

CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO

ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS NA
TEORIA DE BRANS-DICKE, SOLUÇÕES COM
ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO E UNIVERSOS VISCOSOS

TESE DE

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 1988

DEDICATÓRIA

A Carmem Coeli, minha mãe, que em sua breve passagem por esse mundo me fez experimentar a doce ilusão de ser feliz eternamente ...

É a ela, nesse momento, que me volto emocionado para expressar as palavras que seus ouvidos não escutaram, as palavras de meu agradecimento final.

HOMENAGEM PŪSTUMA

Ao saudoso CARLOS MARCIO DO AMARAL, prof
fessor brilhante, com quem compartilhei
momentos de entusiasmo pela Física e pe
la Natação, ao contemplar as águas sere
nas e azuis da piscina do Clube Guanaba
ra.

AGRADECIMENTOS

- A Mario Novello, pela orientação desta Tese e por ter me estimulado a continuar trabalhando nos momentos mais graves e difíceis da minha vida. Seu espírito criativo nunca deixam de me impressionar.

- Ao meu pai, Carlos, e ao meu irmão, Germano, companheiros de existência e de infortúnio, pela solidariedade e pelo amor que sempre demonstraram.

- A Eulina, que com seu carinho, tem tornado mais alegres os meus dias.

- A Ana Tereza, amiga inseparável e insuperável, onde encontrei força nos instantes de fraqueza.

- A Myriam, que datilografou esta Tese, pelo excelente trabalho que fez e pela atenção que sempre teve comigo.

- A Vera Regina, cuja simpatia torna a biblioteca do CBPF ainda mais agradável.

- Aos meus queridos amigos Nivaldo e Márcia, que com a pequenina Beatriz, formam um trio adorável.

- Ao Ivano Damião Soares, a quem jamais deixei de admirar por sua personalidade e seriedade profissional.

- Aos colegas do DRP: Maurício, Bartolomeu, Renato, Nami, Cláudia, Renato Portugal, Nelson, Assunta, Joel, Luciane, Luiz Alberto, Mario Assad, Filipe, Sassi, Helder, e outros cujos nomes me escapam agora.

- A Renato Pires, com quem pude conversar numa outra língua gem.

- Ao Zê e ao Elias, pela paciência e presteza diante das minhas exageradas solicitações de xerox.

- A Leila Velho, Leilinha, que conheci numa fase existencialista e que trocou Camus pelo Nelsinho.

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq, por ter me proporcionado sempre um ambiente estimulante e cordial durante os anos de pós-graduação.

- Ao Departamento de Física da UFPb, em João Pessoa, por ter me acolhido com confiança e estímulo.

- A Coordenação de Auxílio ao Pessoal do Ensino Superior (CAPES), pela ajuda financeira.

- A todos, enfim, que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desta Tese.

ABSTRACT

Using dynamical system theory we investigate homogeneous and isotropic models in Brans-Dicke theory for perfect fluids with general equation of state and arbitrary ω . Phase diagrams are drawn on the Poincaré sphere which permits a qualitative analysis of the models. Based on this analysis we construct a method for generating classes of solutions in Brans-Dicke theory. The same technique is used for studying models arising from non-minimal coupling of electromagnetism with gravity. In addition, viscous fluids are considered and non-singular solutions with bulk viscosity are found.

RESUMO

Usando a teoria dos sistemas dinâmicos, investigamos modelos homogêneos e isotrópicos na teoria de Brans-Dicke para fluido perfeito, equação de estado geral e ω arbitrário. Através dos diagramas de fase projetados na esfera de Poincaré, fazemos uma análise qualitativa dos modelos. A partir desta análise formulamos um método para a obtenção de classes de soluções na teoria de Brans-Dicke. Usamos a mesma técnica para estudar modelos originados do acoplamento não-mínimo do eletromagnetismo com a gravitação. Consideramos também fluidos viscosos e apresentamos soluções não-singulares com segunda viscosidade.

SUMÁRIO

	Pág.
DEDICATÓRIA	ii
HOMENAGEM PÓSTUMA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO/ABSTRACT	vi
SUMÁRIO	vii
INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO I: Cosmologia do "Big Bang" e Cosmologia Não-Singular ...	04
1.1 - O Universo Observável	04
1.2 - Cosmologia do "Big Bang": o Modelo de Friedmann-Robertson-Walker	05
1.3 - Cosmologia Não-Singular	15
CAPÍTULO II: Análise Qualitativa de Modelos Cosmológicos com Viscosidade	30
2.1 - Viscosidade Linear	31
2.2 - Viscosidade Quadrática	38
2.3 - Soluções Analíticas	40
CAPÍTULO III: Acoplamento Não-mínimo: Análise Qualitativa das Soluções Cosmológicas	44
CAPÍTULO IV: Análise Qualitativa de Modelos Cosmológicos na Teoria de Brans-Dicke	52
4.1 - As Equações de Campo	53
4.2 - Análise Qualitativa do Sistema Dinâmico	55
4.3 - Regiões de Densidade de Energia Negativa e Soluções Fisicamente Inadmissíveis	56
4.4 - Os Raios Invariantes	59
4.5 - Representação dos Modelos Cosmológicos de Brans-Dicke na Esfera de Poincaré: os Diagramas de Fase	63
4.6 - Propriedade de Estabilidade do Espaço-tempo de Minkowski na Teoria de Brans-Dicke	97

4.7 - Conclusão	98
CAPÍTULO V: Um Método para Gerar Soluções na Teoria de Brans-Dicke .	103
5.1 - A Obtenção de Soluções a partir dos Raios Invariantes .	106
5.2 - Soluções de Vácuo e a Equação da Densidade de Energia .	109
5.3 - O Limite da Relatividade Geral	111
5.4 - O Caso Radiação	112
5.5 - Comentários Finais	114
5.6 - Conclusão	115
APÊNDICE I: Introdução à Teoria dos Sistemas Dinâmicos	116
I.1 - Teoremas Fundamentais e a Aproximação Linear	116
I.2 - Sistemas Homogêneos	132
I.3 - Análise do Sistema Dinâmico no Infinito	144
APÊNDICE II: Análise do Sistema Dinâmico obtido das Equações de Brans-Dicke	156
II.1 - Análise da Origem	156
II.2 - Análise no Infinito	159
APÊNDICE III: Projeção Estereográfica do Plano de Fase	165
CONCLUSÃO	169
REFERÊNCIAS	172

*"Une étoile me regarde et dit:
Nous voici, toi et moi,
Chacun à notre place ...
Que comptes-tu faire?
Je réponds: "Autant que je sache,
Attendre et laisser le temps passer,
jusqu'à ce que vienne mon heure".
"Moi aussi, dit l'étoile, moi aussi ..."*

(Thomas Hardy, *Attente*, trad. de
Claude Elsen)

INTRODUÇÃO

A constatação de que o chamado modelo padrão, que prevê um início singular para o cosmo ("big bang"), não constitui atualmente um quadro teórico plenamente satisfatório tem motivado os cosmólogos a desenvolver novas teorias que proporcionam uma melhor compreensão do nosso universo físico. Nesta tese abordamos três dessas possibilidades: a teoria do universo viscoso; modelos não-singulares originários do acoplamento não-mínimo entre a gravitação e um campo vetorial eletromagnético); e a teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke. Esses três casos juntamente com o modelo padrão são apresentados no Capítulo I.

A teoria do universo viscoso foi concebida inicialmente por Misner^[1] ao tentar explicar o alto grau de isotropia observado no universo atual. Ao invés de postular que a propriedade do universo isotrópico era primordial, Misner demonstrou que a viscosidade gerada por neutrinos pode fornecer um mecanismo de isotropização. Em 1973, Murphy^[2] introduzindo a segunda viscosidade ("bulk viscosity") no tensor momentum-energia que descreve o conteúdo material do universo, apresentou uma solução não-singular das equações de Einstein partindo de uma geometria homogênea e isotrópica. A observação de que efeitos quânticos de criação de partículas poderiam ser descritos através de termos de viscosidade no tensor momentum-energia foi feita por Zeldovich e Starobinski^[3]. Em particular, Vereshkov et al^[4] mostraram que a criação de partículas num universo de Kasner está ligada a pre

sença de termos não-lineares do coeficiente de expansão do universo na parte dissipativa do tensor momentum-energia. Termos viscosos não-lineares no coeficiente de expansão dão origem a fluidos não-Newtonianos que juntamente com os chamados fluidos não-Stokesianos foram estudados por Novello e Araújo^[5], Novello e 'Olival^[6] e Novello^[7]. Soluções analíticas descrevendo modelos não-singulares com viscosidade quadrática foram encontradas por nós e são apresentadas num artigo publicado pela Revista Brasileira de Física, com o título "Cosmological solutions with quadratic viscosity" (ver ref.[8]). No capítulo II, apresentamos também a análise qualitativa de modelos com viscosidade através da teoria dos sistemas dinâmicos a qual nos permite uma visão global das soluções.

O capítulo III é dedicado ao acoplamento não-mínimo do campo eletromagnético com a gravitação. Após descrever com algum detalhe a solução obtida por Novello e Salim^[9], a qual representa um universo homogêneo, isotrópico e não-singular, passamos à análise qualitativa das soluções geradas por este tipo de acoplamento. A representação das soluções é feita através de curvas situadas sobre a esfera de Poincaré, de onde tiramos conclusões a respeito do comportamento global dos modelos. Os resultados que obtivemos foram publicados na revista General Relativity and Gravitation, com o título "Non-minimal coupling: the spectrum of cosmic solutions" (ver ref. [10]).

Nos capítulos IV e V examinamos a teoria de Brans-Dicke, uma teoria escalar-tensorial da gravitação, que considera a 'constante' gravitacional Newtoniana como uma variável dinâmica evoluindo junto com o cosmo. Analisando uma geometria

homogênea e isotrópica, mostramos que é possível reduzir as equações de campo a um sistema dinâmico planar e autônomo. Tomamos como fonte da curvatura e do campo escalar um fluido perfeito satisfazendo uma equação de estado do tipo $p = \lambda\rho$. Os diagramas correspondentes ao espaço de fase das soluções são projetadas na esfera de Poincaré para diferentes valores de λ e de ω (a constante de acoplamento do campo ϕ). A partir da análise dos diagramas de fase, elaboramos um método para a obtenção de classes de soluções conhecidas na literatura. Os resultados relatados nos capítulos IV e V foram obtidos por nós e submetidos para a publicação na revista *Astrophysics and Space Science* em dois artigos com os títulos: "Qualitative analysis of cosmological models in Brans-Dicke theory" e "Exact Brans-Dicke solutions: a dynamical system approach" (ver refs: [11] e [12]).

"It sometimes comes as a surprise that science can make any contribution at all to topics such as the creation and end of all things"

(P.C.W. Davies, "Space and Time in the Modern Universe")

CAPITULO I

COSMOLOGIA DO "BIG BANG" E COSMOLOGIA NÃO-SINGULAR

I. O UNIVERSO OBSERVÁVEL

Ao tentar se construir um modelo cosmológico que possa descrever macroscopicamente o universo é necessário, antes de tudo, conhecer os dados observacionais de que dispomos atualmente. De uma maneira um tanto sucinta e simplificada, poderíamos enumerar algumas das principais características do universo inferidas a partir da Cosmologia observacional:

a) o universo é espacialmente homogêneo.

Considerando distâncias espaciais da ordem de 100 Mpc pode-se afirmar que o universo apresenta homogeneidade espacial^[13]. Evidentemente, em pequena escala, as inhomogeneidades extremas caracterizam o cosmo como absolutamente irregular ou "granuloso"^[14].

b) o universo é isotrópico.

As evidências de isotropia, isto é, equivalência entre todas as direções espaciais, provém principalmente da observação dos vários tipos de radiação que chegam até nós: ondas de rádio, raios X, raios cósmicos, radiação de fundo, etc^[15].

c) o universo atravessou uma fase "quente" e densa.

A descoberta da radiação de fundo ("background radiation") em 1965 por Penzias e Wilson, cujo espectro é idêntico ao de uma radiação emitida por um corpo negro à temperatura de 2.7°K , sugere fortemente que o universo passou por uma fase de temperatura extremamente elevada e altíssima densidade [16].

d) o universo está em expansão.

O desvio para o vermelho ("red shift") observado no espectro da radiação emitida pelas galáxias tem sido interpretado como sendo uma indicação de que as galáxias se afastam de nós (efeito Dopler). Em 1929, Hubble observou que a velocidade de afastamento (ou recessão) de uma galáxia é proporcional à sua distância. O fato de aceitarmos a homogeneidade do universo associada à hipótese de que não ocupamos uma posição privilegiada no mundo nos leva a concluir que temos, na verdade, uma expansão geral do cosmo [17].

II. COSMOLOGIA DO "BIG BANG": O MODELO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

O modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), obtido inicialmente por Friedmann [18] em 1922, é considerado ainda hoje como o mais simples modelo cosmológico capaz de, em linhas gerais, estar de acordo com os dados observacionais apresentados acima. Todavia, como veremos, este é um modelo singular, que prevê um início para o universo através de uma grande explosão ("big bang"), quando, então, toda a matéria estaria concentrada num único ponto, o raio do universo seria nulo e a temperatura seria infinita. Atualmente podemos dizer que boa parte dos cosmólogos relutaria em aceitar que a existência desse estado deva

ser necessariamente inferida a partir dos dados observacionais ou mesmo de argumentos teóricos, o que, certamente, constitui uma forte motivação para a busca de novas teorias. Neste capítulo, descreveremos as características fundamentais do modelo de Friedmann-Robertson-Walker.

Antes de tudo, admitiremos que o espaço-tempo possui a estrutura matemática correspondente a uma variedade diferenciável 4-dimensional V^4 sobre a qual podemos definir um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ (*). Neste ponto, outras hipóteses se seguem:

i) O elemento de linha em V^4 será dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ são as componentes do tensor métrico que admitiremos simétrico com assinatura (+ - - -), e que determina a estrutura local do cone.

ii) O modelo de Friedmann-Robertson-Walker é uma solução das equações de Einstein. Portanto, aqui, deveremos supor que a interação gravitacional é corretamente descrita pela teoria da relatividade geral cujas equações de campo são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (**), \quad (I.1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, Λ a constante cosmológica (que pode ser tomada nula), G a constan

(*) Nesta tese, usaremos a seguinte notação: índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos de 1 a 3. Com relação à notação tensorial adotada por nós, seguiremos estritamente a convenção da referência [20].

(**) Adotaremos, daqui por diante, um sistema de unidades no qual $c=1$ e, com exceção dos Cap. IV e V, $8\pi G=1$.

te gravitacional Newtoniana, c a velocidade da luz e $T_{\mu\nu}$ o tensor momentum-energia que descreve o conteúdo material do universo (***) .

O tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, que aparece no lado direito das equações de Einstein, pode ser decomposto em suas partes irredutíveis em relação a um campo vetorial representando a 4-velocidade de um observador [19][20]. Assim, suponhamos que $v^\mu(x)$ seja um campo vetorial do tipo tempo normalizado à unidade ($v^\mu v_\mu = 1$). A forma geral do tensor momentum-energia será dada por

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} v_{\nu)} \quad , \quad (I.2)$$

onde as quantidades ρ , p , $\pi_{\mu\nu}$ e q_μ representam, respectivamente, a densidade total de energia, a pressão escalar, a pressão anisotrópica e o fluxo de energia medidos localmente por um observador que se move com 4-velocidade v^μ . Usualmente, em Cosmologia, escolhe-se v^μ como sendo o campo vetorial que representa a velocidade da matéria no universo. As curvas integrais de v^μ podem, portanto, ser identificadas com as linhas de universo de pontos materiais, os quais chamaremos de observadores fundamentais. O tensor $h_{\mu\nu}$, na equação acima, definido por $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$, projeta objetos geométricos definidos na variedade espaço-tempo V^4 no sub-espaço H ortogonal a v^μ . Considerando as galáxias (ou os

(***) Para o tensor de Riemann $R^\alpha_{\eta\beta\gamma}$, a partir do qual são definidos o tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$) e o escalar da curvatura ($R = R^\mu_{\mu}$), adotamos a definição $R^\lambda_{\eta\beta\alpha} = \Gamma^\alpha_{\beta\eta,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\eta\lambda,\beta} + \Gamma^\alpha_{\tau\lambda} \Gamma^\tau_{\beta\eta} - \Gamma^\alpha_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\lambda\eta}$, onde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ representa as componentes da conexão métrica.

aglomerados de galáxias) como pontos materiais cujo movimento médio é dado pelo 4-vetor v^μ , podemos descrever todo o conteúdo material do universo usando a aproximação de um fluido ("fluido galáctico"). Na verdade, a equação (I.2) é bastante conhecida em Hidrodinâmica e expressa a distribuição de energia-momentum de um fluido geral [21].

A estrutura do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ depende, portanto, do tipo de fluido que considerarmos, de acordo com nossa aproximação. Naturalmente, devido ao fato de que nas equações de Einstein o lado esquerdo depende unicamente da geometria do espaço-tempo, nem todo tipo de fluido é compatível com uma dada geometria. Por exemplo, para modelos homogêneos e isotrópicos, q_μ e π_{ij} ($i \neq j$) devem ser nulos. Se, além disso, supusermos que não existem processos viscosos, então teremos o que se denomina fluido perfeito, com o tensor momentum-energia expresso por

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} \quad , \quad (I.3)$$

onde p é a pressão termodinâmica do fluido. Vale ressaltar que o modelo de Friedmann-Robertson-Walker admite que o conteúdo material do universo pode ser identificado a um fluido perfeito.

Consideremos, agora, a derivada covariante $v_{\mu;\nu}$ do vetor v_μ . Podemos decompor $v_{\mu;\nu}$ da seguinte maneira [19][20]:

$$v_{\mu;\nu} = a_\mu v_\nu + \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad , \quad (I.4)$$

onde $a_\mu = \dot{v}_\mu = v_{\mu;\alpha} v^\alpha$, $\theta = v^\alpha{}_{;\alpha}$, $\sigma_{\mu\nu} = h^\alpha{}_{[\mu} h_{\nu]}{}^\beta v_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu} =$

$= h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} v_{\alpha;\beta}$. As quantidades a_{μ} , θ , π^{ν} e $\sigma_{\mu\nu}$, representam a aceleração, expansão, deformação ("shear") e vorticidade (ou rotação) do fluido que tem como campo de velocidade o vetor v^{μ} .

A conservação de energia e momentum do fluido pode ser expressa pela equação

$$T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad . \quad (I.5)$$

Esta equação é consistente com as equações de Einstein uma vez que a divergência do lado esquerdo de (I.1) é nula^[22].

É possível separar a equação de conservação da energia da equação de conservação do momentum da seguinte forma. Projetando (I.5) na direção de v^{μ} , isto é, tomando $T_{\mu}^{\nu} v^{\mu}$, obtemos:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^{\mu} v_{\mu} + q^{\mu}{}_{;\nu} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (I.6)$$

que expressa a conservação de energia. Por outro lado, se projetarmos (I.5) no espaço local de repouso do observador que tem 4-velocidade v^{μ} (multiplicando a I.5 pelo tensor h_{α}^{μ}), obtemos

$$\begin{aligned} (\rho + p) \dot{v}_{\alpha} - p_{,\beta} h^{\beta}_{\alpha} + \dot{q}_{\beta} h^{\beta}_{\alpha} + \theta q_{\alpha} + q^{\beta} \theta_{\alpha\beta} + q^{\beta} \omega_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha}^{\beta}{}_{;\beta} + \\ + \pi^{\beta\lambda} \sigma_{\beta\lambda} v_{\alpha} = 0^{(*)} \quad , \end{aligned} \quad (I.7)$$

onde $\theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ é a vorticidade.

(*) A equação (I.7) representa uma generalização relativista da equação de Navier-Stokes^[21].

Na presença de fenômenos de dissipação e de transferência de energia é necessário especificar as relações fenomenológicas entre as quantidades $\pi_{\mu\nu}$, p , q_μ e os parâmetros cinemáticos do fluido θ , a_μ , $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$. Aqui, porém, desprezemos os termos relativos à transferência de energia, e consideremos apenas fenômenos de dissipação devidos a processos viscosos. Se $\pi_{\mu\nu}$ for uma função contínua do tensor de dilatação $\theta_{\mu\nu}$, isto é, $\pi_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(\pi_{\alpha\beta})$, então dizemos que o fluido é Stokesiano^[20]. É possível mostrar que para modelos homogêneos e isotrópicos

$$\pi_{\mu\nu} = f(\theta)h_{\mu\nu} \quad , \quad (I.8)$$

onde $f(\theta)$ é um polinômio em θ , cujos coeficientes podem depender da energia do fluido. Nesse caso, o tensor momentum-energia terá a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - \tilde{p} h_{\mu\nu} \quad , \quad (I.9)$$

onde $\tilde{p} = p - f(\theta)$ funciona como uma "pressão efetiva".

iii) A geometria do modelo de Friedmann-Robertson-Walker num sistema de coordenadas (t, χ, θ, ϕ) é especificada pelo elemento de linha a seguir, com as funções $R(t)$ e $v(\cdot)$ a serem determinadas:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad . \quad (I.10)$$

Um cálculo imediato mostra que se tomarmos $V^\mu = \delta^\mu_0$, isto é, esco

lhermos um observador co-móvel com o fluido, então veremos que $a_{\mu} = \sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = 0$. Isto significa que este é um observador geodésico e que a métrica (I.10) descreve, de fato, um modelo isotrópico e sem rotação. Por outro lado, temos que $\theta = 3 \frac{\dot{R}}{R}$, indicando, portanto, um modelo expansivo.

As equações de Einstein (I.1) para a métrica (I.10) reduzem-se ao sistema:

$$3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3k}{R^2} = \rho - \Lambda \quad , \quad (I.11.a)$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -p - \Lambda \quad , \quad (I.11.b)$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3k}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -p - \Lambda \quad , \quad (I.11.c)$$

onde estamos fazendo a hipótese de fluido perfeito para a fonte de curvatura e $k \equiv \frac{1}{6} {}^{(3)}R = -\frac{1}{3} \left[\frac{2\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right]$, sendo ${}^{(3)}R$ o escalar de curvatura da hipersuperfície $t = \text{cte}$ [20].

Para se resolver o sistema de equações (I.11) precisamos da equação de estado do fluido. No modelo de Friedmann-Robertson-Walker toma-se, como equação de estado, $p = \lambda\rho$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Além do mais, faz-se $\Lambda = 0$. Assim, de (I.11.b) e (I.11.c) obtém-se

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} = 0 \quad . \quad (I.11.d)$$

Esta equação nos dá as seguintes soluções para $\sigma(x)$:

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \chi \\ \text{sen } \chi \\ \text{senh } \chi \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

A função $\sigma(\chi)$ determina a curvatura da seção espacial $t = \text{cte}$: a) $\sigma(\chi) = \chi \rightarrow$ seção espacial euclidiana e $k=0$, b) $\sigma(\chi) = \text{sen } \chi \rightarrow$ seção espacial fechada e $k=1$, c) $\sigma(\chi) = \text{senh } \chi \rightarrow$ seção espacial aberta e $k=-1$.

Para determinar $R(t)$ precisamos especificar o valor de $k(0, \pm 1)$. Para $k=0$, por exemplo, temos a solução^[23]

$$R(t) = R_0 t^{\frac{2}{3(1+\lambda)}} \quad (\text{I.13})$$

com R_0 constante.

A equação de conservação de energia (I.6) se escreve, neste caso, como

$$\dot{\rho} + 3(1+\lambda)\rho \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad , \quad (\text{I.6})'$$

o que nos dá, de imediato,

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{R(t)^{3(1+\lambda)}} \quad , \quad (\text{I.14})$$

com ρ_0 constante. Vemos, assim, que a densidade de energia (e, portanto, também a pressão) depende apenas de t , o que significa homogeneidade do modelo.

Se $k = 1$, temos a solução (*) na forma paramétrica

$$R(\eta) = R_0 (\text{sen } \eta)^{\frac{2}{1+3\lambda}}, \quad (\text{I.15.a})$$

$$t = \frac{2}{1+3\lambda} \int R(\eta) d\eta. \quad (\text{I.15.b})$$

Se $k = -1$, também temos a solução na forma paramétrica

$$R(\eta) = R_0 (\text{senh } \eta)^{\frac{2}{1+3\lambda}}, \quad (\text{I.16.a})$$

$$t = \frac{2}{1+3\lambda} \int R(\eta) d\eta. \quad (\text{I.16.b})$$

As soluções (I.13), (I.15) e (I.16) constituem universos com topologia distinta. Paralelamente, vemos que se definirmos uma densidade crítica $\rho_c \equiv 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$ a equação (I.11.a) para $\Lambda = 0$ nos dá

$$k = \frac{R^2(t)}{3} (\rho - \rho_c). \quad (\text{I.11.a}')$$

Daí, é o sinal de $\rho - \rho_c$, na verdade, o que determina a curvatura espacial do modelo de Friedmann-Robertson-Walker.

Podemos representar num diagrama o comportamento de $R(t)$ conforme $\rho < \rho_c$, $\rho = \rho_c$ e $\rho > \rho_c$. Nos dois primeiros ca-

(*) A forma explícita das equações (I.15.b) e (I.16.b) foi calculada por Assad e Lima (ver ref. [24]).

se a pouca densidade de massa-energia do universo, não é suficiente para frear a expansão do universo iniciada em $t = 0$ com um 'big bang'. No terceiro caso, contudo, a densidade é bastante alta para ser capaz de não só anular a expansão, como também fazer com que toda a matéria comece a se contrair até que o raio do universo se anule outra vez (ver fig. I.1).

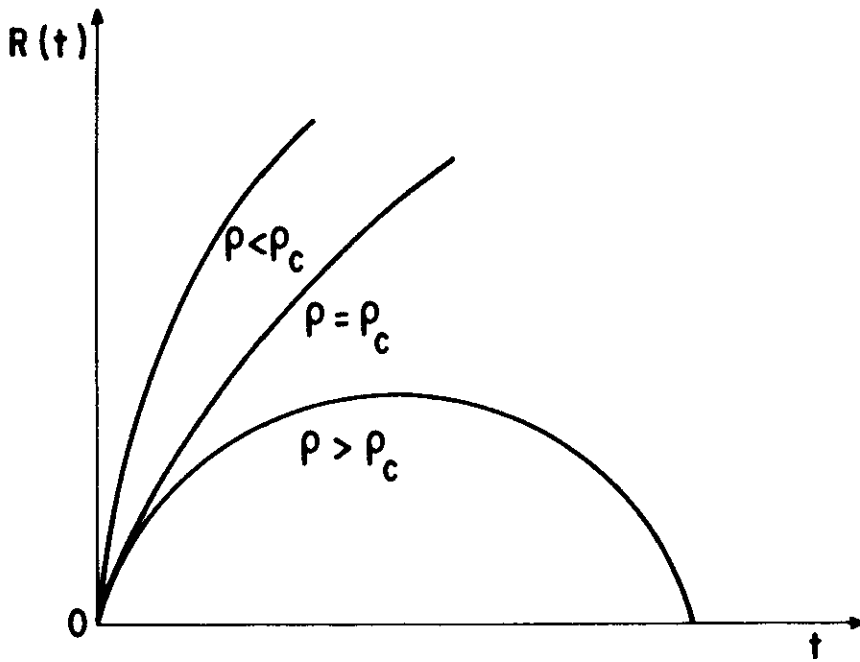


Fig. I.1: Evolução das geometrias tipo Friedmann para as diferentes seções espaciais

Vale comentar que a densidade crítica ρ_c é estimada atualmente em $\rho_c \sim 10^{-29} \text{g/cm}^3$. A densidade de massa presente nas galáxias ($\sim 10^{-31} \text{g/cm}^3$), contudo, é bastante inferior a ρ_c [25]. Ainda assim, não é possível concluir que vivemos num universo aberto (isto é, $k = -1$), uma vez que é necessário levar em conta a contribuição para densidade devido à chamada 'matéria escura', não detectável.

As soluções (I.13), (I.15) e (I.16) são singulares em $t = 0$. Tradicionalmente tem se interpretado este fato ad-

mitindo-se que houve um início do cosmo quando toda a matéria, juntamente com o próprio espaço-tempo, emergiram do nada. Nesse instante, toda a matéria do universo estaria extremamente concentrada e teríamos uma densidade de massa-energia infinita (ver eq. I.14). Todavia, um tal quadro contém inúmeras dificuldades teóricas. Em primeiro lugar, somente para citar um exemplo, pode-se argumentar, com muita propriedade, que quando o raio do universo fosse muito pequeno, efeitos quânticos do espaço-tempo impediriam o universo de ser singular^[26], ou ainda que tais efeitos tornariam completamente inadequada a descrição clássica fornecida pela teoria da relatividade geral. A idéia de que a descrição clássica falha ao tentar descrever os primórdios do universo, quando seu raio é da ordem do comprimento de Planck, $(\frac{G\hbar}{c^3})^{1/2} \sim 10^{-33}$ cm, parece encontrar bastante aceitação entre os cosmólogos atuais^[27].

II. COSMOLOGIA NÃO-SINGULAR

a) Teoremas de singularidade

Dada uma congruência de curvas na variedade espaço-tempo V^4 definida pelo campo vetorial V^μ vimos que $\theta \equiv v^\mu_{;\mu}$ caracteriza a expansão do modelo. A equação de evolução de θ ao longo de uma curva integral de V^μ é dada por

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^\mu_{;\mu} = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu, \quad (\text{I.17})$$

onde $\sigma \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$ $\omega \equiv \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$ e $\dot{\theta} \equiv \theta_{;\alpha} V^\alpha$.

A equação acima é conhecida como equação de Raychandhuri^[28]. O lado direito desta equação depende unicamente

da geometria de V^4 através do tensor $R_{\mu\nu}$. Se, porém, admitirmos a teoria da relatividade geral como válida, podemos substituir $R_{\mu\nu}$ em (I.17) usando as equações de Einstein (I.1). Para uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker e $v^\mu = \delta^\mu_0$, $\omega_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = a_{,\mu} = 0$. Portanto, a equação de Raychandhuri se reduz a

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda, \quad (\text{I.18})$$

ou ainda,

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda, \quad (\text{I.19})$$

onde substituímos $\theta = 3\frac{\dot{R}}{R}$ em (I-18).

Se $\Lambda \leq 0$ e $(\rho + 3p) \geq 0$, então vemos através de (I.19) que $R(t)$ vai a zero num tempo finito, com a densidade tornando-se infinita. Logo, como estamos tomando $\Lambda = 0$, e, para fluido perfeito, $\rho + 3p \geq 0$, concluímos que num universo de Friedmann-Robertson-Walker, a singularidade cosmológica é inevitável.

