocidade \vec{V} , temos:

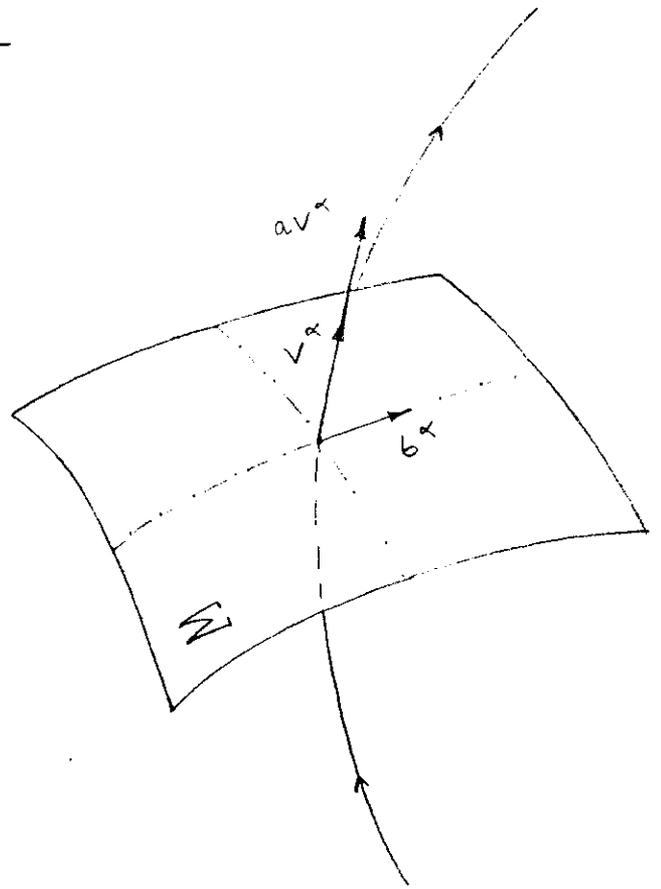


FIGURA 1.2 - Decomposição de um deslocamento infinitesimal na direção paralela e ortogonal ao vetor velocidade.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} (aV^\mu + b^\mu) (aV^\nu + b^\nu) = \\ &= g_{\mu\nu} (a^2 V^\mu V^\nu + aV^\mu b^\nu + aV^\nu b^\mu + b^\mu b^\nu) \\ &= a^2 (V^\mu V_\mu)^2 + g_{\mu\nu} b^\mu b^\nu = a^2 + dl^2 \end{aligned}$$

$$ds^2 = a^2 + dl^2 \quad (1.8)$$

dl^2 é a distância elementar no espaço tridimensional;

$$dl^2 = g_{\mu\nu} b^\mu b^\nu = g_{\mu\nu} (h^\mu_\rho dx^\rho) (h^\nu_\gamma dx^\gamma) = (h^\mu_\rho g_{\mu\nu} h^\nu_\gamma) dx^\rho dx^\gamma$$

$$d\ell^2 = h_{\rho\gamma} dx^\rho dx^\gamma \quad . \quad (1.9)$$

A expressão acima mostra que o projetor desempenha o papel de métrica no subespaço tridimensional.

Façamos agora, a decomposição do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ em suas componentes projetadas na direção e ortogonalmente ao campo $V^\beta(x)$. Projetando um dos índices na direção de V^β obtemos o vetor, $T_{\alpha\beta}V^\beta$, que por sua vez possui componentes na direção paralela e ortogonal a V_α .

$$T_{\alpha\beta}V^\beta = AV_\alpha + q_\alpha \quad (1.10)$$

$$q_\alpha V^\alpha = 0 \quad (1.11)$$

$$V_\alpha V^\alpha = 1$$

$$T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = AV_\alpha V^\alpha + q_\alpha V^\alpha = A \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} q_\alpha &= T_{\alpha\beta}V^\beta - AV_\alpha = T_{\alpha\beta}V^\beta - (T_{\gamma\beta}V^\gamma V^\beta)V_\alpha \\ &= T_{\gamma\beta}(\delta_\alpha^\gamma - V^\gamma V_\alpha)V^\beta = h_\alpha^\gamma T_{\gamma\beta}V^\beta \end{aligned}$$

$$q_\alpha = h_\alpha^\gamma T_{\gamma\beta}V^\beta \quad (1.13)$$

A projeção de um dos índices no espaço de repouso do observador nos fornece o tensor $T_{\alpha\beta}h^\beta_\lambda$; se projetarmos este tensor agora na direção de V^α encontraremos

$$V^\alpha T_{\alpha\beta}h^\beta_\lambda = q_\lambda \quad ,$$

grandeza já obtida anteriormente.

Uma segunda projeção de $T_{\alpha\beta}h^\beta_\lambda$ no subespaço tridimen-

sional nos fornece um novo objeto:

$$h_{\rho}^{\alpha} T_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\lambda} = M_{\rho\lambda} \quad (1.14)$$

$M_{\rho\lambda}$ é uma matriz simétrica que pode ser decomposta na soma de suas partes irredutíveis.

$$M_{\rho\lambda} = h_{\rho}^{\alpha} T_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\lambda} = \Pi_{\rho\lambda} + B h_{\rho\lambda} \quad (1.15)$$

$$\Pi_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (1.16)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0 \quad (1.17)$$

$$\Pi_{\rho\lambda} = h_{\rho}^{\alpha} T_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\lambda} - B h_{\rho\lambda} \quad (1.18)$$

Tomando o traço desta equação e utilizando as propriedades do projetor obtemos:

$$B = \frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \quad (1.19)$$

$$\Pi_{\rho\lambda} = h_{\rho}^{\alpha} T_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\lambda} - \frac{1}{3} (T_{\lambda\sigma} h^{\lambda\sigma}) h_{\rho\lambda} \quad (1.20)$$

Nenhuma outra nova projeção pode ser feita, indicando serem os objetos, $\{A, q_{\alpha}, B, \Pi_{\alpha\beta}\}$ suficientes para a decomposição desejada.

Concluimos portanto, ser sempre possível a decomposição do tensor momentum-energia nas seguintes partes:

$$T_{\alpha\beta} = A V_{\alpha} V_{\beta} + B h_{\alpha\beta} + q_{\alpha} V_{\beta} + q_{\beta} V_{\alpha} + \Pi_{\alpha\beta} \quad .$$

A interpretação usual para cada um dos termos é fornecida a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta & = \text{densidade de energia } (\rho) \\ B = \frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} & = \text{pressão escalar } (p) \\ q_\alpha = T_{\gamma\beta} h^\beta_\alpha V^\gamma & = \text{fluxo de energia} \\ \Pi_{\alpha\beta} = h_\alpha^\gamma h_\beta^\rho T_{\gamma\rho} - \frac{1}{3} (T_{\gamma\rho} h^{\gamma\rho}) h_{\alpha\beta} & = \text{pressão anisotrópica} \end{array} \right.$$

$$q_\alpha V^\alpha = 0$$

$$\Pi^\alpha_\alpha = 0$$

$$\Pi^\alpha_\beta V^\beta = 0$$

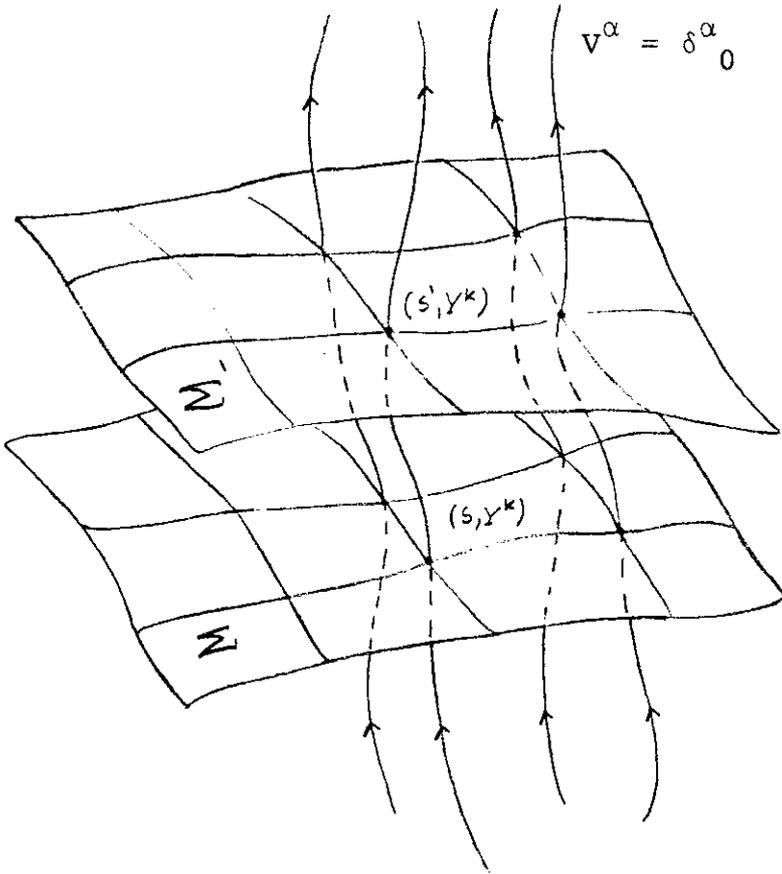
A partir daqui adotaremos a seguinte expressão para o tensor momentum-energia

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu + p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

Tomemos agora $\{x^\alpha\}$ como coordenadas arbitrárias do espaço-tempo. Associado aos observadores fundamentais descritos anteriormente, vamos construir um sistema de coordenadas de maneira que o campo de velocidades V^α seja expresso de uma forma bem simples (6,7). Para isto escolhemos uma seção espacial arbitrária do espaço-tempo e nele fixamos um sistema de coordenadas $\{y^k\}$. Cada partícula do fluido que ocupa esta seção possui agora um conjunto de números que representam sua posição nestas coordenadas. À medida que o tempo avança as partículas do fluido percorrem sucessivas seções espaciais onde as coordenadas $\{y^k\}$ também estão definidas. Ao atribuírmos em todas as seções espaciais percorridas a partir da inicial o mesmo valor das coordenadas $\{y^k\}$ às mesmas partículas do fluido, obtemos que as linhas de fluxo do fluido no espaço-tempo são descritas neste sistema

de coordenadas pelas curvas $y^k = \text{cte}$. A coordenada temporal é determinada através da medida do tempo próprio (a partir da seção espacial inicial) ao longo das linhas de fluxo do fluido. Desta maneira fica definido um sistema de coordenadas que chamaremos de comóvel (Fig. 1.3), caracterizado pelo conjunto de números, (s, y^k) onde o vetor velocidade assume a forma

$$v^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (1.22)$$



Suponhamos um conjunto de linhas de fluxo do fluido, que intercepta uma dada seção espacial Σ . Nesta seção, o valor dos parâmetros afim s_i que representam o tempo próprio sobre cada uma das linhas não coincidem necessariamente. Vamos definir um vetor $\vec{\eta}$ chamado de vetor conexão cuja função é ligar duas curvas com o mesmo valor de s . Este vetor expresso

FIGURA 1.3 - Sistema Comóvel.

As linhas de fluxo do fluido em um sistema comóvel são descritas pela equação $y^k = \text{cte} \forall s$.

no sistema de coordenadas comóvel tem componentes $(0, \delta y^k)$, uma vez que liga duas curvas com mesmo valor do parâmetro s , descritas pelas equações $y^k = \text{cte}$ e $y^k + \delta y^k = \text{cte}$. A utilização de coordenadas arbitrárias $\{x^\alpha\}$ para o espaço-tempo nos permite escrever as componentes de $\vec{\eta}$ da seguinte maneira:

$$\eta^\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \quad (1.23)$$

Calculando a derivada covariante deste vetor ao longo das linhas de Universo do fluido obtemos:

$$\frac{D}{Ds} \dot{\eta}^\alpha \equiv \eta^\alpha \parallel_\rho v^\rho = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \parallel_\rho v^\rho \quad (1.24)$$

$$\dot{\eta}^\alpha = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \parallel_\rho v^\rho + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) v^\rho$$

$$\dot{\eta}^\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} \quad (1.25)$$

Desenvolvendo a primeira parcela do lado direito do sinal de igualdade temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k + \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\rho} (\delta \mathbf{y}^k) \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{s}} \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k + \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} (\delta \mathbf{y}^k) \end{aligned}$$

Mas, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} (\delta \mathbf{y}^k) = 0$ pela nossa definição de sistema comóvel;

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{s}} \right) \frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \quad (1.26)$$

Colocando em evidência o fator comum ficamos com:

$$\dot{\eta}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{s}} \right) + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{\partial \mathbf{x}^\rho}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (1.27)$$

$$\dot{\eta}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^\sigma}{\partial \mathbf{y}^k} \delta \mathbf{y}^k v^\alpha \parallel_\sigma \quad (1.28)$$

$$\eta^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^k} \delta y^k$$

$$\dot{\eta}^\alpha = V^\alpha_{||\sigma} \eta^\sigma \tag{1.29}$$

$$\dot{\eta}^\alpha = \eta^\alpha_{||\sigma} V^\sigma \tag{1.30}$$

Igualando as duas últimas expressões acima temos:

$$V^\alpha_{||\sigma} \eta^\sigma - \eta^\alpha_{||\sigma} V^\sigma = 0 \iff \mathcal{L}_{\vec{V}} \vec{\eta} = 0 \tag{1.31}$$

Vemos portanto que dado o vetor $\vec{\eta}$ em uma determinada seção espacial, podemos construir o campo $\vec{\eta}(x)$ ao longo das curvas descritas pelas partículas através do transporte de Lie para um vetor. A ação do projetor \hat{h} sobre o vetor conexão determina, na seção espacial Σ , um outro vetor que denotaremos $\vec{\eta}_\perp$, que nos fornece informação sobre a posição relativa entre duas curvas (Fig. 1.4). A partir deste vetor po

demus obter imediata - mente a velocidade relativa de afastamento em Σ de duas curvas vizinhas. Denotando esta velocidade relativa por \vec{v}_r temos:

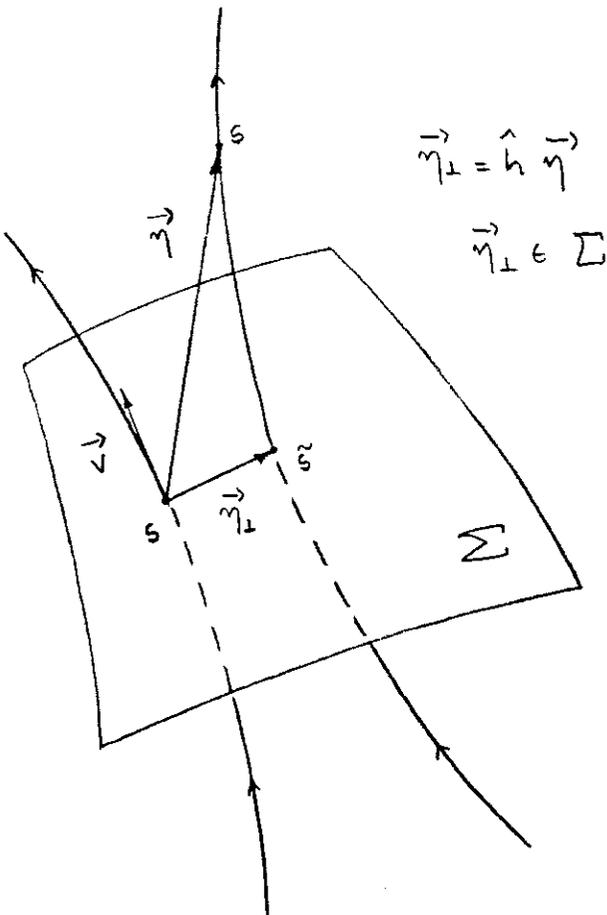


FIGURA 1.4 - Vetor conexão e sua projeção em Σ .

$$v_r^\alpha = h^\alpha_\beta [\eta^\beta_{||\rho} v^\rho] = h^\alpha_\beta [\dot{\eta}^\beta_{||\rho}] = h^\alpha_\beta \left[\frac{D}{Ds} (\eta^\beta_{||\rho}) \right] \quad (1.32)$$

$$= h^\alpha_\beta \left[\frac{D}{Ds} (h^\beta_\rho \eta^\rho) \right] = h^\alpha_\beta \left[\frac{D}{Ds} (h^\beta_\rho) \eta^\rho + h^\beta_\rho \frac{D}{Ds} (\eta^\rho) \right]$$

$$= h^\alpha_\beta \left[\frac{D}{Ds} [(\delta^\beta_\rho - v_\rho v^\beta)] \eta^\rho \right] + h^\beta_\rho \frac{D\eta^\rho}{Ds}$$

$$= h^\alpha_\beta [-\dot{v}_\rho v^\beta \eta^\rho - v_\rho \dot{v}^\beta \eta^\rho + h^\beta_\rho \dot{\eta}^\rho] \quad h^\alpha_\mu v^\mu = 0 \quad (1.33)$$

$$\hat{h}^2 = \hat{h}$$

$$v_r^\alpha = -h^\alpha_\beta \dot{v}^\beta v_\rho \eta^\rho + h^\alpha_\rho \dot{\eta}^\rho \quad (1.34)$$

Usando agora a expressão obtida anteriormente, $\xi_{\vec{\eta}} = 0$,
temos:

$$\dot{\eta}^\rho = v^\rho_{||\epsilon} \eta^\epsilon \quad (1.35)$$

Substituindo na eq. (1.34):

$$v_r^\alpha = -h^\alpha_\beta v_\epsilon \eta^\epsilon v^\beta_{||\sigma} v^\sigma + h^\alpha_\rho v^\rho_{||\epsilon} \eta^\epsilon \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} v_r^\alpha &= h^\alpha_\beta (-v_\epsilon v^\beta_{||\sigma} v^\sigma + v^\beta_{||\epsilon}) \eta^\epsilon \\ &= h^\alpha_\beta [(\delta^\sigma_\epsilon - v_\epsilon v^\sigma) v^\beta_{||\sigma}] \eta^\epsilon = h^\alpha_\beta v^\beta_{||\sigma} h^\sigma_\epsilon \eta^\epsilon \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$v_r^\alpha = Q^\alpha_\epsilon \eta^\epsilon \quad (1.38)$$

$$Q^\alpha_\epsilon = h^\alpha_\beta v^\beta_{||\sigma} h^\sigma_\epsilon \quad (1.39)$$

$$\vec{v}_r = \hat{Q} \vec{\eta} \quad (1.40)$$

O tensor Q^α_β contém informação sobre alterações da distância relativa em Σ entre duas linhas de fluxo do fluido. Sendo um tensor de segunda ordem pode ser decomposto em suas par -

tes irredutíveis:

$$Q_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta} \quad (1.41)$$

$$\theta = \text{Tr}[Q_{\alpha\beta}] = \text{fator de expansão} \quad (1.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} = \text{tensor de distorção} \\ W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\alpha}) = \text{tensor de rotação} \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Os objetos acima estão sujeitos aos vínculos:

$$\sigma_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (1.45)$$

$$\sigma_{\alpha}^{\beta} V^{\beta} = 0 \quad (1.46)$$

$$W_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (1.47)$$

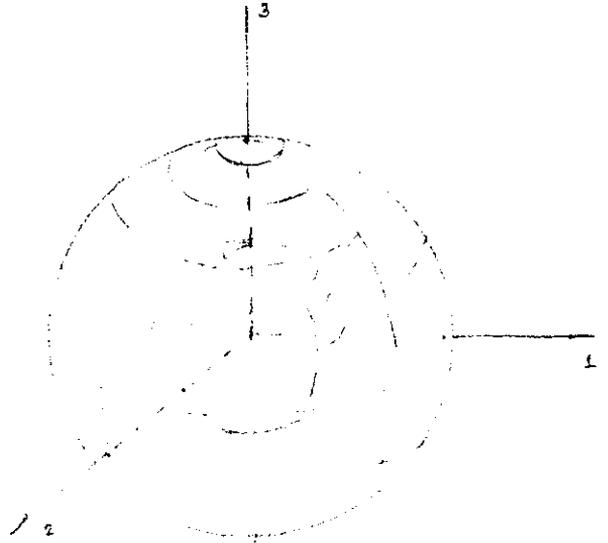
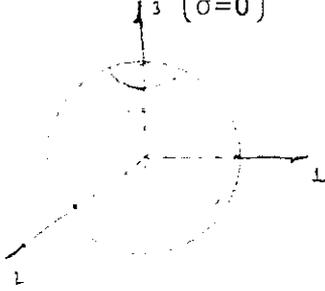
$$W_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0 \quad (1.48)$$

Os escalares θ , $\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}}$ e $W = \frac{1}{2} \sqrt{W_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}}$ são denominados de parâmetros cinemáticos do fluido e desempenham um importante papel na caracterização dos modelos cosmológicos.

Podemos descrever de maneira bem simples o efeito resultante da presença dos parâmetros cinemáticos em um fluido, analisando como um elemento esférico do mesmo se altera à medida que o tempo próprio sofre incremento. Um cálculo simples, mostra o efeito de cada um dos parâmetros considerados isoladamente.

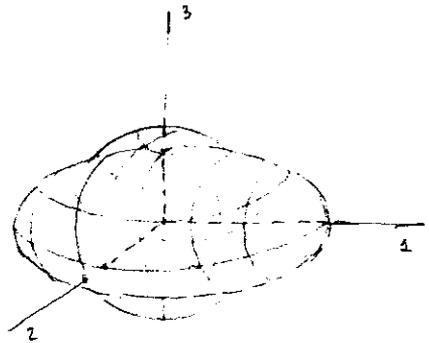
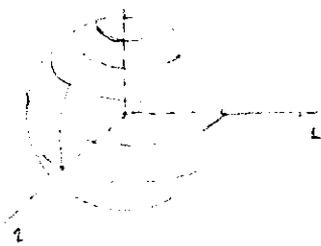
Apresentamos a seguir os resultados de forma esquemática:

- Ação de θ ($W=0$
 $\sigma=0$)



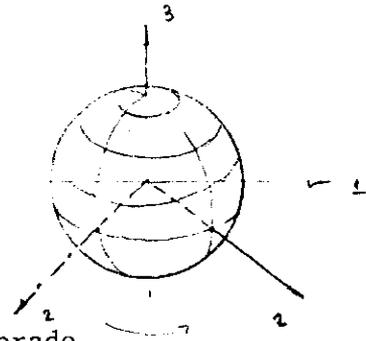
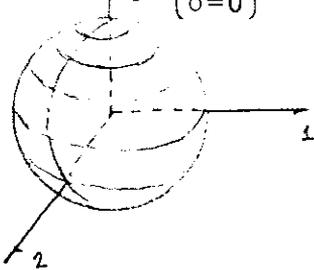
- Alteração do volume da esfera.
- Orientação dos eixos mantida.

- Ação de σ ($\theta=0$
 $W=0$)



- Volume e direção dos eixos principais do tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ inalterados.
- Alteração nas distâncias ao longo dos eixos principais resultando na deformação da esfera em um elipsóide.

- Ação de W ($\theta=0$
 $\sigma=0$)



- Volume inalterado.
- Rotação rígida na esfera deixando uma direção fixa.

Em modelos cosmológicos, a informação sobre o grau de anisotropia ao longo das linhas de Universo é fornecida pela matriz $\hat{\sigma}$. Como vimos, $\sigma_{\alpha\beta} = (\hat{\sigma})_{\alpha\beta}$ é um tensor simétrico de segunda ordem com traço nulo, sendo portanto sempre possível encontrar uma representação em que ele assume a forma diagonal. Vamos tomar como representação de $\hat{\sigma}$ a seguinte matriz:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\Sigma + \Sigma') & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\Sigma - \Sigma') & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix}$$

Nesta parametrização a condição de traço nulo é automaticamente satisfeita.

$$\text{Tr}[\hat{\sigma}] = \sigma_{\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{2}(\Sigma + \Sigma') - \frac{1}{2}(\Sigma - \Sigma') + \Sigma = 0$$

A correspondência entre o grau de anisotropia e o número de autovalores distintos da matriz $\hat{\sigma}$ é imediata:

3 autovalores diferentes:

$$A = -\frac{1}{2}(\Sigma + \Sigma'), \quad B = -\frac{1}{2}(\Sigma - \Sigma') \quad \text{e} \quad C = \Sigma.$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{- anisotropia ao longo das 3 direções principais}$$

2 autovalores diferentes:

$$-\frac{1}{2}\Sigma, \quad -\frac{1}{2}\Sigma \quad \text{e} \quad \Sigma$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} - \text{ isotropia em} \\ \text{um plano} \end{array}$$

Todos autovalores iguais:

$$0, 0, 0$$

$$\hat{\sigma} = \hat{0} \quad \begin{array}{l} - \text{ isotropia em todas as dire} \\ \text{ções.} \end{array}$$

1.2 - FLUIDOS STOKESIANOS

A consideração de efeitos gerados por fluidos viscosos em Cosmologia (8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18), tornou possível o exame de situações mais complexas, até então ignoradas pelos modelos de fluido perfeito. Neste espírito, a idéia de uma fase do Universo com estrutura altamente anisotrópica foi cogitada, juntamente com a sugestão de que a viscosidade pudesse ser um eficiente mecanismo para eliminá-la. O esquema descrito, teria a vantagem de considerar estágios iniciais completamente arbitrários para o Cosmos. Outra sugestão apresentada foi a de relacionar a criação de partículas em um campo gravitacional não estacionário ao comportamento viscoso do fluido que descreveria fenomenologicamente o processo. Termos de viscosidade encontraram também aplicação na elaboração de modelos sem singularidade (9,10).

Uma análise sistemática de modelos cosmológicos viscosos pode ser efetuada através da consideração de fluidos Stoke-

sianos cuja definição como veremos a seguir, cobre os casos discutidos anteriormente por outros autores e abre a possibilidade de considerarmos situações mais gerais.

Definimos um fluido como sendo do tipo Stokesiano (14, 15, 18) quando seus objetos dinâmicos podem ser expressos como funcionais do fator de expansão θ e do tensor de distorção $\sigma_{\mu\nu}$ ("shear").

Tomemos a expressão do tensor momentum-energia para o fluido galático definida anteriormente (sem o termo de propagação de energia que a partir daqui deixaremos de considerar ; $q^\mu = 0$):

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} \tag{1.49}$$

$$p = p_{th} + \Pi \tag{1.50}$$

Π é a contribuição isotrópica dos efeitos viscosos; p_{th} é a pressão térmica.

Pela definição de fluido de Stokes enunciada acima temos:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} [\theta, \sigma_{\mu\nu}] \tag{1.51}$$

$$\Pi = \Pi[\theta, \sigma_{\mu\nu}] \tag{1.52}$$

A expressão mais geral para $\Pi_{\mu\nu}$, de acordo com a teoria das matrizes 3x3, é dada por:

$$\Pi_{\mu\nu} = f_1 h_{\mu\nu} + f_2 \sigma_{\mu\nu} + f_3 \sigma_{\mu\rho} \sigma^\rho_\nu \tag{1.53}$$

Os coeficientes escalares f_k são definidos através de polinômios envolvendo os invariantes da matriz de dilatação:

$$(\hat{\theta})_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad (1.54)$$

$$f_k = f_{k_0} + f_{k_1} I_1 + \left[f_{k_2}^A (I_1)^2 + f_{k_2}^B (I_2) \right] + \\ + \left[f_{k_3}^A (I_1)^3 + f_{k_3}^B (I_1) \cdot (I_2) + f_{k_3}^C (I_3) \right] + \dots \quad (1.55)$$

I_1 , I_2 e I_3 são os invariantes canônicos de $\hat{\theta}$ definidos como segue:

$$I_1 = \text{Tr}[\hat{\theta}] = \theta \quad (1.56)$$

$$I_2 = \text{Tr}[\hat{\theta}^2] = \sigma^2 + \frac{1}{3} \theta^2 \quad (1.57)$$

$$I_3 = \text{Tr}[\hat{\theta}^3] = \sigma^3 + \theta\sigma^2 + \frac{1}{9} \theta^3 \quad (1.58)$$

$$\sigma^k = \text{Tr} [\hat{\sigma}^k] \quad (1.59)$$

Veremos em seguida como um fluido Stokesiano contribui para a elaboração de um processo capaz de eliminar do Cosmos anisotropias eventualmente presentes em fase anterior à que observamos hoje.

1.3 - TRANSIÇÃO ENTRE AS FASES ANISOTRÓPICA E ISOTRÓPICA DO FLUIDO

A passagem de uma fase anisotrópica para uma fase isotrópica em um fluido, pode ser descrita em termos de um parâmetro macroscópico denominado de parâmetro de ordem (ξ). A fase

isotrópica, identificada pelo maior grau de simetria e menor organização, é caracterizada pelo valor nulo do parâmetro de ordem ($\xi = 0$). A fase anisotrópica, menos simétrica, mais organizada, caracteriza-se por $\xi \neq 0$.

Como estamos interessados na evolução da anisotropia do fluido cosmológico e seu eventual desaparecimento dando lugar a uma fase completamente simétrica, é natural escolhermos como parâmetro de ordem o tensor de distorção $\sigma_{\alpha\beta}$ ("shear"). Assim, de acordo com o que já vimos anteriormente, teríamos:

$\sigma_{\alpha\beta} \neq 0$ - fase anisotrópica, menos simétrica;

$\sigma_{\alpha\beta} = 0$ - fase isotrópica, completamente simétrica.

Para compreendermos como esta passagem pode ser efetivada, vamos utilizar a teoria de L. Landau⁽¹⁹⁾ sobre o comportamento da matéria sujeita a uma transição de fase de segunda espécie (sem alterações descontínuas em seu estado). O ponto de partida desta teoria é a expansão da função energia livre em termos do parâmetro de ordem. Esta função pode ser considerada como a generalização da energia livre para situações de não equilíbrio.

