

MARIA DA CONCEIÇÃO DE SOUSA VIEIRA

CAOS EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS:

INFLUÊNCIA DA ASSIMETRIA

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1988 -

Maria da Conceição de Sousa Vieira  
"Caos em mapas unidimensionais:  
influência da assimetria"  
Tese de Doutorado - 14 set 1983

## AGRADECIMENTOS

Ao Constantino Tsallis, pela orientação segura, pela forma didática com que me introduziu as sutilezas da pesquisa científica e pela amizade.

Aos amigos Aglaē, Ananias, Anna, Edson, Evaldo, Francisco, Hans, Hēlio, Luciano, Marcelo, Sērgio e Uriel, pelas proveitosas discussões.

A todos os funcionários do CBPF que contribuíram na execução deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

A tese tem duas partes. Na primeira parte estudamos numericamente os três tipos de assimetria associadas ao mapa  $x' = 1 - \varepsilon_i - a_i |x|^{z_i}$  ( $i = 1, 2$ , corresponde respectivamente a  $x > 0$  e  $x \leq 0$ ). O primeiro caso considerado é a assimetria na amplitude ( $a_1 \neq a_2$ ) e o segundo é a assimetria no expoente ( $z_1 \neq z_2$ ). Em ambos os casos a rota para o caos é através de bifurcações de período; no entanto, a universalidade métrica observada no mapa simétrico ( $a_1 = a_2$ ,  $z_1 = z_2$  e  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ) é destruída. O comportamento dos fatores de escala é oscilatório para  $a_1 \neq a_2$  e oscilatório divergente para  $z_1 \neq z_2$ . A terceira, e mais importante assimetria considerada é o mapa descontínuo ( $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ). Neste caso a rota para o caos é completamente nova. Sequências de cascatas inversas aparecem em progressão aritmética. O caos agora surge no ponto de acumulação dos pontos de acumulação das cascatas. Várias características novas são estudadas com respeito ao diagrama de fase, sequências MSS, expoentes de Liapunov e de incerteza, números de atratores, multifractalidade, entre outros. Estudamos também o "crossover" entre o mapa descontínuo e o contínuo. Com relação ao mapa simétrico estudamos os fatores de escala  $\delta$  e  $\alpha$ , bem como as funções de escala  $\sigma$  e  $f(\alpha)$  associadas às sequências de  $N$ -furcações que existem na região caótica.

Na segunda parte da tese estudamos a para-estatística de um gás ideal com espectro de energia  $\varepsilon \propto |k|^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) numa caixa em

d-dimensões. O número de partículas é considerado bem determinado (partículas reais) ou não (quase-partículas). Calculamos exatamente as principais quantidades termodinâmicas para valores arbitrários de  $d$ ,  $\alpha$ ,  $T$  (temperatura) e  $p$  (número máximo de partículas por estado). O sistema comporta-se essencialmente como um de Fermi-Dirac para todos os valores finitos de  $p$  e apresenta um comportamento de Bose-Einstein apenas no limite  $p \rightarrow \infty$ . Finalmente, a integral de Sommerfeld e suas expansões são generalizadas para um  $p$  finito arbitrário.

## ABSTRACT

The thesis has two parts. In the first part we study numerically the three types of asymmetry associated with the map  $x' = 1 - \epsilon_i - a_i |x|^{z_i}$  ( $i = 1, 2$ , respectively correspond to  $x > 0$  and  $x \leq 0$ ). The first case considered is the amplitude asymmetry ( $a_1 \neq a_2$ ) and the second one is the exponent asymmetry ( $z_1 \neq z_2$ ). In both cases the road to chaos is via period-doubling bifurcations; however, the metric universality observed in the symmetric map ( $a_1 = a_2$ ,  $z_1 = z_2$  and  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ) is destroyed. The behavior of the scaling factors is oscillatory for  $a_1 \neq a_2$  and oscillatory divergent for  $z_1 \neq z_2$ . The third, and most important asymmetry considered is the discontinuous map ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ). In this case the road to chaos is a completely new one. Sequences of inverse cascades appear in arithmetic progression. Chaos now emerges at the accumulation point of the accumulation points of the cascades. Various new features are studied concerning the phase diagram, MSS sequences, Liapunov and uncertainty exponents, number of attractors, multifractality, among others. We also study the crossover between the discontinuous map and the continuous one. With respect to the symmetric map we study the scaling factors  $\delta$  and  $\alpha$ , as well as the scaling functions  $\sigma$  and  $f(\alpha)$  associated with the sequences of M-furcations that exist in the chaotic region.

In the second part of the thesis we study a parastatistics ideal gas with energy spectrum  $\epsilon \propto |k|^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) in a  $d$ -dimensional box. The number of particles is considered well determined (real

particles) or not (quasiparticles). We calculate the main thermodynamic quantities for arbitrary  $d$ ,  $\alpha$ ,  $T$  (temperature) and  $p$  (maximal number of particles per state). The system behaves essentially like a Fermi-Dirac one for all finite values of  $p$  and reveals a Bose-Einstein behavior only in the limit  $p \rightarrow \infty$ . Finally, the Sommerfeld integral and its expansion are generalized to an arbitrary finite  $p$ .

## SUMÁRIO

	Pág.
Agradecimentos .....	iii
Resumo .....	iv
Abstract .....	v
Lista de Figuras .....	xi
Lista de Tabelas .....	xiv
PARTE I	
<u>CAPÍTULO 1</u> - INTRODUÇÃO AO CAOS .....	1
<u>CAPÍTULO 2</u> - A ROTA POR BIFURCAÇÃO DE PERÍODO, POR INTERMITÊNCIA E DE RUELLE-TAKENS-NEWHOUSE ..	11
2.1 - Introdução .....	11
2.2 - A rota via Bifurcação de Período .....	12
2.2.1 - Universalidade .....	18
2.2.2 - Multifractalidade .....	24
2.2.3 - Expoente de Liapunov .....	28
2.2.4 - Espectro de Potência .....	31
2.2.5 - Influência de Ruído Externo .....	32
2.2.6 - Experimentos .....	34
2.3 - Rota por Intermitência .....	38
2.4 - Rota de Ruelle-Takens-Newhouse .....	43
2.5 - Conclusões .....	47
<u>CAPÍTULO 3</u> - MAPA COM ASSIMETRIA NA AMPLITUDE .....	49
3.1 - Introdução .....	49
3.2 - Resultados Numéricos .....	50
3.3 - A função Limite .....	56
3.4 - Grupo de Renormalização .....	58
3.5 - A função $f(a)$ .....	61

3.6 - O Expoente de Liapunov .....	62
3.7 - Conclusões .....	64
<u>CAPÍTULO 4 - MAPA COM ASSIMETRIA NO EXPOENTE</u> .....	66
4.1 - Introdução .....	66
4.2 - Resultados Numéricos .....	67
4.3 - A Função $f(a)$ .....	71
4.4 - Expoente de Liapunov .....	73
4.5 - Conclusões .....	75
<u>CAPÍTULO 5 - MAPA DESCONTÍNUO</u> .....	77
5.1 - Introdução .....	77
5.2 - Evolução de Atrator .....	82
5.3 - Comprimento do Ciclo .....	86
5.4 - Dimensão de Capacidade do Atrator no Ponto de Acumulação da Cascata .....	88
5.5 - "Crossover" do Mapa Descontínuo para o de Fei- genbaum .....	89
5.6 - Sequência MSS para o Mapa Descontínuo .....	90
5.7 - Expoente de Liapunov .....	92
5.8 - Expoente de Incerteza .....	94
5.9 - Histerese .....	98
5.10 - Multifractalidade .....	99
5.11 - Mapa Descontínuo como um caso Limite .....	101
5.12 - Conclusões .....	104
<u>CAPÍTULO 6 - ÍNDICES DE ESCALA E MULTIFRACTALIDADE ASSOCIA DA A M-FURCAÇÕES NO MAPA <math>x' = 1 -  x ^z</math></u> .....	106
6.1 - Introdução .....	106
6.2 - Cálculo dos Valores do Parâmetro para os Ci- clos de Superestabilidade .....	109
6.3 - O Fator de Escala $\delta$ .....	112
6.4 - O Fator de Escala $\alpha$ .....	113
6.5 - A Função $\sigma$ .....	117
6.6 - A Função $f(a)$ .....	119

6.7 - Conclusões .....	122
<u>CAPÍTULO 7</u> - CONCLUSÕES .....	124
PARTE II	
<u>CAPÍTULO 8</u> - PARA-ESTATÍSTICA DE UM GÁS IDEAL EM D-DIMEN SÕES .....	129
8.1 - Introdução .....	129
8.2 - Gás Ideal na Para-estatística: Densidade de Estados .....	130
8.3 - Número Total de Partículas Fixo (Partículas Reais) .....	132
8.3.1 - Potencial Químico e População do Estado Fun damental .....	132
8.3.2 - Energia Interna, Calor Específico, Equação de Estado e Calor Latente .....	141
8.4 - Número Total de Partículas não Fixo (Quase- partículas) .....	149
8.5 - Conclusões .....	151
<u>APÊNDICE A</u> - Integral de Sommerfeld Generalizada .....	154
<u>APÊNDICE B</u> - Programa que Calcula o Valor do Parâmetro onde o Ciclo é Superestável .....	158
<u>APÊNDICE C</u> - Programa que Calcula o Expoente de Liapunov .....	159
<u>APÊNDICE D</u> - Programa que Calcula o Expoente de Incerte- za .....	160
<u>APÊNDICE E</u> - Programa que Calcula a Função $f(a)$ .....	162
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	163

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pag.</u>
1.1 - Evolução temporal de uma região do espaço de fase que leva a um atrator estranho e atrator de Lorenz .....	6
1.2 - Mapa de Poincaré correspondendo a fluxos simples	8
2.2.1 - Mapa logístico .....	15
2.2.2 - Atrator finito em função de $a$ para o mapa de Feigenbaum .....	15
2.2.3 - $f(x)$ e $f^2(x)$ para $a=0.7, 0.75$ e $0.9$ .....	17
2.2.4 - Ciclos superestáveis para os períodos 2 e 4 ....	19
2.2.1.1 - Superposição dos quadrados da fig. 2.2.4 .....	22
2.2.1.2 - Representação esquemática da distâncias $d_n$ .....	22
2.2.2.1 - Função $f(a)$ para o mapa logístico .....	30
2.2.3.1 - Expoente de Liapunov para o mapa logístico .....	30
2.2.4.1 - Espectro de potência do mapa logístico .....	33
2.2.5.1 - Iterações do mapa logístico e expoente de Liapunov na ausência e na presença de ruído externo, e supressão da amplitude dos harmônicos na presença de ruído .....	33
2.2.6.1 - Instabilidade de Bénard e cascata de bifurcações	35
2.3.1 - Coordenada $y$ em função do tempo no modelo de Lorenz .....	39
2.3.2 - Mapa de Poincaré ao longo da coordenada $y$ , para $r$ levemente acima do limite da intermitência ...	39
2.3.3 - Representação esquemática de $y_{n+1}(y_n)$ explicando a transição por intermitência .....	41
2.3.4 - $f^3(x)$ em $a=a_c$ .....	41
2.3.5 - Iterações do mapa logístico na região com período três estável e na região intermitente .....	42
2.4.1 - Rota de Landau para o caos .....	46
2.4.2 - Rota de Ruelle-Takens-Newhouse .....	46
2.4.3 - A instabilidade de Taylor e o espectro de potência da velocidade .....	46

2.4.4 - Atrator estranho no experimento de Taylor .....	47
3.2.1 - Mapa assimétrico com $a_1=1.8$ e $a_2=2$ e $z=2$ .....	52
3.2.2 - Diagrama de bifurcação com $a_2=a_1+0.2$ .....	52
3.2.3 - Linhas críticas $a^*$ e $a^M$ .....	53
3.2.4 - Valores de $\delta_k$ e $\delta_{k+1}$ no ponto de acumulação das bifurcações .....	53
3.2.5 - Valores assintóticos de $\alpha_k$ e $\alpha_{k+1}$ .....	60
3.4.1 - Linhas críticas $a_2^*(a_1)$ obtidas a partir de RG para $z=2$ e $z=4$ .....	60
3.5.1 - Funções assintóticas $f(a)$ para $a_1=2.411713$ .....	63
3.6.1 - Expoente de Liapunov para $a_2=a_1+0.2$ .....	63
4.2.1 - Mapas assimétricos para $(z_1, z_2)=(2, 4)$ e $(4, 2)$ ..	68
4.2.2 - Diagramas de bifurcações para $(z_1, z_2) = (2, 4)$ e $(4, 2)$ .....	68
4.2.3 - Fator $\delta_k$ como função de $k$ para valores típicos de $z_1, z_2$ .....	72
4.3.1 - Função $f_k(a)$ para $(z_1, z_2)=(4, 2)$ e $k=8, 9, 10$ e $11$ .....	72
4.4.1 - Expoente de Liapunov para $(z_1, z_2)=(2, 4)$ e $(4, 2)$ .	74
5.1.1 - Mapa descontínuo para $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ e $a=1.8$	79
5.1.2 - Caixa dentro da qual o fluxo passando próximo do ponto de sela é linearizado .....	79
5.2.1 - Cortes especiais nas hipersuperfícies de $a^*$ e de $a^M$ no espaço $(\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ .....	83
5.2.2 - Dependência de $a^M$ com $x_0$ para valores típicos de $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ .....	83
5.2.3 - Evolução do atrator em função de $a$ para o mapa descontínuo .....	84
5.2.4 - A função $f^6(x)$ para $a=1.03$ no mapa descontínuo .	84
5.2.5 - Diagrama de fase para $\epsilon_2=0$ .....	87
5.3.1 - Gráfico de $\ln \xi$ vs. $\ln (a^* - a)$ .....	87
5.4.1 - Exemplo esquemático de cascatas inversas e "intermediárias" .....	91
5.5.1 - Gráfico de $f^2(x)$ em $a=a_d$ e $a=a_r$ .....	91
5.7.1 - Evolução de expoente de Liapunov em função de $a$ no mapa descontínuo .....	93

5.8.1 - Bacias atratoras para valores típicos de $a$ .....	97
5.8.2 - Gráficos de $-\ln(N_1/N)$ vs. $\epsilon$ .....	97
5.9.1 - Ciclo de histerese .....	100
5.10.1 - Função $f(a)$ para o mapa descontínuo .....	100
5.11.1 - Gráfico esquemático de $f(x)$ dada pela eq. (5.11.1)	102
5.11.2 - Evolução de atrator em função de $a$ para a eq. (5.11.1) .....	102
5.11.3 - Exponente de Liapunov com função de $a$ para $w=0.1,$ $0.15, 0.2$ e $0.3$ .....	103
6.1.1 - Diagrama de bifurcação para $z=1.1, 2, 5$ e $10$ ....	108
6.1.2 - Janelas com períodos 3 e 9 .....	108
6.3.1 - O fator de escala $\delta(z)$ como função de $z$ .....	115
6.4.1 - O fator de escala $\alpha(z)$ como função de $z$ .....	115
6.4.2 - O fator $\alpha^z$ em função de $z$ .....	118
6.5.1 - A função $\sigma(t, z)$ para $M=2, 3, 4$ e $5$ .....	118
6.6.1 - A função $f(a)$ para $M=2, 3, 4$ e $5$ .....	121
6.6.2 - Dimensão de Hausdorff para $M=3, 4$ e $5$ .....	122
8.2.1 - Para-estatística com ocupação máxima $p$ .....	132
8.3.1 - Dependência térmica do potencial químico reduzido para valores típicos de $p$ e $d/\alpha$ .....	135
8.3.2 - Temperatura reduzida na qual $\mu$ anula-se como fun- ção de $d/\alpha$ e $p$ .....	139
8.3.2.1 - Dependência térmica do calor específico para va- lores típicos de $d/\alpha$ e $p$ . Dependência do "cusp" que aparece em $c$ vs. $t$ .....	143
8.3.2.2 - Dependência do calor latente por partícula com $d/\alpha$ associada com a condensação de Bose-Einstein.	149

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pag.</u>
2.2.6.1 - Sumário das observações experimentais da rota de bifurcação de período .....	37
3.2.1 - Valores de $\tilde{a}_{2k}^*$ , $\delta_k$ , $\alpha_k$ , $\delta_k \delta_{k+1}$ e $\alpha_k \alpha_{k+1}$ para $a=1.316461$ .....	55
4.2.1 - Valores de $\tilde{a}_k^*$ , $\delta_k$ e $\alpha_k$ para $(z_1, z_2) = (4, 2)$ ....	70
6.2.1 - Valores dos pontos de acumulação $\tilde{a}_\nu$ dos ciclos superestáveis, de $\delta$ e $\alpha$ para $M=3, 4$ e $5$ e $z=1.5, 2, 3, 4, 6, 8$ e $10$ .....	116

PARTE I

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO AO CAOS

Alguns sistemas na natureza apresentam um comportamento completamente previsível numa larga escala de tempo, como por exemplo os eclipses, os quais podem ser previstos com milhares de anos de antecedência. Por outro lado, é impossível prever com exatidão o tempo que fará no dia seguinte, mesmo que o movimento da atmosfera obedeça a leis determinísticas da física, da mesma forma que o fazem os movimentos dos planetas. O que faz o movimento da atmosfera ser tão difícil de ser antecipado quando o comparamos ao do sistema solar? Ambos são constituídos de muitas partes e ambos são governados pela segunda lei de Newton,  $F=ma$ .

Durante alguns séculos a idéia da Física Clássica era que conhecendo-se a velocidade e a posição de um objeto num dado instante, então a princípio estas duas grandezas poderiam ser determinadas em qualquer instante no futuro. Isto está bem claro nas seguintes palavras do matemático francês Pierre Simon de Laplace (1776): " O estado presente da natureza é evidentemente uma consequência do que ela era num momento precedente; se concebermos uma inteligência que em um dado instante

compreendesse todas as relações das entidades deste universo, ela poderia estabelecer as respectivas posições, movimentos e efeitos gerais de todas estas entidades em qualquer tempo no passado e no futuro".

O século XX veio destruir esta concepção determinística da natureza, através de duas teorias completamente distintas. A primeira delas foi a mecânica quântica com o princípio da incerteza de Heisenberg, o qual diz que existe uma limitação fundamental na precisão com que a posição e a velocidade de uma partícula podem ser medidas. A segunda é a teoria de caos. Nesta teoria, a fonte de imprevisibilidade reside no fato que a evolução temporal de certos sistemas tem uma grande sensibilidade à forma como ele foi preparado inicialmente. O matemático francês Henri Poincaré (1903) foi quem primeiro concebeu que pequenas mudanças nas condições iniciais de um sistema podem causar uma grande incerteza no seu estado futuro. Isto está explícito nas suas palavras: " Se conhecéssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação deste mesmo universo num momento posterior. Mas, mesmo se fosse o caso em que as leis da natureza não tivessem qualquer segredo para nós, poderíamos conhecer a situação inicial apenas aproximadamente. Se com isso fosse possível prever a situação posterior com a mesma aproximação, poderíamos dizer que o fenômeno é previsível, que é governado por leis. Mas nem sempre é assim; pode acontecer que pequenas mudanças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro inicial produzirá um enorme erro no futuro". Assim, a mecânica

quântica mostra que medidas iniciais são sempre incertas, e a teoria de caos assegura que as incertezas poderão destruir a capacidade de fazer previsão.

A descoberta de Poincaré foi considerada por muitos apenas uma curiosidade matemática, e durante muitos anos ficou esquecida. Em 1963, um meteorologista do Massachusetts Institute of Technology, Edward Lorenz [ 1 ], montou um sistema de três equações diferenciais não lineares de primeira ordem, muito simples, para descrever o movimento dos fluidos na atmosfera. Ele encontrou que estas três equações podem levar o sistema a ter trajetórias completamente caóticas. O trabalho de Lorenz não teve durante muito tempo o devido reconhecimento. Neste trabalho encontra-se o gene de uma das mais importantes revoluções conceituais da física e da matemática que surgiram na segunda metade deste século, ou seja a teoria do caos determinístico.

Caos determinístico denota o movimento caótico ou irregular que é gerado por sistemas não-lineares, cujas leis dinâmicas determinam de maneira única a evolução temporal de um estado do sistema. Apesar do sistema ser determinístico, na prática a predictibilidade é muito limitada devido à sensibilidade às condições iniciais. Li e Yorke [ 2 ] aparentemente foram os primeiros a introduzir a palavra "caos" na literatura matemática para denotar os resultados aparentemente aleatórios de certas equações, embora o uso de "caos" na física remonta à época de Boltzmann, usada num outro contexto, não relacionado com o uso presente. No uso atual caos não deve ser confundido com qualquer tipo de desordem. É mais apropriado considerar caos como uma

espécie de ordem sem periodicidade.

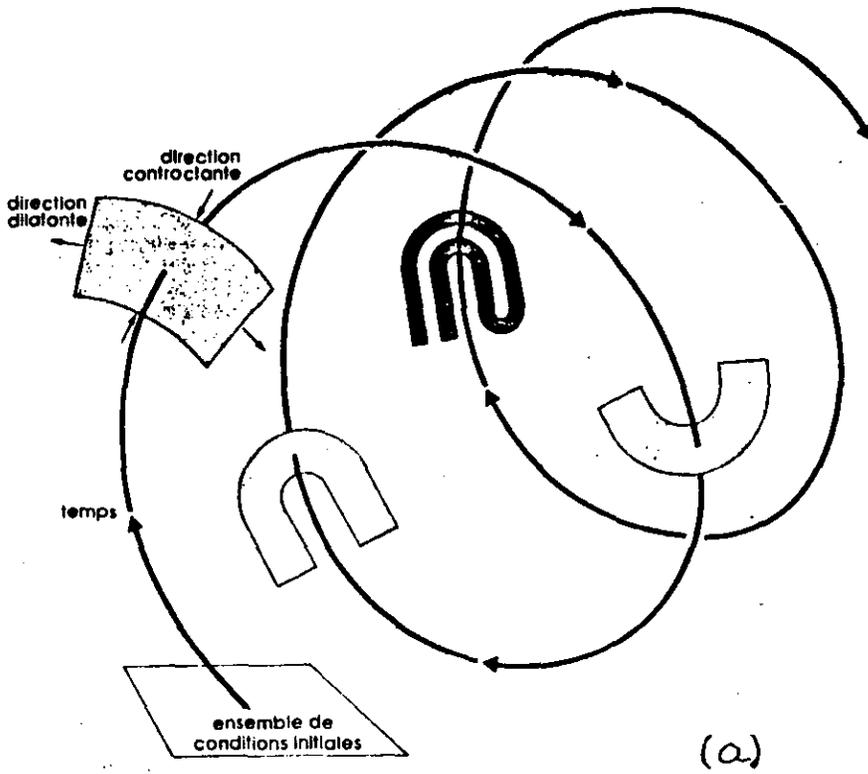
O comportamento caótico do modelo de Lorenz observado no tempo não é devido a fontes externas de ruído, nem a um número infinito de graus de liberdade e nem à incerteza associada à mecânica quântica, pois como se sabe este modelo não possui nenhuma destas características. A fonte de imprevisibilidade reside no fato que condições iniciais infinitamente próximas se distanciam exponencialmente na evolução temporal do sistema. Este fenômeno foi chamado por Lorenz de "efeito borboleta", significando que no problema meteorológico da previsibilidade do tempo, o bater asas de uma borboleta pode alterar as previsões. Nos anos recentes, devido aos resultados teóricos, à rapidez dos cálculos computacionais e às técnicas experimentais refinadas ficou claro que este fenômeno é abundante na natureza e tem consequências em muitos ramos da ciência.

Alguns anos depois do trabalho de Lorenz, mais precisamente em 1971, David Ruelle e Floris Takens [ 3 ], num contexto puramente matemático, introduziram um conceito muito importante à teoria de caos, ou seja o de atrator estranho. Eles não tinham conhecimento do trabalho de Lorenz, como também não sabiam que o modelo descrito nele continha este tipo de atrator. Na evolução temporal de sistemas dinâmicos dissipativos algumas direções no espaço de fase podem se distender e outras se contrair, de forma que o volume final é menor que o inicial; além disso, o atrator se "enrola" sobre si mesmo. Assim, o atrator final resultaria ser muito complicado e implicaria que pontos inicialmente próximos podem evoluir de maneiras diferentes. Tal tipo de atrator sensível

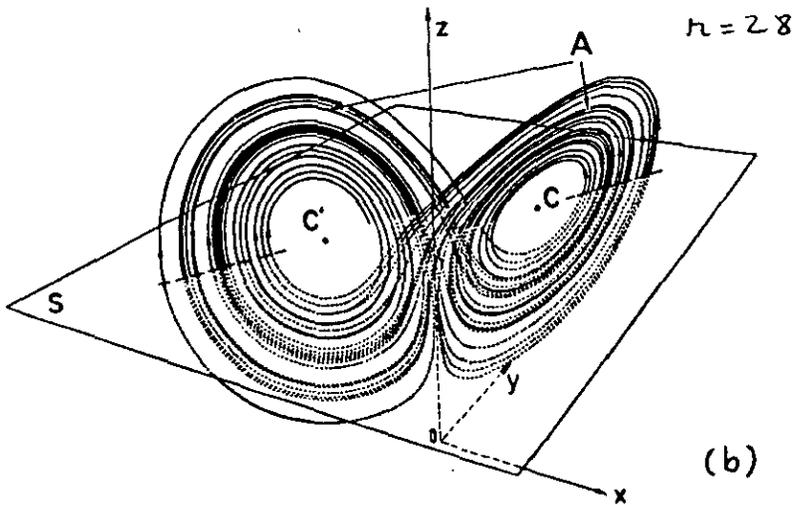
às condições iniciais, ou seja caótico, é chamado de atrator estranho. A dimensão do atrator estranho é menor que a do espaço de fase e em geral é um número fracionário. Na fig. 1.1(a) mostramos um exemplo esquemático da evolução temporal de uma região do espaço de fase que resulta num atrator estranho; em 1.1(b) mostramos o atrator de Lorenz.

Um artigo de Mitchell Feigenbaum [ 4 ], publicado em 1978, provocou um enorme interesse em sistemas dinâmicos caóticos. Feigenbaum por sua vez, havia sido chamado a atenção para este assunto através de um trabalho de Robert M. May [ 5 ], publicado em 1976, sobre dinâmica populacional que possui comportamento caótico. O artigo de Feigenbaum mostra que o caminho para o caos determinístico possui um comportamento universal comum a muitos tipos de sistemas físicos. O trabalho de Ruelle-Takens já propunha uma rota ao caos, mas o assunto na época não despertou interesse. Outra rota ao caos foi proposta em 1980 por Yves Pomeau e Paul Manéville [ 6 ]. Estas três rotas, de Feigenbaum (ou de desdobramento de período), de Pomeau-Manéville (ou por intermitência) e de Ruelle-Takens (ou por quase-periodicidade) possuem leis universais bem definidas e foram amplamente estudadas tanto do ponto de vista teórico quanto experimental.

Comprovações experimentais das rotas acima citadas foram feitas em sistemas tais como: pêndulo forçado, lasers, fluidos, circuitos eletrônicos, reações químicas, etc. Assim, verificou-se que, ao contrário do que sugerem os livros textos básicos de física, o movimento clássico, estável e regular é uma exceção. Em outras áreas da ciência como biologia, economia, genética,



(a)



(b)

Fig. 1.1. (a) Evolução temporal de uma região do espaço de fase que leva a um atrator estranho; (b) atrator de Lorenz.

epidemiologia, ciências sociais, etc. a teoria de caos mostrou também ser muito útil.

A teoria de caos está associada ao estudo de sistemas dinâmicos, os quais podem ser dissipativos ou conservativos e podem ser considerados do ponto de vista da mecânica clássica ou quântica. A evolução temporal de um sistema dinâmico caótico pode ser estudada com tempo ou contínuo ou discreto. No primeiro caso trata-se de um fluxo e no segundo de um mapa. A equação típica de um fluxo é  $d\vec{r}/dt=f_{\mu}(\vec{r})$ , e de um mapa  $\vec{r}_{t+1}=f_{\mu}(\vec{r}_t)$ , onde  $\vec{r}$  é um ponto num espaço d-dimensional das variáveis dinâmicas (dependente do tempo) e  $\mu$  um ponto no espaço de parâmetros externos (independente do tempo);  $f_{\mu}(\vec{r})$  é uma função não-linear das variáveis dinâmicas. Um pêndulo move-se continuamente de um estado para outro, assim, ele é melhor descrito por um fluxo de tempo contínuo. O número de insetos nascidos em cada ano numa área específica ou o intervalo de tempo entre gotas que caem de uma torneira que pinga são melhor descritos por um mapa de tempo discreto.

Através de um procedimento introduzido por Poincaré pode-se transformar um fluxo num mapa. Ao invés de observar a trajetória inteira no espaço de fase, olhamos apenas para os pontos de interseção com uma dada superfície; isto faz com que a dimensão do espaço de fase diminua de uma unidade. O conjunto destes pontos chama-se mapa de Poincaré. Quando a seção de corte é convenientemente escolhida, então a dinâmica do sistema será bem descrita pelo respectivo mapa. Na fig. 1.2 mostramos esquematicamente o mapa de Poicaré correspondente a alguns fluxos

simples.

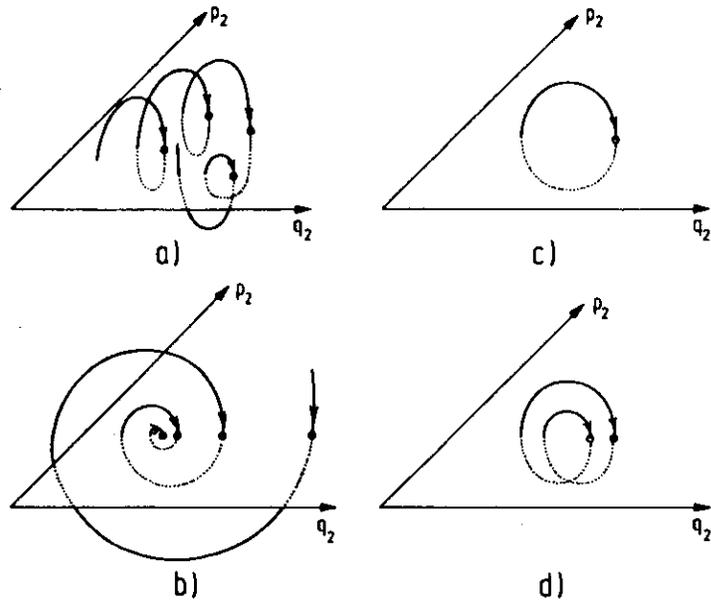


Fig. 1.2. Mapa de Poincaré correspondendo a (a) um movimento caótico, (b) aproximação de um ponto fixo (c) ciclo e (d) ciclo de período dois.

Neste trabalho de tese iremos considerar apenas os sistemas clássicos dissipativos unidimensionais. Este é um caso bastante frequente em sistemas macroscópicos, pois na prática sempre existe alguma espécie de dissipação. Por outro lado, os sistemas dissipativos multidimensionais tornam-se efetivamente unidimensionais, pois na evolução temporal o volume do espaço de fase encolhe com diferentes proporções em direções diferentes, de forma que a direção que menos encolhe define a linha unidimensional que contém o atrator. Também nos limitaremos a estudar apenas mapeamentos, o que também corresponde a uma

situação geral, já que os fluxos podem geralmente ser reduzidos a mapas através de seções de Poincaré, sem disfarçar a dinâmica do sistema.

As rotas ao caos descobertas por Feigenbaum, Pomeau e Maneville, e Ruelle-Takens foram sempre associadas a mapas contínuos, diferenciáveis e simétricos. Todas as provas matemáticas sobre a universalidade métrica destas rotas baseam-se nestes tipos de mapas. A proposta desta tese é verificar qual a influência da introdução de assimetria numa classe particular de mapas, ou seja, mapas do tipo logístico (ou de Feigenbaum) que quando simétricos possuem rota por bifurcação de período.

Estudamos basicamente três tipos de assimetrias, quais sejam, assimetria na amplitude, no expoente da variável dinâmica, ou ainda uma possível descontinuidade do mapa. Verificamos que os dois primeiros tipos de assimetria não modificam topologicamente a rota de bifurcação de período (ou de Feigenbaum). No entanto o comportamento quantitativo é completamente diferente; a universalidade métrica que existia na rota de Feigenbaum fica destruída. No caso em que a assimetria é uma descontinuidade, a rota ao caos é completamente diferente das três rotas citadas anteriormente. Esta nova rota possui leis universais bem definidas. Tratamos também de casos onde a assimetria consiste numa descontinuidade na derivada do mapa. Um estudo sobre este tópico constitui a ref. 48.

A tese está dividida em duas partes. Na primeira parte estudamos sistemas dinâmicos caóticos e está organizada da

seguinte forma: no segundo capítulo fazemos uma revisão das rotas de Feigenbaum (ou de desdobramento de período), de Pomeau-Maneville (ou via intermitência) e de Ruelle-Takens-Newhouse; no terceiro e quarto capítulos estudaremos mapeamentos que possuem assimetria na amplitude ou no expoente da variável dinâmica, respectivamente; no quinto capítulo estudaremos a nova rota ao caos associada a mapas descontínuos; o capítulo sexto é dedicado ao estudo das propriedades universais das sequências de  $M$ -furcações contidas nas janelas periódicas de mapas simétricos tipo Feigenbaum; no sétimo capítulo estão as conclusões relativas a esta parte. A segunda parte é formada pelo oitavo capítulo e trata de um tema diferente dos anteriores, que é a paraestatística de um gás ideal em  $d$ -dimensões.

## CAPÍTULO 2

### ROTA POR BIFURCAÇÃO DE PERÍODO, POR INTERMITÊNCIA, E DE RUELLE-TAKENS-NEWHOUSE

#### 2.1. INTRODUÇÃO

Parte do interesse em dinâmica caótica reside no fato que certas rotas para o caos parecem compartilhar certas características com um grande número de sistemas caóticos. Além disso, as condições caracterizando a passagem para o caos apresentam universalidade, no sentido em que diferentes sistemas apresentam comportamento qualitativo idêntico ao longo da trajetória no espaço de parâmetros. É possível que existam muitas rotas ao caos; no entanto, apenas três foram bem estudadas extensivamente, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Neste capítulo iremos estudar estas três rotas, que são a rota via bifurcação de período (ou de Feigenbaum), via intermitência, e a chamada rota de Ruelle-Takens-Newhouse (ou de quase-periodicidade).

A mais antiga destas rotas, proposta em 1971, é a de

Ruelle-Takens-Newhouse, e está associada principalmente a turbulência em fluidos. A segunda foi proposta por Feigenbaum e é a que melhor está estabelecida teórica e experimentalmente. Estudando uma equação não linear muito simples, Feigenbaum descobriu relações universais que são comuns a todos os sistemas que exibem rota ao caos via bifurcações. Este trabalho despertou um grande interesse dos físicos teóricos e experimentais por sistemas não-lineares. Poucos anos mais tarde, Pomeau e Manéville propuseram uma rota ao caos via intermitência, que na verdade está muito ligada à de Feigenbaum.

A primeira rota que estudaremos é a de bifurcação de período; depois a por intermitência, e por último, a de Ruelle-Takens-Newhouse. As conclusões estão elaboradas na última seção.

## 2.2. ROTA VIA BIFURCAÇÃO DE PERÍODO

A rota via bifurcação de período foi observada pela primeira vez no chamado mapa logístico, definido por

$$x_{t+1} = f_r(x_t) \equiv r x_t(1-x_t), \quad (2.2.1)$$

com  $0 \leq r \leq 4$  e  $0 \leq x \leq 1$ . Na fig. 2.2.1 mostramos este mapa. Esta equação aparece em muitos contextos, e já havia sido introduzida

em 1845 por P.F. Verhulst para simular o crescimento de uma população numa área fechada.

Apesar da eq. (2.2.1) ser muito simples, May [ 5 ] mostrou que ela possui uma dinâmica muito rica. Variando-se o parâmetro externo  $r$ , o sistema apresentará depois de um certo transiente uma cascata de bifurcações com período crescendo com  $2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Aumentando-se ainda mais o valor de  $r$ , aparecerá um comportamento caótico (ou aperiódico). Trabalhos posteriores de Grossmann e Thomae [ 7 ], Feigenbaum [ 4 ], e Couillet e Tresser [ 8 ] mostraram que existem constantes universais associadas a esta dinâmica.

A rota via bifurcação de período não está restrita à eq. (2.2.1), mas pode ser apresentada por todas as equações de diferenças finitas  $x_{t+1} = f_a(x_t)$  onde  $f_a(x)$  é uma função não linear, contínua e diferenciável e que satisfaz às seguintes condições:

- (i)  $f_a(x)$  possui um único máximo, que está localizado em  $x=0$ ,  $f'_a(0)=0$  e  $f_a(0)=1$ ;
- (ii)  $f_a(x)$  é monotonicamente crescente quando  $-1 < x < 0$  e monotonicamente decrescente quando  $0 < x < 1$
- (iii) A derivada Schwarziana definida por

$$Sf \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (2.2.2)$$

é negativa. Estes mapas são chamados de S-unimodais. Fazendo uma mudança de variável no mapa logístico, ele poderá ser escrito como

$$x_{t+1} = f_a(x_t) = 1 - a x_t^2 \quad (2.2.3)$$

onde  $0 \leq a \leq 2$ ;  $-1 \leq x_t \leq 1$ , e o mesmo satisfaz às condições enunciadas acima. Vemos que as condições necessárias para que um mapa apresente rota ao caos via bifurcações são bastante gerais (praticamente é suficiente que o mapa de Poincaré do sistema seja aproximadamente unidimensional com um único máximo). Isto faz com que esta rota seja observada experimentalmente em muitos sistemas não-lineares.

De uma forma geral, poderíamos ter ao invés de um mapa quadrático como o da eq. (2.2.3) um mapa que possuísse um máximo de ordem  $z$  ( $z > 1$ ). Veríamos que o comportamento qualitativo deste mapa seria o mesmo, mas as constantes universais teriam valores numéricos diferentes. Iremos então, neste capítulo, nos limitar ao mapa quadrático, pois é o mais comum na natureza. A teoria de bifurcação de período aplica-se também para sistemas multidimensionais conservativos, os quais possuem outros valores para as constantes universais.

Na eq. (2.2.3) vemos que depois de um grande número de iterações, o conjunto de pontos  $\{x_t\}$  apresenta duas espécies de comportamento, periódico ou aperiódico, dependendo do valor de  $a$ . Na fig. 2.2.2 mostramos o atrator deste mapa em função do parâmetro  $a$ . O ciclo com período 1 é caracterizado pela equação de pontos fixos

$$x^* = f_a(x^*) \quad (2.2.4)$$

Num gráfico  $f(x)$  vs.  $x$  os pontos fixos são dados pelas intersecções de  $f(x)$  com a reta  $x_{t+1} = x_t$ . É fácil mostrar que um ponto fixo será

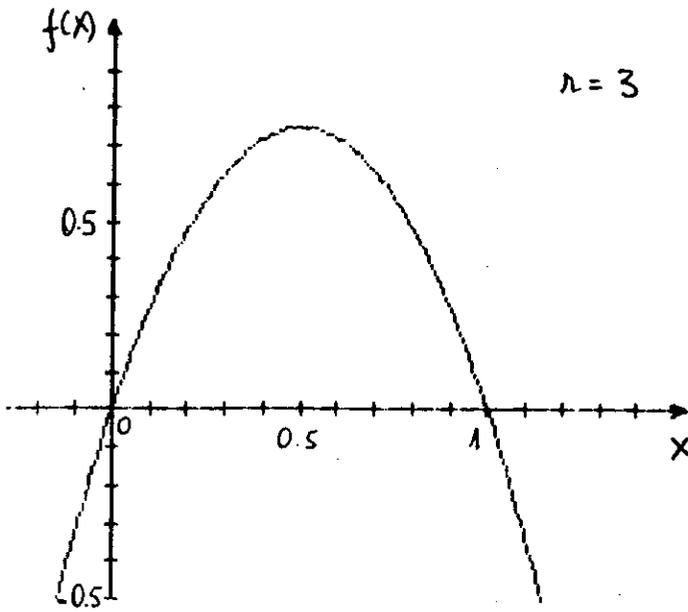


Fig. 2.2.1. Mapa logístico.

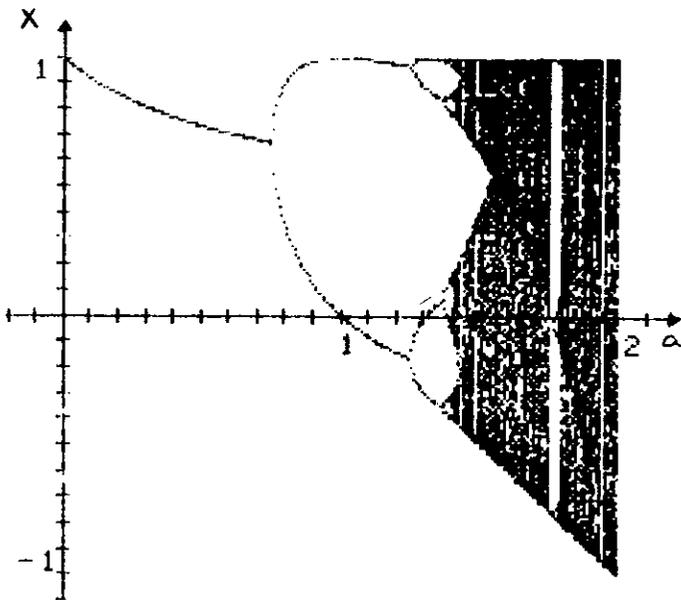


Fig. 2.2.2. Atrator finito em função de  $a$  para o mapa de Feigenbaum.

estável, marginalmente estável ou instável, se  $|f'(x^*)|$  for menor, igual ou maior que 1, respectivamente.

Vamos denotar a composição de funções com a seguinte notação:  $f^n(x) \equiv f(f(f \dots f(x)))$ , n vezes f; assim,  $f^2(x) \equiv f(f(x))$ , etc. Iremos agora estudar os pontos fixos da eq. (2.2.3) quando o parâmetro a varia. Consideraremos que  $a \in [0,2]$ , pois só assim as iterações de f estarão contidas em  $[-1,1]$  e o mapa será um mapa do intervalo. Resolvendo a eq. (2.2.4) com  $f(x)$  dada pela eq.(2.2.3) temos que

$$x^* = \frac{-1 + (1 + 4a)^{1/2}}{2a} \quad (2.2.5)$$

será ponto fixo de  $f(x)$ , e naturalmente também de  $f^n(x)$ . A outra raiz da equação de 2º grau não fornece resultados físicos interessantes. Usando o critério de estabilidade enunciado acima vemos que  $x^*$  é estável para  $0 \leq a < 0.75$ . Em  $a=0.75$  o ponto fixo torna-se marginalmente estável ( $|f'(x)|=1$ ), e acima deste valor  $x^*$  torna-se instável e aparecerão dois pontos fixos estáveis em  $f^2(x)$ . Na fig. 2.2.3 ilustramos estas etapas. Esta forma de desdobramento de período chama-se bifurcação tipo "pitchfork". Observe que a bifurcação acontece quando o autovalor (i.e., a derivada) do mapa passa por -1.

Agora, se aumentarmos a os novos pontos fixos irão se deslocar, e para um certo valor de  $a=\tilde{a}_1$  o ponto da esquerda irá coincidir com o mínimo de  $f^2$  (que ocorre em  $x=0$ ). Simultaneamente, o ponto fixo da direita coincidirá com o máximo. Neste valor de  $\tilde{a}_1$  ambas as derivadas dos pontos fixos valem zero (veja fig.

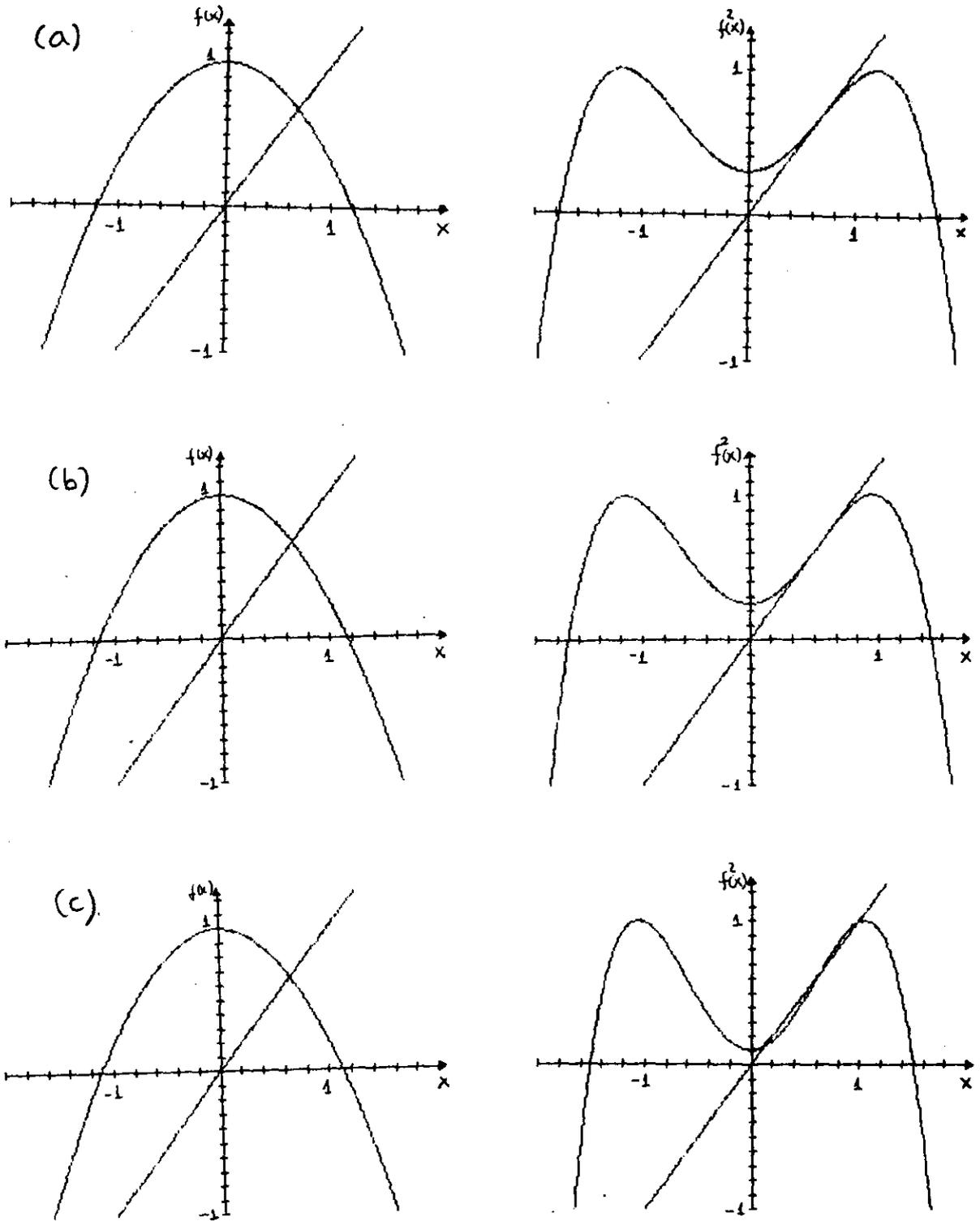


Fig. 2.2.3.  $f(x)$  e  $f^2(x)$  para (a)  $a=0.7$ , (b)  $a=0.75$  e (c)  $a=0.9$ .

2.2.4(a)), e nesta situação o ciclo é chamado de superestável.

Aumentando-se ainda mais  $a$ , as derivadas dos pontos fixos torna-se-ão negativas; em  $a=a_2=1.25$  elas serão igual a  $-1$ . Estamos agora na mesma situação encontrada anteriormente. Além deste valor, ambos os pontos fixos ficam instáveis, e cada um originará dois novos pontos fixos, que juntos formam um ciclo de período 4.