O resultado acima pode ser generalizado para outras geometrias não necessariamente homogêneas e isotrópicas, através do teorema^[29] a seguir:

Teorema I.1

"O espaço-tempo desenvolve necessariamente uma singularidade se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) As equações de Einstein (I.1) com $\Lambda \leq 0$ são válidas.
- ii) A condição de energia $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq T/2$ para qualquer vetor tipo-tempo V^μ é válida. (Para um fluido perfeito isto significa $\rho + 3p \geq 0$).

iii) Não existem curvas fechadas do tipo tempo (o que significaria violação da causalidade).

iv) Em cada geodésica nula ou do tipo tempo existe pelo menos um ponto P tal que $Z_{[\mu} R_{\nu]\lambda\rho} Z_{\sigma} Z_{\alpha]} Z^{\lambda} Z^{\rho} \neq 0$, onde Z_{μ} é o vetor tangente à curva em P.

Este teorema parece tornar a singularidade inevitável no contexto, digamos, da 'cosmologia convencional'. No entanto, nos últimos anos tem-se procurado uma saída desse esquema extremamente rígido através de várias alternativas, algumas das quais abordaremos neste capítulo com maiores detalhes, enquanto que outras serão apenas mencionadas:

i) Modelos com viscosidade

Em 1973, Murphy^[2] desenvolveu um modelo do universo não singular considerando uma geometria homogênea e isotrópica cuja fonte de curvatura é um fluido com viscosidade ("bulk viscosity"), violando a condição (ii) do teorema acima. Outros modelos não-singulares com fluido viscoso foram propostos por Heller, Klimek e Suszycki (1973)^[30], Heller e Suszycki (1974)^[31], Romero (1988)^[8], Salim e Oliveira^[1987], todos estes violando (ii).

ii) Acoplamento não-mínimo com a gravitação

Na teoria da relatividade geral a interação do eletromagnetismo com o campo gravitacional se faz de acordo com o chamado princípio do acoplamento mínimo^[32]. A introdução de uma nova forma de interação entre um campo vetorial e a geometria do espaço-tempo formulado por Novello e Salim^[9] deu origem a um modelo livre de singularidade no qual o universo após uma fase de contração atinge um raio mínimo e depois começa a se expandir.

O modelo de Novello-Salim viola a condição (i) do teorema I.1.

iii) Teoria de Brans-Dicke

A teoria de Brans-Dicke^[33] surgiu em 1961 e gozou de grande popularidade na década de 60. Pretendendo incorporar o princípio de Mach, Brans e Dicke consideraram, além do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, um campo escalar ϕ , o qual determina a 'constante' gravitacional Newtoniana G , como uma variável dinâmica do espaço-tempo. Para valores de ω (constante de acoplamento de ϕ) menores que $-4/3$ obtém-se universos não-singulares homogêneos e isotrópicos tendo fluido perfeito como fonte^{[11][34]}. Novamente, é a condição (i) que é violada.

iv) Outras alternativas, que não discutiremos aqui, ao universo singular, violando pelo menos uma das hipóteses do teorema I.1, são: modelos na teoria de Einstein-Cartan^[35]; modelos com constante cosmológica positiva^[36] (em 1968, Zeldovich^[37] mostrou que flutuações quânticas do vácuo podem dar origem a termos do tipo $\Lambda g_{\mu\nu}$ no tensor $T_{\mu\nu}$); teoria do universo estacionário de Bondi-Hoyle-Gold^[38] (virtualmente abandonada após a descoberta da radiação de fundo, em 1965); modelo de Marochnik-Pelikhov-Veshkov que considera um fluido em regime de turbulência simulando energia negativa^[39]; modelo de Melnikov-Orlov^[40] que considera efeitos quânticos de um campo escalar, etc.

b) O modelo viscoso não-singular de Murphy

No modelo de Murphy (1973)^[2], que já mencionamos antes, consideramos uma geometria do tipo Friedmann-Robertson-Walker com seção espacial plana ($k=0$) e um fluido com viscosidade (segunda viscosidade ou "bulk viscosity"). A hipótese da

viscosidade linear com coeficiente função da energia assumida por Murphy corresponde a tomar uma pressão efetiva $\tilde{p} = p - \xi\theta$, onde $\xi(\rho) = a\rho$, com $a = \text{constante}$.

As equações de Einstein (com $\Lambda = 0$) tornam-se, então:

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \rho \quad , \quad (\text{I.20.a})$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -p + 3\xi\frac{\dot{R}}{R} \quad , \quad (\text{I.20.b})$$

ou ainda,

$$\theta^2 = \rho \quad , \quad (\text{I.21.a})$$

$$\frac{2}{3}\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - a\rho\theta = -\lambda\rho \quad , \quad (\text{I.21.b})$$

onde substituímos $p = \lambda\rho$ e $\theta = 3\frac{\dot{R}}{R}$.

Eliminando ρ da equação (I.21.a), obtemos

$$\frac{\dot{\theta}}{\theta^2} + \frac{1}{2}(1 + \lambda - a\theta) = 0 \quad . \quad (\text{I.22})$$

De imediato, vemos que $\theta = \frac{1 + \lambda}{a}$ é uma solução, a qual corresponde à conhecida solução estacionária de de Sitter^[20] (solução das equações de Einstein para o vazio, isto é, $T_{\mu\nu} = 0$; e $\Lambda \neq 0$).

A solução geral de (I.22) é dada por

$$\frac{(1 + \lambda)\theta_0(t - t_0)}{2} = \ln R^{\frac{3}{2}(1 + \lambda)} + c R^{\frac{3}{2}(1 + \lambda)} \quad , \quad (\text{I.23})$$

onde fizemos $a = \frac{1 + \lambda}{\theta_0}$, t_0 e c , sendo constantes de integração.

O gráfico de $R(t)$ para $c > 0$, $c = 0$ e $c < 0$ tem a seguinte forma:

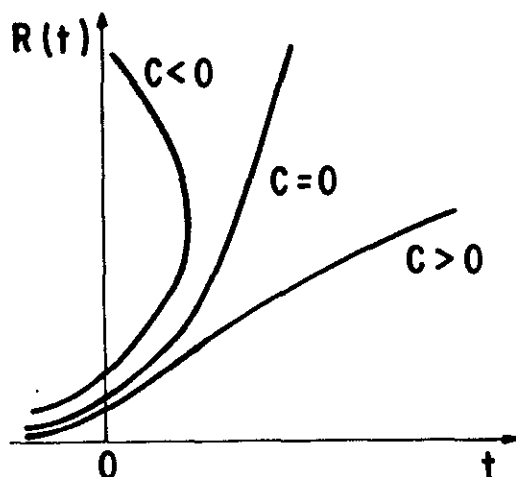


Fig. II.1: Diagrama de fase no plano (ρ, θ) de um fluido perfeito.

A solução $c = 0$ (ver fig. I.2) nos dá a solução do estado estacionário (de Sitter) para a qual tendem todas as soluções quando $t \rightarrow -\infty$. Esta solução é instável no sentido de que qualquer perturbação no valor $c = 0$ fará com que $R(t)$ se afaste da curva correspondente a $c = 0$. Quando $c < 0$, temos uma solução não-física (já que o tempo t não pode ir além de um certo valor finito). Para $c > 0$, temos as soluções de maior interesse físico correspondendo a universos com expansão dada por

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + cR \frac{3(1 + \lambda)}{2}} \quad (I.24)$$

Em nenhum desses casos temos singularidade do espaço-tempo.

c) Acoplamento não-mínimo e o modelo não-singular de
Novello-Salim

Na teoria da relatividade geral a interação do campo eletromagnético com a gravitação se dá via o chamado princípio do acoplamento mínimo. Segundo este princípio, o campo vetorial A_μ , que descreve o eletromagnetismo, não se acopla diretamente com a curvatura do espaço-tempo. O acoplamento é feito efetuando-se a substituição: $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ e $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \nabla_\mu$ na lagrangeana que descreve a dinâmica do campo A_μ na teoria da relatividade especial^(†). Até agora, pode-se afirmar que o princípio do acoplamento mínimo só foi testado em regiões de campo gravitacional fraco^[41]. Todavia, em regiões de campo gravitacional intenso (e.g., pulsares e estrelas colapsantes), é possível que este princípio deva ser abandonado.

Existem sete maneiras de acoplar o campo vetorial A_μ diretamente com a gravitação, de modo que a lagrangeana seja uma função linear do tensor de curvatura^[42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= R A_\mu A^\mu \\ \mathcal{L}_2 &= R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \\ \mathcal{L}_3 &= R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

(†) Aqui $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica de Minkowski, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e ∇_μ as derivadas comum e covariante com relação à coordenada x^μ . A lagrangeana $\mathcal{L}_{R.E.}$ é dada por $\mathcal{L}_{R.E.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu$, com j^μ o 4-vetor corrente^[32] e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu*} \\ \mathcal{L}_5 &= R_{\mu\nu} F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} \\ \mathcal{L}_6 &= W^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_7 &= \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \quad ,\end{aligned}$$

onde (*) representa "dual" e $\overset{*}{W}{}_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Weyl.

Neste capítulo vamos examinar a primeira dessas possibilidades, a qual deu origem ao modelo não-singular de Novello-Salim^[9].

A ação S_1 total que descreve a dinâmica do campo A_μ e do campo gravitacional será dada por $S_1 = \int d^4x \mathcal{L}_1$, onde

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{\kappa} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \tilde{e} R A_\mu A^\mu \right] \quad , \quad (\text{I.25})$$

onde \tilde{e} é uma constante de acoplamento e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de Einstein. Pode-se interpretar $R A_\mu A^\mu$ como sendo um termo de massa (gerada pela gravitação) para o fóton com $m_{\text{fóton}} \sim \sqrt{R}$.

A lagrangeana \mathcal{L}_1 determina as seguintes equações de campo:

$$\left(\frac{1}{\kappa} + \tilde{e} A^2 \right) G_{\mu\nu} - \tilde{e} \square A^2 g_{\mu\nu} + \tilde{e} A^2{}_{,\mu;\nu} + \tilde{e} R A_\mu A^\mu = -T_{\mu\nu}(A) \quad , \quad (\text{I.26.a})$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\tilde{e} R A^\mu \quad , \quad (\text{I.26.b})$$

onde $A^2 \equiv A_\mu A^\mu$, $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ e $T_{\mu\nu}(A) \equiv F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ é o tensor momentum-energia de Maxwell.

Tomamos uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad (\text{I.10})$$

o que implica uma geometria homogênea e isotrópica. A isotropia do espaço faz com que os campos elétrico e magnético sejam nulos e, portanto, $F_{\mu\nu} = 0$. Assim, da equação (I.26.b) concluímos que $R = 0$.

Definindo $\Omega \equiv 1 + \tilde{e} A^2$ as equações (I.26.a) reduzem-se a

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} = - \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \quad , \quad (\text{I.27.a})$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{2}{R^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = - \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad , \quad (\text{I.27.b})$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2} \right) = - \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad . \quad (\text{I.27.c})$$

Subtraindo (27.b) de (27.c), obtemos:

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0 \quad , \quad (\text{I.28})$$

que nos dá para $\sigma(\chi)$, as soluções (I.12).

Para $\sigma(\chi) = \chi$, isto é, modelos com seção espacial plana, obtemos a seguinte solução:

$$A^2(t) = \frac{1}{\kappa} \left[1 - \frac{t}{R(t)} \right] \quad , \quad (\text{I.29.a})$$

$$R(t) = \sqrt{t^2 + Q^2} \quad , \quad (I.29.b)$$

onde Q é uma constante.

A equação (I.29.b) descreve um modelo não-singular de universo, consequência do acoplamento não-mínimo do campo A_μ com a gravitação (I.25). Ao invés da singularidade, temos um universo que se contrai até atingir o raio mínimo $R_{\min} = |Q|$ em $t = 0$, iniciando, a partir daí, um regime de expansão (ver fig. I.3).

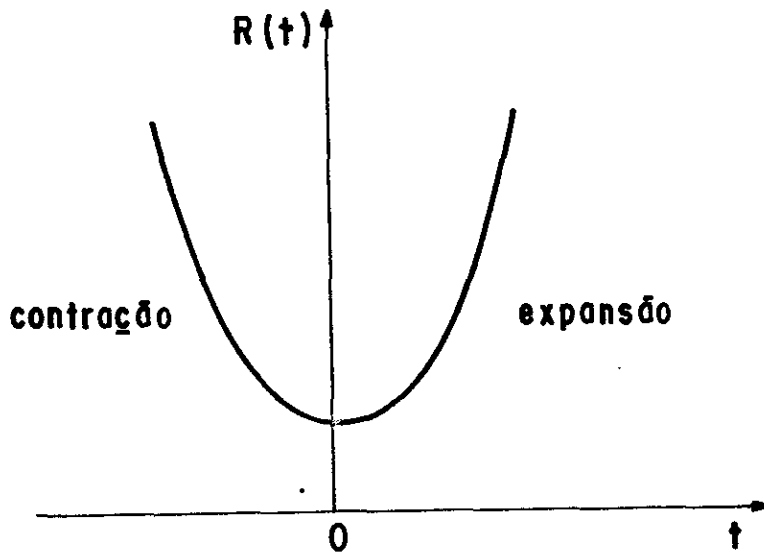


Fig. I.3: Evolução do Universo Eterno

O comportamento global desta solução pode ser estudado no espaço de fase do sistema dinâmico obtido através das equações (I.27) definindo-se as variáveis $X = 3 \frac{\dot{R}}{R}$ e $Y = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}$ [10].

d) A teoria de Brans-Dicke

Como já mencionamos anteriormente, a teoria de Brans-Dicke é uma teoria escalar-tensorial (uma vez que, além do tensor $g_{\mu\nu}$, introduz-se um campo escalar ϕ) da gravitação. Na verdade, podemos considerar esta teoria como um caso particular de teorias escalares-tensoriais mais gerais formuladas por Jordan^[32]. A motivação inicial de Brans e Dicke^[33] ao introduzir um campo escalar numa teoria métrica foi incorporar o princípio de Mach à teoria da gravitação. Este princípio recebeu uma nova interpretação, dada por Sciama, em 1950, o qual argumentou que num sistema de referência não-inercial as forças inerciais que devem aparecer são de natureza puramente gravitacional e são exercidas pela matéria distante no universo. Partindo dessa ideia, Sciama^{[44][45]} deduz a seguinte relação:

$$\rho G t^2 \cong 1, \quad (\text{I.30})$$

onde ρ representa a densidade de massa-energia do universo, G é a constante gravitacional, e t é a idade do universo.

Aceitando que a influência Machiana é, de fato, de natureza gravitacional e que deveria se refletir na não-constância da 'constante' G , como na equação (I.30), Brans e Dicke postularam que G é uma variável dinâmica, se comportando como o inverso de um campo escalar ϕ ($\phi = G^{-1}$), o qual deve satisfazer uma equação de onda cuja fonte é toda a matéria do universo.

As equações de campo (geometria + campo escalar) são derivadas da ação S que especifica o acoplamento de ϕ com o campo gravitacional:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R + \mathcal{L}_M - \frac{\omega \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}}{\phi} \right] , \quad (I.31)$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade lagrangeana da matéria e ω é uma constante de acoplamento a ser determinada 'a posteriori'. Variando S com relação a $g_{\mu\nu}$ e a ϕ obtemos, então, as equações

$$R_{\mu\nu} = - \frac{8\pi}{\phi} \left[T_{\mu\nu} - \left(\frac{\omega + 1}{2\omega + 3} \right) T g_{\mu\nu} \right] - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu} , \quad (I.32.a)$$

e

$$\square \phi = \frac{8\pi}{(2\omega + 3)} T , \quad (I.32.b)$$

onde $\square \phi \equiv g^{\mu\nu} \phi_{;\mu;\nu}$ e $T = T^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momento da matéria $T_{\mu\nu}$. É importante observar que das equações a cima segue que $T_{\mu}{}^\nu{}_{;\nu} = 0$ identicamente.