Para prosseguirmos com nossa análise é necessário investigar as configurações de equilíbrio do fluido em questão, levando em conta o campo gravitacional que ele gera. Os estados de equilíbrio podem ser obtidos através da procura dos pontos de mínimo da função energia livre, $F = E - TS$. Quanto à influência da gravitação na energia livre de um sistema (e consequentemente em seus estados de equilíbrio), devido à impossibilidade de obtermos informações precisas via experimentação

direta, lançamos mão da analogia com o campo magnético. No caso do campo magnético a seguinte expressão, que nos fornece o incremento de F na presença do campo H_μ , se mostra adequada na explicação dos dados experimentais relativos aos materiais comuns (20):

$$F = F_0 + (\Delta F)_{\text{mag}} \quad (1.60)$$

$$(\Delta F)_{\text{mag}} = \gamma H_\mu H_\nu \sigma^{\mu\nu} \quad (1.61)$$

O tensor momentum-energia do campo magnético pode ser escrito em termos da decomposição apresentada anteriormente:

$$(T_{\mu\nu})_{\text{mag}} = \rho V_\mu V_\nu - \frac{1}{3} \rho h_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} \quad (1.62)$$

Aqui, os seguintes termos desempenham o papel de pressão anisotrópica:

$$\Pi_{\mu\nu} = -H_\mu H_\nu + \frac{1}{3} H^2 h_{\mu\nu} \quad (1.63)$$

Observamos a seguir, que a expressão para o acréscimo da energia livre de um dado material na presença do campo magnético pode ser reproduzida a partir da contração dos tensores $(T_{\mu\nu})_{\text{mag}}$ e $\sigma_{\mu\nu}$; de fato,

$$(T_{\mu\nu})_{\text{mag}} \sigma^{\mu\nu} = (\rho V_\mu V_\nu - \frac{1}{3} \rho h_{\mu\nu} - H_\mu H_\nu + \frac{1}{3} H^2 h_{\mu\nu}) \quad (1.64)$$

Utilizando as propriedades de $\sigma^{\mu\nu}$ temos:

$$(T_{\mu\nu})_{\text{mag}} \sigma^{\mu\nu} = -H_\mu H_\nu \sigma^{\mu\nu} \quad (1.65)$$

Podemos então escrever:

$$(\Delta F)_{\text{mag}} = - \gamma (T_{\mu\nu})_{\text{mag}} \sigma^{\mu\nu} . \quad (1.66)$$

Uma vez que as equações de Einstein relacionam o conteúdo energético com aspectos geométricos do espaço-tempo, podemos escrever a expressão para o incremento da energia livre de uma forma puramente geométrica, generalizada para o tratamento de qualquer tipo de interação que dependa do parâmetro macroscópico de ordem $\sigma^{\mu\nu}$:

$$\Delta F = \gamma R_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} . \quad (1.67)$$

Para o caso do campo gravitacional as considerações acima induzem-nos a escrever:

$$(\Delta F)_G = \gamma R_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} . \quad (1.68)$$

A utilização das equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) , \quad (1.69)$$

para um fluido arbitrário,

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} \quad (1.70)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu}[\theta, \sigma_{\mu\nu}] , \quad (1.71)$$

permite-nos escrever:

$$(\Delta F)_G = \gamma (\Pi_{\mu\nu}[\theta, \sigma_{\mu\nu}]) \sigma^{\mu\nu} . \quad (1.72)$$

Vamos considerar agora um fluido Stokesiano particu -

lar, cuja expressão para a pressão anisotrópica é dada pela fórmula:

$$\Pi_{\mu\nu} = \xi(\theta, \sigma) h_{\mu\nu} + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{\mu\nu} + \delta \sigma_{\mu\alpha} \sigma_{\nu}^{\alpha} \quad (1.73)$$

A expressão para o acréscimo de energia livre gerada pela interação gravitacional pode então ser escrita como:

$$(\Delta F)_G = -\gamma [(\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{\mu\nu} + \delta \sigma_{\mu\alpha} \sigma_{\nu}^{\alpha}] \sigma^{\mu\nu} \quad (1.74)$$

$$(\Delta F)_G = -\gamma [(\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma^2 + \delta \sigma^3] \quad (1.75)$$

onde,

$$\sigma^k = \text{Tr}[\tilde{\sigma}^k] \quad (1.76)$$

Redefinimos aqui as constantes por simples conveniência didática:

$$\alpha_0 = a^2 \theta^* \quad (1.77)$$

$$\alpha_1 = -a^2 \quad (1.78)$$

$$\gamma = -m^2 \quad (1.79)$$

Substituindo na expressão para $(\Delta F)_G$, ficamos finalmente com:

$$(\Delta F)_G = m^2 [(-a^2(\theta - \theta^*) + \beta \sigma^2) \sigma^2 + \delta \sigma^3] \quad (1.80)$$

Para simplificar o tratamento do problema vamos nos restringir ao caso de isotropia no plano. Como vimos anteriormente, isto implica na forma simplificada para $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\Sigma & \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Para esta matriz temos:

$$\sigma^2 = \text{Tr}[\hat{\sigma}^2] = \frac{3}{2} \Sigma^2 \quad (1.82)$$

$$\sigma^3 = \text{Tr}[\hat{\sigma}^3] = \frac{3}{4} \Sigma^3 \quad . \quad (1.83)$$

A utilização dos valores acima em $(\Delta F)_G$ nos fornece a forma final da expressão a ser analisada:

$$(\Delta F)_G = 3m^2 \left[\frac{3}{4}\beta\Sigma^4 + \frac{1}{4}\delta\Sigma^3 - \frac{1}{2}a^2(\theta-\theta^*)\Sigma^2 \right] \quad . \quad (1.84)$$

Passamos então ao estudo dos estados de equilíbrio do fluido cuja função energia livre é dada pela expressão ,

$$F = F_0 + (\Delta F)_G$$

onde $(\Delta F)_G$ foi fornecida acima. Observamos que ela está escrita como uma expansão em potências do parâmetro de ordem Σ , o que nos permite seguir de perto o procedimento adotado por Landau.

Como estamos interessados apenas nos efeitos gerados pela gravidade, vamos fazer a hipótese que F_0 não depende de $\sigma_{\mu\nu}$. Da condição de extremo para uma função temos:

$$\frac{\partial F}{\partial \Sigma} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Sigma} [(\Delta F)_G] = 0 \quad (1.85)$$

ou,

$$3m^2(-a^2(\theta-\theta^*) + \frac{3}{4}\delta\Sigma + 3\beta\Sigma^2) = 0 \quad . \quad (1.86)$$

Esta expressão nos fornece duas soluções:

$\Sigma = 0$, correspondendo à fase isotrópica e as possíveis raízes de

$$3\beta\Sigma_0^2 + \frac{3}{4}\delta\Sigma_0 - a^2(\theta-\theta^*) = 0 \quad , \quad (1.87)$$

que correspondem a uma fase anisotrópica. Para que estas raízes existam e sejam reais devemos restringir os valores dos parâmetros envolvidos.

De fato, a existência das raízes reais,

$$\Sigma_{0(1,2)} = \frac{-\frac{3}{4}\delta \pm \sqrt{(\frac{3}{4}\delta)^2 + 4 \cdot (3\beta) \cdot (a^2(\theta-\theta^*))}}{2 \cdot (3\beta)}$$

$$\Sigma_{0(1,2)} = -\frac{\delta}{8\beta} \pm \frac{\delta}{8\beta} \sqrt{1 + \frac{64}{3} \frac{\beta a^2(\theta-\theta^*)}{\delta^2}} \quad (1.88)$$

está ligada à exigência de positividade do discriminante,

$$\frac{9}{16}\delta^2 + 12\beta a^2(\theta-\theta^*) > 0 \quad (1.89)$$

que nos fornece uma condição sobre o parâmetro θ :

$$\theta > \theta^* - \frac{3}{64} \frac{\delta^2}{\beta a^2} \quad (1.90)$$

O resultado obtido indica que a possibilidade de termos uma fase anisotrópica, depende do valor do fator de expansão do Universo.

Prosseguimos investigando a condição para que os va-

lores extremos obtidos sejam mínimos:

$$\frac{\partial^2}{\partial \Sigma^2} [(\Delta F)_G] > 0 \longrightarrow 9\beta \Sigma^2 + \frac{3}{2} \delta \Sigma - a^2(\theta - \theta^*) > 0 \quad (1.91)$$

A equação associada,

$$9\beta \Sigma^2 + \frac{3}{2} \delta \Sigma - a^2(\theta - \theta^*) = 0 \quad (1.92)$$

nos fornece as raízes:

$$\Sigma_{(+,-)} = \frac{-\frac{3}{2} \delta \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\delta\right)^2 + 4(9\beta)(\theta - \theta^*)a^2}}{18\beta}$$

$$\Sigma_{(+,-)} = -\frac{\delta}{12\beta} \pm \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 + \frac{16\beta a^2(\theta - \theta^*)}{\delta^2}} \quad (1.93)$$

A desigualdade (1.91) pode ser colocada na forma,

$$9\beta(\Sigma - \Sigma_{(+)}) (\Sigma - \Sigma_{(-)}) > 0 \quad (1.94)$$

indicando que será satisfeita se tivermos

$$\Sigma > \Sigma_{(+)} \quad \text{ou} \quad \Sigma < \Sigma_{(-)}$$



Portanto, para que os valores extremos $\Sigma_{0(1,2)}$ sejam efetivamente valores de mínimo, devemos ter por exemplo:

$$\Sigma_{0(2)} > \Sigma_{(+)} \quad (1.95)$$

isto é,

$$-\frac{\delta}{8\beta} + \frac{\delta}{8\beta} \sqrt{1 + \frac{64}{3} \frac{\beta a^2 (\theta - \theta^*)}{\delta^2}} > -\frac{\delta}{12\beta} + \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{\frac{1+16\beta a^2 (\theta - \theta^*)}{\delta^2}} \quad (1.96)$$

A desigualdade é satisfeita somente se

$$\theta > \theta^* - \frac{3}{64} \frac{\delta^2}{\beta a^2} \quad (1.97)$$

isto é,

$$\theta > \theta_c \quad (1.97')$$

$$\theta_c = \theta^* - \frac{3}{64} \frac{\delta^2}{\beta a^2} \quad (1.98)$$

O resultado acima nos mostra que na região $\theta_c < \theta < \theta^*$ temos dois mínimos: Σ_0 e $\Sigma = 0$. A condição para que $\Sigma = 0$ represente um mínimo absoluto pode ser escrita como:

$$F(0) < F(\Sigma_0) \quad (1.99)$$

$$F(0) = F_0 \quad (1.100)$$

$$F(\Sigma_0) = F_0 + m^2 \left[\frac{9}{4} \beta \Sigma_0^4 + \frac{3}{4} \delta \Sigma_0^3 - \frac{3}{2} a^2 (\theta - \theta^*) \Sigma_0^2 \right] \quad (1.101)$$

A desigualdade toma a forma:

$$3m^2 \Sigma_0^2 \left[\frac{3}{4} \beta \Sigma_0^2 + \frac{1}{4} \delta \Sigma_0 - \frac{1}{2} a^2 (\theta - \theta^*) \right] > 0 \quad (1.102)$$

$$3m^2 \Sigma_0^2 > 0 \longrightarrow 3\beta \Sigma_0^2 + \delta \Sigma_0 - 2a^2 (\theta - \theta^*) > 0 \quad (1.103)$$

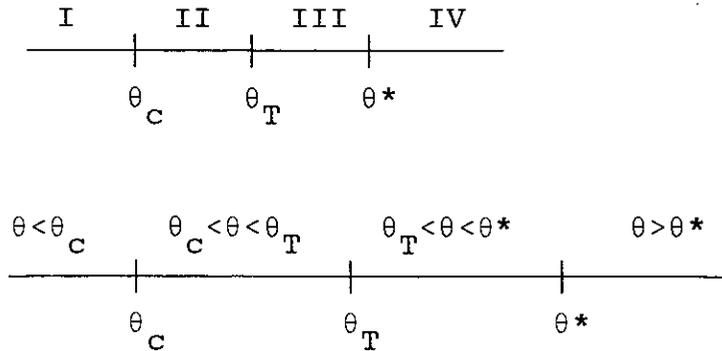
Esta expressão é satisfeita para o seguinte intervalo do fator de expansão:

$$\theta < \theta^* - \frac{\delta^2}{24\beta a^2} \quad (1.104)$$

$$\theta < \theta_T \quad (1.104')$$

$$\theta_T = \theta^* - \frac{\delta^2}{24\beta a^2} \quad (1.105)$$

Os resultados anteriores podem ser resumidos na forma abaixo:



I: Fase isotrópica.

II: Fase isotrópica é a mais estável mas existe mínimo local correspondendo a uma fase anisotrópica.

III: Fase anisotrópica é a mais estável mas existe mínimo local correspondendo à isotropia.

IV: Fase anisotrópica.

Concluimos este capítulo com algumas observações relativas à aplicação das idéias expostas à Cosmologia:

Observamos em primeiro lugar, que os resultados obtidos dependem de algumas hipóteses básicas que enumeramos a seguir:

- i) A validade das equações de Einstein para a gravitação.
- ii) A possibilidade de expressarmos a energia livre de um fluido devido à interação gravitacional, através da expressão geométrica, $(\Delta F)_G = \gamma R_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$.
- iii) A expressão particular adotada para o termo de pressão anisotrópica do fluido Stokesiano que modela o conteúdo energético do Universo.

Vimos que se as hipóteses acima forem adotadas, obtemos como resultado um mecanismo de transição entre as fases isotrópica e anisotrópica do fluido, controlada por um parâmetro de caráter geométrico, o chamado fator de expansão do Universo (θ).

As considerações acima nos permitem sugerir um esquema capaz de justificar o alto grau de isotropia que observamos hoje no Universo. Na sua fase mais compactada, caracterizada em Universos espacialmente homogêneos (mas isotrópicos) por um grande valor do fator de expansão θ , o fluido cosmológico seria descrito por um fluido viscoso que poderia apresentar também valores não nulos para o "shear" ($\sigma_{\mu\nu}$). À medida que o Universo expande o valor de θ diminui até atingir o valor indicado para que se isotropize. A persistir o estado de expansão, o sistema permanecerá isotrópico.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Neste capítulo, com o objetivo de analisarmos as alterações nas propriedades métricas do espaço-tempo geradas pelo fluido Stokesiano particular considerado no capítulo anterior, vamos montar o sistema de equações de Einstein, colocando-o na forma adequada para dois tipos de estudo a serem efetuados a seguir:

- i) a procura de soluções exatas para o sistema;
- ii) análise do sistema autônomo não-linear.

Uma vez que estamos interessados em observar a transição entre fases de diferentes simetrias, escreveremos o sistema de equações de Einstein utilizando o elemento de linha do tipo Bianchi I. Nesta métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad ,$$

as fases do Universo discutidas anteriormente são facilmente caracterizadas. Assim temos, por exemplo:

I) isotropia: $a^2(t) = b^2(t) = c^2(t) = A^2(t)$

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (2.1)$$

II) isotropia em um plano: $a^2(t) \neq b^2(t) = c^2(t) = B^2(t)$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) - B^2(t) [dy^2 + dz^2] \quad (2.2)$$

III) anisotropia geral: $a^2(t) \neq b^2(t) \neq c^2(t)$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad . \quad (2.3)$$

Os cálculos dos elementos da geometria e do tensor momentum-energia realizados em uma base de tetradas, encontram-se feitos com detalhes no Apêndice A; apresentaremos aqui somente os resultados.

O ponto de partida são as equações de Einstein:

$$G_{AB} = - T_{AB} \quad (2.4)$$

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} \quad (2.5)$$

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

O papel de Fonte é desempenhado pelo fluido de Stokes discutido anteriormente:

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \Pi_{AB} \quad (2.6)$$

$$\Pi_{AB} = (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta \sigma_A^C \sigma_{CB} + \xi(\theta, \sigma) h_{AB} \quad . \quad (2.7)$$

Na base de tetradas escolhida para efetuarmos os cálculos (7), o elemento de linha toma a forma:

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad . \quad (2.8)$$



Para a métrica que estamos utilizando temos:

$$\begin{aligned}\theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= a(t) dx \\ \theta^2 &= b(t) dy \\ \theta^3 &= c(t) dz\end{aligned}\tag{A.2}$$

Do cálculo de formas diferenciais ⁽²¹⁾:

$$d\theta^A = \gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C\tag{A.4}$$

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C\tag{A.6}$$

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B\tag{A.7}$$

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B\tag{A.12}$$

A relação com a curvatura é obtida através da expressão:

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D\tag{A.14}$$

Obtemos assim as componentes do tensor curvatura:

$$\begin{aligned}R^1_{001} &= -\ddot{a} & R^1_{212} &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \\ R^2_{002} &= -\ddot{b} & R^1_{313} &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \\ R^3_{003} &= -\ddot{c} & R^2_{323} &= -\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\end{aligned}\tag{A.15}$$

Com os dados acima e observando que $R^A_{BCD} = -R^A_{BDC}$, calculamos imediatamente o tensor de Ricci, cujas componentes são dadas por:

$$R_{AB} = R^C_{ACB} = R^0_{A0B} + R^1_{A1B} + R^2_{A2B} + R^3_{A3B} \quad (\text{A.16})$$

$$R_{00} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$R_{11} = - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right) \quad (\text{A.20})$$

$$R_{22} = - \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right) \quad (\text{A.22})$$

$$R_{33} = - \left(\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right] \right) \quad (\text{A.24})$$

A partir daí obtemos o escalar de curvatura:

$$R = \eta^{AB} R_{AB} = R^A_A = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 \quad (\text{A.25})$$

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.27})$$

Finalmente, obtemos as componentes do tensor de Einstein:

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} \quad (\text{A.28})$$

$$G_{00} = - \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$G_{11} = \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$G_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$G_{33} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \right) \quad (\text{A.33})$$

Passamos agora ao cálculo do tensor momentum-energia.

Sabemos que:

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \Pi_{AB} \quad (2.6)$$

$$\Pi_{AB} = (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta \sigma_{AC} \sigma^C_B + \xi h_{AB} \quad (2.7)$$

A condição de traço nulo para a pressão anisotrópica nos fornece:

$$\text{Tr}\{\hat{\Pi}\} = 0 \quad (A.47)$$

$$\Pi^A_A = 0 \quad (A.47')$$

$$3\xi + \delta \sigma^2 = 0 \longrightarrow \xi = -\frac{\delta}{3} \sigma^2 \quad (A.48)$$

Na base de tetradas temos o fator de expansão escrito da seguinte forma:

$$\theta = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (A.35')$$

A matriz das distorções ("shear") tem por componentes:

$$\sigma_{11} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (A.37)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (A.38)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (A.39)$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3}\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{3}\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{3}\theta \end{pmatrix}$$

Com estes elementos calculamos:

$$\sigma^2 = \sigma_{AB}\sigma^{BA} = \sigma_{11}\sigma^{11} + \sigma_{22}\sigma^{22} + \sigma_{33}\sigma^{33} \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right]^2 \quad (\text{A.40'})$$

Tomando, $V_A = \delta_A^0$ e $h_{AB} = \eta_{AB} - \delta_A^0 \delta_B^0$ temos as componentes do tensor momentum-energia escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_{AB} = & \rho \delta_A^0 \delta_B^0 + (\xi - p) \eta_{AB} + (p - \xi) \delta_A^0 \delta_B^0 + \\ & + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta (\sigma_A^1 \sigma_{1B} + \sigma_A^2 \sigma_{2B} + \sigma_A^3 \sigma_{3B}) . \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned} \sigma^1_1 &= -\sigma_{11} \\ \sigma^2_2 &= -\sigma_{22} \\ \sigma^3_3 &= -\sigma_{33} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

escrevemos a seguir o sistema de equações de Einstein utilizando os elementos já calculados:

$$G_{00} = -\kappa T_{00} \quad (2.9)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} = \kappa \rho \quad (2.9')$$

$$G_{11} = -\kappa T_{11} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right) = -\kappa \left(\frac{\delta}{3} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right]^2 \right\} + p \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] + \beta \left\{ \left(\dot{\frac{a}{a}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{b}{b}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{c}{c}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right]^2 \right\} \right] . \\
 & \cdot \left[- \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right] - \delta \left[- \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right]^2) \quad . \quad (2.10')
 \end{aligned}$$

$$G_{22} = -\kappa T_{22} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\ddot{\frac{a}{a}} + \ddot{\frac{c}{c}} + \dot{\frac{a}{a}} \dot{\frac{c}{c}} \right) & = -\kappa \left(\left[\frac{\delta}{3} \left\{ \left(\dot{\frac{a}{a}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{b}{b}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{c}{c}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right]^2 \right\} + p \right] + \right. \\
 & + \left. \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] + \beta \left\{ \left(\dot{\frac{a}{a}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{b}{b}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{c}{c}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right]^2 \right\} \right] \right. \\
 & \cdot \left. \left[- \frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right] - \delta \left[- \frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right]^2 \right) \quad (2.11')
 \end{aligned}$$

$$G_{33} = -T_{33} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\ddot{\frac{a}{a}} + \ddot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{a}{a}} \dot{\frac{b}{b}} \right) & = -\kappa \left(\left[\frac{\delta}{3} \left\{ \left(\dot{\frac{a}{a}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{b}{b}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{c}{c}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right]^2 \right\} + p \right] + \right. \\
 & + \left. \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] + \beta \left\{ \left(\dot{\frac{a}{a}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{b}{b}} \right)^2 + \left(\dot{\frac{c}{c}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right]^2 \right\} \right] \right. \\
 & \cdot \left. \left[- \frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right] - \delta \left[- \frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{3} \left[\dot{\frac{a}{a}} + \dot{\frac{b}{b}} + \dot{\frac{c}{c}} \right] \right]^2 \right) \quad . \quad (2.12')
 \end{aligned}$$

As equações (2.10'), (2.11') e (2.12') podem ser colocadas em uma forma um pouco mais simples:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right) &= -\kappa \left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \right) \cdot \left[\frac{\delta}{3} - \beta \frac{a}{a} + \frac{\beta}{3} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right]^2 \cdot \left[-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\beta}{9} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] + \frac{\alpha_1}{3} \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \cdot \left[\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{2}{3} \delta \frac{\dot{a}}{a} \right] + p - \alpha_0 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \delta \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c}\right) &= -\kappa \left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \right) \cdot \left[\frac{\delta}{3} - \beta \frac{b}{b} + \frac{\beta}{3} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right]^2 \cdot \left[-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\beta}{9} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] + \frac{\alpha_1}{3} \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \cdot \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \frac{\dot{b}}{b} + \frac{2}{3} \delta \frac{\dot{b}}{b} \right) + p - \alpha_0 \left(\frac{\dot{b}}{b} \right) - \delta \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b}\right) &= -\kappa \left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \right) \cdot \left[\frac{\delta}{3} - \beta \frac{c}{c} + \frac{\beta}{3} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right]^2 \cdot \left[-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\beta}{9} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] + \frac{\alpha_1}{3} \right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \cdot \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \frac{\dot{c}}{c} + \frac{2}{3} \delta \frac{\dot{c}}{c} \right) + p - \alpha_0 \left(\frac{\dot{c}}{c} \right) - \delta \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

As equações (2.9'), (2.13), (2.14) e (2.15) serão utilizadas no próximo capítulo, quando discutiremos as soluções exatas para o sistema. Mostraremos agora que é possível colocar o sistema de quatro equações mencionado acima, na forma de um sistema autônomo não linear, objeto de nossa análise no capítulo IV. Para tanto, começamos com a seguinte substituição de variáveis:

$$\frac{\dot{a}}{a} = x_1 \quad \frac{\dot{b}}{b} = x_2 \quad \frac{\dot{c}}{c} = x_3 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \frac{1}{a} \ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} &\longrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{x}_1 + x_1^2 \\ \frac{\ddot{b}}{b} = \dot{x}_2 + x_2^2 &\quad \frac{\ddot{c}}{c} = \dot{x}_3 + x_3^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Com estas substituições a equação (2.9') fica da seguinte forma:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \kappa\rho \quad (2.18)$$

A utilização da equação de estado $p = \lambda\rho$ nos permite, através da equação (2.28) obtida acima, expressar p como função das 3 novas variáveis, isto é,

$$p = p(x_1, x_2, x_3) = \frac{\lambda}{\kappa} (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \quad .$$

Esta expressão para p deverá ser utilizada nas equações (2.13), (2.14) e (2.15), juntamente com as substituições de variáveis mencionadas. Obtemos como resultado após uma sequência de manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} & \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \frac{2}{3} \kappa\alpha_0 x_1 + \frac{1}{3} \kappa\alpha_0 x_2 + \frac{1}{3} \kappa\alpha_0 x_3 + \\ & + x_1^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa\delta - \frac{2}{3} \kappa\alpha_1\right) + x_2^2 \left(\frac{1}{9} \kappa\delta + \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 + 1\right) + \\ & + x_3^2 \left(\frac{1}{9} \kappa\delta + \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 + 1\right) + x_1x_2 \left(\frac{2}{9} \kappa\delta - \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 + \lambda\right) + \\ & + x_1x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa\delta - \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 + \lambda\right) + x_2x_3 \left(-\frac{4}{9} \kappa\delta + \frac{2}{3} \kappa\alpha_1 + 1 + \lambda\right) + \\ & + x_1^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa\beta\right) + x_2^3 \left(\frac{2}{9} \kappa\beta\right) + x_3^3 \left(\frac{2}{9} \kappa\beta\right) + x_1x_2^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa\beta\right) + \\ & + x_1x_3^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa\beta\right) + x_2x_1^2 \left(\frac{6}{9} \kappa\beta\right) + x_3x_1^2 \left(\frac{6}{9} \kappa\beta\right) = 0 \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1 + \dot{x}_3 + \frac{1}{3} \kappa\alpha_0 x_1 - \frac{2}{3} \kappa\alpha_0 x_2 + \frac{1}{3} \kappa\alpha_0 x_3 \\ & + x_1^2 \left(\frac{1}{9} \kappa\delta + \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 + 1\right) + x_2^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa\delta - \frac{2}{3} \kappa\alpha_1\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ x_3^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + 1 \right) + x_1 x_2 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda \right) + \\
 &+ x_1 x_3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \delta + \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda + 1 \right) + x_2 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda \right) + \\
 &+ x_1^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_2^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \beta \right) + x_3^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + \\
 &+ x_1 x_2^2 \left(\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + x_2 x_1^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + x_2 x_3^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + \\
 &+ x_3 x_2^2 \left(\frac{6}{9} \kappa \beta \right) = 0 \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_1 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_2 - \frac{2}{3} \kappa \alpha_0 x_3 + \\
 &+ x_1^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + 1 \right) + x_2^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + 1 \right) + \\
 &+ x_3^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 \right) + x_1 x_2 \left(-\frac{4}{9} \kappa \delta + \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda + 1 \right) + \\
 &+ x_1 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda \right) + x_2 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 + \lambda \right) + \\
 &+ x_1^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_2^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_3^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \beta \right) + x_1 x_3^2 \left(\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + \\
 &+ x_2 x_3^2 \left(\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + x_3 x_1^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa \beta \right) + x_3 x_2^2 \left(-\frac{6}{9} \kappa \beta \right) = 0 \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Como nosso objetivo é escrever um sistema autônomo de três equações nas incógnitas x_1, x_2 e x_3 , realizaremos algumas operações algébricas com as equações acima de maneira a colocá-las na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.22}$$

Para isto, tomamos a equação (2.19), somamos com a equação (2.21) e subtraímos a equação (2.20); como resultado ficamos com:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_1 - \frac{2}{3} \kappa \alpha_0 x_2 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_3 + \\ &+ x_1^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) + x_2^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - 1 \right) + \\ &+ x_3^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) + x_1 x_2 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \\ &x_1 x_3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \delta + \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \right) + x_2 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ x_1^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_2^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \beta \right) + x_3^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_1 x_2^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + \\ &+ x_2 x_1^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_2 x_3^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_3 x_2^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right) .\end{aligned}\tag{2.23}$$

Substituindo a equação obtida acima na equação (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_1 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_2 - \frac{2}{3} \kappa \alpha_0 x_3 + \\ &+ x_1^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) + \\ &+ x_2^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ x_3^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - 1 \right) + \\
 &+ x_1 x_2 \left(-\frac{4}{9} \kappa \delta + \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ x_1 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ x_2 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ x_1^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_2^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_3^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \beta \right) + \\
 &+ x_1 x_3^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_2 x_3^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_3 x_1^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_3 x_2^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Substituindo agora a equação (2.23) na equação (2.21), ficamos finalmente com:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{2}{3} \kappa \alpha_0 x_1 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_2 + \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 x_3 + \\
 &+ x_1^2 \left(-\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - 1 \right) + x_2^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) + x_3^2 \left(\frac{1}{9} \kappa \delta + \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \right) + \\
 &+ x_1 x_2 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + x_1 x_3 \left(\frac{2}{9} \kappa \delta - \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ x_2 x_3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \delta + \frac{2}{3} \kappa \alpha_1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \right) + x_1^3 \left(-\frac{4}{9} \kappa \beta \right) + x_2^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + x_3^3 \left(\frac{2}{9} \kappa \beta \right) + \\
 &+ x_1 x_2^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_1 x_3^2 \left(-\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_2 x_1^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right) + x_3 x_1^2 \left(\frac{2}{3} \kappa \beta \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

O sistema autônomo não-linear caracterizado pelas equações (2.23), (2.24) e (2.25), descreve as alterações da geome -

tria ao longo das três direções espaciais independentes. A hipótese de isotropia no plano traz grande simplificação ao sistema referido, reduzindo a dois o número de equações acopladas. Estas são obtidas das equações (2.23), (2.24) e (2.25) através da redução do número de variáveis:

$$x \equiv x_1 = \frac{\dot{a}}{a} \quad y \equiv x_2 = x_3 = \frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{c}}{c} \quad . \quad (2.26)$$

As novas equações ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & x[-2A_0] + y[2A_0] + \\ & + x^2[-2D-2A_1-1] + y^2[-2D+4A_1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}] + xy[4D-2A_1-\lambda-1] + \\ & + x^3[-4B] + y^3[4B] + xy^2[-12B] + yx^2[12B] \quad . \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & x[A_0] - y[A_0] + \\ & + x^2[D+A_1] + y^2[D-2A_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{2}] + xy[-2D+A_1-\lambda] + \\ & + x_3[2B] + y^3[-2B] + xy^2[6B] + yx^2[-6B] \quad . \quad (2.28) \end{aligned}$$

As constantes $\{A_0, A_1, B, D\}$ foram definidas como segue:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 \\ A_1 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 \\ B &= \frac{1}{9} \kappa \beta \\ D &= \frac{1}{9} \kappa \delta \end{aligned} \quad (2.29)$$

O sistema anterior, enquadra-se na classificação de autônomo, planar, não linear sendo objeto de intenso estudo há muitos anos. Uma série de afirmações podem ser feitas com relação a estes sistemas, culminando com a caracterização de suas curvas integrais. Efetuaremos a análise qualitativa deste sistema no Capítulo IV deste trabalho.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES EXATAS

Iniciamos aqui a procura de soluções exatas para o sistema constituído pelas equações: (2.9'), (2.13), (2.14) e (2.15) apresentadas no Capítulo II. Caso existam, teremos importantes informações sobre a dinâmica da geometria gerada pelo fluido Stokesiano considerado. Podemos esperar também que tais soluções forneçam os elementos necessários à constatação da existência do fenómeno de transição entre as fases isotrópica e anisotrópica do fluido. Sabemos que para que isto ocorra é necessário existir uma solução que ao ser substituída na expressão da energia livre devido à interação gravitacional, forneça mínimos na região dos parâmetros introduzidos, correspondentes a estados de isotropia e anisotropia para o fluido. Veremos no entanto, que as soluções obtidas não satisfazem à exigência acima, frustrando a expectativa de acompanhar passo a passo o processo. Apesar de falhar no que seria um de seus aspectos mais interessantes, o de exhibir a transição de fase, as soluções obtidas fornecem alguns dados sobre a dinâmica do sistema em estudo.

Podemos começar nossa análise, reduzindo o sistema composto pelas equações (2.9'), (2.13), (2.14) e (2.15) a uma forma mais simples, resultado da substituição:

$$a(t) = b(t) = c(t) = A(t) \quad . \quad (3.1)$$

Para a equação (2.9') temos como resultado:

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 = \kappa \rho \quad . \quad (3.2)$$

A substituição mencionada acima nas equações (2.13), (2.14) e (2.15) nos fornece como resultado uma única equação:

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 \right) &= -\kappa \left\{ 3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 \right\} \left(\frac{\delta}{3} - \beta \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\beta}{3} \left[3 \frac{\dot{A}}{A} \right] \right) - \\ &- \kappa \left[3 \frac{\dot{A}}{A} \right]^2 \left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\beta}{9} \left[3 \frac{\dot{A}}{A} \right] + \frac{\alpha_1}{3} \right) - \\ &- \kappa \left[3 \frac{\dot{A}}{A} \right] \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \frac{\dot{A}}{A} + \frac{2}{3} \delta \frac{\dot{A}}{A} \right) - \\ &- \kappa \rho + \kappa \alpha_0 \frac{\dot{A}}{A} + \kappa \delta \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Simplificando o lado direito temos:

$$\left(2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 \right) = -\kappa \rho \quad . \quad (3.4)$$

As equações (3.2) e (3.4) obtidas acima nos mostram que a substituição efetuada, reduziu nosso sistema às equações correspondentes ao modelo de Friedman com seção Euclideana, cuja solução é bem conhecida:

$$A(t) = A_0 t^{\frac{2}{3}} \quad (3.5)$$

Prosseguimos buscando soluções mais gerais, da forma:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} t^A \\ b(t) &= e^{\nu t} t^B \\ c(t) &= e^{\eta t} t^C \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde μ, ν, η, A, B e C são constantes.