Para valores de  $a$  um pouco maiores, tem-se que em  $a=\tilde{a}_2$  o valor  $x=0$  será ponto fixo de  $f^4$ , com derivada zero (veja fig. 2.2.4(b)). Aumentando-se  $a$ , o ciclo 4 perderá sua estabilidade e dará origem a um ciclo com período 8, que por sua vez bifurcará num ciclo com período 16, e assim por diante. As bifurcações  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \dots 2^n$  continuarão até que  $a$  atinja um valor limite  $a^*$ , além do qual aparecerá o regime caótico, onde ciclos ímpares bem como atratores aperiódicos estão presentes.

### 2.2.1. Universalidade

Na região caótica existe um número infinito de janelas periódicas. Metropolis, Stein e Stein [ 9 ], em 1973, descobriram que existe uma ordem universal destas janelas comum a todos os mapas S-unimodais. Poderíamos chamar isto de uma universalidade qualitativa. Em 1978, Feigenbaum [ 4 ] mostrou que várias constantes universais estão presentes na árvore de bifurcações do mapa (2.2.3). Uma das relações de universalidade está relacionada com os locais de bifurcação  $a_n$ . Ele mostrou que

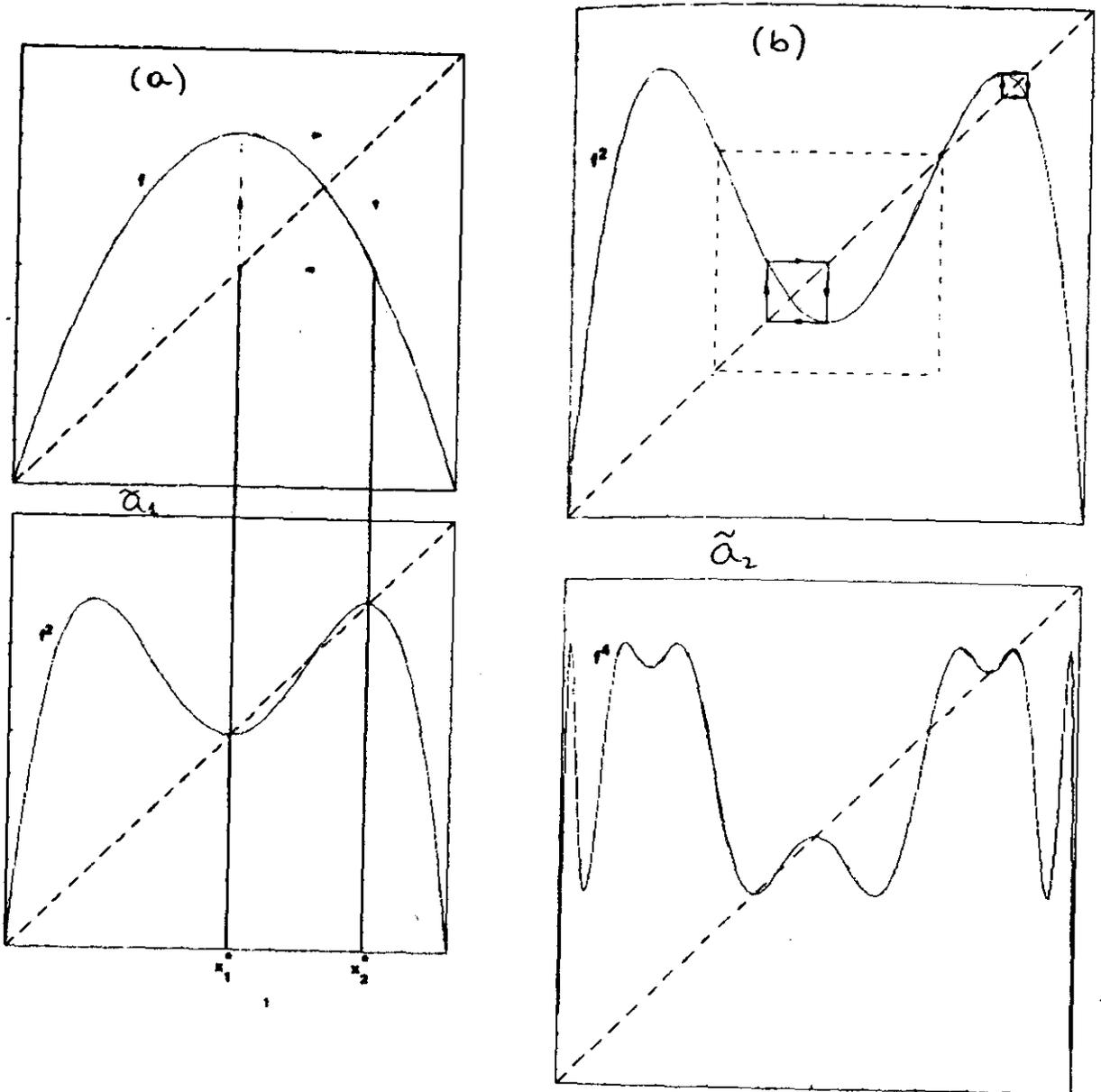


Fig. 2.2.4 (a) Ciclo superestável de período 2 em  $a = \tilde{x}_1$ . Observe que a derivada nos pontos fixos valem zero; (b) ciclo superestável de período 4 em  $a = \tilde{x}_2$ .

$$\delta_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \quad (2.2.1.1)$$

no limite  $n \rightarrow \infty$  converge para o fator de escala universal  $\delta$ . Na verdade, esta relação de convergência já havia sido mostrada antes de Feigenbaum por Myrberg [ 10 ], e Grossmann e Thomae [ 7 ], e simultaneamente a ele por Couillet e Tresser [8]; no entanto, estes autores não enfatizaram a universalidade de  $\delta$ . O valor de  $\delta$  depende unicamente de  $z$  (em mapa unidimensionais). Para  $z=2$ ,  $\delta=4.6692016091\dots$

Verifica-se também que o conjunto  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  onde os ciclos são superestáveis, ou seja, onde a derivada de  $f^n$  nos pontos fixos anulam-se, converge com uma relação idêntica a (2.2.1.1). Na verdade, qualquer conjunto formado pelos valores dos parâmetros onde a derivada de  $f^{2^n}$  possui um valor fixo obedece a relações deste tipo.

Vamos agora estudar  $f$  e  $f^2$  nos valores de  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\alpha}_2$ . Se aumentarmos um dos quadrados da fig. 2.2.4(b), de forma que ele tenha o mesmo tamanho do pequeno quadrado da fig. 2.2.4(a), veremos que as curvas que estão contidas nele são bastante similares. De fato, se tentarmos superpor estas curvas convenientemente ampliadas em valores sucessivos de  $\tilde{\alpha}_n$ , elas se tornarão cada vez mais coincidentes (veja fig. 2.2.1.1). Feigenbaum mostrou que o fator de ampliação para valores sucessivos de  $\tilde{\alpha}_n$  converge para uma constante universal. Desde que o tamanho dos quadrados pontilhados é a distância entre  $x = 0$  (quando ele é um ponto fixo de  $f^{2^n}$ ) e o ponto fixo mais próximo, temos que assintoticamente a escala de ampliação entre estes dois

elementos tende a uma constante. Se denotarmos por  $d_n$  a distância entre  $x = 0$  e o ponto fixo mais próximo em  $\tilde{\alpha}_n$ , temos

$$d_n = f_{\tilde{\alpha}_n}^{2^{n-1}}(0) - 0 \quad (2.2.1.2)$$

(o elemento mais próximo de  $x=0$  é justamente a iteração  $2^{n-1}$  de 0), então o fator de ampliação

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d_n}{d_{n+1}} \right| \quad (2.2.1.3)$$

é uma constante universal. Para  $z = 2$ ,  $\alpha = 2.5029078751\dots$ . Na fig. 2.2.4.2 mostramos esquematicamente as distâncias  $d_n$  para as primeiras bifurcações.

Não apenas as distâncias  $d_n$  se escalam com o fator  $\alpha$ , mas toda a função  $f^{2^n}$  contida no quadrado (ver fig. 2.2.1.1) que possui os pontos  $x=0$  e  $f^{2^{n-1}}(0)$  como vértices. Com esta verificação Feigenbaum e Cvitanovic mostraram que quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $(-\alpha)^n f_{\alpha^*}^{2^n}(x/(-\alpha)^n)$  tende a uma função limite universal  $g(x)$  que satisfaz a equação funcional de grupo de renormalização

$$g(x) = -\alpha g^2(x/\alpha) \quad (2.2.1.4)$$

com a condição  $g(0) = 1$ . Das equações acima encontramos que

$$\alpha = -1 / g(1) \quad (2.2.1.5)$$

A função  $g(x)$  é universal, refletindo o fato que depois de

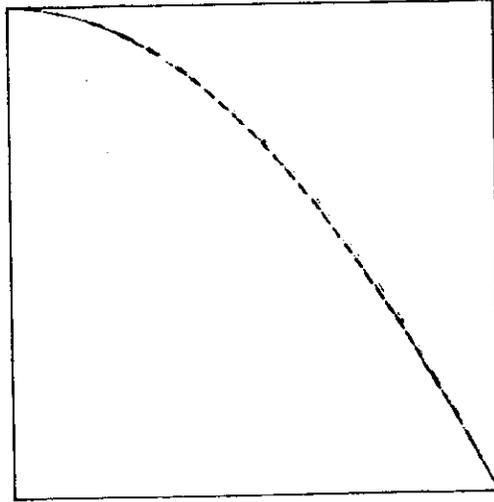


Fig. 2.2.1.1. Superposição dos quadrados pequenos das figs. 2.2.4(a) e 2.2.4(b), onde o de 2.2.4(b) foi ampliado numa escala adequada.

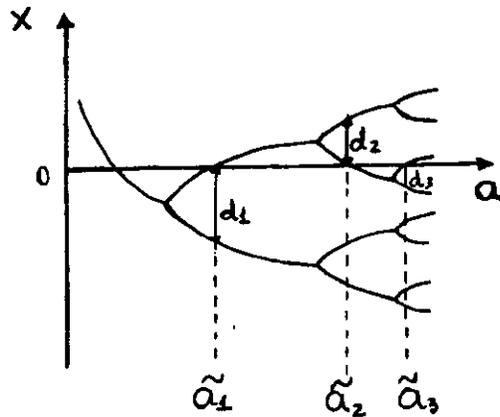


Fig. 2.2.1.2. Representação esquemática das distâncias  $d_n$  definidas pela eq. (2.2.1.2), para  $n=1, 2, 3$ .

sucessivas iterações praticamente toda informação sobre a forma global da função inicial  $f(x)$  é perdida. Os valores numéricos das constantes universais, bem como da função  $g(x)$ , dependem do valor do expoente de  $x$ , no termo dominante da função  $f(x)$ .

Na região caótica ( $a^* < a \leq 2$ ) existe um número infinito de janelas periódicas, as quais se bifurcam de maneira semelhante ao que ocorre quando  $a < a^*$ . A janela de período 3 pode ser observada na fig. 2.2.2. O teorema de Sarkowskii [ 11 ] estabelece um ordenamento para estas janelas, o qual é comum a todos os mapas S-unimodais. No diagrama de bifurcação existem muitos ciclos com o mesmo período. Metropolis, Stein e Stein [ 9 ] introduziram uma notação para diferenciar estes ciclos. Cada ciclo é caracterizado por uma sequência de R's ou L's, que indicam se as sucessivas iterações de  $x = 0$  no ciclo superestável situam-se à direita (R) ou à esquerda (L) de  $x = 0$ . Estas sequências são chamadas de sequências MSS. O resultado mais importante de MSS diz que é possível introduzir um ordenamento para todas as sequências admissíveis, i.e., é compilar um dicionário, existindo uma correspondência entre a posição da palavra no dicionário e o lugar de ocorrência do período no eixo do parâmetro, para uma grande classe de mapas unimodais. Em particular, se uma sequência P corresponde a um período, podemos construir uma outra sequência  $H(P) = P \times P$ , onde  $x=R$  se existe um número par de R's em P, do contrário  $x=L$ . H é chamado o harmônico de P e representa o ciclo originado da bifurcação do ciclo com período P.

A construção dos harmônicos é um caso particular de uma regra de composição mais geral, introduzida e denotada por \* no trabalho

de Derrida et al[ 12 ]. Usando a composição  $*$  pode-se expressar o harmônico de P como  $P * R$ , e uma sequência de bifurcação começando com P corresponde à sequência  $P * R^{*n} = P * R * \dots * R$  (n vezes R), etc. Além do mais, pode-se selecionar sequências de trifurcações  $(RL)^{*n}$ , de tetrafurcações  $(RL^2)^{*n}$ , de pentafurcações  $(RLR^2)^{*n}$ ,  $(RL^2R)^{*n}$  e  $(RL^3)^{*n}$ , etc. que pertencem às janelas periódicas da zona caótica. Os ciclo destas sequências não são adjacentes no eixo dos parâmetros, e possuem seus próprios fatores de escala.

Explorando as propriedades da composição  $*$  Derrida et al. encontrou uma estrutura de autosimilaridade das sequências MSS. Este fato é uma manifestação da estrutura de hierarquia das bandas caóticas, observadas no diagrama de bifurcação.

### 2.2.2. Multifractalidade

Na física não-linear existe uma grande variedade de objetos fractais complicados. Uma forma de caracterizar estes objetos é através da dimensão de Hausdorff (ou de capacidade). No entanto este número não constitui uma caracterização completa da medida fractal, pois pode-se construir muitos objetos com medidas diferentes, mas com a mesma dimensão de Hausdorff. Para se obter uma caracterização mais completa de um fractal, Halsey et al.[13] introduziram um formalismo que associa ao objeto um conjunto de índices de escala. Tais objetos são chamados de multifractais.

No ponto de acumulação da cascata de bifurcações do mapa (2.2.3) o atrator existente é um multifractal. Como foi mostrado

por Feigenbaum [ 4 ], através da função  $\sigma$ , existe um conjunto de índices de escala associado a este atrator, os principais índices sendo  $\alpha$  e  $\alpha^2$ .

Vamos agora introduzir o formalismo de Halsey para estudar os multifractais. Consideremos uma série temporal de  $N$  pontos num atrator fractal (ou estranho, de acordo com alguns autores) no espaço de fase de um sistema dinâmico. Quando  $N$  vai para infinito cobrimos o atrator com caixas de tamanho  $l_i$  e definimos uma densidade de probabilidade no atrator como

$$p_i = N_i / N \quad (2.2.2.1)$$

onde o índice  $i$  refere-se à caixa  $i$ . Vamos agora introduzir uma a função de partição da seguinte forma

$$\Gamma = \sum_i \frac{p_i^q}{l_i^\tau} \quad (2.2.2.2)$$

Consideremos que as caixas possuem um tamanho característico  $l$ . Em geral, quando  $l \rightarrow 0$ ,  $\Gamma$  vai para infinito ou zero, dependendo do valor de  $\tau$ . O valor de  $\tau$  que situa-se no limite entre estes dois casos define a função  $\tau(q)$ . Quando  $q \rightarrow \infty$  o maior valor de  $p_i$  irá dominar a soma (2.2.2.2); isto corresponde à região mais concentrada do atrator. Por outro lado, se  $q \rightarrow -\infty$  o menor valor de  $p_i$  dominará a soma; isto corresponde a região mais rarefeita do atrator.

Podemos transformar  $\tau(q)$  em quantidades mais físicas, refletindo as densidades locais no atrator. Assumimos que a densidade  $p_i$  quando  $l_i \rightarrow 0$  se escala como

$$p_i \sim l_i^\alpha \quad (2.2.2.3)$$

definindo um índice de escala  $a$ . Um valor particular de  $a$ , digamos  $a'$ , pode estar presente em muitas regiões do objeto. Em geral, o conjunto de pontos com o mesmo índice de escala  $a'$  forma um subconjunto do atrator com uma dimensão que chamamos  $f(a')$ . Vamos agora considerar as caixas com índices de escala num elemento diferencial de  $a'$ ,  $[a', a'+da']$ . O número de caixas com tais índices comporta-se-ão como

$$da' n(a') \sim da' l^{-f(a')} \quad (2.2.2.4)$$

Inserindo as eqs. (2.2.2.3) e (2.2.2.4) em (2.2.2.2) temos

$$\begin{aligned} \Gamma &= l^{-\tau} \sum p_i^q \\ &\sim l^{-\tau} \int da' n(a') p(a')^q \\ &\sim l^{-\tau} \int da' l^{-f(a')} l^{a'q} \\ &\sim l^{-\tau - f(a') + a'q} \end{aligned} \quad (2.2.2.5)$$

No último passo da eq. (2.2.2.5) fizemos a aproximação do ponto de sela; a parte dominante da integral irá corresponder ao valor mínimo do expoente de  $l$ , para  $l$  pequeno. Impondo que  $\Gamma$  permaneça finito quando  $l \rightarrow 0$ , teremos as seguintes transformações de Legendre

$$\begin{aligned} \tau &= aq - f \\ a &= \frac{d\tau}{dq} \\ \frac{df}{da} &= q, \quad \frac{d^2f}{da^2} < 0 \end{aligned} \quad (2.2.2.6)$$

Podemos relacionar os expoentes  $\tau(q)$  com as dimensões

generalizadas  $D_q$  introduzidas por Hentschel e Procaccia [ 14 ].

Temos que

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum p_i^q}{\ln l} \right] \quad (2.2.2.7)$$

É fácil mostrar que  $\tau = (q - 1)D_q$ . Se um espectro contínuo  $f(\alpha)$  existe, a transformação (2.2.2.6) implica que ela deve ser convexa. Além do mais, o máximo valor de  $f$  será igual a dimensão de Hausdorff  $D_0$ , que é a dimensão do atrator como um todo. O valor máximo de expoente de escala  $\alpha_{\min}$  é igual a  $D_{\infty}$ , e corresponde à região mais concentrada do atrator;  $\alpha_{\max}$  é igual a  $D_{-\infty}$  e corresponderá à região mais rarefeita.

Para calcular a função  $f_n(\alpha)$  no atrator com período  $2^n$  do mapa (2.2.3), consideremos as caixas com medida  $p_i$  constante e igual a  $p = 2/N$ , e tamanhos  $l_{n,i}$  dados por

$$l_{n,i} = f_{\tilde{x}_n^{i+2^{n-1}}}(\alpha) - f_{\tilde{x}_n^i}(\alpha) \quad (2.2.2.8)$$

Assim a função de partição torna-se

$$\Gamma = \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)^q \sum_{i=1}^{2^{n-1}} l_{n,i}^{-\tau} \quad (2.2.2.9)$$

A função  $f_n(\alpha)$  obtida de (2.2.2.9) converge, para  $n$  suficientemente grande, para uma função universal, a qual está mostrada na fig. (2.2.2.1).

A região menos concentrada do atrator da árvore de bifurcação

escala-se com  $\alpha$ , onde  $\alpha=2.5020078\dots$ , correspondendo às distâncias próximas de  $x=0$ . O topo da árvore corresponde à região mais concentrada e escala-se com  $\alpha^2$ . Desde que cada galho de bifurcação contém dois pontos, é fácil mostrar que

$$\alpha_{\min} = \frac{\log 2}{\log \alpha^2} \cong 0.37775 \quad (2.2.2.10)$$

$$\alpha_{\max} = \frac{\log 2}{\log \alpha} \cong 0.75551 \quad (2.2.2.11)$$

Estes valores estão numa concordância extremamente boa com os valores dos pontos  $\alpha_{\min}$  e  $\alpha_{\max}$  do gráfico. O máximo de  $f(\alpha)$  está em  $D_0=0.537\dots$ , concordando com cálculos anteriores da dimensão de Hausdorff deste conjunto [15].

### 2.2.3. Expoente de Liapunov

A definição de caos em dinâmica não linear está associada à sensibilidade do sistema às condições iniciais. O expoente de Liapunov  $\lambda$  mede quantitativamente esta sensibilidade. Quando o sistema encontra-se num estado de periodicidade então  $\lambda < 0$ ; se está num estado caótico, então  $\lambda > 0$ .

Para se determinar  $\lambda$  num sistema unidimensional, consideremos dois pontos,  $x_0$  e  $x_0'$  inicialmente separados por uma distância  $\epsilon_0$ . Depois de uma iteração eles estarão separados por

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 |f'(x_0)| \quad (2.2.3.1)$$

Desde que

$$x_2 = f(x_1) \quad (2.2.3.2)$$

então depois de mais uma segunda iteração a distância que os separa será

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 |f'(f(x_0))| = \epsilon_0 |f'(x_0)| |f'(x_1)| \quad (2.2.3.3)$$

Portanto, após  $n$  iterações eles estarão separados por

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \epsilon_0 \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \\ &= \epsilon_0 \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|\right) \\ &= \epsilon_0 \exp(n\lambda) \end{aligned} \quad (2.2.3.4)$$

onde no limite  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.2.3.5)$$

é chamado expoente de Liapunov. Assim, se  $\lambda > 0$  a separação entre os pontos cresce exponencialmente quando  $n \rightarrow \infty$ , enquanto que para  $\lambda < 0$  ela diminui exponencialmente.

Se graficarmos o expoente de Liapunov em função do parâmetro  $a$  para o mapa (2.2.3), vemos que quando  $a < a^*$ ,  $\lambda$  é negativo ou nulo, indicando que órbitas próximas convergem para o mesmo ciclo estável (ver fig 2.2.3.1). Nos pontos de bifurcação temos  $\lambda = 0$ , mostrando que existe uma instabilidade no sistema associada à mudança de período. Nos pontos de superestabilidade  $\tilde{x}_n$ , a convergência à órbita periódica é mais rápida que em qualquer outro valor do parâmetro, e neste caso  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Para  $a > a^*$ ,  $\lambda$  em grande parte é positivo, indicando que pontos inicialmente próximos afastam-se exponencialmente. As regiões com  $\lambda < 0$  correspondem às janelas periódicas da zona caótica.

Se considerarmos a envoltória (ver fig. 2.2.3.1) de  $\lambda$  quando

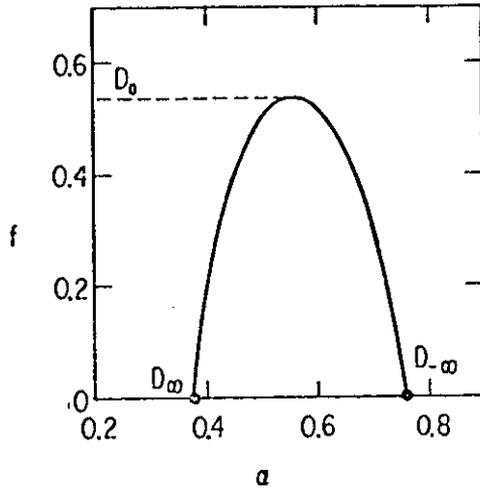


Fig. 2.2.2.1. Função  $f(a)$  para o atrator no ponto de acumulação das bifurcações.

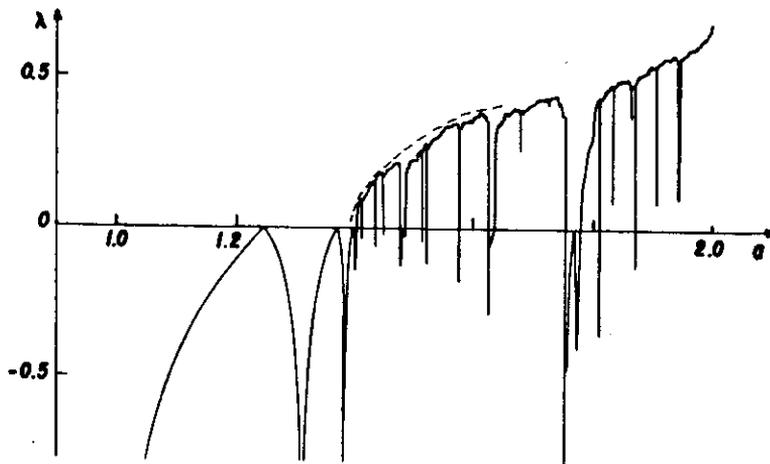


Fig. 2.2.3.1. Expoente de Liapunov com função de  $a$ . A envoltória pontilhada indica um comportamento de  $\lambda$  com uma lei de potência.

$a \rightarrow a^*$  por valores superiores, vemos que ela é governada por uma lei de potência. Huberman e Rudnick [ 16 ] mostraram que

$$\lambda \sim (a - a^*)^\tau \quad (2.2.3.6)$$

onde

$$\tau = \frac{\ln 2}{\ln \delta} \quad (2.2.3.7)$$

é um expoente universal. Fazendo uma analogia com transições de fase, vemos que  $\lambda$  faz o papel do parâmetro de ordem, enquanto que  $a$  faz o da temperatura.

#### 2.2.4. Espectro de Potência

Para se fazer experimentalmente a distinção entre um sinal caótico e um sinal periódico, mas que aparentemente é complicado, costuma-se usar o espectro de potência. O espectro de potência de um sinal escalar  $x(t)$  é definido como o quadrado de sua transformada de Fourier. Tipicamente ele mede a quantidade de energia por unidade de tempo (i.e. a potência) contido num sinal como função da frequência  $\omega$ . O espectro de potência é definido por

$$P(\omega) = (\text{const}) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T dt e^{-i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (2.2.4.1)$$

A função  $P(\omega)$  de um sistema periódico com frequência  $\omega$  possui  $\delta$ 's de Dirac em  $\omega$  e nos seus harmônicos  $2\omega, 3\omega, \dots$ . Em experimentos reais os  $\delta$ 's não são infinitamente estreitos; eles possuem uma

"largura experimental"  $2\pi/T$ , onde  $T$  é o comprimento da série temporal usada. Num movimento caótico (ou aperiódico)  $P(\omega)$  mostra uma banda larga contínua nas frequências baixas.

Na fig. (2.2.4.1) mostramos o espectro de potência para o mapa quadrático. Feigenbaum mostrou que o quadrado da amplitude dos subhamônicos sucessivos no espectro de potência neste mapa decrescem com um fator  $\mu$  que aproximadamente é uma média quadrática dos fatores de escala  $\alpha$  e  $\alpha^2$ :

$$\mu \cong 2 \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \right)^{-1/2} \quad (2.2.4.2)$$

Um cálculo mais preciso de  $\mu$  deveria incluir todo o espectro de índices de escala no atrator, usando para isto a função  $\sigma$  [4].

### 2.2.5. Influência de Ruído Externo

Considerando que as estruturas das órbitas periódicas ficam cada vez mais finas à medida que o parâmetro  $a$  se aproxima dos pontos de acumulação, é de se esperar que num experimento real a presença de ruído externo trunque a sequência de bifurcações. Quando a separação média entre os pontos do atrator é menor que a largura do ruído, então as bifurcações não mais poderão ser observadas. O estudo teórico deste problema foi feito por Crutchfield et al [ 17 ]. Eles consideraram que na presença de um ruído pequeno  $\sigma$  tem-se o seguinte mapa

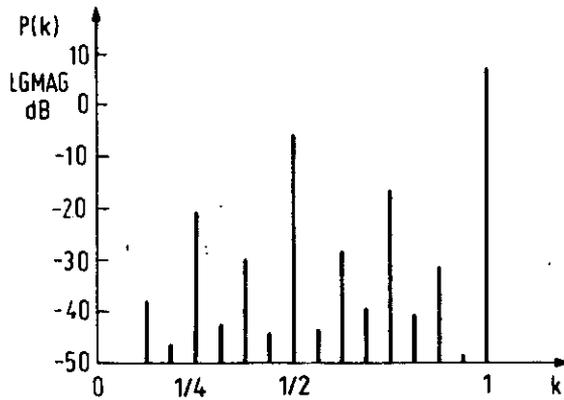


Fig. 2.2.4.1. Espectro de potência do mapa quadrático.

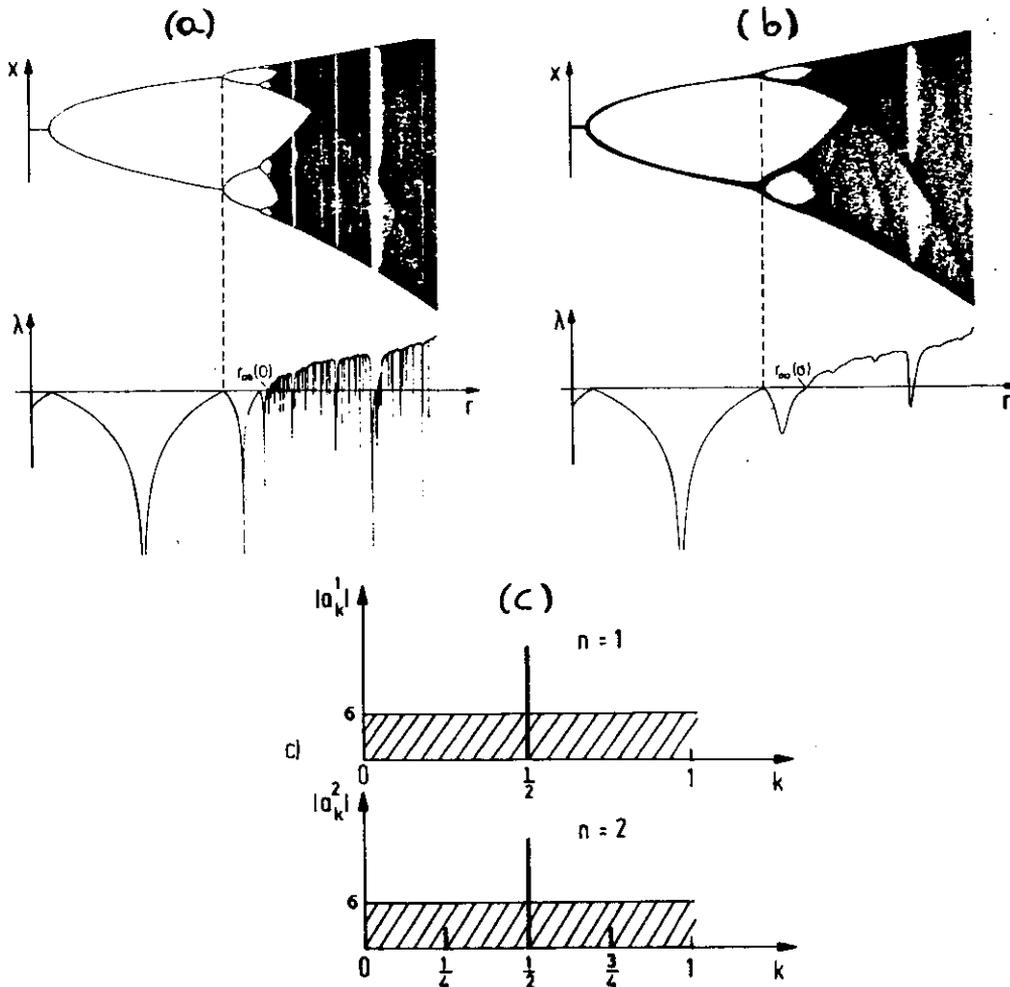


Fig. 2.2.5.1. (a) Iterações do mapa logístico e o expoente de Liapunov comparada com (b) as quantidades correspondentes na presença de um ruído externo com amplitude  $\sigma^1 = 10^{-3}$ . (c) Supressão da amplitude dos subharmônicos na presença de ruído.

$$x_{n+1} = f(x_n) + \delta \xi \quad (2.2.5.1)$$

onde  $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ . Na fig. 2.2.5.1(a) mostramos o diagrama de bifurcação e o expoente de Liapunov para o mapa quadrático na presença e na ausência de ruído. Vemos que na presença de ruído existe uma transição abrupta para o caos, que acontece em  $a < a^*$ . Na fig 2.2.5.1(b) mostramos esquematicamente a supressão das amplitudes dos subharmônicos quando o ruído está presente.

#### 2.2.6. Experimentos

Depois do trabalho de Feigenbaum um grande número de experimentais detectaram o fenômeno das bifurcações de período e mediram as constantes universais em sistemas físicos reais, em várias áreas, tais como: hidrodinâmica (água, hélio, mercúrio líquido), ótica (lasers), acústica, eletrônica, biologia (músculo cardíaco), química (reação de Belousov-Zhabotinsky), e assim por diante.

Um experimento típico da rota de Feigenbaum é o chamado experimento de Bénard, no qual Lorenz se baseou para formular seu modelo. Uma camada de fluido (com um coeficiente positivo de expansão volumétrica) é aquecida por baixo num campo gravitacional, como mostra a fig. 2.2.6.1. O sistema é controlado externamente pelo número de Rayleigh  $R$ , o qual é proporcional à diferença de temperatura entre a superfície superior e a inferior da camada. Para valores pequenos de  $R$  existe um fluxo de calor

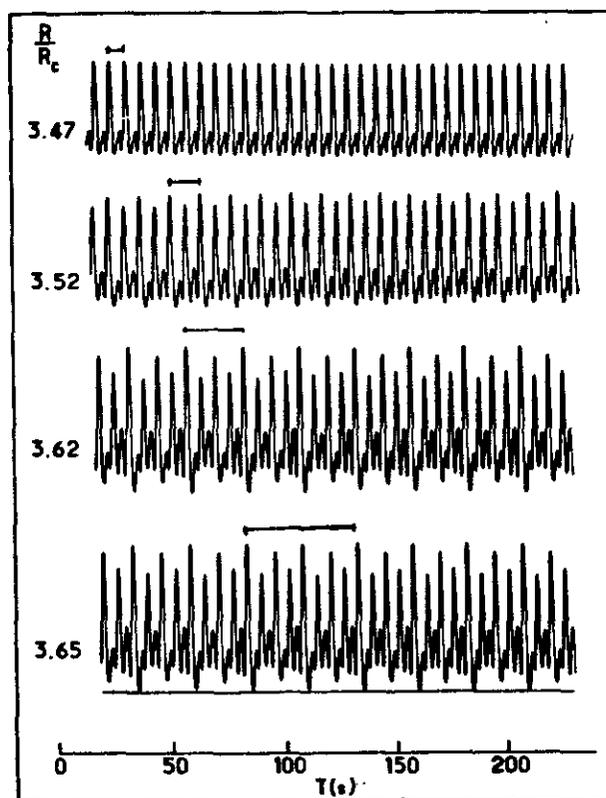
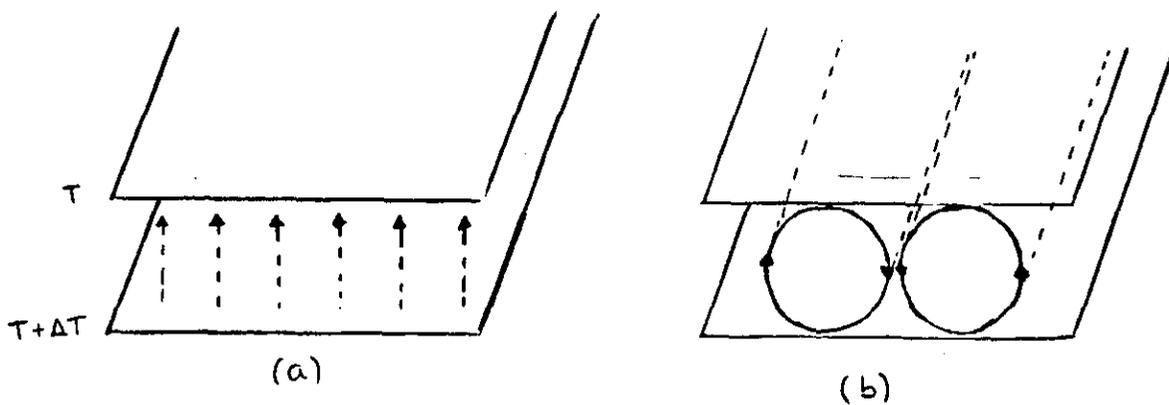
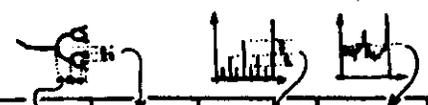


Fig. 2.2.6.1. Instabilidade de Bénard. Transferência de calor por (a) condução, e (b) por convecção. (c) Cascata de bifurcação; o sinal medido é a temperatura do fluido num ponto como função do tempo. Os seguimentos de linha indicam o comprimento do período.

para cima, mas o líquido é estático. Num ponto crítico  $R_{c1}$  aparecem rolos de convecção; o líquido quente sobe por um lado do rolo, enquanto que o frio desce pelo outro lado. Acima de um outro valor crítico  $R_{c2}$  aparece um movimento oscilatório ao longo destes rolos. Assim, a medida de qualquer variável em qualquer ponto do espaço exibirá um comportamento oscilatório. Aumentando-se ainda mais  $R$  aparecem novas instabilidades seguidas do aparecimento de novas frequências. Na fig. 2.2.6.1(c) está mostrada a cascata de desdobramento de período presente no experimento de Bénard. O sinal medido é a temperatura do fluido num ponto em função do tempo [ 18 ]. Observe que  $R$  faz o papel do parâmetro  $a$  na eq. (2.2.4).

Na tabela 2.2.6.1 resumizamos os resultados obtidos relacionados com a rota de bifurcação de período em experiências significativas. A evidência experimental que as sequências de bifurcações são comuns e caracterizadas pelos números universais é bastante clara. Inevitavelmente o ruído inerente ao sistema e outros problemas experimentais interrompem a sequência de bifurcações; o melhor que pode ser esperado é que sejam medidas de 4 a 5 bifurcações. Existem também problemas teóricos; em muitos destes experimentos não existe um entendimento completo da dinâmica que o envolve, sendo portanto difícil de garantir que eles são bem aproximados pela teoria unidimensional.



experiment	no. period doublings	$\delta$	$\alpha$	$\mu$	$\sigma$
<u>hydrodynamic:</u>					
water [19]	2				
water [20]	4	4.3(8)		4(1)	
helium [24]	4	3.5(1.5)		4(?)	
mercury [18]	4	4.4(1)		5(1)	
<u>Electronic:</u>					
diode [22]	4	4.5(6)		6(?)	
diode [23]	5	4.3(1)	2.4(1)	O.K.	
transistor [24]	4	4.7(3)		O.K.	
Josephson simbl. [25]	3	4.5(3)	2.7(2)		1.5(1)
<u>Laser:</u>					
laser feedback [26]	3	4.3(3)	O.K.		
laser [27]	2				
laser [28]	3				
<u>Acoustic:</u>					
helium [29]	3				
helium [30]	3	4.8(6)		6(?)	
<u>Chemical:</u>					
B-Zh reaction [31]	3				
<u>Computer:</u>					
N-S truncation [32]	5	4.6(2)	2.5(1)		
Brusselator [33]	7	4.6(2)		4.77(3)	1.5(?)
<u>Theory:</u>					
equation no.	$\infty$	4.669... (5.1)	2.503... (4.2)	4.58... (6.1)	1.52... (7.5)

Tabela 2.2.6.1. Um sumário das observações experimentais da rota de bifurcação de período. Os números entre parêntesis indicam as estimativas dos erros experimentais; 4.3 (8) significa  $4.3 \pm 8$ .

### 2.3. ROTA POR INTERMITÊNCIA

Na teoria de caos, intermitência significa a ocorrência de um sinal que possui uma fase laminar, bem comportada, interrompida por sinais caóticos. Tais sinais foram observados num grande número de experiências. Observou-se também que o tamanho da região caótica varia com o parâmetro externo, o que significa que a intermitência oferece uma rota contínua de movimento regular para caótico.

Um modelo teórico para a intermitência foi proposto por Pomeau e Maneville [ 6 ]. Eles resolveram numericamente as equações diferenciais do modelo de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(x-z) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

e mostraram que a componente  $y$  possui o seguinte comportamento: para  $r < r_c$ ,  $y(t)$  executa um movimento regular, correspondendo a um ponto fixo estável no mapa de Poincaré; acima de  $r_c$  as oscilações são interrompidas por sinais caóticos, os quais tornam-se cada vez mais frequentes quando  $r$  cresce, até que o movimento torna-se totalmente caótico (veja fig. 2.3.1). Na fig. 2.3.2 mostramos uma parte do mapa de Poincaré ao longo da coordenada  $y$  para um valor de  $r$  levemente acima do limite da intermitência.

Apesar dos autores acima citados terem estudado três tipos de intermitência, vamos nos limitar a estudar a do tipo I, a qual é a que está presente no modelo de Lorenz e parece ser a mais comum na

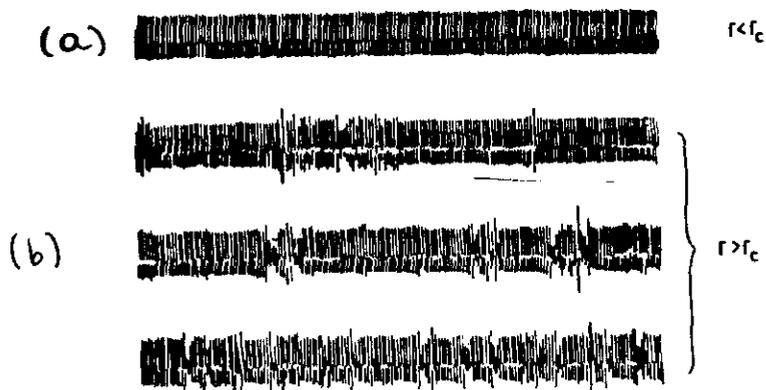


Fig. 2.3.1. Gráfico da coordenada  $y$  em função do tempo no modelo de Lorenz. (a) movimento estável para  $r=166$ . (b) Acima do limite  $r_c$  as oscilações são interrompidas por sinais caóticos que se tornam mais e mais frequentes quando  $r$  cresce.

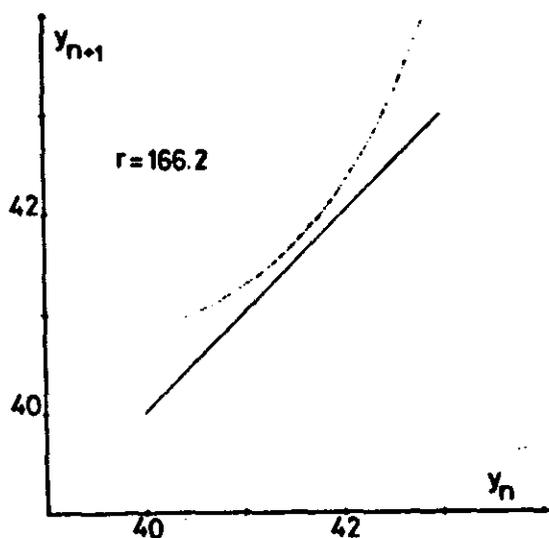


Fig. 2.3.2. Uma parte do mapa de Poincaré ao longo da coordenada  $y$  para  $r=166.2$ , levemente acima do limite da intermitência ( $r_c \cong 166.06$ ).

natureza. Na intermitência do tipo I a transição para o caos é através de uma bifurcação tangente. Na fig. 2.3.3 mostramos a situação que caracteriza esta bifurcação. Para  $r < r_c$  existem dois pontos fixos, um estável e um outro instável, os quais colidem em  $r = r_c$ , onde a derivada do mapa vale 1. Para  $r > r_c$  o mapa não possui pontos fixos estáveis. No entanto, uma espécie de "memória" de um ponto fixo aparece, desde que o movimento da trajetória diminua na vizinhança de  $x_c$ , e numerosas iterações são necessárias para que ela consiga sair do canal formado entre o mapa e a linha  $y_{n+1} = y_n$  (ver fig. 2.3.3). Isto explica a longa região laminar para valores de  $r$  pouco acima de  $r_c$  na fig. 2.3.1. Depois que a trajetória deixou o canal o movimento torna-se caótico até que uma reinjeção na vizinhança de  $x_c$  comece uma nova fase regular.

A intermitência do tipo I aparece também em mapas do tipo logístico, ou seja governados pela eq. (2.2.3.). Na região caótica existe um valor crítico do parâmetro  $a_c = 1.75$  onde aparece uma janela de período 3, devido a uma bifurcação tangente como mostra a fig. 2.3.4. As iterações do mapa para valores de  $a$  levemente maiores e menores que  $a_c$  estão mostradas na fig. 2.3.5.

Pomeau e Maneville mostraram que o número médio de iterações na região laminar no modelo de Lorenz é da ordem de  $|r - r_c|^{-1/2}$ , e o expoente de Liapunov varia com  $|r - r_c|^{1/2}$ . Para o mapa logístico foi mostrado [ 34 ] que a teoria da intermitência é descrita por equações universais do mesmo tipo que aparecem na sequência de desdobramentos de períodos, sendo que neste caso as equações possuem soluções analíticas simples. Foi mostrado também que a região laminar neste mapa tem duração dada por  $|a - a_c|^{1/x-1}$ ,

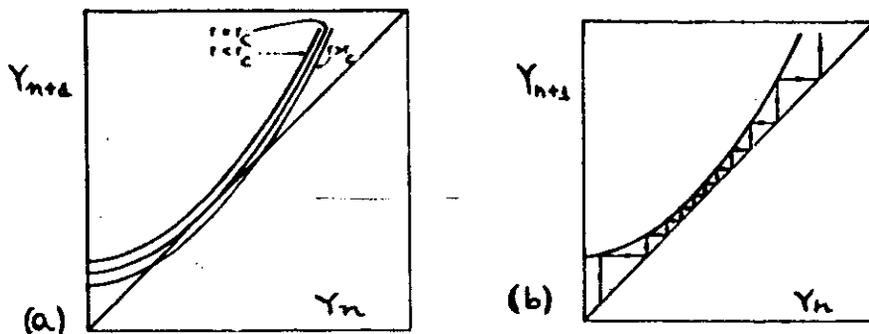


Fig. 2.3.3. Representação esquemática de  $y_{n+1}(y_n)$  explicando a transição via intermitência através de uma bifurcação tangente. Para  $r < r_c$  dois pontos fixos coexistem, um estável e outro instável. Eles colapsam em  $r = r_c$  e então desaparecem deixando em canal entre a curva e a bissetriz; (b) canal por onde passam as iterações.

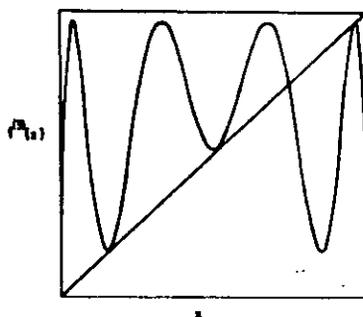


Fig. 2.3.4.  $f^3(x)$  em  $a = a_c$ .

sendo  $z$  a ordem do mapa [ 35 ].

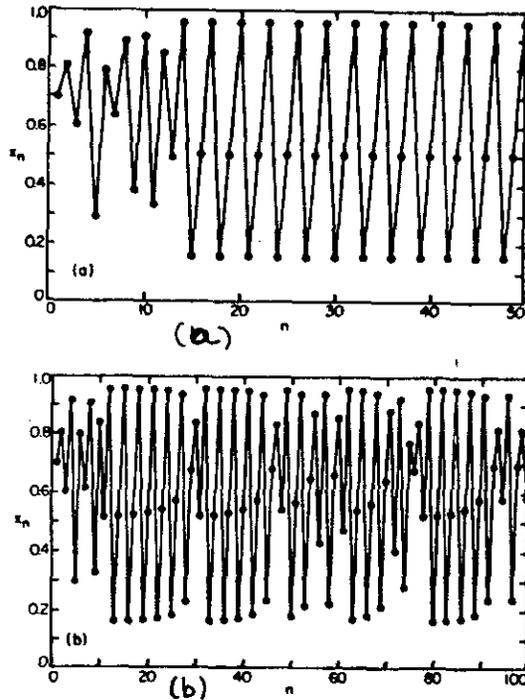


Fig. 2.3.5. Iterações do mapa logístico começando em  $x=0.7$ ; (a) na região com período três estável,  $a_c - a = -0.002$ ; (b) na região intermitente,  $a_c - a = 0.002$ .

A rota para o caos por intermitência do tipo foi observada em experimentos tais como: reação de Belousov-Zhabotinskii [ 36 ], oscilador não-linear [ 37 ], instabilidade termoconvectiva [ 38 ], e também em lasers, junções Josephson, etc.