A teoria de Brans-Dicke é considerada a extensão mais simples da teoria da relatividade geral. De fato, se tomarmos nas equações (I.32) o limite $\omega \rightarrow \infty$ e fizermos $\phi = G^{-1} = \text{const.}$, obteremos as equações de Einstein (I.1) com $\Lambda = 0$.

Se considerarmos as teorias escalares-tensoriais na formulação de Jordan^[43], cuja ação é dada por^[46]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R + \mathcal{L}_M - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} + 2\phi\Lambda(\phi) \right] \quad (I.33)$$

veremos que a teoria de Brans-Dicke é um caso particular quando $\omega(\phi) = \omega = \text{const.}$, e a "função cosmológica" $\Lambda(\phi)$ é nula.

Embora na formulação original de Brans e Dicke a constante cosmológica seja nula, podemos introduzir $\Lambda \neq 0$ na ação (I.31) adicionando o termo $\frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda \phi$. As equações (I.32) tornam-se, então,

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{8\pi}{\phi} \left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right) - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu} \quad (I.34.a)$$

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} (8\pi T - 2\phi\Lambda) \quad (I.34.b)$$

Algumas soluções das equações acima podem ser encontradas na literatura [47] [48].

As predições da teoria de Brans-Dicke em relação aos dados experimentais (ou observacionais) disponíveis atualmente quando confrontadas com as predições da teoria da relatividade geral não diferem significativamente na maioria dos casos. Em particular, isto é verdadeiro para o desvio da luz próximo à superfície do sol, bem como para a precessão do periélio de Mercúrio [46] [49]. Algumas soluções prevêm um valor para o desvio da luz nas proximidades da superfície solar de $\frac{3\omega + 4}{3\omega + 6}$ vezes o valor teórico predito pela relatividade geral. Por outro lado, para a precessão do periélio de Mercúrio esse fator é de $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. Para concordar com os valores medidos para os dois fenômenos acima (desvio da luz e precessão do periélio) a constante de acoplamento ω deve assumir os valores $\omega \sim 10$ e $\omega \sim 6$, respectivamente [38].

Por outro lado, a abundância de hélio no universo é satisfatoriamente explicada por modelos baseados na teoria de

Brans-Dicke^[50]. A existência de buracos negros também é prevista por soluções cuja geometria é idêntica a de Schwarzschild^[46].

Um vasto número de soluções das equações de Brans-Dicke pode ser encontrado na literatura. No capítulo V mencionamos algumas soluções para espaços homogêneos e isotrópicos, ao mesmo tempo que desenvolvemos um método para gerar novas soluções^[12]. Soluções não-singulares do tipo de Sitter podem ser encontradas nas referências [34][51]. No capítulo IV, através dos diagramas de fase, detectamos a existência de soluções não-singulares representadas por curvas fechadas na esfera de Poincaré que tendem para o espaço-tempo de Minkowski quando $t \rightarrow \pm \infty$.

Uma solução bastante conhecida na literatura considera uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker com $k = 0$ e fluido perfeito sem pressão ("poeira")^[25]. As expressões para $R(t)$ e $\phi(t)$ ficam dadas por

$$R(t) = R_0 t^p, \quad (\text{I.35.a})$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^q, \quad (\text{I.35.b})$$

onde R_0 , ϕ_0 , p e q são constantes com $p = \frac{2\omega + 2}{2\omega + 4}$ e $q = \frac{3\omega + 4}{2}$. Para $\omega > -1$ (ver também capítulo IV) as equações (I.35) descrevem um universo singular (partindo de um "big bang") em expansão, com a constante gravitacional $G = \phi^{-1}$ decrescendo com o tempo cósmico t .

A idéia de que a constante gravitacional G descreve à medida que o universo se expande foi concebida primeiramente por Dirac^[52] em 1938 e ficou conhecida como a "hipótese de

Dirac"[28]. Desde então, várias tentativas de medir uma possível variação de G foram realizadas. Num trabalho recente, Shapiro et al^[53] baseando-se no movimento dos planetas no sistema solar estimaram que $\psi_0 \equiv \left| \frac{\dot{G}}{G} \right|_{t=t_0} < 4 \times 10^{-10} \text{ anos}^{-1}$, onde t_0 é o tempo correspondente ao momento^o presente. Por outro lado, uma outra estimativa devido à estudos sobre a evolução do sistema solar por Chen e Stothers^[54] nos dá que $\psi_0 < 1 \times 10^{-10} \text{ anos}^{-1}$. Outras estimativas (ver ref. [46]) nos permitem concluir razoavelmente que $\psi_0 < 10^{-11} \text{ anos}^{-1}$.

Finalmente, poderíamos afirmar que uma variação na constante gravitacional teria efeitos bastante sensíveis na evolução do sistema solar; em particular, do Sol e da Terra. Para citar um exemplo, imaginemos que G tenha decrescido apreciavelmente durante a época de formação da Terra. Como consequência, a força gravitacional tornou-se mais fraca e o raio da terra aumentou durante esse período. Tal fato daria suporte à hipótese sustentada por alguns geólogos de que a expansão da terra foi a causa da separação dos continentes outrora unidos^[55].

*"The universe would not be created, not be
destroyed ... What place, then for a Creator?"*

(S. Hawking, revista "Time", 8/2/88)

CAPITULO II

ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS COM VISCOSIDADE

No capítulo anterior, estudamos com alguns detalhes o modelo de Murphy, o qual consiste numa solução das equações de Einstein com métrica Friedmanniana e seção espacial euclidiana, cuja fonte de curvatura é um fluido com segunda viscosidade ("bulk viscosity"). Vimos, na ocasião, que possivelmente a consequência mais interessante de se introduzir um termo de viscosidade no tensor momentum-energia seria a remoção da singularidade (o "big bang"), inevitável no modelo padrão de Friedmann, cuja fonte é um fluido perfeito.

Neste capítulo faremos uso da teoria matemática dos sistemas dinâmicos (ver Apêndice I) com o objetivo de analisar qualitativamente efeitos devidos à presença de viscosidade em universos do tipo Friedmann-Robertson-Walker. Como trataremos de universos homogêneos e isotrópicos, iremos nos restringir à segunda viscosidade. A análise qualitativa desses universos foi realizada primeiramente por Belinskii-Khalatnikov^{[56] [57]}, considerando viscosidade linear e, posteriormente, por Novello-Araújo^[5], que trataram o caso quadrático. Algumas classes de soluções para este último caso são obtidas analiticamente

por nós^[8]. Aqui mostramos, de forma explícita, a existência de soluções não-singulares nas quais o raio do universo experimenta um crescimento exponencial, que identificamos como uma fase inflacionária.

II.1 VISCOSIDADE LINEAR

Consideraremos inicialmente os modelos com viscosidade linear analisados por Belinskii-Khalatnikov. Partiremos de uma métrica do tipo FRW, escrita na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] , \quad (\text{II.1})$$

onde $\sigma(\chi) = \chi, \text{senh } \chi$ ou $\text{sen } \chi$, conforme tenhamos seção espacial euclidiana, aberta ou fechada, respectivamente. O tensor momento-energia, por sua vez, será escrito como (ver Cap. I):

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - h_{\mu\nu} (p - \xi\theta) . \quad (\text{II.2})$$

(Como estamos tratando da viscosidade linear, aparece em II.2 o termo $\xi\theta$, onde, no caso geral, $\xi = \xi(\rho)$).

As equações de Einstein neste caso reduzem-se, então, ao sistema

$$3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3k}{R^2} = \rho - \Lambda , \quad (\text{II.3a})$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -\tilde{p} - \Lambda , \quad (\text{II.2.b})$$

$$2 \frac{R}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3k}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -\tilde{p} - \Lambda . \quad (\text{II.3.c})$$

onde Λ é a constante cosmológica, $\tilde{p} = p - \xi\theta$ é a pressão "efetiva" do fluido e $k = 0, \pm 1$, conforme a curvatura espacial. Para uma métrica dada pela equação II.1 temos que o fator de expansão $\theta = v^\mu_{;\mu}$ será dado por $\theta = 3 \frac{\dot{R}}{R}$.

Tomando $\Lambda = 0$ e eliminando das equações (II.3.a), (II.3.b) e (II.3.c) obtemos:

$$\frac{\theta^2}{3} = \rho - \frac{3k}{R^2} \quad , \quad (II.4.a)$$

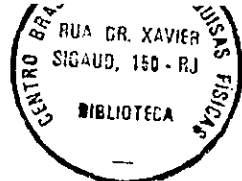
$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{2}\rho - \frac{3}{2}\tilde{p} \quad . \quad (II.4.b)$$

Por outro lado, a equação de conservação de energia $T_\mu^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ nos dá

$$\dot{\rho} = -(\rho + \tilde{p})\theta \quad . \quad (II.4.c)$$

As equações (II.4.b) e (II.4.c) constituem o que chamamos de sistema dinâmico planar autônomo (ver Apêndice I). A equação (II.4.b) pode ser reconhecida também como a equação de evolução do parâmetro de expansão θ (usualmente referida como equação de Raychaudhuri). Quanto a (II.4.a), pode ser considerada como uma equação de vínculo do sistema (nesta equação estão incluídos os modelos euclidianos, abertos e fechados).

O resultado da análise do sistema acima depende da escolha do tipo de viscosidade do fluido (no caso de viscosidade quadrática, como veremos mais adiante, tomaremos $\tilde{p} = p + a\theta + b\theta^2$, com a e b constantes), da equação de estado $p = p(\rho)$ e também da dependência dos coeficientes da viscosidade na densi-



tidade de energia ρ .

Belinskii e Dhalatnikov, ao tratar a viscosidade linear, adotaram como equação de estado do fluido $p = \lambda \rho$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) e tomaram o coeficiente da viscosidade ξ dado por $\xi(\rho) = a\rho^n$, onde a e n são constantes.

A análise qualitativa do sistema dinâmico planar (II.4) consiste em se representar no plano de fase (ρ, θ) as trajetórias correspondentes às soluções analíticas do sistema, sem que seja necessário se conhecer explicitamente as soluções. A direção das setas de cada trajetória indica a evolução do modelo representado por esta trajetória com relação ao tempo cosmológico t . Os pontos de equilíbrio (ou pontos críticos) do sistema são dados pelos valores de (ρ, θ) que anulam simultaneamente o lado direito das equações (II.4.b) e (II.4.c). O comportamento das soluções no plano de fase é representado por um diagrama de fase, o qual é obtido através de uma análise matemática do sistema dinâmico (ver Apêndice I) e depende basicamente da configuração do sistema nas vizinhanças destes pontos. Para o sistema dinâmico (II.3) podemos ter os seguintes casos:

i) Fluido sem viscosidade ($\xi = 0$).

Neste caso trata-se de um fluido perfeito e as soluções que aparecem no diagrama de fase correspondem aos modelos usuais de Friedmann (ver fig. II.1).

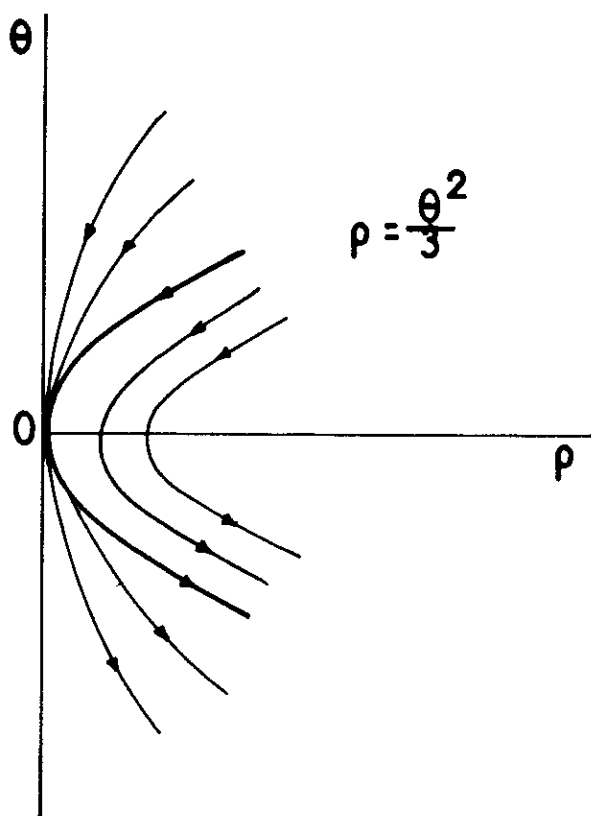


Fig. II.1: Diagrama de fase no plano (ρ, θ) de um fluido perfeito.

No diagrama da figura acima a parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$ corresponde ao modelo de Friedmann com $K = 0$, isto é, com seção espacial euclidiana. Na parte interna da parábola estão as curvas que representam os modelos fechados ($k = 1$) e, na parte externa, os modelos abertos ($k = -1$). Na região $\theta > 0$ temos os modelos em expansão e onde $\theta < 0$ temos contração. O único ponto de equilíbrio está na origem (nó com duas tangentes (ver Apêndice I)) e corresponde ao espaço-tempo de Minkowski ($\rho = 0, \theta = 0$). Observemos que não estão representadas curvas na região $\rho < 0$ uma vez que estas soluções não são fisicamente permitidas (pelo menos classicamente). A inclusão da viscosidade, como veremos a seguir, terá como efeito mudar completamente a configuração da curvas na fig. II.1.

Portanto, iniciemos com os diagramas correspon-

dentos a três casos distintos analisados por Belinskii - Khalatnikov^[56] conforme $n < 1/2$, $1/2 < n < 1$ e $n \geq 1$ em $\xi(\rho) = a\rho^n$.

ii) FLUIDO COM VISCOSIDADE LINEAR $\xi(\rho) = a\rho^n$ e $n < 1/2$

Neste caso (ver fig. II.2) vemos que algumas curvas situadas no interior da parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$ vêm de $(\rho, \theta) = (+\infty, +\infty)$ e vão para $(+\infty, -\infty)$. Qualitativamente, estas curvas não diferem do caso anterior, isto é, fluido perfeito, e correspondem a universos fechados. Outra classe de soluções é constituída por curvas compreendidas entre as separatrizes^[58] OD e OE: temos aí universos que nascem com uma explosão inicial e continuam se expandindo indefinidamente com o raio $R(t)$ tendendo a infinito (ver eq. II.4.a). Temos, também, a classe de curvas limitada por OD e pela parte superior da parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$. Essas são curvas que descrevem modelos em expansão, mas que tendem a um limite $(\rho, \theta) = (\rho_0, \theta_0)$ no ponto A. Agora, consideremos a região abaixo da parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$. Aqui, estamos na presença de curvas que representam universos abertos em fase de contração, que começam a existir num certo instante, tendendo, depois à singularidade Friedmanniana. Como o termo de viscosidade $\xi\theta$ para valores pequenos de ρ é dominante em relação ao termo $p = \lambda\rho$ (ver eq. II.2), temos um comportamento bastante diferente no caso viscoso. (quando $\rho \rightarrow \infty$ essa diferença desaparece). Finalmente, na parte superior da parábola, temos uma classe de curvas compreendidas entre as separatrizes AC e AB, as quais descrevem universos abertos em expansão vindos de $(\rho, \theta) = (+\infty, +\infty)$, região de "big bang" do tipo Friedmanniano usual. A outra classe de soluções é dada por curvas que descrevem modelos abertos também expansivos que começam em pontos do eixo $\rho = 0$ e tendem

ao ponto A. Já as soluções situadas sobre a parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$ correspondem a modelos com seção espacial euclidiana. No ramo inferior, temos apenas universos em contração evoluindo em direção à singularidade de Friedmann. E, na parte superior, temos a curva OA. É interessante observar que no modelo descrito por esta curva, apesar de termos expansão, a densidade de energia ρ aumenta tendendo a um valor limite ρ_0 . Além do mais, essa é uma solução não-singular, que descreve um universo ilimitado no tempo.