Calculando as derivadas destas funções:

$$\dot{a}(t) = e^{\mu t} \cdot \mu \cdot t^A + e^{\mu t} \cdot A \cdot t^{A-1} = e^{\mu t} t^A (\mu + At^{-1}) \quad (3.7)$$

$$\ddot{a}(t) = e^{\mu t} t^A (-At^{-2}) + (\mu + At^{-1}) (e^{\mu t} \cdot \mu t^A + e^{\mu t} A t^{A-1}) \quad (3.8)$$

O mesmo cálculo para $b(t)$ e $c(t)$ nos dá como resultado:

$$\dot{a}(t) = e^{\mu t} t^A (\mu + At^{-1}) \quad (3.7)$$

$$\ddot{a}(t) = e^{\mu t} t^A ((A^2 - A)t^{-2} + 2A\mu t^{-1} + \mu^2) \quad (3.8)$$

$$\dot{b}(t) = e^{\nu t} t^B (\nu + Bt^{-1}) \quad (3.9)$$

$$\ddot{b}(t) = e^{\nu t} t^B ((B^2 - B)t^{-2} + 2B\nu t^{-1} + \nu^2) \quad (3.10)$$

$$\dot{c}(t) = e^{\eta t} t^C (\eta + Ct^{-1}) \quad (3.11)$$

$$\ddot{c}(t) = e^{\eta t} t^C ((C^2 - C)t^{-2} + 2C\eta t^{-1} + \eta^2) \quad (3.12)$$

Substituindo as funções acima na equação (2.9') temos:

$$[(\mu + At^{-1})(\nu + Bt^{-1}) + (\mu + At^{-1})(\eta + Ct^{-1}) + (\nu + Bt^{-1})(\eta + Ct^{-1})] = \kappa\rho \quad (3.13)$$

Agrupando em potências iguais de t temos a equação (3.14) abaixo:

$$[t^{-2}(AB + AC + BC) + t^{-1}(A(\nu + \eta) + B(\eta + \mu) + C(\mu + \nu)) + (\mu\nu + \mu\eta + \nu\eta)] = \kappa\rho \quad (3.14)$$

Para as equações (2.13), (2.14) e (2.15) vamos preci-

sar das seguintes expressões:

$$\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} = v\eta + (vC+\eta B)t^{-1} + BCt^{-2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} = \mu\eta + (\mu C+\eta A)t^{-1} + ACt^{-2} \quad (3.16)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} = \mu v + (\mu B+vA)t^{-1} + ABt^{-2} \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \mu^2 + 2\mu At^{-1} + A^2 t^{-2} \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 = v^2 + 2vBt^{-1} + B^2 t^{-2} \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 = \eta^2 + 2\eta Ct^{-1} + C^2 t^{-2} \quad (3.20)$$

$$\left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \right\} = \left\{ (A^2+B^2+C^2)t^{-2} + \right. \\ \left. + (2\mu A+2vB+2\eta C)t^{-1} + (\mu^2+v^2+\eta^2) \right\} \quad (3.21)$$

$$\left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] = [(A+B+C)t^{-1} + (\mu+v+\eta)] \quad (3.22)$$

Definimos agora duas constantes visando simplificar as expressões:

$$(A + B + C) \equiv \Omega \quad (3.23)$$

$$(\mu + v + \eta) \equiv \Phi \quad (3.24)$$

Temos agora:

$$\left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] = [\Omega t^{-1} + \Phi] \quad (3.25)$$

$$\left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right]^2 = [\Omega^2 t^{-2} + 2\Omega\phi t^{-1} + \phi^2] \quad (3.26)$$

$$\left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right]^3 = [\Omega^3 t^{-3} + 2\Omega^2\phi t^{-2} + \Omega\phi^2 t^{-1} + \Omega^2\phi t^{-2} + 2\Omega\phi^2 t^{-1} + \phi^3] . \quad (3.27)$$

A utilização destas expressões na equação (2.13) nos fornece, após uma sequência de simplificações,

$$\begin{aligned} & \left[t^{-2} \left(B(B-1) + C(C-1) + BC \right) + t^{-1} (2Bv + 2C\eta + vC + \eta B) + (v^2 + \eta^2 + v\eta) \right] = \\ & = -\kappa \left\{ t^{-3} \left[-\frac{\beta}{9} \Omega^3 + \frac{\beta}{3} A\Omega^2 + \frac{\beta}{3} (A^2 + B^2 + C^2)\Omega - \beta A(A^2 + B^2 + C^2) \right] + \right. \\ & + t^{-2} \left[\left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \mu - \frac{2}{9} \beta\phi - \frac{\beta}{9} \phi + \frac{\alpha_1}{3} \right) \Omega^2 + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\beta}{3} (2\mu A + 2vB + 2\eta C) + \frac{2}{3} \beta A\phi - \alpha_1 A + \frac{2}{3} \delta A \right) \Omega + \right. \\ & + \left. \left. \left((A^2 + B^2 + C^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \beta A(2\mu A + 2vB + 2\eta C) - \delta A^2 \right) \right] + \right. \\ & + t^{-1} \left[\left(\frac{\beta}{3} (\mu^2 + v^2 + \eta^2) - \frac{4}{9} \delta\phi + \frac{2}{3} \beta\mu\phi - \frac{\beta}{9} \phi^2 - \frac{2}{9} \beta\phi^2 + \right. \right. \\ & + \frac{2}{3} \alpha_1 \phi + \frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \mu + \frac{2}{3} \delta\mu \right) \Omega + (2\mu A + 2vB + 2\eta C) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \\ & - \beta A(\mu^2 + v^2 + \eta^2) + \frac{\beta}{3} A\phi^2 - \alpha_0 A - \alpha_1 A\phi + \frac{2}{3} \delta A\phi - 2\mu\delta A \left. \right] + \\ & + \left[(\mu^2 + v^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu + \frac{\beta}{3} \phi \right) + \phi^2 \left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \mu + \frac{\alpha_1}{3} \right) + \right. \\ & + \left. \left. \phi \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \mu + \frac{2}{3} \delta\mu \right) - \frac{\beta}{9} \phi^3 + p - \alpha_0 \mu - \delta\mu^2 \right] \right\} . \quad (3.28) \end{aligned}$$

Procedimento de substituição análogo ao anterior, desta vez na equação (2.14), nos fornece a equação (3.29):

$$\begin{aligned}
 & \left[t^{-2} (A(A-1) + C(C-1) + AC) + t^{-1} (2A\mu + 2C\eta + \mu C + \eta A) + (\mu^2 + \eta^2 + \mu\eta) \right] = \\
 & = -\kappa \left\{ t^{-3} \left[-\frac{\beta}{9} \Omega^3 + \frac{\beta}{3} B\Omega^2 + \frac{\beta}{3} (A^2 + B^2 + C^2) \Omega - \beta B (A^2 + B^2 + C^2) \right] + \right. \\
 & + t^{-2} \left[\left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \nu + \frac{\alpha_1}{3} - \frac{2}{9} \beta\phi - \frac{\beta}{9} \phi \right) \Omega^2 + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\beta}{3} (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) + 2 \frac{\beta}{3} B\phi - \alpha_1 B + \frac{2}{3} \delta B \right) \Omega + \right. \\
 & + \left. (A^2 + B^2 + C^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \beta B (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) - \delta B^2 \right] + \\
 & + t^{-1} \left[\left(\frac{\beta}{3} (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) - \frac{4}{9} \delta\phi + \frac{2}{3} \beta\nu\phi + \frac{2\alpha_1}{3} \phi - \frac{\beta}{9} \phi^2 - \frac{2}{9} \beta\phi^2 + \frac{\alpha_0}{3} - \right. \right. \\
 & - \left. \alpha_1 \nu + \frac{2}{3} \delta\nu \right) \Omega + (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \\
 & - \beta B (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) + \frac{\beta}{3} B\phi^2 - \alpha_1 B\phi + \frac{2}{3} \delta B\phi - \alpha_0 B - 2\nu B\delta \left. \right] + \\
 & + \left[(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) + \left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \eta + \frac{\alpha_1}{3} \right) \phi^2 - \frac{\beta}{9} \phi^3 + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \nu + \frac{2}{3} \delta\nu \right) \phi + p - \alpha_0 \nu - \delta\nu^2 \right] \left. \right\} . \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Idem para a equação (2.15), que nos fornece a equação (3.30):

$$\begin{aligned}
 & \left[t^{-2} A(A-1) + B(B-1) + AB + t^{-1} (2A\mu + 2B\nu + \mu B + \nu A) + (\mu^2 + \eta^2 + \mu\nu) \right] = \\
 & = -\kappa \left\{ t^{-3} \left[-\frac{\beta}{9} \Omega^3 + \frac{\beta}{3} C\Omega^2 + \frac{\beta}{3} (A^2 + B^2 + C^2) \Omega - \beta C (A^2 + B^2 + C^2) \right] + \right. \\
 & + t^{-2} \left[\left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \eta - \frac{2}{9} \beta\phi - \frac{\beta}{9} \phi + \frac{\alpha_1}{3} \right) \Omega^2 + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\beta}{3} (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) + 2 \frac{\beta}{3} C\phi - \alpha_1 C + \frac{2}{3} \delta C \right) \Omega + \right. \\
 & \left. + \left(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2 \right) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \beta C (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) - \delta C^2 \right] + \\
 & + t^{-1} \left[\left(\frac{\beta}{3} (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) - \frac{4}{9} \delta\phi + \frac{2}{3} \beta\nu\phi + \frac{2\alpha_1}{3} \phi - \frac{\beta}{9} \phi^2 - \frac{2}{9} \beta\phi^2 + \frac{\alpha_0}{3} - \right. \right. \\
 & - \left. \alpha_1 \nu + \frac{2}{3} \delta\nu \right) \Omega + (2\mu A + 2\nu B + 2\eta C) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \\
 & - \beta C (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) + \frac{\beta}{3} C\phi^2 - \alpha_1 C\phi + \frac{2}{3} \delta C\phi - \alpha_0 C - 2\nu C\delta \left. \right] + \\
 & + \left[(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu + \frac{\beta}{3} \phi \right) + \left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \eta + \frac{\alpha_1}{3} \right) \phi^2 - \frac{\beta}{9} \phi^3 + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1 \nu + \frac{2}{3} \delta\nu \right) \phi + p - \alpha_0 \nu - \delta\nu^2 \right] \left. \right\} . \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[(A^2+B^2+C^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \beta C (2\mu A+2\nu B+2\eta C) - \delta C^2 \right] + \\
 & + t^{-1} \left[\left(\frac{\beta}{3} (\mu^2+\nu^2+\eta^2) - \frac{4}{9} \delta\phi + \frac{2}{3} \beta\eta\phi - \frac{\beta}{9} \phi^2 - \frac{2}{9} \beta\phi^2 + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{2}{3} \alpha_1\phi + \frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1\eta + \frac{2}{3} \delta\eta \right) \Omega + (2\mu A+2\nu B+2\eta C) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta + \frac{\beta}{3} \phi \right) - \\
 & - \beta C (\mu^2+\nu^2+\eta^2) + \frac{\beta}{3} C\phi^2 - \alpha_0 C - \alpha_1 C\phi + \frac{2}{3} \delta C\phi - 2\eta\delta C \left. \right] + \\
 & + \left[(\mu^2+\nu^2+\eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta + \frac{\beta}{3} \phi \right) + \phi^2 \left(-\frac{2}{9} \delta + \frac{\beta}{3} \eta + \frac{\alpha_1}{3} \right) + \right. \\
 & + \left. \phi \left(\frac{\alpha_0}{3} - \alpha_1\eta + \frac{2}{3} \delta\eta \right) - \frac{\beta}{9} \phi^3 + p - \alpha_0\eta - \delta\eta^2 \right] \left. \right\} . \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Uma grande simplificação no sistema constituído pelas equações (2.9'), (3.28), (3.29) e (3.30) é obtida, se atribuímos às constantes definidas anteriormente os valores: $\Omega = 3A$ e $\phi = 0$. Esta escolha é arbitrária e podemos mostrar que é uma escolha possível uma vez que reduz o número de parâmetros (6) introduzidos pela solução geral,

$$\begin{aligned}
 a(t) &= e^{\mu t} t^A \\
 b(t) &= e^{\mu t} t^B \\
 c(t) &= e^{\mu t} t^C
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

ao número de funções incógnitas (3), presentes na métrica.

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(t) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

O sistema mencionado assume portanto uma nova forma:

$$(3A^2)t^{-2} + (\mu\nu + \mu\eta + \nu\eta) = \kappa(\rho_0 + \rho_1 t^{-1} + \rho_2 t^{-2}) \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \left[t^{-2}(3A^2 - 2A) + t^{-1}(3A\nu + 3A\eta) + (\nu^2 + \eta^2 + \nu\eta) \right] = \\ & = -\kappa \left[(-3A\alpha_1\mu)t^{-1} + (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu \right) - \alpha_0\mu - \delta\mu^2 + \right. \\ & \quad \left. + [p_0 + p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2}] \right] \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[t^{-2}(3A^2 - 2A) + t^{-1}(3A\mu + 3A\eta) + (\mu^2 + \eta^2 + \mu\eta) \right] = \\ & = -\kappa \left[(-3A\alpha_1\nu)t^{-1} + (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu \right) - \alpha_0\nu - \delta\nu^2 + [p_0 + p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2}] \right] \quad (3.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[t^{-2}(3A^2 - 2A) + t^{-1}(3A\mu + 3A\nu) + (\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu) \right] = \\ & = -\kappa \left[(-3A\alpha_1\eta)t^{-1} + (\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta \right) - \alpha_0\eta - \delta\eta^2 + [p_0 + p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2}] \right] \quad (3.35) \end{aligned}$$

onde fizemos:

$$p = p_0 + p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2} \quad (3.36)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 t^{-1} + \rho_2 t^{-2} \quad (3.37)$$

com $p_0, p_1, p_2, \rho_0, \rho_1, \rho_2$ constantes.

Ao igualarmos os coeficientes dos termos de mesma potência de t nos dois lados das equações, chegamos à forma final

do sistema a ser resolvido:

$$3A^2 = \kappa p_2 \quad (3.38)$$

$$\kappa p_1 = 0 \quad (3.39)$$

$$(\mu v + \mu \eta + v \eta) = \kappa p_0 \quad (3.40)$$

$$3A^2 - 2A = -\kappa p_2 \quad (3.41)$$

$$3Av + 3A\eta = 3\kappa A \alpha_1 \mu - \kappa p_1 \quad (3.42)$$

$$v^2 + \eta^2 + v\eta = -\kappa(\mu^2 + v^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu\right) + \kappa\alpha_0\mu + \kappa\delta\mu^2 - \kappa p_0 \quad (3.43)$$

$$3A^2 - 2A = -\kappa p_2 \quad (3.41)$$

$$3A\mu + 3A\eta = 3\kappa A \alpha_1 v - \kappa p_1 \quad (3.44)$$

$$\mu^2 + \eta^2 + \mu\eta = -\kappa(\mu^2 + v^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta v\right) + \kappa\alpha_0 v + \kappa\delta v^2 - \kappa p_0 \quad (3.45)$$

$$3A^2 - 2A = -\kappa p_2 \quad (3.41)$$

$$3A\mu + 3Av = 3\kappa A \alpha_1 \eta - \kappa p_1 \quad (3.46)$$

$$\mu^2 + v^2 + \mu v = -\kappa(\mu^2 + v^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta\right) + \kappa\alpha_0\eta + \kappa\delta\eta^2 - \kappa p_0 \quad (3.47)$$

Passamos agora à solução do sistema composto pelas dez equações apresentadas. Nosso objetivo é expressar os parâmetros presentes na solução $\{\mu, v, \eta\}$ em termos dos coeficientes de pressão anisotrópica do fluido $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta\}$, isto é, procuramos pelas funções:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) \\ v &= v(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) \\ \eta &= \eta(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Lembramos que: $\phi = \mu + \nu + \eta = 0 \rightarrow \phi^2 = 0 \rightarrow$

$$\mu^2 + \nu^2 + \eta^2 = -2(\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta) \quad . \quad (3.49)$$

Efetuada a soma das equações (3.42), (3.44) e (3.46), encontramos:

$$6A(\mu + \nu + \eta) = 3\kappa A \alpha_1 (\mu + \nu + \eta) - 3\kappa p_1$$

Como $\phi = 0$, temos que: $p_1 = 0$

A equação (3.39) nos diz que $\rho_1 = 0$.

Somando agora as equações (3.43), (3.45), (3.47) e usando (3.49), obtemos:

$$2(\nu^2 + \eta^2 + \mu^2) + (\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta) = -\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2)(\delta - \beta(\mu + \nu + \eta)) + \kappa\alpha_0(\mu + \nu + \eta) - \kappa\delta(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) - 3\kappa p_0 \quad (3.50)$$

$$- 3(\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta) = -3\kappa p_0$$

$$\kappa p_0 = (\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta) \quad (3.51)$$

através da equação (3.40) concluímos que

$$p_0 = \rho_0 = \frac{1}{\kappa} (\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta) \quad .$$

Se fizermos $p_2 = \rho_2$, as equações (3.38) e (3.41) podem ser combinadas, nos fornecendo:

$$3A^2 - 2A = -3A^2 \rightarrow 6A^2 - 2A = 0 \quad (3.52)$$

$$2A(3A-1) = 0 \rightarrow A = 0 \text{ ou } 3A-1 = 0 \rightarrow A = \frac{1}{3} \quad (3.53)$$

Observamos que, como $p = p_0 + p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2}$ e $\rho =$

$= \rho_0 + \rho_1 t^{-1} + \rho_2 t^{-2}$, a escolha feita acima, $p_2 = \rho_2$, implica na igualdade das funções $p = \rho$ uma vez que já havíamos obtido, $p_1 = \rho_1 = 0$ e $p_0 = \rho_0 = \frac{1}{\kappa} (\mu\nu + \nu\eta + \mu\eta)$ nas equações anteriores.

Trataremos primeiro o caso $A = 0$.

Para este caso, as equações (3.38), (3.39), (3.41) e (3.42) [ou (3.44) e (3.46)], nos fornecem respectivamente: $\rho_2 = 0$, $\rho_1 = 0$, $p_2 = 0$ e $p_1 = 0$. As equações restantes serão suficientes, como veremos a seguir, para determinarmos as funções procuradas.

A expressão $\phi = \mu + \nu + \eta = 0$ nos permite eliminar η destas equações; ficamos com o seguinte sistema:

$$\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu = -2\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu\right) + \kappa\alpha_0\mu + \kappa\delta\mu^2 - \kappa\rho_0 \quad (3.43)$$

$$\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu = -2\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu\right) + \kappa\alpha_0\nu + \kappa\delta\nu^2 - \kappa\rho_0 \quad (3.45')$$

$$\begin{aligned} \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu = -2\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu) \left(\frac{\delta}{3} + \beta\mu + \beta\nu\right) - \kappa\alpha_0\mu - \kappa\alpha_0\nu + \\ + \kappa\delta(\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu) - \kappa\rho_0 \end{aligned} \quad (3.47')$$

$$-(\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu) = \kappa\rho_0 \quad (3.40')$$

Mostra-se facilmente que das equações acima segue:

$$p_0 = \rho_0 \quad (3.54)$$

Verificamos de imediato que a equação (3.47') é a soma, com o sinal trocado, das equações (3.43') e (3.45'), não fornecendo portanto nenhum resultado novo. Ficamos então com duas equações (3.43') e (3.45'), suficientes para determinarmos as

funções procuradas, $\mu = \mu(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta)$ e $\nu = \nu(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta)$. Para isto tomamos a diferença entre estas duas equações:

$$\begin{aligned}
 -\kappa\delta\mu^2 + \kappa\delta\nu^2 - 2\nu\beta\mu^3 + 2\kappa\beta\nu^3 - \kappa\alpha_0\mu + \kappa\alpha_0\nu &= 0 \\
 \kappa\delta(\nu^2 - \mu^2) + 2\kappa\beta(\nu^3 - \mu^3) + \kappa\alpha_0(\nu - \mu) &= 0 \\
 \kappa\delta(\nu + \mu)(\nu - \mu) + 2\kappa\beta(\nu - \mu)(\nu^2 + \nu\mu + \mu^2) + \kappa\alpha_0(\nu - \mu) &= 0 \\
 (\nu - \mu)[\kappa\delta(\nu + \mu) + 2\kappa\beta(\nu^2 + \nu\mu + \mu^2) + \kappa\alpha_0] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

a equação acima é satisfeita se $(\nu - \mu) = 0 \rightarrow \mu = \nu$ ou,

$$\kappa\delta\nu + \kappa\delta\mu + 2\kappa\beta\nu^2 + 2\kappa\beta\nu\mu + 2\kappa\beta\mu^2 + \kappa\alpha_0 = 0 \tag{3.56}$$

$$2\kappa\beta\mu^2 + (\kappa\delta + 2\kappa\beta\nu)\mu + (2\kappa\beta\nu^2 + \kappa\delta\nu + \kappa\alpha_0) = 0 \tag{3.57}$$

$$2\beta\mu^2 + (\delta + 2\beta\nu)\mu + (2\beta\nu^2 + \delta\nu + \alpha_0) = 0 \tag{3.58}$$

$$\mu = \frac{-(\delta + 2\beta\nu) \pm \sqrt{(\delta + 2\beta\nu)^2 - 4(2\beta)(2\beta\nu^2 + \delta\nu + \alpha_0)}}{2(2\beta)} \tag{3.59}$$

Temos portanto as seguintes expressões para μ :

$$(i) \quad \mu = \nu \tag{3.60}$$

$$(ii) \quad \mu = \mu^+ = -\frac{(\delta + 2\beta\nu)}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\beta\delta\nu - 12\beta^2\nu^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \tag{3.61}$$

$$(iii) \quad \mu = \mu^- = -\frac{(\delta + 2\beta\nu)}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\beta\delta\nu - 12\beta^2\nu^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \tag{3.62}$$

A equação (3.45') pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{2}{3} \kappa \delta \mu^2 - \frac{1}{3} \kappa \delta v^2 + \frac{2}{3} \kappa \delta \mu v - 2\kappa \beta v^3 - 2\kappa \beta \mu v^2 - 2\kappa \beta \mu^2 v - \kappa \alpha_0 v = 0 \quad (3.63)$$

Ao substituírmos as expressões encontradas para μ na equação acima determinaremos a primeira função procurada: $v = v(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta)$.

(i) $\mu = v$

A equação (3.45') assume a forma:

$$\frac{2}{3} \kappa \delta v^2 - \frac{1}{3} \kappa \delta v^2 + \frac{2}{3} \kappa \delta v^2 - 2\kappa \beta v^3 - 2\kappa \beta v^3 - 2\kappa \beta v^3 - \kappa \alpha_0 v = 0 \quad (3.64)$$

$$6\beta v^3 - \delta v^2 + \alpha_0 v = 0 \quad (3.65)$$

$$v(6\beta v^2 - \delta v + \alpha_0) = 0 \quad (3.66)$$

Esta equação tem por solução:

$$v = 0 \quad (3.67)$$

ou

$$6\beta v^2 - \delta v + \alpha_0 = 0 \quad , \quad (3.68)$$

cujas raízes são:

$$v = \frac{\delta}{12\beta} \pm \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0}{\delta^2}} \quad (3.69)$$

Chegamos portanto ao primeiro conjunto de soluções para o nosso problema:

$$(1) \quad \mu = v = 0 \quad , \quad \eta = -(\mu+v) = 0 \quad , \quad A = 0$$

Para estes valores nossa solução fica da seguinte ma

Para estes valores nossa solução fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a(t) &= 1 \\ b(t) &= 1 \\ c(t) &= 1 \end{aligned} \quad , \quad (3.70)$$

que representa o espaço-tempo de Minkowski.

$$\begin{aligned} (2) \quad \mu = \nu_+ &= \frac{\delta}{12\beta} + \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}} \quad , \quad \eta = -(\mu+\nu) = \\ &= -\left(\frac{\delta}{6\beta} + \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right) \quad A = 0 . \end{aligned}$$

Para estes valores temos:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\left[\frac{\delta}{12\beta} + \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \\ b(t) &= e^{\left[\frac{\delta}{12\beta} + \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \\ c(t) &= e^{-\left[\frac{\delta}{6\beta} + \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \mu = \nu_- &= \frac{\delta}{12\beta} - \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}} \quad , \quad \eta = -(\mu+\nu) = \\ &= -\left(\frac{\delta}{6\beta} - \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right) \quad , \quad A = 0 . \end{aligned}$$

Ficamos então com:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\left[\frac{\delta}{12\beta} - \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \quad b(t) = e^{\left[\frac{\delta}{12\beta} - \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \\ c(t) &= e^{-\left[\frac{\delta}{6\beta} - \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - \frac{24\beta\alpha_0'}{\delta^2}}\right] \cdot t} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Observamos que estas soluções são de natureza não singular e que as duas últimas reduzem-se à primeira na origem do eixo temporal, isto é,

$$a(t) = 1$$

$$b(t) = 1$$

$$c(t) = 1$$

para $t = 0$, nas soluções (2) e (3).

Para os casos (ii) $\mu = \mu^+$ e (iii) $\mu = \mu^-$, procederemos de uma maneira um pouco diferente visando simplificar os cálculos. Para isto explicitamos o valor de μ^2 na equação (3.58) e substituímos sua expressão na equação (3.63):

$$\mu^2 = - \left(\frac{\delta + 2\beta v}{2\beta} \right) \mu - \left(\frac{2\beta v^2 + \delta v + \alpha_0}{2\beta} \right) \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \delta \left[- \left(\frac{\delta + 2\beta v}{2\beta} \right) \mu - \left(\frac{2\beta v^2 + \delta v + \alpha_0}{2\beta} \right) \right] - \frac{1}{3} \delta v^2 + \frac{2}{3} \delta \mu v - 2\beta v^3 - 2\beta \mu v^2 - \\ & - 2\beta \left[- \left(\frac{\delta + 2\beta v}{2\beta} \right) \mu - \left(\frac{2\beta v^2 - \delta v + \alpha_0}{2\beta} \right) \right] v - \alpha_0 v = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Após algumas simplificações obtemos:

$$v \left[\delta \mu - \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{\beta} \right] - \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{\beta} \mu - \frac{1}{3} \frac{\delta \alpha_0}{\beta} = 0 \quad (3.75)$$

Somente agora, nesta expressão simplificada, é que substituiremos os valores μ^+ e μ^- .

Trataremos agora o caso:

$$(ii) \mu = \mu^+$$

$$\mu^+ = -\frac{\delta}{4\beta} - \frac{v}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{16\beta^2} - \frac{\delta}{4\beta}v - \frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{\beta}} \quad (3.76)$$

Definindo:

$$R \equiv \frac{\delta^2}{16\beta^2} - \frac{\delta}{4\beta}v - \frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{\beta} \quad (3.77)$$

temos:

$$\mu^+ = -\frac{\delta}{4\beta} - \frac{v}{2} + \sqrt{R} \quad (3.76')$$

Substituindo o valor acima na equação (3.75) encontramos:

$$\begin{aligned} \delta v \left[-\frac{\delta}{4\beta} - \frac{v}{2} + \sqrt{R} \right] - \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\beta}v - \frac{1}{3}\frac{\delta\alpha_0}{\beta} - \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\beta} \left[-\frac{\delta}{4\beta} - \frac{v}{2} + \sqrt{R} \right] &= 0 \\ -\frac{\delta}{2}v^2 + \left(-\frac{5}{12}\frac{\delta^2}{\beta}\right)v - \frac{1}{3}\frac{\delta\alpha_0}{\beta} + \frac{1}{12}\frac{\delta^3}{\beta^2} &= \sqrt{R} \left(\frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\beta} - \delta v\right) . \end{aligned} \quad (3.78)$$

Tomando o quadrado nos dois lados desta equação obtemos:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\delta}{2}v^2 + \left(-\frac{5}{12}\frac{\delta^2}{\beta}\right)v \right]^2 + 2 \left[-\frac{\delta}{2}v^2 + \left(-\frac{5}{12}\frac{\delta^2}{\beta}\right)v \right] \cdot \left[-\frac{1}{3}\frac{\delta\alpha_0}{\beta} + \frac{1}{12}\frac{\delta^3}{\beta^2} \right] + \\ + \left[-\frac{1}{3}\frac{\delta\alpha_0}{\beta} + \frac{1}{12}\frac{\delta^3}{\beta^2} \right]^2 = R \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\beta} - \delta v \right]^2 . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Calculando cada um dos termos separadamente temos:

$$\left[-\frac{\delta}{2}v^2 + \left(-\frac{5}{12}\frac{\delta^2}{\beta}\right)v \right]^2 = \frac{1}{4}\delta^2v^4 + \frac{5}{12}\frac{\delta^3}{\beta}v^3 + \frac{25}{144}\frac{\delta^4}{\beta^2}v^2 \quad (3.80)$$

$$2 \left[-\frac{\delta}{2} v^2 + \left(-\frac{5}{12} \frac{\delta^2}{\beta} \right) v \right] \cdot \left[-\frac{1}{3} \frac{\delta \alpha_0}{\beta} + \frac{1}{12} \frac{\delta^3}{\beta^2} \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \frac{\delta^2}{\beta} \alpha_0 - \frac{1}{12} \frac{\delta^4}{\beta^2} \right) v^2 + \left(\frac{5}{18} \frac{\delta^3}{\beta^2} \alpha_0 - \frac{5}{72} \frac{\delta^5}{\beta^3} \right) v \quad (3.81)$$

$$\left[-\frac{1}{3} \frac{\delta \alpha_0}{\beta} + \frac{1}{12} \frac{\delta^3}{\beta^2} \right]^2 = \frac{1}{9} \frac{\delta^2 \alpha_0^2}{\beta^2} - \frac{1}{18} \frac{\delta^4 \alpha_0}{\beta^3} + \frac{1}{144} \frac{\delta^6}{\beta^4} \quad (3.82)$$

$$\left[\frac{1}{3} \frac{\delta^2}{\beta} - \delta v \right]^2 = \frac{1}{4} \frac{\delta^4}{\beta^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta^3}{\beta} v + \delta^2 v^2 \quad (3.83)$$

$$R. \left(\frac{1}{9} \frac{\delta^4}{\beta^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta^3}{\beta} v + \delta^2 v^2 \right) =$$

$$= \left[\frac{\delta^2}{16\beta^2} - \frac{\delta}{4\beta} v - \frac{3}{4} v^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta} \right] \cdot \left[\frac{1}{9} \frac{\delta^4}{\beta^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta^3}{\beta} v + \delta^2 v^2 \right] =$$

$$= v^4 \left(-\frac{3}{4} \delta^2 \right) + v^3 \left(\frac{1}{4} \frac{\delta^3}{\beta} \right) + v^2 \left(\frac{7}{48} \frac{\delta^4}{\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\beta} \alpha_0 \right) +$$

$$+ v \left(-\frac{5}{72} \frac{\delta^5}{\beta^3} + \frac{1}{3} \frac{\delta^3}{\beta^2} \alpha_0 \right) + \frac{1}{144} \frac{\delta^6}{\beta^4} - \frac{1}{18} \frac{\delta^4}{\beta^3} \alpha_0 \quad (3.84)$$

Juntando todos estes resultados na equação (3.79), obtemos uma equação de quarta ordem para v :

$$v^4 (\delta^2) + v^3 \left(\frac{1}{6} \frac{\delta^3}{\beta} \right) + v^2 \left(-\frac{1}{18} \frac{\delta^4}{\beta^2} + \frac{5}{6} \frac{\delta^2}{\beta} \alpha_0 \right) + v \left(-\frac{1}{18} \frac{\delta^3}{\beta^2} \alpha_0 \right) +$$

$$+ \frac{1}{9} \frac{\delta^2}{\beta^2} \alpha_0^2 = 0 \quad (3.85)$$

Vamos denotar as raízes reais desta equação por:

$$\bar{v}_N^+ = \bar{v}_N^+ (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) \quad (3.86)$$

N = número de raízes reais desta equação. A substituição destas raízes na expressão para μ^+ , a saber,

$$\mu^+ = -\frac{(\delta+2\beta v)}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2+4\beta\delta v-12\beta^2 v^2-8\beta\alpha_0}}{4\beta} \quad (3.87)$$

nos fornece as N funções $\bar{\mu}_N^+$ ($\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta$).