## 2.4. ROTA DE RUELLE-TAKENS-NEWHOUSE

O estudo teórico da origem da turbulência em fluidos começou com Landau e Hopf [ 39 ] na década de 40. Eles propuseram uma rota na qual o fluido torna-se turbulento devido a uma sequência infinita de instabilidades.

Estudos teóricos e experimentais mostram que quando o número de Reynolds (o qual está ligado com vários parâmetros externos do sistema) é pequeno o suficiente, o movimento do fluido é laminar e estacionário, correspondendo a um ponto fixo no espaço de fase. O ponto fixo atua como um atrator, i.e., ele atrai todas as condições iniciais próximas para ele. Quando o número de Reynolds ultrapassa levemente um valor crítico  $R_{c1}$ , o ponto fixo perde sua estabilidade e começa a repelir todas trajetórias próximas. Desde que pequenas mudanças em  $R$  não podem causar mudanças tão drásticas como inverter a direção de todo o fluxo no espaço de fase inteiro, a vizinhança do ponto fixo pode tornar-se repulsora, mas ela deve permanecer atratora com respeito a regiões localizadas suficientemente longe. Repulsão local e atração global do fluxo implica na formação de um ciclo limite. Este processo, de gerar um ciclo limite a partir de um ponto fixo chama-se bifurcação de Hopf. Aumentando-se o número de Reynolds acima de um outro valor crítico  $R_{c2}$ , tem-se que o ciclo limite perde sua estabilidade, e aparecerá um tubo fechado atrator, i.e., um torus em duas dimensões em torno do ciclo limite. O movimento torna-se quaseperiódico quando as duas frequências são incomensuráveis.

Landau e Hopf propuseram que este processo continua indefinidamente e identificaram o estado final com um número infinito de frequências incomensuráveis como turbulento, ou caótico (veja fig. 2.4.1). Esta é a chamada rota de Landau-Hopf para a turbulência.

A rota de Landau-Hopf não teve sucesso nem teórico nem experimental. Teoricamente mostra-se que em sistemas não-lineares não pode haver o surgimento de um número infinito de frequências incomensuráveis, sem que elas interajam entre si. Este fenômeno é chamado de "frequency locking". Experimentalmente verifica-se que quando o número de Reynolds é variado, aparece no espectro de potência poucas frequências independentes e logo após uma larga banda de ruído. Assim, a rota de Landau mostrou-se incapaz de explicar o mecanismo de geração da turbulência.

Em 1971, Ruelle e Takens [ 3 ] mostraram num contexto matemático que a rota de Landau-Hopf é muito improvável de acontecer na natureza. É suficiente que existam três bifurcações de Hopf consecutivas para que o sistema entre num estado de instabilidade no espaço de fase e evolua para um atrator estranho, caracterizando a turbulência. A rota pode ser esquematizada como segue: ponto fixo → ciclo limite → 2-torus → 3-torus → atrator estranho (turbulência).

Alguns anos mais tarde, em colaboração com Newhouse [ 40 ] estes autores mostraram que depois de duas bifurcações de Hopf, é praticamente inevitável que o sistema entre em turbulência, antes que ocorra uma outra bifurcação. Assim, a rota seria: ponto fixo → ciclo limite → 2-torus → atrator estranho (veja fig. 2.4.2). Esta

rota de Ruelle-Takens-Newhouse parece ser mais consistente com experimentos hidrodinâmicos recentes, mais é pouco entendida em modelos teóricos, exceto para alguns resultados em mapas circulares. O estudo de mapas circulares tentando modelizar a transição da quase-periodicidade num 2-torus para o caos foi feito independentemente por dois grupos [ 41 ], os quais usando idéias de grupo de renormalização descobriram características universais a esta transição.

A rota de Ruelle-Takens-Newhouse foi observada em experimentos tais como, experimento de Bénard, experimento de Taylor, osciladores não lineares forçados, reações químicas, instabilidade ótica, etc.

O experimento de Taylor [ 42 ] ocorre numa camada de fluido entre um cilindro interior girando com uma velocidade angular  $\Omega$ , e um cilindro estacionário exterior (veja fig. 2.4.3). Para  $\Omega$  pequeno, o momento angular do cilindro interior é transportado para o exterior pela viscosidade (a). Acima da velocidade angular crítica  $\Omega_c$  este estado torna-se instável e o momento é transportado por células anulares convectivas (b). Para valores ainda maiores de  $\Omega$  observa-se uma faixa larga caótica no espectro de potência (c). Assim, mostra-se que existe uma transição para o caos através de duas bifurcações de Hopf, correspondendo então à rota de Ruelle-Takens-Newhouse. Na fig. 2.4.4 mostramos o atrator estranho deste experimento num espaço de fase conveniente.

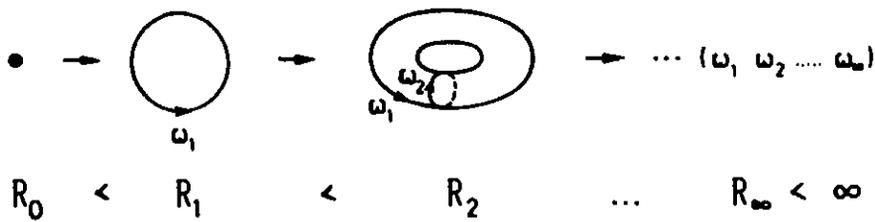


Fig. 2.4.1. Rota de Landau para o caos. Quando o parâmetro R cresce, mais e mais frequências fundamentais (i.e. incomensuráveis) são geradas por bifurcação de Hopf.

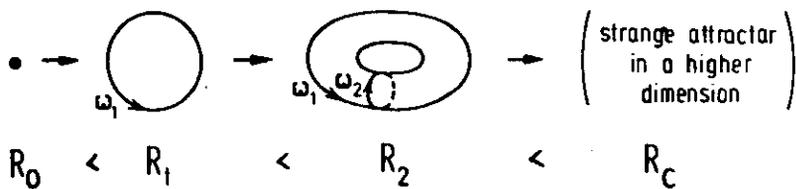


Fig. 2.4.2. Rota de Ruelle-Takens-Newhouse.

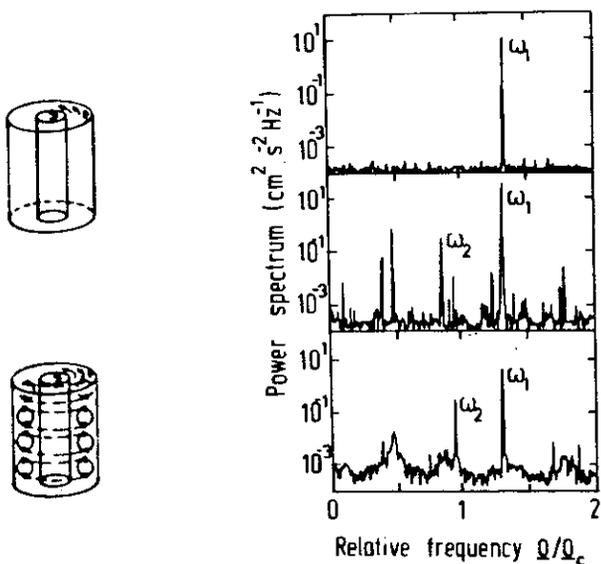


Fig. 2.4.3. A instabilidade de Taylor e o espectro de potência da velocidade.

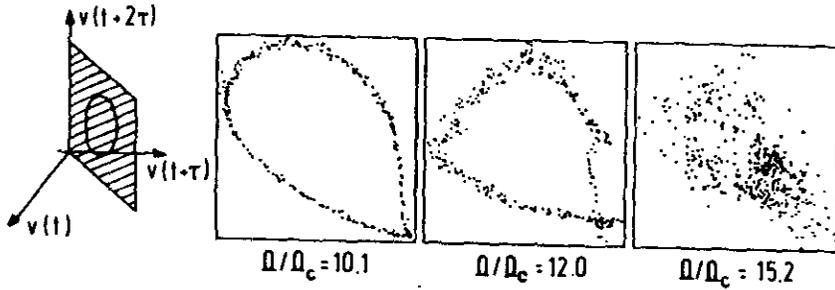


Fig. 2.4.4. Atrator estranho no experimento de Taylor.

## 2.5. CONCLUSÕES

Neste capítulo fizemos uma revisão das três rotas ao caos que estão bem estabelecidas tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Estas rotas apresentam relações métricas universais bem definidas, e foram associadas a mapas contínuos, diferenciáveis e simétricos.

Na rota de Feigenbaum vimos que existe um conjunto de constantes universais que são funções apenas da ordem do máximo no mapa e da sua dimensão. Estas e outras características mostram que existe uma grande analogia entre a teoria de caos e a de transição de fase em sistemas magnéticos. A rota de Feigenbaum foi estudada em um grande número de sistemas experimentais.

A rota ao caos via intermitência está associada a uma colisão de um ponto instável e outro estável quando o parâmetro externo é modificado. Então, variando-se ainda mais o parâmetro  $r$  de forma que ele se distancie do valor crítico  $r_c$ , veremos um comportamento turbulento intermitente de duração aleatória, que é interrompido

por uma fase laminar que dura  $\sim (|r - r_c|^{-1/2})$ . A rota via intermitência já foi observada em muitos experimentos.

A última rota que tratamos foi a de Ruelle-Takens-Newhouse, que na verdade foi a primeira a ser proposta. Ela está associada à turbulência em fluidos. Nesta rota o sistema torna-se turbulento depois de duas bifurcações de Hopf sucessivas. Esta rota, da mesma forma que as outras duas, foi observada experimentalmente.

Por último, gostaríamos de ressaltar que num sistema dinâmico diferentes rotas ao caos podem existir em diferentes regiões do espaço de fase. Isto está exemplificado no mapa logístico, onde a rota de Feigenbaum e por intermitência estão presentes.

## CAPÍTULO 3

### MAPA COM ASSIMETRIA NA AMPLITUDE

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Estudos teóricos e experimentais mostram que sistemas físicos apresentando rota ao caos via bifurcação de período possuem propriedades métricas universais, em analogia com os fenômenos críticos. As classes de universalidade destes sistemas são determinadas pela sua dimensionalidade e pelo valor do expoente da variável dinâmica no termo dominante do seu mapeamento. Todas as provas da universalidade métrica estão associadas a mapas simétricos em torno do seu máximo. Uma pergunta que surge, é o que aconteceria se existisse algum tipo de assimetria no extremo de mapas que apresentam rota ao caos via bifurcação de período. Verifica-se que se a assimetria for no coeficiente do termo dominante do mapa, então haverá uma violação da universalidade [43,44]. Neste caso, o sistema oscila entre duas classes de universalidade.

Foi mostrado que [ 45, 46 ] num mapa assimétrico mesmo com

uma simetria local no máximo, o comportamento dinâmico nas primeiras bifurcações é governado pela assimetria, até que as iterações atinjam o máximo simétrico, levando o sistema a apresentar a rota de Feigenbaum. Ora, as primeiras bifurcações são justamente aquelas possíveis de serem observadas experimentalmente. Isto constitui um dos motivos pelos quais o estudo de mapas assimétricos tem uma grande relevância do ponto de vista experimental.

O objetivo deste capítulo é estudar numericamente e através de Grupo de Renormalização o comportamento das constantes métricas associadas a um mapa com uma assimetria na amplitude, ou seja, no coeficiente da variável do termo dominante do mapa. O capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 3.2 apresentamos os resultados obtidos através de simulação numérica; na seção 3.3 mostramos que existe uma função limite que satisfaz a uma relação semelhante à de Feigenbaum-Cvitanovic; em 3.4 propomos um Grupo de Renormalização para determinar valores críticos dos parâmetros e os valores de  $\alpha_k$ ; em 3.5 mostramos como comporta-se a função de escala  $f(\alpha)$  para este tipo de mapa; na seção 3.6 apresentamos o expoente de Liapunov em função do parâmetro de controle; a última seção é dedicada às conclusões.

### 3.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

O mapa que dedicaremos nossa atenção é dado por

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv \begin{cases} 1 - a_1 |x_t|^z, & x_t \geq 0 \\ 1 - a_2 |x_t|^z, & x_t \leq 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

com  $z > 1$ . Na fig. 3.2.1 mostramos  $f(x)$  vs.  $x$  para um caso típico. Quando  $a_1 = a_2$ , recupera-se o mapa simétrico do tipo logístico. Escolhendo uma relação conveniente que fixe um dos parâmetros,  $a_1$  ou  $a_2$ , em função do outro, podemos estudar a evolução do atrator deste mapa em função de um único parâmetro. Na fig. 3.2.2 mostramos o atrator do mapa (3.2.1) em função de  $a \equiv a_1$  quando  $a_2 = 0.1 + 0.2a$  e  $z = 2$ . Verificamos que a rota ao caos é via bifurcação de período, com períodos variando de  $2^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Na fig. 3.2.3 mostramos a linha crítica  $a_2^*$ , que representa o ponto de acumulação das bifurcações como função de  $a_1$ .

Fixando  $a_1$  e variando  $a_2$ , vemos que o fator de escala  $\delta_k$ , definido por

$$\delta_k = \frac{\tilde{a}_2^{k+1} - \tilde{a}_2^k}{\tilde{a}_2^{k+2} - \tilde{a}_2^{k+1}} \quad (3.2.2)$$

apresenta um comportamento oscilatório com  $k$ . Nesta expressão  $\tilde{a}_2^k$  representa o valor do parâmetro  $a_2$  onde o ciclo  $k$ -ésimo é superestável. Quando  $k$  é suficientemente grande, os valores entre os quais  $\delta_k$  oscila tendem a dois valores limites finitos. Na fig. 3.2.4 graficamos os valores de  $\delta_k$  e  $\delta_{k+1}$ , no limite de  $k$  suficientemente grande, em função de  $a_2^*$ . Verificamos que uma das curvas é aproximadamente uma linha reta dada por  $\delta_k \cong 3.3a_2^*$ , e a

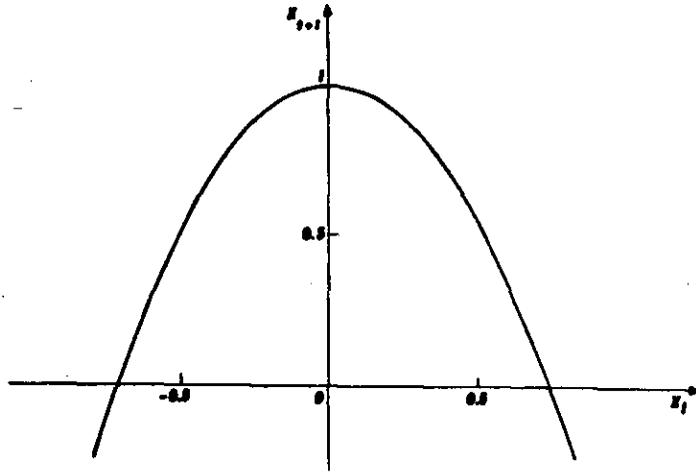


Fig. 3.2.1. Mapa assimétrico com  $a_1 = 1.8$ ,  $a_2 = 2$  e  $z=2$ .

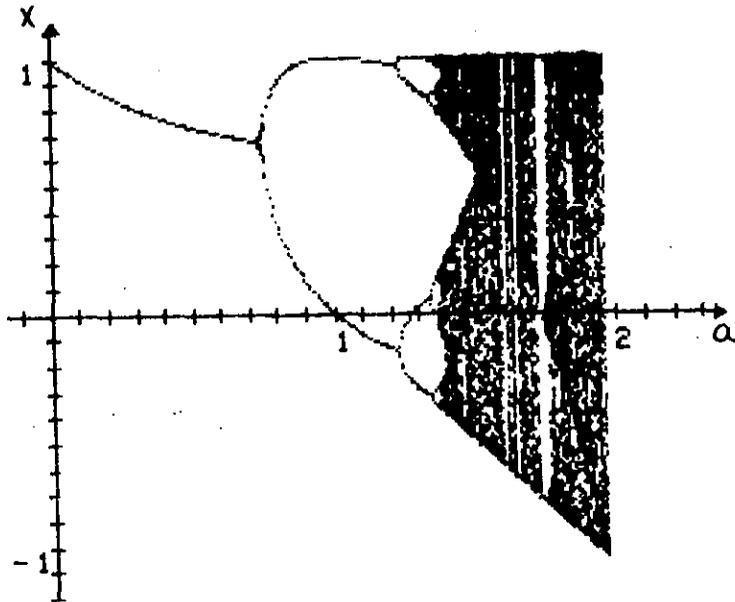


Fig. 3.2.2. Diagrama de bifurcação com  $a \equiv a_1$  e  $a_2 = a_1 + 0.2$  e  $z=2$ .

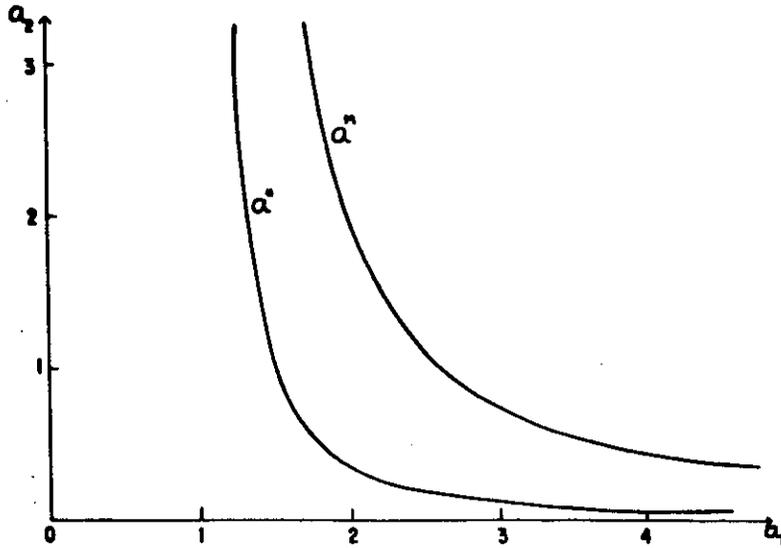


Fig. 3.2.3. Linha crítica  $a^*$  representando os pontos de acumulação das bifurcações para  $z=2$ ;  $a^M$  é a linha crítica além da qual o atrator finito desaparece.

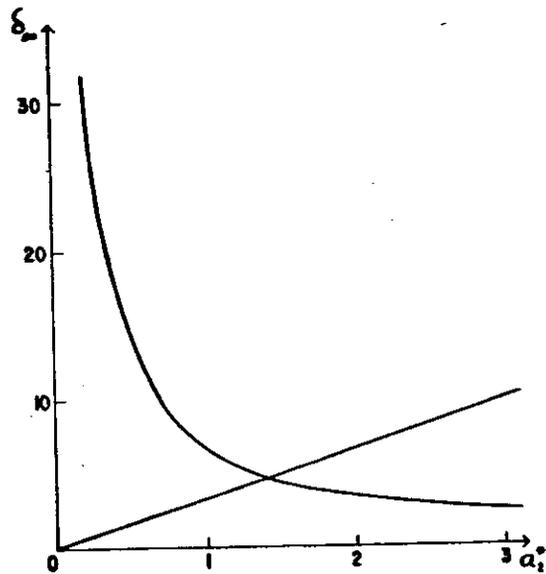


Fig. 3.2.4. Valores de  $\delta_k$  e  $\delta_{k+1}$  no limite de  $k \rightarrow \infty$  em função de  $a_2^*$  com  $z=2$ .

outra é aproximadamente uma hipérbole, governada por  $\delta_{k+1} \cong 7/a_2^*$ . Consequentemente, o produto  $\delta_k \delta_{k+1}$  como função de  $a_2^*$  é aproximadamente constante, igual ao quadrado de  $\delta_\infty$  do mapa simétrico para  $z=2$ , cujo valor aproximado é 21.8014.

O mesmo comportamento oscilatório é verificado para o fator  $\alpha_k$  definido por

$$\alpha_k = \frac{f_{a_2}^{2k-1}(0)}{f_{a_2}^{2k}(0)} \quad (3.2.3)$$

No limite de  $k$  suficientemente grande, os valores entre os quais  $\alpha_k$  oscila tendem a duas constantes. Na fig. 3.2.5 mostramos os valores assintóticos de  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$  em função de  $a_2^*$ . Encontramos que  $\alpha_k \cong 1.8 a_2^*$  e  $\alpha_{k+1} \cong 3.5/a_2^*$ . Consequentemente o produto destas duas quantidades como função de  $a_2^*$  é aproximadamente uma constante, igual ao quadrado de  $\alpha_\infty$  no caso do mapa simétrico para  $z=2$ , que tem valor aproximado de 6.26454. Na tabela 3.2.1 mostramos os valores para  $a_{2k}^*$ ,  $\delta_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\delta_k \delta_{k+1}$  e  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  para  $a_1 = 1.316461$ .

Para valores de  $z$  diferentes de 2, vemos que o comportamento qualitativo apresentado por  $a_{2k}^*(a_1)$ , por  $\delta_k$  e  $\alpha_k$  é semelhante ao observado para  $z=2$ , modificando-se apenas os valores numéricos obtidos.

$k$	$x_{2k}$	$\delta_k$	$\alpha_k$	$\delta_k \delta_{k+1}$	$\alpha_k \alpha_{k+1}$
1	1.000000000	0.51113	3.15994	2.32986	8.13026
2	1.282533305	4.55825	2.57291	15.3855	9.08135
3	1.835293608	3.37531	3.52960	21.9198	6.32448
4	1.955559371	6.49417	1.79184	21.7948	6.42833
5	1.992486639	3.35605	3.58756	22.1307	6.30935
6	1.998018868	6.59427	1.75867	22.1190	6.30794
7	1.999667300	3.35427	3.58989	22.1328	6.30810
8	1.999917279	6.59839	1.75713	22.1316	6.30784
9	1.999991805	3.35409	3.58998		

Tabela 3.2.1. Valores de  $x_{2k}$ ,  $\delta_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\delta_k \delta_{k+1}$  e  $\alpha_k \alpha_{k+1}$ , para  $a_1 = 1.316461$ .

### 3.3. A FUNÇÃO LIMITE

O mapa logístico, simétrico em torno do máximo, possui uma estrutura autosimilar nas bifurcações de períodos. As constantes  $\alpha$  e  $\delta$  são apenas duas quantidades particulares em todo um conjunto de autosimilaridade. Certamente a mais importante relação neste conjunto é a equação de Feigenbaum-Cvitanovic.

Feigenbaum mostrou que um mapa S-unimodal  $f_a(x)$  e com um máximo simétrico, quando iterado e reescalado de forma apropriada assemelha-se ao mapa original. Iterações sucessivas, seguidas de renormalizações adequadas, tendem a uma função universal  $g(x)$ , que satisfaz a relação

$$g(x) = -\alpha g^2(-x/\alpha) \quad (3.3.1)$$

onde

$$g(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha)^k f_a^{2^k} (x/(-\alpha)^k) \quad (3.3.2)$$

A equação (3.3.1) é denominada de equação de Feigenbaum-Cvitanovic. Com a condição  $g(0) = 1$ , encontramos  $g(1) = -1/\alpha$ .

Qualquer mapa com rota ao caos via bifurcação, possuindo um máximo simétrico, satisfaz a esta relação, sendo  $g(x)$  universal a todos os mapas que possuem o mesmo valor para  $z$ . Quando existe uma assimetria na amplitude do mapa,  $a_1 \neq a_2$  na eq. (3.2.1), notamos que a relação (3.3.1) não mais é satisfeita. No entanto, verificamos que no ponto de acumulação  $a_2^*(a_1)$  a função  $f^4(x)$  reescalada de

forma apropriada assemelha-se a  $f(x)$ , para  $x$  pequeno. Este processo de convergência continua com as funções  $f^{16}(x)$ ,  $f^{64}(x)$ , etc., quando reescaladas de forma conveniente. Vamos então definir uma função  $h(x)$  da seguinte forma

$$h_k(x) = P_k f_{\frac{a_2}{2}}^{2^{2k}}(x/P_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.3)$$

onde  $P_k = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}$ , sendo  $\alpha_n$  dados pela eq. (3.2.3). A eq. (3.3.3) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{P_k} h_k(P_k x) = f_{\frac{a_2}{2}}^{2^{2k}}(x) \quad (3.3.4)$$

Consequentemente têm-se que

$$\frac{1}{P_{k+1}} h_{k+1}(P_{k+1} x) = f_{\frac{a_2}{2}}^{2^{2(k+1)}}(x) = \frac{1}{P_k} h_k^4(P_k x) \quad (3.3.5)$$

Substituindo  $x$  por  $x/P_{k+1}$ , obteremos

$$h_{k+1}(x) = \frac{P_{k+1}}{P_k} h_k^4(x/(P_{k+1}/P_k)) \quad (3.3.6)$$

Sendo  $P_{k+1}/P_k = \alpha_{2k+1} \alpha_{2k+2}$ , encontramos

$$h_{k+1}(x) = \alpha_{2k+1} \alpha_{2k+2} h_k^4(x/(\alpha_{2k+1} \alpha_{2k+2})) \quad (3.3.7)$$

Observamos que no limite  $k \rightarrow \infty$  a função  $h_k(x)$  converge, logo a seguinte relação é verificada

$$h(x) = \beta h^4(x/\beta) \quad (3.3.8)$$

onde  $\beta$  é o produto de dois valores sucessivos de  $\alpha_k$  no limite  $k \rightarrow \infty$ .

Vemos então que no ponto de acumulação das bifurcações  $a_2^{\infty}(a_1)$

existe uma função limite  $h(x)$  que obedece à eq.(3.3.8), que é do mesmo tipo da equação de Feigenbaum-Cvitanovic. Com a condição  $h(0)=1$ , temos

$$\beta = 1/h^3(1) \quad (3.3.9)$$

Usam-se métodos numéricos para resolver equações funcionais do tipo (3.3.1) e (3.3.8), pois não existem métodos teóricos que resolvam este tipo de equação. É assim que se faz para resolver a equação de Feigenbaum-Cvitanovic, ou seja, usando expansão em séries de potência. Quando tentamos resolver a eq.(3.3.8) por esta técnica, vemos que existe uma indeterminação relacionada com os coeficientes da expansão, ou melhor, existe uma equação que liga os coeficientes entre si, pois o número de incógnitas é maior que o de equações. Assim, só poderemos encontrar  $h(x)$  se a forma funcional para um dos lados ( $x>0$  ou  $x<0$ ) for especificada.

### 3.4. GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Como já foi citado na seção anterior, vemos que no ponto de acumulação das bifurcações  $a_2^*(a_1)$  para o mapa (3.2.1) a função  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$  assemelha-se a  $f(x)$ , para  $x$  pequeno. Iterações sucessivas de  $f(x)$  reescaladas de forma apropriada, levam a uma função limite. Considerando que existe uma estrutura autossimilar, podemos propor um grupo de renormalização para determinar a linha crítica  $a_2^*(a_1)$  e  $\beta$ . O grupo de renormalização que propomos

consiste em igualar a função  $f(x)$  a  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$ . Obviamente poderíamos melhorar a aproximação, como por exemplo igualando  $f^4(x)$  a  $\alpha_3 \alpha_4 f^{16}(x/(\alpha_3 \alpha_4))$ , etc. Vamos nos limitar entretanto, a aproximação de primeira ordem. Se fizermos então

$$f(x) = \alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2)) \quad (3.4.1)$$

e usarmos a eq. (3.2.1) encontramos

$$z^3 a_1^2 a_2^* (1-a_1)^{z-1} (1-a_2^* (1-a_1)^z)^{z-1} (1-a_1 (1-a_2^* (1-a_1)^z)^z)^{z-1} + 1 = 0 \quad (3.4.2)$$

e

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 / (1 - a_1 (1 - a_2^* (1 - a_1)^z)^z) \quad (3.4.3)$$

Da eq.(3.4.2) temos a linha crítica  $a_2^*(a_1)$ . Vemos que para o caso  $z=2$  a curva obtida através deste grupo de renormalização é indistinguível, na precisão gráfica, da curva "exata" (numérica). Logo esta aproximação é excelente para o cálculo da linha crítica quando  $z=2$ . Na fig. 3.4.1 são exibidas as linhas críticas  $a_2^*(a_1)$  para  $z=2$  e  $z=4$  obtidas através do grupo de renormalização. O produto  $\alpha_1 \alpha_2$  também é uma boa aproximação, diferindo do valor exato no máximo em 10%.

Usando a eq.(3.2.3) podemos separar  $\alpha_1$  de  $\alpha_2$ , assim temos

$$\alpha_1 = 1 / (1 - a_1) \quad (3.4.4)$$

e

$$\alpha_2 = (1 - a_1) / (1 - a_1 (1 - a_2^* (1 - a_1)^z)^z) \quad (3.4.5)$$

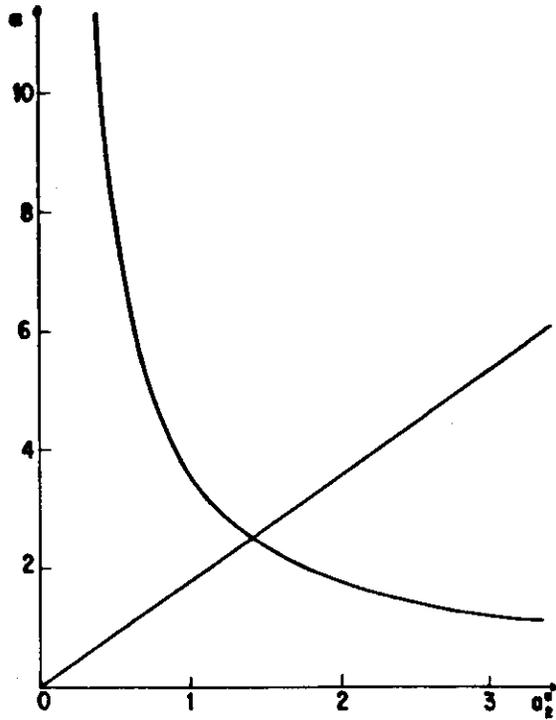


Fig. 3.2.5. Valores assintóticos de  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$  em função de  $a_2^*$  para  $z=2$ .

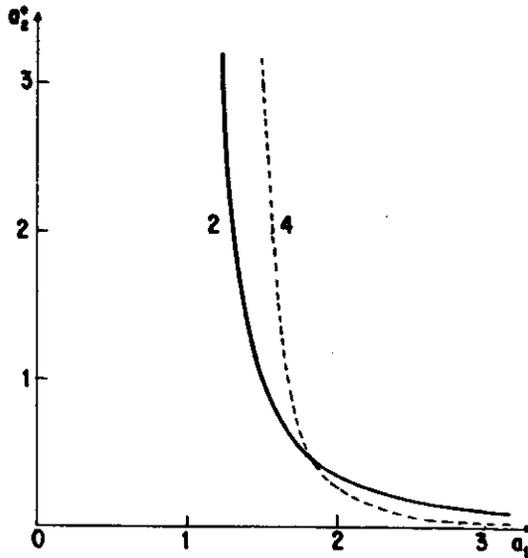


Fig. 3.4.1. Linhas críticas  $a_2^*(a_1)$  obtidas através de grupo de renormalização para  $z=2$  e  $z=4$ . A linha para  $z=2$  coincide com aquela obtida numericamente (veja fig. 3.2.3).

Estes valores não fornecem boas aproximações para os valores assintóticos de  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$ . O motivo pelo qual o produto  $\alpha_1 \alpha_2$  representa uma boa aproximação é que  $\alpha_1$  é menor, e  $\alpha_2$  maior que seus valores assintóticos correspondentes, compensando assim os erros. Chegamos então à conclusão que o grupo de renormalização usado, representa uma aproximação muito boa para se calcular a linha crítica  $a_2^*(a_1)$ , uma aproximação razoável para o produto  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  ( $k \rightarrow \infty$ ) e uma aproximação pobre para  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$  separadamente.

### 3.5. A FUNÇÃO $f(\alpha)$

Como vimos no Cap. 2, no ponto de acumulação das bifurcações do mapa quadrático existem diferentes leis de escala para diferentes pontos do atrator. Objetos desta natureza são chamados de multifractais. Halsey et al [ 13 ]. desenvolveu um formalismo para estudar os multifractais através de uma função  $f(\alpha)$ , a qual dá a dimensão global do subconjunto do objeto que possui o mesmo índice de escala  $\alpha$ . Para calcular  $f(\alpha)$  no ponto de acumulação das bifurcações, formamos a função de partição normalizada

$$\Gamma_k(q, \tau) = \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^q \sum_{m=0}^{2^{k-1}-1} |d_{k,m}|^{-\tau} = 1 \quad (3.5.1)$$

associada ao ciclo  $2^k$ , onde  $d_{k,m} = f_{\frac{1}{2^k}}^{(m+2^{k-1})}(0) - f_{\frac{1}{2^k}}^{(m)}(0)$ . Nesta

expressão  $\tilde{\alpha}_k$  representa o ponto de superestabilidade do ciclo. Da eq. (3.5.1) encontra-se a função  $r(q)$ , que através de uma transformação de Legendre, nos leva a  $f_k(\alpha)$ . Em mapas simétricos ( $a_1 = a_2$ )  $f_k(\alpha)$  converge, quando  $k \rightarrow \infty$ , para a função universal  $f(\alpha)$ , sendo os valores máximos e mínimos de  $\alpha$  dados por  $\alpha_{\max} = \ln 2 / \ln \alpha$  e  $\alpha_{\min} = \ln 2 / \ln \alpha^z$ , onde  $z$  é o expoente de  $x$ . Consequentemente, tem-se que  $\alpha_{\max} / \alpha_{\min} = z$ . No mapa assimétrico ( $a_1 \neq a_2$ ) o comportamento oscilatório dos fatores de escala naturalmente refletem-se na função  $f_k(\alpha)$ . Desta forma, vemos que não existe apenas uma única função  $f(\alpha)$  representando o limite assintótico de  $f_k(\alpha)$ . Verificamos que quando  $k$  é suficientemente grande,  $f_k(\alpha)$  oscila entre duas funções limites. Na fig. 3.5.1 mostramos os valores assintóticos destas funções para valores típicos dos parâmetros.

Apesar da universalidade de  $f(\alpha)$  ter sido quebrada no mapa assimétrico, verifica-se que  $\alpha_{\max} / \alpha_{\min} \cong z$  para ambas as curvas limites. Esta relação mostra-se ser muito útil para se determinar o valor do expoente da variável dinâmica em experimentos, mesmo em mapas assimétricos, onde se conhece  $f(\alpha)$ .

### 3.6. EXPOENTE DE LIAPUNOV

O regime caótico de um mapa  $f(x)$  é caracterizado pela separação exponencial de dois pontos inicialmente próximos quando

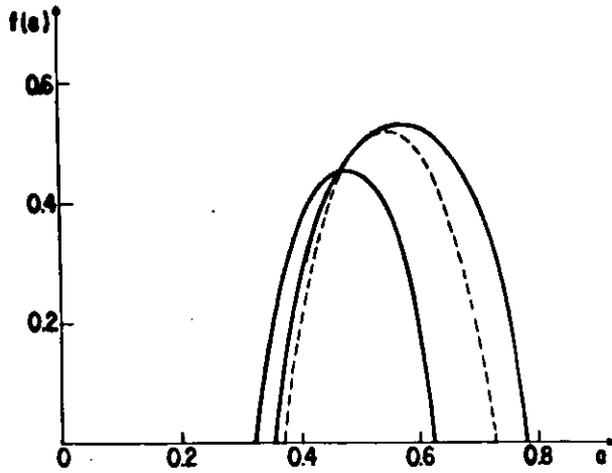


Fig. 3.5.1. Funções assintóticas  $f(\alpha)$  para  $a_1=2.411713$  e  $z=2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso simétrico,  $a_1=a_2$ .

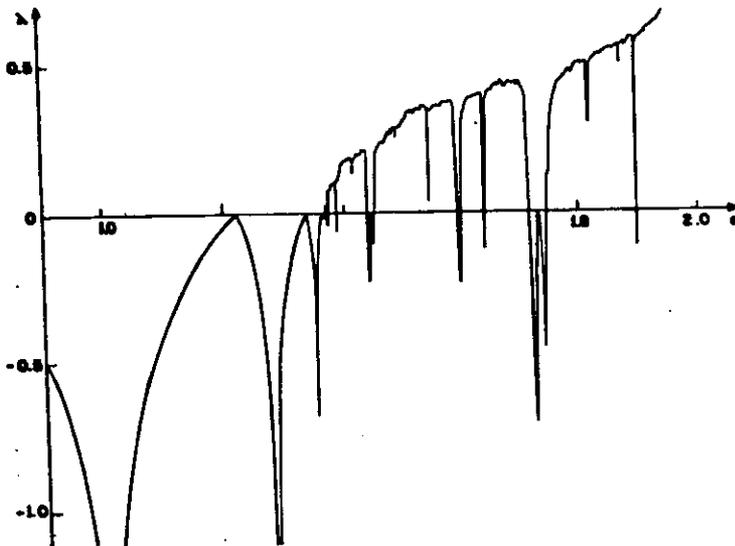


Fig.3.6.1. Expoente de Liapunov em função de  $a \equiv a_1$  com  $a_2 = a_1 + 0.2$  e  $z=2$ .

o tempo evolui. O expoente de Liapunov mede quantitativamente esta separação, e é definido da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (3.6.1)$$

Quando  $\lambda < 0$  o movimento é periódico e  $\lambda > 0$  indica movimento caótico. Na fig. 3.6.1, mostramos como é o expoente de Liapunov para o mapa governado pela eq. (3.2.1) em função do parâmetro  $a$  com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.2$ . Vemos que qualitativamente o expoente de Liapunov do mapa assimétrico é similar ao do mapa simétrico. Na zona caótica existem infinitas janelas periódicas, e a ordem de aparecimento destas janelas é a mesma do mapa logístico, já que estes mapas são S-unimodais. No entanto, os valores de  $a$  onde  $\lambda$  anula-se (pontos de bifurcação) ou tende a  $-\infty$  (pontos de superestabilidade) não mais convergem com uma razão geométrica. Para este caso, os valores de  $a$  nos pontos de bifurcação ou de superestabilidade convergem com razões geométricas que oscilam entre dois valores limites, que são aqueles mostrados na fig. 3.2.4.

### 3.7. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos o comportamento de um mapa não linear com assimetria no coeficiente da variável dinâmica. O mapa estudado é do tipo logístico, sendo as amplitudes diferentes

( $a_1 \neq a_2$ ; veja eq. (3.2.1)). Verificamos que as propriedades de universalidade observada no mapa simétrico ( $a_1 = a_2$ ) são destruídas com este tipo de assimetria. Observa-se que a dinâmica dos ciclos periódicos são alternadamente determinados pelos lados direito e esquerdo do mapa iterado. Encontra-se que os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$  oscilam e convergem para dois valores constantes. Estes valores dependem do ponto de acumulação das bifurcações  $a_2^*(a_1)$ , mas o produto deles é aproximadamente constante.

Observando a autossimilaridade entre  $f(x)$ ,  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$ ,  $(\alpha_1 \alpha_2)^2 f^{16}(x/(\alpha_1 \alpha_2)^2)$ , etc. verificamos que estas funções tendem a uma função limite, que satisfaz a equação  $h(x) = \beta h^4(x/\beta)$ , onde  $\beta$  é o produto  $\alpha_k \alpha_{k+1}$ , quando  $k$  é suficientemente grande. Propusemos um grupo de renormalização que consiste em igualar  $f(x)$  a  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$ , e encontramos através deste método a linha crítica  $a_2^*(a_1)$  e  $\beta$  com boas aproximações.

Calculamos a função  $f_k(\alpha)$  que também mostrou possuir um comportamento oscilatório, semelhante ao verificado para os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$ . Finalmente, calculamos o expoente de Liapunov para um exemplo típico.

## CAPÍTULO 4

### MAPA COM ASSIMETRIA NO EXPOENTE

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos um outro tipo de assimetria que pode ser introduzida em mapas do tipo logístico. Serão tratados mapas que possuem uma assimetria no expoente da variável dinâmica. No capítulo anterior vimos que a universalidade métrica existente em mapas unimodais simétricos é destruída quando existe uma assimetria na amplitude. No entanto, é observado um comportamento regular dos fatores de escala: ao invés de possuírem apenas um valor assintótico limite, eles oscilam entre dois valores limites.

Veremos que quando existe uma assimetria no máximo do mapa, relacionada com o expoente da variável dinâmica, então as relações de universalidade métrica são completamente destruídas. O comportamento dos fatores de escala destes mapas são totalmente diferentes em relação ao mapa simétrico, mesmo que a diferença entre os expoentes seja muito pequena ( $\sim 1\%$ ). Observa-se que existe um comportamento oscilatório divergente dos fatores de

escala, ou seja, alternadamente crescem e decrescem quando o período se bifurca [ 44,45 ]. Estudo do fator  $\delta_k$  já foi feito experimentalmente em osciladores não lineares forçados [ 47 ] em mapas assimétricos ( $z_1 \neq z_2$ ) e os resultados obtidos coincidiram com a teoria.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 4.2 apresentaremos os resultados numéricos obtidos para os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$ ; na seção 4.3 faremos um estudo da função  $f(a)$  para mapas com assimetria no expoente; em 4.4 mostraremos o comportamento do expoente de Liapunov em função do parâmetro externo; na última seção apresentaremos as conclusões.

#### 4.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

O mapa assimétrico que estudaremos é dado por

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv \begin{cases} 1 - a|x_t|^{z_1}, & x_t \geq 0 \\ 1 - a|x_t|^{z_2}, & x_t \leq 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

com  $z_1, z_2 > 1$ . Na fig. 4.2.1 mostramos  $f(x)$  vs.  $x$  para exemplos típicos. Quando  $z_1 = z_2 = z$  recuperamos o mapa simétrico do tipo logístico. Na fig. 4.2.2 mostramos o atrator do mapa (4.2.1) em função de  $a$  para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$ . Por ser S-unimodal este mapa apresenta rota ao caos via bifurcação de período. No entanto, verifica-se que a universalidade métrica observada nos mapas

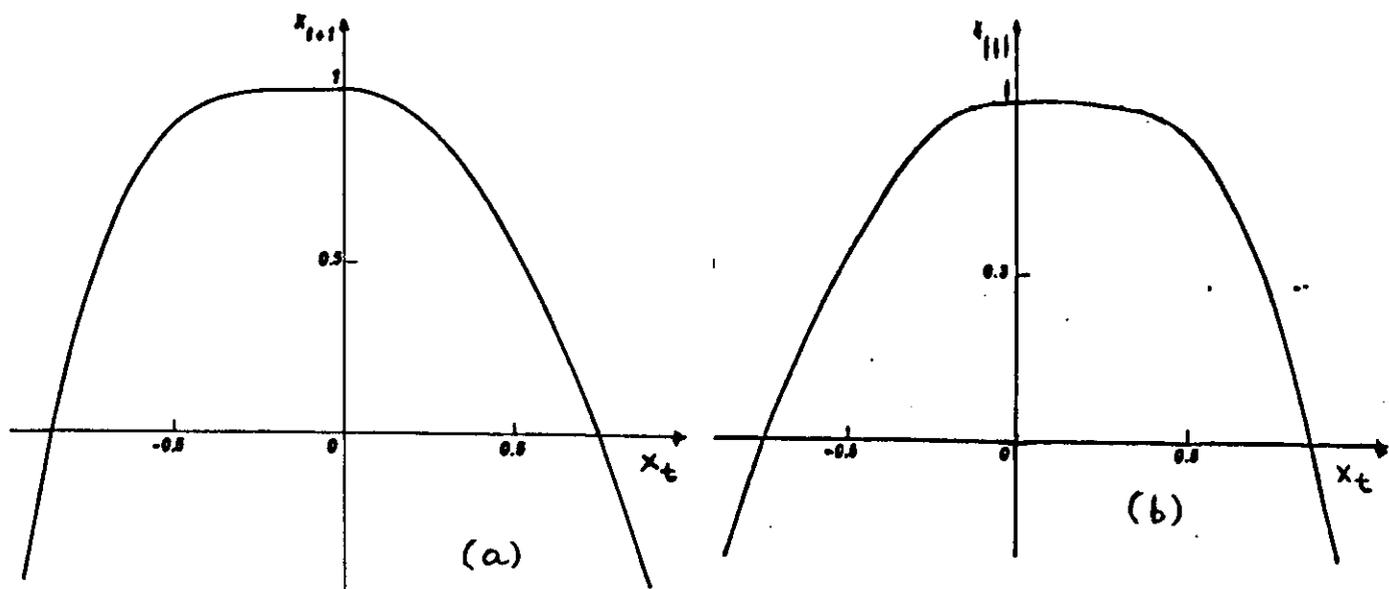


Fig. 4.2.1. Mapas assimétricos com (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

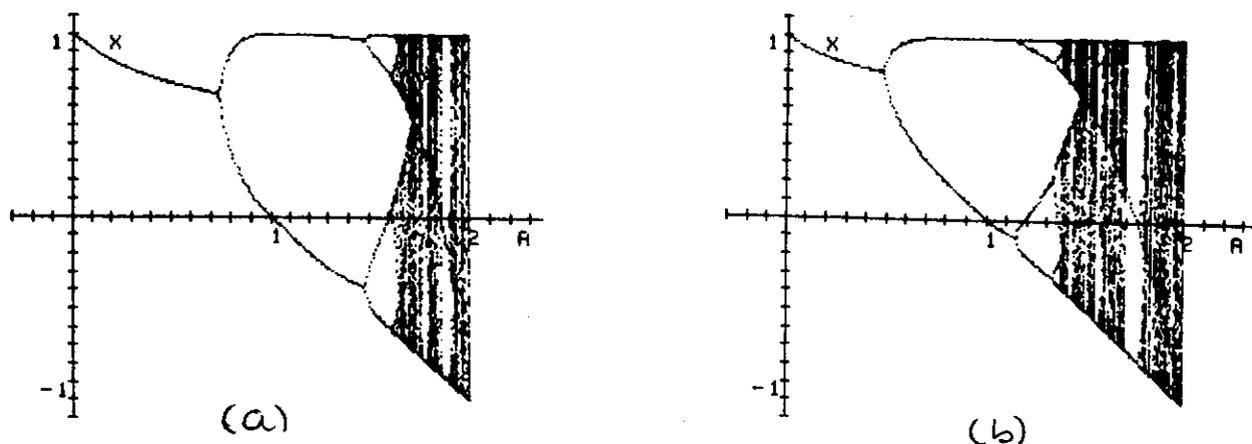


Fig. 4.2.2. Diagramas de bifurcações para (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

simétricos é totalmente destruída em mapas com assimetria no expoente da variável dinâmica. As séries  $\{\delta_k\}$  e  $\{\alpha_k\}$  apresentam um comportamento oscilatório divergente quando  $k$  cresce.

Na tabela 4.2.1 mostramos os valores obtidos para  $\delta_k$  usando a definição

$$\delta_k = \frac{\tilde{a}_{k+1} - \tilde{a}_k}{\tilde{a}_{k+2} - \tilde{a}_{k+1}} \quad (4.2.2)$$

onde  $\tilde{a}_k$  é o valor de  $a$  onde o ciclo com período  $2^k$  é superestável, para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ . Vemos que quando  $k$  aumenta os valores sucessivos de  $\delta_k$  tornam-se alternadamente cada vez maiores e menores. Quanto maior for a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$ , mais pronunciado é o comportamento divergente. Quando a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$  é pequena, o comportamento divergente é pouco pronunciado. Os valores de  $\delta_k$  quando graficados em função de  $k$  situam-se aproximadamente sobre duas retas. O ângulo entre as retas diminui à medida que  $z_1$  aproxima-se de  $z_2$ .