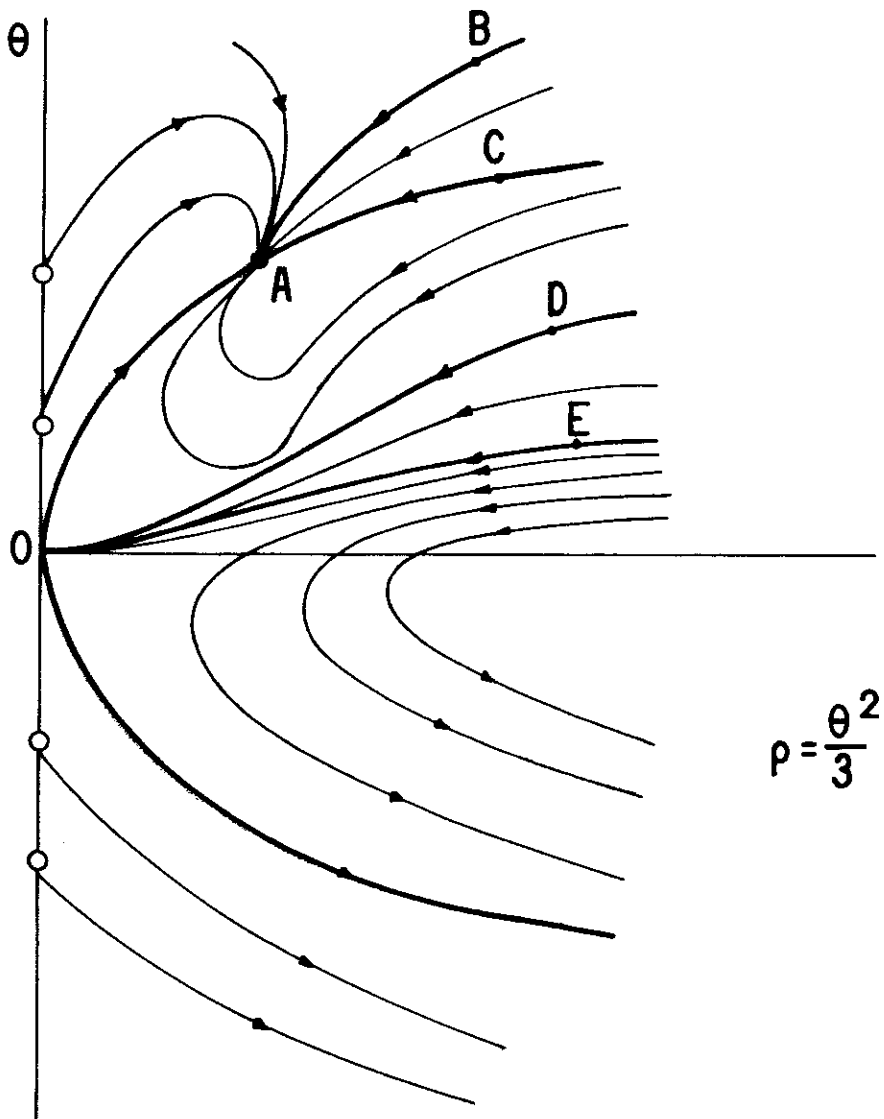


Fig. II.2: Viscosidade linear com $\eta < 1/2$.

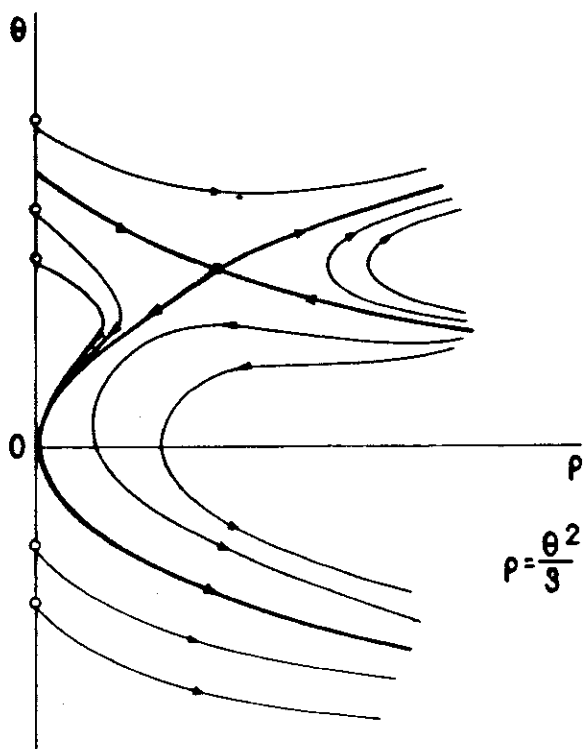


Fig. II.3: Viscosidade linear com $1/2 < \eta < 1$.

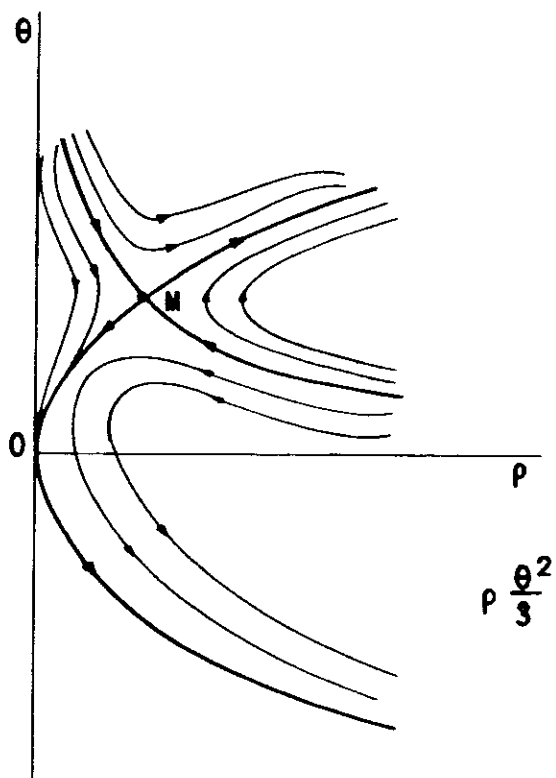


Fig. II.4: Viscosidade linear com $\eta \geq 1/2$.

Podemos fazer o mesmo tipo de análise que fizemos quando $n = 1/2$ para os casos $1/2 < n < 1$ (fig. II.3) e $n \geq 1$ (fig. II.4)- Neste último caso, podemos identificar no diagrama a solução de Murphy, vista no Capítulo I, como o segmento MO situado no ramo superior da parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$ (ver fig. II.4). É interessante observar que esta curva é a única do diagrama que descreve um universo não-singular. (lembremos que Murphy escolheu para o termo de viscosidade $\xi(\rho) = a\rho$, ou seja, $n = 1$).

II.2 VISCOSIDADE QUADRÁTICA

Como mencionamos no Capítulo I, Novello e Araújo^[5] investigaram o caso de universos homogêneos e isotrópicos contendo fluidos viscosos em regime não-linear. Em particular, eles analisaram o comportamento qualitativo de modelos com viscosidade quadrática originando uma pressão "efetiva" $\tilde{p} = p + a\theta + b\theta^2$, onde a e b são constantes. O tensor momentum-energia para este caso toma a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - h_{\mu\nu} (p + a\theta + b\theta^2) , \quad (\text{II.5})$$

e as equações de Einstein, sem constante cosmológica, ficam dadas por:

$$\theta^2 = \rho - \frac{3k}{R^2} \quad (\text{II.4.a})$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2}\rho - \frac{3}{2}p - \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{3}{2}a\theta - \frac{3}{2}b\theta^2 . \quad (\text{II.4.b'})$$

A equação de conservação de energia (II.4.c) torna-se, então,

$$\dot{\rho} = -(\rho + p)\theta - a\theta^2 - b\theta^3 \quad (\text{II.4.c'})$$

Vemos que (II.4.b') e (II.4.c') definem um novo sistema dinâmico definido no plano (ρ, θ) . Dependendo do valor atribuído às constantes a e b , podemos ter vários diagramas com diferentes configurações. Vamos apresentar aqui apenas o caso específico em que teremos satisfeita a desigualdade

$$-\left(\frac{1+\lambda}{3}\right) < b < \frac{4}{9} - \left(\frac{1+\lambda}{3}\right).$$

A configuração das curvas integrais no plano de fase (ρ, θ) está descrita na fig. II.5, a seguir:

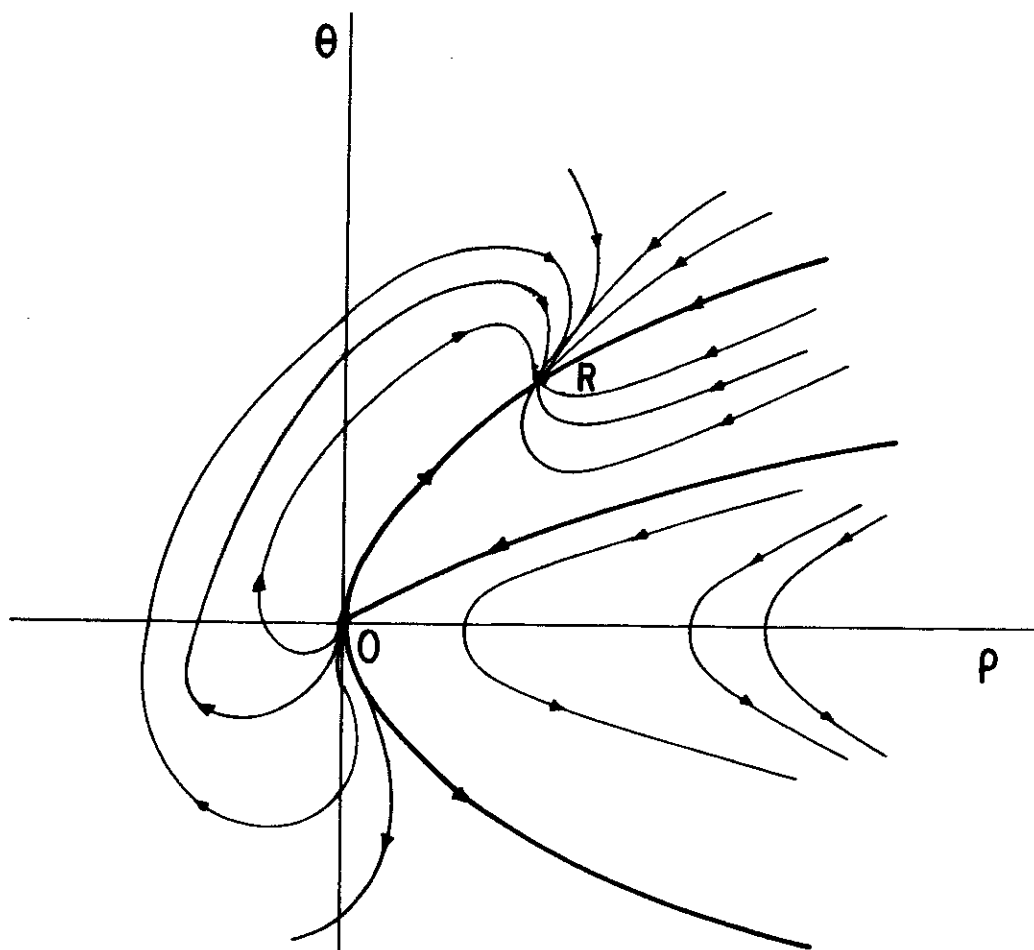


Fig. II.5: Viscosidade quadrática com $-\left(\frac{1+\lambda}{3}\right) < b < \frac{4}{9} - \left(\frac{1+\lambda}{3}\right)$.

Com relação ao diagrama da fig. II.5 observemos que foram apresentadas trajetórias na região 'proibida', isto é, onde $\rho < 0$, embora não saibamos como interpretar uma tal situação, pelo menos do ponto de vista clássico. Notemos, também, que existe uma solução não-singular OR situada sobre o ramo superior da parábola. Esta solução é a única solução não-singular que não cruza a região $\rho < 0$, e pelo fato de estar sobre a parábola $\rho = \frac{\theta^2}{3}$ vemos que descreve universos com seção espacial euclidiana (ver eq. II.4.a).

II.3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

As equações (II.4.a) e (II.4.b') podem ser resolvidas analiticamente se considerarmos a métrica (II.1) com seção espacial euclidiana ($k=0$). Ficamos, então, com as seguintes equações:

$$\frac{\theta^2}{3} = \rho, \quad (\text{II.4.a'})$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{3}{2}(\lambda\rho + a\theta + b\theta^2) = 0 \quad (\text{II.4.b'})$$

onde pusemos $p = \lambda\rho$.

Antes de obtermos a solução geral, observemos que $\theta = 0$ e $\theta = -A/B$, onde $A = -\frac{3}{2}a$ e $B = -\frac{1}{2}(1 + \lambda + 3b)$, satisfazem as equações acima. Na verdade, estas duas soluções correspondem às geometrias de Minkowski e de de Sitter, respectivamente. A pressão "efetiva", no caso desta última, que é dada por $p = -\frac{1}{3} \frac{A^2}{B^2}$ age como uma pressão negativa.

A solução geral de (II.4.a') e (II.4.b') é obtida após simples integração, assumindo a forma

$$R(t) = R_0 [M - B e^{At}]^{-1/3B}, \quad (\text{II.5.a})$$

onde $A \neq 0$, R_0 e M são constantes de integração. Se $A = 0$, obtemos a solução

$$R(t) = R_0^* (N + t)^{-1/3B}, \quad (\text{II.5.b})$$

com R_0^* e N , constantes de integração.