Chegamos portanto a um conjunto de N soluções para o nosso problema. Temos:

$$\bar{v}_N^+ = \bar{v}_N^+ (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) ,$$

$$\bar{\mu}_N^+ = \frac{-(\delta+2\beta(\bar{v}_N^+))}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2+4\beta\delta(\bar{v}_N^+)-12\beta^2(\bar{v}_N^+)^2-8\beta\alpha_0}}{4\beta} , \quad (3.88)$$

$$\bar{\eta}_N^+ = - \left[(\bar{v}_N^+) + \left\{ \frac{-(\delta+2\beta(\bar{v}_N^+))}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2+4\beta\delta(\bar{v}_N^+)-12\beta^2(\bar{v}_N^+)^2-8\beta\alpha_0}}{4\beta} \right\} \right] ,$$

$$A = 0$$

o que nos fornece:

$$\begin{aligned} a_N^+(t) &= e^{\bar{\mu}_N^+ \cdot t} \\ b_N^+(t) &= e^{\bar{v}_N^+ \cdot t} \\ c_N^+(t) &= e^{-(\bar{\mu}_N^+ + \bar{v}_N^+) \cdot t} = e^{\bar{\eta}_N^+ \cdot t} . \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$(iii) \quad \mu = \mu^- \quad \mu^- = \frac{-(\delta+2\beta v)}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2+4\beta\delta v-12\beta^2 v^2-8\beta\alpha_0}}{4\beta}$$

Procedimento análogo ao do caso (ii) para μ^+ nos fornece a mesma equação para v :

$$v^4 (\delta^2) + v^3 \left(\frac{1}{6} \frac{\delta^3}{\beta} \right) + v^2 \left(-\frac{1}{18} \frac{\delta^4}{\beta^2} + \frac{5}{6} \frac{\delta^2}{\beta} \alpha_0 \right) + v \left(-\frac{1}{18} \frac{\delta^3}{\beta^2} \alpha_0 \right) + \frac{1}{9} \frac{\delta^2}{\beta^2} \alpha_0^2 = 0 \quad (3.85)$$

Denotamos as raízes reais desta equação por

$$\bar{v}_N^- = \bar{v}_N^-(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta)$$

N = número de raízes reais da equação. Obviamente $\bar{v}_N^- = \bar{v}_N^+$.

Como no caso anterior, a substituição destas funções na expressão para μ^- indicada acima, nos fornece as novas funções $\bar{\mu}_N^- (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta)$.

Um novo conjunto de N soluções é então obtido:

$$\bar{v}_N^- = \bar{v}_N^-(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta) = \bar{\mu}_N^- = \frac{-(\delta+2\beta(\bar{v}_N^-))}{4\beta} - \sqrt{\delta^2+4\beta\delta(\bar{v}_N^-)-12\beta^2(\bar{v}_N^-)^2-8\beta\alpha_0}$$

$$\bar{\eta}_N^- = - \left[(\bar{v}_N^-) + \left\{ -\frac{(\delta+2\beta(\bar{v}_N^-))}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2+4\beta\delta(\bar{v}_N^-)-12\beta^2(\bar{v}_N^-)^2-8\beta\alpha_0}}{4\beta} \right\} \right], \quad (3.90)$$

$$A = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_N(t) &= e^{\bar{\mu}_N^- \cdot t} \\ \bar{b}_N(t) &= e^{\bar{v}_N^- \cdot t} \\ \bar{c}_N(t) &= e^{-(\bar{\mu}_N^- + \bar{v}_N^-) \cdot t} = e^{\bar{\eta}_N^- \cdot t} \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\bar{v}_N^- = \bar{v}_N^+ \quad (3.92)$$

É importante observarmos que os conjuntos de soluções referentes aos casos (i), (ii) e (iii), estudados acima, possuem interesse apenas matemático uma vez que, por possuírem densidade de energia negativa, não são fisicamente aceitáveis. De fato, temos que para $A = 0$,

$$p = p_0 = \rho_0 = \rho = -\frac{1}{\kappa} (\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu)$$

indicando que a densidade de energia é negativa para qualquer instante de tempo que considerarmos as soluções. Observamos também que estas soluções por serem de um tipo exponencial particular não apresentam evolução temporal para o parâmetro de expansão θ ;

$$\theta = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} \\ b(t) &= e^{\nu t} \\ c(t) &= e^{\eta t} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \mu \quad \frac{\dot{b}}{b} = \nu \quad \frac{\dot{c}}{c} = \eta \quad (3.95)$$

o que nos fornece:

$$\theta = \mu + \nu + \eta = 0 \quad (3.96)$$

Passamos agora ao estudo do caso $A = 1/3$. Para este

valor de A, o sistema de dez equações apresentado anteriormente assume a forma:

$$\frac{1}{3} = \kappa \rho_2 \quad (3.97)$$

$$\rho_1 = 0 \quad (3.98)$$

$$(\mu\nu + \mu\eta + \nu\eta) = \kappa \rho_0 \quad (3.99)$$

$$\frac{1}{3} = \kappa p_2 \quad (3.100)$$

$$\nu + \mu = \kappa \alpha_1 \mu - \kappa p_1 \quad (3.101)$$

$$\nu^2 + \eta^2 + \nu\eta = -\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\mu\right) + \kappa \alpha_0 \mu + \kappa \delta \mu^2 - \kappa p_0 \quad (3.102)$$

$$\mu + \eta = \kappa \alpha_1 \nu - \kappa p_1 \quad (3.103)$$

$$\mu^2 + \eta^2 + \mu\eta = -\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\nu\right) + \kappa \alpha_0 \nu + \kappa \delta \nu^2 - \kappa p_0 \quad (3.104)$$

$$\mu + \nu = \kappa \alpha_1 \eta - \kappa p_1 \quad (3.105)$$

$$\mu^2 + \eta^2 + \mu\nu = -\kappa(\mu^2 + \nu^2 + \eta^2) \left(\frac{\delta}{3} - \beta\eta\right) + \kappa \alpha_0 \eta + \kappa \delta \eta^2 - \kappa p_0 \quad (3.106)$$

A equação (3.97) nos fornece:

$$\rho_2 = \frac{1}{3\kappa}$$

Da equação (3.100) temos:

$$p_2 = \frac{1}{3\kappa}$$

Segue portanto que:

$$p_2 = \rho_2 = \frac{1}{3\kappa} \quad .$$

A soma das equações (3.101), (3.103) e (3.15) tem por resultado:

$$2(\mu+\nu+\eta) = \kappa \alpha_1 (\mu+\nu+\eta) - 3\kappa p_1 \quad (3.106)$$

Como $\phi = (\mu+\nu+\eta) = 0$, temos:

$$p_1 = 0 \quad .$$

Em vista da equação (3.98), $\rho_1 = 0$, temos:

$$p_1 = \rho_1 = 0 \quad .$$

Como no caso anterior ($A = 0$), a soma das equações (3.102), (3.104) e (3.106) nos leva a concluir que:

$$p_0 = \rho_0 = \frac{1}{\kappa} (\mu\nu+\eta\eta+\mu\eta) \quad . \quad (3.107)$$

Em função dos resultados anteriores podemos escrever:

$$p = \rho$$

A substituição do valor encontrado acima para p_1 ($p_1=0$) na equação (3.101) (ou (3.103) ou (3.105)) determina o valor para o parâmetro α_1 :

$$(\nu+\eta) = \kappa\alpha_1\mu - \kappa p_1 \rightarrow \nu - (\mu+\nu) = \kappa\alpha_1\mu \rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{\kappa} \quad (3.108)$$

Observamos que por independermos do valor de A , as equações relevantes para a determinação das funções $\mu=\mu(\alpha_0, \beta, \delta)$

e $v = v(\alpha_0, \beta, \delta)$, a saber, (3.102), (3.104) e (3.106) são mantidas inalteradas, o que nos possibilita utilizar todos os cálculos do caso anterior.

De posse destes resultados, apresentaremos a seguir as soluções possíveis para o caso $A = \frac{1}{3}$:

(i) $\mu = v$

$$(1) \quad \mu = v = 0 \quad , \quad \eta = -(\mu+v) = 0 \quad , \quad A = \frac{1}{3}$$

A solução fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a(t) &= t^{\frac{1}{3}} \\ b(t) &= t^{\frac{1}{3}} \\ c(t) &= t^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$(2) \quad \mu = v^+ = \frac{\delta}{12\beta} + \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - 24 \frac{\beta\alpha_0}{\delta^2}}$$
$$\eta = -(\mu + v^+) = -\left(\frac{\delta}{6\beta} + \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - 24 \frac{\beta\alpha_0}{\delta^2}}\right) \tag{3.110}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Estes valores nos fornecem a solução:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\ b(t) &= e^{v^+ t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\ c(t) &= e^{-(\mu+v^+)t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$(3) \quad \mu = \nu^- = \frac{\delta}{12\beta} - \frac{\delta}{12\beta} \sqrt{1 - 24 \frac{\beta\alpha_0}{\delta^2}},$$

$$\eta = -(\mu + \nu^-) = -\left(\frac{\delta}{6\beta} - \frac{\delta}{6\beta} \sqrt{1 - 24 \frac{\beta\alpha_0}{\delta^2}}\right) \quad (3.112)$$

$$A = \frac{1}{3} .$$

Para estes valores temos

$$a(t) = e^{\mu t} \cdot t^{\frac{1}{3}}$$

$$b(t) = e^{\nu^- t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \quad (3.113)$$

$$c(t) = e^{-(\mu + \nu^-) t} \cdot t^{\frac{1}{3}}$$

(ii) $\mu = \mu^+$

$$\mu^+ = \frac{-(\delta + 2\beta\nu)}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\beta\delta\nu - 12\beta^2\nu^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \quad (3.114)$$

Para este caso temos N funções \bar{v}_N^+ (α_0, β, δ), correspondendo as N raízes reais da equação de quarta ordem para ν .

Substituindo estas funções na expressão para μ^+ fornecida acima, temos as N funções $\bar{\mu}_N^+$ (α_0, β, δ).

Como resultado temos as funções:

$$\bar{v}_N^+ = \bar{v}_N^+ (\alpha_0, \beta, \delta) ,$$

$$\bar{\mu}_N^+ = \frac{-(\delta + 2\beta(\bar{v}_N^+))}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\beta\delta(\bar{v}_N^+) - 12\beta^2(\bar{v}_N^+)^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \quad (3.115)$$

$$\bar{\eta}_N^+ = - \left[(\bar{v}_N^+) + \left\{ \frac{-(\delta + 2\beta(\bar{v}_N^+))}{4\beta} + \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\beta\delta(\bar{v}_N^+) - 12\beta^2(\bar{v}_N^+)^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \right\} \right]$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Temos então como solução do sistema:

$$\begin{aligned}
 a_N^+(t) &= e^{\bar{\mu}_N^+ \cdot t} \\
 b_N^+(t) &= e^{\bar{v}_N^+ \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\
 c_N^+(t) &= e^{-(\bar{\mu}_N^+ + \bar{v}_N^+) \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}} = e^{\bar{\eta}_N^+ \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\text{(iii) } \mu = \mu^- \quad \mu^- = -\frac{(\delta + 2\beta v)}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\beta\delta v - 12\beta^2 v^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta}$$

Temos as N funções $\bar{v}_N^- (\alpha_0, \beta, \delta)$, que quando substituídas na equação acima nos fornece as N expressões para $\bar{\mu}_N^- (\alpha_0, \beta, \delta)$.

O último conjunto de N soluções é então obtido:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_N^- &= \bar{v}_N^- (\alpha_0, \beta, \delta) , \\
 \bar{\mu}_N^- &= \frac{-(\delta + 2\beta(\bar{v}_N^-))}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\beta\delta(\bar{v}_N^-) - 12\beta^2(\bar{v}_N^-)^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta}
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\bar{\eta}_k^- = - \left[(\bar{v}_N^-) + \left\{ -\frac{(\delta + 2\beta(\bar{v}_N^-))}{4\beta} - \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\beta\delta(\bar{v}_N^-) - 12\beta^2(\bar{v}_N^-)^2 - 8\beta\alpha_0}}{4\beta} \right\} \right]$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 a_N^-(t) &= e^{\bar{\mu}_N^- \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\
 b_N^-(t) &= e^{\bar{v}_N^- \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}
 c_N^-(t) &= e^{-(\bar{\mu}_N^- + \bar{v}_N^-) \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}} = e^{\bar{\eta}_N^- \cdot t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\
 \bar{v}_N^- &= \bar{v}_N^- \tag{3.119}
 \end{aligned}$$

Indicamos a seguir as condições a serem satisfeitas pelos parâmetros $\{\alpha_0, \beta, \delta\}$ de maneira a termos solução isotrópica e solução apresentando isotropia em um plano. Para o caso que estamos tratando, $A = \frac{1}{3}$, é fácil ver que somente $\mu = \nu = 0$ garante uma solução isotrópica. Para que $\mu \neq \nu$ não ocorra em nosso problema, a equação (3.58) que repetiremos a seguir, não deve possuir raízes reais:

$$2\beta^2 + (\delta + 2\beta\nu)\mu + (2\beta\nu^2 + \delta\nu + \alpha_0) = 0 \quad (3.58)$$

A condição para que isto ocorra é facilmente escrita:

$$(\delta + 2\beta\nu)^2 = 4(2\beta)(2\beta\nu^2 + \delta\nu + \alpha_0) < 0 \quad (3.120)$$

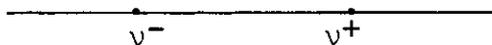
Desenvolvendo esta expressão temos:

$$12\beta^2\nu^2 + 4\beta\delta\nu + (8\beta\alpha_0 - \delta^2) > 0 \quad (3.121)$$

Resolvendo a equação associada, $12\beta^2\nu^2 + 4\beta\delta\nu + (8\beta\alpha_0 - \delta^2) = 0$, obtemos como raízes:

$$\begin{aligned} \nu(\pm) &= \frac{-4\beta\delta}{24\beta^2} \pm \frac{\sqrt{(4\beta\delta)^2 - 4(12\beta^2)(8\beta\alpha_0 - \delta^2)}}{24\beta^2} \\ \nu(\pm) &= -\frac{\delta}{6\beta} \pm \frac{\delta}{3\beta} \sqrt{1 - \frac{6\beta\alpha_0}{\delta^2}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Temos portanto, que a desigualdade acima é satisfeita se tivermos: $\nu > \nu^+$ ou $\nu < \nu^-$



Suponhamos que uma das condições acima é satisfeita. Temos então que $\mu = \nu$. Aplicando esta condição em (3.63), chega-se à seguinte equação,

$$6\beta\nu^3 - \delta\nu^2 + \alpha_0\nu = 0 \rightarrow \nu(6\beta\nu^2 - \delta\nu + \alpha_0) = 0 \quad , \quad (3.123)$$

cujas raízes são, $\nu = 0$ ou as raízes de $6\beta\nu^2 - \delta\nu + \alpha_0 = 0$. Devemos portanto evitar que a equação acima possua raízes diferentes de zero. Isto estará garantido se a equação $6\beta\nu^2 - \delta\nu + \alpha_0 = 0$ não possuir raízes reais. A condição para que isto ocorra é:

$$(-\delta)^2 - 4(6\beta)(\alpha_0) < 0 \quad \delta^2 - 24\beta\alpha_0 < 0 \rightarrow \delta^2 < 24\beta\alpha_0 \quad (3.124)$$

Podemos finalmente listar as condições para obtermos a solução isotrópica,

$$\begin{aligned} a(t) &= t^{\frac{1}{3}} \\ b(t) &= t^{\frac{1}{3}} \\ c(t) &= t^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad A = \frac{1}{3} \quad (3.125)$$

$$\text{São elas : } \nu > \nu^+ \quad \text{ou} \quad \nu < \nu^- \quad (3.126)$$

onde

$$\nu(\pm) = -\frac{\delta}{6\beta} \pm \frac{\delta}{3\beta} \sqrt{1 - \frac{6\beta\alpha_0}{\delta^2}}$$

e

$$\delta^2 < 24\beta\alpha_0 \quad . \quad (3.127)$$

Para obtermos isotropia no plano, as seguintes condições devem ser respeitadas:

- (a) $v > v^+$ ou $v < v^-$, condições que garantem a igualdade $\mu=v$.
 (b) $v \neq 0$, caso contrário teríamos isotropia e $\delta^2 > 24\beta\alpha_0$ para garantir a existência de uma raiz real.

Outro aspecto a ser destacado com relação às soluções com $A = \frac{1}{3}$ é a não positividade da energia para todos os instantes de tempo. Tomando a expressão encontrada para a densidade de energia,

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{3\kappa} t^{-2} \quad , \quad (3.128)$$

observamos que ela é positiva definida somente para o intervalo

$$0 < t < \frac{1}{3} \frac{1}{|\rho_0|} \quad . \quad (3.129)$$

Como $\rho_0 = -(\mu^2 + v^2 + \mu v)$, concluímos que o domínio de positividade da solução está relacionado ao grau de anisotropia da mesma.

Outro aspecto de interesse relativo às soluções com $A = \frac{1}{3}$ é a existência de evolução temporal para o parâmetro de expansão do Universo θ . Tomando a forma geral das soluções deste tipo:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} t^A \\ b(t) &= e^{\nu t} t^A \\ c(t) &= e^{\eta t} t^A \end{aligned} \quad \mu + \nu + \eta = 0 \quad (3.6)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= \mu + At^{-1} \\ \frac{\dot{b}}{b} &= \nu + At^{-1} \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \eta + At^{-1} \end{aligned} \quad . \quad (3.130)$$

Substituindo os valores acima na expressão para θ ficamos com:

$$\theta = \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] = [\mu + \nu + \eta + 3At^{-1}] = \frac{3A}{t} \quad (3.131)$$

$$A = \frac{1}{3} \rightarrow \theta = \frac{1}{t} \quad (3.132)$$

Indicaremos agora porque soluções do tipo analisado neste capítulo não apresentam condições para exibir o fenômeno de transição entre as fases anisotrópica e isotrópica. Sabemos que para uma solução descrever adequadamente este mecanismo ela deve fornecer expressões para as componentes do "shear" $\sigma^{\mu\nu}$, que se anulem à medida que o parâmetro de expansão do Universo, evolua na direção da região que garante isotropia para o modelo, caracterizando assim a transição procurada. Um cálculo imediato nos fornece as componentes de $\sigma^{\mu\nu}$ para as soluções que estudamos anteriormente:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\ b(t) &= e^{\nu t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \\ c(t) &= e^{\eta t} \cdot t^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu + \nu + \eta &= 0 \\ \mu &= \mu(\alpha_0, \beta, \delta) \\ \nu &= \nu(\alpha_0, \beta, \delta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Já vimos que para esta solução temos:

$$\theta = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = t^{-1} \quad (3.132)$$

As componentes do "shear" podem ser escritas como:

$$\sigma_1^1 = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3}\theta = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3}t^{-1} \quad (3.133)$$

Mas, $\frac{\dot{a}}{a} = \mu + \frac{1}{3}t^{-1}$, o que nos fornece:

$$\sigma_1^1 = -\mu \quad (3.133')$$

De maneira análoga temos que:

$$\sigma_2^2 = -\nu \quad (3.134)$$

$$\sigma_3^3 = \mu + \nu \quad . \quad (3.135)$$

Vemos imediatamente que as componentes do "shear" não dependem do tempo, ficando o grau de anisotropia fixado pelos valores de μ e ν . Estas grandezas por sua vez ficam bem determinadas ao estabelecermos os valores constantes dos parâmetros de fluido $\{ \alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta \}$, indicando a impossibilidade de evolução eventualmente controlada pelo parâmetro de expansão θ .

É importante também destacar que as soluções da forma estudada acima violam uma exigência necessária à presença do mecanismo de transição: a existência de estados de mínimo para a função energia livre de um fluido que interage gravitacionalmente, nas regiões dos parâmetros introduzidos no problema através da solução, que representem isotropia e anisotropia. Como veremos a seguir, a função $(\Delta F)_G(\mu, \nu)$ apresentará apenas um mínimo correspondendo ao estado de isotropia $\mu = \nu = 0$.

De fato, da expressão geométrica para o acréscimo de energia livre temos:

$$(\Delta F)_G = \gamma R_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = \gamma (R_{11} \sigma^{11} + R_{22} \sigma^{22} + R_{33} \sigma^{33}) \quad (3.136)$$

Temos que para a solução em consideração,

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\mu t} \cdot t^A \\ b(t) &= e^{\nu t} \cdot t^A \\ c(t) &= e^{\eta t} \cdot t^A \end{aligned} \quad (3.6)$$

as componentes do tensor de Ricci podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} R_{11} &= -(t^{-2}(3A^2-A) + t^{-1}(3\mu A)) \\ R_{22} &= -(t^{-2}(3A^2-A) + t^{-1}(3A\nu)) \\ R_{33} &= -(t^{-2}(3A^2-A) + t^{-1}(-3A\mu-3A\nu) + t^{-1}(3A\eta)) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} (\Delta F)_G &= \gamma\{t^{-1}(3\mu^2 A + 3\nu^2 A + 3\mu^2 A + 3\mu\nu A + 3\mu\nu A + 3\nu^2 A)\} \\ (\Delta F)_G(\mu, \nu) &= \gamma\{t^{-1}(6\mu^2 A + 6\nu^2 A + 6\mu\nu A)\} \end{aligned} \quad (3.138)$$

As condições de extremum para $(\Delta F)_G(\mu, \nu)$ são escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\Delta F)_G = 0 \longrightarrow \gamma t^{-1}(12\mu A + 6\nu A) = 0 \longrightarrow \gamma t^{-1}(4\mu + 2\nu) = 0 \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta F)_G = 0 \longrightarrow \gamma t^{-1}(12\nu A + 6\mu A) = 0 \longrightarrow \gamma t^{-1}(4\nu + 2\mu) = 0 \\ A = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3.140)$$

O único estado que satisfaz às condições acima é aquele que possui $\mu = \nu = 0$. Neste ponto $(\Delta F)_G$ assume seu valor mínimo como indicam as expressões abaixo:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\Delta F)_G \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \nu=0}} - \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} (\Delta F)_G \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \nu=0}} - \left(\frac{\partial^2 (\Delta F)_G}{\partial \mu \partial \nu} \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \nu=0}} \right)^2 > 0 \longrightarrow \frac{108A^2}{t^2} > 0 \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial^2 (\Delta F)_G}{\partial \mu^2} \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \nu=0}} > 0 \longrightarrow \frac{12A}{t} > 0 \text{ se } t > 0 \quad (3.142)$$

CAPÍTULO IV

ANÁLISE QUALITATIVA

A invenção do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, marca o início do desenvolvimento de uma área da Matemática responsável pelo grande avanço na compreensão dos fenômenos físicos ocorridos nos últimos séculos: as equações diferenciais. Cedo porém, percebeu-se a dificuldade e até mesmo a impossibilidade de se obter soluções analíticas para certas equações apresentadas, forçando o desenvolvimento de métodos numéricos e aproximados de solução, que receberam enorme impulso com o aprimoramento dos computadores modernos. No entanto, algumas questões de extrema importância para a compreensão dos fenômenos, aquelas ligadas ao comportamento das soluções para intervalos arbitrariamente grandes do tempo, não podem ser resolvidas no âmbito dos métodos aproximados. Estas propriedades das soluções, que chamaremos de globais, são objeto de estudos de um campo da Matemática denominado análise qualitativa. É importante destacar que a análise qualitativa não surge da dificuldade de um tratamento quantitativo de um dado problema. Ela é possuidora de métodos e objetivos próprios fornecendo, na maioria das vezes, uma visão abrangente do caso em estudo.

De uma maneira geral, podemos dizer que a investiga

ção qualitativa de sistemas dinâmicos consiste na determinação de suas propriedades topológicas e seus invariantes, tais como o número e o tipo de pontos de equilíbrio, número e posição relativa de círculos limites, etc. Por outro lado, fica fora de seus objetivos a determinação precisa de 'distâncias' e a forma exata das trajetórias no espaço de fase associado ao sistema, uma vez que estas propriedades não são necessariamente preservadas em um mapeamento topológico.

Neste capítulo efetuaremos a análise do sistema de equações de Einstein apresentado anteriormente (Capítulo II), visando identificar o fenômeno de transição entre as fases anisotrópica e isotrópica do fluido Stokesiano descrito no Capítulo I. Este estudo será realizado do ponto de vista da análise qualitativa de sistemas autônomos não lineares de segunda ordem, uma vez que mostramos ser possível a redução do sistema original, (Eqs. (2.9'), (2.10'), (2.11') e (2.12')), a um sistema desta natureza (Eqs. (2.23), (2.24) e (2.25)). Vamos nos limitar a uma exposição objetiva do procedimento empregado, fornecendo o enunciado de alguns teoremas utilizados na nossa análise sem demonstrá-los, remetendo o leitor às referências (22) e (23) para um tratamento detalhado.

A investigação da estrutura qualitativa global das curvas integrais associadas a um dado sistema autônomo de segunda ordem pode ser realizada em duas etapas complementares independentes: análise das trajetórias em uma região limitada do plano; comportamento das mesmas no infinito.

4.1 - ANÁLISE DA REGIÃO FINITA

Consideremos o seguinte sistema autônomo de segunda ordem, que representa o sistema de equações de Einstein para o fluido Stokesiano em evolução no caso de isotropia em um plano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) \\ P(x,y) &= -2ax+2ay+bx^2+cy^2+dxy-4fx^3+4fy^3-12fxy^2+12fx^2y \\ Q(x,y) &= ax-ay+gx^2+hy^2+kxy+2fx^3-2fy^3+6fxy^2-6fx^2y \end{aligned} \right\} (4.1)$$

onde os coeficientes são definidos por:

$$\left. \begin{aligned} a &= A_0 & f &= B \\ b &= [-2D-2A_1-1] & g &= [D+A_1] \\ c &= [-2D+4A_1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}] & h &= [D-2A_1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{2}] \\ d &= [4D-2A_1-\lambda-1] & k &= [-2D+A_1-\lambda] \end{aligned} \right\} (4.1')$$

Estas constantes por sua vez são definidas em termos dos parâmetros fundamentais do problema:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_0 & B &= \frac{1}{9} \kappa \beta \\ A_1 &= \frac{1}{3} \kappa \alpha_1 & D &= \frac{1}{9} \kappa \delta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vamos iniciar nossa análise visando estabelecer a configuração de suas curvas integrais na região do plano que deno-

taremos por G , onde x e y não assumem valores arbitrariamente grandes. Para isto devemos estudar o comportamento das soluções na vizinhança dos pontos críticos (ou de equilíbrio) do sistema, isto é, pontos de G para os quais o lado direito de (4.1) é nulo:

$$\begin{aligned} P(x_c, y_c) &= 0 \\ Q(x_c, y_c) &= 0 \end{aligned} \quad x_c, y_c \in G \quad (4.3)$$

A condição anterior para o caso em estudo traduz-se em:

$$P(x, y) = 0 = -2ax + 2ay + bx^2 + cy^2 + dxy - 4fx^3 + 4fy^3 - 12fxy^2 + 12fx^2y \quad (4.4)$$

$$Q(x, y) = 0 = ax^2 + ay + gx^2 + hy^2 + kxy - 2fx^3 + 2fy^3 + 6fxy^2 - 6fx^2y$$

O ponto $p_c = (0, 0)$ é uma solução óbvia do sistema acima e será o primeiro ponto crítico a ser analisado.

Visando simplificar nosso estudo, estabeleceremos condições sobre os coeficientes dos polinômios que compõem o sistema (4.4), de modo que eles não se anulem simultaneamente para nenhum outro ponto pertencente a G que não seja a origem. Naturalmente, toda restrição feita a valores destes coeficientes deve ser analisada em termos dos parâmetros originais do problema, presentes na expressão da pressão anisotrópica $\Pi_{\mu\nu}$ do fluido e na equação de estado utilizada. Caso estas restrições, de caráter puramente matemático, se traduzam em condições físicas incompatíveis com o problema em questão, deverão ser rejeitadas. Para evitarmos a existência de um ponto crítico

co diferente da origem, devemos exigir que um dos polinômios do sistema (4.4) não tenha raízes reais para (x,y) diferentes de $(0,0)$. Para tanto, multiplicamos a segunda equação por dois e somamos à primeira, obtendo:

$$2Q(x,y) = 2ax - 2ay + 2gx^2 + 2hy^2 + 2kxy + 4fx^3 - 4fy^3 + 12fxy^2 - 12fx^2y = 0 \quad (4.5)$$

$$2Q(x,y) + P(x,y) = (2g+b)x^2 + (2h+c)y^2 + (2k+d)xy = 0 \quad (4.6)$$

A equação (4.6) tem a forma de uma equação quadrática, $Ax^2 + Bx + C = 0$, com coeficientes

$$A = 2g+b$$

$$B = (2k+d)y$$

$$C = (2h+c)y^2$$

e raízes do tipo:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

A condição, $B^2 - 4AC < 0$ garante a inexistência de raízes reais diferentes da origem $((0,0))$.

$$B^2 - 4AC = y^2 [(2k+d)^2 - 4(2g+b)(2h+c)] \quad (4.7)$$

$$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow (2k+d)^2 - 4(2g+b)(2h+c) < 0 \text{ pois } y^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo esta expressão temos:

$$4k^2 + 4kd + d^2 - 16gh - 8gc - 8hb - 4bc < 0 \quad (4.8)$$

Buscando em (4.1') a definição das constantes envolvidas na ex-

pressão acima em termos dos parâmetros originais temos:

$$\begin{aligned}4k^2 &= 16D^2 - 16DA_1 + 4A_1^2 + 16D\lambda - 8A_1\lambda + 4\lambda^2 \\4kd &= -32D^2 + 32DA_1 - 8A_1^2 - 8D\lambda + 8D + 4\lambda A_1 - 4A_1 + 4\lambda^2 + 4\lambda \\d^2 &= 16D^2 - 16DA_1 + 4A_1^2 - 8D\lambda - 8D + 4A_1\lambda + 4A_1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\-16gh &= -16D^2 + 16A_1D + 8D\lambda + 24D + 32A_1^2 + 8\lambda A_1 + 24A_1 \\-8gc &= 16D^2 - 16A_1D + 4\lambda D - 4D - 32A_1^2 + 4\lambda A_1 - 4A_1 \\-8hb &= 16D^2 - 16A_1D - 32A_1^2 - 40A_1 - 8\lambda D - 8\lambda A_1 - 4\lambda - 16D - 12 \\-4bc &= -16D^2 + 16A_1D - 4\lambda D - 4D - 2\lambda + 32A_1^2 - 4A_1\lambda + 20A_1 + 2\end{aligned}\tag{4.9}$$

Com as parcelas explicitadas acima, a desigualdade após as simplificações cabíveis, toma a seguinte forma:

$$\lambda^2 - 1 < 0 \quad . \tag{4.10}$$

Temos portanto que o intervalo ao qual λ deve pertencer para que (4.10) seja satisfeita é:

$$-1 < \lambda < +1 \quad .$$

Lembrando que λ é o fator de proporcionalidade entre a pressão e a densidade de energia na equação de estado que estamos usando, $p = \lambda\rho$, vemos que a imposição da origem como único ponto crítico da região finita é perfeitamente possível, uma vez que gera consequências físicas realizáveis. A partir deste ponto estaremos supondo λ no intervalo obtido acima.