Como vimos no Cap. 2, os valores de  $\delta_k$  podem ser determinados tanto em função dos locais onde o ciclo é superestável ou onde ocorrem as bifurcações. Numericamente é consideravelmente mais fácil calcular os locais de superestabilidade do ciclo, que das bifurcações, pois o transiente para se chegar ao atrator aumenta quando o parâmetro aproxima-se do ponto de bifurcação. Em mapas unimodais simétricos ambos os métodos fornecem os mesmos valores para  $\delta_k$ . Experimentalmente  $\delta_k$  é calculado através dos locais onde ocorrem as bifurcações. No caso de mapas com  $z_1 \neq z_2$  os dois métodos fornecem o mesmo comportamento qualitativo para a série  $\{\delta_k\}$ , ou seja, oscilatório divergente. No

$k$	$\bar{x}_k$	$\delta_k$ superest.	$\delta_k$ bifurc.	$\alpha_k$
1	1.000000000000	1.12375	3.643	5.30261
2	1.188585861842	118.068	6.625	0.51899
3	1.356403706313	0.37241	7.588	29.0440
4	1.357824831910	800.653	6.548	0.09612
5	1.361640892733	0.13862	18.01	204.042
6	1.361645658918	6337.59	6.202	0.01657
7	1.361680041889	0.05078		1980.78
8	1.361680047315	64367.1		0.00219
9	1.361680154136	0.01699		28186.5
10	1.361680154137			0.00020
11	1.361680154235			

Tabela 4.2.1. Valores de  $\bar{x}_k$ ,  $\delta_k$  (calculados através dos pontos de superestabilidade e bifurcação) e  $\alpha_k$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

entanto, vemos que a divergência é muito menos pronunciada quando  $\delta_k$  é calculado com os valores dos locais das bifurcações. A tabela 4.2.1 mostra os resultados de  $\delta_k$  calculados pelos dois métodos citados acima. A fig. 4.2.3 mostra  $\delta_k$  vs.  $k$  para valores típicos de  $z_1, z_2$ .

O fator de escala  $\alpha_k$ , definido pela eq.(3.2.3) apresenta um comportamento semelhante ao de  $\delta_k$ , ou seja, oscilatório divergente quando  $k$  aumenta. Na tabela 4.2.1 estão especificados os valores de  $\alpha_k$  para um exemplo típico.

Foi mostrado nas refs. [ 45 , 46 ] que um mapa assimétrico com uma simetria local numa pequena região em torno do máximo, mostrará um comportamento de um mapa assimétrico nas bifurcações, até que a região simétrica seja detectada, e neste ponto existirá um "crossover" para a rota de Feigenbaum. Quanto menor for a região de simetria, mais demorada é a mudança de rota. Estas observações têm uma importância física grande, pois num sistema experimental apenas as primeiras bifurcações são possíveis de serem detectadas. Assim, experimentalmente se um sistema for governado por um mapa assimétrico com uma simetria local no máximo, mostrará o comportamento de um mapa assimétrico.

### 4.3. A FUNÇÃO $f(\omega)$

A função  $f(\omega)$  indica a dimensão do subconjunto de um objeto

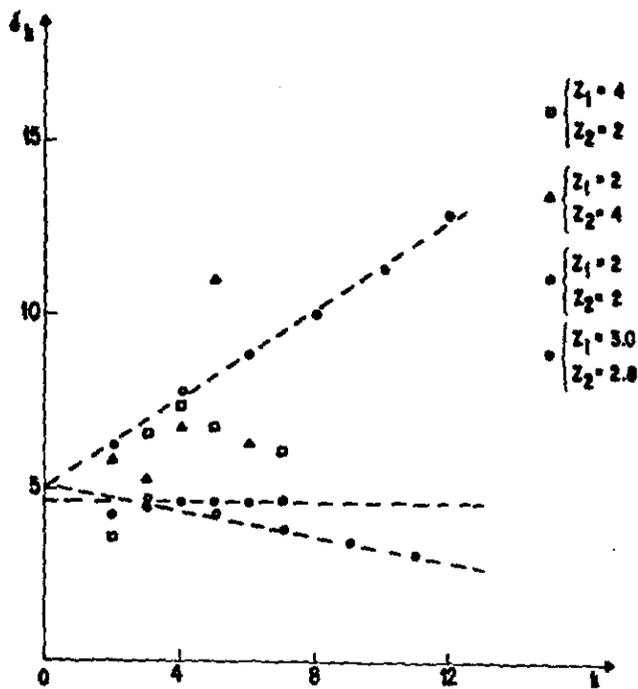


Fig. 4.2.3. Fator  $\delta_k$  como função de  $k$  para valores típicos de  $z_1$  e  $z_2$ , calculados nos pontos de bifurcação para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$  e nos pontos de superestabilidade para  $(z_1, z_2) = (3.0, 2.8)$ .

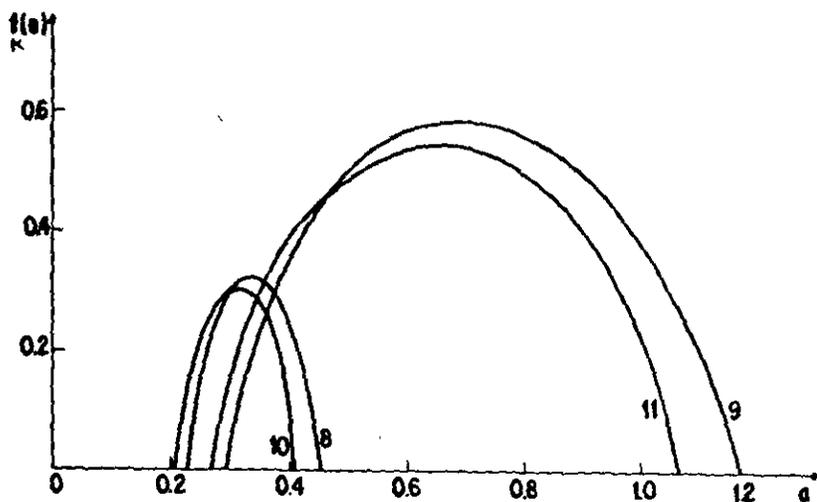


Fig. 4.3.1. Função  $f_k(\omega)$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$  e  $k=8, 9, 10$  e  $11$ .

multifractal que possui o mesmo índice de escala  $\alpha$ . A maneira de se calcular  $f(\alpha)$  está descrita na seção 2.2.2. Esta função quando calculada nos pontos de superestabilidade do ciclo numa sequência de bifurcações converge para um valor limite quando o mapa é simétrico. No caso de mapas assimétricos, o comportamento não universal dos fatores de escala  $\delta_k$  e  $\alpha_k$  também é observado na função  $f(\alpha)$ . Na fig. 4.3.1 mostramos a função  $f(\alpha)$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$  calculadas nos pontos de superestabilidade do ciclo  $2^k$ , para  $k=8, 9, 10$  e  $11$ .

Vemos que  $f(\alpha)$  oscila, e não converge, quando  $z_1 \neq z_2$ . A relação  $\alpha_{\max} = \ln 2 / \ln \alpha$  e  $\alpha_{\min} = \ln 2 / \ln \alpha^2$  válida para mapas simétricos, não é observada neste tipo de mapa. No entanto, em todas as curvas estudadas o valor de  $\alpha_{\max} / \alpha_{\min}$  alterna-se entre  $z_1$  e  $z_2$  quando varia-se  $k$ . Mais uma vez temos que a dinâmica de mapas assimétricos é dominada alternadamente pelos lados direito e esquerdo do mapa.

Observe que, embora o máximo da curva de  $f(\alpha)$ , que coincide com a dimensão de Hausdorff, apresente um comportamento oscilatório não poderá ultrapassar o valor 1, já que este mapa é unidimensional.

#### 4.4. EXPOENTE DE LIAPUNOV

O expoente de Liapunov  $\lambda$  fornece uma medida qualitativa da

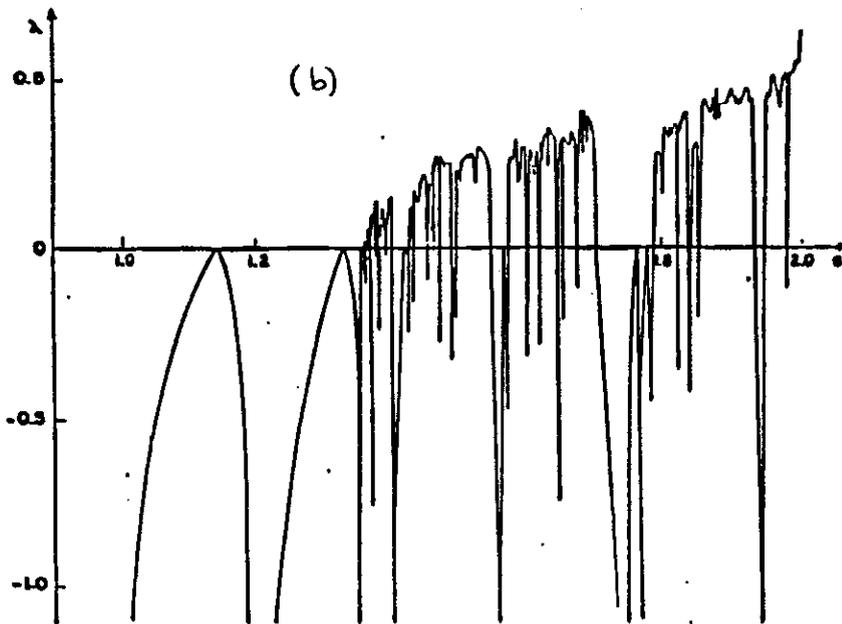
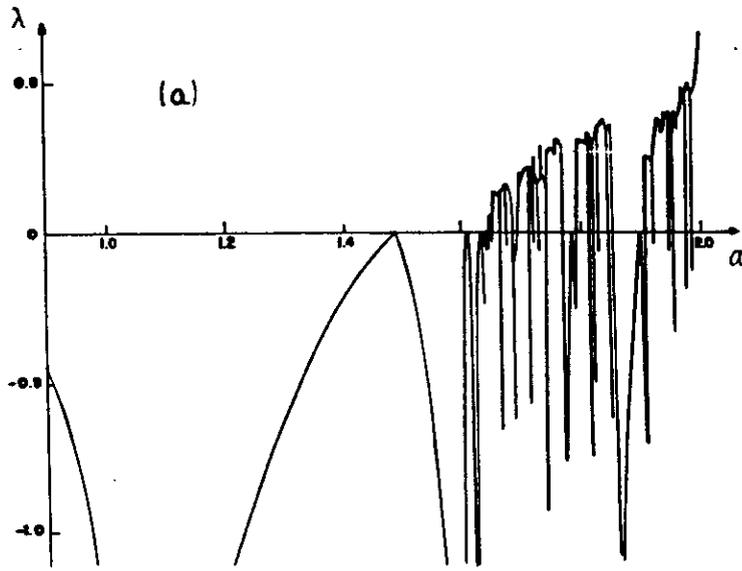


Fig. 4.4.1. Expoente de Liapunov para (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

sensibilidade dos estados caóticos às condições iniciais. Assim, o regime caótico possui  $\lambda > 0$  e o regime periódico possui  $\lambda < 0$ .

Na fig. 4.4.1 mostramos o expoente de Liapunov para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$ , calculado a partir da eq.(3.6.1). Na região caótica existe um número infinito de janelas periódicas, e elas aparecem na mesma ordem do mapa simétrico, já que o mapa é S-unimodal. No entanto, verificamos que os tamanhos relativos das janelas são bastante diferentes em relação ao mapa logístico. Vemos também que os valores do parâmetro onde ocorrem as bifurcações ( $\lambda = 0$ ) ou onde os ciclos são superestáveis ( $\lambda \rightarrow -\infty$ ) não convergem geometricamente com uma razão constante, como no mapa simétrico, mas possui o comportamento irregular do fator  $\delta_k$ .

#### 4.5. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos o comportamento de um mapa não linear com uma assimetria no expoente da variável dinâmica. Mostramos que os fatores de escala  $\alpha_k$  e  $\delta_k$  apresentam um comportamento oscilatório divergente quando  $k$  cresce. Quanto maior for a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$ , mais pronunciado é o comportamento divergente. A mudança entre esta representação e a de Feigenbaum é notável, mesmo quando a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$  é muito pequena ( $\sim 1\%$ ).

Experimentalmente a detecção do comportamento oscilatório

divergente de  $\delta_k$  foi feito em osciladores forçados, mostrando que nos experimentos só as primeiras bifurcações são possíveis de serem estudadas, e elas são determinadas pelo comportamento global do mapa, independentemente se o mesmo possui uma simetria local.

Estudamos a função  $f(\omega)$  e mostramos que o comportamento oscilatório divergente de  $\alpha_k$  é também reproduzido em  $f(\omega)$ . O expoente de Liapunov foi estudado como função do parâmetro  $a$  para dois exemplos típicos.

## CAPÍTULO 5

### MAPA DESCONTÍNUO

#### 6.1. INTRODUÇÃO

As rotas para o caos via bifurcação de período, intermitência e quaseperiodicidade, estão associadas a mapas contínuos e diferenciáveis, os quais são gerados por sistemas onde as trajetórias do fluxo não passam perto de um ponto singular. Em situações mais gerais, onde a trajetória do fluxo passa próximo a um ponto singular, a analiticidade do mapa resultante é quebrada, pois a evolução da variável dinâmica depende de onde sua preimagem está localizada. Isto leva ao aparecimento de novas rotas [44,48] ao caos, as quais possivelmente são em número muito maior que as três rotas bem conhecidas, citadas anteriormente.

Vários sistemas apresentam singularidades na trajetória do fluxo [ 49,50 ]. No entanto, o modelo de Lorenz [ 1 ] é o mais conhecido destes sistemas, o qual possui um ponto de sela na origem. Seções de Poincaré apropriadas em fluxos do tipo de Lorenz levam a mapas com uma descontinuidade no extremo [ 51 ] do tipo

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv \begin{cases} 1 - \varepsilon_1 - a|x_t|^1, & x > 0 \\ 1 - \varepsilon_2 - a|x_t|^2, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

(veja fig. 5.1.1). Este mapa, como veremos, apresenta uma nova rota universal ao caos [ 44 ].

Para ver como estes mapas aparecem, consideremos um fluxo em três dimensões, o qual tem uma estrutura geométrica do fluxo de Lorenz, ou seja, a origem é um ponto hiperbólico (ou de sela). Na fig. 5.1.2 mostramos a situação que estamos tratando. Consideramos que perto da origem o fluxo é linear, comportando-se pois da seguinte forma

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\mu_1 x, -\mu_2 y, -\mu_3 z) \quad (5.1.2)$$

com  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ . Observe que escolhemos a direção instável como sendo  $x_1$  e as direções estáveis  $y$  e  $z$ . Assumimos que a linearidade do fluxo é válida dentro da caixa

$$B = \{(x, y, z), -1 \leq x \leq 1, -1/2 \leq y \leq 1/2, 0 \leq z \leq 1\}$$

em torno da origem (veja fig 5.1.2). Suponha que começamos a evolução no tempo  $t=0$  num ponto  $(x_0, y_0, 1)$  na face  $U$ . Se  $x > 0$ , sua órbita passa pela face  $F^+$  de  $B$  no tempo  $t^* = -(1/\mu_1) \ln x_0$  [i.e.,  $x(t^*) = x_0 \exp(\mu_1 t^*) = 1$ ]. Logo

$$(x_0, y_0, 1) \rightarrow \left(1, y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1}, x_0^{\mu_3/\mu_1}\right) \quad (5.1.3)$$

no tempo  $t^*$ . Vemos então que o fluxo dentro da caixa  $B$  mapeia

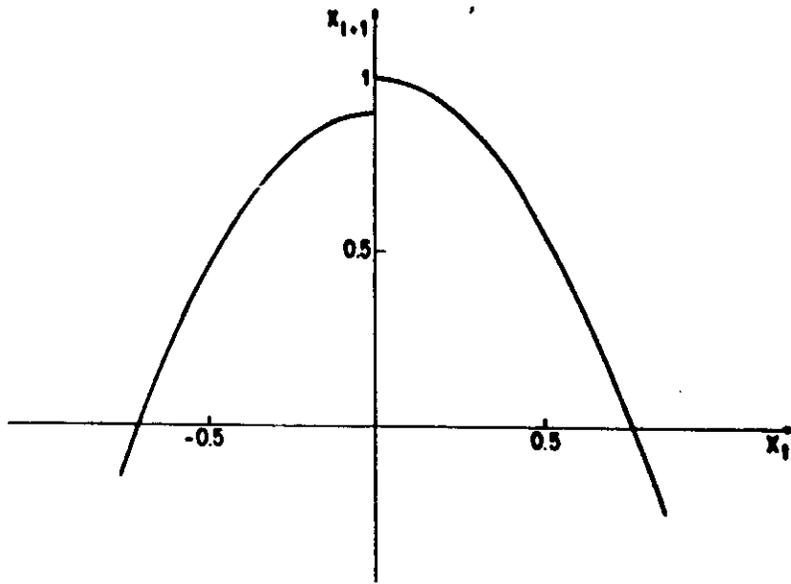


Fig. 5.1.1. Mapa descontínuo para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $z_1 = z_2 = \hat{z}$  e  $a = 1.8$ .

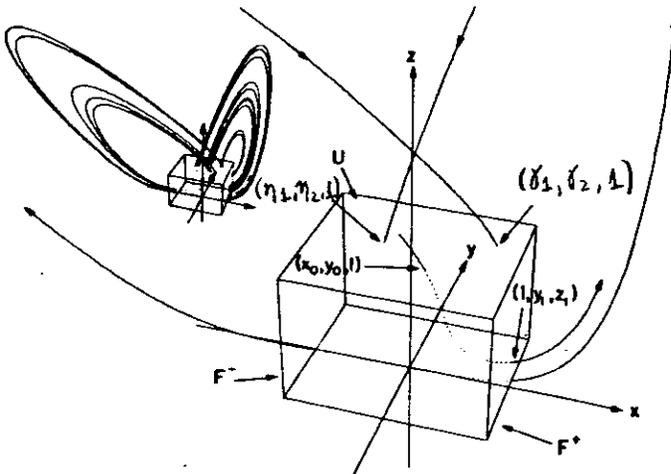


Fig. 5.1.2. Caixa dentro da qual o fluxo passando próximo do ponto de sela é linearizado.

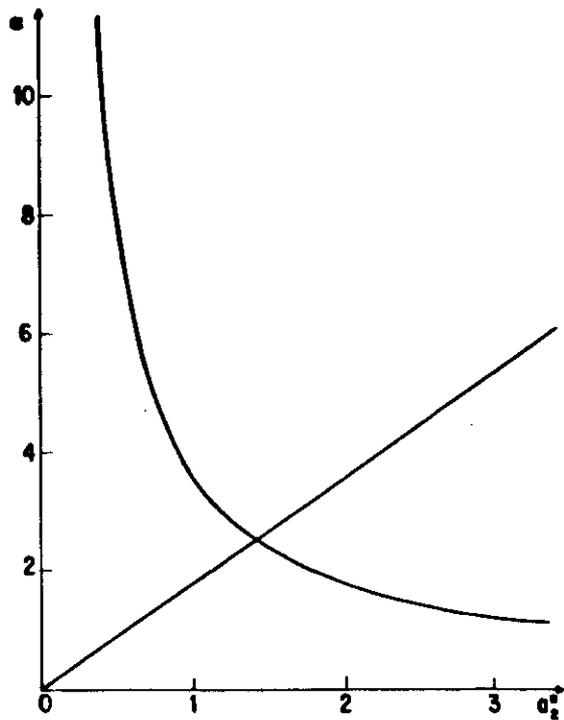


Fig. 3.2.5. Valores assintóticos de  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$  em função de  $a_2^*$  para  $z=2$ .

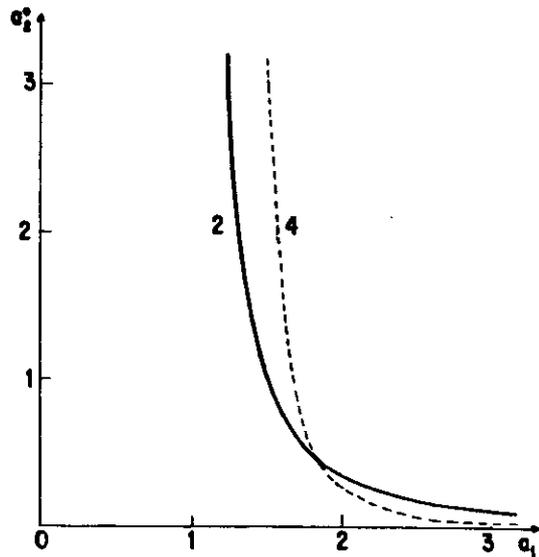


Fig. 3.4.1. Linhas críticas  $a_2^*(a_1)$  obtidas através de grupo de renormalização para  $z=2$  e  $z=4$ . A linha para  $z=2$  coincide com aquela obtida numericamente (veja fig. 3.2.3).

Estes valores não fornecem boas aproximações para os valores assintóticos de  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$ . O motivo pelo qual o produto  $\alpha_1 \alpha_2$  representa uma boa aproximação é que  $\alpha_1$  é menor, e  $\alpha_2$  maior que seus valores assintóticos correspondentes, compensando assim os erros. Chegamos então à conclusão que o grupo de renormalização usado, representa uma aproximação muito boa para se calcular a linha crítica  $a_2^*(a_1)$ , uma aproximação razoável para o produto  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  ( $k \rightarrow \infty$ ) e uma aproximação pobre para  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$  separadamente.

### 3.5. A FUNÇÃO $f(\alpha)$

Como vimos no Cap. 2, no ponto de acumulação das bifurcações do mapa quadrático existem diferentes leis de escala para diferentes pontos do atrator. Objetos desta natureza são chamados de multifractais. Halsey et al [ 13 ], desenvolveu um formalismo para estudar os multifractais através de uma função  $f(\alpha)$ , a qual dá a dimensão global do subconjunto do objeto que possui o mesmo índice de escala  $\alpha$ . Para calcular  $f(\alpha)$  no ponto de acumulação das bifurcações, formamos a função de partição normalizada

$$\Gamma_k(q, \tau) = \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^q \sum_{m=0}^{2^{k-1}-1} |d_{k,m}|^{-\tau} = 1 \quad (3.5.1)$$

associada ao ciclo  $2^k$ , onde  $d_{k,m} = f_{2^k}^{(m+2^{k-1})}(0) - f_{2^k}^{(m)}(0)$ . Nesta

expressão  $\tilde{x}_k$  representa o ponto de superestabilidade do ciclo. Da eq. (3.5.1) encontra-se a função  $\tau_k(q)$ , que através de uma transformação de Legendre, nos leva a  $f_k(a)$ . Em mapas simétricos ( $a_1 = a_2$ )  $f_k(a)$  converge, quando  $k \rightarrow \infty$ , para a função universal  $f(a)$ , sendo os valores máximos e mínimos de  $a$  dados por  $a_{\max} = \ln 2 / \ln \alpha$  e  $a_{\min} = \ln 2 / \ln \alpha^z$ , onde  $z$  é o expoente de  $x$ . Consequentemente, tem-se que  $a_{\max} / a_{\min} = z$ . No mapa assimétrico ( $a_1 \neq a_2$ ) o comportamento oscilatório dos fatores de escala naturalmente refletem-se na função  $f_k(a)$ . Desta forma, vemos que não existe apenas uma única função  $f(a)$  representando o limite assintótico de  $f_k(a)$ . Verificamos que quando  $k$  é suficientemente grande,  $f_k(a)$  oscila entre duas funções limites. Na fig. 3.5.1 mostramos os valores assintóticos destas funções para valores típicos dos parâmetros.

Apesar da universalidade de  $f(a)$  ter sido quebrada no mapa assimétrico, verifica-se que  $a_{\max} / a_{\min} \cong z$  para ambas as curvas limites. Esta relação mostra-se ser muito útil para se determinar o valor do expoente da variável dinâmica em experimentos, mesmo em mapas assimétricos, onde se conhece  $f(a)$ .

### 3.6. EXPOENTE DE LIAPUNOV

O regime caótico de um mapa  $f(x)$  é caracterizado pela separação exponencial de dois pontos inicialmente próximos quando

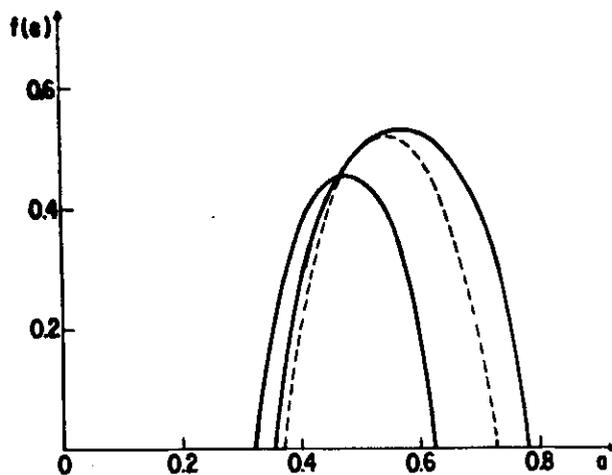


Fig. 3.5.1. Funções assintóticas  $f(\alpha)$  para  $a_1=2.411713$  e  $z=2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso simétrico,  $a_1=a_2$ .

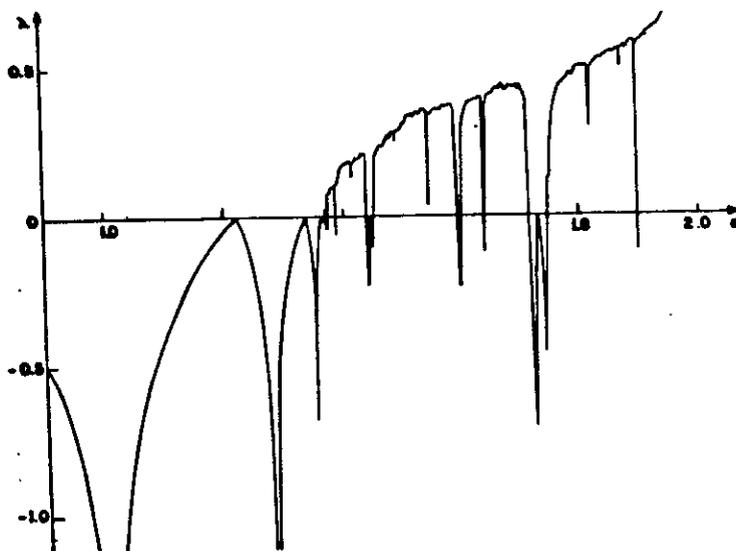


Fig.3.6.1. Expoente de Liapunov em função de  $a \equiv a_1$ , com  $a_2 = a_1 + 0.2$  e  $z=2$ .

o tempo evolui. O expoente de Liapunov mede quantitativamente esta separação, e é definido da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (3.6.1)$$

Quando  $\lambda < 0$  o movimento é periódico e  $\lambda > 0$  indica movimento caótico. Na fig. 3.6.1, mostramos como é o expoente de Liapunov para o mapa governado pela eq. (3.2.1) em função do parâmetro  $a$  com  $a_2 = a_1$  e  $a_2 = a_1 + 0.2$ . Vemos que qualitativamente o expoente de Liapunov do mapa assimétrico é similar ao do mapa simétrico. Na zona caótica existem infinitas janelas periódicas, e a ordem de aparecimento destas janelas é a mesma do mapa logístico, já que estes mapas são S-unimodais. No entanto, os valores de  $a$  onde  $\lambda$  anula-se (pontos de bifurcação) ou tende a  $-\infty$  (pontos de superestabilidade) não mais convergem com uma razão geométrica. Para este caso, os valores de  $a$  nos pontos de bifurcação ou de superestabilidade convergem com razões geométricas que oscilam entre dois valores limites, que são aqueles mostrados na fig. 3.2.4.

### 3.7. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos o comportamento de um mapa não linear com assimetria no coeficiente da variável dinâmica. O mapa estudado é do tipo logístico, sendo as amplitudes diferentes

( $a_1 \neq a_2$ ; veja eq. (3.2.1)). Verificamos que as propriedades de universalidade observada no mapa simétrico ( $a_1 = a_2$ ) são destruídas com este tipo de assimetria. Observa-se que a dinâmica dos ciclos periódicos são alternadamente determinados pelos lados direito e esquerdo do mapa iterado. Encontra-se que os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$  oscilam e convergem para dois valores constantes. Estes valores dependem do ponto de acumulação das bifurcações  $a_2^*(a_1)$ , mas o produto deles é aproximadamente constante.

Observando a autossimilaridade entre  $f(x)$ ,  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$ ,  $(\alpha_1 \alpha_2)^2 f^{16}(x/(\alpha_1 \alpha_2)^2)$ , etc. verificamos que estas funções tendem a uma função limite, que satisfaz a equação  $h(x) = \beta h^4(x/\beta)$ , onde  $\beta$  é o produto  $\alpha_k \alpha_{k+1}$ , quando  $k$  é suficientemente grande. Propusemos um grupo de renormalização que consiste em igualar  $f(x)$  a  $\alpha_1 \alpha_2 f^4(x/(\alpha_1 \alpha_2))$ , e encontramos através deste método a linha crítica  $a_2^*(a_1)$  e  $\beta$  com boas aproximações.

Calculamos a função  $f_k(\alpha)$  que também mostrou possuir um comportamento oscilatório, semelhante ao verificado para os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$ . Finalmente, calculamos o expoente de Liapunov para um exemplo típico.

## CAPÍTULO 4

### MAPA COM ASSIMETRIA NO EXPOENTE

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos um outro tipo de assimetria que pode ser introduzida em mapas do tipo logístico. Serão tratados mapas que possuem uma assimetria no expoente da variável dinâmica. No capítulo anterior vimos que a universalidade métrica existente em mapas unimodais simétricos é destruída quando existe uma assimetria na amplitude. No entanto, é observado um comportamento regular dos fatores de escala: ao invés de possuírem apenas um valor assintótico limite, eles oscilam entre dois valores limites.

Veremos que quando existe uma assimetria no máximo do mapa, relacionada com o expoente da variável dinâmica, então as relações de universalidade métrica são completamente destruídas. O comportamento dos fatores de escala destes mapas são totalmente diferentes em relação ao mapa simétrico, mesmo que a diferença entre os expoentes seja muito pequena ( $\sim 1\%$ ). Observa-se que existe um comportamento oscilatório divergente dos fatores de

escala, ou seja, alternadamente crescem e decrescem quando o período se bifurca [ 44,45 ]. Estudo do fator  $\delta_k$  já foi feito experimentalmente em osciladores não lineares forçados [ 47 ] em mapas assimétricos ( $z_1 \neq z_2$ ) e os resultados obtidos coincidiram com a teoria.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 4.2 apresentaremos os resultados numéricos obtidos para os fatores  $\delta_k$  e  $\alpha_k$ ; na seção 4.3 faremos um estudo da função  $f(x)$  para mapas com assimetria no expoente; em 4.4 mostraremos o comportamento do expoente de Liapunov em função do parâmetro externo; na última seção apresentaremos as conclusões.

## 4.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

O mapa assimétrico que estudaremos é dado por

$$x_{i+1} = f(x_i) \equiv \begin{cases} 1 - a|x_i|^{z_1}, & x_i \geq 0 \\ 1 - a|x_i|^{z_2}, & x_i \leq 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

com  $z_1, z_2 > 1$ . Na fig. 4.2.1 mostramos  $f(x)$  vs.  $x$  para exemplos típicos. Quando  $z_1 = z_2 = z$  recuperamos o mapa simétrico do tipo logístico. Na fig. 4.2.2 mostramos o atrator do mapa (4.2.1) em função de  $a$  para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$ . Por ser S-unimodal este mapa apresenta rota ao caos via bifurcação de período. No entanto, verifica-se que a universalidade métrica observada nos mapas

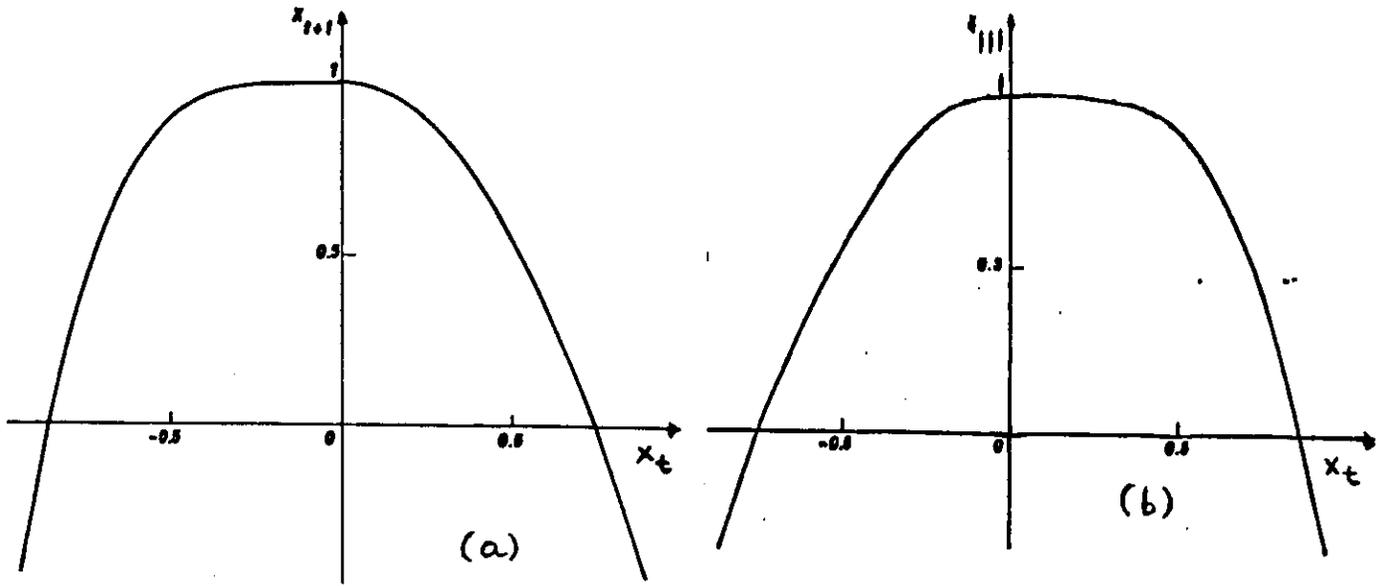


Fig. 4.2.1. Mapas assimétricos com (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

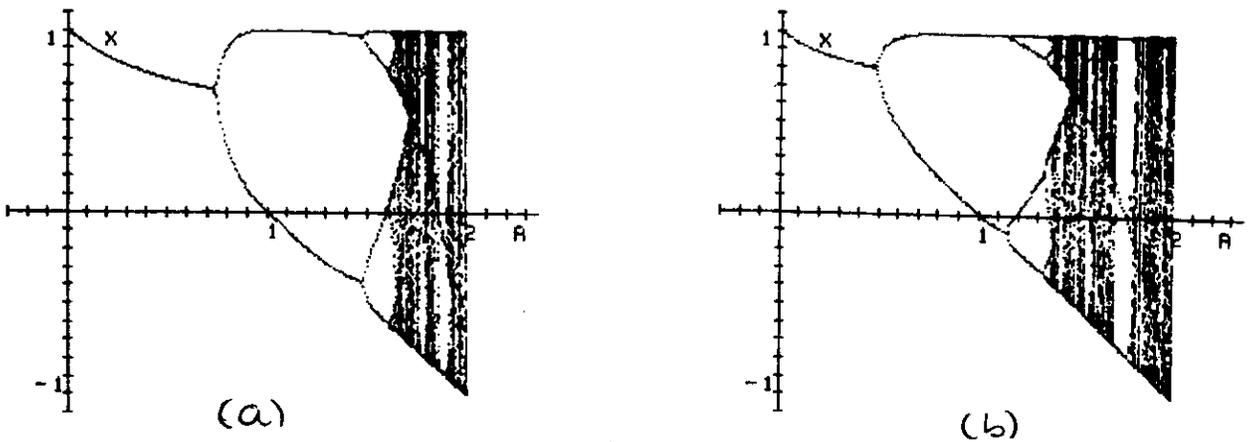


Fig. 4.2.2. Diagramas de bifurcações para (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

simétricos é totalmente destruída em mapas com assimetria no expoente da variável dinâmica. As séries  $\{\delta_k\}$  e  $\{\alpha_k\}$  apresentam um comportamento oscilatório divergente quando  $k$  cresce.

Na tabela 4.2.1 mostramos os valores obtidos para  $\delta_k$  usando a definição

$$\delta_k = \frac{\tilde{a}_{k+1} - \tilde{a}_k}{\tilde{a}_{k+2} - \tilde{a}_{k+1}} \quad (4.2.2)$$

onde  $\tilde{a}_k$  é o valor de  $a$  onde o ciclo com período  $2^k$  é superestável, para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ . Vemos que quando  $k$  aumenta os valores sucessivos de  $\delta_k$  tornam-se alternadamente cada vez maiores e menores. Quanto maior for a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$ , mais pronunciado é o comportamento divergente. Quando a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$  é pequena, o comportamento divergente é pouco pronunciado. Os valores de  $\delta_k$  quando graficados em função de  $k$  situam-se aproximadamente sobre duas retas. O ângulo entre as retas diminui à medida que  $z_1$  aproxima-se de  $z_2$ .

Como vimos no Cap. 2, os valores de  $\delta_k$  podem ser determinados tanto em função dos locais onde o ciclo é superestável ou onde ocorrem as bifurcações. Numericamente é consideravelmente mais fácil calcular os locais de superestabilidade do ciclo, que as bifurcações, pois o transiente para se chegar ao atrator aumenta quando o parâmetro aproxima-se do ponto de bifurcação. Em mapas unimodais simétricos ambos os métodos fornecem os mesmos valores para  $\delta_k$ . Experimentalmente  $\delta_k$  é calculado através dos locais onde ocorrem as bifurcações. No caso de mapas com  $z_1 \neq z_2$  os dois métodos fornecem o mesmo comportamento qualitativo para a série  $\{\delta_k\}$ , ou seja, oscilatório divergente. No

k	$\xi_k$	$\delta_k$ superest.	$\delta_k$ bifurc.	$\alpha_k$
1	1.000000000000	1.12375	3.643	5.30261
2	1.188585861842	118.088	6.625	0.51899
3	1.356403706313	0.37241	7.588	29.0440
4	1.357824831910	800.653	6.548	0.08612
5	1.361640892733	0.13862	18.01	204.042
6	1.361645658918	6337.59	6.202	0.01657
7	1.361680041889	0.05078		1980.78
8	1.361680047315	64367.1		0.00219
9	1.361680154136	0.01699		28186.5
10	1.361680154137			0.00020
11	1.361680154235			

Tabela 4.2.1. Valores de  $\xi_k$ ,  $\delta_k$  (calculados através dos pontos de superestabilidade e bifurcação) e  $\alpha_k$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

entanto, vemos que a divergência é muito menos pronunciada quando  $\delta_k$  é calculado com os valores dos locais das bifurcações. A tabela 4.2.1 mostra os resultados de  $\delta_k$  calculados pelos dois métodos citados acima. A fig. 4.2.3 mostra  $\delta_k$  vs.  $k$  para valores típicos de  $z_1, z_2$ .

O fator de escala  $\alpha_k$ , definido pela eq.(3.2.3) apresenta um comportamento semelhante ao de  $\delta_k$ , ou seja, oscilatório divergente quando  $k$  aumenta. Na tabela 4.2.1 estão especificados os valores de  $\alpha_k$  para um exemplo típico.

Foi mostrado nas refs. [ 45 , 46 ] que um mapa assimétrico com uma simetria local numa pequena região em torno do máximo, mostrará um comportamento de um mapa assimétrico nas bifurcações , até que a região simétrica seja detectada, e neste ponto existirá um "crossover" para a rota de Feigenbaum. Quanto menor for a região de simetria, mais demorada é a mudança de rota. Estas observações têm uma importância física grande, pois num sistema experimental apenas as primeiras bifurcações são possíveis de serem detectadas. Assim, experimentalmente se um sistema for governado por um mapa assimétrico com uma simetria local no máximo, mostrará o comportamento de um mapa assimétrico.

#### 4.3. A FUNÇÃO $f(\alpha)$

A função  $f(\alpha)$  indica a dimensão do subconjunto de um objeto

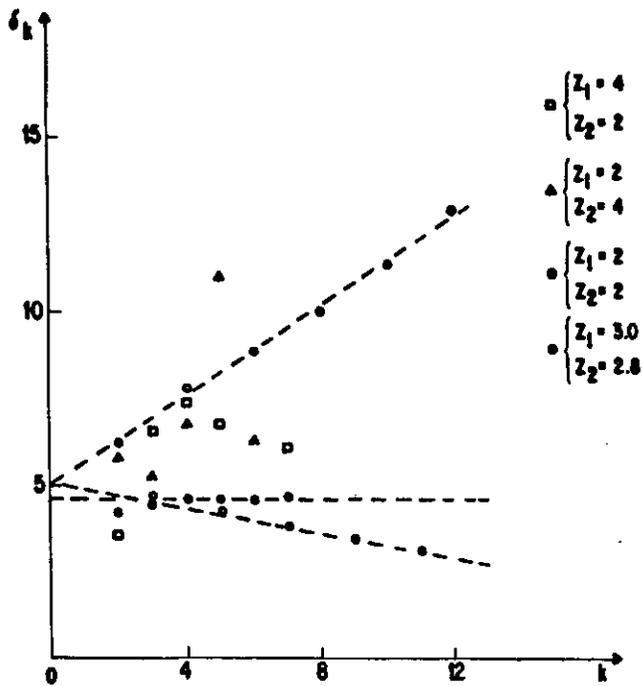


Fig. 4.2.3. Fator  $\delta_k$  como função de  $k$  para valores típicos de  $z_1$  e  $z_2$ , calculados nos pontos de bifurcação para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$  e nos pontos de superestabilidade para  $(z_1, z_2) = (3.0, 2.8)$ .

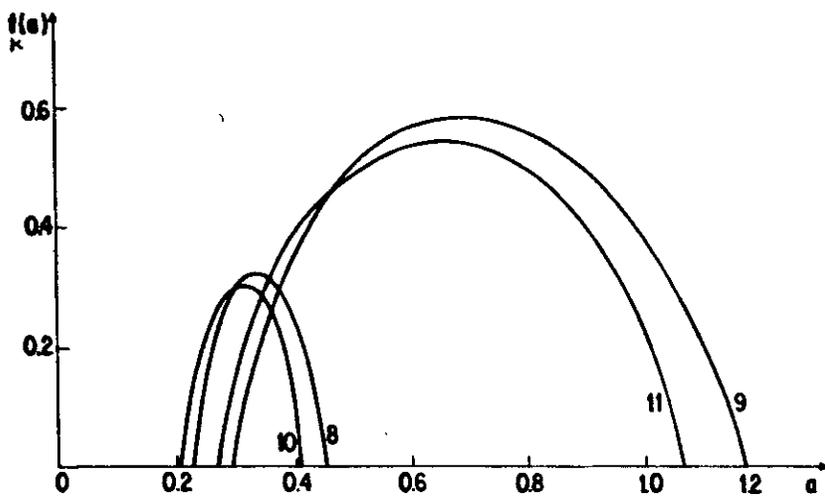


Fig. 4.3.1. Função  $f_k(a)$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$  e  $k = 8, 9, 10$  e  $11$ .

multifractal que possui o mesmo índice de escala  $\alpha$ . A maneira de se calcular  $f(\alpha)$  está descrita na seção 2.2.2. Esta função quando calculada nos pontos de superestabilidade do ciclo numa sequência de bifurcações converge para um valor limite quando o mapa é simétrico. No caso de mapas assimétricos, o comportamento não universal dos fatores de escala  $\delta_k$  e  $\alpha_k$  também é observado na função  $f(\alpha)$ . Na fig. 4.3.1 mostramos a função  $f(\alpha)$  para  $(z_1, z_2) = (4, 2)$  calculadas nos pontos de superestabilidade do ciclo  $2^k$ , para  $k=8, 9, 10$  e  $11$ .

Vemos que  $f(\alpha)$  oscila, e não converge, quando  $z_1 \neq z_2$ . A relação  $\alpha_{\max} = \ln 2 / \ln \alpha$  e  $\alpha_{\min} = \ln 2 / \ln \alpha^2$  válida para mapas simétricos, não é observada neste tipo de mapa. No entanto, em todas as curvas estudadas o valor de  $\alpha_{\max} / \alpha_{\min}$  alterna-se entre  $z_1$  e  $z_2$  quando varia-se  $k$ . Mais uma vez temos que a dinâmica de mapas assimétricos é dominada alternadamente pelos lados direito e esquerdo do mapa.

Observe que, embora o máximo da curva de  $f(\alpha)$ , que coincide com a dimensão de Hausdorff, apresente um comportamento oscilatório não poderá ultrapassar o valor 1, já que este mapa é unidimensional.

#### 4.4. EXPOENTE DE LIAPUNOV

O expoente de Liapunov  $\lambda$  fornece uma medida qualitativa da

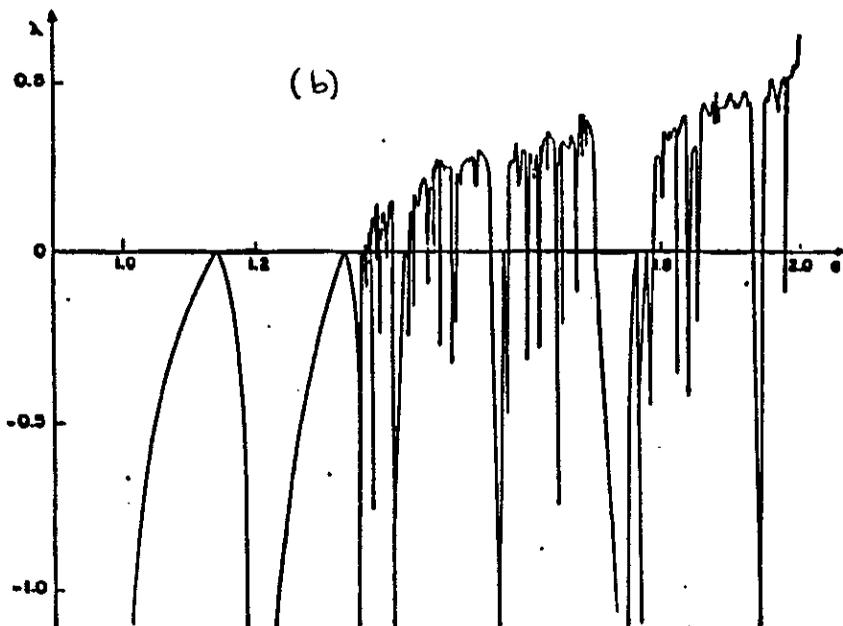
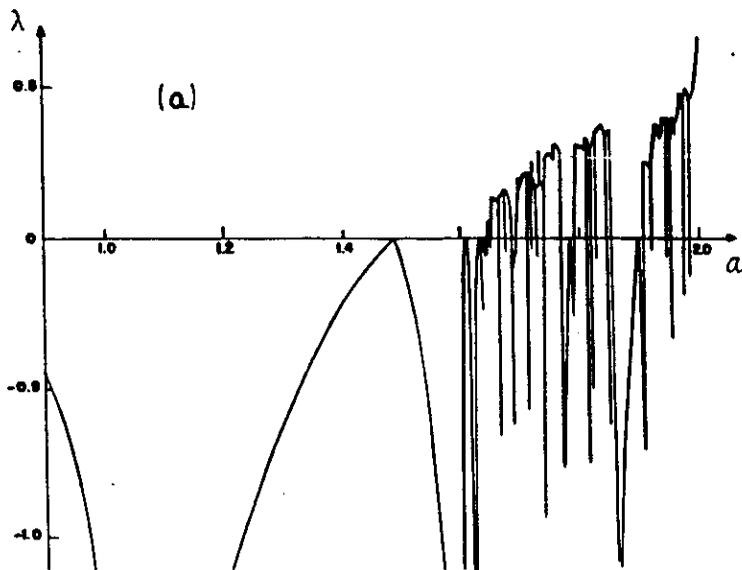


Fig. 4.4.1. Expoente de Liapunov para (a)  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e (b)  $(z_1, z_2) = (4, 2)$ .

sensibilidade dos estados caóticos às condições iniciais. Assim, o regime caótico possui  $\lambda > 0$  e o regime periódico possui  $\lambda < 0$ .