A partir das equações (II.5.a) e (II.5.b) podemos calcular o escalar de curvatura e o parâmetro de expansão. Através de uma escolha conveniente das constantes M , A e B , podemos obter uma classe de soluções não-singulares. Temos, assim, o seguinte esquema:

a) Para $M = 0$, encontramos a classe de soluções do tipo de Sitter

$$R(t) = R(t_0) e^{-\frac{A}{3B}(t - t_0)} \quad (\text{II.6})$$

b) Para $M > 0$, $a < 0$ e $b \geq 0$, a solução (II.5.a) constitui um modelo não-singular em expansão, no qual o universo evolui a partir de um certo raio finito no passado infinitamente distante ($t \rightarrow -\infty$) e continua a se expandir indefinidamente em direção ao futuro (ver fig. II.6)

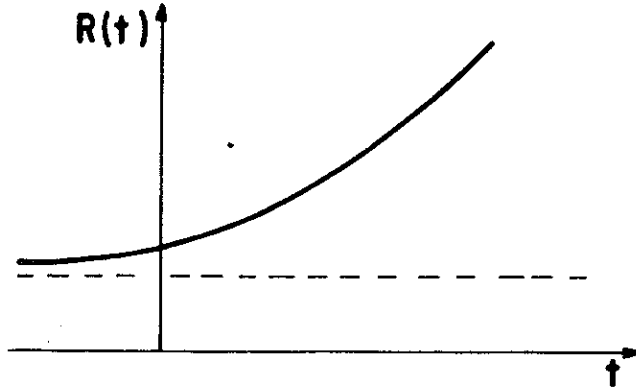


Fig. II.6: Modelo não-singular em expansão com viscosidade quadrática

c) Se $M < 0$ e $b \geq 0$ obtemos os modelos singulares representados na fig. II.7 abaixo:

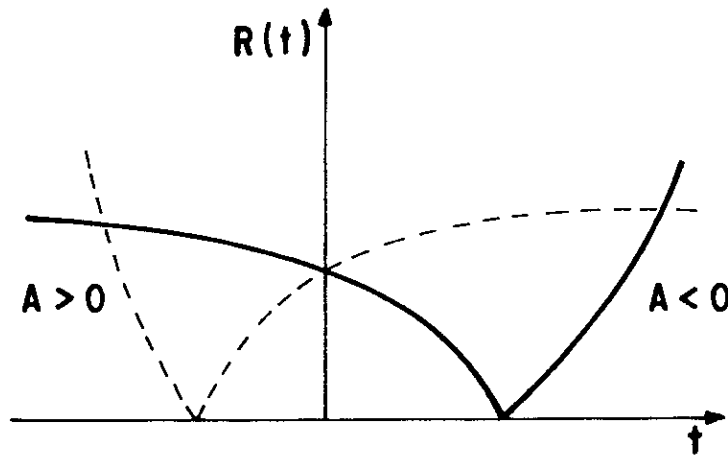


Fig. II.7: Modelos singulares com viscosidade quadrática

Para concluir, observemos que a solução não-singular representada pela fig. II.6 pode ser identificada no diagrama de fase da fig. II.5, da seção anterior. De fato, esta solução corresponde exatamente à curva que vai da origem ao pon

to R, situada sobre o ramo superior da parábola $\rho = \frac{2}{3}$, a qual foi mencionada no final da seção anterior.

" ... si la physique classique a quelque chose à dire sur l'origine singulière du monde, son discours devrait certainement se faire moins péremptoire qu'il ne l'a apparemment été jusqu'ici, tout au moins lors de ses interventions publiques"

(M. Novello, "Cosmos et Contexte")

CAPÍTULO III

ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO: ANÁLISE QUALITATIVA DAS SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS

Apresentaremos neste capítulo uma análise qualitativa do conjunto de soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas geradas através do acoplamento não-mínimo de um campo vetorial com a gravitação. Para estudar o comportamento global das soluções, construímos diagramas de fase na esfera de Poincaré, utilizando uma projeção estequiométrica do plano de fase na esfera (ver Apêndice III).

1. As equações de campo

Consideremos a lagrangiana que descreve a dinâmica de um acoplamento não-mínimo de um campo vetorial A_μ com o campo gravitacional (ver Capítulo I):

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \tilde{e} R A_\mu A^\mu \right) ,$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, G é a constante gravitacional e \tilde{e} é uma constante de acoplamento.

As equações de movimento geradas pela lagrangiana acima serão dadas por:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\tilde{e} R A^\mu , \tag{III.1.a}$$

$$\left(\frac{1}{G} + \tilde{e} A^2\right) G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} - \tilde{e} R A_{\mu} A_{\nu} + \tilde{e} \square A^2 g_{\mu\nu} - \tilde{e} A^2_{, \mu; \nu} \quad , \quad (\text{III.1.b})$$

onde definimos $A^2 \equiv A_{\mu} A^{\mu}$ e $T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ é o tensor momentum-energia do campo vetorial A_{μ} .

Escolhendo uma métrica do tipo Friedmann - Robertson-Walker na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad , \quad (\text{III.2})$$

e o 'ansatz' $A^2 = A^2(t)$, obtemos uma solução do sistema de equações (III:1), a qual foi encontrada originalmente por Novello e Salim^[9] (ver também ref. [10]), dada por

$$A^2(t) = \frac{1}{G} \left[1 - \frac{t}{R(t)} \right] \quad , \quad (\text{III.3.a})$$

$$R(t) = (t^2 + Q^2)^{1/2} \quad (\text{III.3.b})$$

onde Q é uma constante (que, na verdade, mede o raio mínimo do universo). Se fizermos $Q=0$, obtemos o espaço-tempo de Minkowski expresso nas coordenadas de Milne. No entanto, se $Q \neq 0$, este modelo representa um universo eterno, sem singularidade.

As equações (III.a) e (III.b), podem ser escritas numa forma que caracteriza um sistema dinâmico planar autônomo. Basta, para isso, que trabalhemos nas variáveis x e y ,

$$x = \theta = \frac{3\dot{R}}{R} \quad , \quad (\text{III.4.a})$$

$$y = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} , \tag{III.4.b}$$

onde $N \equiv \frac{1}{K} + \tilde{e} A^2$. Temos, então, o seguinte sistema:

$$\dot{x} = -\frac{1}{3}x^2 + xy , \tag{III.5.a}$$

$$\dot{y} = -y^2 - xy , \tag{III.5.b}$$

cujas curvas integrais (ver Apêndice I e III) estão representadas no diagrama de fase da figura abaixo:

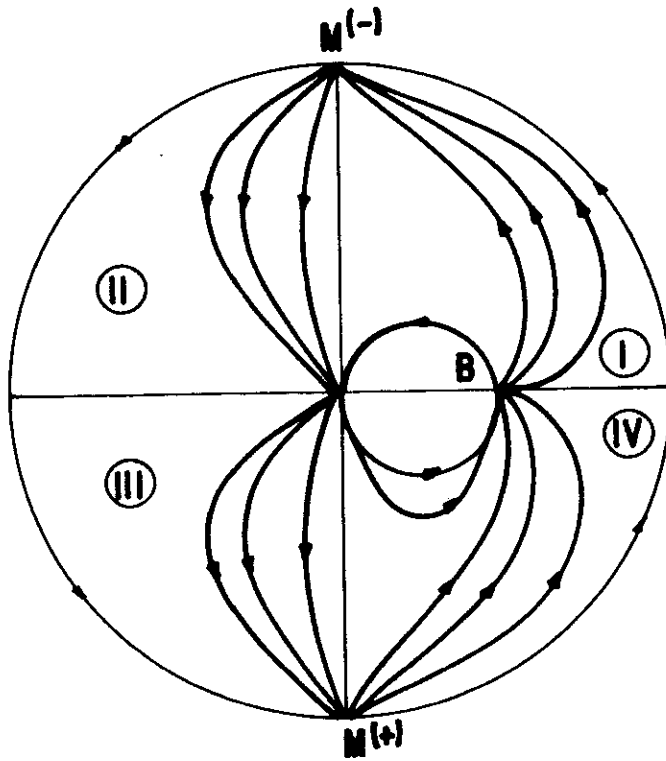


Fig. III.1: Diagrama de fase das soluções do sistema dinâmico III.5

Além das equações (III.5), podemos deduzir de (III.1) a equação de vínculo

$$xy + \frac{x^2}{3} + \frac{3k}{R^2(t)} = 0 , \quad (k = 0, \pm 1)$$

onde o valor de k (ver Cap.I) depende da curvatura espacial do modelo. (Esta equação pode ser interpretada como uma especificação de condições iniciais do sistema, que é preservada durante sua evolução).

O diagrama de fase da fig. III.1 pode ser desmembrado em setores distintos, de acordo com o comportamento das famílias de trajetórias que o compõem. Consideremos, primeiramente, a fig. II.2, que contém apenas as curvas integrais do diagrama III.1, situadas nas regiões II e III:

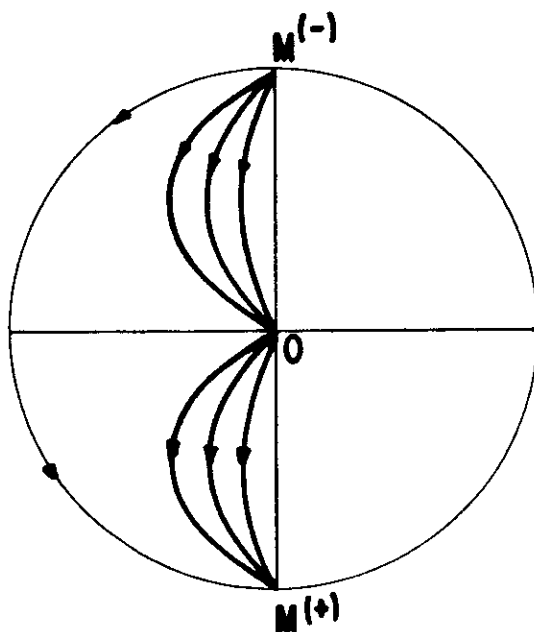


Fig. III.2: Soluções Novello-Salim

As curvas representadas no diagrama anterior correspondem às soluções encontradas por Novello-Salim (ver eq. III.3), como pode ser verificado substituindo-se (III.3) em (III.4). Diferentes valores de R correspondem a diferentes curvas. Os pontos $M^{(-)}$ e $M^{(+)}$ correspondem ao espaço-tempo de Minkowski, pois são identificados com a origem do plano de fase

fluido com densidade de energia negativa.

Realizando a transformação $Q^2 \rightarrow -P^2$ nas soluções de Novello-Salim encontramos uma nova classe de soluções (singulares) descrevendo universos tendo início no passado infinito num estado Minkowskiano ($M^{(+)}$) e terminando numa singularidade em $t = -|P|$ (ponto B, na fig. III.3)

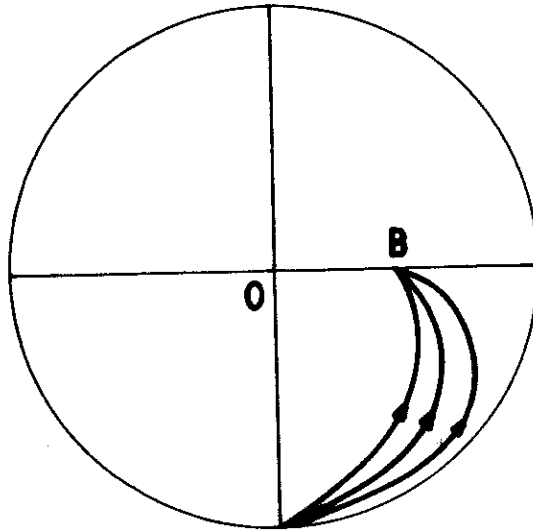


Fig. III.3: De Minkowski para a singularidade

Como não podemos ir além da singularidade B, passemos para a fig. III.4 a seguir:

(ver Apêndice III). Aqui, como $M^{(-)}$ e $M^{(+)}$ são fisicamente indistinguíveis, é possível imaginar que temos universos começando e terminando em 'vazios' Minkowskianos num ciclo sem fim.

Dois comentários podem ser feitos com relação à solução NS:

i) Uma solução similar a esta representando um universo não-singular foi descoberta, num contexto diferente, por Melnikov e Orlov^[40]. Estes autores mostraram que, se levarmos em conta aspectos quânticos de um campo escalar, teremos como efeito principal a remoção da singularidade do universo e a expressão obtida para o raio do universo será idêntica às equações (III.2) e (III.3).

ii) É possível (embora seja um tanto artificial) interpretar a solução NS como uma solução das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito. Isto é, podemos colocar (III.1.b) na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = -\kappa \tilde{T}_{\mu\nu} ,$$

com $\tilde{T}_{\mu\nu}$ dado por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{\frac{1}{\kappa} + e A^2} (T_{\mu\nu} - \frac{3\tilde{e}^2}{\kappa} (\square A^2) A_{\mu} A_{\nu} - \tilde{e} \square A^2 g_{\mu\nu} + A^2,_{\mu;\nu}) .$$

Um cálculo imediato nos mostra que $\tilde{T}_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor momentum-energia de um fluido perfeito com densidade ρ e pressão p , satisfazendo a equação de estado $\rho = 3p = - [Q^2/R(t)] < 0$. Concluimos, então, que o acoplamento não-mínimo de um campo vetorial com a gravitação torna-se equivalente a considerarmos um

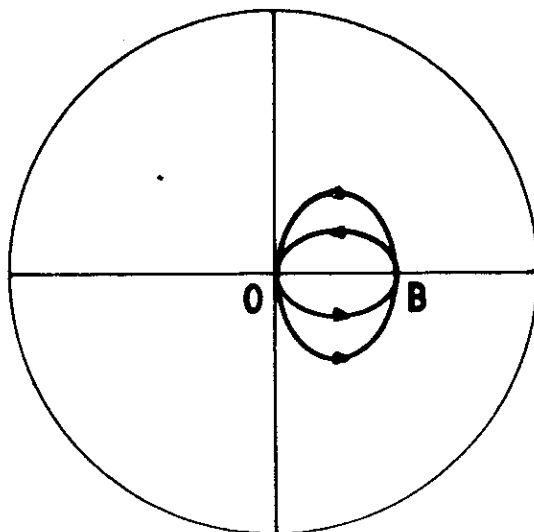


Fig. III.4: Passando "através" da singularidade em B

Na fig. III.4 encontramos uma classe de modelos completamente diferentes do caso anterior. As soluções desta classe são as únicas soluções fechadas do nosso sistema. Aqui, o tempo cósmico flui no domínio limitado $-|P| < t < |P|$. E, embora não seja possível extrapolar nossa solução prévia, que termina no ponto B quando $t = -|P|$, podemos pensar que o efeito sobre as curvas integrais ao se ir além de B consiste numa mudança da topologia do universo, passando-se de um regime aberto para um regime fechado. Neste caso, o raio do universo assume a forma: $R(t) = (P^2 - t^2)^{1/2}$.

Finalmente, após retornar a B (fig. III.4) chegamos à fig. III.5, que representa universos começando (em $t = -|P|$) numa singularidade (em B) e terminando, num futuro infinitamente remoto, num regime Minkowskiano. (ver fig. III.5).

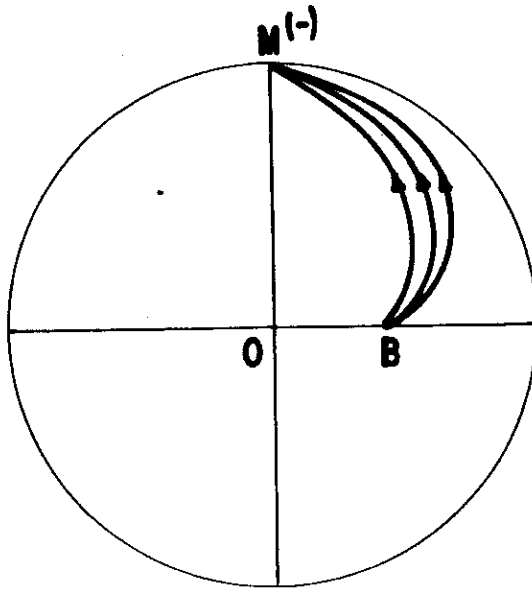


Fig. III.5: Universos iniciando na singularidade (em B) e tendendo ao espaço-tempo de Minkowski

Ao concluir este capítulo, devemos acrescentar que, não somente o campo vetorial, mas qualquer outro campo, através do acoplamento não-mínimo, pode, em princípio, gerar geometrias não-singulares devido a que este tipo de acoplamento permite violação de alguma das condições do teorema I.1 (ver capítulo I).