Seguimos com a análise da origem $p_{c_0} = (0,0)$, único ponto crítico da região finita do plano. Na vizinhança de um ponto crítico qualquer $p_c = (x_c, y_c)$ as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ podem ser linearizadas:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{p_c} (x-x_c) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{p_c} (y-y_c) + \phi(x,y) \\ Q(x,y) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{p_c} (x-x_c) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{p_c} (y-y_c) + \psi(x,y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

As funções $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ estão sujeitas às seguintes condições:

$$\phi(x_c, y_c) = \psi(x_c, y_c) = 0 \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{p_c} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{p_c} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{p_c} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{p_c} = 0$$

Definimos a matriz $\hat{\Omega}$ por:

$$(\hat{\Omega})_{p_c} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{p_c} & \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{p_c} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{p_c} & \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{p_c} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Seu determinante, $\Delta(p_c) \equiv \det[(\hat{\Omega})_{p_c}]$ nos fornece indicação sobre a natureza do ponto em análise; para $\Delta(p_c) \neq 0$, o ponto crítico p_c é classificado como simples. Caso $\Delta(p_c) = 0$ dizemos que p_c é um ponto de equilíbrio múltiplo. A estrutura topológica na vizinhança dos pontos de equilíbrio depende também da grandeza, $\sigma(p_c) \equiv \text{Traço} [(\hat{\Omega})_{p_c}]$, um outro invariante da matriz $\hat{\Omega}$. Calculando os objetos definidos acima para a ori -

gem temos:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 = -2a \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 = 2a \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 = a \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 = -a \quad (4.14)$$

$$\left(\hat{\Omega}\right)_0 = \begin{pmatrix} -2a & 2a \\ a & -a \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta(0) &= +2a^2 - 2a^2 = 0 \\ \sigma(0) &= -2a - a = -3a \end{aligned} \quad (4.14')$$

Os valores obtidos acima indicam que $p_{c_0} = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio múltiplo. São classificados desta forma os pontos de tangência entre as curvas definidas pelo sistema (4.3) e os pontos em que uma ou ambas as curvas citadas possuem uma singularidade.

Como já foi dito neste capítulo, o objetivo básico da análise qualitativa é a caracterização topológica global e/ou local do plano de fases. Algumas vezes no entanto, o interesse por uma descrição precisa do comportamento das trajetórias na vizinhança dos pontos de equilíbrio do sistema, motiva a investigação das direções de aproximação das mesmas. Este tipo de análise transcende as questões topológicas citadas, servindo em alguns casos para distinguir estruturas com topologias equivalentes. Um exemplo típico ocorre entre o foco e o nó, dois pontos de equilíbrio classificados como simples que possuem a nível de análise topológica, estruturas indistinguíveis. Um estudo das direções de aproximação das curvas aos pontos considerados, revela no entanto um comportamento bastante diferenciado. Para pontos de equilíbrio múltiplo a determinação destas direções é fundamental para a investigação de sua estrutura. Discutimos a seguir alguns aspectos gerais importantes na caracterização de

pontos desta natureza, culminando com a apresentação do teorema que nos indicará as estruturas topológicas possíveis para a origem do sistema.

Uma vez que nossa análise envolverá a determinação de direções de aproximação é conveniente termos o sistema escrito em coordenadas polares. Para isto, suponhamos que a expansão de Taylor para as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ em torno da origem tenham a forma:

$$P(x,y) = P_m(x,y) + \phi(x,y) \tag{4.15}$$

$$Q(x,y) = Q_m(x,y) + \psi(x,y)$$

$P_m(x,y)$ e $Q_m(x,y)$ são polinômios homogêneos de ordem $m \geq 1$ e as funções $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ simbolizam os termos de ordem superior. A passagem para coordenadas polares, utilizando as equações de transformação,

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{aligned} \tag{4.16}$$

nos permite escrever o sistema (4.1) da seguinte maneira:

$$\frac{d\rho}{dt} = P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + Q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta \tag{4.17}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho} [Q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta - P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta]$$

Levando em consideração a forma das funções P e Q como dadas em (4.15), podemos escrever o sistema acima como:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho^m [P_m(\theta)\cos\theta + Q_m(\theta)\text{sen}\theta + \rho\phi(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \rho^{m-1} [Q_m(\theta)\cos\theta - P_m(\theta)\text{sen}\theta + \rho\bar{\psi}(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$P_m(\theta) \equiv P_m(\cos\theta, \text{sen}\theta) \quad Q_m(\theta) \equiv Q_m(\cos\theta, \text{sen}\theta)$$

Introduzimos a seguir um novo parâmetro para a trajetória,

$$d\tau = \rho^{m-1}(t) dt, \quad (4.19)$$

que nos permite colocar o sistema anterior na forma:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho [P_m(\theta)\cos\theta + Q_m(\theta)\text{sen}\theta + \rho\phi] \quad (4.20)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = Q_m(\theta)\cos\theta - P_m(\theta)\text{sen}\theta + \rho\bar{\psi}$$

A definição do polinômio $N(x,y) = x Q_m(x,y) - y P_m(x,y)$, nos leva a considerar dois casos distintos:

(a) $N(x,y)$ não se anula identicamente.

Neste caso, a equação

$$Q_m(\cos\theta, \text{sen}\theta)\cos\theta - P_m(\cos\theta, \text{sen}\theta)\text{sen}\theta = 0 \quad (4.21)$$

pode não ter raízes reais ou ter no máximo $m+1$ delas no intervalo $0 \leq \theta \leq \Pi$. Denotaremos estas raízes por:

$$\theta_{kn} = \theta_k + \Pi n \quad 1 \leq k \leq s, \quad s \leq m+1 \quad (4.22) \\ -\infty < n < +\infty$$

Uma rápida inspeção no sistema (4.20) indica que todos os seus pontos de equilíbrio são representados por:

$$\rho = 0 \quad , \quad \theta = \theta_{kn} \quad . \quad (4.23)$$

Uma investigação cuidadosa das possíveis trajetórias do sistema citado pode ser efetuada, revelando duas situações possíveis ; na primeira, $\theta(\tau) \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$) à medida que $\tau \rightarrow +\infty$, indicando um comportamento do tipo espiral para a trajetória do sistema original (4.1), na direção da origem. A segunda possibilidade indica trajetórias do sistema (4.20) tendendo para um de seus pontos de equilíbrio ($\rho = 0, \theta = \theta_{kn}$), o que corresponde no sistema original (4.1) a trajetórias tendendo à origem com valor da tangente bem definida. De fato, se considerarmos o sistema (4.1) na forma,

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + \phi(x, y) \quad (4.24)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + \psi(x, y)$$

temos que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(x, y) + \psi(x, y)}{P_m(x, y) + \phi(x, y)} \quad .$$

Transformando o lado direito para coordenadas polares, temos, após cancelarmos o termo comum ρ^m :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(\cos\theta, \text{sen}\theta) + \rho\psi_1(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)}{P_m(\cos\theta, \text{sen}\theta) + \rho\phi_1(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)} \quad ,$$

onde ψ_1 e ϕ_1 são funções analíticas.

É fácil portanto ver desta expressão que à medida que $\rho \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \theta^*$, $\frac{dy}{dx}$ possui um limite bem definido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)}{P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)} \quad (4.25)$$

Por hipótese, temos que θ^* é uma solução de (4.21), o que nos permite escrever:

$$\cos\theta^* Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) - \sin\theta^* P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\sin\theta^*}{\cos\theta^*} = \operatorname{tg}\theta^* = \frac{Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)}{P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)} \quad (4.27)$$

Concluimos portanto que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ indicando a aproximação da origem segundo trajetórias com valor de tangente bem definida para o sistema original (4.1).

Passamos a seguir ao segundo caso mencionado.

(b) $N(x,y)$ é identicamente nulo.

Uma vez que $XQ_m(x,y) - Y P_m(x,y) \equiv 0$, podemos escrever,

$$Q_m(x,y) = y Q_{m-1}(x,y)$$

$$P_m(x,y) = x Q_{m-1}(x,y) \quad ,$$

onde $Q_{m-1}(x,y)$ é um polinômio homogêneo não nulo de ordem $m-1$.

Sob estas condições temos o sistema (4.1), depois de transformado para coordenadas polares, expresso como:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = [Q_{m-1}(\cos\theta, \text{sen}\theta) + \rho\bar{\phi}(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)] \quad (4.28)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \rho^r [Z(\cos\theta, \text{sen}\theta) + \rho\bar{\psi}(\rho, \cos\theta, \text{sen}\theta)] \quad .$$

A seguinte mudança de parâmetros foi efetuada:

$$d\tau = \rho^m(t) dt \quad . \quad (4.29)$$

$Z(\cos\theta, \text{sen}\theta)$ é um polinômio homogêneo de ordem $m+r+2$. Os estados de equilíbrio para o sistema (4.28) são da forma, $\rho = 0$, $\theta = \theta_{kn}$ onde θ_{kn} é raiz da equação:

$$Q_{m-1}(\cos\theta, \text{sen}\theta) = 0 \quad (4.30)$$

$$\theta = \theta_{kn} = \theta_k + \Pi_n \quad \begin{matrix} 1 \leq k \leq s & s \leq m-1 \\ -\infty < n < +\infty \end{matrix} \quad (4.31)$$

Às direções θ , que satisfazem à equação acima, chamaremos de direções singulares.

Um estudo detalhado das trajetórias do sistema (4.28) nos permite algumas afirmações sobre o sistema original (4.1):

Se θ^* é uma direção singular de (4.28), podemos ter um número infinito de trajetórias tendendo à origem de (4.1), um número finito delas ou nenhuma. Para qualquer outra direção não singular θ , existe exatamente uma trajetória tendendo à origem na direção θ .

A breve análise efetuada nas últimas páginas tem como único objetivo indicar como a noção de direção de aproximação, que estará presente no teorema que apresentaremos a seguir, sur

ge naturalmente quando investigamos o sistema em coordenadas polares. A mudança de sistema de coordenadas é um procedimento frequente e de grande importância na análise qualitativa.

Preparamos a seguir o caminho para formularmos o teorema decisivo na caracterização da estrutura topológica da origem do sistema (4.1), único ponto crítico da região finita do plano.

Consideremos o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + P_2(x, y) \tag{4.32}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy + Q_2(x, y)$$

com

$$\Delta(0) = AD - BC = 0$$

$$\sigma(0) = A + D \neq 0 \quad , \tag{4.33}$$

onde $P_2(x, y)$ e $Q_2(x, y)$ são funções analíticas na vizinhança da origem, que é um ponto de equilíbrio isolado e suas expansões em série envolvem apenas termos de segunda ordem ou superiores. Sob estas condições, podemos afirmar que existe uma transformação linear não singular,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -Dx + By \\ \bar{y} &= Ax + Dy \\ \bar{t} &= (A+D)t \end{aligned} \tag{4.34}$$

que reduz o sistema (4.32) à forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}\tag{4.35}$$

É útil observarmos que quando o sistema está escrito desta maneira, a determinação do polinômio $N(x,y) = xQ_m(x,y) - yP_m(x,y)$, com $P_1(x,y) = 0$ e $Q_1(x,y) = y$, nos fornece $N(x,y) = xy$, situando o problema no caso (a) discutido anteriormente. Nesta situação, a equação $\cos\theta\sin\theta = 0$ nos indica as direções de aproximação das trajetórias à origem; são elas: $0, \Pi, \frac{\Pi}{2}$ e $\frac{3\Pi}{2}$. Entretanto, a determinação do número e natureza destas trajetórias é tarefa bem mais complicada que não reproduziremos aqui, mas cujo resultado podemos apresentar sob a forma de um teorema (22).

Teorema A: Seja a origem um ponto de equilíbrio isolado do sistema (4.35). Seja $\phi(\bar{x})$ a solução da equação $\bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ na vizinhança de $p_{C_0} = (0,0)$ e suponhamos que a expansão em série da função $\psi(\bar{x}) = \bar{P}_2(\bar{x}, \phi(\bar{x}))$ tem a forma, $\psi(\bar{x}) = \Delta_m \bar{x}^m + \dots$, onde $m \geq 2, \Delta_m \neq 0$. Temos então:

- 1) Se m é ímpar e $\Delta_m > 0, p_C = (0,0)$ tem a estrutura topológica de um nó.
- 2) Se m é ímpar e $\Delta_m < 0, p_C(0,0)$ é um ponto de sela, cujas separatrizes tendem à origem nas direções $0, \Pi, \frac{\Pi}{2}$ e $\frac{3\Pi}{2}$.
- 3) Se m é par, a estrutura topológica da origem é denominada nó-sela, caracterizada pela união de um

setor parabólico com dois setores hiperbólicos ⁽²²⁾.
 Se $\Delta_m < 0$ os setores hiperbólicos contêm um segmento da parte positiva do eixo x, se $\Delta_m > 0$ eles contêm um segmento da parte negativa do eixo x.

Apresentado o teorema, passamos à tarefa de identificar em qual das situações previstas pelo mesmo, nosso sistema (4.1) se enquadra. Para isso, temos que levá-lo à forma (4.35) através de uma transformação linear do tipo (4.34).

Repetimos aqui a expressão (4.1) que é o sistema que estamos analisando, em sua forma original:

$$\frac{dx}{dt} = -2ax+2ay+bx^2-cy^2+dxy-4fx^3+4fy^3-12fxy^2+12fx^2y \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = ax+ay+gx^2+hy^2+kxy+2fx^3-2fy^3+6fxy^2-6fx^2y .$$

É imediato colocarmos o sistema acima na forma,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + P_2(x,y) \quad (4.32)$$

$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy + Q_2(x,y) ,$$

através das identificações:

$$A = -2a$$

$$B = 2a \quad P_2(x,y)=bx^2+cy^2+dxy-4fx^3+4fy^3-12fxy^2+12fx^2y$$

$$C = a \quad Q_2(x,y)=gx^2+hy^2+kxy+2fx^3-2fy^3+6fxy^2-6fx^2y .$$

$$D = -a$$

Em seguida efetuamos a transformação (4.34) que objetiva reduzir o sistema à configuração mais simples (4.35).

Com os coeficientes definidos anteriormente, as equações de transformação podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax + 2ay \\ \bar{y} &= -2ax + 2ay \\ \bar{t} &= -3at\end{aligned}\tag{4.36}$$

A aplicação destas equações de transformação em nosso sistema original (4.1) fornece, após longa manipulação algébrica, o sistema na forma desejada:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = M\bar{x}^2 + N\bar{y}^2 + R\bar{x}\bar{y} = \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y})\tag{4.37}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{y} + T\bar{x}^2 + V\bar{y}^2 + W\bar{x}\bar{y} + S\bar{y}^3 = \bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y})$$

Os coeficientes acima têm a seguinte definição em termos dos coeficientes do sistema (4.1).

$$\begin{aligned}M &= \frac{-(2g+2h+2k+b+c+d)}{27 a^2} \\ N &= \frac{(-8g-2h+4k-4b-c+2d)}{108 a^2} \\ R &= \frac{(8g-4h+2k+4b-2c+d)}{54 a^2} \\ T &= \frac{(2b+2c+2d-2g-2h-2k)}{27 a^2} \\ V &= \frac{(4b+c-2d-4g-h+2k)}{54 a^2} \\ W &= \frac{(-4b+2c-d+4g-2h+k)}{27 a^2} \\ S &= \frac{f}{2a^3}\end{aligned}\tag{4.38}$$

Dando sequência à nossa análise, passamos ao cálculo da função $\bar{y} = \phi(\bar{x})$, solução da equação $\bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, como indicado no teorema.

Esta última equação, para o caso em estudo se escreve:

$$\bar{y} + T\bar{x}^2 + V\bar{y}^2 + W\bar{x}\bar{y} + S\bar{y}^3 = 0 \quad .$$

A hipótese de termos $\phi(\bar{x})$ como uma série de potências em \bar{x} , $\phi(\bar{x}) = c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + c_3\bar{x}^3 + \dots$, nos permite o cálculo das constantes:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= -T \\ c_3 &= TW \\ c_4 &= -VT^2 & c_6 &= ST^3 \end{aligned} \tag{4.39}$$

De posse desta função, $\phi(\bar{x}) = -T\bar{x}^2 + TW\bar{x}^3 - VT^2\bar{x}^4 + ST^3\bar{x}^6$, passamos ao cálculo de $\psi(\bar{x}) = \bar{P}_2(\bar{x}, \phi(\bar{x}))$, que definirá através de seus coeficientes, a estrutura topológica da origem.

Temos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\bar{x}) &= \bar{P}_2(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \\ \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}) &= M\bar{x}^2 + N\bar{y}^2 + R\bar{x}\bar{y} \\ \bar{y} = \phi(\bar{x}) &= -T\bar{x}^2 + TW\bar{x}^3 - VT^2\bar{x}^4 + ST^3\bar{x}^6 \end{aligned} \tag{4.40}$$

As substituições acima nos fornecem para $\psi(\bar{x})$ a seguinte expressão:

$$\psi(\bar{x}) = M\bar{x}^2 - TR\bar{x}^3 + \dots \tag{4.41}$$

O teorema enunciado anteriormente indica que o tipo

de ponto em análise depende fundamentalmente das características do coeficiente e da potência do primeiro termo da expansão acima. Neste caso temos:

$$\psi(\bar{x}) = \Delta_m x^m + \dots \quad m = 2 = \text{número par} \\ \Delta_m = M \quad (4.42)$$

Os dados acima caracterizam a origem do sistema (4.37), segundo indicações do teorema A apresentado, como sendo um ponto de equilíbrio múltiplo denominado nó-sela. A determinação do sinal de $\Delta_m = M$, que efetuaremos a seguir, definirá com precisão a configuração das curvas integrais.

Buscando a definição de M em termos das constantes originais, encontramos através das equações (4.38) e (4.1') a seguinte expressão:

$$M = \frac{\lambda + 1}{6A_0^2} \quad (4.43)$$

Temos ainda que, $A_0 = \frac{1}{3} \kappa \alpha_0$, o que nos fornece M em termos dos parâmetros fundamentais do problema:

$$M = \frac{3}{2} \frac{\lambda + 1}{\kappa^2 \alpha_0^2}, \quad -1 < \lambda < 1 \quad (4.44)$$

Temos portanto que $\Delta_m = M > 0$, fato que nos leva finalmente à caracterização completa da origem do sistema (4.37) (Figura 4.1).

Inspeção na Figura 4.1, revela as direções $0, \Pi, \frac{\Pi}{2}$ e $\frac{3\Pi}{2}$ como as direções de aproximação das trajetórias à origem. No entanto, esta não é a configuração final das curvas integrais para o nosso problema, uma vez que a forma adequada do sistema

à aplicação do teorema, só foi conseguida a partir da transformação linear (4.36). O último passo portanto é utilizar estas equações de transformação a fim de determinar a posição precisa desta figura no plano (x,y) .

O fato da transformação mencionada ser linear, garante que nenhuma alteração topológica ocorrerá.

Temos:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax+2ay \\ \bar{y} &= -2ax + 2ay \\ \bar{t} &= -3at \quad .\end{aligned}\tag{4.36}$$

Para obtermos a equação para o eixo \bar{x} nas variáveis (x,y) fazemos em (4.36), $\bar{y} = 0$; obtemos então:

$$-2ax + 2ay = 0 \quad 2ax = 2ay \rightarrow x = y \tag{4.45}$$

(Figura 4.2). Da mesma maneira, encontramos o eixo \bar{y} fazendo $\bar{x} = 0$;

$$ax + 2ay = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0 \tag{4.46}$$

(Figura 4.2).

As considerações anteriores, aliadas ao fato que efetuamos uma inversão no parâmetro temporal, nos permite apresentar a figura final que representa a configuração das curvas integrais do sistema (4.1) na vizinhança de sua origem.

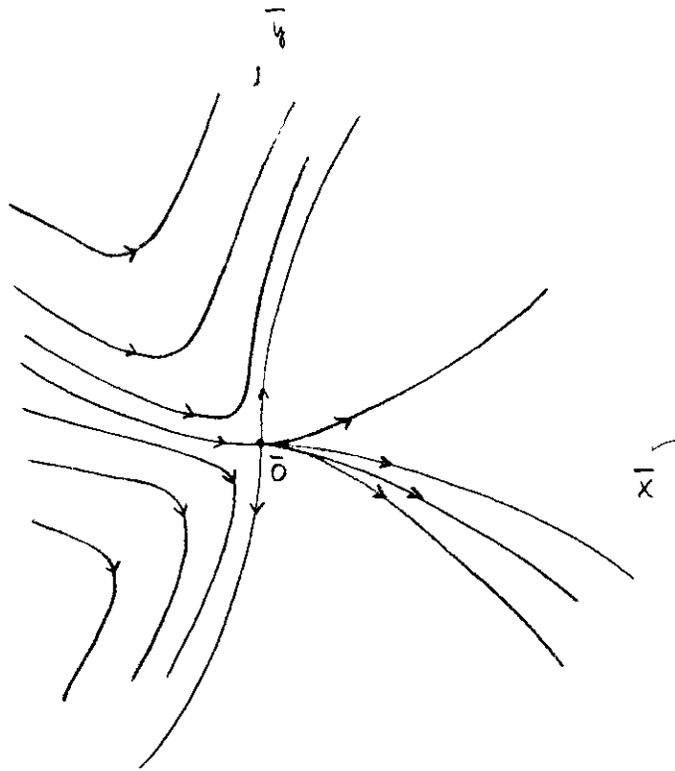


FIGURA 4.1 - Configuração das curvas integrais na vizinhança da origem do sistema (4.37).

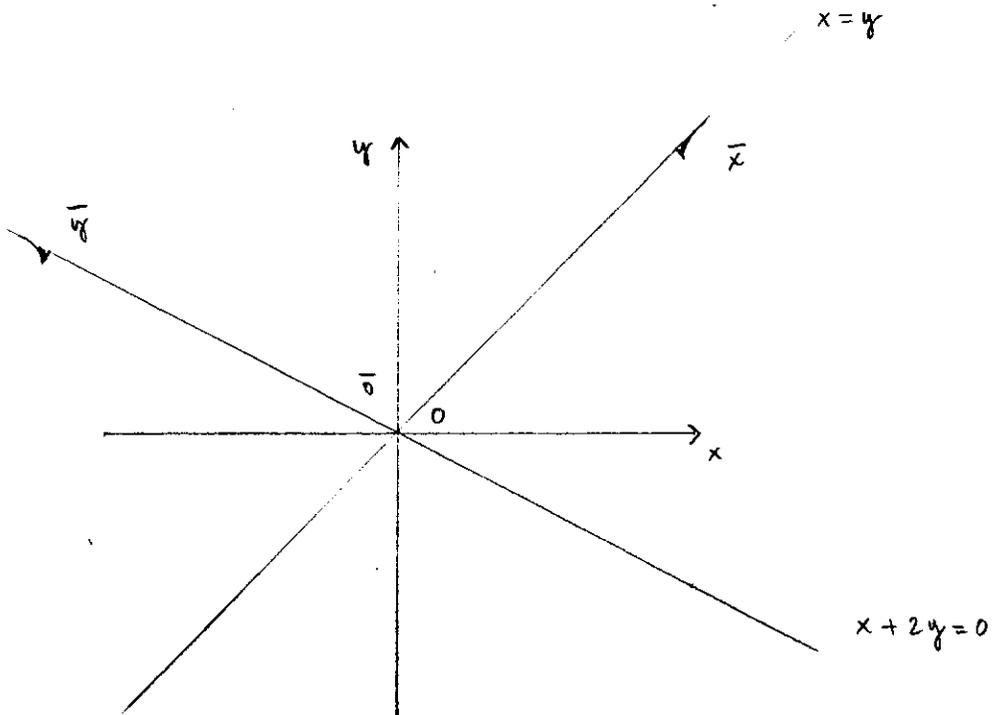


FIGURA 4.2 - Posição dos eixos \bar{x} e \bar{y} no plano (x,y) .

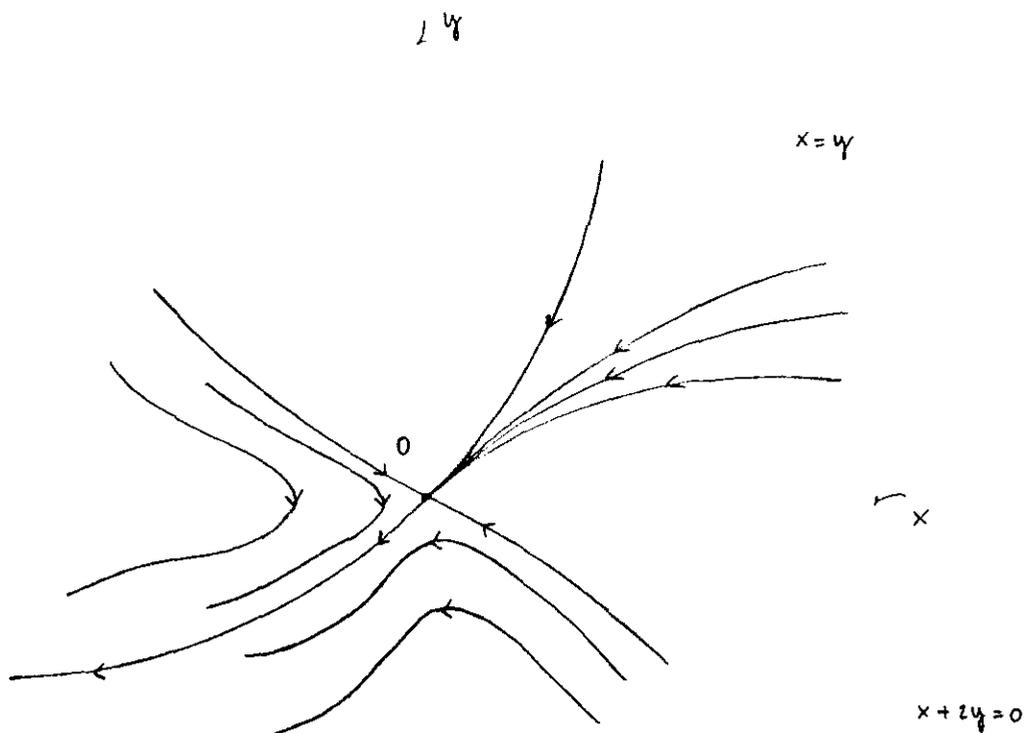


FIGURA 4.3 - Configuração das curvas integrais na vizinhança da origem do sistema (4.1).

4.2 - ANÁLISE NO INFINITO

O estudo do comportamento de um sistema dinâmico no seu plano de fase associado não pode ser considerado completo sem informações sobre regiões arbitrariamente distantes da origem. Estas informações, obtidas segundo técnicas especiais que descreveremos nesta seção sob o título de "Análise no Infinito", além de nos proporcionar uma visão global do sistema, fornecem em um grande número de casos importantes pistas para a caracterização do mesmo na região limitada do plano. O método de análise a ser empregado consiste na compactificação do espaço de fase associado ao sistema, completado por elementos do infinito através de projeção do plano na chamada Esfera de

Poincaré (Figura 4.4). Uma construção geométrica relacionada a esta projeção nos fornece as transformações de coordenadas, denominadas de Transformações de Poincaré, a serem efetuadas no sistema original com o objetivo de obtermos os pontos críticos no infinito e as estruturas topológicas em suas vizinhanças.

Passamos a seguir à descrição deste procedimento.

Vamos considerar a esfera unitária de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad .$$

(Ver Figura 4.4.) Tangente ao seu polo sul, denotado por S (de coordenadas $S = (0,0,-1)$), definiremos o plano de fase α associado ao sistema dinâmico (4.1) que estamos analisando, de modo que a origem do sistema de coordenadas (x,y) nele definido, esteja situada exatamente neste ponto de tangência. A cada ponto M de α , associamos através de um segmento de reta que passa por este ponto e pela origem da esfera, 2 pontos antípodas M' e M'' na mesma. À medida que tomamos pontos mais distantes da origem, os dois pontos definidos na esfera aproximam-se do equador. É natural portanto associarmos quaisquer dois pontos antípodas do equador a um mesmo ponto no infinito do plano. Definimos agora um plano vertical α^* tangente ao ponto de interseção do eixo X com o equador da esfera. Denotamos este ponto por C (e seu antípoda por C') e nele fixamos a origem de um sistema de coordenadas (u,z) para α^* . Os eixos u e z são construídos de forma a serem paralelos aos eixos Y e Z respectivamente. No entanto, o eixo z aponta no sentido inverso de Z.

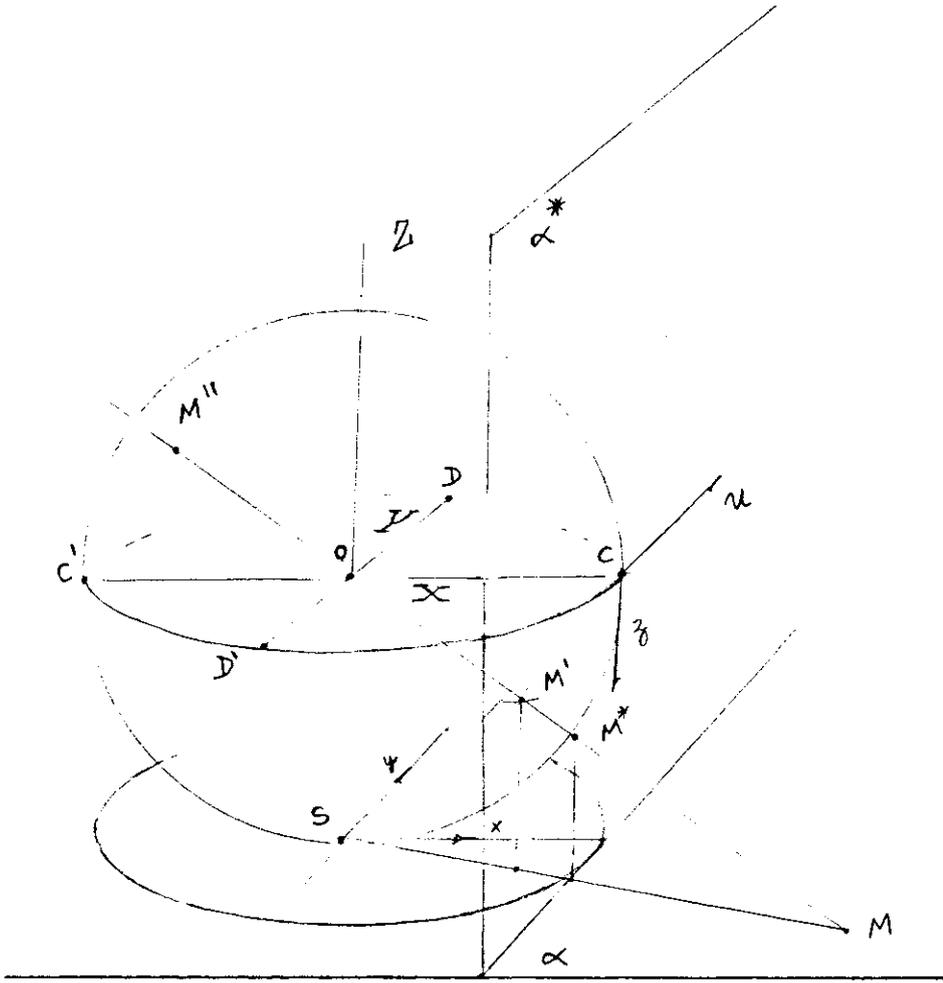


FIGURA 4.4 - Esfera de Poincaré.