Na fig. 4.4.1 mostramos o expoente de Liapunov para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  e  $(4, 2)$ , calculado a partir da eq.(3.6.1). Na região caótica existe um número infinito de janelas periódicas, e elas aparecem na mesma ordem do mapa simétrico, já que o mapa é S-unimodal. No entanto, verificamos que os tamanhos relativos das janelas são bastante diferentes em relação ao mapa logístico. Vemos também que os valores do parâmetro onde ocorrem as bifurcações ( $\lambda = 0$ ) ou onde os ciclos são superestáveis ( $\lambda \rightarrow -\infty$ ) não convergem geometricamente com uma razão constante, como no mapa simétrico, mas possui o comportamento irregular do fator  $\delta_k$ .

#### 4.5. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos o comportamento de um mapa não linear com uma assimetria no expoente da variável dinâmica. Mostramos que os fatores de escala  $\alpha_k$  e  $\delta_k$  apresentam um comportamento oscilatório divergente quando  $k$  cresce. Quanto maior for a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$ , mais pronunciado é o comportamento divergente. A mudança entre esta representação e a de Feigenbaum é notável, mesmo quando a diferença entre  $z_1$  e  $z_2$  é muito pequena ( $\sim 1\%$ ).

Experimentalmente a detecção do comportamento oscilatório

divergente de  $\delta_k$  foi feito em osciladores forçados, mostrando que nos experimentos só as primeiras bifurcações são possíveis de serem estudadas, e elas são determinadas pelo comportamento global do mapa, independentemente se o mesmo possui uma simetria local.

Estudamos a função  $f(\alpha)$  e mostramos que o comportamento oscilatório divergente de  $\alpha_k$  é também reproduzido em  $f(\alpha)$ . O expoente de Liapunov foi estudado como função do parâmetro  $a$  para dois exemplos típicos.

## CAPÍTULO 5

### MAPA DESCONTÍNUO

#### 5.1. INTRODUÇÃO

As rotas para o caos via bifurcação de período, intermitência e quaseperiodicidade, estão associadas a mapas contínuos e diferenciáveis, os quais são gerados por sistemas onde as trajetórias do fluxo não passam perto de um ponto singular. Em situações mais gerais, onde a trajetória do fluxo passa próximo a um ponto singular, a analiticidade do mapa resultante é quebrada, pois a evolução da variável dinâmica depende de onde sua preimagem está localizada. Isto leva ao aparecimento de novas rotas [44,48] ao caos, as quais possivelmente são em número muito maior que as três rotas bem conhecidas, citadas anteriormente.

Vários sistemas apresentam singularidades na trajetória do fluxo [ 49,50 ]. No entanto, o modelo de Lorenz [ 1 ] é o mais conhecido destes sistemas, o qual possui um ponto de sela na origem. Seções de Poincaré apropriadas em fluxos do tipo de Lorenz levam a mapas com uma descontinuidade no extremo [ 51 ] do tipo

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv \begin{cases} 1 - c_1 - a|x_t|^1, & x > 0 \\ 1 - c_2 - a|x_t|^2, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

(veja fig. 5.1.1). Este mapa, como veremos, apresenta uma nova rota universal ao caos [ 44 ].

Para ver como estes mapas aparecem, consideremos um fluxo em três dimensões, o qual tem uma estrutura geométrica do fluxo de Lorenz, ou seja, a origem é um ponto hiperbólico (ou de sela). Na fig. 5.1.2 mostramos a situação que estamos tratando. Consideramos que perto da origem o fluxo é linear, comportando-se pois da seguinte forma

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\mu_1 x, -\mu_2 y, -\mu_3 z) \quad (5.1.2)$$

com  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ . Observe que escolhemos a direção instável como sendo  $x_1$  e as direções estáveis  $y$  e  $z$ . Assumimos que a linearidade do fluxo é válida dentro da caixa

$$B = \{(x, y, z), -1 \leq x \leq 1, -1/2 \leq y \leq 1/2, 0 \leq z \leq 1\}$$

em torno da origem (veja fig 5.1.2). Suponha que começamos a evolução no tempo  $t=0$  num ponto  $(x_0, y_0, 1)$  na face  $U$ . Se  $x > 0$ , sua órbita passa pela face  $F^+$  de  $B$  no tempo  $t^* = -(1/\mu_1) \ln x_0$  [i.e.,  $x(t^*) = x_0 \exp(\mu_1 t^*) = 1$ ]. Logo

$$(x_0, y_0, 1) \rightarrow \left( 1, y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1}, x_0^{\mu_3/\mu_1} \right) \quad (5.1.3)$$

no tempo  $t^*$ . Vemos então que o fluxo dentro da caixa  $B$  mapeia

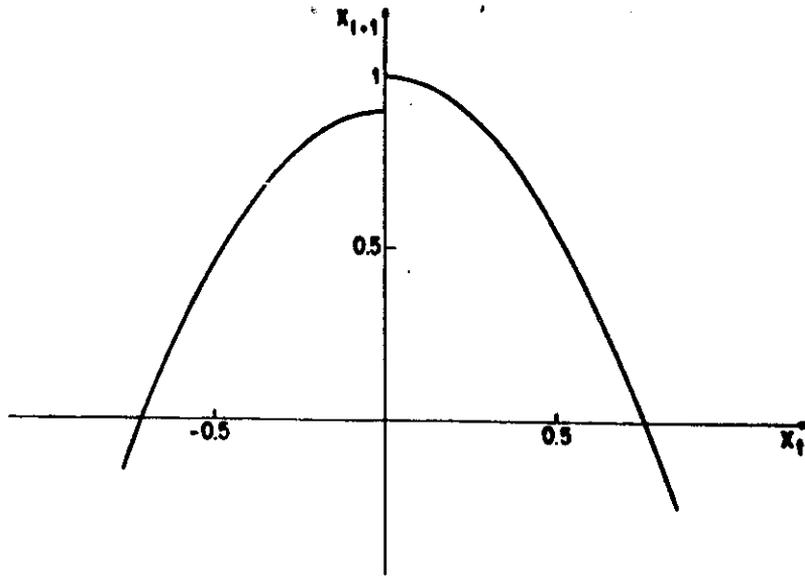


Fig. 5.1.1. Mapa descontínuo para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $z_1 = z_2 = 2$  e  $a = 1.8$ .

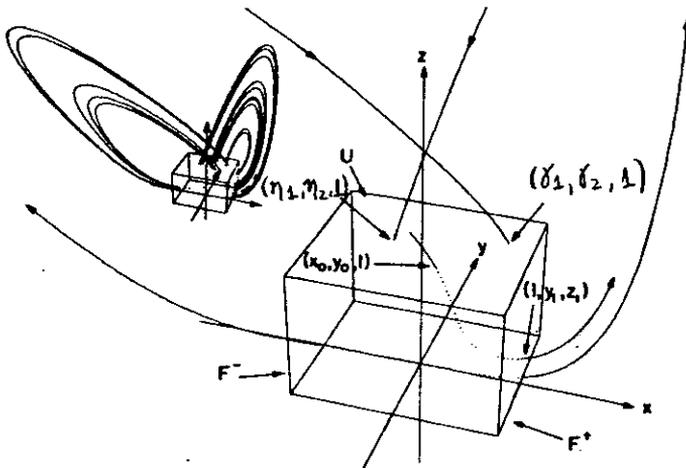


Fig. 5.1.2. Caixa dentro da qual o fluxo passando próximo do ponto de sela é linearizado.

qualquer linha  $x=\text{const.}$  em  $U$  numa linha  $z=\text{const.}$  em  $F^+$ . Postulamos que o fluxo fora da caixa não passa próximo de nenhum ponto singular e que as linhas com  $z=\text{const.}$  em  $F^+$  são mapeadas de volta em linhas com  $x=\text{const.}$  em  $U$ .

Denotando agora os pontos onde o "manifold" instável partindo de  $O^+$  e  $O^-$  passa por  $U$  como  $(\gamma_1, \gamma_2, 1)$  e  $(\eta_1, \eta_2, 1)$  respectivamente, teremos

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 + a_1 y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1} + \text{t.o.s.}(x_0) \\ \gamma_2 + a_2 y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1} + \text{t.o.s.}(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.4a)$$

quando  $x_0 > 0$ , e

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 + b_1 y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1} + \text{t.o.s.}(x_0) \\ \eta_2 + b_2 y_0 x_0^{\mu_2/\mu_1} + \text{t.o.s.}(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.4b)$$

quando  $x_0 < 0$  onde  $a_1, a_2, b_1, b_2$  são os coeficientes da expansão de Taylor e  $\text{t.o.s.}(x_0)$  significa "termos de ordem superior" em  $x_0$ . Vemos então que o mapa na variável  $x_0$  é do tipo da eq.(5.1.1) com  $z_1 = z_2 = \mu_2/\mu_1$ . Consideraremos nesta equação  $z > 1$ . No entanto, convém observar que o modelo de Lorenz original possui  $z < 1$ , tendo o mapa correspondente um "cusp", favorecendo uma transição de fase de primeira ordem. Porém não é difícil encontrar mapas com  $z > 1$ , tais como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1.8(x - y) + c x^2 \\ \dot{y} &= -7.2y + xz + \mu x^3 \\ \dot{z} &= -2.7z + xy - 0.07z^2 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

onde os autovalores na origem são dados por  $\mu_1=1.8$ ,  $\mu_2=7.2$  e  $\mu_3=2.7$ , e portanto,  $z=1.5$ .

Verificamos que mapas descontínuos governados pela eq.(5.1.1), com  $z_1, z_2 > 1$ , possuem uma rota para o caos com leis universais bem definidas e diferentes das três outras rotas bem conhecidas. Para este tipo de mapa a rota ao caos é através de sequências de cascatas inversas em progressão aritmética. Não existe caos nos pontos de acumulação das cascatas; o caos aparece apenas no ponto de acumulação dos pontos de acumulação.

O objetivo deste capítulo é estudar com detalhe as propriedades mais relevantes desta nova rota. Na seção 5.2 estudaremos a evolução do atrator quando os parâmetros externos são variados; na seção 5.3 veremos como comporta-se o comprimento do ciclo quando varia-se o parâmetro  $a$  dentro de uma cascata inversa; em 5.4 estudamos a dimensão de capacidade do atrator no ponto de acumulação de uma cascata inversa; em 5.5 vemos como é o "crossover" do mapa contínuo para o descontínuo; em 5.6 mostramos como é a formação das sequências de Metropolis-Stein-Stein para o mapa descontínuo; em 5.7 estudaremos o expoente de Liapunov; em 5.8 o expoente de incerteza é calculado para alguns valores do parâmetro  $a$ ; em 5.9 exibiremos um ciclo de histerese resultante da dependência do atrator com a condição inicial; em 5.10 calculamos a função  $f(\alpha)$  do conjunto multifractal existente na entrada em caos; em 5.11 estudamos como o mapa descontínuo pode ser tomado como um caso limite de um mapa contínuo; finalmente as conclusões são elaboradas na seção 5.12.

## 5.2. EVOLUÇÃO DO ATRATOR

Em mapas descontínuos governados pela eq. (5.1.1) a rota ao caos é completamente diferente da rota via bifurcação de período. Na fig. 5.2.1 mostramos a dependência de  $a^*$  (valor de  $a$  onde o sistema entra em caos) e  $a^M$  (valores limites de  $a$  onde não existe mais atrator finito) no espaço de parâmetros  $(\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, a_2)$  para o mapa da eq. (5.1.1). Na fig. 5.2.2 mostramos  $a^M$  como função da condição inicial  $x_0$  para valores típicos dos parâmetros  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Na evolução do atrator com o parâmetro externo  $a$ , vemos o aparecimento de sequências de cascatas inversas em progressão aritmética ("inversa" refere-se ao fato que  $a$  decresce quando se aproxima do ponto de acumulação da cascata) inicialmente misturadas com bifurcações de período tipo Feigenbaum. A primeira cascata (para  $a$  crescente) quando  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$  é ...12-10-8-6-4, que se acumula em  $a=1$ . Depois desta cascata observamos duas bifurcações e mais adiante aparece a cascata inversa ...21-17-13-9, e então novamente uma bifurcação para o período 18. Esta bifurcação é a última antes da entrada em caos. Seguem-se mais cascatas inversas ...76-68-40-22, ...70-48-26, ...108-82-56, ...142-86-30, etc. Observamos que na formação das cascatas existe a seguinte regra: em cada cascata o período cresce aritmeticamente, adicionando-se o primeiro elemento que existe imediatamente antes do seu ponto de acumulação. Na fig. 5.2.3 mostramos a evolução do atrator em função de  $a$  para o exemplo citado acima, ou seja,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ . Na verdade, observa-se que

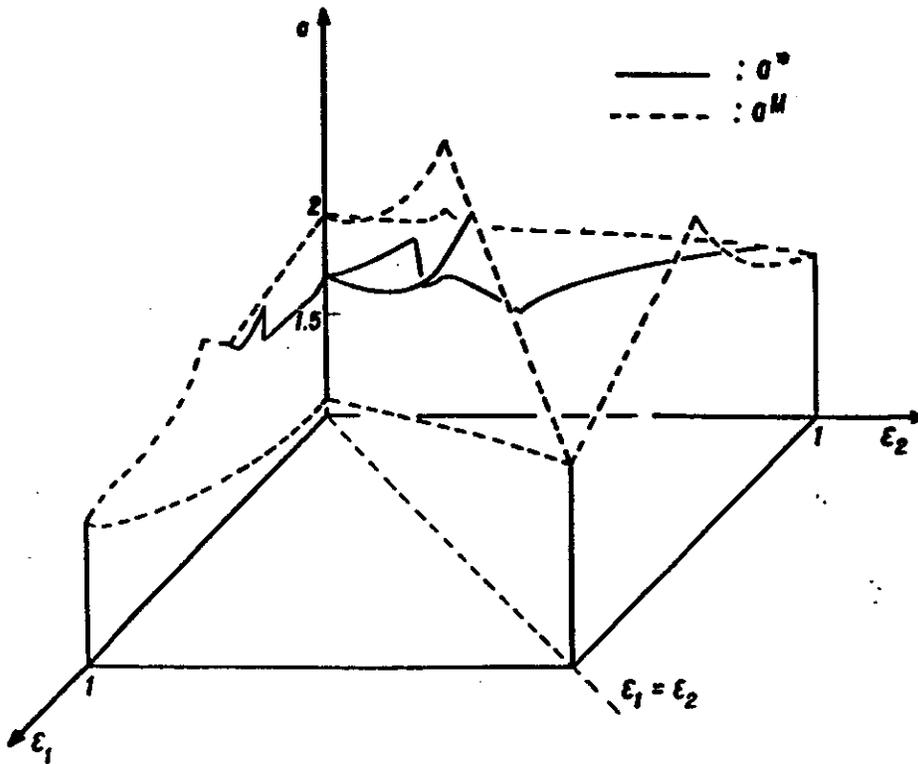


Fig. 5.2.1. Cortes especiais nas hipersuperfícies da "primeira entrada em caos"  $a^X$  e do "desaparecimento do atrator finito"  $a^M$ , no espaço  $(\epsilon_1, \epsilon_2, a)$  para  $z_1 = z_2 = 2$  e  $x_0 = 0.5$ .

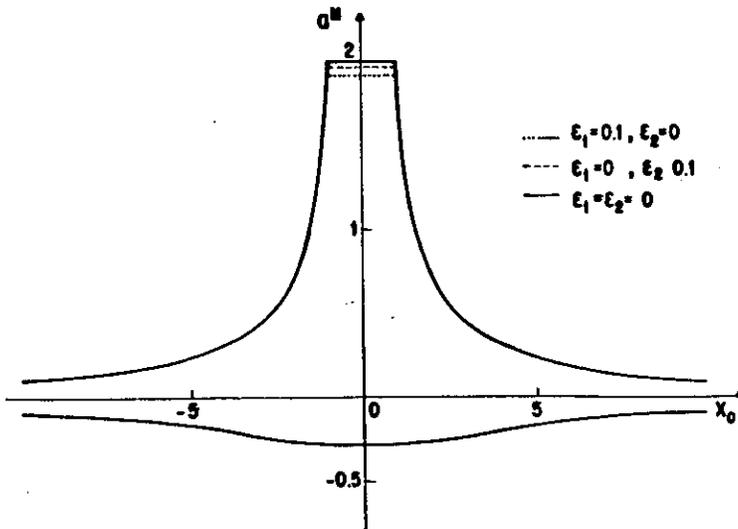


Fig. 5.2.2. Dependência de  $a^M$  com  $x_0$  para  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0.1, 0)$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ .

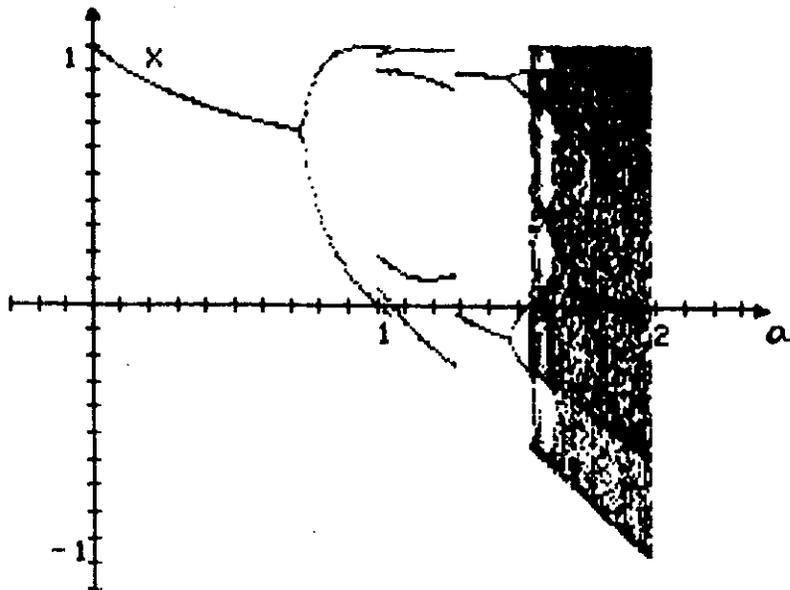


Fig. 5.2.3. Evolução do atrator em função de  $a$  para  $z_1=z_2=2$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=(0, 0.1)$  e  $x_0=0.3$ .

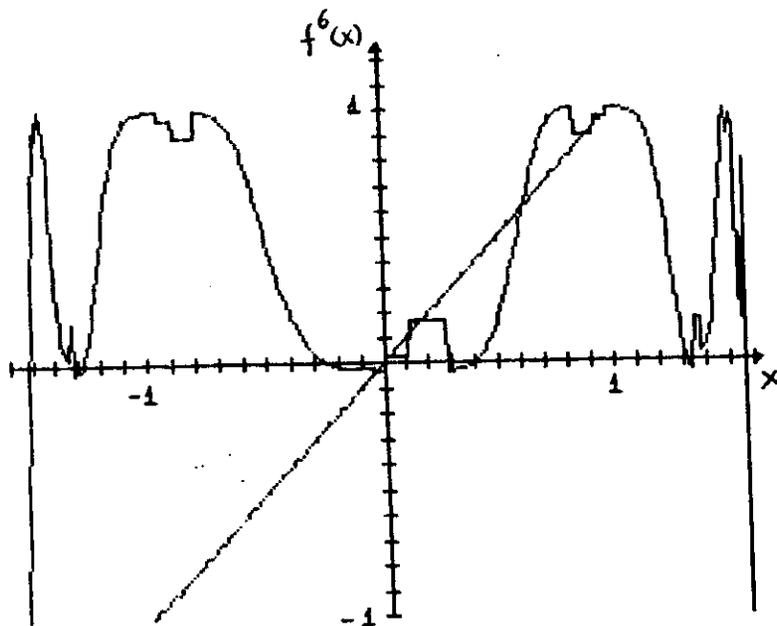


Fig. 5.2.4. A função  $f^6(x)$  para  $a=1.03$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=(0, 0.1)$ ,  $z_1=z_2=2$  e  $x_0=0.5$ .

existe uma estrutura muito mais fina, ou seja, entre quaisquer dois elementos de uma cascata, existe uma outra cascata que obedece à regra mencionada. Por exemplo, entre os elementos 40 e 22 da terceira cascata, existe a cascata ...102+62+22; entre os elementos 102 e 62 desta cascata, temos a seguinte ...266+164+62, e assim por diante. Os elementos das cascatas aparecem de forma descontínua, como uma bifurcação tangente, quando um dos pontos do atrator toca o eixo  $x=0$ . No entanto, não apresentam intermitência, pois a função iterada  $f(f(\dots f(x)))$  apresenta degraus que cruzam a bissetriz  $f(x) = x$ . Veja um exemplo na fig. 5.2.4.

Representamos na fig. 5.2.5 a evolução do atrator como função do tamanho da descontinuidade, para um caso típico. Nos referiremos a tal diagrama de fases como "cacho de bananas". Inicialmente, vamos fixar  $\epsilon_1$  e variar  $a$ . Vemos o comportamento descrito acima: cascatas inversas cujos períodos crescem aritmeticamente e acumulam-se em valores de  $a$ , imediatamente abaixo dos quais aparece o período que é precisamente a constante aditiva da cascata. Além do mais, entre quaisquer duas bananas sempre existe uma outra banana. O mesmo comportamento é observado se fixarmos  $a$  e variarmos  $\epsilon_1$  (ou  $\epsilon_2$ , ou ambos, com  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ). Os pontos de acumulação por sua vez acumulam-se (para  $a$  crescente e  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  fixos) num ponto que é a entrada em caos. Em outras palavras, temos um número (provavelmente) infinito de pontos de acumulação onde não existe caos (expoente de Liapunov negativo), o qual aparece apenas no ponto de acumulação dos pontos de acumulação.

Para  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  fixos, existe uma dada banana entre um valor mínimo  $a_k^m$  e um valor máximo  $a_k^M$ . Dentro de uma cascata de bananas

(cuja sequência é denotada por  $k=1, 2, 3, \dots$ ), verificamos que

$$| a_k^m - a_{k+1}^m | \sim | a_{k-1}^m - a_k^m |^{z_1} \quad (5.2.1a)$$

bem como,

$$| a_k^m - a_{\infty}^m | \sim | a_{k-1}^m - a_{\infty}^m |^{z_1} \quad (5.2.1b)$$

para  $k$  grande o suficiente. A mesma lei se verifica para  $( a_k^M )$ , para todas as cascatas, para valores de  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , tais que  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , na presença ou ausência de termos de ordem superior na eq. (5.1.1), e também se fixarmos  $a$  e variarmos  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ .

### 5.3. COMPRIMENTO DO CICLO

Para cada cascata o comprimento do ciclo estável  $k$ -ésimo como função do parâmetro  $a$  pode ser determinado da seguinte maneira: seja  $B$  a constante aditiva da cascata e  $\xi_k$  o comprimento do  $k$ -ésimo ciclo. Assim teremos

$$\xi_k = A + B k \quad (5.3.1)$$

onde  $A$  é um número natural. Usando a eq. (5.2.1a), obtemos

$$\xi_k = \frac{B}{\ln z_1} \ln \ln \frac{1}{a_k - a_{k+1}} + \xi_0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (5.3.2)$$

onde  $\xi_0$  é um número inteiro. Analogamente, se tivéssemos usado a eq. (5.2.1b) obteríamos uma relação semelhante onde  $(a_k - a_{k+1})$  seria substituído por  $(a_k - a_{\infty})$ . Na fig. (5.3.1) mostramos o

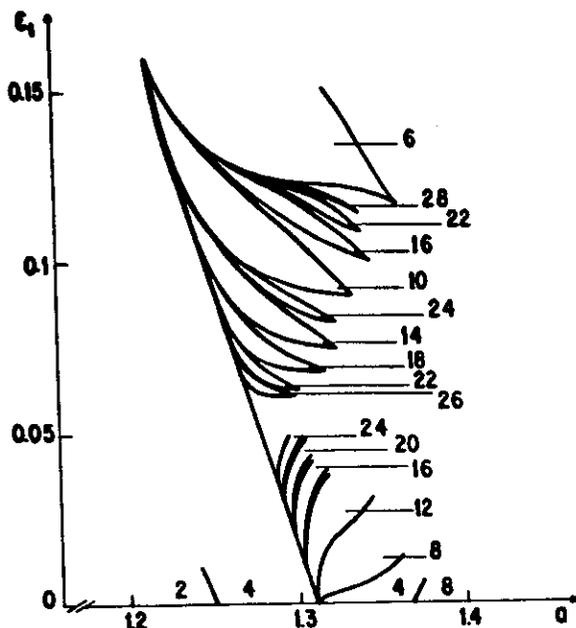


Fig. 5.2.5. Diagrama de fase para  $z_1=z_2=2$ ,  $\epsilon_2=0$  e  $x_0=0.5$ . Os números indicam o período do atrator. Para  $\epsilon_1=0$  recupera-se o caso conhecido de bifurcação de período.

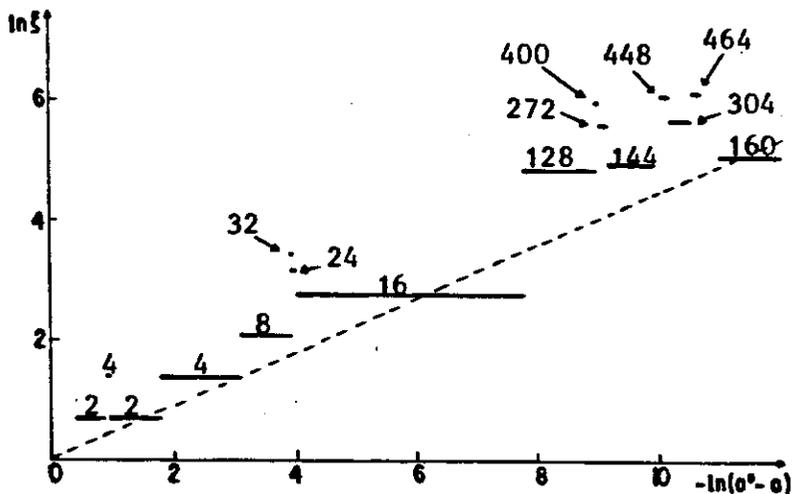


Fig. 5.3.1. Gráfico de  $\ln \xi$  como função de  $\ln(a^* - a)$  para  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.001)$ ,  $z_1=z_2=2$  e  $x_0=0.5$ . Os números indicam o comprimento do ciclo. As linhas pontilhadas dão o comportamento assintótico deste gráfico para o mapa logístico.

comportamento de  $\xi$  em função de  $(a^* - a)$  para um exemplo típico ( $a^*$  é o valor do parâmetro para a entrada em caos). Nesta figura está mostrado também o comportamento assintótico de  $\xi$  para o mapa logístico.

#### 5.4. DIMENSÃO DE CAPACIDADE DO ATRATOR NO PONTO DE ACUMULAÇÃO DA CASCATA

Os novos elementos de uma cascata inversa que vão surgindo quando o parâmetro externo varia, acumulam-se sobre os elementos do atrator que existe imediatamente antes do ponto de acumulação da cascata inversa. Na fig. 5.4.1 mostramos um exemplo esquemático para esclarecer este ponto. Lá vemos a cascata ...18+14+10 e entre os elementos 14 e 10 a cascata ...38+24+10 (linhas pontilhadas). Se denotamos  $x_k^{(q)}$  o elemento  $q$  do  $k$ -ésimo ciclo de uma cascata ( $q < \xi_k$ ;  $q$  crescente denotam aproximação ao ponto de acumulação dos novos elementos), as seguintes leis são observadas

$$| x_k^{(q)} - x_k^{(q+1)} | \sim | x_k^{(q-1)} - x_k^{(q)} |^{\frac{1}{2}} \quad (5.4.1)$$

ou equivalentemente,

$$| x_k^{(q)} - x_k^{(\infty)} | \sim | x_k^{(q-1)} - x_k^{(\infty)} |^{\frac{1}{2}} \quad (5.4.2)$$

para  $q$  e  $k$  suficientemente grandes. Estas leis nos permitem

calcular a dimensão de capacidade do atrator no ponto de acumulação de qualquer cascata. A dimensão de capacidade para um conjunto é definido por

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \quad (5.4.3)$$

onde  $N(\varepsilon)$  é o número mínimo de segmentos (para o caso unidimensional) necessários para cobrir o conjunto. Se tomarmos

$\varepsilon \equiv |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{1/z_1^q}$ , então  $N(\varepsilon) = q$ , logo

$$\begin{aligned} d_c &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\log q}{\log |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{1/z_1^q}} \\ &= \frac{1}{\log |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\log q}{z_1^q} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

No caso de mapas unimodais a dimensão de capacidade no ponto de acumulação das cascatas (de bifurcações) é um número fracionário, compreendido entre 0 e 1.

## 5.5. "CROSSOVER" DO MAPA DESCONTÍNUO PARA O DE FEIGENBAUM

O número de bifurcações tipo Feigenbaum no mapa descontínuo depende do tamanho da descontinuidade. Quanto menor for o tamanho da descontinuidade, maior será o número destas bifurcações, divergindo quando a descontinuidade desaparece. Por exemplo, para

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.0001)$  observamos seis bifurcações antes da entrada em caos, enquanto que para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$  são observadas apenas três.

Nas figs. 5.2.3 e 5.3.1, vemos que o ciclo de período dois resultante da primeira bifurcação desaparece num certo valor de  $a$  e reaparece mais adiante. O valor do parâmetro  $a$  onde o ciclo com período 2 desaparece e reaparece são dados por  $a_d = (1 - \varepsilon_1)^{1-z_1}$  e  $a_r = (1 - \varepsilon_1)/(1 - \varepsilon_2)^{z_1}$ , respectivamente. Os valores de  $a_d$  e  $a_r$  são levemente modificados, dependendo do atrator para o qual o sistema evolui (veja seção 5.8). O lugar onde acontece a primeira cascata inversa é precisamente  $a_d$ . Na fig. 5.5.1(a) e 5.5.1(b) mostramos  $f^2(x)$  para  $a=a_d$  e  $a=a_r$  para um exemplo típico. O reaparecimento do ciclo 2 pode mesmo se dar depois do sistema ter entrado em caos. Por exemplo, para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-0.1, 0.1)$  temos  $a^* \cong 1.23$  e  $a_r \cong 1.358$ . Observe que para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  (mapa contínuo)  $a_d = a_r = (1 - \varepsilon_1)^{1-z_1}$ , o que ilustra como o "crossover" para a rota de bifurcações acontece. Um estudo analítico semelhante pode ser feito para os ciclos 4, 8, etc.

## 5.6. SEQUÊNCIA MSS PARA O MAPA DESCONTÍNUO

Nos mapas descontínuos governados pela eq. 5.1.1 existe uma lei de formação para a ordem em que os pontos no atrator são visitados. Denotamos por  $R$  ( $L$ ) os pontos que estão localizados à direita (esquerda) de  $x=0$ . Como já foi mencionado, o atrator se

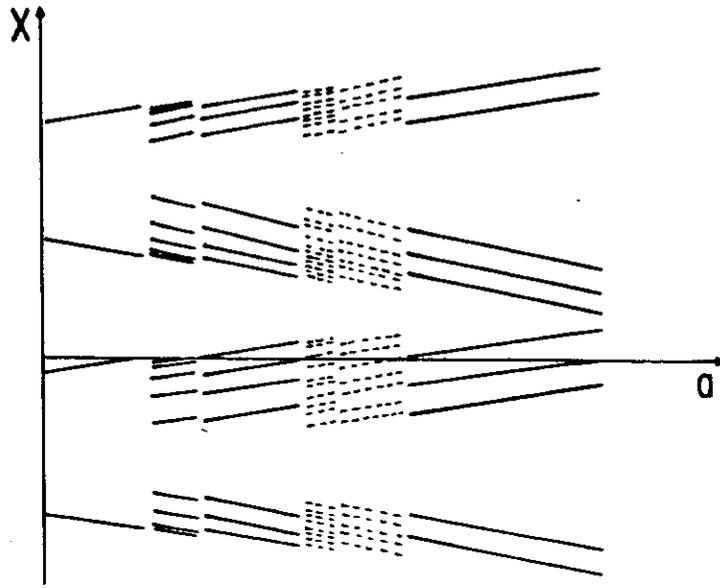


Fig. 5.4.1. Exemplo esquemático da cascata inversa ...18+14+10 e da cascata "intermediária" ...38+24+10. A figura está fora de escala.

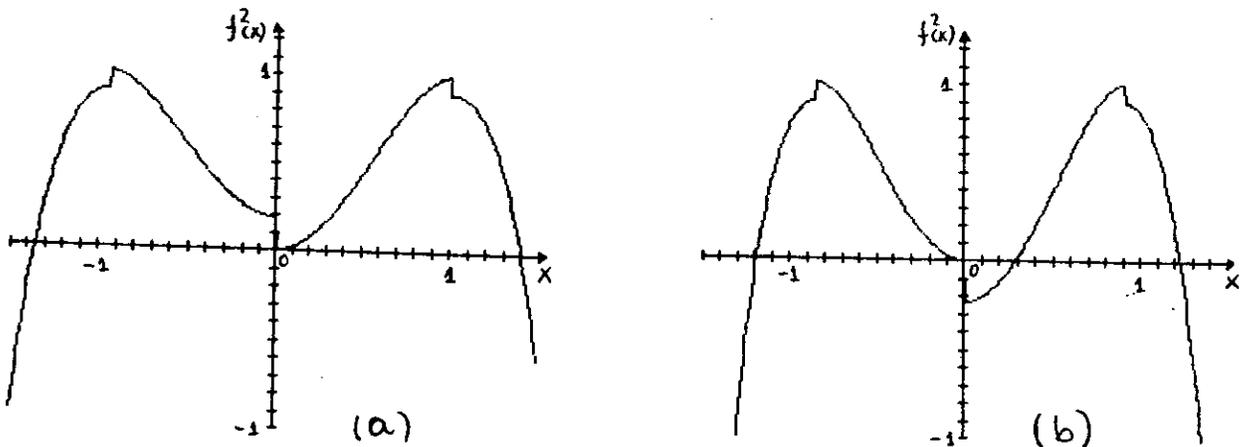


Fig. 5.5.1. Gráfico de  $f^2(x)$  para  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $x_0 = 0.5$  e (a)  $a = a_0 = 1$ , e (b)  $a = a_r = 1.234$ .

modifica quando algum de seus pontos toca o eixo  $x=0$ . A construção da sequência MSS numa cascata inversa, dá-se da seguinte forma: seja  $P_n$  a sequência do ciclo  $n$  que existe imediatamente antes do ponto de acumulação desta cascata e  $P_k$  a sequência de um ciclo  $k$  qualquer da cascata. A sequência de ciclo  $m$  que resulta da adição do ciclo  $n$  e do ciclo  $k$  é dada por  $P_m = P_k \mu P_n$ , onde  $\mu = R(L)$  se a última bifurcação que antecede esta cascata toca o eixo  $x=0$  por  $0^+$  ( $0^-$ ). Por exemplo, para o caso  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.1, 0)$  em  $a \cong 1.247$ , o atrator de período 4 toca o eixo  $x=0^-$ , fazendo surgir a cascata ...18-14-10. A sequência MSS associada aos ciclos 4 e 10 são dadas por  $P_4 = RLR$  e  $P_{10} = RLRRRLRLR$ , assim as sequências dos ciclos 14 e 18 serão dadas por  $P_{14} = P_{10} LP_4 = RLRRRLRLRLRLR$  e  $P_{18} = P_{14} LP_4 = RLRRRLRLRLRLRLRLR$ . Entre os ciclos 14 e 10 existe a cascata ...38-24-10. Logo as sequências MSS associadas a estes ciclos são  $P_{24} = P_{10} LP_{14}$  e  $P_{38} = P_{24} LP_{14}$ .

## 5.7. EXPOENTE DE LIAPUNOV

O regime caótico é caracterizado por uma grande sensibilidade às condições iniciais (valores de  $x_0$ ). O expoente de Liapunov  $\lambda$  fornece uma medida quantitativa desta dependência ( $\lambda < 0$  e  $\lambda > 0$  correspondem respectivamente a órbitas periódicas e movimento caótico).

Usando a definição dada pela eq. ( 2.2.3.5 ) calculamos o expoente de Liapunov para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ , o qual está mostrado

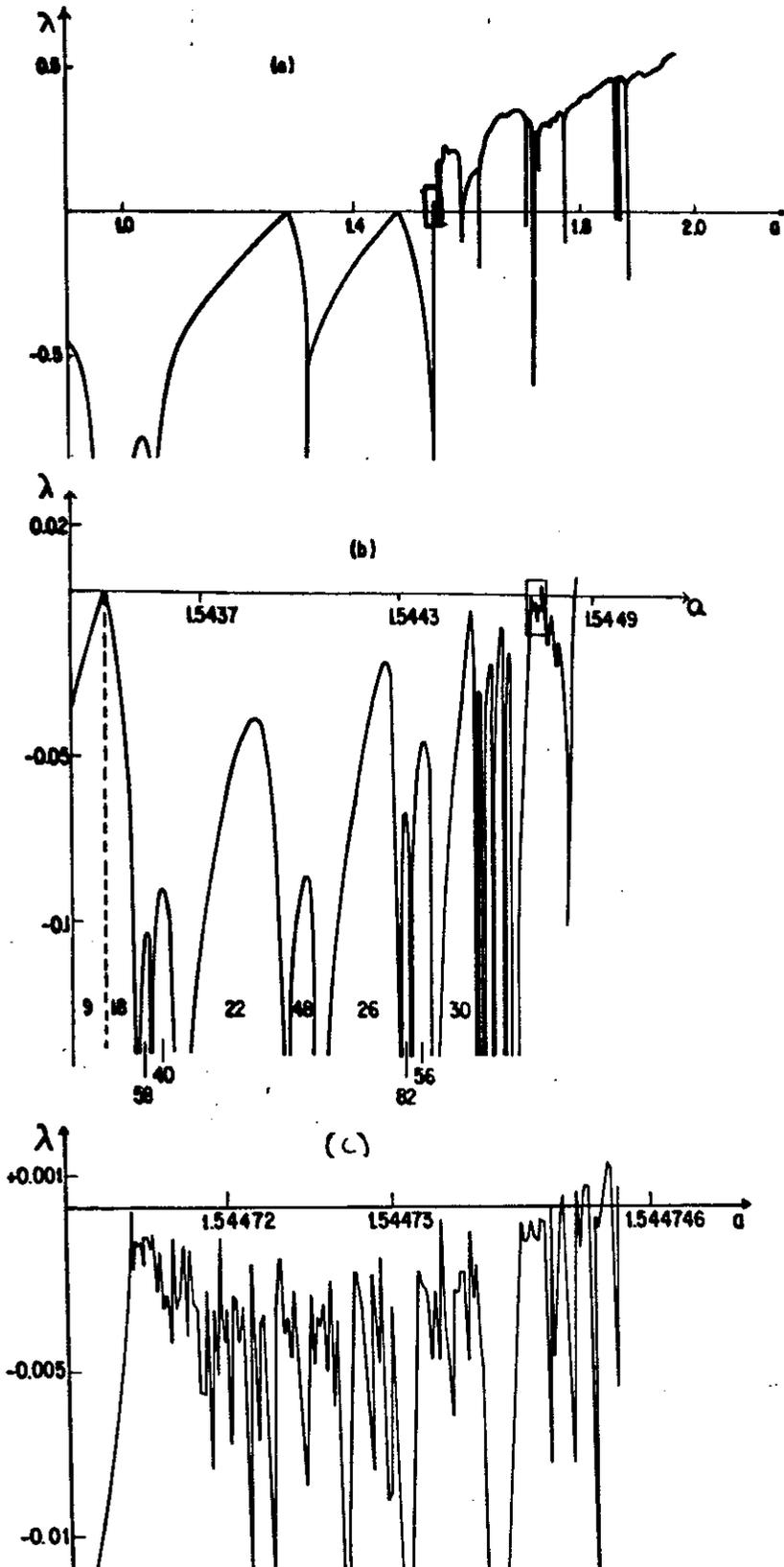


Fig. 5.7.1. Evolução do expoente de Liapunov como função de  $a$  para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $z_1 = z_2 = 2$  e  $x_0 = 0.5$ . Os números nos "dedos" indicam o período do atrator. (c) é uma ampliação do pequeno retângulo em (b), que por sua vez é uma ampliação do retângulo em a.

na fig. 5.7.1. A primeira entrada em caos para este sistema acontece em  $a \cong 1.5447414$ . Na fig. 5.7.1 observamos características peculiares associadas ao expoente de Liapunov para o mapa descontínuo: (i) a estrutura é aproximadamente autossimilar por variação de escala; (ii) os "dedos" correspondendo a períodos grandes (pequenos) são estreitos (largos); para uma dada cascata eles tornam-se mais estreitos quando o período cresce e tendem a valores mais negativos de  $\lambda$ , exibindo (provavelmente) períodos infinitos sem caos; o dedo mais alto e mais largo de uma cascata, corresponde ao menor período desta cascata; se considerarmos os períodos menores de cada cascata, vemos que os picos aproximam-se de  $\lambda=0$  quando o sistema aproxima-se da entrada em caos; (iii) mudanças de período ocorrem para  $\lambda \rightarrow -\infty$ , em contraste com as mudanças de período da rota de bifurcações, as quais ocorrem quando  $\lambda=0$ .

## 5.8. EXPOENTE DE INCERTEZA

Sistemas dinâmicos não lineares típicos, em geral possuem mais de um estado final assintótico possível. Em tais casos, o estado final que o sistema é levado depende do seu estado inicial. Assim uma incerteza na condição inicial do sistema provoca uma incerteza no atrator ao qual ele evolui. O expoente de incerteza [ 52 ] fornece uma medida quantitativa de quão sensitivo é o estado final com respeito a pequenas mudanças nas condições

iniciais.

Para definir o expoente de incerteza, consideremos que os parâmetros externos do sistema dinâmico são mantidos fixos. Suponhamos que dependendo da condição inicial o sistema possui dois estados assintóticos finais possíveis, A ou B. Em outras palavras, o conjunto de pontos iniciais é dividido em duas bacias atratoras. Escolhemos agora um ponto inicial  $x_0$  que leva, digamos, ao atrator A e construímos uma esfera de raio  $\epsilon$  centrada em  $x_0$ . Se dentro desta esfera existem pontos iniciais que levam ao atrator B, dizemos que o ponto inicial  $x_0$  é incerto (para aquele valor de  $\epsilon$ ). Suponhamos que um grande número de condições iniciais são analisadas desta forma e  $f(\epsilon)$  denota a fração dos pontos incertos iniciais para um dado  $\epsilon$ . Se no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  tivermos

$$f(\epsilon) = k \cdot \epsilon^{\alpha_i} \quad (5.8.1)$$

com  $\alpha_i < 1$ , então o sistema apresenta sensibilidade no estado final e  $\alpha_i$  é dito expoente de incerteza. Este expoente caracteriza a estrutura do contorno entre as bacias atratoras; quanto menor for  $\alpha_i$ , mais complicada é o contorno. Neste caso, uma melhora substancial nas condições iniciais provoca um decrescimento relativo muito pequeno na incerteza do estado final. Para linhas de contorno simples  $\alpha_i = 1$ .

A dimensão de capacidade da linha de contorno é dada por

$$d = D - \alpha_i \quad (5.8.2)$$

onde D é a dimensionalidade do espaço de fase. Para mostrar isto

heuristicamente cubramos a linha de contorno com cubos de dimensão  $D$  e lado  $\epsilon$ , sendo  $\epsilon$  a incerteza na condição inicial. Assim, o volume da região incerta do espaço de fase será da ordem do volume total de todos os  $N(\epsilon)$  cubos  $D$ -dimensionais de lado  $\epsilon$  necessários para cobrir a superfície de contorno. Desde que o volume de um destes cubos  $D$ -dimensionais é  $\epsilon^D$ , o volume incerto do espaço de fase é da ordem de  $\epsilon^D N(\epsilon)$ . Como  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d}$ , por definição, então  $\epsilon^D N(\epsilon) \sim \epsilon^{D-d}$ , donde pode-se estimar  $\alpha_1$  como sendo  $\alpha_1 = D-d$ .

Mapas do intervalo  $S$ -unimodais possuem no máximo um atrator finito. Assim, independentemente da condição inicial escolhida o atrator para o qual o sistema evolui depende apenas do valor do parâmetro externo. Para mapas com uma descontinuidade no extremo este comportamento é modificado. Em tais casos, mais de um atrator finito (tipicamente dois atratores) aparecem quando cruzamos de uma banana (veja fig. 5.2.5) para sua vizinha (observamos isto em muitos cruzamentos, provavelmente isto aconteça em todos eles). Estudamos a sensibilidade na condição final, para o caso  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ , em dois valores do parâmetro  $a$ , ou seja,  $a=1.3$  e  $a=1.540344$ . Na fig. 5.8.1, mostramos as bacias atratoras para estes dois casos. As regiões pretas e brancas correspondem respectivamente a ciclos de períodos 8 e 2, para  $a=1.3$ , e 26 e 21, para  $a=1.540344$ . Para calcular o expoente de incerteza consideramos, no intervalo de  $x_0$  correspondendo a atratores finitos (aproximadamente  $[-1, 1]$ ),  $N$  valores para  $x_0$  aleatoriamente escolhidos ( $N=10^4$ ). Então, para um dado  $\epsilon$  ( $\epsilon \leq 10^{-8}$ ) iteramos as condições iniciais  $x_0$ ,  $x_0 + \epsilon$  e  $x_0 - \epsilon$ , até que cheguem aos seus atratores. Denotamos  $N_i$  o número de pontos incertos, isto é, aqueles em que uma ou ambas das condições iniciais perturbadas

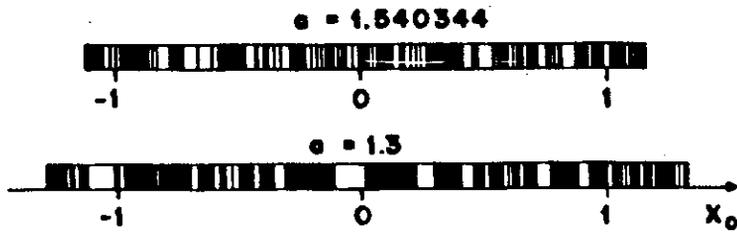


Fig. 5.8.1. Bacias atratoras para valores típicos de  $a$  com  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$  e  $z_1 = z_2 = 2$ .

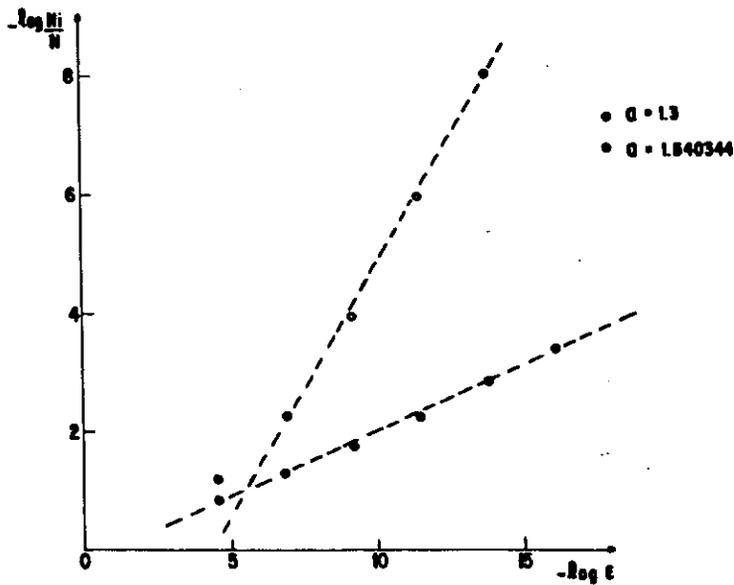


Fig. 5.8.2. Gráficos de  $-\ln(N_i/N)$  vs.  $\varepsilon$  para  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ ,  $a = 1.3$  e  $a = 1.540344$ .

levam a um atrator diferente daquele de  $x_0$ . Na fig. 5.8.2 mostramos  $\ln(N_i/N)$  como função de  $\epsilon$  para os dois valores de  $a$  escolhidos. Os pontos da figura caem aproximadamente sobre uma linha reta, cuja derivada dará o expoente de incerteza. Encontramos  $\alpha_i \cong 0.85$ , ( $\alpha_i \cong 0.22$ ) para  $a = 1.3$  ( $a = 1.540344$ ). Assim a dimensão do conjunto de pontos que separa as duas bacias atratoras (dada por  $d = D - \alpha_i$ ) será  $d=0.15$  ( $d=0.88$ ). De uma forma geral, observamos que o expoente de incerteza varia muito irregularmente com  $a$ .