*"No busquemos la creación del universo en algun
lejanísimo momento del tiempo. ... La creación del universo es ahora, en este
mismo instante! Aquí es donde todo comienza! Y desde aquí se va alejando y
termina por desvanecerse"*

(Alan Watts, "Nueve Meditaciones")

CAPITULO IV

ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Neste capítulo faremos uso novamente da teoria de sistemas dinâmicos para estudar modelos cosmológicos na teoria de Brans-Dicke^[11]. Consideremos aqui, assim como temos feito anteriormente, modelos cosmológicos que sejam espacialmente homogêneos e isotrópicos cuja curvatura espacial seja nula. A possibilidade de uma análise qualitativa de modelos que apresentem essa geometria reside no fato de que as equações de campo (isto é, as equações de Brans-Dicke) são redutíveis a um sistema dinâmico planar e autônomo. Sendo assim, é possível construir diagramas de fase no plano, os quais fornecem um panorama global das soluções, permitindo investigar existência de singularidades, estabilidade, pontos de equilíbrio, regiões com densidade de energia negativa, etc. Como fonte do campo escalar e do campo gravitacional, tomaremos um fluido perfeito com equação de estado $p = \lambda\rho$. Desse modo, os diagramas serão construídos para diferentes valores de λ e da constante de acoplamento ω .

Devido ao fato de que o sistema dinâmico obtido das equações de campo é homogêneo^[59], e, também, com o objetivo de estudar o comportamento das soluções no infinito do plano de fase, nos pareceu conveniente trabalhar com a esfera de

Poincaré^[58], (ver apêndice I), realizando portanto, uma compactificação do plano de fase.

4.1 AS EQUAÇÕES DE CAMPO

Como vimos no Cap. I, as equações gerais de Brans-Dicke são as seguintes:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\phi} [T_{\mu\nu} - (\frac{\omega + 1}{2\omega + 3}) T g_{\mu\nu}] - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu} \quad (4.1.a)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T \quad , \quad (4.1.b)$$

onde $T_{\mu\nu}$ e T denotam o tensor momentum-energia e seu traço, respectivamente, representando o conteúdo material do Universo. Uma vez que estamos considerando um fluido perfeito, $T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu}$, sendo $h_{\mu\nu}$ o tensor de projeção no espaço ortogonal à 4-velocidade do fluido v^{μ} , ρ é a densidade de energia e p a pressão termodinâmica.

De acordo com as suposições que fizemos antes a cerca da geometria dos modelos, vamos considerar uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker, dada pelo elemento de linha $ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 - \chi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\sigma^2)]$. Quanto ao campo escalar ϕ , a imposição de homogeneidade e isotropia implica que $\phi = \phi(t)$.

Escolhendo um sistema de coordenadas co-móvel, $V^{\mu} = \delta^{\mu}_0$, as equações de Brans-Dicke (4.1.a) e (4.1.b) para um fluido perfeito satisfazendo a equação de estado $p = \lambda\rho$, e para uma geometria caracterizada pela métrica acima, serão dadas por:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{8\pi\rho}{\phi} [1 - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} (1 - 3\lambda)] - \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (4.2.a)$$

$$\frac{\dot{\theta}}{3} + \frac{\theta^2}{3} = - \frac{8\pi\rho}{\phi} \left[\lambda + \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} (1 - 3\lambda) \right] - \frac{\theta}{3} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \quad (4.2.b)$$

$$\ddot{\phi} + \theta \dot{\phi} = \frac{8\pi\rho}{2\omega + 3} (1 - 3\lambda) \quad , \quad (4.2.c)$$

onde $\theta = 3 \frac{\dot{R}}{R}$ é o parâmetro de expansão do universo.

Para reduzir as equações acima a um sistema dinâmico em duas dimensões, definimos uma nova variável $\psi = \frac{\dot{\phi}}{\phi}$ e eliminamos ρ usando a equação (4.2.c). Obtemos, então,

$$\dot{\theta} = F_{\lambda\omega}(\theta, \psi) \quad (4.3.a)$$

$$\dot{\psi} = H_{\lambda\omega}(\theta, \psi) \quad , \quad (4.3.b)$$

onde as funções $F_{\lambda\omega}$ e $H_{\lambda\omega}$ são dadas por

$$F_{\lambda\omega}(\theta, \psi) = \frac{1}{2\omega + 3} \left[-2 + \omega + \lambda\omega \right] \theta^2 + \frac{3\omega}{2} (\lambda\omega - \omega - 1) \psi^2 + \omega (1 - 3\lambda) \theta \psi \quad ,$$

$$H_{\lambda\omega}(\theta, \psi) = \frac{1}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{1 - 3\lambda}{3} \right) \theta^2 - \left(\frac{6 + 5\omega - 3}{2} \right) \psi^2 - (2\omega + 2 + 3\lambda) \theta \psi \right] ;$$

com λ e ω parâmetros livres.

Teçamos alguns comentários a respeito da variável ψ , que acabamos de definir. Lembrando que na teoria de Brans-Dicke, ϕ é tomada como o recíproco de G ($\phi = \frac{1}{G}$), verificamos de imediato que $\psi = - \frac{\dot{G}}{G}$. Isto quer dizer que devemos interpretar ψ como sendo uma medida da variação negativa (ou um decréscimo) da 'constante' gravitacional com o tempo^(*).

(*) Ao levarmos em conta variações no tempo da constante gravitacional, ψ é, de fato, a variável natural a ser considerada. Estimativas do valor atual de ψ são encontradas na literatura. (Ver, por exemplo, referências [53][54].)

4.2 ANÁLISE QUALITATIVA DO SISTEMA DINÂMICO

O sistema dinâmico expresso pelas equações (4.3.a) e (4.3.b) é dito homogêneo uma vez que as funções $F_{\lambda\omega}(\theta, \psi)$ e $H_{\lambda\omega}(\theta, \psi)$ são polinômios homogêneos no par de variáveis (θ, ψ) . Estas funções contêm λ e ω como parâmetros, os quais variam conforme a equação de estado do fluido e o valor escolhido para a constante de acoplamento. Muitas das características gerais das soluções integrais podem ser estudadas, como sabemos, simplesmente através do exame dos diagramas de fase, analisando, por exemplo, o comportamento global de classes de soluções e a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Para determinar os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico (4.3), igualamos simultaneamente $F_{\lambda\omega}(\theta, \psi)$ e $H_{\lambda\omega}(\theta, \psi)$ a zero. Verificamos, então, que a origem do plano de fase $(\theta = 0, \psi = 0)$, que fisicamente representa o espaço-tempo de Minkowski, é o único ponto de equilíbrio do sistema. Isto vale independentemente dos valores de λ e de ω , com exceção do caso $\omega = -4/3$, o qual discutiremos a seguir.

Antes de abordar o caso $\omega = -4/3$, vejamos brevemente o que acontece quando $\omega = -3/2$. A não ser que $\lambda = 1/3$, o sistema (4.3) não está definido para este valor de ω . No entanto, se $\lambda = 1/3$, obtemos o seguinte:

$$\dot{\theta} = -\frac{2}{3}\theta^2 - \frac{\omega}{2}\psi^2$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi - \psi^2$$

Novamente, desde que ω seja diferente de $-4/3$, a origem $(0,0)$ é

o único ponto de equilíbrio do sistema (*).

Quando ω assume o valor específico $-4/3$, em vez de um único ponto de equilíbrio isolado, o que temos é uma linha de pontos de equilíbrio no plano de fase. Esta linha corresponde à equação $\psi = -\theta$, onde cada ponto (θ_0, ψ_0) constitui uma solução do sistema dinâmico representando universos de De Sitter com G variável. Estas soluções foram encontradas pela primeira vez por O'Hanlon e Tupper^[34], constituindo-se, na verdade, nas únicas soluções das equações de Brans-Dicke do tipo De Sitter com métrica da forma que estamos tomando. Não consideraremos em nossa análise este caso particular onde temos pontos de equilíbrio múltiplos.

4.3 REGIÕES DE DENSIDADE DE ENERGIA NEGATIVA E SOLUÇÕES FÍSICAMENTE INADMISSÍVEIS

Antes de apresentar os diagramas de fase, faremos, nesta seção, algumas considerações acerca das restrições que devem ser impostas às curvas integrais que compõem os diagramas no que diz respeito ao sinal da densidade de energia dos modelos que são representados por estas curvas.

Soluções que interceptam regiões do diagrama onde $\rho < 0$, em princípio, não devem ser consideradas fisicamente admissíveis, pelo menos classicamente. Para fazer um mapeamento de tais regiões nos diagramas deduzimos, a partir de (4.2.a), (4.2.b) e (4.2.c), a seguinte equação:

(*) Soluções de Brans-Dicke com $\omega = -3/2$ são conhecidas na literatura. Veja, por exemplo, as referências [34,47].

$$\frac{8\pi\rho}{\phi} = \frac{\theta^2}{3} + \theta\psi - \frac{\omega}{2} \psi^2 \quad (4.4)$$

De posse da equação acima, podemos delimitar todas as regiões onde $\rho < 0$. (Ver detalhes no Apêndice II).

Aqui, gostaríamos de comentar dois pontos: primeiro, que a existência e a forma dessas regiões 'proibidas' independem da equação de estado do fluido, sendo unicamente funções de ω . Segundo, chamamos a atenção para o fato de que, para valores de ω menores do que $-3/2$, tais regiões com densidade de energia negativa não existem. Quando $\omega > -3/2$ aí necessariamente aparecem regiões no plano de fase nas quais o segundo membro da equação (4.4) é negativo. (Se $\omega = -3/2$ temos a presença de uma linha onde $\rho = 0$).

As regiões com densidade de energia negativa são, na verdade, delimitadas pelos raios invariantes do sistema, os quais estão representados nas figuras (4.1), (4.2) e (4.3) pelas linhas BB' e CC' traçadas na esfera de Poincaré. Aqui tem lugar um fenômeno interessante: à medida que o valor de ω aumenta, essas regiões se tornam cada vez mais largas, de tal modo que as soluções fisicamente admissíveis (isto é, com $\rho > 0$), tendem a ser confinadas numa estreita região que contém o eixo θ . Nas figuras que se seguem (4.1, 4.2 e 4.3), as regiões com $\rho < 0$ estão pontilhadas.

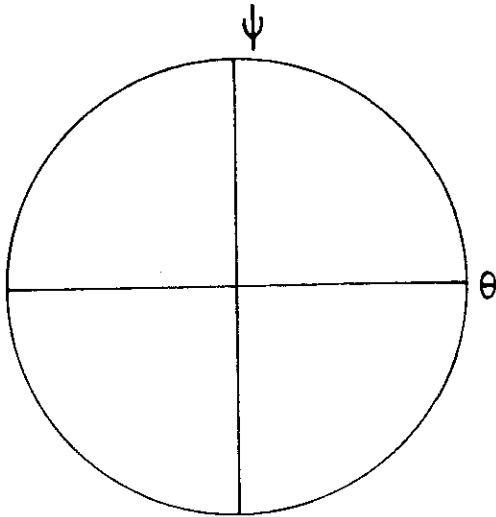


Fig. 4.1: Não existem regiões com $\rho < 0$ quando $\omega < -3/2$

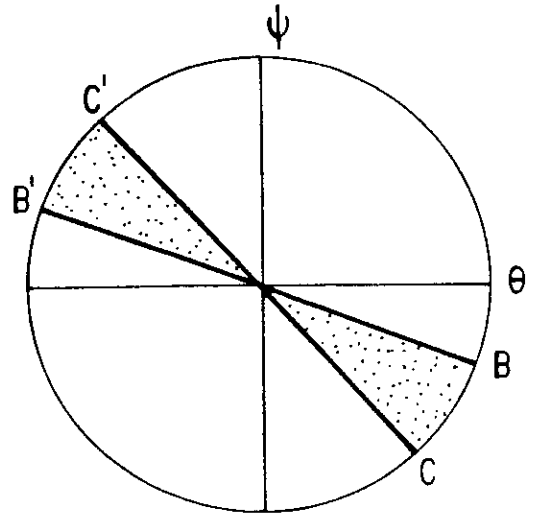
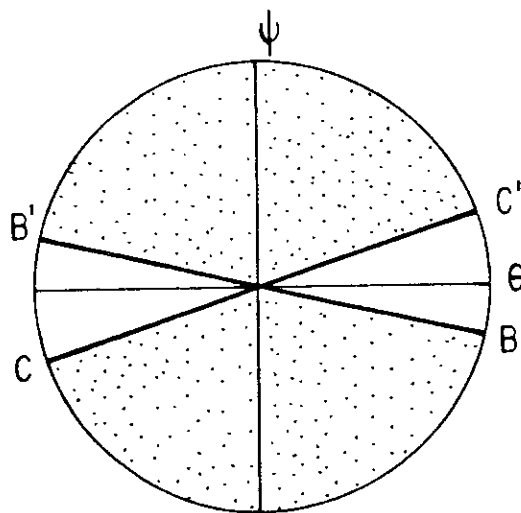


Fig. 4.2: As regiões com $\rho < 0$ aparecem pontilhadas. Neste diagrama temos $-3/2 < \omega < 0$



À medida que ω aumenta, a região com $\rho > 0$ (não-pontilhada) diminui. Aqui ω é positivo

4.4 OS RAIOS INVARIANTES

Na análise dos diagramas de fase, a serem apresentados na próxima seção, vamos nos deparar com um tipo especial de solução nas quais a razão ψ/θ é sempre constante no tempo. Soluções dessa forma são, de fato, especiais pois correspondem a modelos nos quais se tem uma variação de G ocorrendo a uma taxa dada por $\frac{\dot{G}}{G} = -fH$, onde $H = \frac{\dot{R}}{R}$ é o parâmetro de Hubble e, f , um número adimensional. Esse tipo de variação da constante gravitacional com o tempo, faz parte de uma conjectura comum à maioria das teorias que supõem G variável (além da teoria de Brans-Dicke, poderíamos citar a teoria de Hoyle-Narlikar e a teoria de Dirac^{[60][61]}).

Soluções nas quais $\psi/\theta = \text{const.}$ constituem, na verdade, os raios invariantes do sistema dinâmico (4.3) (ver Apêndice I). No plano de fase $\theta\psi$ (ou na esfera de Poncaré), os raios invariantes aparecem com linhas retas que começam ou terminam na origem $(0,0)$. No sistema que estamos tratando, o número de raios invariantes presentes depende diretamente do valor de ω : se $\omega < -3/2$, temos dois raios invariantes; se $\omega > -3/2$, esse número passa a ser seis (ver Apêndice II.b).

Os ângulos que os raios invariantes formam com o eixo θ dependem de ω e dois deles dependem também de λ . Levando-se em conta apenas variações em ω observamos que os raios invariantes realizam rotações no plano de fase^(*) (conseqüentemente, na esfera de Poncaré). Através das figuras 4.4, 4.5 e 4.6,

(*) Como veremos mais adiante, quando $\lambda=1/3$ (radiação) e $\lambda=1$ ('stiff matter') ocorrem raios invariantes fixos, independentes de ω .

imediatamente a seguir, descrevemos as rotações dos raios inva
riantes que não dependem de λ .