Agora, se a cada ponto M do plano α considerarmos a reta que passa por este ponto e o centro da esfera, teremos definido, além dos já citados pontos M' e M'' , o ponto M^* , resultado da interseção desta reta com o plano α^* . Se M estiver no infinito do plano, terá seus correspondentes M' e M'' situados no equador da esfera e o ponto M^* será um ponto bem definido no eixo $z = 0$. Vemos portanto que através deste tipo de projeção, podemos investigar as trajetórias na vizinhança de qualquer ponto do equador, com exceção dos pontos definidos pela interseção do eixo Y com a esfera que denotaremos por D e D' , através de suas vizinhanças correspondentes situadas no eixo $z = 0$ do plano α^* . Para determinarmos o comportamento das trajetórias na vizinhança de D e D' devemos considerar, ao invés do plano α^* , o plano $\tilde{\alpha}$ tangente à esfera em D e procedermos de maneira análoga ao caso anterior: fixamos em D a origem de um sistema de coordenadas (z, v) com o eixo v paralelo e com o mesmo sentido de X e o eixo z paralelo e com o sentido contrário a Z . Através da projeção central os pontos D e D' determinam um ponto bem definido em $\tilde{\alpha}$ que é sua origem. O estudo da vizinhança de D e D' se traduz neste caso ao estudo da vizinhança da origem do sistema de coordenadas (z, v) .

Vamos determinar agora as transformações de variáveis a serem efetuadas no sistema dinâmico (4.1) a fim de que ele revele os pontos críticos e o comportamento das curvas no infinito do plano. Seja M um ponto do plano α , que não está situado no eixo y , e M^* seu correspondente em α^* (ver Fig. 4.5); estes pontos têm por coordenadas espaciais $(x, y, -1)$ e $(1, u, -z)$, respectivamente, e estão situados na mesma linha reta que passa

pelo centro da esfera como já mencionado. Podemos então escrever as relações (Fig.4.5),

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{u} = \frac{1}{z} \quad , \quad (4.47)$$

que nos fornecem as equações de transformação procuradas :

$$x = \frac{1}{z} \quad ; \quad y = \frac{u}{z} \quad (4.48)$$

e suas inversas:

$$z = \frac{1}{x} \quad ; \quad u = \frac{y}{x} \quad (4.49)$$

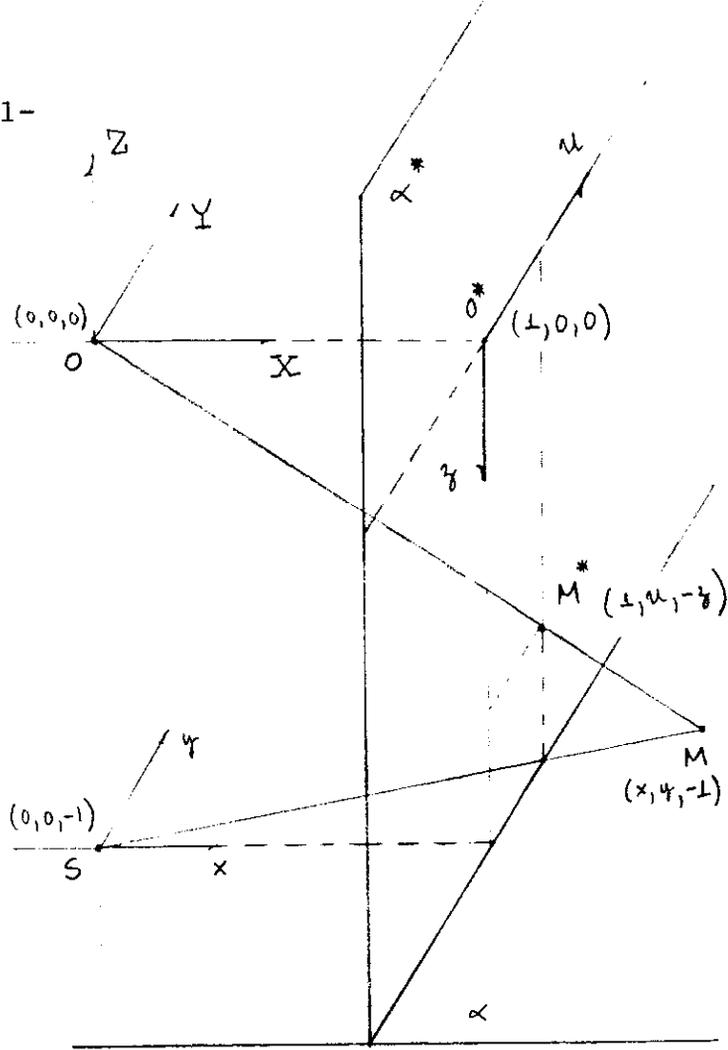


FIGURA 4.5 - Transformações de Poincaré.

Consideremos agora o sistema original (4.1) cujo comportamento no infinito desejamos determinar:

$$\frac{dx}{dt} = -2ax+2ay+bx^2+cy^2+dxy-4fx^3+4fy^3-12fxy^2+12fx^2y \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = ax-ay+gx^2+hy^2+kxy+2fx^3-2fy^3+6fxy^2-6fx^2y \quad .$$

A aplicação das equações de transformação (4.48) neste sistema, nos fornece, após um cálculo imediato,

$$\frac{du}{dt} = \frac{P^*(u,z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[2f+gz+2fu+az^2+(k-b)uz-6fu^2+10fu^3+ \right. \\ \left. +auz^2+(h-d)u^2z-4fu^4-2au^2z^2-cu^3z \right] \quad (4.50)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q^*(u,z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[4fz-bz^2-12fuz+2az^3-duz^2+12fu^2z- \right. \\ \left. -2auz^3-cu^2z^2-4fu^3z \right]$$

O sistema acima não é definido para $z = 0$. Para $z \neq 0$ as trajetórias deste sistema são projeções em α^* das trajetórias do sistema (4.1) no plano α . Em seguida, redefinimos o parâmetro temporal através de:

$$d\tau = \frac{dt}{z^2} \quad (4.51)$$

Substituição desta expressão em (4.50) nos fornece:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} = P^*(u, z) = & 2f+gz-2fu+az^2+(k-b)uz-6fu^2+10fu^3+auz^2+ \\ & +(h-d)u^2z-4fu^4-2au^2z^2-cu^3z . \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = Q^*(u, z) = 4fz-bz^2-12fuz+2az^3-duz^2+12fu^2z-2auz^3-cu^2z^2-4fu^3z.$$

Para $z \neq 0$ as trajetórias deste sistema coincidem com as do sistema (4.50). Em $z = 0$ ele está agora perfeitamente definido e será através de sua análise que obteremos o comportamento de (4.1) na região infinita do plano. A primeira informação a ser extraída deste sistema é relativa aos possíveis pontos críticos existentes no infinito. Por construção, eles estão localizados no eixo $z = 0$ e podem ser obtidos através da solução do sistema:

$$\begin{aligned} P^*(u, 0) &= 0 \\ Q^*(u, 0) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Tomando as expressões para os polinômios acima, no lado direito do sistema (4.52) e fazendo $z = 0$, obtemos:

$$P^*(u,0) = -4fu^4 + 10fu^3 - 6fu^2 - 2fu + 2f = 0 \quad (4.54)$$

$$Q^*(u,0) = 0 \quad .$$

A primeira equação pode ser colocada na forma,

$$(u-1)^3(-2u-1) = 0 \quad , \quad (4.55)$$

e nos fornece como raízes:

$$u = 1 \quad \text{e} \quad u = -\frac{1}{2} \quad . \quad (4.56)$$

Como resultado obtemos dois pontos críticos da forma, $p_c = (u, z=0)$, que chamaremos de "pontos críticos do infinito"; são eles:

$$p_{c_1} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad p_{c_2} = (1, 0) \quad .$$

Uma projeção central dos pontos acima pertencentes a α^* , nos fornece os pontos críticos de (4.1) no equador da esfera. Do mesmo modo, análise das trajetórias em α^* do sistema (4.52) na vizinhança destes pontos de equilíbrio, são transferidos via projeção central à vizinhança de seus correspondentes no equador da esfera, fornecendo assim a configuração das curvas integrais no infinito.

Como já mencionamos, o procedimento anterior utilizando o plano α^* não consegue dar conta da análise de todos os pontos do equador. Para estudarmos a vizinhança dos pontos D e D' vimos ser necessária a definição de um outro plano, que denotamos por $\tilde{\alpha}$, e de seu sistema de coordenadas associado (v, z) . Uma análise idêntica à efetuada nas últimas páginas po-

de ser feita para esta nova situação, trazendo como possível novidade a inclusão da origem do plano (v, z) ao conjunto dos pontos críticos do infinito que já obtivemos aqui. Para este caso, as transformações de coordenadas, obtidas de maneira idêntica às anteriores, tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{z} \\ y &= \frac{1}{z} \end{aligned} \quad , \quad (4.57)$$

e suas inversas:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y} \\ v &= \frac{x}{z} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Aplicação destas transformações ao sistema (4.1), seguido de uma redefinição do parâmetro temporal,

$$d\tau = \frac{dt}{z^2} \quad (4.59)$$

nos fornece:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} = & -2avz^2 + 2az^2 + bv^2z + cz + dvz - 4fv^3 + 4f - 12fv + 12fv^2 - av^2z^2 + \\ & + avz^2 - gv^3z - hvz - kv^2z - 2fv^4 + 2fv - 6fv^2 + 6fv^3 = \tilde{P}(v, z) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -avz^3 + az^3 - gv^2z^2 - hz^2 - kvz^2 - 2fv^3z + 2fz - 6fvz + 6fv^2z = \tilde{Q}(v, z)$$

Como no caso anterior os pontos críticos procurados, que agora são da forma $p_c = (z=0, v)$ são obtidos pela solução de:

$$\tilde{P}(v, 0) = 0 \quad ; \quad \tilde{Q}(v, 0) = 0 \quad (4.61)$$

Para o sistema anterior as equações acima são escritas como:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(v,0) &\equiv 0 \\ \tilde{P}(v,0) &= -2fv^4 + 2fv^3 + 6gv^2 - 10fv + 4f = 0 .\end{aligned}\tag{4.62}$$

A segunda equação pode ser colocada na forma,

$$(v-1)^3(v+2) = 0 \quad ,\tag{4.63}$$

fornecendo as raízes

$$v = 1 \quad \text{e} \quad v = -2\tag{4.64}$$

Como a origem ($v = 0, z = 0$) não é um ponto crítico para este sistema, o cálculo efetuado não nos acrescenta nenhuma informação, pois os pontos críticos obtidos acima $\tilde{p}_{c_1} = (-2, 0)$ e $\tilde{p}_{c_2} = (1, 0)$, quando transferidos ao equador da esfera, representam os mesmos pontos p_{c_1} e p_{c_2} obtidos anteriormente.

Nosso próximo passo é a caracterização das trajetórias em α^* , na vizinhança dos pontos $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $p_{c_2} = (1, 0)$, os únicos pontos críticos do infinito. Iniciaremos com a análise do sistema (4.52) na vizinhança do ponto $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$. O procedimento que empregaremos a seguir na determinação das curvas integrais na vizinhança de pontos pertencentes ao infinito não difere do empregado para a análise da região finita. Assim sendo, o primeiro passo é a determinação da matriz $\tilde{\Omega}(p_{c_1})$ que nos dará informações sobre a natureza do ponto em estudo. Explicitamos a seguir o cálculo de seus elementos:

$$\frac{\partial Q^*(u, z)}{\partial z} = 4f - 4fu^3 + 12fu^2 - 12fu - 2duz - 6auz^2 - 2bz + 6az^2 - 2cu^2z.$$

$$\left(\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)_{p_{C_1}} = \frac{27}{2} f$$

$$\frac{\partial Q^*(u, z)}{\partial u} = -12fu^2z + 24fuz - 12fz - dz^2 - 2az^3 - 2cuz^2.$$

$$\left(\frac{\partial Q^*}{\partial u}\right)_{p_{C_1}} = 0$$

(4.65)

$$\frac{\partial P^*(u, z)}{\partial z} = g + (k-b)u + (h-d)u^2 - cu^3 + 2auz + 2az - 4au^2z$$

$$\left(\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)_{p_{C_1}} = g - \frac{(k-b)}{2} + \frac{(h-d)}{4} + \frac{c}{8}$$

$$\frac{\partial P^*(u, z)}{\partial u} = (k-b)z + 2(h-d)uz - 3cu^2z + az^2 - 2f - 4auz^2 - 12fu + 30fu^2 - 16fu^3$$

$$\left(\frac{\partial P^*}{\partial u}\right)_{p_{C_1}} = \frac{27}{2} f$$

Os valores acima nos permitem escrever:

$$\hat{\Omega}(p_{C_1}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P^*}{\partial u}\right)_{p_{C_1}} & \left(\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)_{p_{C_1}} \\ \left(\frac{\partial Q^*}{\partial u}\right)_{p_{C_1}} & \left(\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)_{p_{C_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} f & \Omega_{22} \\ 0 & \frac{27}{2} f \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

$$\Omega_{22} = g - \frac{k-b}{2} + \frac{(h-d)}{4} + \frac{c}{8}$$

Um cálculo direto nos fornece:

$$\Delta(p_{C_1}) = \left(\frac{27}{2}\right)^2 f^2 \neq 0 \quad ; \quad \sigma(p_{C_1}) = 27 f \quad (4.67)$$

Como mencionado na seção anterior, os valores obtidos acima classificam o ponto crítico $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$ como simples. Possuem esta classificação os pontos de interseção entre as curvas,

$$\begin{aligned} P^*(u, z) &= 0 \\ Q^*(u, z) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.68)$$

das quais nenhuma delas possui singularidade e cujas tangentes são distintas. Os elementos fundamentais na análise dos pontos de equilíbrio simples são, a equação característica que definiremos a seguir, e suas raízes, denominadas características, que para pontos deste tipo nunca são nulas. Com exceção do caso de raízes imaginárias puras, a inspeção do sistema linearizado com a consequente obtenção da equação e raízes características, determina de forma definitiva a estrutura topológica do ponto em análise. Não nos estenderemos neste estudo, encontrado facilmente na literatura, sugerindo contudo consulta à (22) para um tratamento completo compreensível.

Definimos a equação característica através da expressão,

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0 \quad ,$$

onde,

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Tr}[\hat{\Omega}] \\ \Delta &= \det[\hat{\Omega}] \end{aligned} \quad . \quad (4.69)$$

Para o ponto $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$, a utilização dos resultados (4.67) nos fornece:

$$\lambda^2 - (27f) + \left(\frac{27}{2}\right)^2 f^2 = 0 \quad . \quad (4.70)$$

A equação acima possui as seguintes raízes características:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{27}{2} f \quad . \quad (4.71)$$

Para determinarmos o sinal destas raízes, que como veremos a seguir, caracterizarão a estabilidade do ponto, buscamos a definição de f em termos das quantidades fundamentais do problema. Das definições (4.1') temos que:

$$f = B \quad , \quad B = \frac{1}{9} \kappa \beta \quad .$$

Do Capítulo I, onde desenvolvemos alguns aspectos da teoria de transição de fase, sabemos que $\beta > 0$, indicando portanto um valor positivo para as raízes características. Como já foi dito, para pontos de equilíbrio simples a configuração das curvas integrais em sua vizinhança fica completamente definida através dos elementos que acabamos de calcular; raízes reais, idênticas de mesmo sinal positivo caracterizam o chamado nó degenerado instável que ilustramos na Figura 4.6.

Passamos agora à determinação das trajetórias do sistema (4.52) na vizinhança de seu ponto crítico $p_{c_2} = (1, 0)$. Ao final desta análise teremos todos os componentes necessários para caracterizar completamente o comportamento do sistema (4.1) no infinito do plano.

Repetindo o procedimento empregado na análise dos dois pontos anteriores, passamos ao cálculo da matriz $\hat{\Omega}$.

Utilizando os valores encontrados para $\frac{\partial P^*(u, z)}{\partial z}$, $\frac{\partial P^*(u, z)}{\partial u}$, $\frac{\partial Q^*(u, z)}{\partial z}$ e $\frac{\partial Q^*(u, z)}{\partial u}$ no cálculo da matriz $\hat{\Omega}$ para o ponto $p_{c_1} = (0, -\frac{1}{2})$ realizado anteriormente, obtemos:

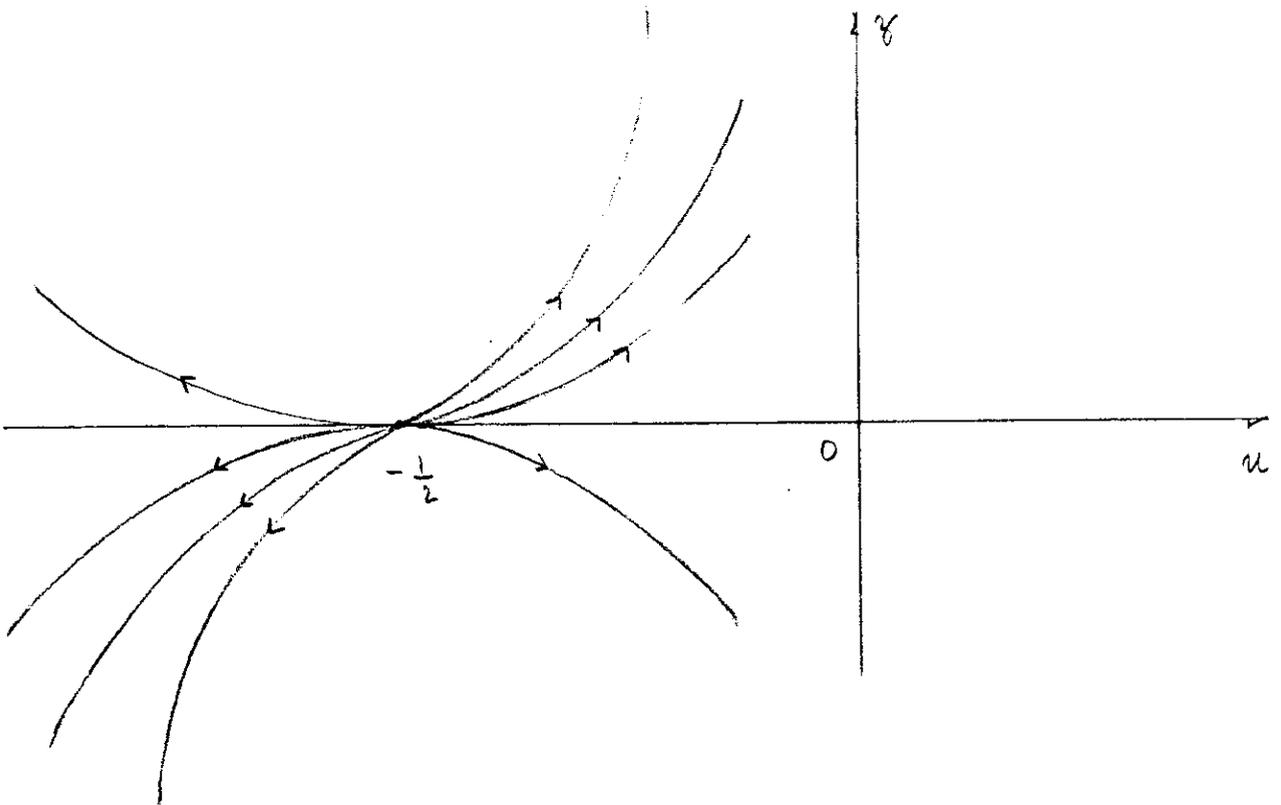


FIGURA 4.6 - Configuração das curvas integrais na vizinhança de $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)_{p_{c_2}} &= 0 \\ \left(\frac{\partial Q^*}{\partial u}\right)_{p_{c_2}} &= 0 \\ \left(\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)_{p_{c_2}} &= g+h+k-(b+c+d) = 0 \text{ (ver definição (4.1'))} \\ \left(\frac{\partial P^*}{\partial u}\right)_{p_{c_2}} &= 0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Obtemos portanto como resultado a matriz nula:

$$\hat{\Omega}(p_{c_2}) = \hat{0} \tag{4.73}$$

Segue portanto que:

$$\begin{aligned} \sigma(p_{c_2}) &= 0 \\ \Delta(p_{c_2}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Estes valores obtidos para os invariantes de $\hat{\Omega}(p_{c_2})$, classificam o ponto $p_{c_2} = (1,0)$ como um ponto de equilíbrio múltiplo, de características distintas da origem que analisamos na seção (4.1). Entretanto alguns elementos lá desenvolvidos serão utilizados na determinação das trajetórias em sua vizinhança.

Escrevemos aqui novamente o sistema (4.52):

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} = P^*(u,z) &= 2f+gz-2fu+az^2+(k-b)uz-6fu^2+10fu^3+auz^2+ \\ &\quad +(h-d)u^2z-4fu^4-2au^2z^2-cu^3z \\ \frac{dz}{d\tau} = Q^*(u,z) &= 4fz-bz^2-12fuz+2az^3-duz^2+12fu^2z-2auz^3- \\ &\quad -cu^2z^2-4fu^3z \end{aligned} \tag{4.52}$$

Efeturemos neste sistema a transformação de coordenadas,

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \bar{u} = u-1 \\ z &\rightarrow \bar{z} = z \end{aligned} \quad , \quad (4.75)$$

com o objetivo de transferir para a origem o ponto crítico do sistema; obtemos como resultado após alguns cálculos:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \bar{P}^*(\bar{u}, \bar{z}) = E\bar{u}\bar{z} - 6F\bar{u}^3 + G\bar{u}^2\bar{z} - 3H\bar{u}\bar{z}^2 - 4F\bar{u}^4 - 2H\bar{u}^2\bar{z}^2 - S\bar{u}^3\bar{z} \quad (4.76)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{Q}^*(\bar{u}, \bar{z}) = M\bar{z}^2 + L\bar{u}\bar{z}^2 - 2H\bar{u}\bar{z}^3 - 4F\bar{u}^3\bar{z} - S\bar{u}^2\bar{z}^2 \quad .$$

Em termos dos coeficientes de (4.52), os coeficientes do sistema acima são escritos como:

$$\begin{aligned} E &= ((k-b) + 2(h-d) - 3c) \\ F &= f \\ G &= ((h-d) - 3c) \\ H &= a \\ S &= c \\ M &= (-b-d-c) \\ L &= (-d-2c) \end{aligned} \quad (4.77)$$

O sistema (4.76) pode ser pensado como se estivesse na forma,

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \bar{U}_m^*(\bar{u}, \bar{z}) + \bar{\Psi}^*(\bar{u}, \bar{z}) \quad (4.78)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{Z}_m^*(\bar{u}, \bar{z}) + \bar{\Phi}^*(\bar{u}, \bar{z})$$

com,

$$\bar{z}_{m=2}^*(u, z) = M\bar{z}^2 \quad (4.79)$$

$$\bar{u}_{m=2}^*(\bar{u}, \bar{z}) = E\bar{u}\bar{z}$$

$$\bar{\phi}^*(\bar{u}, \bar{z}) = \sum_{i+k>m} a_{ik} \bar{z}^i \bar{u}^k = L\bar{u}\bar{z}^2 - 2H\bar{u}\bar{z}^3 - 4F\bar{u}^3 \bar{z} - S\bar{u}^2 \bar{z}^2 \quad (4.80)$$

$$\bar{\psi}^*(\bar{u}, \bar{z}) = \sum_{i+k>m} b_{ik} \bar{z}^i \bar{u}^k = -6F\bar{u}^3 + G\bar{u}^2 \bar{z} - 3H\bar{u}\bar{z}^2 - 4F\bar{u}^4 - 2H\bar{u}^2 \bar{z}^2 - S\bar{u}^3 \bar{z}.$$

Destacamos aqui a ausência de termos lineares em (4.78).

Como na Seção 4.1 deste trabalho, consideramos aqui o polinômio,

$$N(\bar{u}, \bar{z}) = \bar{u} \bar{z}^*(\bar{u}, \bar{z}) - \bar{z} U^*(\bar{u}, \bar{z}) ,$$

que para o sistema (4.78) tem a expressão:

$$N(\bar{u}, \bar{z}) = \bar{u} M (\bar{z}^2) - \bar{z} E (\bar{u} \bar{z}) \quad (4.81)$$

$$N(\bar{u}, \bar{z}) = (M-E) \bar{u} \bar{z}^2$$

A escolha $M = E$ situa nosso problema, no que se refere aos aspectos gerais sobre direção de aproximação das trajetórias, no item (b) da Seção 4.1, isto é, ao estudo do caso $N(\bar{u}, \bar{z}) \equiv 0$. A escolha acima deve ser analisada em termos dos parâmetros fundamentais do problema, a fim de nos certificarmos que não representa uma restrição impossível de ser considerada. Temos de (4.77) que:

$$M = -b-d-c \quad (4.82)$$

$$E = (k-b) + 2(h-d) - 3c .$$

A equação $M-E = 0$ pode então ser escrita como:

$$-k-2h+d+2c = 0 \quad . \quad (4.83)$$

Buscamos agora a definição das constantes presentes nesta equação em termos dos parâmetros originais, em (4.1'). Um rápido cálculo nos fornece:

$$9A_1 + 3 = 0 \rightarrow A_1 = -\frac{3}{9} \quad .$$

Mas, $A_1 = \frac{1}{3} \kappa \alpha_1$, o que nos dá como resultado:

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\kappa} \quad .$$

A escolha do parâmetro α_1 como sendo negativo, está de acordo com as restrições impostas no Capítulo I aos parâmetros da pressão anisotrópica do fluido Stokesiano necessárias para a ocorrência do fenômeno de transição de fases; lá havíamos suposto $\alpha_1 = -a^2$. Concluimos que, $M = E$ é uma escolha possível.

Dando sequência ao nosso estudo, observamos que como consequência imediata de $N(\bar{u}, \bar{z}) \equiv 0$, temos a possibilidade de escrever as partes homogêneas, $\bar{z}_m^*(\bar{u}, \bar{z})$ e $\bar{u}_m^*(\bar{u}, \bar{z})$ de (4.78) da seguinte maneira:

$$\bar{z}_m^*(u, z) = \bar{z} Q_{m-1}(\bar{u}, \bar{z}) \quad (4.84)$$

$$\bar{u}_m^*(\bar{u}, \bar{z}) = \bar{u} Q_{m-1}(\bar{u}, \bar{z})$$

$Q_{m-1}(u, z)$ é um polinômio homogêneo de ordem $m-1$ que para este caso pode ser escrito como:

$$Q_{m-1}(\bar{u}, \bar{z}) = M\bar{z} = E\bar{z} \quad . \quad (4.85)$$

Em seguida efetuamos uma nova transformação de coordenadas que será muito importante na caracterização das curvas integrais na vizinhança do ponto crítico $p_{c_2} = (1,0)$ que estamos analisando. Seguimos aqui o tratamento empregado por (23) para sistemas analíticos que podem ser colocados na forma (4.78).

Vamos considerar a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\rightarrow \bar{u} = \bar{u} \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{\eta} = \frac{\bar{z}}{\bar{u}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

A transformação acima define um mapeamento topológico entre os planos (\bar{u}, \bar{z}) (menos o eixo $\bar{u}=0$) e $(\bar{u}, \bar{\eta})$, levando pontos do primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes de (\bar{u}, \bar{z}) em pontos do primeiro, terceiro, segundo e quarto quadrantes de $(\bar{u}, \bar{\eta})$ respectivamente.

O mapeamento inverso,

$$\begin{aligned} \bar{u} &\rightarrow \bar{u} = \bar{u} \\ \bar{\eta} &\rightarrow \bar{z} = \bar{\eta}\bar{u} \end{aligned} \quad (4.87)$$

é definido em todo o domínio e leva o eixo $\bar{u} = 0$ em um único ponto que é a origem do plano (\bar{u}, \bar{z}) .

A transformação (4.86) tem ainda como característica a propriedade de deformar uma vizinhança circular da origem de (\bar{u}, \bar{z}) ao longo do eixo $\bar{u} = 0$ do plano $(\bar{u}, \bar{\eta})$, como indica a Figura 4.7. Efetuando no sistema (4.78) a transformação (4.86) descrita acima, considerando a forma para as partes homogêneas dos polinômios como dada em (4.84) e redefinindo o parâmetro temporal através da equação,

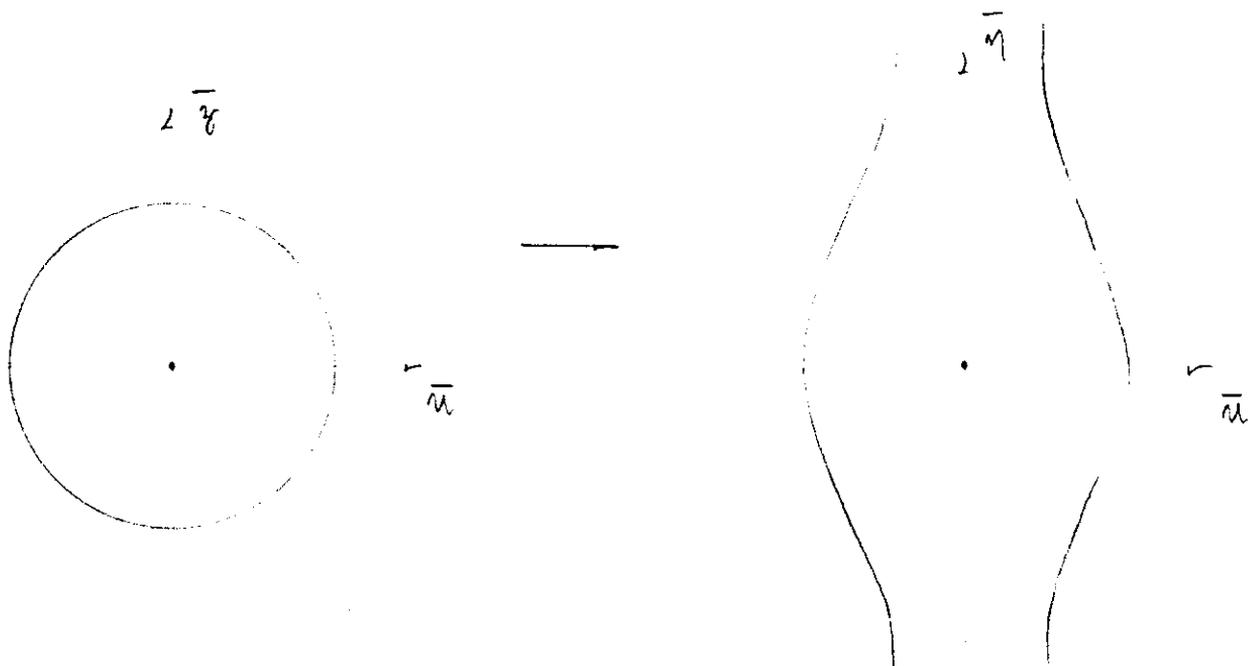


FIGURA 4.7 - Deformação de uma vizinhança sob ação do mapeamento (4.86).

$$d\tau = \frac{d\bar{t}}{\bar{u}^m} \quad , \quad (4.88)$$

temos, após um cálculo imediato,

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = Q_{m-1}(1, \bar{\eta}) + \sum_{i+k>m} a_{ik} \bar{u}^{i+k-m} \bar{\eta}^k \quad (4.89)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\bar{t}} = \sum_{i+k>m} b_{ik} \bar{u}^{i+k-m-1} \bar{\eta}^k - \bar{\eta} \sum_{i+k>m} a_{ik} \bar{u}^{i+k-m-1} \bar{\eta}^k \quad .$$

Suponhamos que $(0, \bar{\eta})$ é um ponto do eixo $\bar{u} = 0$ tal que para $(\bar{u}, \bar{\eta}) = (0, \bar{\eta})$, o lado direito de (4.89) seja diferente de zero. Então, por este ponto passa uma única trajetória deste sistema, que corta o eixo $\bar{u} = 0$, uma vez que por hipótese, $\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} \neq 0$. Se tentarmos achar a trajetória correspondente no sistema (4.78), ve

remos, com ajuda das equações de transformação (4.86) e suas inversas (4.87) que existe uma trajetória $\{\bar{u}(\tau), \bar{z}(\tau)\}$, onde $\bar{u}(\tau) > 0$, que tende à sua origem de tal forma que, $\frac{\bar{z}(\tau)}{\bar{u}(\tau)} \rightarrow \bar{\eta} = \text{tg}\theta$, isto é, a trajetória se aproxima da origem com um valor bem definido para a sua tangente à medida que $\tau \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$), Figura 4.8. Existe ainda uma segunda trajetória com $\bar{u}(\tau) < 0$ para a qual a situação acima também é verificada. Este procedimento nos permite considerar trajetórias em todas as direções do plano exceto de $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. Para garantir a existência de trajetórias no sistema (4.78) tendendo à origem ao longo destas direções, a transformação

$$\begin{aligned} \bar{u} &\rightarrow \bar{\xi} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}} \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{z} = \bar{z} \end{aligned} \quad (4.90)$$

deve ser efetuada e o sistema obtido deve ter a origem como ponto crítico.