## 5.9. HISTERESE

Experiências numéricas em mapas com mais de uma bacia atratora podem apresentar o fenômeno de histerese, quando se varia o parâmetro externo. O atrator ao qual o sistema evolui dependerá do valor de  $x_0$  usado nas diversas etapas do experimento. Na fig. 5.9.1 exibimos um ciclo de histerese para  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ . O sistema é preparado inicialmente com as condições  $x_0 = 0$  e  $a=1.3$ , o que o leva ao atrator com período 2. Depois de algumas iterações, o parâmetro de controle é modificado para  $a=1.2$ , com a condição inicial  $x=0.8971$ , e como consequência o ciclo limite agora tem período quatro. Voltando agora o parâmetro externo para  $a=1.3$  e condição inicial  $x=-0.1703$ , vemos que o ciclo limite tem período oito, e não mais dois, como era inicialmente para este valor do parâmetro. Este fenômeno de histerese pode ajudar na

detecção experimental desta nova rota ao caos.

### 5.10. MULTIFRACTALIDADE

O atrator no ponto de acumulação das bifurcações governados pela eq. (5.1.1) é um objeto complicado. A probabilidade de distribuição dos pontos possui leis de escala diferentes em diferentes regiões do atrator, razão pela qual este objeto é chamado de multifractal [ 13 ]. O formalismo usado para estudar os multifractais consiste em cobrir o atrator com caixas, indexadas por  $i$ , de tamanho  $l_i$  e assumir que a densidade de probabilidade se escala com  $p_i \sim l_i^\alpha$ , no limite  $l_i \rightarrow 0$ . A caracterização de um multifractal é feita através da função  $f(\alpha)$ , a qual é a dimensão do conjunto de pontos que possuem o mesmo índice  $\alpha$ . Através de uma transformação de Legendre,  $f(\alpha)$  pode ser relacionada com as dimensões generalizadas  $D_q$  [ 14 ]. Os valores mínimos e máximos de  $\alpha$  coincidem com a  $D_\infty$  e  $D_{-\infty}$ ; o valor máximo de  $f(\alpha)$  coincide com a dimensão de Hausdorff  $D_0$ . Na fig. 5.10.1 apresentamos  $f(\alpha)$  para o mapa descontínuo com  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$ . Sua forma é diferente, mais quadrada, em relação àquela obtida para o mapa contínuo. Os valores aproximados para  $D_0$ ,  $D_\infty$  e  $D_{-\infty}$  são respectivamente 0.95, 0.45 e 5.7. Observamos que para este mapa a relação  $D_\infty / D_{-\infty} = z$  não mais é verificada.

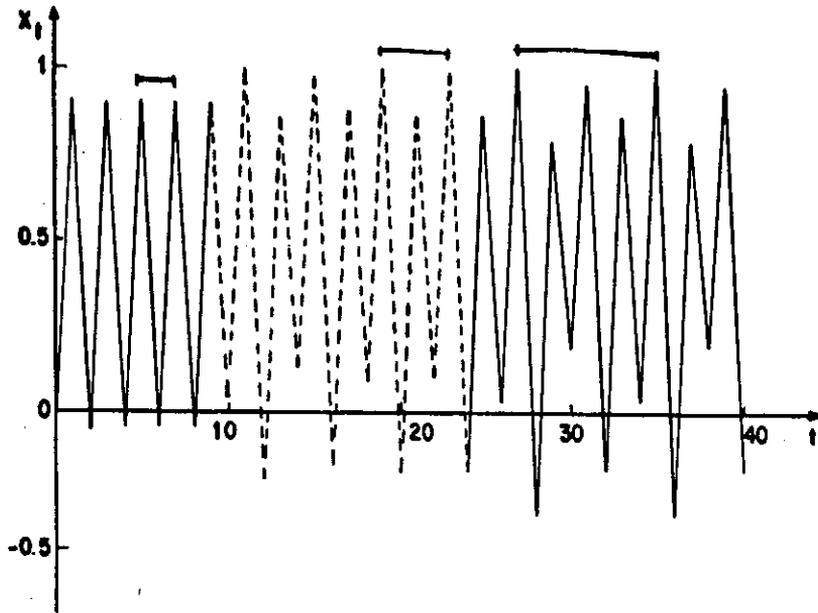


Fig. 5.9.1. Ciclo de histerese para  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$  e  $z_1 = z_2 = 2$ . Os seguimentos de reta indicam o tamanho do ciclo.

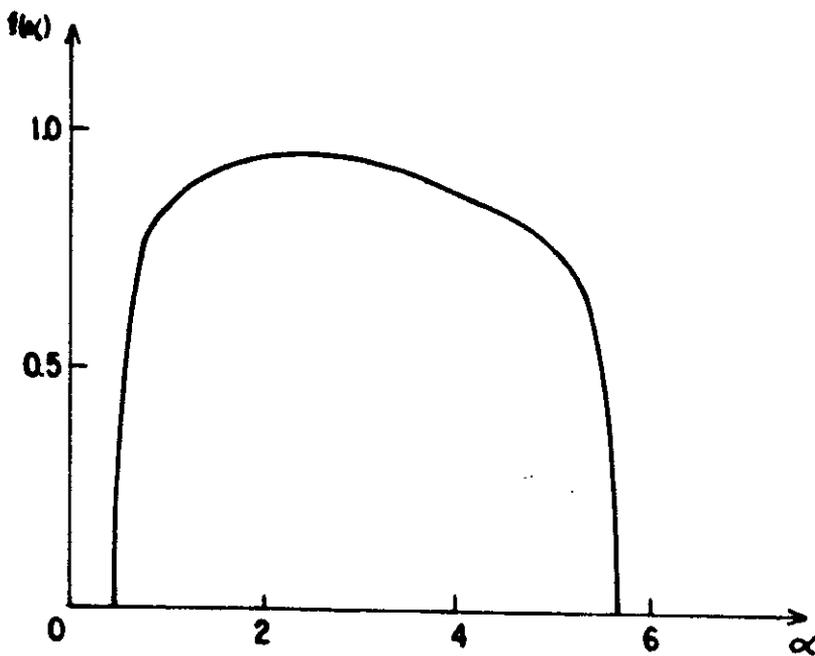


Fig. 5.10.1. Função  $f(\alpha)$  para  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0.1)$  e  $x_0 = 0.5$ .

### 5.11. MAPA DESCONTÍNUO COMO UM CASO LIMITE

Desde que mapas físicos reais provavelmente não exibem uma descontinuidade (totalmente abrupta), iremos considerar nesta seção o seguinte mapa, que também pode ser derivado do modelo de Lorenz [ 51 ].

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv 1 - \epsilon |x|^w \operatorname{sgn}(x) - a |x|^z \quad (5.11.1)$$

com  $w < 1 < z$ . Quando  $w < 1$  este mapa possui uma forma bastante similar ao mapa da eq.(5.1.1), mas sem descontinuidades (ver fig. 5.11.1). No caso  $w=0$ , a parte de  $f(x)$  perto de  $x=0$  é transformada numa descontinuidade, e recobramos o mapa descontínuo (com  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ ). A derivada Schwartziana, definida pela eq. ( 2.2.2 ), neste mapa é positiva em torno de  $x=0$ . Na fig. 5.11.2 mostramos a evolução do atrator em função de  $a$  para um caso típico. Esta figura é "macroscopicamente" similar à fig. 5.2.3. Próximo de  $a=1$  observamos ciclos com períodos  $2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ , que constituem uma reminiscência da cascata  $2 \dots 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ . Quando  $w$  cresce, o mapa torna-se cada vez mais semelhante ao mapa logístico, portanto um "crossover" para a rota de bifurcações de períodos é esperado. Na fig. (5.11.3) mostramos este "crossover" estudando o expoente de Liapunov do sistema numa determinada região de  $a$ . Inicialmente vemos que os extremos correspondentes às mudanças de períodos  $2 \rightarrow 6$  e  $6 \rightarrow 4$  tornam-se caóticos, juntam-se num único extremo e depois torna-se caótico novamente.

Para  $\epsilon > 0$ , encontramos em todos os casos estudados, uma

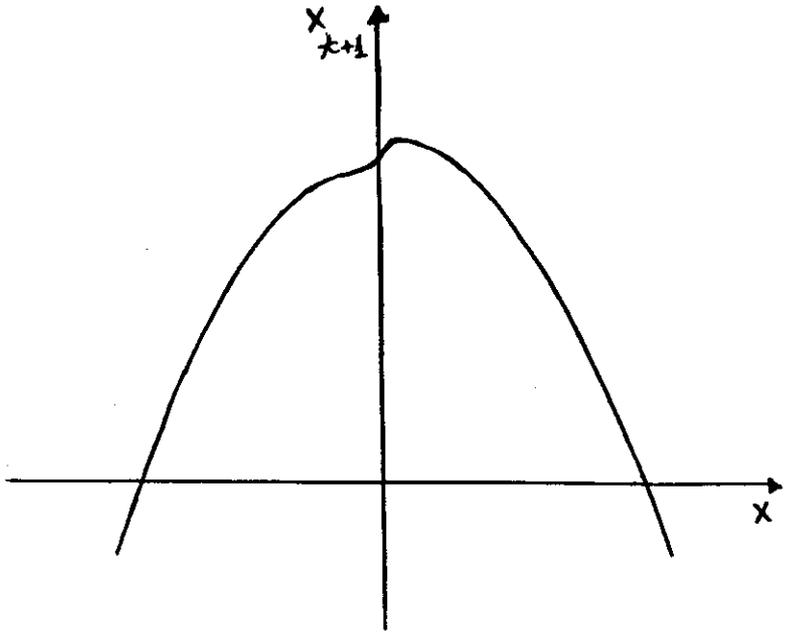


Fig. 5.11.1. Gráfico esquemático de  $f(x)$  dada pela eq. (5.11.1) para  $w \ll 1$ .

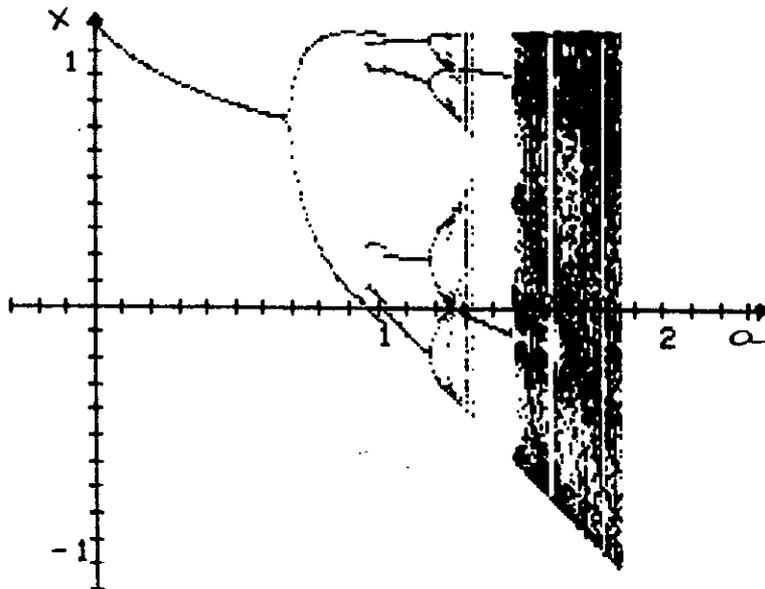


Fig. 5.11.2. Evolução do atrator como função de  $a$  para eq.(5.11.1) com  $\epsilon=0.1$ ,  $w=0.1$ ,  $z=2$  e  $x_0 = 0.5$

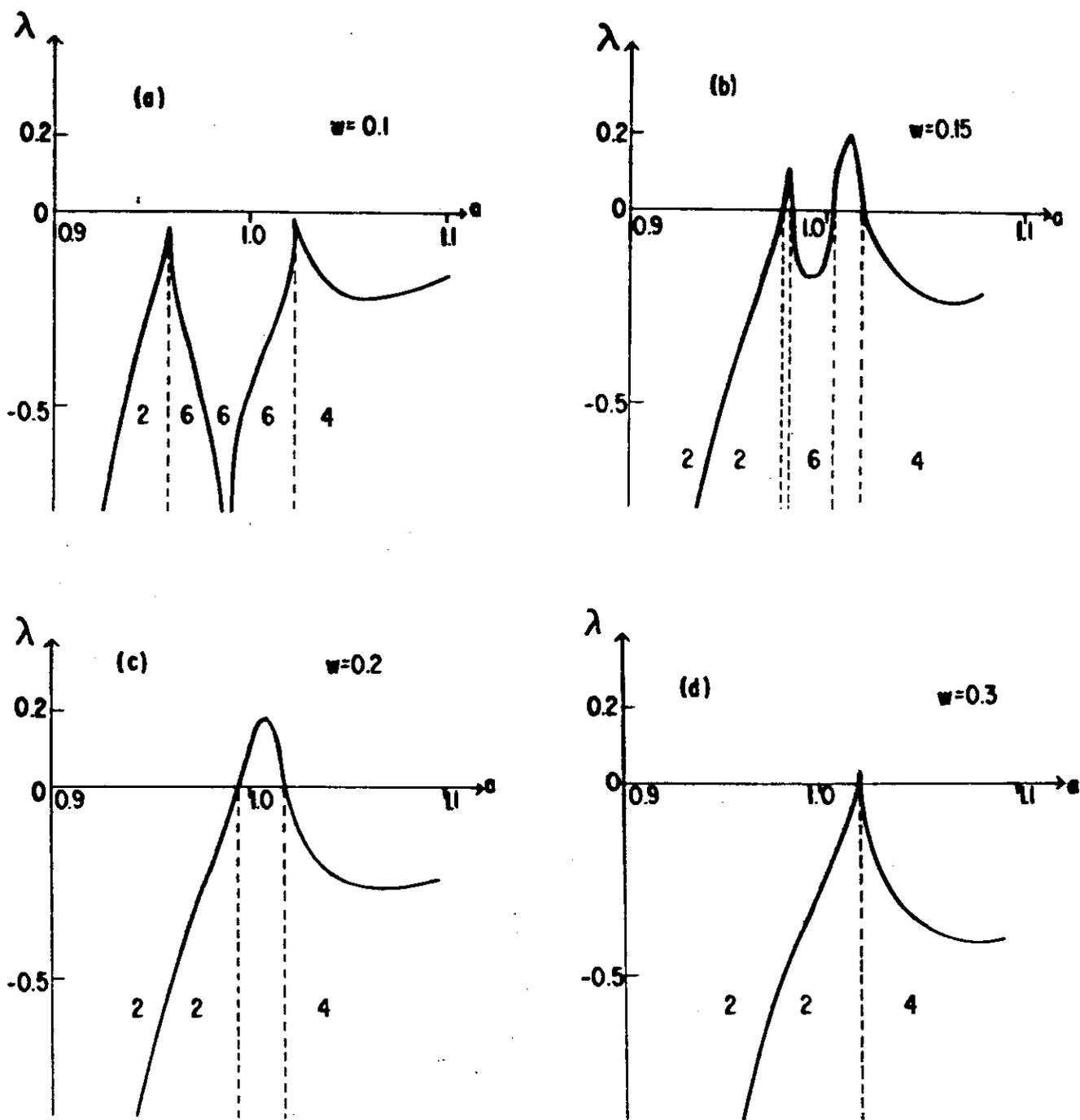


Fig. 5.11.3. Expoente de Liapunov como função de  $a$  para  $\epsilon=0.1$ ,  $z=2$ ,  $x_0=0.5$  e  $w=0.1, 0.15, 0.2$  e  $0.3$ . Os números indicam o período do atrator.

entrada repentina em caos quando o parâmetro  $a$  é variado. Por outro lado, para  $\epsilon < 0$  encontramos antes da entrada em caos uma sequência de bifurcações de períodos com uma razão de convergência do conjunto  $\langle \delta_k \rangle$  sendo aproximadamente a mesma do mapa logístico. Portanto, observamos indicações de uma rota para o caos via bifurcações num mapa que possui derivada Schwartziana positiva num certo intervalo de  $x$  em torno de  $x=0$ . Esta é uma situação não usual, desde que todos os mapas estudados até o presente que apresentam rota via bifurcação possuem derivada Schwartziana negativa em todo o intervalo de definição da variável.

## 5.12. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos as propriedades mais relevantes relacionadas com uma nova rota ao caos, associada a mapas com uma descontinuidade no extremo. Mapas deste tipo surgem, por exemplo, em modelos teóricos de sistemas cujo fluxo passa próximo a um ponto singular. Verificamos que em mapas descontínuos governados pela eq.(5.1.1) a rota ao caos é completamente diferente das demais conhecidas. Neste caso, a rota é através de sequências de cascatas inversas em progressão aritmética; a razão de crescimento dos períodos em uma cascata é o período do atrator que existe imediatamente antes do ponto de acumulação desta cascata. As outras características mais relevantes são: não existe caos nos pontos de acumulação das cascatas, o caos aparecendo apenas no

ponto de acumulação dos pontos de acumulação; estruturas autosimilares por variação de escala são observadas no diagrama de fases e no expoente de Liapunov; para determinados valores do parâmetro  $a$  (no estado não caótico) o atrator para o qual o sistema é levado depende da condição inicial  $x_0$ , fazendo com que o sistema apresente o fenômeno de histerese. Além destas propriedades, mostramos também como é o "crossover" para o mapa contínuo, e conseqüentemente, para a rota de bifurcações.

## CAPÍTULO 6

### INDICES DE ESCALA E MULTIFRACTALIDADE ASSOCIADA

#### A M-FURCAÇÕES NO MAPA $x' = 1 - a|x|^z$

##### 6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudamos numericamente o comportamento universal e as propriedades de escala associadas com as M-furcações no mapa

$$x_{t+1} = f(x_t) \equiv 1 - a|x_t|^z, \quad (z > 1) \quad (6.1.1)$$

o qual mapeia o intervalo  $x \in [-1,1]$  nele mesmo. Este mapa determina o comportamento dinâmico de qualquer mapa unidimensional que tenha apenas um máximo e cujo termo dominante seja de ordem  $z$ . O caso  $z=2$  é muito comum na natureza [18,33], mas outros valores de  $z$  são possíveis de serem encontrados. Por exemplo, Kuramoto et al. [53] encontraram  $z \approx 1.2$  num modelo matemático que descreve certos processos de turbulência química.

Estudos recentes no mapa (6.1.1) foram feitos usando-se

métodos analíticos [54,58-60], simulação numérica [55,57,59,61,64] e grupo de renormalização [56]. Verifica-se que o comportamento qualitativo do mapa não muda com respeito à sequência de ciclos quando  $z$  varia ( $1 < z < \infty$ ), já que este mapa é  $S$ -unimodal [9]. O mapa 6.1.1 possui atratores finitos com  $x \in [-1,1]$  apenas para  $0 \leq a \leq 2$ . Quando  $a$  aumenta (partindo de  $a=0$ ) observa-se que o atrator possui uma sequência de bifurcações com período  $2^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). O período  $2^k$  bifurca em  $a_k(z)$  e dá origem ao período  $2^{k+1}$ . A sequência  $\{a_k\}$  converge e acumula-se ( $k \rightarrow \infty$ ) em  $a_\infty(z)$ , onde o sistema entra em caos. Na fig. 6.1.1 mostramos o diagrama de bifurcações do mapa 6.1.1 para  $z=1, 2, 4$  e  $10$ . Na região caótica existe um número infinito de janelas periódicas, cuja ordem de aparecimento não depende de  $z$  [9]. Escolhidas numa ordem particular, estas janelas formam sequências de  $M$ -furcações ( $M \geq 2$ ), que são generalizações das bifurcações ( $M=2$ ). As  $M$ -furcações possuem uma sequência de períodos dada por  $M^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) e as janelas destes períodos não são adjacentes no eixo do parâmetro  $a$ . Na fig. 6.1.2 mostramos as janelas com períodos 3 e 9 pertencentes à série de trifurcações  $3^k$  ( $k = 1, 2$ ). Apesar das janelas tornarem-se cada vez mais estreitas à medida que  $M$  cresce, já foi possível observar experimentalmente a sequência de trifurcações [18,23].

Todas as sequências de  $M$ -furcações apresentam fatores de escala que convergem e definem classes de universalidade determinadas pelo expoente  $z$ , no sentido em que estes fatores não são alterados se termos de ordem superior forem inseridos na eq. 6.1.1. Na direção  $a$  existe o fator de escala  $\delta$  e na direção  $x$

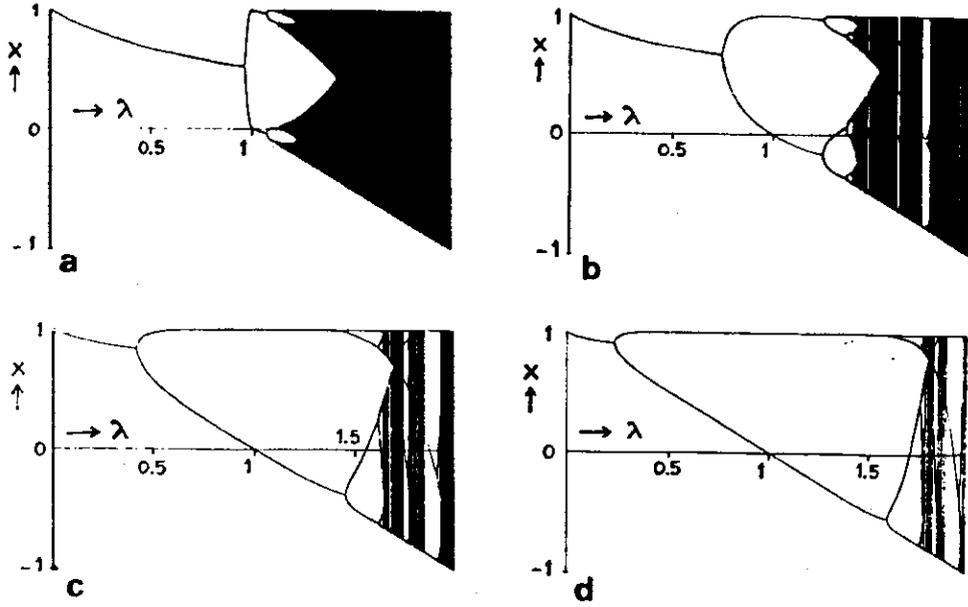


Fig. 6.1.1. Diagrama de bifurcações para (a)  $z=1.1$  (b)  $z=2$  (c)  $z=5$  e (d)  $z=10$ .

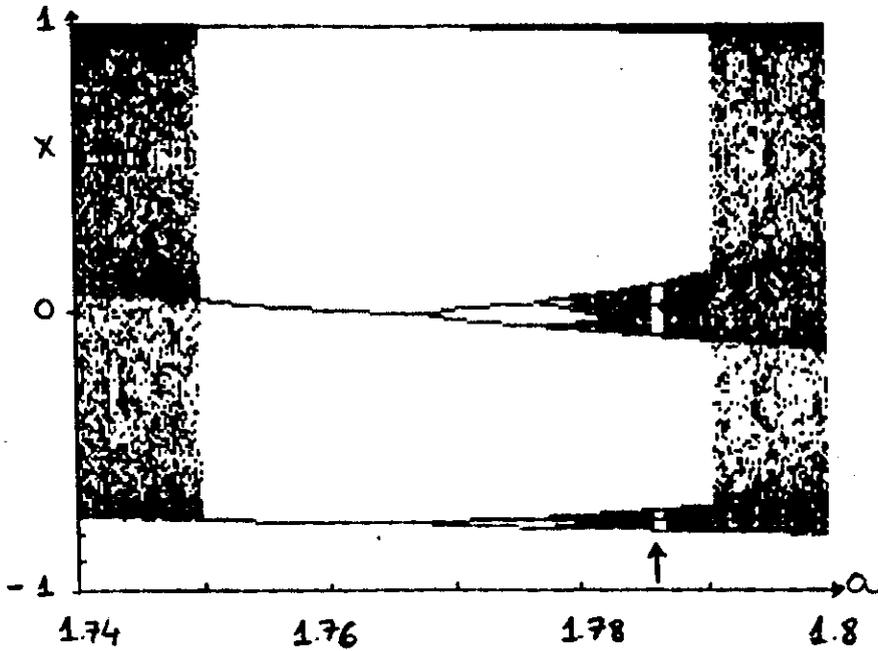


Fig. 6.1.2. Janelas com períodos 3 e 9 (indicada pelas seta) no mapa com  $z=2$ .

existe todo um conjunto de fatores de escala (os principais são  $\alpha$  e  $\alpha^2$ ) associadas ao atrator no ponto de acumulação das  $M$ -furcações, que juntos formam a função  $\sigma$ . A existência de um conjunto de índices de escala caracteriza a presença de um multifractal, o qual pode ser também estudado através da função  $f(\alpha)$ .

O estudo de  $\alpha(z)$ ,  $\delta(z)$ ,  $\sigma(z)$  e  $f(\alpha, z)$  para as bifurcações no mapa 6.1.1 foi feito por van der Weele et al. [59]. Neste capítulo estudaremos estas mesmas funções para o caso das trifurcações ( $M=3$ ), das tetrafurcações ( $M=4$ ), e das pentafurcações ( $M=5$ ). O capítulo está organizado da seguinte maneira: na segunda seção introduziremos a sequência MSS (ver seção 2.2.1) para as  $M$ -furcações e o método usado para determinar os pontos de superestabilidade dos ciclos; a terceira seção é dedicada ao estudo do fator  $\delta$ , a quarta ao fator  $\alpha$ , a quinta à função  $\sigma$  e a sexta à função  $f(\alpha)$ . A última seção é dedicada às conclusões.

## 6.2. CÁLCULO DOS VALORES DO PARAMETRO PARA OS CICLOS DE SUPERESTABILIDADE

Cada órbita periódica no mapa (6.1.1), quer esteja ou não na zona caótica, possui um valor do parâmetro no qual a órbita inclui o ponto crítico (máximo) do mapa. Neste valor do parâmetro o ciclo é chamado de superestável. Seguindo as imagens do máximo é

possível formar uma palavra de R's e L's se as iterações subsequentes na órbita situam-se no lado direito (R) ou esquerdo (L) do máximo. Esta palavra é chamada sequência MSS [ 9 ] do ciclo. No caso das trifurcações e tetrafurcações os ciclos básicos 3 e 4 possuem sequências RL e RLL (ou RL<sup>2</sup>). Existem três tipos de sequências associadas ao ciclo básico 5 das pentafurcações, quais sejam, RLR<sup>2</sup>, RL<sup>2</sup>R e RL<sup>3</sup>. As sequências relacionadas com os períodos de ordem superior das M-furcações seguem uma regra introduzida por Derrida et al. [ 12 ]. A regra pode ser enunciada da seguinte forma: sejam P e Q duas sequências existentes correspondendo a períodos k e l; tem-se que Q\*P é uma sequência também existente de período kl. Mais precisamente, se  $P = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{l-1}$  ( $\sigma_i = R, L$ ), então

$$Q * P = Q \tau_1 Q \tau_2 \dots Q \tau_{l-1} Q \quad (6.2.1)$$

onde  $\tau_i \begin{cases} = \sigma_i & \text{se } Q \text{ tem um número par de caracteres } R \\ \neq \sigma_i & \text{na situação oposta} \end{cases}$

Por exemplo, a sequência de período 9 resultante da trifurcação da sequência RL é denotada por  $(RL)^{*2} = RLLRLRRL$ . Qualquer ciclo de um M-furcação segue a regra de formação anunciada acima.

A procura direta do valor do parâmetro onde o ciclo é superestável para o mapa (6.1.1) é muito difícil, exceto para o caso das primeiras bifurcações. No entanto, um método introduzido por Hao Bai-Lin [57,62] permite calcular o valor do parâmetro onde o ciclo é superestável para qualquer órbita com uma determinada

seqüência. Vamos explicar este método usando a seqüência RLRR, correspondendo a um ciclo de período 5. No ciclo superestável as iterações do mapa inicia de  $x_0=0$  e vai até  $x=0$ , i.e.,

$$f_{R \dots R L R R}(f(a,0))=0 \quad (6.2.2)$$

onde o subíndice R ou L indica qual dos ramos direito (R) ou esquerdo (L) foi usado em cada iteração. Desde que a inversa do mapa possui dois valores, podemos definir

$$R(x) = f_R^{-1}(a,x) = +[(1-x)/a]^{1/2} \quad (6.2.3)$$

$$L(x) = f_L^{-1}(a,x) = -[(1-x)/a]^{1/2} \quad (6.2.4)$$

dependendo qual metade do mapa foi usada. Se tomarmos inversas sucessivas da eq. (6.2.2) obteremos para a palavra RLRR a relação funcional

$$R(L(R(R(0)))) = 1 \quad (6.2.4)$$

que é uma equação para a. Se multiplicarmos esta equação por  $\beta=1/a$ , obteremos

$$\beta[\beta(1+[\beta(1-[\beta(1-\beta^{1/2})]^{1/2})]^{1/2})]^{1/2} = \beta \quad (6.2.5)$$

Esta equação pode ser resolvida por iteração como sugeriu Kaplan [63], i.e., reescrevendo-a na seguinte forma

$$\beta_{n+1} = \beta_n [\beta_n (1 + [\beta_n (1 - [\beta_n (1 - \beta_n^{1/2})]^{1/2})]^{1/2})]^{1/2} \quad (6.2.6)$$

e em seguida iterando-a para um  $\beta_0$  conveniente. Este método é muito simples e pode ser usado para qualquer tipo de função cuja inversa possa ser calculada numa forma fechada e para qualquer tipo de sequência MSS. Observamos que a convergência da eq. (8.2.8) torna-se cada vez mais lenta nos limites  $z \rightarrow 1$  e  $z \rightarrow \infty$ .

Na tabela 8.2.1 mostramos os valores dos pontos de acumulação  $x_\infty$  do conjunto  $\{x_k\}$  onde o ciclo é superestável, para as trifurcações  $[(RL)^{*n}]$ , tetrafurcações  $[(RL^2)^{*n}]$  e pentafurcações  $[(RLR^2)^{*n}]$ ,  $[(RL^2R)^{*n}]$  e  $[(RL^3)^{*n}]$  para  $z=1.5, 2, 3, 4, 6, 8$  e  $10$ .

### 8.3. O FATOR DE ESCALA $\delta$

Em cada sequência de M-furcações os valores de  $x_k$  onde os ciclos são superestáveis convergem geometricamente com a razão

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_k} \right] = \text{cte} \quad (8.3.1)$$

Na tabela 8.2.1 mostramos os valores encontrados para  $\delta$  no caso de  $M = 3, 4$  e  $5$  e  $z = 1.5, 2, 3, 4, 6, 8$  e  $10$ . Na fig. 8.3.1(a) mostramos  $\delta(z)$  vs.  $z$  para a sequência das bifurcações e na fig. 8.3.1(b) graficamos os resultados da tabela 8.3.1. Verificamos que o comportamento de  $\delta$  para  $M=2$  é bastante diferente

em relação ao das demais sequências. Para  $M=2$ ,  $\delta(z)$  é uma função monotonicamente crescente de  $z$ , e no limite  $z \rightarrow 1$  tem-se  $\delta(1)=2$  [12]. Existe uma controvérsia quanto ao comportamento de  $\delta$  no limite  $z \rightarrow \infty$ . Eckmann et al [ 58 ] e van der Weele et al. [59] argumentam que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \delta(z) \leq 30$ , enquanto que Bhattachargee et al. [60] dizem que  $\delta(z)$  diverge neste limite (resultado que coincide com o obtido por Hauser et al.[56] usando grupo de renormalização). Para  $M > 2$ , vemos que  $\delta(z)$  diverge no limite  $z \rightarrow 1$  e possui um mínimo próximo de  $z=2$ ; não existem conjecturas quanto ao comportamento de  $\delta(z)$  no limite  $z \rightarrow \infty$ . À medida que  $z$  aumenta as dificuldades numéricas para se encontrar os valores onde o parâmetro é superestável aumentam, como também a convergência de  $\delta$  torna-se cada vez mais lenta.

#### 6.4. O FATOR DE ESCALA $\alpha$

O atrator no ponto de acumulação de uma sequência de  $M$ -furcações possui um conjunto infinito de índices de escala. Isto caracteriza a presença de um multifractal. Os índices de escala principais são  $\alpha$  e  $\alpha^{-2}$ , que são relacionados com as distâncias entre pontos situados perto de  $x=0$  e  $x=1$  na árvore de  $M$ -furcações, respectivamente. Para determinar estes fatores de escala consideremos o ciclo superestável  $\{x_0, x_1, \dots, x_{M^k-1}\}$ , com  $x_0=0$  e período  $M^k$ . A distância entre os pontos  $x_m$  e  $x_{m+M^{k-1}}$  é dada por

$$d_{k,m}(x) = \left| x_{m+M}^{k-1} - x_m \right|$$

$$= \left| f_{g_k}^{(m+M^{k-1})}(0) - f_{g_k}^{(m)}(0) \right|, \quad (m=1,2,\dots,M^{k-1}) \quad (6.4.1)$$

Para  $m > M^{k-1}$  consideramos  $d_{k,nM^{k-1}+p} = d_{k,p}$ , com  $n, p = 1, 2, \dots$

O fator de escala  $\alpha$  é definido pela seguinte expressão

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k,M^{k-1}}}{d_{k+1,M^k}} \quad (6.4.2)$$

o qual satisfaz a equação

$$\alpha f^{*M}(x/\alpha) = f^*(x) \quad (6.4.3)$$

onde  $f^*(x)$  é a função invariante [54].

Na tabela 6.2.1 mostramos os valores de  $\alpha$  para  $z = 1.5, 2, 3, 4, 6, 8, 10$  e  $M = 3, 4$  e  $5$ . Na fig. 6.4.1 graficamos  $\alpha(z)$  versus  $z$  para as bifurcações (a) e para  $M \geq 2$  (b). Verificamos que o comportamento qualitativo de  $\alpha(z)$  é o mesmo para todas as sequências, ou seja, diverge quando  $z \rightarrow 1$  e é monotonicamente decrescente, convergindo para 1 no caso de  $M=2$ .

O fator de escala  $\alpha^z$ , relacionado com a extremidade superior da árvore de  $M$ -furcações, está mostrado na fig. 6.4.2. Observamos um comportamento qualitativo de  $\alpha^z$  muito semelhante ao de  $\delta$ : ambos possuem um mínimo perto de  $z=2$ , diverge em  $z \rightarrow 1$  e, no limite  $z \rightarrow \infty$ , a relação  $\delta \sim \alpha^z$  parece ser verificada (para  $M=2$  isto é verdade [59]). A questão se  $\delta$  diverge ou não em  $z \rightarrow \infty$ , transforma-se numa questão similar para  $\alpha^z$ .

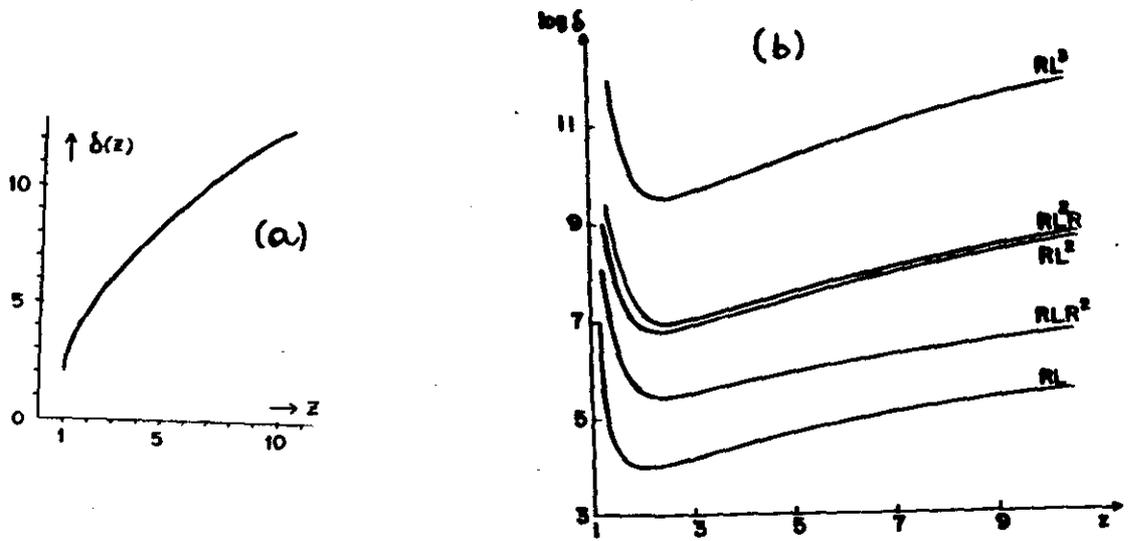


Fig. 6.3.1. O fator de escala  $\delta(z)$  como função de  $z$  para (a)  $M=2$  (ref. 59) e (b)  $M=3, 4$  e  $5$ .

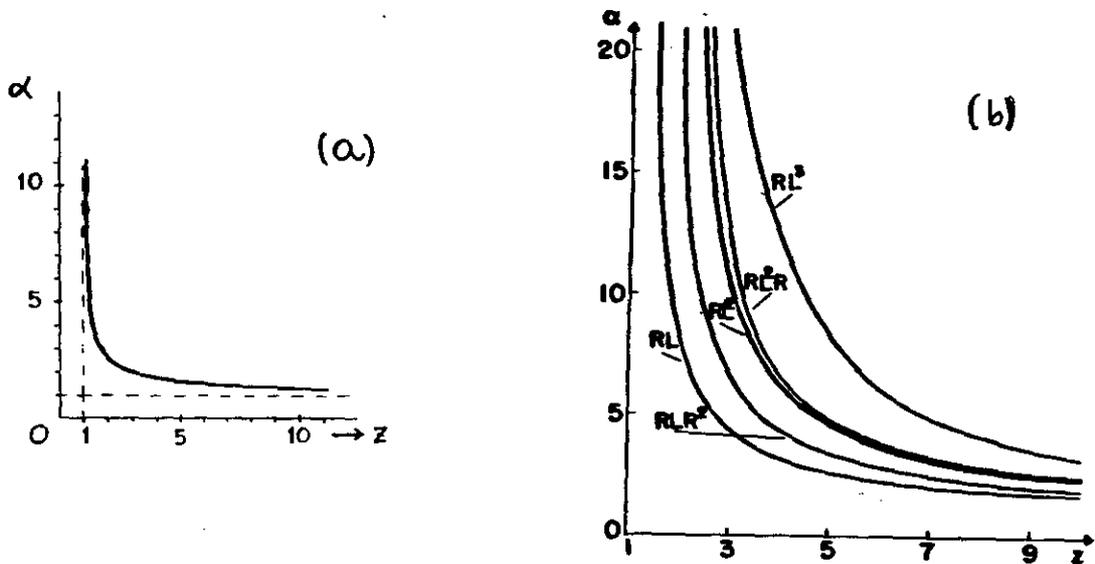


Fig. 6.4.1. O fator de escala  $\alpha(z)$  função de  $z$  para (a)  $M=2$  (ref. 59) e (b)  $M=3, 4$  e  $5$ .

$z$		$(RL)^{*n}$	$(RL^2)^{*n}$	$(RLR^2)^{*n}$	$(RL^2R)^{*n}$	$(RL^3)^{*n}$
1.5	$\tilde{a}_\infty$	1.713540707	1.908140938	1.581073957	1.810146096	1.970391709
	$\delta$	$7.311 \times 10^1$	$2.719 \times 10^3$	$6.442 \times 10^2$	$4.984 \times 10^3$	$8.691 \times 10^4$
	$\alpha$	$3.010 \times 10^1$	$3.234 \times 10^2$	$1.292 \times 10^2$	$5.143 \times 10^2$	$3.174 \times 10^3$
2	$\tilde{a}_\infty$	1.786440255	1.942704354	1.631926654	1.862224022	1.985539530
	$\delta$	$5.524 \times 10^1$	$9.816 \times 10^2$	$2.555 \times 10^2$	$1.287 \times 10^3$	$1.693 \times 10^4$
	$\alpha$	9.277	$3.882 \times 10^1$	$2.013 \times 10^1$	$4.580 \times 10^1$	$1.600 \times 10^2$
3	$\tilde{a}_\infty$	1.867865948	1.973452851	1.700204726	1.918298028	1.995250019
	$\delta$	$6.681 \times 10^1$	$9.665 \times 10^2$	$2.404 \times 10^2$	$1.106 \times 10^3$	$1.486 \times 10^4$
	$\alpha$	4.364	$1.063 \times 10^1$	6.720	$1.125 \times 10^1$	$2.645 \times 10^1$
4	$\tilde{a}_\infty$	1.909335470	1.985504660	1.743351015	1.945858588	1.997974021
	$\delta$	$8.578 \times 10^1$	$1.275 \times 10^3$	$2.919 \times 10^2$	$1.418 \times 10^3$	$2.099 \times 10^4$
	$\alpha$	3.152	6.193	4.294	6.398	$1.248 \times 10^1$
6	$\tilde{a}_\infty$	1.948866269	1.994205417	1.795920044	1.970972615	1.999432441
	$\delta$	$1.301 \times 10^2$	$2.22 \times 10^3$	$4.317 \times 10^2$	$2.433 \times 10^3$	$4.32 \times 10^4$
	$\alpha$	2.281	3.659	2.790	3.727	6.007
8	$\tilde{a}_\infty$	1.966776434	1.997084404	1.827674871	1.981779236	1.999779411
	$\delta$	$1.789 \times 10^2$	$3.49 \times 10^3$	$5.89 \times 10^2$	$3.79 \times 10^3$	$7.87 \times 10^4$
	$\alpha$	1.925	2.791	2.237	2.826	4.122
10	$\tilde{a}_\infty$	1.976500608	1.998317004	1.849408804	1.987431027	1.999896134
	$\delta$	$2.296 \times 10^2$	$5.05 \times 10^3$	$7.53 \times 10^2$	$5.42 \times 10^3$	$1.28 \times 10^5$
	$\alpha$	1.729	2.355	1.949	2.375	3.26

Tabela 6.2.1. Valores dos pontos de acumulação  $\tilde{a}_\infty$  dos ciclos superestáveis, dos fatores de escala  $\delta$  e  $\alpha$  para  $M = 3, 4$  e  $5$  e  $z = 1.5, 2, 3, 4, 6, 8$  e  $10$ .

### 6.5. A FUNÇÃO $\sigma$

A função  $\sigma$  fornece os índices de escala de toda a árvore de  $M$ -furcações. Os inversos de  $\alpha$  e  $\alpha^z$  são o maior e o menor valor de  $\sigma$ , respectivamente. Para calcular  $\sigma$ , consideremos as distâncias definidas pela eq. (6.4.1) no ciclo de período  $M^k$ . A função  $\sigma$  é definida por

$$\sigma(t) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k,q}}{d_{k+1,q}}, \quad t = q/M^{k+1} \quad (6.5.1)$$

onde  $q = 1, 2, \dots, M^k$ . Verifica-se que  $\sigma(1/M) = 1/\alpha$  e  $\sigma(0^+) = 1/\alpha^z$  (veja ref. 54). A função  $\sigma$  calculada para valores maiores de  $p$  não fornece outras informações, desde que  $d_{k+1,q+M^k} = d_{k+1,q}$  e portanto  $\sigma(t+1/M) = \sigma(t)$ . Na fig. 6.5.1 mostramos  $\sigma(t, z)$  para  $M=2$  com  $z=2$  e  $10$ , e para  $M=3$  com  $z=1.5, 2$  e  $10$ . Em cada valor racional de  $t$  ( $0 < t < 1/M$ ) existe uma descontinuidade em  $\sigma$ , mas observamos que as descontinuidades decrescem rapidamente quando a expansão binária do racional cresce. Numa aproximação grosseira, verificamos que existem  $M$  "plateaux", os quais são divididos em "subplateaux". Observamos que as descontinuidades dos "subplateaux" tornam-se cada vez mais pronunciadas quando  $z$  cresce; elas podem ser calculadas usando-se métodos aproximativos (ver ref. 54 para o caso  $M=2$ ).

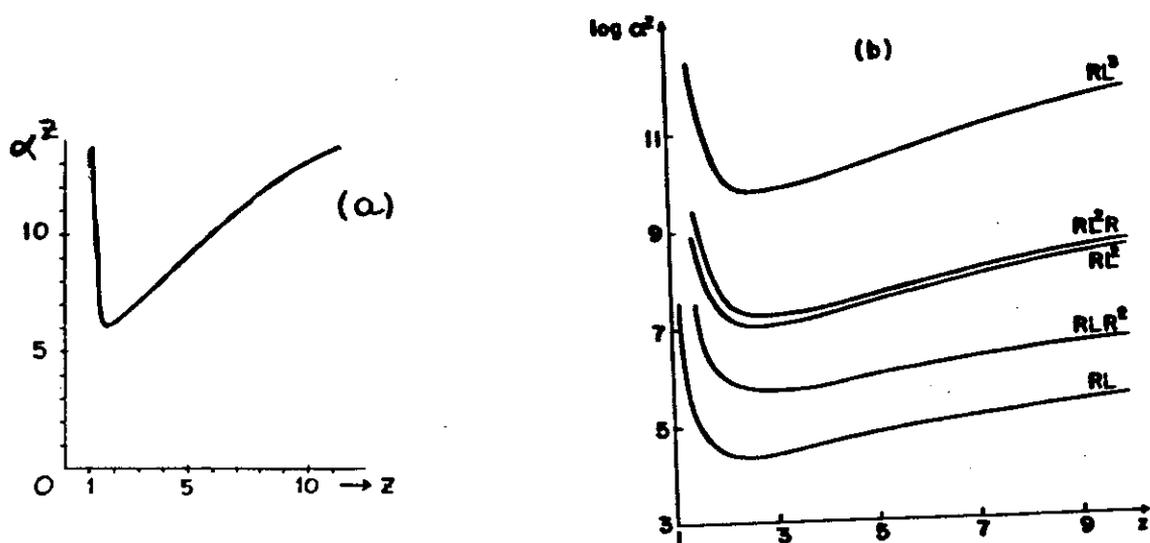


Fig. 6.4.2. O fator  $\alpha^z$  em função de  $z$  para (a)  $M=2$  (ref. 59) e (b)  $M=3, 4$  e  $5$ .