A constatação de que o lado direito do sistema (4.89) só se anula para valores de $\bar{\eta}$ que sejam solução da equação,

$$Q_{m-1}(1, \bar{\eta}) = 0 \quad (4.91)$$

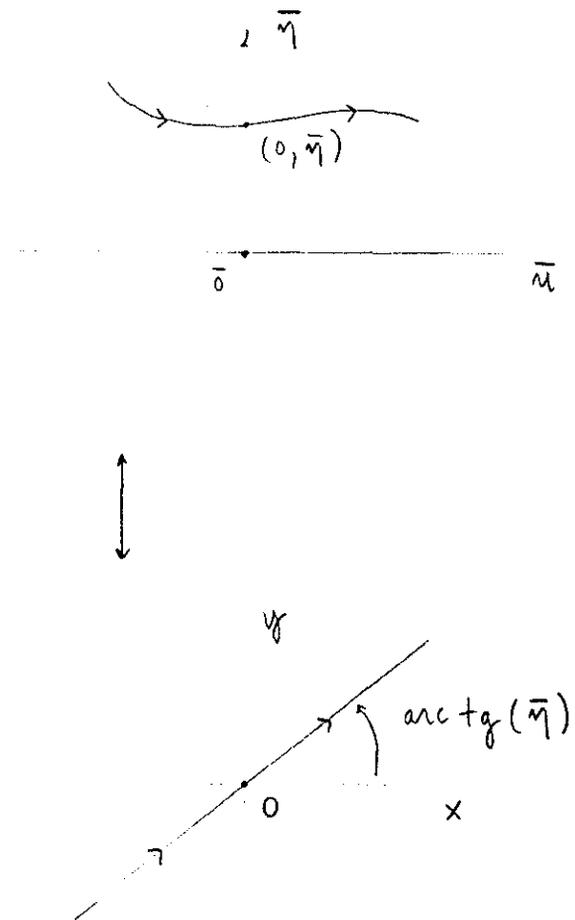


FIGURA 4.8 - correspondência entre trajetórias dos planos $(\bar{u}, \bar{\eta})$ e (x, y) .

nos leva à seguinte afirmação que apresentaremos, seguindo (23), sob forma de um teorema:

Teorema B: Se para o sistema (4.78) a origem 0 é um ponto crítico, que ocorre para $N(\bar{u}, \bar{z}) \equiv 0$, então a cada raio de 0 está associada uma e somente uma trajetória deste sistema que tende para 0, com sua tangente tendendo para este raio, com exceção de no máximo um número finito de raios, associados às direções correspondentes às raízes de (4.91).

Lembramos que já havíamos feito algumas considerações a respeito destas direções excepcionais, que denominamos de singulares, na Seção 4.1 do presente capítulo. Lá afirmamos, sem demonstrar [ver (22) para tratamento detalhado do problema], que nestas direções poderíamos ter infinitas trajetórias, um número finito delas ou nenhuma delas tendendo à origem.

Suponhamos agora que $\bar{\eta}^*$ é uma raiz de (4.91) e que todo o lado direito de (4.89) se anule. $(0, \bar{\eta}^*)$ é portanto um ponto crítico para este sistema.

Se formos capazes de determinar a configuração das curvas integrais na vizinhança deste ponto, poderemos com o auxílio das informações apresentadas anteriormente, determinar a estrutura topológica correspondente no plano (\bar{u}, \bar{z}) , alcançando assim nosso objetivo. Vejamos como estas idéias gerais se aplicam para o caso específico que estamos tratando.

Sujeito às transformações (4.86) o sistema (4.76) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\bar{\tau}} &= E\bar{u}^{-2}\bar{\eta}^{-3} - 6F\bar{u}^{-3} + G\bar{\eta}^{-3} + 3H\bar{\eta}^{-2}\bar{u}^{-3} - 4F\bar{u}^{-4} - 2H\bar{\eta}^{-2}\bar{u}^{-4} - S\bar{\eta}\bar{u}^{-4} \\ \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\tau}} &= (M-E)\bar{u}\bar{\eta}^{-2} + (L-G)\bar{u}^{-2}\bar{\eta}^{-2} + 6F\bar{u}^{-2}\bar{\eta} + 3H\bar{\eta}^{-3}\bar{u}^{-2} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Levando em conta que $M = E$ e efetuando a seguinte reparametrização,

$$d\bar{t} = \frac{d\tau}{\bar{u}} \quad (4.93)$$

temos:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = E\bar{\eta} - 6F\bar{u} + G\bar{\eta}\bar{u} - 3H\bar{\eta}^2\bar{u} - 4F\bar{u}^2 - 2H\bar{\eta}^2\bar{u}^2 - S\bar{\eta}\bar{u}^2$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\bar{t}} = (L-G)\bar{\eta}^2 + 6F\bar{\eta} + 3H\bar{\eta}^3 \quad . \quad (4.94)$$

O sistema acima é o correspondente a (4.89) para a situação concreta em análise. Identificamos imediatamente o polinômio:

$$Q_{m-1}(1, \bar{\eta}) = E\bar{\eta} \quad . \quad (4.95)$$

As chamadas direções singulares estão associadas às raízes da equação

$$Q_{m-1}(1, \bar{\eta}^*) = 0 \quad , \quad (4.96)$$

que para o nosso caso é apenas $\bar{\eta}^* = 0$.

Utilizando as equações de transformação

$$\bar{\eta}^* = \frac{\bar{z}}{\bar{u}} = \text{tg}\theta^* \quad ,$$

vemos que a cada raiz $\bar{\eta}^*$ temos associado no plano (\bar{u}, \bar{z}) , as direções $\theta^* = \text{arc tg}(\bar{\eta}^*)$. Como $\bar{\eta}^* = 0$ é nossa única raiz temos finalmente que $\theta^* = 0$ e $\theta^* = \pi$ são as direções singulares procuradas. Observamos em seguida, que a origem $(\bar{u} = 0, \bar{\eta} = 0)$ que denotaremos por $\bar{O} \equiv \bar{p}_C = (0,0)$ é um ponto crítico para o sistema (4.94). Partimos então para determinar as trajetórias em sua vizinhança. Repetindo o procedimento empregado diversas vezes neste trabalho, calculamos os elementos da matriz $\hat{\Omega}(\bar{p}_C)$.

Temos:

$$\hat{\Omega}(\overline{p}_c) = \begin{pmatrix} -6F & E \\ 0 & 6F \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Segue imediatamente que:

$$\begin{aligned} \Delta(\overline{p}_c) &= -36F^2 \neq 0 \\ \sigma(\overline{p}_c) &= 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Os invariantes acima indicam ser a origem $\overline{p}_c = (0,0)$ do sistema (4.94) é um ponto de equilíbrio simples. As raízes características definirão sua estrutura topológica. Temos para equação característica a seguinte expressão:

$$\lambda^2 - 36F^2 = 0 \quad (4.99)$$

Segue imediatamente que suas raízes são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= + 6F \\ \lambda_2 &= - 6F \end{aligned} \quad (4.100)$$

De acordo com a classificação existente para pontos de equilíbrio simples, identificamos a origem (raízes características reais com sinais opostos) como sendo um ponto de sela. A direção l das separatrizes é fornecida para um sistema na forma,

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = a\overline{u} + b\overline{\eta} + f(\overline{u}, \overline{\eta}) \quad (4.101)$$

$$\frac{d\overline{\eta}}{dt} = c\overline{u} + d\overline{\eta} + g(\overline{u}, \overline{\eta}) \quad ,$$

pela equação

$$b\lambda^2 - (d-a)\lambda + c = 0 \quad (4.102)$$

Para o sistema (4.94) a equação acima se escreve:

$$E\lambda^2 - 12F\lambda = 0 \quad (4.103)$$

$$\lambda(E\lambda - 12F) = 0$$

Temos portanto como raízes,

$$\lambda_1 = \frac{12F}{E} \quad (4.104)$$

$$\lambda_2 = 0$$

Buscando em (4.77) as definições de F e E temos:

$$F = f$$

$$E = k-b+2(h-d) - 3c \quad (4.105)$$

Expressando via (4.1') as constantes acima em termos dos parâmetros fundamentais do problema:

$$f = B = \frac{1}{9} \kappa\beta \quad (4.106)$$

Como $\beta > 0$, temos como consequência:

$$F > 0 \quad (4.107)$$

A expressão para E pode ser escrita como:

$$E = -9A_1 + \frac{3}{2} (\lambda-1) \quad ,$$

com

$$A_1 = \frac{1}{3} \kappa\alpha_1 \quad ;$$

portanto

$$E = -3\kappa\alpha_1 + \frac{3}{2} (\lambda-1) \quad (4.108)$$

Utilizando o valor $\alpha_1 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\kappa}$ obtido como consequência da im-
posição da igualdade, $M = E$, temos a expressão final para a
constante E:

$$E = \frac{3}{2} (\lambda + 2) \quad (4.109)$$

A escolha de λ no intervalo $-1 < \lambda < 1$, de acor-
do com as considerações feitas na Seção 4.1, nos garante que a
constante E é sempre positiva. Temos portanto que a razão, $\lambda_1 =$
 $= \frac{12F}{E}$, que define a direção de duas das quatro separatrizes,
é positiva. Com estes dados podemos determinar a configuração
precisa das curvas integrais do plano (\bar{u}, \bar{v}) , na vizinhança de
sua origem $\bar{p}_C = (0,0)$, como mostra a Figura 4.9. A utiliza-

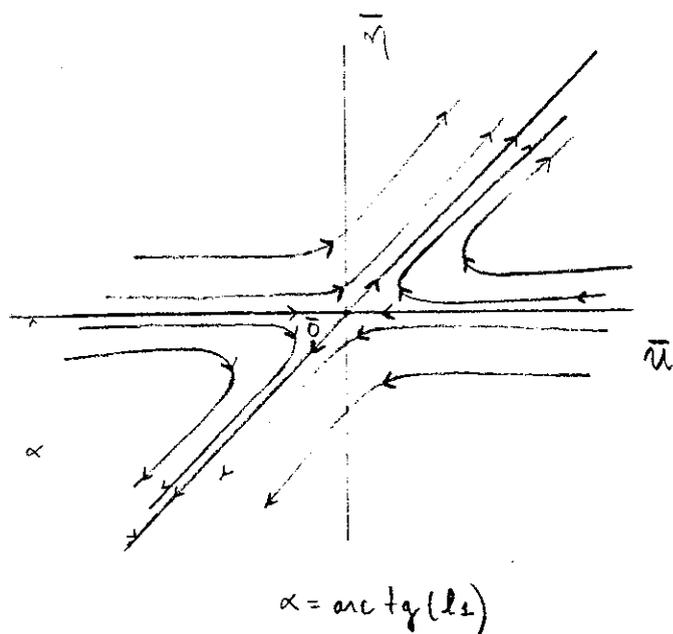


FIGURA 4.9 - Configuração das cur-
vas integrais na vizinhança da ori-
gem do sistema (4.94).

ções que já possuímos relati-
vas à direção de aproximação
das trajetórias ao ponto críti-
co $p_{C_2} = (1,0)$, nos permitem
determinar a estrutura topoló-
gica em sua vizinhança.

A Figura 4.10 nos
mostra a correspondência entre
as trajetórias nos dois planos.
Alguns comentários são necessá-
rios:

Observamos que nas
direções singulares $\theta = 0$ e
 $\theta = \pi$, mais de uma trajetória
tende à origem do plano (\bar{u}, \bar{v}) .

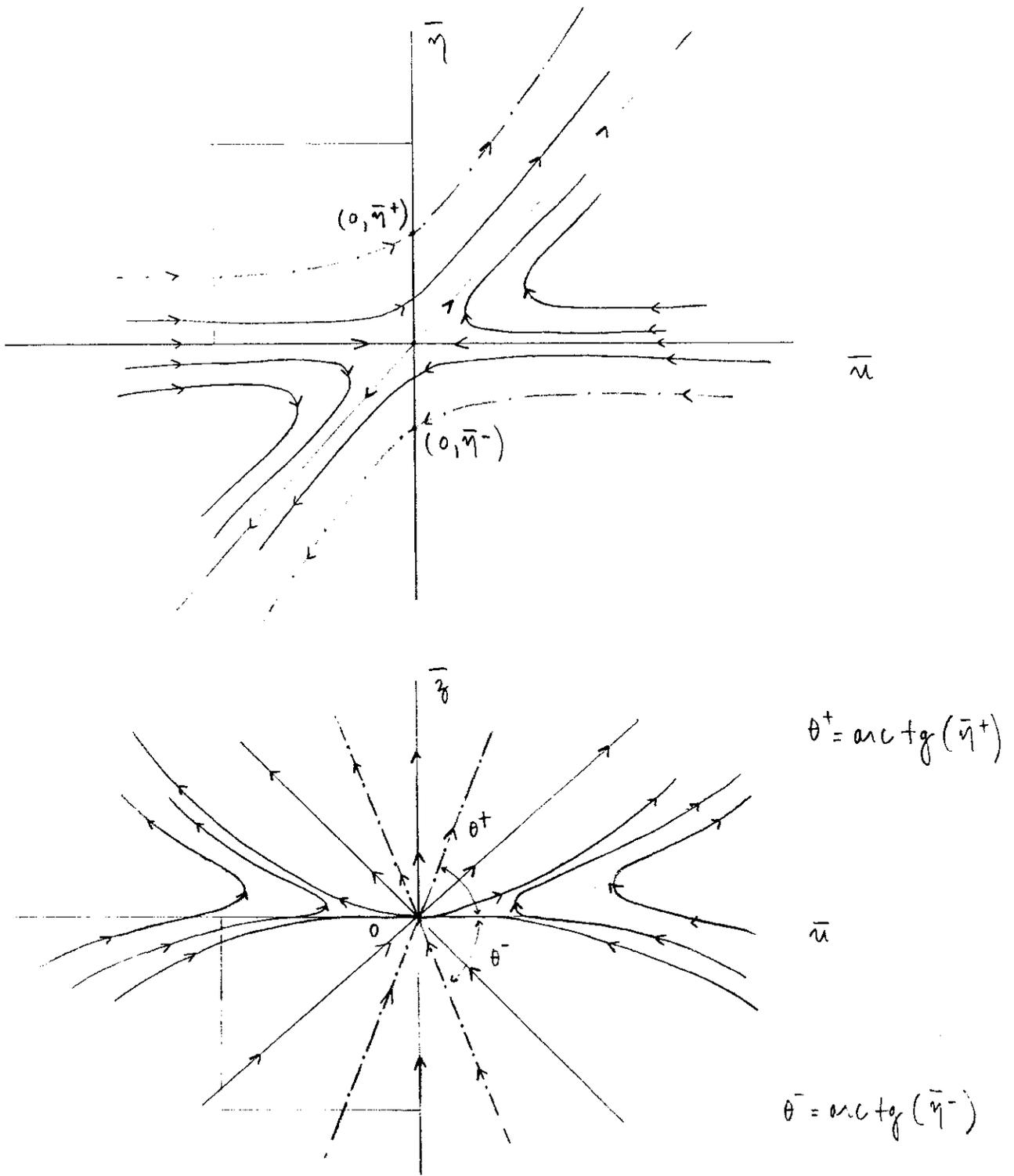


FIGURA 4.10 - Correspondência entre trajetórias dos planos $(\bar{u}, \bar{\eta})$ e (\bar{u}, \bar{z}) .

Estas trajetórias são correspondentes às separatrizes no plano $(\bar{u}, \bar{\eta})$. Para todas as outras direções temos exatamente uma trajetória tendendo à origem, de acordo com o Teorema B apresentado anteriormente. Esta direção de aproximação está ligada ao valor do ponto em que a trajetória corta o eixo $\bar{u} = 0$ no plano $(\bar{u}, \bar{\eta})$, conforme indicado na Figura 4.10.

O retorno às variáveis (u, z) através da transformação inversa de (4.75) nos fornece finalmente, a estrutura topológica do ponto $p_{c_2} = (1, 0)$ (ver Figura 4.11).

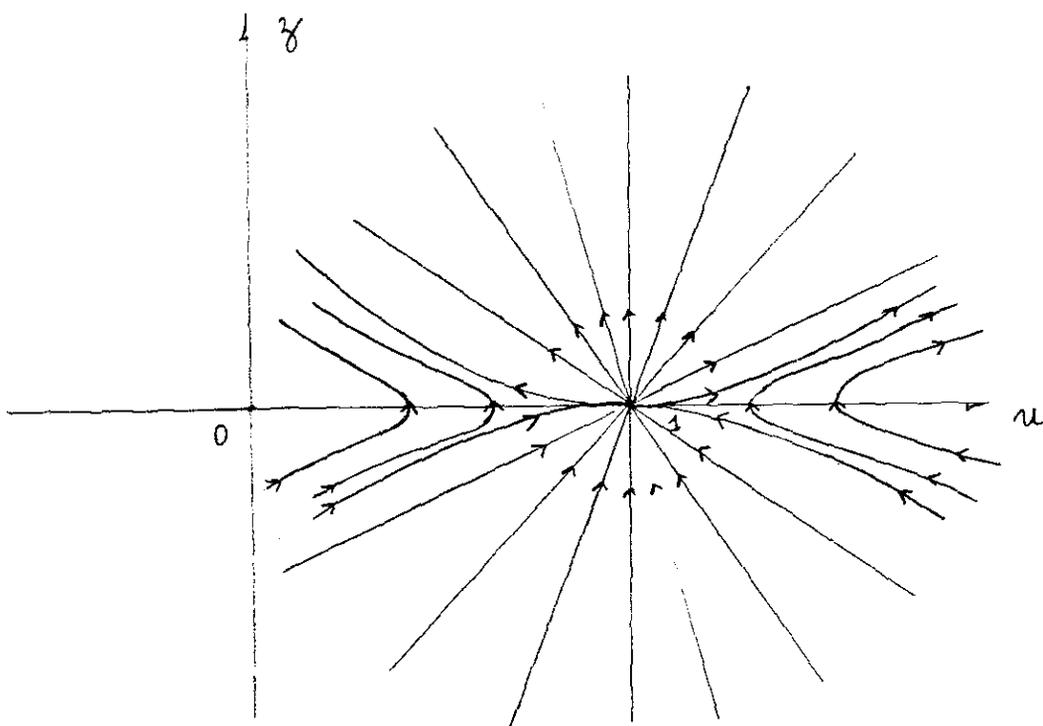


FIGURA 4.11 - Configuração das curvas integrais na vizinhança de $p_{c_2} = (1, 0)$.

Uma vez determinados os pontos críticos e as suas vizinhanças no plano α^* , o próximo passo é transportá-los com o auxílio da projeção central para o equador da esfera. A fim de manter unívoca a relação através da projeção entre os pontos de α e α^* com os pontos da esfera, consideramos apenas seu hemisfério inferior que denotaremos por \bar{H} . Uma projeção ortogonal deste hemisfério no plano nos fornece o disco unitário \bar{K} limitado pelo círculo $\bar{\Gamma}$, que representará os pontos no infinito do plano. A cada ponto M do plano (x,y) corresponde agora um ponto \bar{M} interior ao círculo $\bar{\Gamma}$. Como resultado, obtemos uma representação compacta para o plano e seus pontos infinitamente distantes. Fornecemos a seguir alguns detalhes da projeção da vizinhança dos pontos de α^* para esfera via projeção central e da esfera para o plano através da projeção ortogonal. Referindo-nos à Figura 4.12, suponhamos que B^* seja um ponto crítico do plano α^* e σ a sua vizinhança. O eixo $z = 0$ divide σ em duas partes que denotaremos por σ^+ e σ^- . Através de uma reta que passa por B^* e o centro O da esfera, definimos em seu equador os pontos antípodas B e B' . Por este mesmo procedimento, transportamos todos os pontos da vizinhança σ de B^* para as vizinhanças de B e B' . Como estamos considerando apenas o hemisfério inferior \bar{H} , a vizinhança do ponto B fica composta apenas da parte σ^+ enquanto que para B' temos apenas σ^- como vizinhança. Segue portanto que os pontos antípodas no hemisfério da esfera devem ser identificados como um mesmo ponto que representa o infinito do plano α . A projeção deste hemisfério inferior \bar{H} , no plano α remete à fronteira $\bar{\Gamma}$ do disco os pontos \bar{B} e \bar{B}' , imagens de B e B' respectivamente segundo a Figura 4.13.

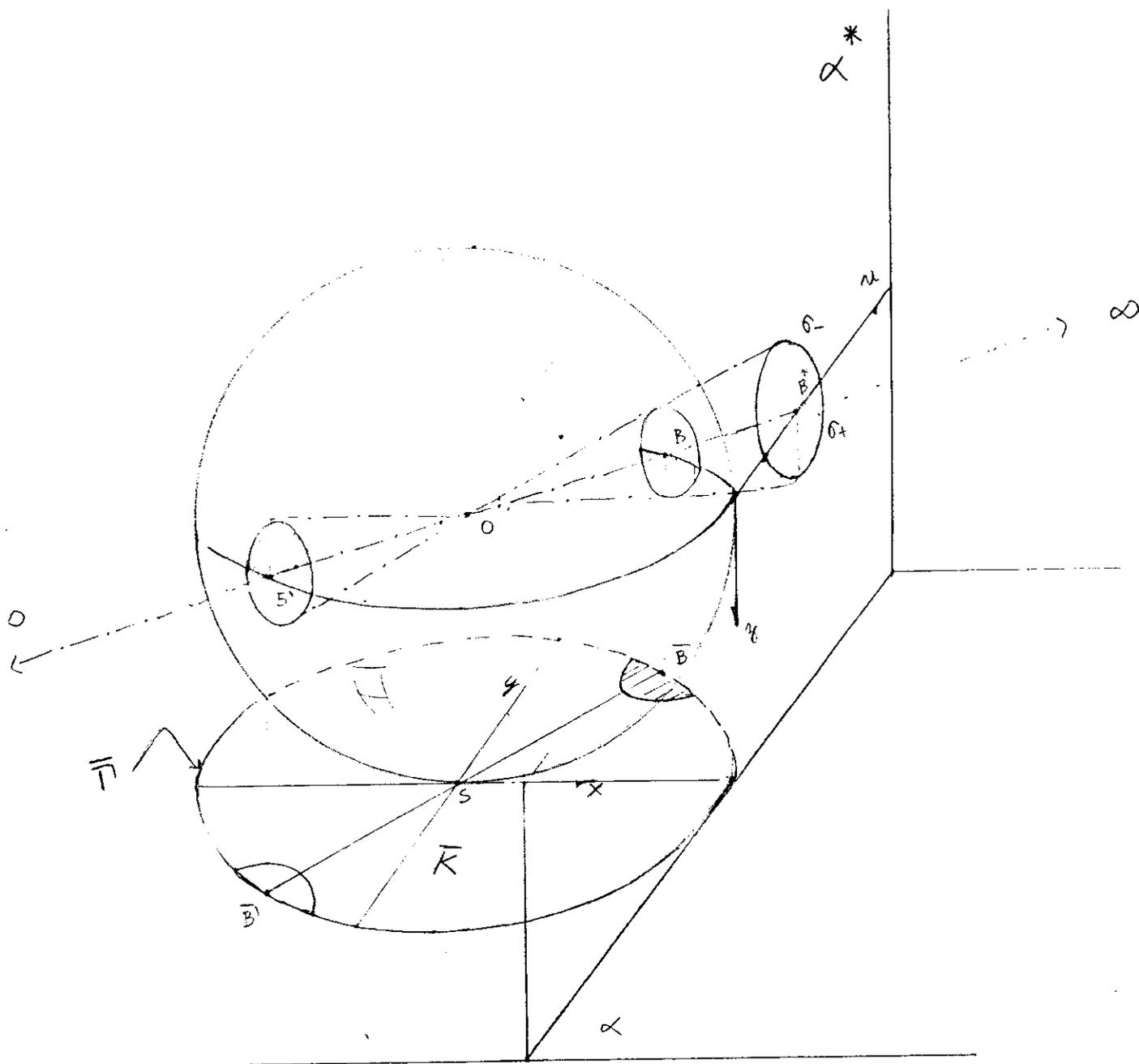


FIGURA 4.12 - Análise do infinito.

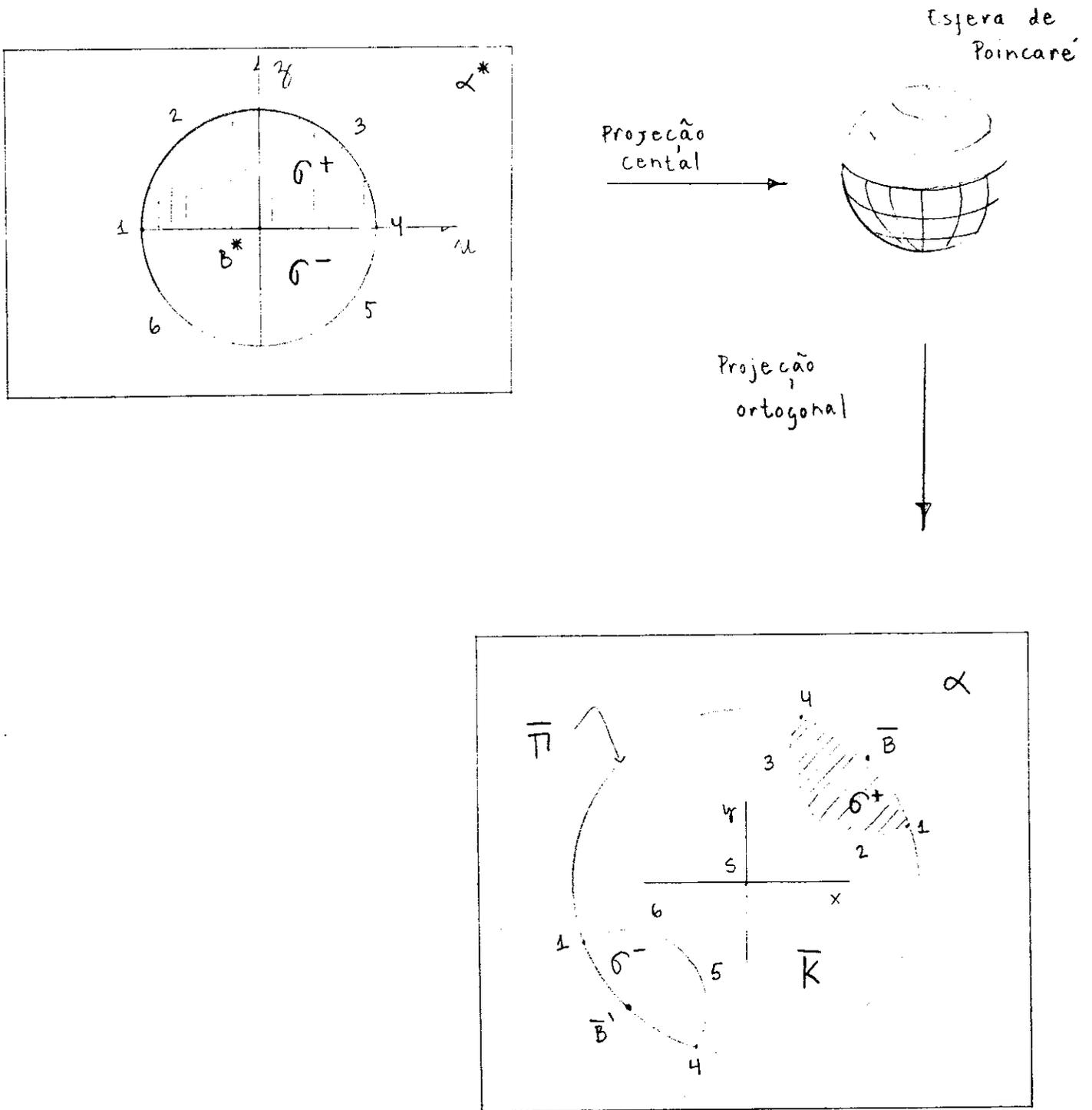


FIGURA 4.13 - Projeções sucessivas de uma vizinhança de $B^* \in \alpha^*$ e sua imagem final em α .

A aplicação deste procedimento aos pontos críticos $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $p_{c_2} = (1, 0)$ é o nosso próximo passo (ver Figura 4.14).

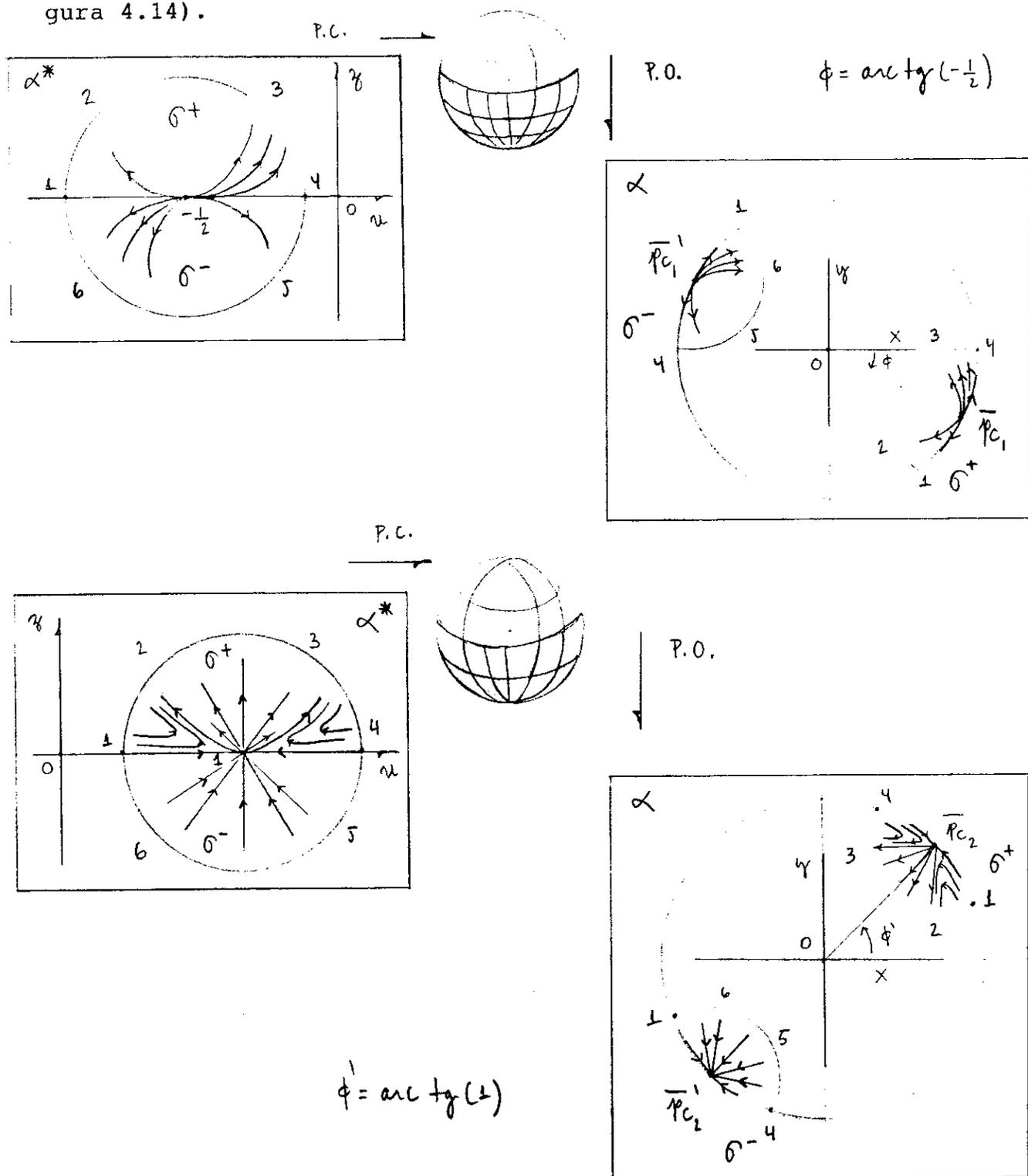


FIGURA 4.14 - Imagens em $\bar{\Gamma} \cup \bar{K}$ das vizinhanças de $p_{c_1} = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $p_{c_2} = (1, 0)$.

Através da região circular \bar{K} podemos expressar nos -
so conhecimento sobre as propriedades qualitativas globais do
sistema (4.1). Na origem, através da identificação $s = p_c = (0,0)$,
traçamos a configuração de curvas integrais apresentada na Figu-
ra 4.3. Estas curvas devem estar conectadas às curvas que se
originam (ou terminam) em outro ponto crítico da região finita
ou aos pontos críticos do infinito. Como estamos supondo que sob
determinadas condições, apenas a origem é um ponto crítico da
região finita, suas curvas devem estar conectadas às vizinhan-
ças das projeções em \bar{T} dos pontos críticos p_{c_1} e p_{c_2} . Desta
forma fica representado numa região finita do plano o comporta-
mento global do sistema (Figura 4.15).

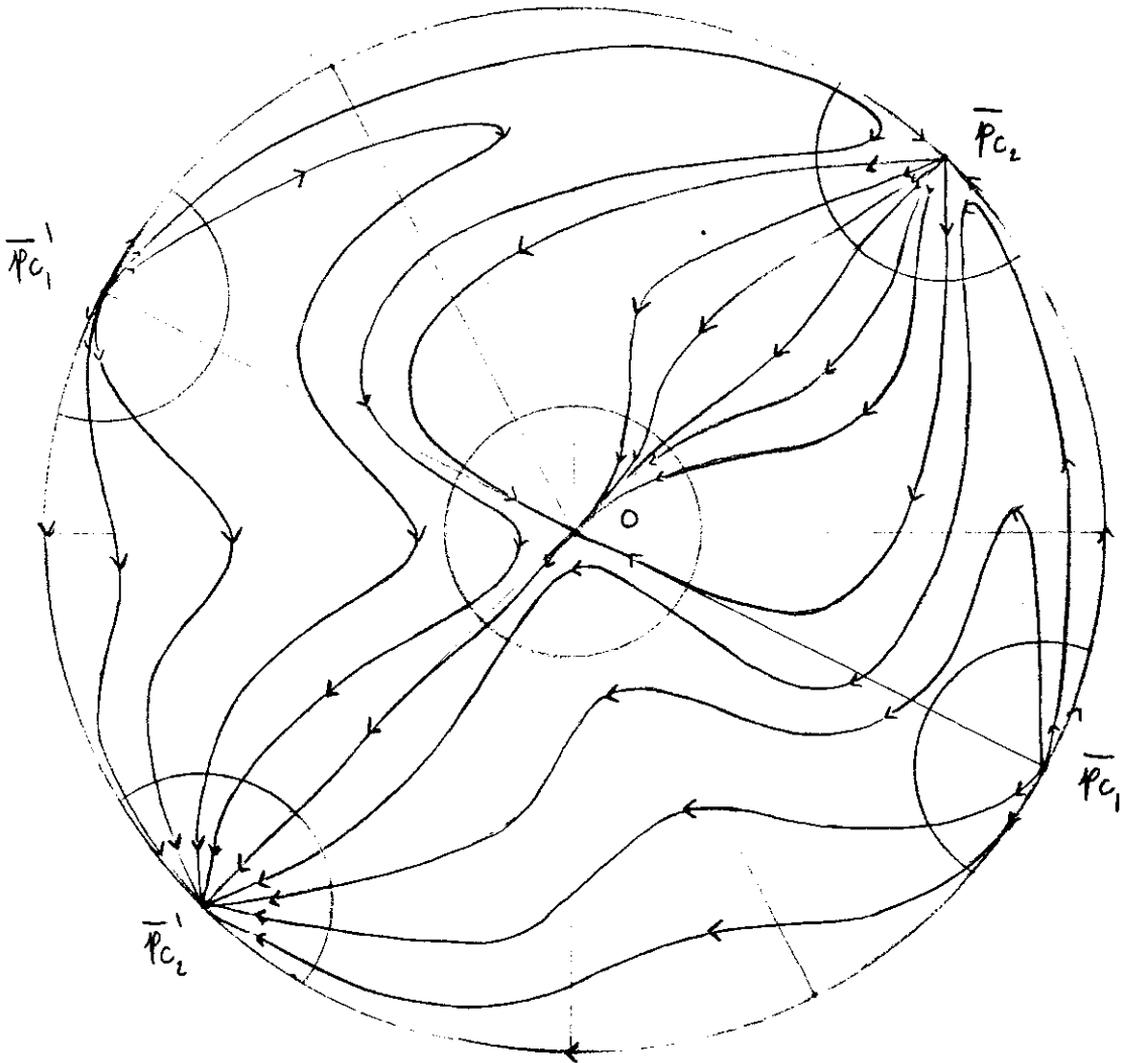


FIGURA 4.15 - Comportamento global das curvas integrais do sistema (4.1).

Veremos agora como toda a informação, obtida através da análise qualitativa do sistema dinâmico que representa as equações de Einstein para o problema que estamos analisando, pode ser organizada a fim de mostrar ser possível a ocorrência do mecanismo de transição entre as fases anisotrópica e isotrópica do fluido cosmológico.

Lembramos que o disco \bar{K} união com sua fronteira $\bar{\Gamma}$ representam todos os estados do sistema, incluindo os relativos a seu comportamento em regiões de valores arbitrariamente grandes para as suas variáveis. A evolução do sistema é representada pelas curvas traçadas neste disco que tem origem ou desaparecem nos pontos críticos considerados. Devemos saber distinguir neste conjunto de curvas integrais as soluções que possuam as propriedades físicas compatíveis à descrição da transição entre as fases de diferente simetria. Quando formulamos, no Capítulo II deste trabalho, as equações que compõem o sistema dinâmico que analisamos neste capítulo, vimos que a densidade de energia pode ser escrita em termos das variáveis deste sistema, como nos mostra a equação (2.18), que reproduzimos aqui:

$$\rho = \frac{1}{k} (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) \quad . \quad (2.18)$$

A hipótese de isotropia no plano nos leva à seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \quad , \quad x_2 = x_3 = y \\ \rho &= y^2 + 2xy = y (y + 2x) \quad . \end{aligned}$$

A exigência de positividade na densidade de energia

nos leva à restrição de alguns setores do disco $\bar{K} \cup \bar{T}$ que representa os estados do sistema (Figura 4.16).

Estamos interessados também na caracterização precisa das propriedades de isotropia e anisotropia das soluções. É fácil ver que uma solução é (momentaneamente) isotrópica neste diagrama quando tivermos $x = y$. De posse destes dados, partimos para a identificação das soluções que estejam representando a passagem do fluido de uma fase anisotrópica, para uma fase completamente simétrica,

à medida que o parâmetro de expansão θ evolui. Dos aspectos gerais relativos à transição de fase descritos no Capítulo I, devemos esperar soluções isotrópicas para pequenos valores de θ . Uma inspeção no diagrama nos mostra que de fato existe um conjunto de soluções com características adequadas a representar um fluido, alterando seu grau de simetria à medida que evolui, como nos mostra a Figura 4.17.

Algumas observações devem ser feitas:

As soluções que apresentam o mecanismo de transição de fase procurado encontram-se na região permitida, onde $\rho > 0$. As curvas que apresentam anisotropia para pequenos valores de θ (em contradição aos aspectos gerais da transição descritos no

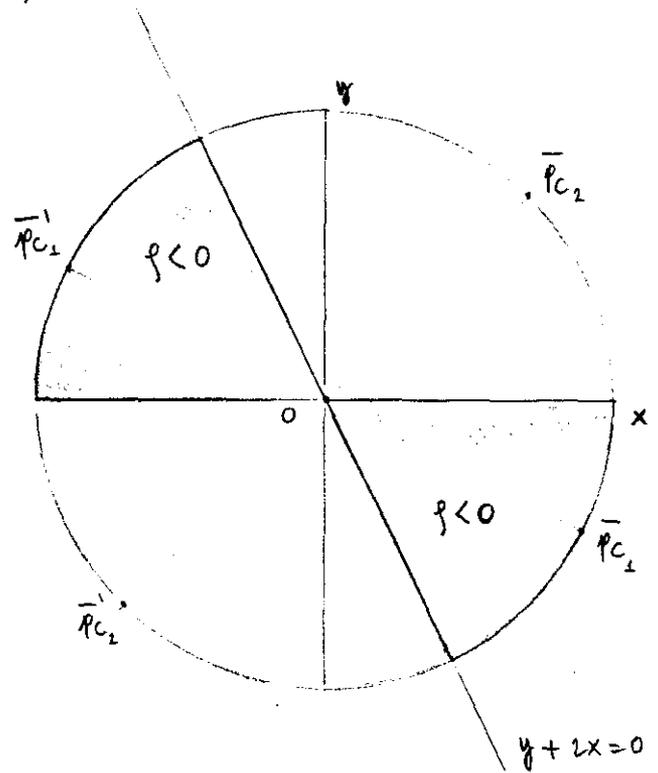


FIGURA 4.16 - Representação no círculo projetado de regiões com energia negativa.

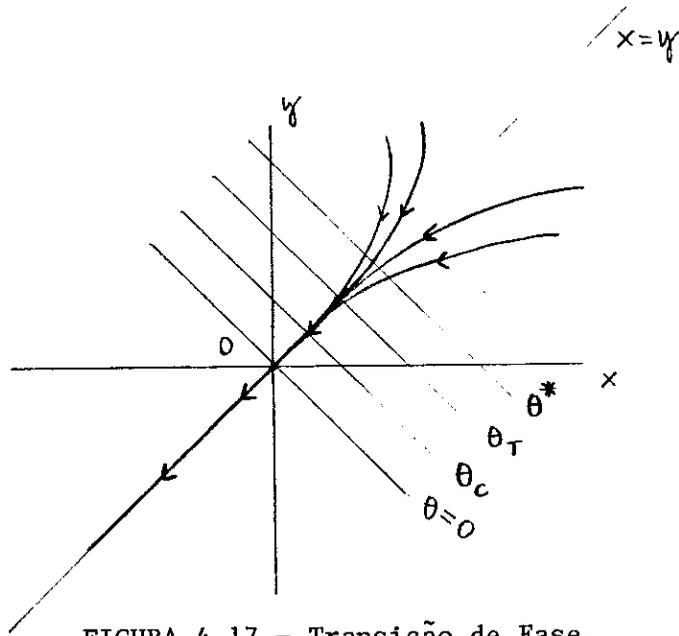
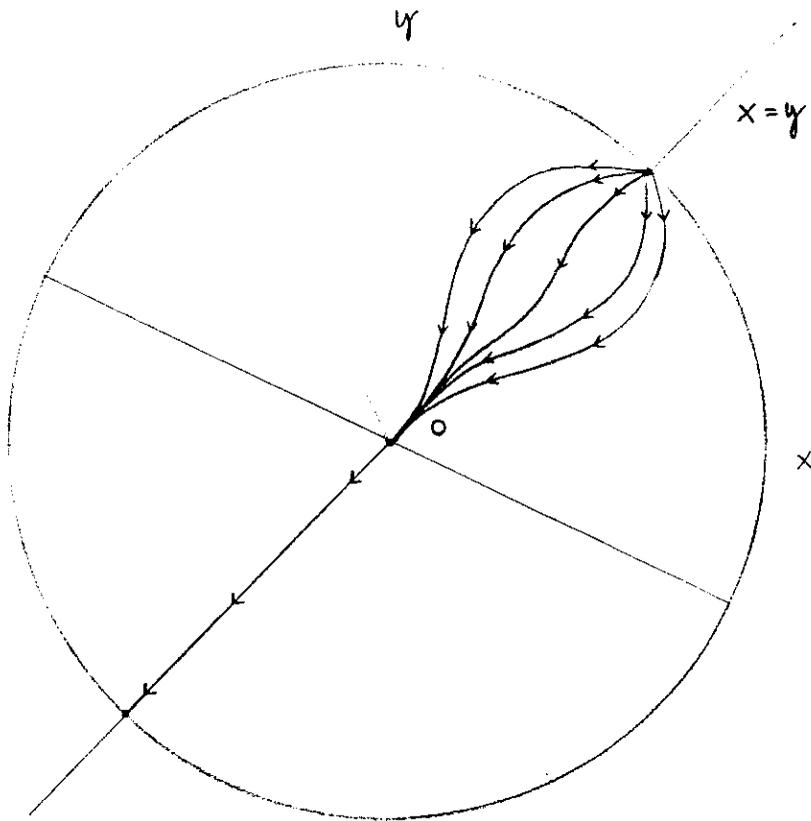


FIGURA 4.17 - Transição de Fase.

Capítulo I) não devem ser consideradas uma vez que necessariamente ocupam, durante um intervalo de sua evolução, o setor proibido $\rho < 0$ do diagrama apresentado. A transição fica caracterizada pelo comportamento das curvas fisicamente realizáveis ($\rho > 0$) na região de θ pequeno; todas elas tendem à linha $x = y$, indicando a isotropização do fluido.

Concluimos portanto que para a geometria do tipo Bianchi I estudada neste trabalho, o fluido Stokesiano particular considerado, efetivamente passa por uma transição de sua fase anisotrópica para a isotrópica à medida que sofre uma expansão caracterizada pela diminuição de seu parâmetro θ . Ao atingir o valor limite θ^* o Cosmos se encontrará isotropizado e em expansão, fato que nos leva a pensar neste mecanismo como uma forma alternativa à explicação do alto grau de isotropia que observamos hoje no Universo.

CONCLUSÕES

Neste trabalho investigamos os efeitos da viscosidade no comportamento do fluido cosmológico. Utilizando a hipótese de que em uma época remota de sua evolução o Universo possa ser representado por uma estrutura espacial anisotrópica, apresentamos um mecanismo eficiente para isotropizá-lo. Fazendo uso de uma analogia com as idéias de L. Landau sobre transição de fase, mostramos que um fenômeno equivalente pode ocorrer induzido pela interação gravitacional. Partimos do fato que os estados de equilíbrio de um fluido são obtidos através da minimização da função energia livre segundo um parâmetro de ordem. A expressão da energia livre a ser minimizada é apresentada numa forma generalizada para fluidos submetidos a qualquer tipo de interação. Como resultado obtemos que em analogia ao papel desempenhado pela temperatura na teoria de Landau é o fator de expansão do Universo θ que passa a ser o responsável pela caracterização das distintas fases anisotrópica e isotrópica do fluido. A análise qualitativa do sistema em uma geometria do tipo Bianchi I, possível através da redução do sistema de equações de Einstein a um sistema autônomo planar não linear, confirma esta previsão.

Os resultados obtidos podem ser considerados como uma consequência direta das hipóteses abaixo explicitadas:

- a) validade das equações de Einstein;
- b) a utilização de um fluido Stokesiano com o termo

de pressão anisotrópica dado pela expressão:

$$\Pi_{\mu\nu} = \xi(\theta, \sigma) h_{\mu\nu} + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{\mu\nu} + \delta \sigma_{\mu\alpha} \sigma_{\nu}^{\alpha} .$$

c) A possibilidade de expressarmos a energia livre do fluido mencionado através da expressão de caráter puramente geométrico:

$$\Delta F = \gamma R_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} .$$

As idéias aqui desenvolvidas quando aplicadas ao problema cosmológico, fornecem um quadro alternativo à explicação do alto grau de isotropia observado hoje no Universo.

A análise de dados obtidos através de observações astronômicas indicam que as propriedades globais do espaço-tempo são tais que o valor do fator de expansão do Universo θ assumiu em épocas remotas, valores bem mais elevados que o valor que hoje o caracteriza. É razoável supormos que nesta fase o conteúdo material, possivelmente constituído de uma mistura caótica de inúmeras espécies de partículas elementares e radiações, possa ser descrito por um fluido viscoso com anisotropias não desprezíveis. A expansão do Universo e a consequente diminuição do valor de θ , cria condições para que o valor crítico θ_T , necessário ao aparecimento de uma fase isotrópica, seja atingido. Temos portanto que para este modelo a isotropia que hoje observamos pode ser explicada, respeitadas as hipóteses anteriores, como uma consequência direta de uma transição de fase no fluido cosmológico, auto-induzida pela gravitação e controlada pelo fator de expansão do Universo.

APÊNDICE A

ELEMENTOS DA GEOMETRIA TIPO BIANCHI I

Métrica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad (A.1)$$

$$\bar{g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(t) \end{vmatrix} \quad (A.1')$$

Da teoria de formas diferenciais (7,21) temos:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt & a &= a(t) \\ \theta^1 &= adx & b &= b(t) \\ \theta^2 &= bdy & c &= c(t) \\ \theta^3 &= cdz \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= d(dt) = d^2t = 0 \\ d\theta^1 &= d(adx) = \dot{a}dt \wedge dx = \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= d(bdy) = \dot{b}dt \wedge dy = \frac{\dot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= d(cdz) = \dot{c}dt \wedge dz = \frac{\dot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$d\theta^A = \gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (A.4)$$

$$\gamma^1_{01} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \gamma^2_{02} = \frac{\dot{b}}{b} \quad \gamma^3_{03} = \frac{\dot{c}}{c} \quad (A.5)$$

$$\omega^A_B = \omega^A_{BC} \theta^C \quad (\text{A.6})$$

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B \quad (\text{A.7})$$

$$\omega^1_0 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \quad \omega^2_0 = \frac{\dot{b}}{b} \theta^2 \quad \omega^3_0 = \frac{\dot{c}}{c} \theta^3 \quad (\text{A.8})$$

$$d\omega^1_0 = d\left(\frac{\dot{a}}{a} \theta^1\right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} dt \wedge \theta^1 + \frac{\dot{a}}{a} d\theta^1$$

$$d\omega^1_0 = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1\right)$$

$$d\omega^1_0 = \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\omega^1_0 = \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \quad (\text{A.9})$$

$$d\omega^2_0 = d\left(\frac{\dot{b}}{b} \theta^2\right) = \frac{\ddot{b}b - \dot{b}^2}{b^2} dt \wedge \theta^2 + \frac{\dot{b}}{b} (d\theta^2)$$

$$d\omega^2_0 = \left(\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2}\right) \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2\right)$$

$$d\omega^2_0 = \frac{\ddot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2 \quad (\text{A.10})$$

$$d\omega^3_0 = d\left(\frac{\dot{c}}{c} \theta^3\right) = \frac{\ddot{c}c - \dot{c}^2}{c^2} dt \wedge \theta^3 + \frac{\dot{c}}{c} (d\theta^3)$$

$$d\omega^3_0 = \left(\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}^2}{c^2}\right) \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3\right)$$

$$d\omega^3_0 = \frac{\ddot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3 \quad (\text{A.11})$$

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (\text{A.12})$$

$$\Omega^1_0 = d\omega^1_0 = \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega^2_0 = d\omega^2_0 = \frac{\ddot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^3_0 = d\omega^3_0 = \frac{\ddot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3 \quad (\text{A.13})$$

$$\Omega^1_2 = \omega^1_0 \wedge \omega^0_2 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \wedge \frac{\dot{b}}{b} \theta^2 = \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1_3 = \omega^1_0 \wedge \theta^0_3 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \wedge \frac{\dot{c}}{c} \theta^3 = \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^2_3 = \omega^2_0 \wedge \omega^0_3 = \frac{\dot{b}}{b} \theta^2 \wedge \frac{\dot{c}}{c} \theta^3 = \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$-\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = \Omega^A_B \quad (\text{A.14})$$

$$R^1_{001} = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad R^1_{212} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b}$$

$$R^2_{002} = -\frac{\ddot{b}}{b} \quad R^1_{313} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \quad (\text{A.15})$$

$$R^3_{003} = -\frac{\ddot{c}}{c} \quad R^2_{323} = -\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}$$

Tensor de Ricci:

$$R_{AB} = R^C_{ACB} = R^0_{A0B} + R^1_{A1B} + R^2_{A2B} + R^3_{A3B} \quad (\text{A.16})$$

$$R_{00} = R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}$$

$$R^1_{010} = -R^1_{001} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^2_{020} = -R^2_{002} = \frac{\ddot{b}}{b} \quad (\text{A.17})$$

$$R_{00} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$R^3_{030} = -R^3_{003} = \frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R_{11} = R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131}$$

$$\begin{aligned}
 R^0_{101} &= R_{0101} = -R_{1001} = R^1_{001} = -\frac{\ddot{a}}{a} \\
 R^2_{121} &= -R_{2121} = -R_{1212} = R^1_{212} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \\
 R^3_{131} &= -R_{3131} = -R_{1313} = R^1_{313} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$R_{11} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right]\right) \tag{A.20}$$

$$R_{22} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232}$$

$$\begin{aligned}
 R^0_{202} &= R_{0202} = -R_{2002} = R^2_{002} = -\frac{\ddot{b}}{b} \\
 R^3_{232} &= -R_{3232} = -R_{2323} = R^2_{323} = -\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$R_{22} = \left(-\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right)$$

$$R_{22} = -\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right]\right) \tag{A.22}$$

$$R_{33} = R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333}$$

$$\begin{aligned}
 R^0_{303} &= R_{0303} = -R_{3003} = R^3_{003} = -\frac{\ddot{c}}{c} \\
 R_{33} &= \left(-\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$R_{33} = -\left(\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right]\right) \tag{A.24}$$

Escalar de Curvatura:

$$R = \eta^{AB} R_{AB} = R^A_A = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 R^0_0 &= R_{00} = \left(\ddot{\frac{a}{a}} + \ddot{\frac{b}{b}} + \ddot{\frac{c}{c}} \right) \\
 R^1_1 &= -R_{11} = \left(\ddot{\frac{a}{a}} + \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right) \\
 R^2_2 &= -R_{22} = \left(\ddot{\frac{b}{b}} + \frac{\dot{b}}{b} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right) \\
 R^3_3 &= -R_{33} = \left(\ddot{\frac{c}{c}} + \frac{\dot{c}}{c} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Adicionando os termos acima ficamos com:

$$\begin{aligned}
 R &= 2 \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\ddot{b}}{b} + 2 \frac{\ddot{c}}{c} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + 2 \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \\
 R &= 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$G_{AB} = R_{AB} + \frac{1}{2} R \eta_{AB} \tag{A.28}$$

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R \eta_{00} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) - \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \right\} \\
 G_{00} &= - \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right)
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right] \right) + \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \right\} \\
 G_{11} &= \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right)
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$G_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \right) \tag{A.32}$$

$$G_{33} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \right) \tag{A.33}$$

Passamos agora ao cálculo dos elementos necessários para escrevermos as componentes do tensor momentum-energia do fluiu

do Stokesiano que analisamos neste trabalho:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \{-\gamma_{AB}^0 - \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \eta_{B0} + \gamma_{B0}^0 \eta_{A0} - \frac{2}{3} \theta h_{AB}\} \quad (A.34)$$

$$\theta = -\gamma_{BC}^0 \eta^{BC} \quad (A.35)$$

Os coeficientes de rotação não nulos são:

$$\gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \gamma_{22}^0 = \frac{\dot{b}}{b} \quad \gamma_{33}^0 = \frac{\dot{c}}{c} \quad (A.5')$$

$$\theta = -\gamma_{B0}^0 \eta^{B0} - \gamma_{B1}^0 \eta^{B1} - \gamma_{B2}^0 \eta^{B2} - \gamma_{B3}^0 \eta^{B3}$$

$$\theta = +\gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) \quad (A.35')$$

$$h_{AB} = \eta_{AB} - \delta_A^0 \delta_B^0 \quad (A.36)$$

$$h_{00} = 0 \quad ; \quad h_{11} = -1 \quad ; \quad h_{22} = -1 \quad ; \quad h_{33} = -1 \quad (A.36')$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \{-\gamma_{11}^0 - \gamma_{11}^0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) (-1)\}$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \{-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) \quad (A.37)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2} \{-\gamma_{22}^0 - \gamma_{22}^0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) (-1)\}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) \quad (A.38)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) \quad (A.39)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma_{AB}\sigma^{BA} = \sigma_{A1}\sigma^{1A} + \sigma_{A2}\sigma^{2A} + \sigma_{A3}\sigma^{3A} \\ \sigma^2 &= \sigma_{11}\sigma^{11} + \sigma_{22}\sigma^{22} + \sigma_{33}\sigma^{33}\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned}\sigma^{AB} &= \eta^{AD}\eta^{BE}\sigma_{DE} \\ &= \eta^{A1}\eta^{BE}\sigma_{1E} + \eta^{A2}\eta^{BE}\sigma_{2E} + \eta^{A3}\eta^{BE}\sigma_{3E}\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

$$\sigma^{AB} = \eta^{A1}\eta^{B1}\sigma_{11} + \eta^{A2}\eta^{B2}\sigma_{22} + \eta^{A3}\eta^{B3}\sigma_{33}\quad (\text{A.41}')$$

$$\sigma^{11} = \sigma_{11} \quad \sigma^{22} = \sigma_{22} \quad \sigma^{33} = \sigma_{33}\quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 = \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \\ \sigma^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \\ \sigma^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 \quad (\text{A.40}')$$

$$\begin{aligned}\sigma^1_1 &= \eta^{11}\sigma_{11} = -\sigma_{11} \\ \sigma^2_2 &= -\sigma_{22} \\ \sigma^3_3 &= -\sigma_{33}\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

$$\Pi_{AB} = (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta \sigma_A^C \sigma_{CB} + \xi h_{AB} \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_A^C \sigma_{CB} = \sigma_A^1 \sigma_{1B} + \sigma_A^2 \sigma_{2B} + \sigma_A^3 \sigma_{3B} \quad (\text{A.45})$$

$$\Pi_{AB} = (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta (\sigma_A^1 \sigma_{1B} + \sigma_A^2 \sigma_{2B} + \sigma_A^3 \sigma_{3B}) + \xi h_{AB} \quad (\text{A.46})$$

$$\text{Tr}\{\Pi_{AB}\} = 0 \quad (\text{A.47})$$

$$\Pi_A^A = 0 \quad 3\xi + \delta \sigma^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = -\frac{\delta}{3} \sigma^2 \quad (\text{A.48})$$

$$T_{AB} = \rho v_A v_B - p h_{AB} + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta (\sigma_A^1 \sigma_{1B} + \sigma_A^2 \sigma_{2B} + \sigma_A^3 \sigma_{3B}) + \xi h_{AB}$$

$$T_{AB} = \rho \delta_A^0 \delta_B^0 + (\xi - p) \eta_{AB} + (p - \xi) \delta_A^0 \delta_B^0 + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{AB} + \delta (\sigma_A^1 \sigma_{1B} + \sigma_A^2 \sigma_{2B} + \sigma_A^3 \sigma_{3B}) \quad (\text{A.49})$$

$$T_{00} = \rho + \xi - p + p - \xi = \rho$$

$$T_{00} = \rho \quad (\text{A.50})$$

$$T_{11} = (\xi - p) \eta_{11} + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{11} + \delta (\sigma_1^1 \sigma_{11})$$

$$T_{11} = \left(\frac{\delta}{3} \sigma^2 + p\right) (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{11} + \delta \sigma_1^1 \sigma_{11} \quad (\text{A.51})$$

$$T_{22} = \left(\frac{\delta}{3} \sigma^2 + p\right) + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{22} + \delta \sigma_2^2 \sigma_{22} \quad (\text{A.52})$$

$$T_{33} = \left(\frac{\delta}{3} \sigma^2 + p\right) + (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \beta \sigma^2) \sigma_{33} + \delta \sigma_3^3 \sigma_{33} \quad (\text{A.53})$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - M. Novello, J.M. Salim, "Non Linear Photons on the Universe". Phys. Rev. D 20 (1979) 377.
- (2) - M. Novello, H. Heintzmann, "An Eternal Universe", GRG , Vol. 16, 6 (1984) 535.
- (3) - H.P. de Oliveira. Um estudo em Cosmologia e Termodinâmica Causal. Tese de Mestrado, CBPF (1986).
- (4) - M. Novello. Cosmos e Contexto. Forense Universitária . (1988).
- (5) - Ívano D. Soares, Notas de um Curso de Cosmologia.
- (6) - J. Ellis, "Relativistic Cosmology"
- (7) - M. Novello, Cosmologia Relativista. II Escola de Cosmologia e Gravitação. CBPF (1980).
- (8) - C.W. Misner, Astrophys. J. 151 (1968).
- (9) - G. Murphy, "Big-Bang Model Without Singularities", Phys. Rev. D8 (1973).
- (10) - Z. Klimek, "Some Thermodynamic Features of Cosmological Models with Viscosity", Acta Cosmologica 2 (1974).
- (11) - Z. Klimek, "Dissipation in Early Universe. I. Bianchi Type I and V Models", Acta Astronomia 25, 1 (1975).
- (12) - V.A. Belinski, I.M. Khalatnikov, "Viscosity Effects in Isotropic Cosmologies", Sov. Phys., JETP, 45, 1(1977).
- (13) - V.A. Belinski, I.M. Khalatnikov, "Influence of Viscosity on the Character of Cosmological Evolution", Sov. Phys. JETP, 42, 2 (1978).
- (14) - M. Novello, "Stokesian Fluids and Cosmology", Nucleonika, 25, 11/12 (1980).
- (15) - M. Novello, J.B.S. d'Olival, "Nonlinear Viscous Cosmolo-

- gy". Acta Physica Polonica B11 (1980).
- (16) - M. Novello, R.A. Araujo, "Qualitative Analysis of Homogeneous Universes", Phys. Rev. D22, 2 (1980).
- (17) - M. Novello, "A New Cosmological Scenario", Notas de Física, CBPF-NF-025 (1986).
- (18) - M. Novello, S.L.S. Duque, "Gravitationally Self-Induced Phase Transition". Submetido à publicação.
- (19) - L. Landau, E. Lifchitz, "Physique Statistique" , MIR (1967).
- (20) - E.F. Gramsbergen, L. Longa, W.H. de Jeu, "Landau Theory of the Nematic-Isotropic Phase Transition", Phys. Rep., 135 (1986).
- (21) - Ivano D. Soares, O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos. II Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF (1980).
- (22) - A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, "Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems" , John Wiley, New York (1973).
- (23) - G. Sansone, R. Conti, "Non-Linear Differential Equations", Pergamon Press (1964).