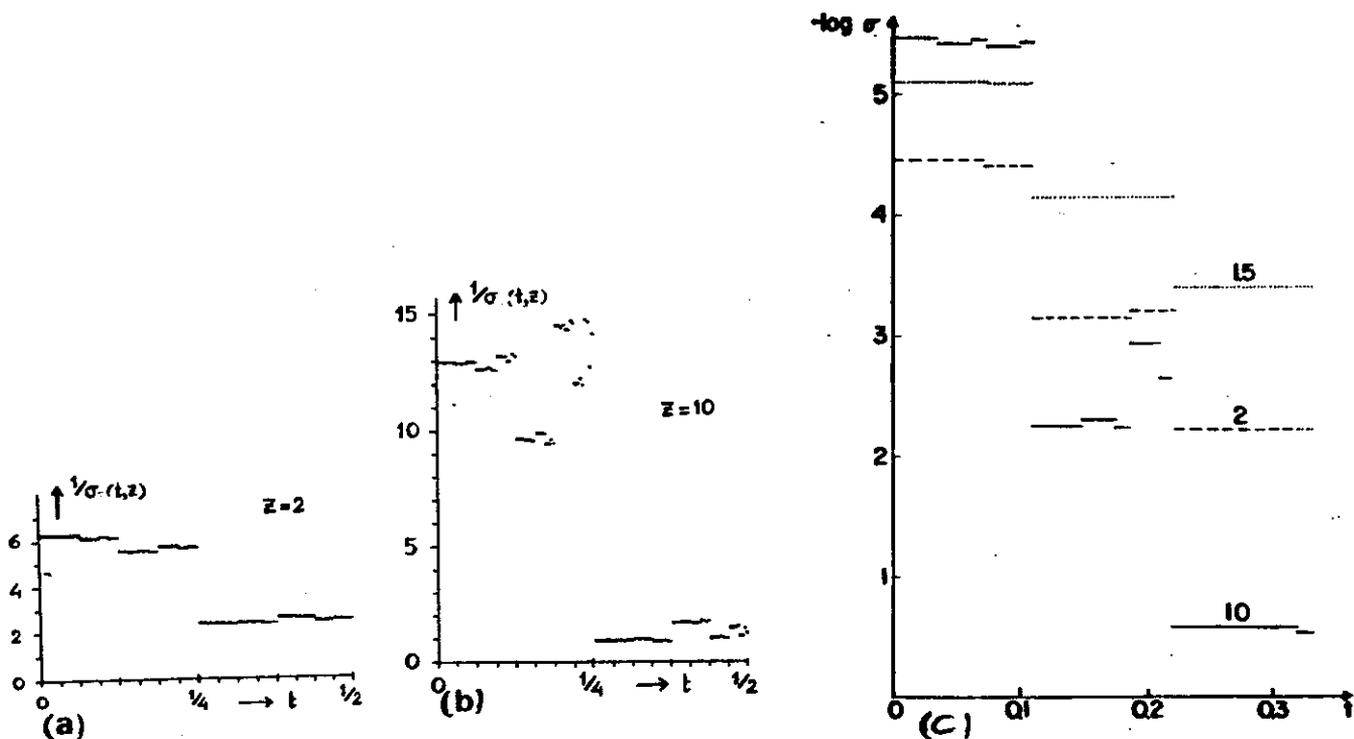


Fig. 6.5.1. A função  $\sigma(t, z)$  para  $M=2$  com (a)  $z=2$ , (b)  $z=10$  (ref. 59) e (c)  $M=3$  com  $z=1.5, 2$  e  $10$ .

## 6.6 A FUNÇÃO $f(\alpha)$

A função  $f(\alpha)$  é outra forma de caracterizar o conjunto multifractal na direção  $x$ . Ela dá a dimensão global do conjunto de distâncias  $d_{k,m}(z)$ , no ciclo  $M^k$  ( $k \rightarrow \infty$ ) que está associada com o índice de escala  $\alpha$ . A função  $f(\alpha)$  é mais conveniente que a função  $\sigma$ , tanto do ponto de vista experimental quanto teórico, desde que  $f(\alpha)$ , para o tipo de atrator que estudamos, é uma função suave.

Como vimos na seção ( 2.2.2 ) o formalismo introduzido por Halsey et al. [ 13 ] para a caracterização de um conjunto multifractal através da função  $f(\alpha)$ , consiste em cobrir o atrator com caixas de tamanho  $l_i$  e densidade de probabilidade  $p_i$ , assumindo que  $p_i \sim l_i^\alpha$ , quando  $l_i \rightarrow 0$ . O próximo passo é formar a função de partição

$$\Gamma(q, \tau) = \sum_i (p_i^q / l_i^\tau) \quad (6.6.1)$$

e normalizar  $\Gamma(q, \tau) = 1$ . Desta forma obtém-se a função  $\tau(q)$ , que através da transformação de Legendre  $\alpha = d\tau/dq$  e  $f(\alpha) = q\alpha - \tau$ , fornece  $f(\alpha)$ . Os valores mínimo e máximo de  $\alpha$  são as dimensões generalizadas  $D_\infty$  e  $D_{-\infty}$ , respectivamente [ 14 ]. O valor máximo de  $\alpha$  coincide com a dimensão de Hausdorff. Para calcular  $f(\alpha)$  para o atrator no ponto de acumulação das  $M$ -furcações tomaremos a probabilidade  $p_i$  na eq. ( 6.6.1 ) como sendo fixa e igual a  $p_i \equiv p = 1/M^{k-1}$ . Portanto a função de partição torna-se

$$\Gamma_k = \left( \frac{1}{M^{k-1}} \right)^q \sum_{p=1}^{M^{k-1}} |d_{k,p}|^{-\tau} \quad (6.6.2)$$

onde  $d_{k,p}$  é dada pela eq. (6.4.1). Usando-se os procedimentos descritos na seção (2.2.2), obtem-se de 6.6.2 uma função  $f_k(\alpha)$  que converge para  $k$  suficientemente grande.

Os valores mínimos e máximos do índice  $\alpha$  que caracterizam respectivamente as regiões mais e menos concentrada do atrator são dadas por (ver ref. 13)

$$\alpha_{\min} = \frac{\ln M}{\ln \alpha^z} \quad (6.6.3)$$

$$\alpha_{\max} = \frac{\ln M}{\ln \alpha} \quad (6.6.3')$$

Consequentemente, para qualquer sequência tem-se  $\alpha_{\max} = z \alpha_{\min}$ , que é uma relação muito útil para se determinar a ordem do máximo em experimentos físicos.

Na fig. 6.6.1 mostramos  $f(\alpha)$  para  $M=2$  com  $z=1.01, 1.1, 2$  e  $10$ , e para as sequências  $RL^2$  e  $RL^3$  com  $z=1.5, 2, 4$  e  $10$ . No limite  $z \rightarrow 1$  a curva  $f(\alpha, z)$  reduz-se a um pico estreito em  $\alpha=0$ , desde que  $\ln M / \ln \alpha = \ln M / \ln \alpha^z = 0$ , e a dimensão de Hausdorff  $D_0$  vai para zero. Para  $z$  crescente,  $D_0$  monotonicamente cresce e tende para 1 no limite  $z \rightarrow \infty$  (ver fig. 6.6.2). Das eqs. (6.6.3) e (6.6.3') vemos que o comportamento de  $\alpha_{\min} = D_0$  e  $\alpha_{\max} = D_{-\infty}$  para  $z$  crescente está diretamente relacionado com o comportamento de  $\alpha^z$  e  $\alpha$ , respectivamente. Portanto, observamos que  $\alpha_{\min}$  primeiramente cresce até atingir a um valor máximo próximo de  $z=2$  e então decresce, (provavelmente para um valor limite). Por outro lado,

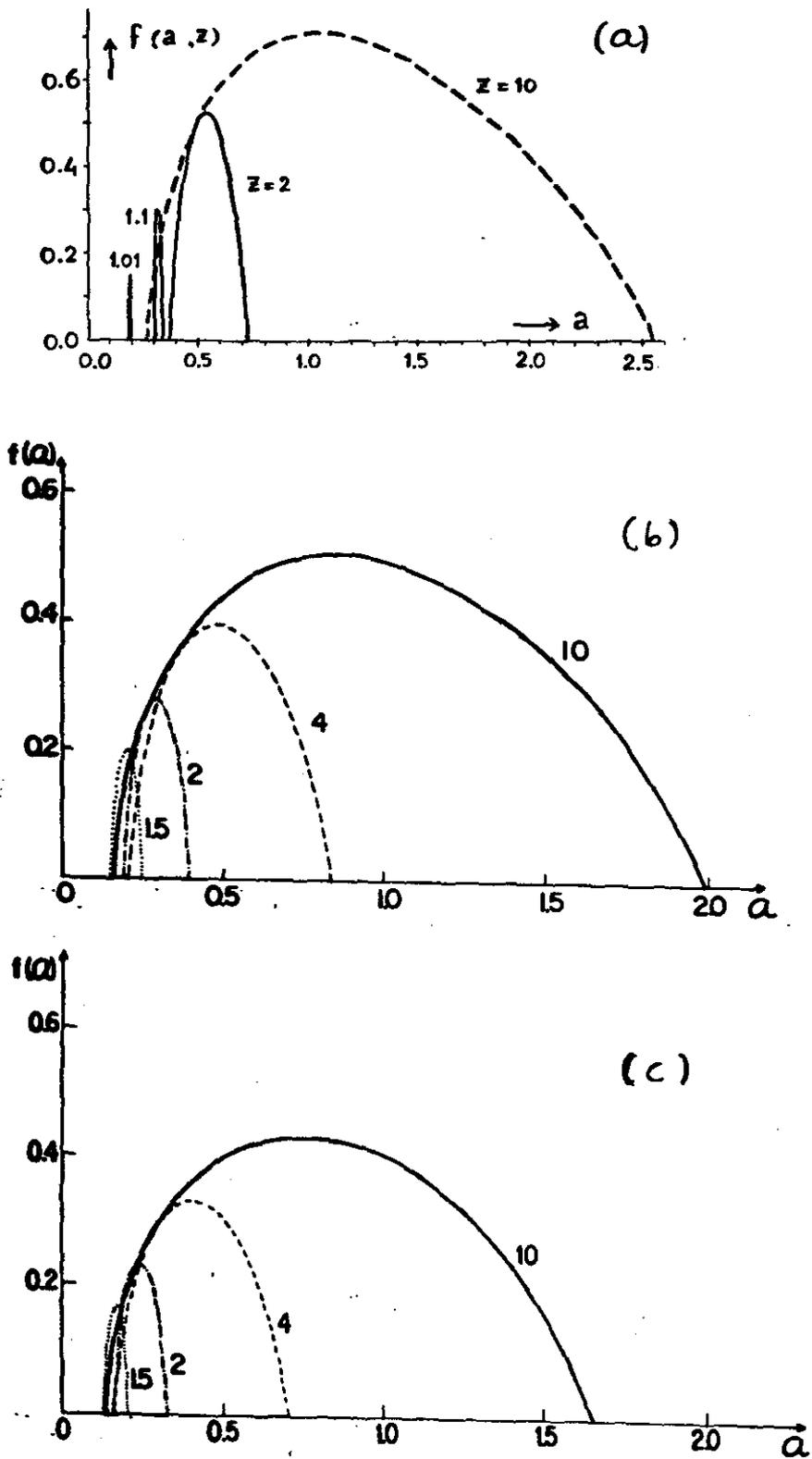


Fig. 6.6.1. A função  $f(a, z)$  para (a)  $M=2$  com  $z=1.01, 1.1, 2$  e  $10$  (ref. 59) e para as sequências (b)  $RL^2$  e (c)  $RL^3$  com  $z=1.5, 2, 4$  e  $10$ .

$\alpha_{\max}$  é uma função monotonicamente crescente de  $z$  e diverge no limite  $z \rightarrow \infty$ .

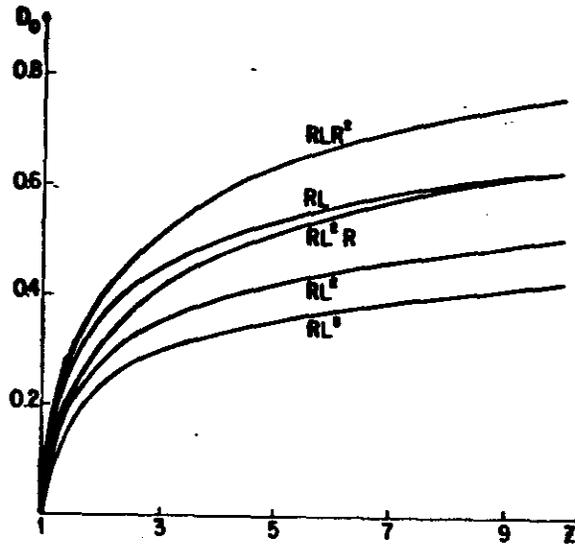


Fig. 6.6.2. Dimensão de Hausdorff para as sequências com  $M=3, 4$  e  $5$ .

### 6.7. CONCLUSÕES

Neste capítulo estudamos numericamente os fatores de escala associados a  $M$ -furcações ( $M = 3, 4$  e  $5$ ) para mapas unidimensionais da forma  $x' = 1 - a|x|^z$ . Cinco tipos de sequências foram estudadas, quais sejam  $(RL)^{Mn}$ ,  $(RL^2)^{Mn}$ ,  $(RLR^2)^{Mn}$ ,  $(RL^2R)^{Mn}$  e  $(RL^3)^{Mn}$ . Os dados numéricos foram obtidos por observação direta da

convergência dos fatores de escala em cada nível da árvore de M-furcações. Encontramos que  $\delta$  e  $\alpha^z$  possuem comportamentos qualitativos bastante similares para  $M = 3, 4$  e  $5$ , i.e., divergem em  $z \rightarrow 1$  e têm um mínimo próximo de  $z=2$ . No limite  $z \rightarrow \infty$  verificamos que  $\delta \sim \alpha^z$ , mas se estes fatores divergem ou não é um ponto que não foi totalmente esclarecido. A função  $\alpha(z)$  é monotonicamente decrescente em relação a  $z$  para todas as sequências estudadas. Calculamos também as funções  $\sigma(t)$  e  $f(\alpha)$  relacionadas com o conjunto de índices de escala existentes no atrator do ponto de acumulação das M-furcações.

## CAPITULO 7

### CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho de tese consistiu em estudar numericamente as propriedades da dinâmica apresentada por uma classe de mapas unidimensionais com uma assimetria no extremo. Como vimos, os mapas estudados apresentam um comportamento muito rico e são observados em experimentos físicos reais. No entanto, a riqueza dos mapas assimétricos havia praticamente passado despercebida pelos estudiosos em caos, e muito pouco esforço foi dirigido para este tema.

Desde a publicação do trabalho de Feigenbaum, em 1978, um grande número de físicos (teóricos e experimentais) e matemáticos têm trabalhado intensivamente para apoiar em bases sólidas o estudo das rotas ao caos por bifurcações de períodos, intermitência e quase-periodicidade. No entanto, quase a totalidade destes trabalhos foi dirigida a mapas simétricos. Neste trabalho escolhemos uma classe particular de mapas, ou seja, S-unimodais simétricos, para estudar a influência da introdução de uma assimetria no seu máximo. Quando simétricos, estes mapas possuem rota ao caos por bifurcações de períodos, com propriedades

métricas universais presentes num grande número de relações. Estas propriedades métricas estão bem estabelecidas através de estudos analíticos (com provas matemáticas), de estudos teóricos, como também experimentais. Certamente esta é a parte da física de sistemas dinâmicos caóticos que melhor está estruturada. O mapa protótipo considerado nestes estudos é do tipo  $x' = 1 - a|x|^z$ , e foi nele que introduzimos as assimetrias. Os resultados obtidos podem ser resumidos da seguinte maneira:

i) Uma assimetria na amplitude  $a$  não destrói a sequência de bifurcações; a rota ao caos continua sendo por desdobramentos de períodos. Verifica-se no entanto, que os fatores de escala nas sucessivas bifurcações não convergem, mas apresentam um comportamento oscilatório. Os valores entre os quais os fatores de escala oscilam convergem assintoticamente para duas constantes. As iterações do mapa no ponto de acumulação das bifurcações aproximam-se de uma função limite que satisfaz a uma equação funcional de grupo de renormalização do tipo da de Feigenbaum-Cvitanovic. Observamos então que apesar da universalidade métrica ter sido destruída por essa assimetria, as características do mapa simétrico permanecem se considerarmos, na árvore de bifurcações com períodos  $2^k$ , subárvores formadas pelos ciclos com  $k$  par ou ímpar.

ii) Uma assimetria no expoente  $z$ , também não destrói a rota por bifurcações de períodos. No entanto, neste caso as propriedades métricas universais são completamente destruídas. Os

fatores de escala apresentam um comportamento oscilatório divergente quando o período cresce na árvore de bifurcações. Quanto maior for a assimetria mais pronunciado será o comportamento divergente.

iii) Quando a assimetria consiste numa descontinuidade no extremo do mapa as propriedades universais qualitativas e quantitativas (ou métricas) do mapa simétrico são completamente modificadas. A rota ao caos neste caso é completamente nova e dá-se através de cascatas inversas em progressão aritmética. A razão de crescimento dos períodos dentro de cada cascata inversa é o período do atrator que existe imediatamente antes do ponto de acumulação da respectiva cascata. Não existe caos no ponto de acumulação de cada cascata; o caos aparece no ponto de acumulação dos pontos de acumulação. Estruturas autossimilares e leis universais foram observadas no diagrama de fase. Novas características foram observadas também em várias outras quantidades, tais como: número de atratores, expoentes de Liapunov e de incerteza, sequências MSS, função  $f(\alpha)$ , entre outras. O conjunto destas propriedades caracterizam a existência de uma nova rota universal ao caos, completamente diferente das outras conhecidas.

Estes fatos mostram quão rico é o comportamento de mapas assimétricos, podendo este estudo ser aprofundado analiticamente e experimentalmente. É possível que alguns tipos de assimetrias no máximo do mapa sejam difíceis de realmente existir em certos

experimentos físicos reais devido a limitações intrínsecas do aparato. Neste caso, o máximo ao invés de ser assimétrico possuiria uma simetria local e a rota ao caos seria a de Feigenbaum. No entanto, nas primeiras bifurcações o comportamento do mapa seria governado pela assimetria. Como as primeiras bifurcações são exatamente aquelas possíveis de ser observadas experimentalmente, vemos que a existência da simetria local no máximo não impede o estudo experimental de sistemas que em condições ideais seriam modelados por mapas assimétricos. Como foi mostrado na seção 5.11 conclusões semelhantes também se aplicam a mapas descontínuos. Um estudo teórico deste tipo de problema num aparato experimental com lasers e circuitos eletrônicos foi feito [46], mostrando que devido ao tempo finito de resposta do sistema o máximo do mapa, que em situações ideais teria uma descontinuidade na derivada, seria na verdade suavizado e possuiria uma simetria local. Assim depois de um certo número de iterações existiria um "crossover" da dinâmica do mapa assimétrico para a do simétrico.

Além do estudo da influência das assimetrias, calculamos também os fatores de escala associados a  $M$ -furcações do mapa simétrico do tipo logístico ( $M=3,4,5$ ). Apesar das janelas das  $M$ -furcações serem estreitas no eixo do parâmetro, já foi possível observar experimentalmente a sequência de trifurcações. Assim, o estudo estas sequências não possuem apenas um caráter teórico.

Em contribuições futuras, a influência de assimetrias poderá ser estudada nas rotas de intermitência e quase-periodicidade. Poderá também ser considerada em mapas multidimensionais que

apresentam rota ao caos por bifurcações de períodos, como por exemplo o mapa de Hénon, que é bidimensional. Outra possibilidade, é estudar mapas assimétricos no plano complexo generalizando o conjunto de Mandelbrot. Existe enfim um grande campo aberto para pesquisa se forem consideradas classes de mapas cada vez mais gerais.

PARTE II

## CAPÍTULO 8

### PARA-ESTADÍSTICA DE UM GÁS IDEAL EM D-DIMENSÕES

#### 8.1. INTRODUÇÃO

Desde o trabalho pioneiro de Gentile [ 65 ] foram feitos muitos estudos que interpolam as estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein (veja por exemplo ref. 66 ). Possíveis aplicações destas estatísticas foram procuradas em Teoria de Campos e Física de Partículas Elementares [68-70 ], bem como em Física da Matéria Condensada (mágnons e excitons moleculares [ 71 ], efeito Hall quântico [ 72 ]). O gás ideal na para-estatística constitui um sistema de referência privilegiado, o qual pode ser usado como um ponto de partida não perturbado para estudar sistemas mais complexos. Também mostraremos que muitas expressões exatas (ou assintoticamente exatas) podem ser obtidas e que serviriam como um material de teste para vários métodos aproximativos [73]. A proposta do presente capítulo é estabelecer as principais propriedades termodinâmicas deste gás num volume fixo em  $d$  dimensões ( $d > 0$ ) e para um espectro de energia bastante geral  $\epsilon = \left( \sum_{j=1}^d a_j k_j^2 \right)^{\alpha/2}$  ( $a_j > 0$  e  $\alpha > 0$ ;  $\alpha = 1$  corresponde a fótons e fónons

acústicos com vetores de onda curtos, entre outros;  $\alpha=2$  corresponde a partículas livres não relativísticas e a mágnons acústicos com vetores de onda curtos em ferromagnetos de Heisenberg, entre outros).

O capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 8.2 introduziremos o modelo do gás ideal e obtemos a densidade de estados; na seção 8.3 e 8.4 calculamos as principais quantidades termodinâmicas correspondendo a um número total de partículas fixo (partículas reais) e não fixo (quase-partículas); as conclusões são elaboradas na seção 8.5. No apêndice A generalizamos na para-estatística a integral de Sommerfeld e suas expansões.

## 8.2. GAS IDEAL NA PARA-ESTATÍSTICA: DENSIDADE DE ESTADOS

Consideremos um gás ideal de  $N$  partículas (ou quase-partículas) numa caixa de  $d$  dimensões. Cada partícula comporta-se como uma onda plana com espectro de energia dado por

$$\epsilon = \left( \sum_{j=1}^d a_j k_j^2 \right)^{\alpha/2} \quad (8.2.1)$$

onde  $a_j > 0 \forall j$ ,  $\alpha > 0$  e  $k_j$  é a  $j$ -ésima componente do vetor de onda  $\vec{k}$ . O caso particular  $a_j = a, \forall j$  resulta  $\epsilon \propto k^\alpha$  ( $k \equiv |\vec{k}|$ ). Impondo condições de contorno periódicas na caixa, cuja forma assumimos que é um hiperparalelepípedo ortogonal com lados de comprimento  $L_j$

e volume  $V \equiv \prod_{j=1}^d L_j$ . Os vetores de onda possíveis são dados por

$$k_j = 2\pi n_j / L_j \quad (n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \forall j \quad (8.2.2)$$

que inseridos na eq. (8.2.1) nos dão

$$\sum_{j=1}^d \frac{(2\pi)^2 a_j n_j^2}{\epsilon^{2/\alpha} L_j^2} = 1 \quad (7.2.3)$$

Esta é a equação de uma hiperelipsóide cujo volume dá o número de estados  $\phi(\epsilon)$  com energia menor ou igual a  $\epsilon$ . Consequentemente

$$\phi(\epsilon) = \frac{\alpha}{d} (\epsilon/\epsilon_0)^{d/\alpha} \quad (8.2.4)$$

com

$$\epsilon_0 \equiv \left[ \frac{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1) (\prod_{j=1}^d a_j)^{1/2}}{V^{d/\alpha}} \right]^{\alpha/d} \quad (8.2.4')$$

Portanto, a densidade de estados  $\rho(\epsilon)$  é dada por

$$\rho(\epsilon) = \frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{d/\alpha - 1} \quad (8.2.5)$$

Observe que tratamos  $\phi(\epsilon)$  como uma função suave de  $\epsilon$ . Isto é correto no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, N/V \rightarrow \text{constante}, \epsilon_0 \rightarrow 0$ ), o único que nos interessa. Na para-estatística, o número de partículas por estado  $f(\epsilon)$  no equilíbrio térmico é dado por [ 65 ]

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{B(\epsilon-\mu)} - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)B(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (8.2.6)$$

ou, escrevendo numa outra forma

$$f(\epsilon) = \frac{\sum_{j=1}^p j e^{(p-j)\beta(\epsilon-\mu)}}{\sum_{j=0}^p e^{j\beta(\epsilon-\mu)}} \quad (8.2.6')$$

onde  $\beta \equiv 1/k_B T$  é a temperatura inversa,  $\mu$  é o potencial químico, e  $p$  é o número máximo de partículas permitido por estado ( $p=1$  reproduz a estatística de Fermi-Dirac e  $p \rightarrow \infty$  a estatística de Bose-Einstein; veja fig. 8.2.1)

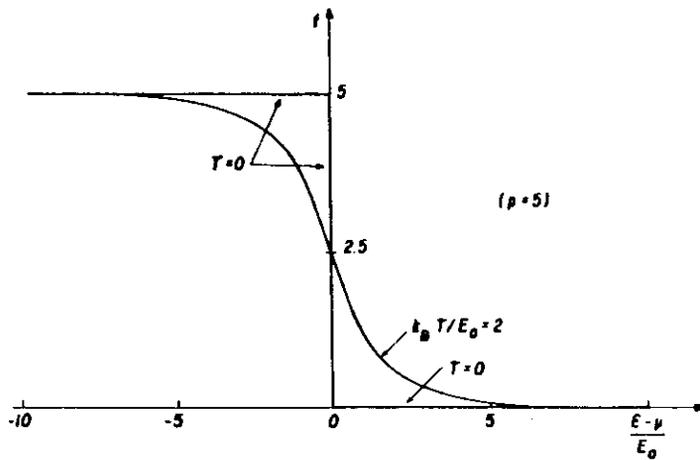


Fig. 8.2.1. Para-estatística com ocupação máxima  $p$ : média populacional por estado como uma função da energia  $\epsilon$  medida a partir do potencial químico  $\mu$ , para temperaturas finitas e nula. O ponto  $(\epsilon-\mu, f) = (0, p/2)$  é o centro de simetria.

### 8.3. NÚMERO TOTAL DE PARTÍCULAS FIXO (PARTÍCULAS REAIS)

#### 8.3.1. Potencial Químico e População do Estado Fundamental

Consideramos aqui o número total  $N$  de partículas no gás como

bem definido. Se tomarmos  $N_0$  e  $N_e$  como a população de estado fundamental e dos estados excitados, então

$$N = N_0(T) + N_e(T) \quad (8.3.1.1)$$

Iremos agora calcular o potencial químico  $\mu(T, p)$ , o qual é completamente determinado por

$$N = \int_0^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad (8.3.1.2)$$

No limite  $T \rightarrow 0$ ,  $f(\varepsilon)$  é a função degrau, indicada na fig.

8.2.1. Desta forma, temos

$$N = \int_0^{\mu_0} d\varepsilon \rho(\varepsilon) p = \int_0^{\mu_0} \frac{p \varepsilon^{d/\alpha-1}}{\varepsilon_0^{d/\alpha}} d\varepsilon = \frac{p \alpha \mu_0^{d/\alpha}}{\varepsilon_0^{d/\alpha} d} \quad (8.3.1.3)$$

onde  $\mu_0(p) \equiv \mu(0, p)$  e onde usamos a eq. (8.2.5) (com  $\rho(\varepsilon) \equiv 0$  para  $\varepsilon < 0$ ). Consequentemente temos que

$$\mu_0(p) = \mu_0(1) / p^{\alpha/d} \quad (8.3.1.4)$$

onde

$$\mu_0(1) = (Nd/\alpha)^{\alpha/d} \varepsilon_0 \quad (8.3.1.5)$$

ou mesmo

$$\mu_0(1) = \left[ 2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \left(\frac{d}{\pi} a_j\right)^{1/2} \frac{N}{V} \right]^{\alpha/d} \quad (8.3.1.6)$$

onde usamos eq. (8.2.4') para tornar explícita a dependência de  $\mu_0$  na concentração  $N/V$ . É conveniente introduzir as seguintes quantidades reduzidas

$$t \equiv k_B T / \mu_0 \quad (1) \quad (8.3.1.7)$$

$$\bar{\mu} \equiv \mu / \mu_0 \quad (1) \quad (8.3.1.8)$$

$$x \equiv \epsilon / \mu_0 \quad (1) \quad (8.3.1.9)$$

A eq. (8.3.1.2) pode ser reescrita como

$$\frac{\alpha}{d} = \int_0^{\infty} dx x^{d/\kappa - 1} \left[ \frac{1}{\exp[(x - \bar{\mu})/t] - 1} - \frac{p+1}{\exp[(p+1)(x - \bar{\mu})/t] - 1} \right] \quad (8.3.1.10)$$

a qual torna óbvio que, em unidades de energia  $\mu_0(1)$ , o potencial químico (e na verdade *todas* as quantidades termodinâmicas em que estamos interessados) dependem de  $d$  e de  $\alpha$  apenas através da razão  $d/\alpha$  (veja também ref. [ 74 ]). Através da transformação  $y \equiv x/t$ , obtemos

$$\frac{\alpha}{d} t^{-d/\alpha} = \int_0^{\infty} dy y^{d/\kappa - 1} \left[ \frac{1}{\exp(y - \bar{\mu}/t) - 1} - \frac{p+1}{\exp[(p+1)(y - \bar{\mu}/t)] - 1} \right] \quad (8.3.1.11)$$

a qual nos dá  $t$  como uma função explícita de  $\bar{\mu}/t$ ,  $p$  e  $d/\alpha$ . Os resultados estão indicados na fig. 8.3.1. Como pode ser observado nesta figura, a dependência térmica de  $\bar{\mu}$ , para  $d/\alpha$  fixo, achata-se na região de baixa temperatura para  $p$  crescente, e no limite  $p \rightarrow \infty$

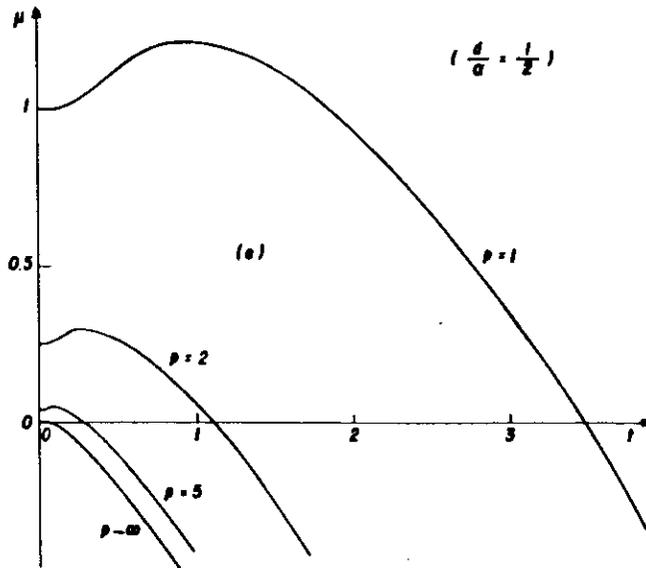


Fig. 8.3.1. Dependência térmica do potencial químico reduzido para valores típicos de  $p$  e  $d/\alpha$ . Observe que para todo  $p < \infty$  o comportamento é qualitativamente o mesmo (no sentido em que  $\mu$  é analítico para todos os valores finitos de  $t$ ) independentemente dos valores de  $d/\alpha$ , e pode se caracterizado pelo comportamento de Fermi-Dirac ( $p=1$ ), enquanto que o limite  $p \rightarrow \infty$  (Bose-Einstein) apresenta dois regimes diferentes, um ocorrendo para  $d/\alpha \leq 1$  (nenhuma condensação de Bose-Einstein), o outro para  $d/\alpha > 1$  (condensação de Bose-Einstein, devido à não analiticidade de  $\bar{\mu}$  que aparece numa temperatura finita).

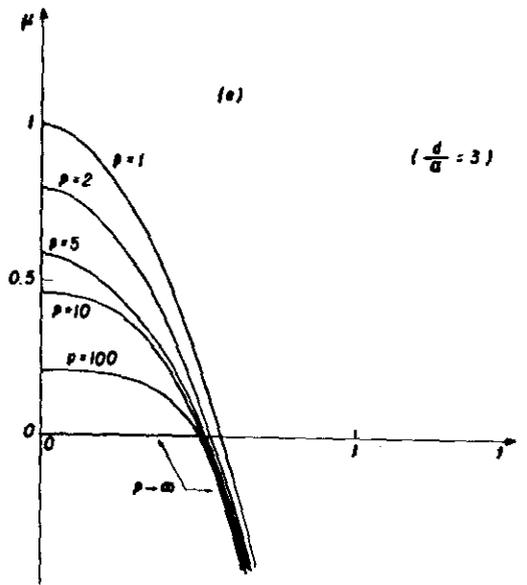
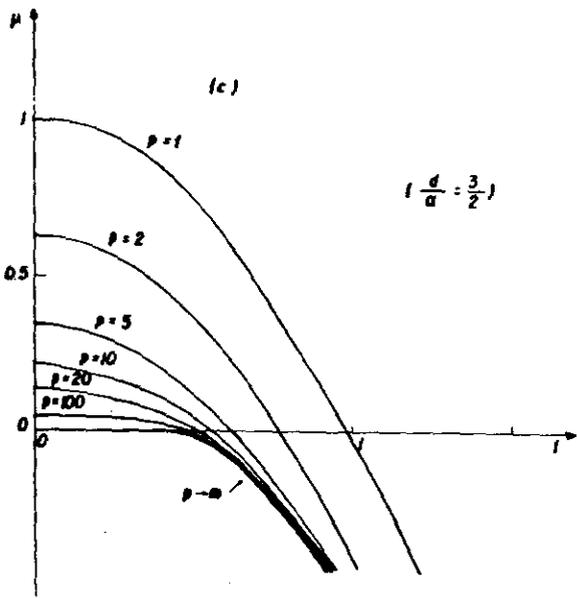
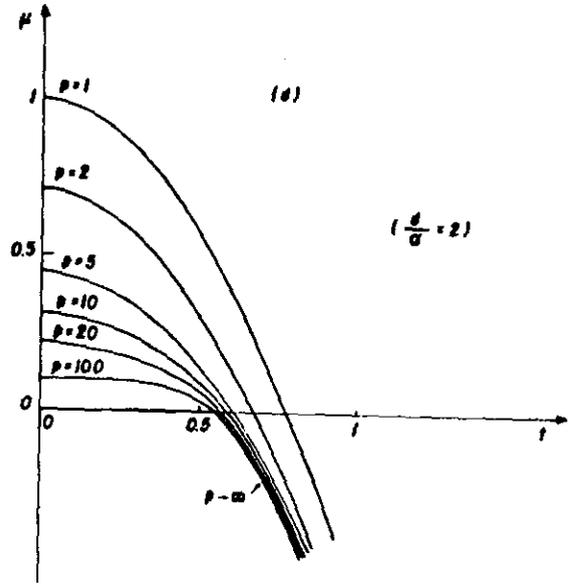
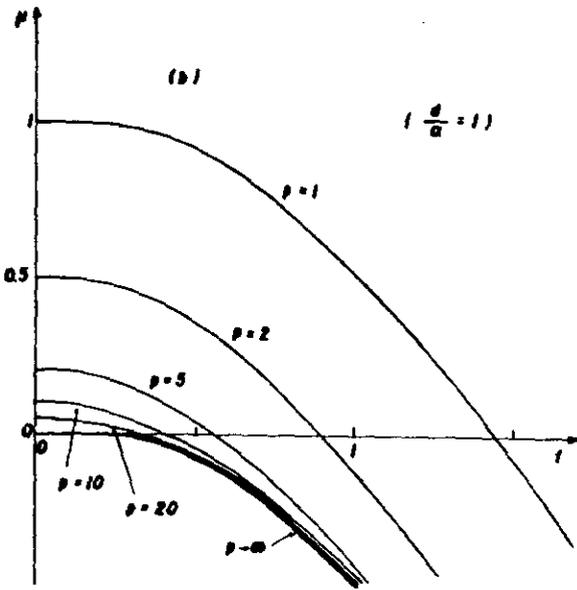


Fig. 8.3.1. (continuação)

com  $d/\alpha > 1$  aparece um "plateaux" em  $\bar{\mu}=0$  ( a largura do "plateaux" cresce com o aumento de  $d/\alpha-1$ ). Esta é obviamente a condensação de Bose-Einstein) (veja [ 75 ]), e vemos que no presente tratamento ela aparece no limite  $p \rightarrow \infty$  através da convergência não uniforme, completamente similar àquela observada , no limite  $N \rightarrow \infty$ , para sistemas com interações apresentando transições de fase.

Nenhuma condensação de Bose-Einstein acontece em temperaturas finitas para  $d/\alpha \leq 1$ . Em particular para  $d/\alpha=1$ , é fácil verificar que a integral da eq. (8.3.1.11) é facilmente resolvida, e obtemos a seguinte dependência de  $t$  em  $\bar{\mu}/t$ :

$$t = \left\{ \ln \frac{1 - \exp[(p+1)\bar{\mu}/t]}{1 - \exp(\bar{\mu}/t)} \right\}^{-1} = \left[ \ln \sum_{j=0}^p \exp(j\bar{\mu}/t) \right]^{-1} \quad (8.3.1.12)$$

Esta expressão leva, no limite  $p \rightarrow \infty$  (tomando em consideração que  $\bar{\mu} < 0$  para  $t > 0$ ), ao resultado "standard" para  $d/\alpha=2$

$$\bar{\mu} = t \ln(1 - e^{-1/t}) \quad (8.3.1.13)$$

onde verificamos  $\bar{\mu}$  anula-se apenas em  $t=0$ .

Voltando agora à expressão geral indicada na eq. (8.3.1.11), e denotando por  $t^*$  a temperatura (finita) na qual  $\bar{\mu}$  anula-se para  $p$  e  $d/\alpha$  fixos, temos

$$\frac{d}{d} (t^*)^{-d/\alpha} = \int_0^{\infty} dy y^{d/\alpha-1} \left[ \frac{1}{e^y-1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)y}-1} \right] \quad (8.3.1.14)$$

A integral pode ser expressa (veja pag.325 de [ 76 ] ) em termos da

função gama  $\Gamma$ , e obtemos

$$t^* = \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{d/\alpha - 1}} \right] \zeta\left(\frac{d}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) \right\}^{-\alpha/d}, \quad \frac{d}{\alpha} > 1 \quad (8.3.1.15)$$

Estes resultados estão ilustrados na fig. 8.3.2; note que  $t_c(d/\alpha) \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} t^*(p, d/\alpha)$  é justamente a temperatura crítica (reduzida) da condensação de Bose-Einstein (que existe apenas para  $p \rightarrow \infty$ ), e é dada por

$$t_c = \left[ \frac{d}{\alpha} \int_0^\infty dy \frac{y^{d/\alpha - 1}}{e^y - 1} \right]^{-\alpha/d} \quad (8.3.1.16)$$

Portanto

$$t_c = \left[ \zeta(d/\alpha) \Gamma(d/\alpha + 1) \right]^{-\alpha/d} \quad (8.3.1.16')$$

$$\sim \begin{cases} d/\alpha - 1 & \text{se } d/\alpha - 1 \rightarrow +0 \\ e^{\alpha/d} & \text{se } d/\alpha \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8.3.1.16'')$$

A dependência térmica da população reduzida do estado fundamental  $N_0/N$  abaixo da temperatura crítica (acima da temperatura crítica,  $N_0/N$  anula-se no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ ) é dada por

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} = 1 - \frac{1}{N} \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon; \mu=0) = 1 - \frac{d}{\alpha} t_c^{d/\alpha} \int_0^\infty dy \frac{y^{d/\alpha - 1}}{e^y - 1}$$

portanto

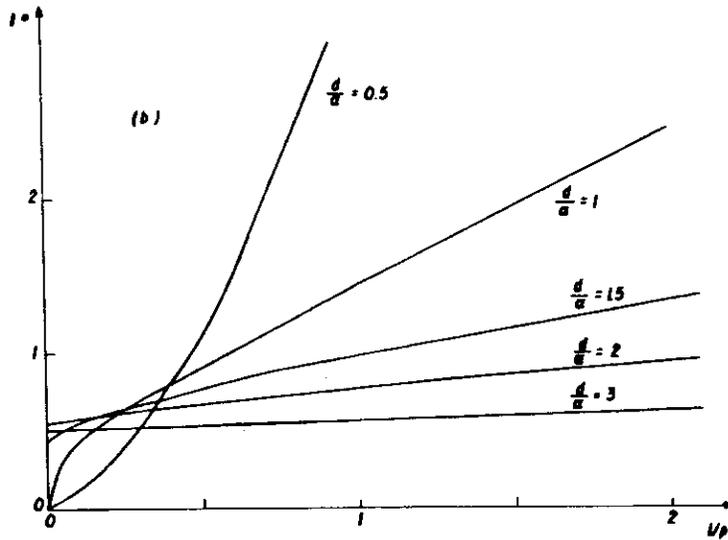
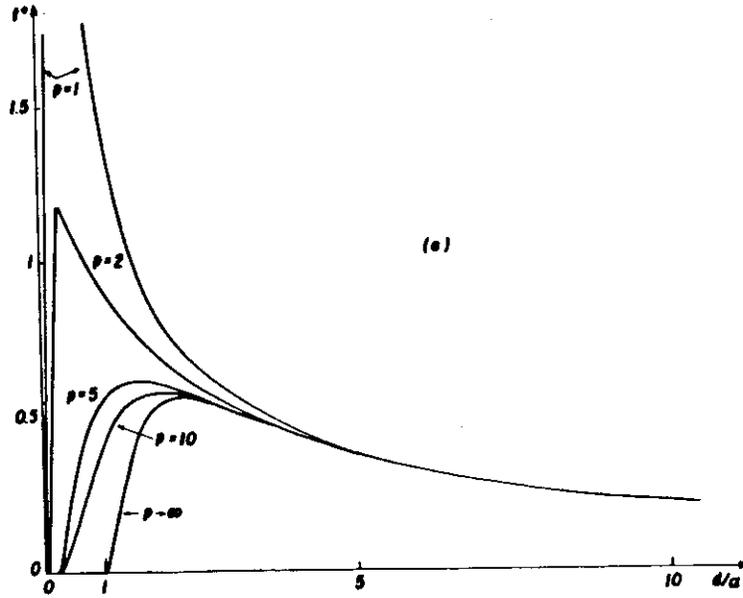


Fig. 8.3.2. Temperatura reduzida na qual  $\mu$  anula-se como uma função de  $d/\alpha$  e  $p$ . O limite  $p \rightarrow \infty$  dá a dependência em  $d/\alpha$  da temperatura crítica (reduzida) correspondendo à condensação de Bose-Einstein.

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{t}{t_c}\right)^{d/\alpha}, \quad t \leq t_c \quad (8.3.1.17)$$

onde usamos eq. (8.3.1.16)

Dedicaremos o restante desta subseção para determinar as expansões em altas e baixas temperaturas do potencial químico.

Para o comportamento assintótico em baixas temperaturas podemos usar na eq. (8.3.1.11), a expansão (A.15) do apêndice A (com  $A=1$ ,  $\gamma=d/\alpha-1$  e  $z=\bar{\mu}/t$ ), obtendo assim

$$\bar{\mu} = \left( p^{\alpha/d} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2d}{p\alpha} S(2m) \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] \prod_{j=0}^{2(m-1)} \left( \frac{d}{\alpha} - 1 - j \right) \right\} \left( \frac{t}{p} \right)^{2m} \right\}^{\alpha/d - 1} \right) \quad (8.1.3.18)$$

A solução desta equação tem claramente a forma

$$\bar{\mu} = \frac{1}{p^{\alpha/d}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{2n} \right) \quad (8.3.1.19)$$

A substituição desta expressão em ambos os lados da eq. (8.1.3.18) permite, pela simples identificação, o conhecimento de  $\{\alpha_n\}$  em qualquer ordem desejada. Para a correção mais baixa obtemos

$$\bar{\mu} \sim \frac{1}{p^{\alpha/d}} \left[ 1 - \frac{\pi^3}{3} \frac{p^{2\alpha/d}}{p+1} \left( \frac{d}{\alpha} - 1 \right) t^2 \right], \quad t \rightarrow 0, \quad \neq d/\alpha \quad (8.3.1.20)$$

Note a mudança de curvatura que ocorre em  $d/\alpha=1$ . De fato, para  $d/\alpha=1$ , a partida de  $\bar{\mu}$  de  $1/p$  é mais lenta que qualquer potência de  $t$  (e não apenas  $t^2$ ). Para este case obtemos da eq. (8.3.1.12),

$$\bar{\mu} \sim (1/p) (1 - t e^{1/p t}) , \quad t \rightarrow 0, \quad d/\alpha=1, \quad p < \infty \quad (8.3.1.21)$$

$$\bar{u} \sim -t e^{-1/t} \quad t \rightarrow 0, \frac{d}{\alpha} = 1, p \rightarrow \infty \quad (8.3.1.21')$$

Para o comportamento assintótico em alta temperaturas, obtemos da eq. (8.3.1.11)

$$\begin{aligned} \bar{u} \sim & -\frac{d}{\alpha} t \ln t - t \ln \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) - \frac{t^{-d/\alpha + 1}}{2^{d/\alpha} \Gamma(d/\alpha + 1)} \\ & + \frac{t^{-p d/\alpha + 1}}{(p+1)^{d/\alpha - 1} [\Gamma(d/\alpha + 1)]^p}, \quad t \rightarrow \infty, \forall d/\alpha \end{aligned} \quad (8.3.1.22)$$

Observe que, como esperado, o termo dominante nesta equação não depende de  $p$  (limite de Maxwell-Boltzmann).

### 8.3.2 Energia Interna, Calor Específico, Equação de Estado e Calor Latente

A energia interna do sistema é dada por

$$U = \int_0^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad (8.3.2.1)$$

portanto

$$U/N = \mu(1) u \quad (8.3.2.2)$$

com

$$u(t) \equiv \frac{d}{\alpha} t^{d/\alpha + 1} \int_0^{\infty} dy y^{d/\alpha} \left[ \frac{1}{\exp(y - \bar{u}/t) - 1} - \frac{p+1}{\exp[(p+1)(y - \bar{u}/t)] - 1} \right] \quad (8.3.2.3)$$

onde usamos as eqs. (8.2.5), (8.3.1.3), (8.3.1.5). Esta expressão juntamente com  $\bar{\mu}(t)$ , determinada na seção 8.3.1, especifica completamente a dependência térmica de  $u$  e consequentemente  $U/N$ . O calor específico  $C$  é dado por

$$C \equiv dU/dT \quad (8.3.2.4)$$

Portanto o calor específico por partícula  $c$  é dado por

$$c = C/(N k_B) = \frac{d(U/N)}{k_B dT} = du/dt \quad (8.3.2.5)$$

onde usamos a eq. (8.3.2.2). Os resultados estão apresentados na fig. 8.3.2.1.

Vamos agora discutir o comportamento de  $c$  em baixas temperaturas. Para  $p$  finito podemos expandir a integral da eq. (8.3.2.3) como indicado no apêndice A, e então usando as eqs. (8.3.1.20) e (8.3.1.21), obtemos

$$C \sim \frac{2\pi^2}{3} \frac{d}{\alpha} \frac{p^{d/\alpha}}{p+1} t, \quad t \rightarrow 0 \quad (8.3.2.6)$$

Este resultado nos dá então que assintoticamente, para baixas temperaturas,  $C \propto T$  para todos os valores finitos de  $p$  e  $d/\alpha$ , generalizando assim o resultado bem conhecido para elétrons quase livres num metal ( $d=3$ ,  $\alpha=2$  e  $p=1$ ).

No limite  $p \rightarrow \infty$ , a eq. (8.3.2.3) torna-se

$$\mu(t) = \frac{d}{\alpha} t^{d/\alpha+1} \int_0^\infty \frac{dy}{e^y - 1} \frac{y^{d/\alpha}}{y}, \quad t < t_c \quad (8.3.2.7)$$

onde usamos que  $\bar{\mu} \equiv 0$  se  $t < t_c$ . Usando um resultado da ref. [ 76 ] (pag. 325) podemos reescrever esta equação como segue

$$\mu(t) = \frac{d}{\alpha} \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) \zeta\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) t^{d/\alpha+1} \quad (8.3.2.8)$$

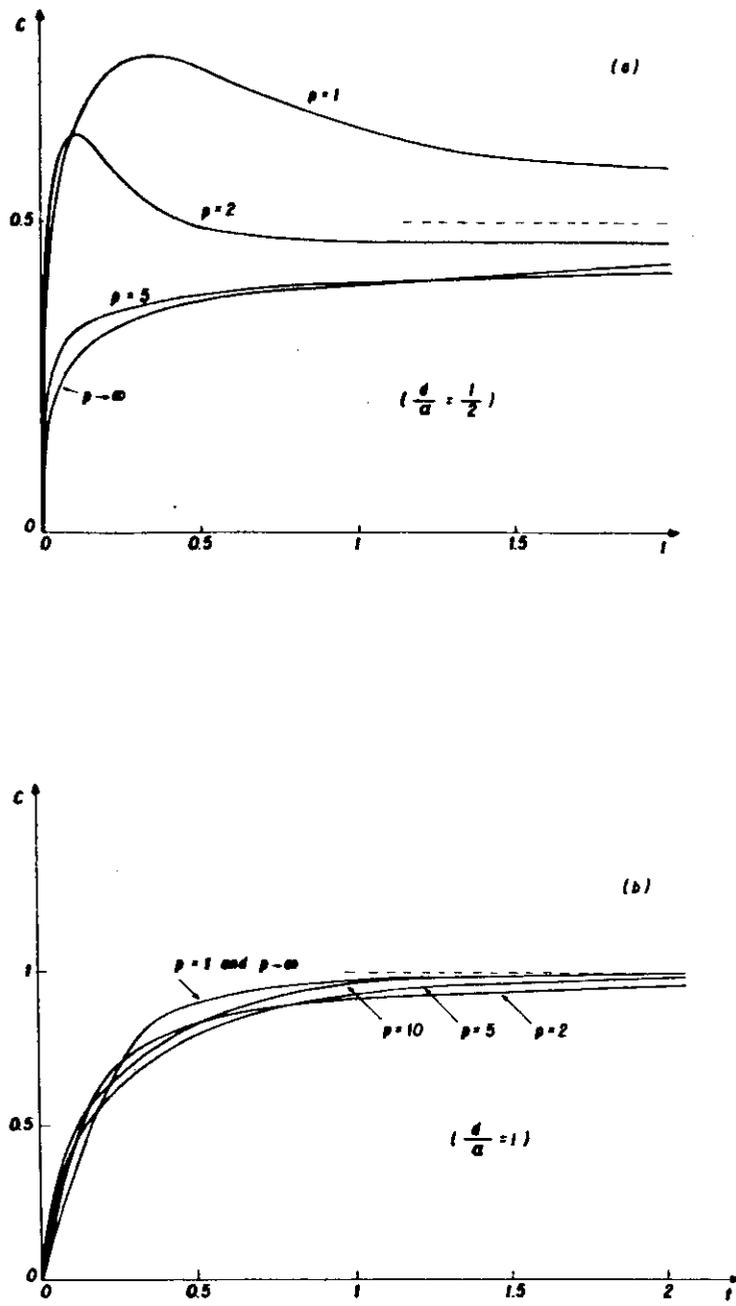


Fig. 8.3.2.1 (a-e) Dependência térmica do calor específico (reduzido) para valores típicos de  $p$  e  $d/\alpha$ . (f) Para o limite  $p \rightarrow \infty$ , a dependência da altura do "cusp" que aparece em  $c$  versus  $t$  para  $d/\alpha > 1$ .

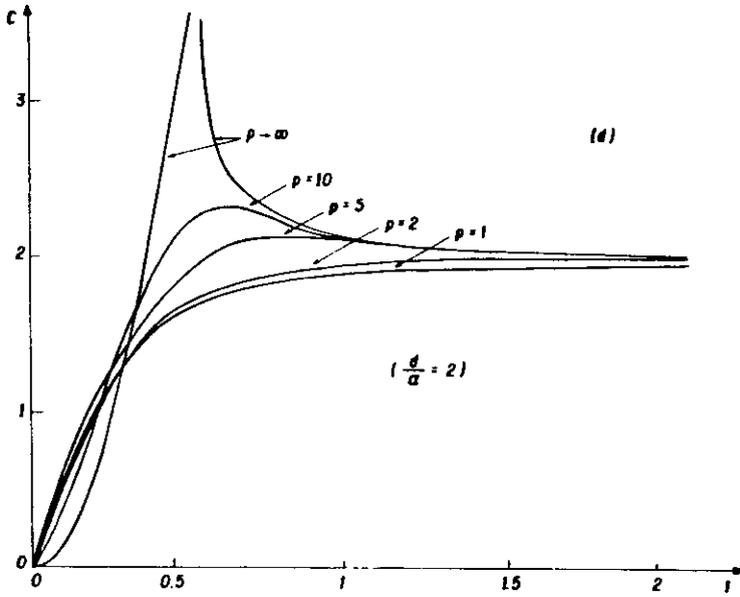
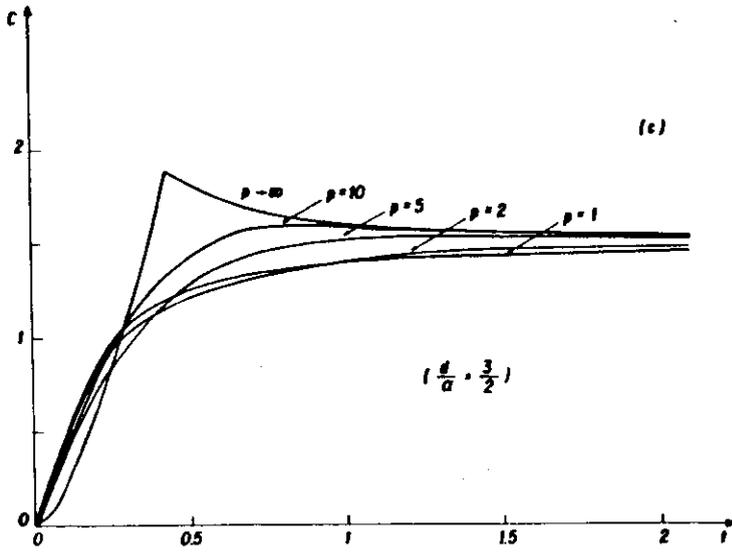


Fig. 8.3.2.2. (continuação)

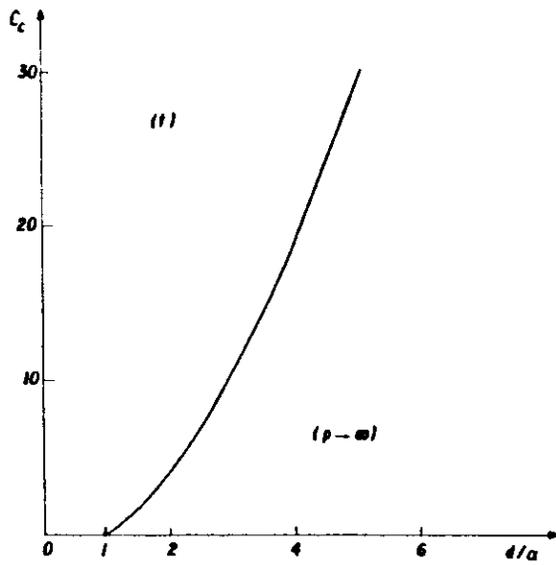
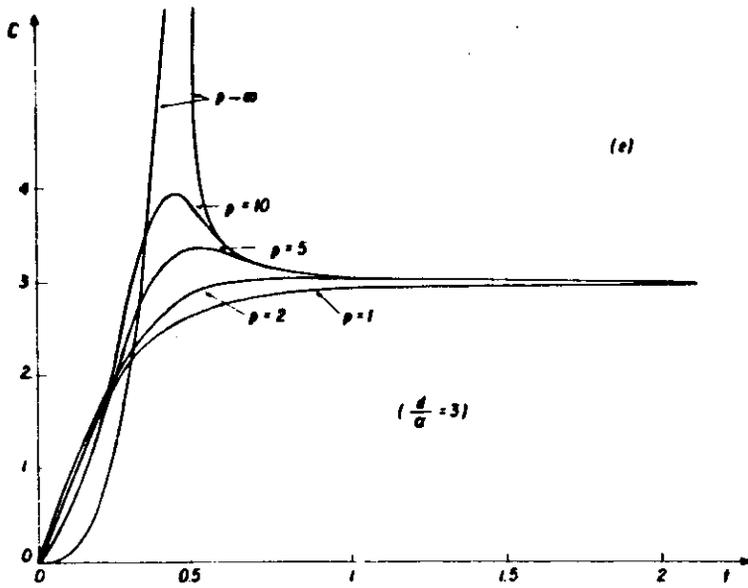


Fig. 8.3.2.2. (continuação)

Consequentemente,

$$C = \frac{d}{\alpha} \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 2\right) \zeta\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) T^{d/\alpha} \quad (8.3.2.9)$$

Para  $d/\alpha \gg 1$ , esta expressão pode ser reescrita como

$$C = \frac{d}{\alpha} \left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) \frac{\zeta(d/\alpha + 1)}{\zeta(d/\alpha)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/\alpha} \quad (8.3.2.10)$$

onde usamos eq. (8.3.1.16'). A lei obtida  $C \propto T^{d/\alpha}$  generaliza a lei de Debye para fónons acústicos ( $d=3, \alpha=1$ ) bem como a lei  $T^{3/2}$  para mágnons no ferromagneto de Heisenberg ( $d=3, \alpha=2$ ).

Um desenvolvimento semelhante ao feito na eq. (8.3.1.11) nos leva, partindo da integral da eq. (8.3.2.3) ao comportamento assintótico do calor específico em altas temperaturas, ou seja

$$C \sim \frac{d}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{d/\alpha - 1}{2^{d/\alpha + 1} \Gamma(d/\alpha + 1)} T^{d/\alpha} - \frac{p(p d/\alpha - 1)}{(p+1)^{d/\alpha} [\Gamma(d/\alpha + 1)]^{p+1}} T^{p d/\alpha} \right\} \quad (8.3.2.11)$$

Observamos que na estatística de Fermi-Dirac (Bose-Einstein) o calor específico aproxima-se do valor clássico  $d/\alpha$  por baixo (cima) quando  $d/\alpha \gg 1$ , e o oposto acontece quando  $d/\alpha \ll 1$ ; para  $d/\alpha=1$ , a aproximação acontece por baixo para todos os valores de  $p$ . Consequentemente,  $C$  vs.  $T$  apresenta para  $d/\alpha \gg 1$  um máximo para  $p$  suficientemente grande (o máximo torna-se um "cusp" no limite  $p \rightarrow \infty$ ); para  $d/\alpha \ll 1$ , tal gráfico apresenta um máximo para  $p$  suficientemente pequeno.

Vamos agora deduzir a equação de estados. A função de

partição no ensemble grand-canônico  $\Xi_{\vec{k}}$  associada com o vetor de onda  $\vec{k}$  é dada por

$$\begin{aligned} \Xi_{\vec{k}} &= 1 + \exp[-\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)] + \dots + \exp[-p\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)] \\ &= \frac{1 - \exp[-(p+1)\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)]}{1 - \exp[-\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)]} \end{aligned} \quad (8.3.2.12)$$

A função de partição total  $\Xi$  é igual a  $\prod_{\vec{k}} \Xi_{\vec{k}}$ , conseqüentemente

$$\ln \Xi = \int_0^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \ln \frac{1 - e^{-(p+1)\beta(\epsilon - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}} \quad (8.3.2.13)$$

Sabemos da termodinâmica que a pressão P satisfaz

$$\beta PV = \ln \Xi \quad (8.3.2.14)$$

portanto

$$\beta PV = \int_0^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \ln \frac{1 - e^{-(p+1)\beta(\epsilon - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}} \quad (8.3.2.15)$$

$$= \frac{\beta^{-d/\kappa}}{\epsilon_0^{d/\kappa}} \int_0^{\infty} dy y^{d/\kappa - 1} \ln \frac{1 - e^{-(p+1)(y - \beta\mu)}}{1 - e^{-(y - \beta\mu)}}$$

onde usamos a eq. (8.2.5). Por outro lado, também da termodinâmica, temos que

$$\begin{aligned} U &= - \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta} \Big|_{\beta\mu \text{ fixo}} = - \frac{\partial (\beta PV)}{\partial \beta} \Big|_{\beta\mu \text{ fixo}} \\ &= \frac{d}{d} \frac{\beta^{-d/\kappa - 1}}{\epsilon_0^{d/\kappa}} \int_0^{\infty} dy y^{d/\kappa - 1} \ln \frac{1 - e^{-(p+1)(y - \beta\mu)}}{1 - e^{-(y - \beta\mu)}} \end{aligned} \quad (8.3.2.16)$$

E usando novamente eq. (8.3.2.15) obtemos

$$P = \frac{\alpha}{d} \frac{U}{V} \quad (8.3.2.17)$$

a qual é exata para todos os valores de  $p$ . Vemos através da eq. (8.3.2.17) que a análise da pressão é análoga à já feita para  $U$ .

Vamos agora finalmente calcular o calor latente  $L$  (por partícula) associada com a transição de fase (primeira ordem) da condensação de Bose-Einstein. A equação de estado de Clayperon nos diz que

$$L = T \left( \frac{dP}{dT} \right)_{T_c} (v_n - v_c) \quad (8.3.2.18)$$

onde  $v_n$  ( $v_c$ ) é o volume por partícula na fase normal (condensada). Mas no limite  $N \gg 1$   $v_c$  se anula [ 77 ] e  $v_n$  é igual a  $V/N$ ; portanto

$$L = T \left( \frac{dP}{dT} \right)_{T_c} \frac{V}{N} = T \frac{\alpha}{d} \left[ \frac{d(U/N)}{dT} \right]_{T_c} = k_B T \frac{\alpha}{d} \left( \frac{du}{dt} \right)_{t_c} \quad (8.3.2.19)$$

onde usamos eq. (8.3.2.17) e as definições de  $u$  e  $t$ . Substituindo eq. (8.3.2.8) nesta expressão, obtemos

$$L = k_B T \Gamma \left( \frac{d}{\alpha} + 1 \right) \zeta \left( \frac{d}{\alpha} + 1 \right) \left( \frac{d}{\alpha} + 1 \right) t_c^{d/\alpha} \quad (8.3.2.20)$$

e, usando eq. (8.3.1.16') finalmente teremos

$$\frac{L}{k_B T} = \frac{\zeta(d/\alpha + 1)}{\zeta(d/\alpha)} \left( \frac{d}{\alpha} + 1 \right) \quad (8.3.2.21)$$

$$\sim \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} (d/\alpha - 1) & \text{se } d/\alpha - 1 \rightarrow +0 \\ d/\alpha + 1 & \text{se } d/\alpha \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8.3.2.21')$$

A dependência de  $L$  com  $d/\alpha$  está representada na fig. 8.3.2.

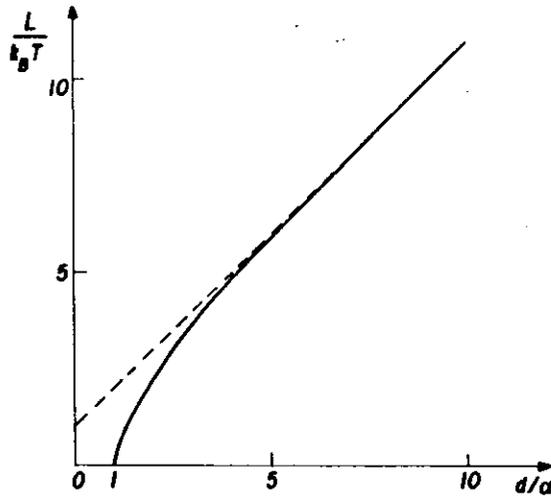


Fig. 8.3 2.2. Dependência do calor latente  $L$  por partícula com  $d/\alpha$  (em unidades de  $k_B T$ ) associada com a condensação de Bose-Einstein (transição de fase de primeira ordem).

#### 8.4. NÚMERO TOTAL DE PARTICULAS NÃO FIXO (QUASE-PARTICULAS)

Nesta seção tomaremos o número de partículas como sendo não fixo, portanto  $\mu$  anula-se para todas temperaturas e para todos valores de  $p$ . O número médio de partículas  $\langle N \rangle$  é dado por

$$\langle N \rangle = \int_0^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) \left[ \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)\beta\varepsilon} - 1} \right] \quad (8.4.1)$$

portanto

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{V} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_0} \right)^{d/\alpha} \int_0^\infty dy y^{d/\alpha-1} \left[ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)y} - 1} \right] \quad (8.4.2)$$

onde usamos eq. (8.2.5). Segue que para  $d/\alpha \gg 1$

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{\zeta(d/\alpha) \Gamma(d/\alpha + 1)}{2^d \pi^{d/\alpha} \Gamma(d/2 + 1) \left( \prod_{j=1}^d a_j \right)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{d/\alpha-1}} \right] (k_B T)^{d/\alpha} \quad (8.4.3)$$

onde usamos eq. (8.2.4')

A energia interna será dada por

$$U = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon p(\epsilon) \left[ \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)\beta\epsilon} - 1} \right] \quad (8.4.4)$$

portanto

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{V} \frac{(k_B T)^{d/\alpha+1}}{\epsilon_0^{d/\alpha}} \int_0^\infty dy y^{d/\alpha} \left[ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)y} - 1} \right] \quad (8.4.5)$$

Logo, para  $d/\alpha \gg 1$  obtemos

$$\frac{U}{V} = \frac{\zeta(d/\alpha+1) \Gamma(d/\alpha+1) d/\alpha}{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2+1) \left( \prod_{j=1}^d a_j \right)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{d/\alpha-1}} \right] (k_B T)^{d/\alpha+1} \quad (8.4.6)$$

onde usamos novamente eq. (8.2.4'). A lei  $U/T \propto T^{d/\alpha+1}$  generaliza a bem conhecida lei de Stefan-Boltzmann  $T^4$  para o corpo negro ( $d=3, \alpha=1, p \rightarrow \infty$ ). A pressão de radiação generalizada pode ser obtida substituindo eq. (8.4.6) na eq. (8.3.2.17).

## 8.5 CONCLUSÕES

Com um tratamento unificado, estudamos a para-estatística de um gás ideal confinado (volume fixo) em  $d$ -dimensões constituído de  $N$  partículas (ou quase-partículas) cujo espectro de energia é dado pela eq. (8.2.1) (o qual contém o caso isotrópico  $\epsilon \propto |\vec{k}|^\alpha$  ( $\alpha > 0$ )); cada estado pode ser ocupado no máximo por  $p$  partículas. Estudamos, para  $d, \alpha, p, T$  arbitrários, e para os casos de  $N$  fixo e não fixo, várias quantidades termodinâmicas (potencial químico, população média, energia interna, calor específico, pressão e calor latente). A seguir resumimos os principais resultados.

i) A densidade de estados satisfaz  $\rho(\epsilon) \propto \epsilon^{d/\alpha-1}$ . Esta forma implica que a dependência térmica de todas as quantidades termodinâmicas no equilíbrio, e para qualquer valor de  $p$ , em  $d$  e  $\alpha$  será através da razão  $d/\alpha$ . De fato, muitos dos resultados resumidos abaixo permanecem inalterados (exceto por prefatores) se  $\rho \propto \epsilon^{d/\alpha-1}$  (i.e., se  $\epsilon \propto |\vec{k}|^\alpha$ ) apenas no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e não necessariamente para todos os valores de  $\epsilon$ .

ii) A condensação de Bose-Einstein aparece para  $d/\alpha > 1$ , como uma convergência não uniforme no limite  $p \rightarrow \infty$ , em completa analogia com as transições de fase em sistemas interagentes os quais aparecem como uma convergência não uniforme no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ . Obtivemos a dependência explícita da temperatura crítica  $T_c$  com  $d/\alpha$  (eq. (8.3.1.10')), ou seja  $T_c \propto (d/\alpha - 1)$  para  $d/\alpha > 1$ , e  $T_c \propto \alpha/d$

para  $d/\alpha \gg 1$ . A população macroscópica do estado fundamental satisfaz  $N_0/N = 1 - (T/T_c)^{d/\alpha}$  para  $T \leq T_c$  e  $d/\alpha > 1$ . O calor latente  $L$  é obtido como uma função explícita de  $d/\alpha$  (eq. (8.3.2.21)); ela satisfaz  $L/T \propto d/\alpha - 1$  para  $d/\alpha > 1$ , e  $L/T \sim d/\alpha + 1$  para  $d/\alpha \gg 1$ . O resultado que emerge (aqui e no parágrafo (iv) e (v) que seguem) é que o limite  $p \rightarrow \infty$  é fundamentalmente diferente de qualquer outro caso (i.e.  $0 < p < \infty$ ). Além disso, todos os para-gases com  $p$  finito são qualitativamente similares, e são bem caracterizados pelo caso Fermi-Dirac ( $p=1$ ). Dentro deste contexto, a visão desenvolvida na ref. [ 85 ], com respeito à condensação de Bose-Einstein para  $d=3$ ,  $\alpha=2$  e um  $p$  qualquer, pode ser considerada errada.

iii) Para  $N$  fixo,  $p$  finito e baixas temperaturas, o potencial químico parte de  $T=0$  com um termo quadrático (eq. (8.3.1.20)); a curvatura muda de sinal em  $d/\alpha=1$ . No regime de altas temperaturas os dois primeiros (ou três, para  $p > 1$ ) termos dominantes (do potencial químico) não dependem de  $p$ .

iv) Para  $N$  fixo,  $p$  finito,  $d/\alpha$  arbitrário e temperaturas baixas o calor específico satisfaz  $C \propto T$  generalizando assim o resultado "standard" para elétrons quase-livres num condutor ( $d=3$ ,  $\alpha=2$ ,  $p=1$ ). No limite  $p \rightarrow \infty$  obtemos, para ambos os casos  $N$  fixo e não fixo,  $C \propto T^{d/\alpha}$  generalizando assim a lei de Debye para fónons acústicos num cristal ( $d=3$ ,  $\alpha=1$ ) e a lei  $T^{3/2}$  para magnons num ferromagneto de Heisenberg ( $d=3$ ,  $\alpha=2$ ).

v) Para  $N$  fixo,  $p$  e  $d/\alpha$  arbitrários, e temperaturas altas,  $C$  aproxima-se do valor clássico  $(d/\alpha)Nk_B$ . Para  $p$  pequeno (grande) o

suficiente,  $C$  aproxima-se deste valor por baixo (cima) quando  $d/\alpha > 1$ , e oposto acontece quando  $d/\alpha < 1$ ; consequentemente,  $C$  apresenta, para  $d/\alpha > 1$ , um máximo para  $p$  grande o suficiente ("cusp" no limite  $p \rightarrow \infty$ ) e apresenta para  $d/\alpha < 1$ , um máximo para  $p$  suficientemente pequeno.

vi) Para  $p$ ,  $d/\alpha$ ,  $T$  arbitrários e para os casos com  $N$  fixo e não fixo, a pressão  $P$  e a energia interna  $U$  estão relacionadas por  $U = (d/\alpha)PV$  ( $V \equiv$  volume) generalizando assim o resultado conhecido  $U \equiv 3PV/2$  para  $d=3$ ,  $\alpha=2$  e  $p=1, \infty$ .

vii) Para  $N$  não fixo,  $p$  arbitrário,  $d/\alpha$  e  $T$  a densidade de energia interna (proporcional à potência irradiada por unidade de área da caixa envoltória) satisfaz  $U/V \propto T^{d/\alpha+1}$  (eq. (8.4.6)) generalizando assim a lei  $T^4$  de Stefan-Boltzmann ( $d=3$ ,  $\alpha=1$ ,  $p \rightarrow \infty$ ).

## APÊNDICE A

### Generalização na Para-estatística da Integral de Sommerfeld

Neste apêndice generalizamos, para um  $p$  finito arbitrário, a integral de Sommerfeld, relacionada com a estatística de Fermi-Dirac e suas expansões em baixas temperaturas. Consideremos a integral

$$I(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy H(y) f(y; z) \quad (\text{A.1})$$

onde

$$f(y; z) \equiv \frac{1}{e^{y-z} - 1} - \frac{p+1}{e^{(p+1)(y-z)} - 1}, \quad p > 0 \quad (\text{A.2})$$

Para caracterizar a função  $H(y)$ , introduzimos

$$K(y) \equiv \int_{-\infty}^y dy' H(y') \quad (\text{A.3})$$

e assumimos que  $K(y)$  satisfaz as seguintes condições:

$$(1) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} K(y) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Portanto

$$H(y) = dK(y)/dy \quad (\text{A.5})$$

$$(ii) \lim_{y \rightarrow \infty} f(y; z) K(y) = 0 \quad (A.6)$$

$$(iii) K(y) \text{ é analítico em } y=z \quad (A.7)$$

Estas condições são quase sempre satisfeitas em situações físicas, desde que funções típicas  $H(y)$  se anulam identicamente para  $y < 0$ , assintoticamente comportam-se com uma lei de potência no limite  $y \rightarrow \infty$ , e são funções suaves em  $y=z$  [ $H(y)$  pode apresentar singularidades, mas são normalmente integráveis e localizam-se em lugares tais como  $y=0$ , e não em  $y=z$ ].

Integrando (A.1) par partes, obtemos

$$\begin{aligned} I(z) &= k(y)f(y; z) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dy k(y) \frac{df(y; z)}{dy} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dy k(y) \frac{df(y; z)}{dy} \end{aligned} \quad (A.8)$$

onde usamos as condições (A.4) e (A.6) e o fato que  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y; z) = p$ .

Expandindo  $K(y)$  em  $y=z$ , obtemos

$$\begin{aligned} I(z) &= -k(z) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{df}{dy} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n K(y)}{dy^n} \right]_{y=z} \int_{-\infty}^{\infty} dy (y-z)^n \frac{df}{dy} \right\} \\ &= pk(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2m)!} \left[ \frac{d^{2m} K(y)}{dy^{2m}} \right]_{y=z} \int_{-\infty}^{\infty} dy (y-z)^{2m} \frac{df}{dy} \right\} \end{aligned} \quad (A.9)$$

onde usamos o fato que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{df}{dy} = -p$$

e que  $df/dy$  é uma função par de  $(y-z)$ , e portanto todos os termos ímpares na soma sobre  $n$  anulam-se. Usando a conexão entre  $K(y)$  e  $H(y)$ , podemos reescrever a eq. (A.9) na seguinte forma:

$$I(z) = p \int_{-\infty}^z H(y) dy + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{d^{2m-1} H(y)}{dy^{2m-1}} \right]_{y=z} a_m \right\} \quad (\text{A.10})$$

com

$$\begin{aligned} a_m &\equiv \frac{1}{(2m)!} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2m} \frac{d}{dx} \left[ \frac{p+1}{e^{(p+1)x} - 1} - \frac{1}{e^x - 1} \right] \\ &= \frac{1}{(2m)!} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2m} \frac{d}{dx} \frac{1}{1 - e^x} \\ &= \frac{1}{(2m)!} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] 2^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2m}}{\sinh^2 x} \\ &= \frac{1}{(2m)!} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] (2\pi)^{2m} |B_{2m}| \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde no último passo usamos ref. [ 75 ] p. 362; os  $B_{2m}$  são os números de Bernoulli. Usando o fato que  $|B_{2m}| = (2m)! \zeta(2m) / (2^{2m-1} \pi^{2m})$  podemos finalmente expressar  $a_m$  como segue:

$$a_m = 2 S(2m) \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] \quad (\text{A.12})$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z dy H(y) f(y; z) &= p \int_{-\infty}^z H(y) dy + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ S(2m) \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[ \frac{d^{2m-1} H(y)}{dy^{2m-1}} \right] \right\} = p \int_{-\infty}^z H(y) dy + \frac{\pi^2}{3} \left( 1 - \frac{1}{(p+1)} \right) H'(z) + \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$+\frac{\pi^2}{45} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^3} \right] H'''(\epsilon) + \dots$$

que é a generalização que estávamos procurando.

Muito frequentemente  $H(y)$  é definido como segue:

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ Ay^\delta & \text{se } y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Em tal caso a eq. (A.13) pode ser reescrita como

$$\int_0^\infty dy H(y) f(y, z) = \quad (\text{A.15})$$

$$= Az^{\delta+1} \left\{ \frac{p}{\delta+1} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{S(2m)}{z^{2m}} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \prod_{j=0}^{2(m-1)} (\delta-j) \right] \right\}$$

Finalmente se identificamos  $y = \epsilon/k_B T$  e  $z = \mu/k_B T$ , a eq. (A.13) toma a forma

$$\int_{-\infty}^\infty d\epsilon H(\epsilon) f(\epsilon) = p \int_{-\infty}^\mu H(\epsilon) d\epsilon + 2 \sum_{m=1}^\infty \left\{ S(2m) \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^{2m-1}} \right] \times \right.$$

$$\times \left[ \mu^{2m} H^{(2m-1)}(\mu) \right] \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^{2m} \left. \right\} = p \int_{-\infty}^\mu H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{3} \left( 1 - \frac{1}{(p+1)} \right) \times$$

$$\times \left[ \mu^2 H'(\mu) \right] \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \frac{\pi^2}{45} \left[ 1 - \frac{1}{(p+1)^3} \right] \left[ \mu^4 H'''(\mu) \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\times \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^4 + o \left[ \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^6 \right]$$

onde na estimativa do resto,  $o((k_B T/\mu)^6)$ , assumimos que frequentemente  $H^{(n)}(\mu)$  é da ordem de  $H(\mu)/\mu^n$ .

## APENDICE B

Programa que calcula o valor do parâmetro onde o ciclo é superestável

```

1  C  PROGRAMA QUE CALCULA O VALOR DO PARAMETRO DO CICLO
2  C  SUPERESTAVEL PARA MAPAS SIMETRICOS E ASSIMETRICOS.
3  C  METODO HAC BAI-LIN.
4  C  PRECISAC QUADRUPLA.
5  C  NESTE PROGRAMA A ESTIMATIVA PARA Y0
6  C  ENCONTRAM-SE NUM ARQUIVO DE DADOS NA UNIDADE 1.
7  C  O CODIGO DA KNEADING SEQUENCE DEVE ESTAR ESCRITA NUM
8  C  ARQUIVO DE DADOS DEVE SEMPRE TERMINAR POR UM PONTO.
9  C  AJUSTAR O FORMAT 2 DE ACORDE COM A COLUNAS USADAS.
10 C  O EXPOENTE DO ERRO E O NUMERO DE CASAS DECIMAIS CORRETAS
11 C  NO VALOR DA RESPOSTA DO PARAMETRO SUPERESTAVEL
12 C  IMPLICIT REAL *16(A-H,C-Z)
13 C  INTEGER M(5000)/5000*0/,R/'R'/,P/'/' /
14 C  F(X)=X0*(1.000+S*X**(1.000/Z))
15 C  ERRO=1.000
16 E  READ (1,13,END=45) Y0
17 C  Z1=4.000
18 C  Z2=2.000
19 13  FORMAT(1X,F16.3)
20 C  READ (5,2,END=23)(M(I),I=1,5000)
21 23  DO 5 I=1,5000
22 C  NUM=I-1
23 C  IF (M(I).EQ.P) GO TO 6
24 5  CONTINUE
25 2  FORMAT (64 A1)
26 6  X0=1.000/Y0
27 C  DO 16 K=1,8000
28 C  X=X0
29 C  N=NUM-1
30 C  DO 3 I=1,N
31 C  Z=Z2
32 C  S=1
33 C  J=NUM-I+1
34 C  IF (M(J).NE.R) GO TO 2
35 C  S=-1
36 C  Z=Z1
37 3  X= F(X)
38 C  X=X0/X**(1.000/Z)
39 C  AB=1.000/0ABS(X-X0)
40 C  IF (AB.GT.ERRO) GO TO 17
41 C  X=X
42 10 CONTINUE
43 17 Y=1.000/X
44 C  NJ=NUM+1
45 C  WRITE (6,7) NJ,Z,Y,K
46 7  FORMAT ('P=',I4,2X,'Z=',F12.6,2X,'A=',F34.31,1X,I4)
47 C  GO TO 2
48 45 CONTINUE
49 C  STOP
50 C  END

```

## APÊNDICE C

Programa que calcula o expoente de Liapunov

```

1      C      ESTE PROGRAMA CALCULA OS EXPCENTES DE LYAPUNOV
2      C      DO MAPA ASSIMETRICC
3      C      NT E O NUMERO DE ITERACOES DO TRANSIENTE
4      C      NL E O NUMERO DE TERMOS NA SOMA DO EXPCENTE DE LYAPUNOV
5      C      NP E O NUMERO DE PONTOS
6      REAL*8 A,X,Y,ELYA1,E1,E2
7      REAL*8 SIGMA,YAB
8      Z1=2.000
9      Z2=Z1
10     NT=2000
11     NL=2000
12     NP=40
13     A=1.340000
14     E1=0.1000
15     E2=0.000
16     WRITE (6,21) E1,E2
17     21 FORMAT (1X,'E1=',D15.8,2X,'E2=',D15.8)
18     DO 9999 I=1,NP
19     SI(MA=0.000)
20     X=0.5000
21     A=A+0.00002000
22     DO 100 J=1,N1
23     IF (X .LT. 0.000) GO TO 10
24     X=1.000-E1-A*(DABS(X)**Z1)
25     GO TO 100
26     10 X=1.000-E2-A*(DABS(X)**Z2)
27     100 CONTINUE
28     C      JA SAIU O TRANSIENTE
29     DO 110 JI=1,NL
30     IF (X .LT. 0.000) GO TO 50
31     X=1.000-E1-A*(DABS(X)**Z1)
32     GO TO 690
33     50 X=1.000-E2-A*(DABS(X)**Z2)
34     690 IF (X .LT. 0.000) GO TO 20
35     Y=-DBLF(Z1)*A*(DABS(X)**(Z1-1.))
36     YAE=DABS(Y)
37     GO TO 23
38     20 Y=DBLF(Z2)*A*(DABS(X)**(Z2-1.))
39     YAE=DABS(Y)
40     23 IF (YAB .LT. 1.00-12)GO TO 110
41     SIGMA=SIGMA+DLOG(YAE)
42     110 CONTINUE
43     JCI=NL+1
44     ELYA1=SIGMA/FLCAT(JCI)
45     WRITE (6,123) A,ELYA1
46     123 FORMAT (1X,'A=',E18.10,2X,'ELYA1=',E15.7)
47     9999 CONTINUE
48     STOP
49     END

```

## APENDICE D

Programa que calcula o expoente de incerteza

```

1      C      CALCULO DO EXPOENTE DE INCERTEZA
2      C      OS NUMEROS GERADOS RANDOMICAMENTE ESTAO NUM ARQUIVO.
3      C      NP E O PERICUDO DE UM DOS ATRADORES
4      C      ST E O NUMERO DE PONTOS RANDOMICOS GERADOS
5      C      EPS E O VALOR DA INCERTEZA
6      C      NT E O TRANSIENTE DAS ITERACOES
7      C      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
8      EPS=.0006
9      A=1.25000
10     NT=500
11     NP=2
12     ST=10000.000
13     SN=0.000
14     7      READ (5,21,END=214) X
15     21     FORMAT (1X,F17.14)
16     X0=X
17     DO 510 I=1,NT
18     X=F(X,A)
19     500    CONTINUE
20     C      JA TERMINOU O TRANSIENTE
21     YY=X
22     X=X0+EPS
23     DO 501 I=1,NT
24     X=F(X,A)
25     501    CONTINUE
26     C      JA TERMINOU O TRANSIENTE
27     DO 610 I=1,NP
28     X=F(X,A)
29     T1=YY-X
30     T=ABS(T1)
31     IF (T.LE.1.0E-5) GO TO 4
32     610    CONTINUE
33     SN=SN+1.000
34     GO TO 9999
35     4      X=X0-EPS
36     DO 531 I=1,NT
37     X=F(X,A)
38     531    CONTINUE
39     C      JA TERMINOU O TRANSIENTE
40     DO 616 I=1,NP
41     X=F(X,A)
42     T1=YY-X
43     T=CABS(T1)
44     IF (T.LE.1.0E-5) GO TO 7
45     616    CONTINUE
46     SN=SN+1.000
47     9999   GO TO 7
48     214    S=SN/ST
49     WRITE (6,24) EPS,ST,SN
50     34     FORMAT(1X,'EPS=',F16.12,'ST=',F10.3,'SN=',F12.6)
51     WRITE (6,50) S
52     50     FORMAT (1X,'S=',F10.6)
53     STOP
54     END
55     C      AQUI COMECA O MAPA
56     FUNCTION F(X,A)
57     IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
58     IF (X.LE.000) GO TO 200

```

```
59      F=1.000-A*DABS(X)**2
60      GO TO 202
61      200  F=.9000-A*DABS(X)**2
62      202  CONTINUE
63      RETURN
64      END
```

## APENDICE E

### Programa que calcula $f(\alpha)$

```

1  C   PROGRAMA QUE CALCULA F(ALFA) EM FUNCAO DE ALFA
2  C   NX NUMERO DE ELEMENTOS EM X E Y
3  C   NA UNIDADE DE LEITURA 5 ESTAO OS VALORES DOS PONTOS FIXOS
4  C   NOS PONTOS DE ACUMULACAO ORDENADOS EM ORDEM DECRESCENTE
5  C   NA UNIDADE 1 ESTAO OS VALORES DE T AL
6  C   IMPLICIT REAL *8 (A-H,(-Z))
7  C   INTEGER IC, NX, IER, J, M1, M2
8  C   REAL *8 X(26), Y(26), BPAR(4), C(25,3), U(26), DS(26), DDS(26), F(26)
9  C   I=C
10 23  READ (1,1,END=44) T
11  C   REWIND 5
12  C   SN=0.000
13  C   TN=0.000
14 10  READ (5,1,END=99) A
15 15  A1=A
16  C   READ (5,1,END=99) A
17 1  FCFMAT (1X,F10.15)
18  C   EPS=CABS(A1-A)
19  C   S=EPS**(-T)
20  C   TN=TN+1.000
21  C   SN=SN+S
22  C   GO TO 19
23 99  CG=DLGG(SN)/ELGG(TN)
24  C   I=I+1
25  C   X(I)=CG
26  C   Y(I)=T
27  C   DIM=1/(CG-1.000)
28 865 WRITE (6,23) CG,DIM,T
29 33  FORMAT (1X,'Q=' ,F15.8,2X,'DIM=' ,F12.8,2X,' T=' ,F12.8)
30  C   GO TO 23
31  C   JA CALCULOU O CONJUNTO C E T
32 44  NX=I
33  C   IC=NX-I
34  C   EPAR(1)=.000
35  C   BPAR(2)=.000
36  C   EPAR(3)=.000
37  C   BPAR(4)=.000
38 40  CALL IC SICO (X,Y,NX,BPAR,C,IC,IER)
39  C   M1=NX
40  C   M2=0
41  C   DO 74 I=1,NX
42 74  U(I)=X(I)
43  C   CALL DCSEVJ (X,Y,NX,C,IC,U,DS,M1,DDS,M2,IER)
44  C   DO 11 I=1,NX
45 11  F(I)=X(I)*DS(I)-Y(I)
46  C   WRITE (6,8) (DS(I),F(I),I=1,NX)
47 8  FORMAT (1X,'ALFA=' ,F12.8,2X,' F=' ,F12.8)
48 86  STOP
49  C   END

```

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* 20, 130 (1963).
- [2] T. Li e J. Yorke, *Amer. Math. Monthly* 82, 985 (1975).
- [3] D. Ruelle e F. Takens, *Commun. Math. Phys.* 20, 167; 23, 343 (1971).
- [4] M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19, 25 (1978); *Los Alamos Science* 1 (1980).
- [5] R.M. May, *Nature* 261, 459 (1976).
- [6] Y. Pomeau, P. Manneville, *Commun. Math. Phys.* 74, 189 (1980).
- [7] S. Grossmann e S. Thomae, *Z. Naturforsch.* 32 A, 1353 (1977).
- [8] P. Coullet e C. Tresser, *J. Phys. (Paris) Coll.* 39, C5 (1978).
- [9] N. Metropolis, M.L. Stein, P.R. Stein, *J. Combinatorial Theory (A)* 15, 25 (1973).
- [10] P. J. Myrberg, *Ann. Acad. Sci. Fennicae, A.I.* 253; *ibid.* 259 (1958); 268 (1959); 295 (1960); 336/3 (1964); 348 (1964).
- [11] A. N. Sarkowskii, *Ukranian Math. J.* 16, 61 (1964).
- [12] B. Derrida, A. Gervois e Y. Pomeau, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol XXIX, n° 3, p. 305, 1978.
- [13] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia e B. I. Shraiman, *Phys. Rev. A* 33, 1141 (1986).
- [14] H. G. E. Hentschel e I. Procaccia, *Physica* 8D, 435 (1983).
- [15] P. Grassberger, *J. Stat. Phys.* 19, 25 (1981).
- [16] B. A. Huberman e J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* 45, 154 (1980).
- [17] J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, B. A. Huberman, *Phys. Rep.* 92, 45 (1982).

- [18] A. Libchaber, C. Laroche e S. Fauve, *Le Journal de Physique Letters* **43**, L-211(1982).
- [19] J.P. Gollub e S. V. Benson, *J. Fluid Mech.* **100**, 449 (1980).
- [20] M. Giglio, S. Musazzi e V. Perini, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 243 (1981).
- [21] A. Libchaber e J. Maurer, em "Nonlinear Phenomena at Phase Transition and Instabilities" ed. T. Riste (Plenum, New York) p. 259.
- [22] P.L. Lindsay, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1349 (1981).
- [23] J. S. Testa, J. Perez e C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714 (1982).
- [24] F. T. Arecchi e F. Lisi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 94 (1982).
- [25] W. J. Yeh e Y H. Kao, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1888 (1982).
- [26] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs e R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982).
- [27] F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni e J. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982).
- [28] C. O. Weiss, A. Godone e A. Olafsson, *Phys. Rev. A* **26**, 34 (1983).
- [29] W. Lauterborn e E. Cramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1445 (1981).
- [30] C. W. Smith, M. J. Tejwani e D. A. Farris, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245 (1982).
- [31] R. H. Simoyi, A. Wolf e H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245 (1982).
- [32] V. Franceschini e C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.* **21**, 707 (1979).
- [33] T. Kai, *J. Stat. Phys.* **29**, 329 (1982).

- [34] M. Cosnard, C. R. Acad. Sci. (Paris) 293, 619 (1981); J. E. Hirsh, M. Nauenberg and D. J. Scalapino, Phys. Lett. 87 A, 391 (1982).
- [35] B. Hu e J. Rudnick, Phys. Rev. Lett, 48, 1645 (1982).
- [36] Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart e C. Vidal, J. Phys. Lett. 42, L271 (1981).
- [37] C. Jeffries e J. Perez, Phys. Rev. A 26, 2117 (1982).
- [38] P. Bergé, M. Dubois, P. Maneville e Y. Pomeau, Phys. Rev. Lett. 41, L341 (1980).
- [39] L. D. Landau, Akad. Nauk. Doklady 44, 339 (1944); E. Hopf, Commun. Pure Appl. Math. 1, 303 (1948).
- [40] S. E. Newhouse, D. Ruelle e F. Takens, Commun. Math. Phys. 64, 35 (1978).
- [41] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, S. J. Shenker, Physica 5D, 370 (1982); D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna, E. D. Siggia, Phys. Rev. Lett. 49, 132 (1983).
- [42] J. P. Gollub e H. Swinney, Phys. Rev. Lett 35, 927 (1975).
- [43] D. Arneodo, P. Couillet e C. Tresser, Phys. Lett. 70A, 74 (1979).
- [44] M. C. de Sousa Vieira, E. Lazo e C. Tsallis, Phys. Rev. A 35, 945 (1987); M. C. de Sousa Vieira e C. Tsallis, a ser publicado em "Disordered Systems in Biological Models", ed. por L. Peliti e S. A. Solla (World Scientific, 1988); M. C. de Sousa Vieira e C. Tsallis, a ser publicado em "Instabilities and Nonequilibrium Structures", ed. por E. Tirapegui and D. Villaroel (D. Reidel Publishing Company, 1988); M. C. de Sousa Vieira e C. Tsallis, a ser publicado em

"Universalities in Condensed Matter Physics", ed. por R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal e N. Bocara (Springer Proc. Phys., Springer, Berlin, Heidelberg, 1988); M. C. de Sousa Vieira e C. Tsallis, a ser publicado.

- [45] R. V. Jensen e L. K. H. Ma, Phys. Rev. A 31, 3993 (1985).
- [46] A. A. Hnilo e M. C. de Sousa Vieira, J. Opt. Soc. Am. B 5, 928 (1988).
- [47] M. Octavio, A. da Costa e J. Aponte, Phys. Rev. A 34, 1512 (1986).
- [48] J. M. Gambaudo, I. Procaccia, S. Thomae e C. Tresser, Phys. Rev. Lett. 57, 925 (1986).
- [49] T. Rikatake, Proc. Cambridge Philos. Soc. 54, 89 (1958).
- [50] O. E. Rössler, Z. Naturforsch, 31a, 1664 (1976).
- [51] P. Szépfalusy e T. Tél, Physica 16D, 252 (1985); Z. Kaufmann, P. Szépfalusy e T. Tél, preprint.
- [52] C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott e J. A. Yorke, Phys. Lett. 99A, 415 (1983); M. Napiórkowski, Phys. Lett. 113A, 111 (1985).
- [53] Y. Kuramoto e S. Koga, Phys. Lett A 92, 1 (1982).
- [54] M. J. Feigenbaum, Comm. Math. Phys. 77, 65 (1980).
- [55] B. Hu e I. I. Satija, Phys. Lett. 98A, 14A (1983).
- [56] P. R. Hauser, C. Tsallis e E. M. F. Curado, Phys. Rev. A 30, 2074 (1974).
- [57] Z. Wang-Zheng, H. Bai-Lin, W. Guang-Rui e C. Shi-Gang, Commun. Theor. Phys. 3, 283 (1984).
- [58] J. P. Eckmann and P. Wittwer, "Computer Methods and Borel Summability Appliedd to Feigenbaum's Equation, Lectures

Notes in Physics, vol 27 (Springer, Berlin, 1985).

- [59] J.P. van der Weele, H.W. Capel and R. Kluiving, Phys. Lett. 110 A, 15 (1986); J.P. van der Weele, H.W. Capel and R. Kluiving, Physica 145 A, 425 (1987).
- [60] J. K. Bhattacharjee and K. Banerjee, J. Phys. A 20, L269 (1987).
- [61] M. O. Magnasco e D.L. Gonzalez, comunicação privada.
- [62] H. Bai-Lin, ed., Chaos, uma seleção de reprints (World Scientific, 1983).
- [63] H. Kaplan, Phys. Lett. 27 A, 365 (1983).
- [64] M. C. de Sousa Vieira, a ser publicado em J. Stat. Phys.
- [65] G. Gentile, Nuovo Cimento 17, 493 (1940); 19, 109 (1942).
- [66] S. I. Ben-Abraham, Am. J. Phys. 38, 1335 (1970).
- [67] A. J. Kalnay, Int. J. Theor. Phys. 16, 481 (1977).
- [68] Y. Ohnuki e S. Kamefuchi, Quantum Field Theory and Parastatistics (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
- [69] M. Cattani e N.C. Fernandes, Rev. Bras. Fis. 12, 585 (1982); Nuovo Cimento 79A, 107 (1984); 87B, 70 (1983).
- [70] R.Y. Levine e Y. Tomozawa, Phys. Lett. 128B, 189 (1983).
- [71] I. G. Kaplan, Theor. Math. Phys. 27, 466 (1976).
- [72] D. J. Thouless e Yong-Shi Wu, Phys. Rev. B 31, 1191 (1985).
- [73] M. C. de Sousa Vieira e C. Tsallis, J. Stat. Phys. 48, 97 (1987).
- [74] J. D. Gunton e M. J. Buckingham, Phys. Rev. 166, 152 (1968).
- [75] M. van den Berg, J. T. Lewis, e J V. Pule, Helv. Phys. Acta 59, 1271 (1986); M. van den Berg, J.T. Lewis e M. Lunn, Helv. Phys. Acta 59, 1289 (1986).

~~.....~~steyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series  
~~.....~~s, 4th ed. (Academic Press, New York, 1965).

.....  
Statistical Mechanics (Wiley, New York, 1963),

.....  
..... 3.

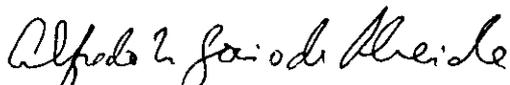
# "CAOS EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS: INFLUÊNCIA DA ASSIMETRIA"

MARIA DA CONCEIÇÃO DE SOUSA VIEIRA

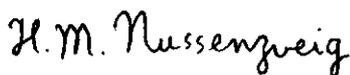
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Constantino Tsallis - Presidente



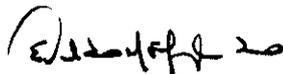
Alfredo Miguel Osório de Almeida



Herch Moyses Nussenzveig



Roberto Fernandes Silva Andrade



Evaldo Mendonça Fleury Curado