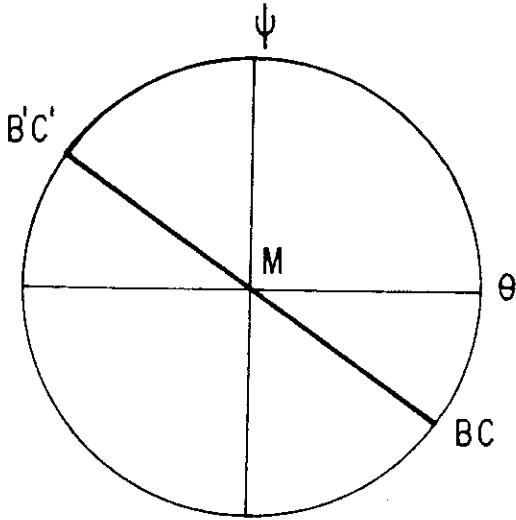
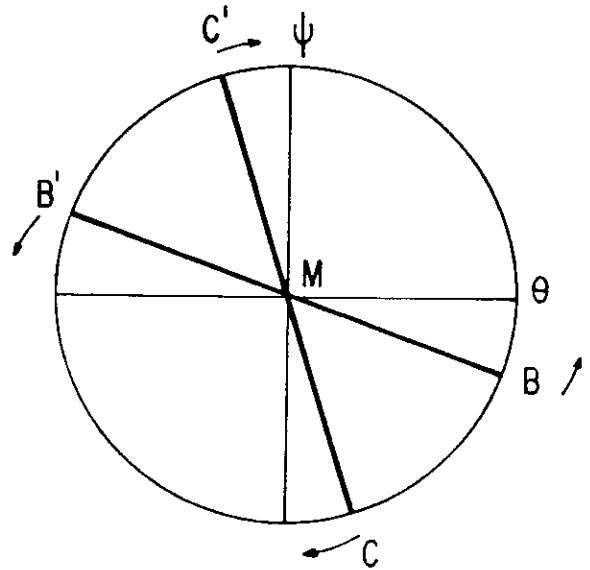


Fig. 4.4: Quando $\omega = -3/2$ BB' e CC' coincidem



Quando $\omega > -3/2$ BB' e CC' giram em sentidos contrários. Na figura acima $-3/2 < \omega < 0$

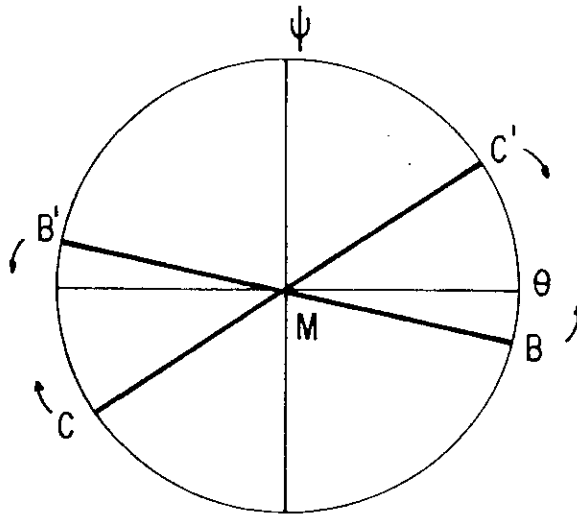


Fig. 4.6: $\omega > 0$. BB' e CC' continuam girando em sentido contrário

Os quatro raios invariantes que são independentes de λ correspondem aos segmentos BM , MB' , CM e MC' . Eles não existem para $\omega < -3/2$. Quando $\omega = -3/2$, BB' e CC' coincidem (ver fig. 4.4), fazendo um ângulo de $-33,69^\circ$ com o semi-eixo positivo θ . A medida que ω aumenta, BB' gira no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio aproximando-se do eixo θ (observar setas nas figs. 4.5 e 4.6). CC' , por sua vez, gira no sentido oposto ao de BB' , tendendo a formar um ângulo de -360° com a direção positiva do eixo θ .

Por outro lado, os dois raios invariantes que dependem de λ estão presentes em todos os diagramas, qualquer que seja o valor de ω . Nas figuras mostradas a seguir (figs. 4.7 - 4.12) eles estão representados pelos segmentos AM e MA' . Similarmente aos raios invariantes mencionados no parágrafo anterior, AM e MA' giram acompanhando o segmento AA' , a medida que variamos os valores de ω . Aqui, porém, temos o seguinte: se $\lambda < 1/3$, o sentido de rotação de AA' é idêntico ao dos ponteiros de um relógio; se $1/3 < \lambda < 1$, AA' gira em sentido contrário. No entanto, quando $\lambda = 1/3$ (caso radiação) AA' é fixo e coincide com o eixo θ ; se $\lambda = 1$ (caso 'stiff matter'), AA' também é fixo e forma um ângulo de $-33,69^\circ$ com a direção positiva do eixo θ (veja figuras a seguir).

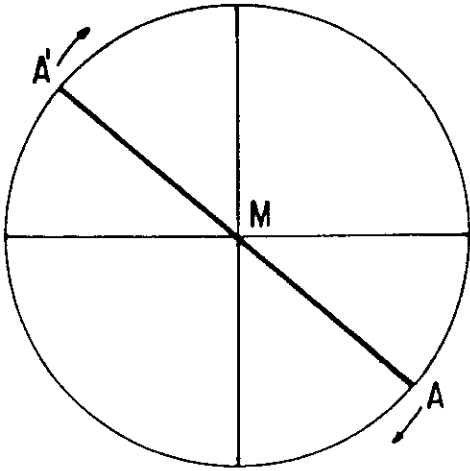


Fig. 4.7: $\lambda < \frac{1}{3}$ e $\omega < \frac{1}{\lambda-1}$

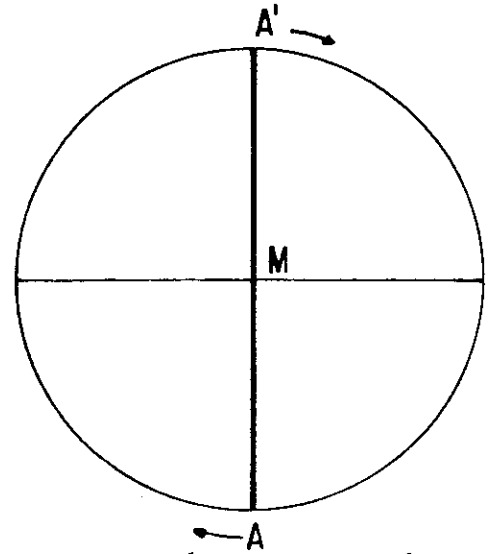


Fig. 4.8: $\lambda < \frac{1}{3}$ e $\omega = \frac{1}{\lambda-1}$

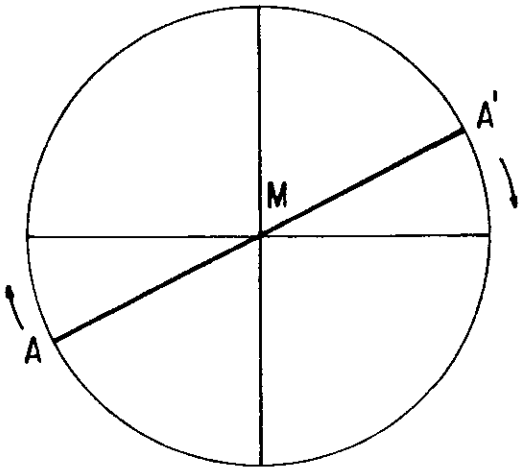


Fig. 4.10: $\lambda < \frac{1}{3}$ e $\omega > \frac{1}{\lambda-1}$

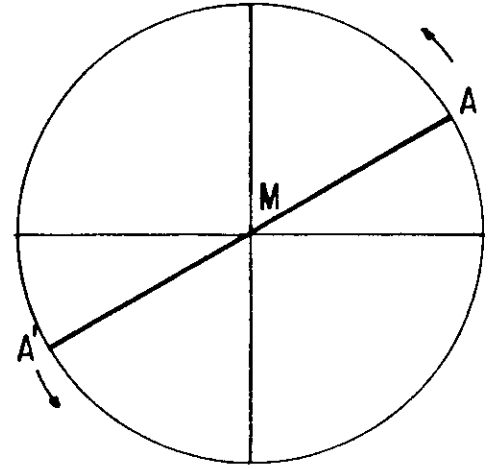


Fig. 4.11: $\frac{1}{3} < \lambda < 1$ e $\omega < \frac{1}{\lambda-1}$

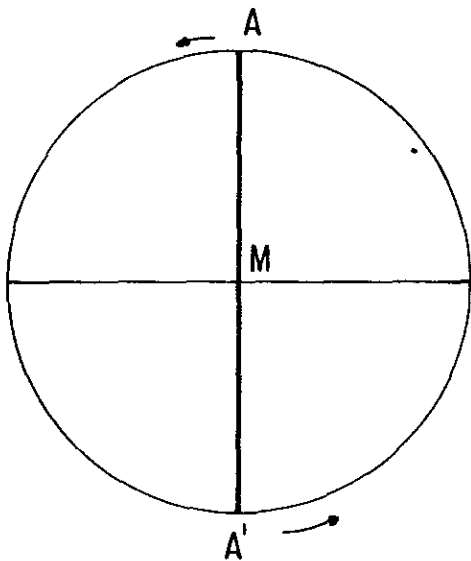


Fig. 4.11: $\frac{1}{3} < \lambda < 1$ e $\omega = \frac{1}{\lambda - 1}$

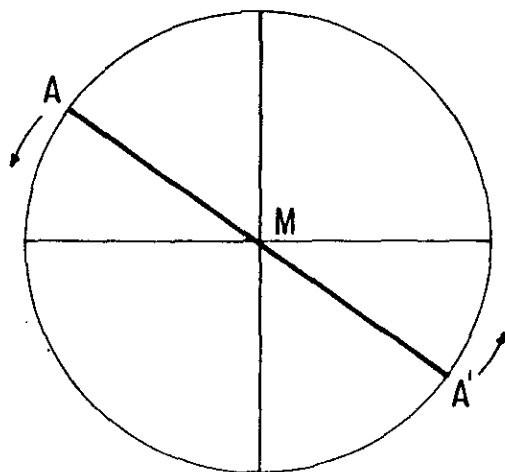


Fig. 4.12: $\frac{1}{3} < \lambda < 1$ e $\omega > \frac{1}{\lambda - 1}$

Finalmente, quando $\omega \rightarrow +\infty$, todas as três linhas, AA', BB' e CC' tendem a se alinhar com o eixo θ . Esse alinhamento, contudo, se dá de tal maneira que AA' permanece sempre intercalada entre BB' e CC', a não ser no caso em que $\lambda = 1$ ('stiff matter').

4.5 REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE BRANS-DICKE NA ESFERA DE PONCARÉ: OS DIAGRAMAS DE FASE

Nesta seção apresentamos os diagramas de fase do sistema dinâmico 4.3 projetados na esfera de Poincaré correspondendo a fluidos obedecendo diferentes equações de estado $p = \lambda\rho$ (com λ variando no intervalo fechado $[0,1]$ e também para $\lambda = -1$). Em cada caso examinamos exaustivamente a natureza dos pontos de equilíbrio à medida que ω varia no intervalo $-\infty < \omega < +\infty$, exceto

quando ω assume os valores específicos $-3/2$ e $-4/3$. Não apresentaremos neste capítulo todos os cálculos que nos levaram à construção dos diagramas, uma vez que seria extremamente tedioso. Deixamos isto para o Apêndice II. Portanto, aqui apresentaremos apenas os resultados finais.

Como veremos ao analisar os diagramas, a configuração do espaço de fase pode sofrer bruscas mudanças nas vizinhanças de um certo valor de ω . A determinação desses valores críticos depende do caso específico que estivermos considerando.

a) O caso 'poeira'

Começaremos nossa análise investigando o caso de um fluido sem pressão ("poeira"). O primeiro diagrama que apresentaremos refere-se a valores de ω menores que $-3/2$ (ver fig. 4.13).

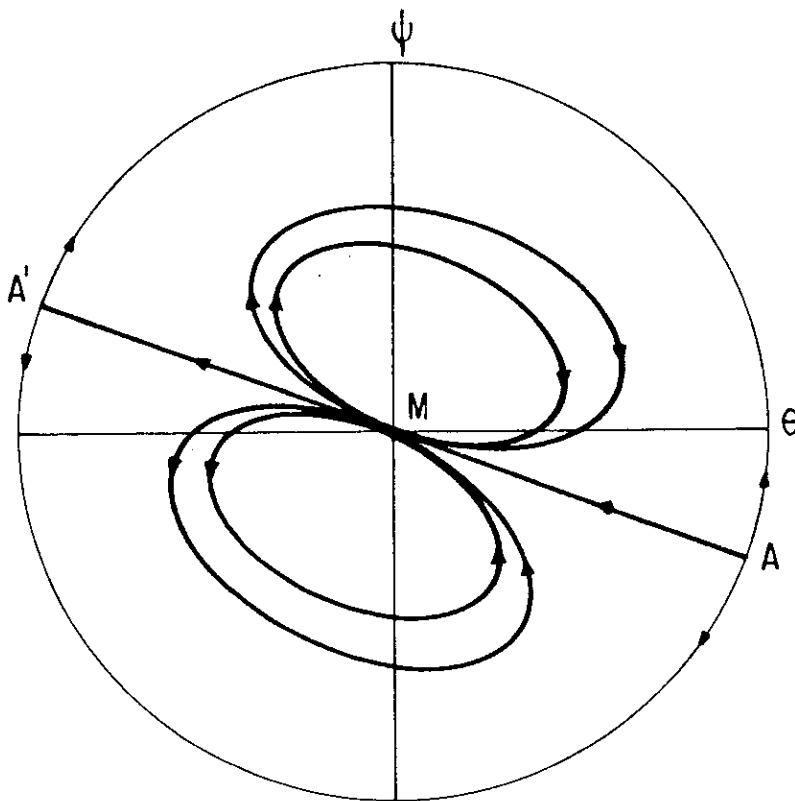


Fig. 4.13: Caso 'poeira' com $\omega < -3/2$

Todas curvas que aparecem neste diagrama são, naturalmente, soluções do sistema dinâmico 4.3 com $\lambda = 0$. Portanto, essas curvas descrevem a evolução de modelos cosmológicos na teoria de Brans-Dicke. Reciprocamente, qualquer solução das equações 4.2 para $\lambda = 0$ e $\omega < -3/2$ deve estar representada necessariamente por uma dessas curvas. Uma vez que realizamos a compactificação do plano de fase na esfera de Poincaré, através do mapeamento de Poincaré (ver Apêndice I,c), todos os pontos situados sobre a circunferência representam pontos no infinito do plano de fase $\theta\psi$. A origem M, que é o ponto de equilíbrio isolado do sistema, é identificada com o espaço-tempo de Minkowski (evidentemente o espaço-tempo de Minkowski é uma solução das equações de Brans-Dicke se fizermos $\phi = \frac{1}{G} = \text{const.}$). Agora, iniciemos a análise das curvas. O segmento AA' contém os raios invariantes AM e MA' que mencionamos na seção anterior. Podemos classificar, basicamente, as soluções em três grupos distintos:

i) Soluções situadas sobre o raio invariante AM.

Este tipo de solução descreve universos começando a partir de um 'big-bang' inicial ($\theta = +\infty$, $\rho = +\infty$) e que evoluem na direção do espaço-tempo de Minkowski à medida que o tempo cósmico flui. Como a variável ψ está mudando ao longo de toda a trajetória e é sempre negativa, conclui-se que uma característica essencial destes modelos é que a 'constante' gravitacional G aumenta continuamente. Logo, trata-se de modelos que não satisfazem a hipótese formulada por Dirac, segundo a qual G deveria decrescer à medida que o universo expandisse.

ii) Soluções situadas sobre o raio invariante MA'.

Estas soluções representam modelos cosmológicos

que no passado infinito ($t \rightarrow -\infty$) foram idênticos ao espaço-tempo de Minkowski e que passam por um regime irreversível de contração em direção ao colapso final. Embora constante no início, G descreve continuamente durante toda a evolução cósmica. Entre todas as soluções presentes no diagrama, esta é a única que termina no espaço-tempo de Minkowski.

iii) Soluções não-singulares.

As curvas fechadas que aparecem na fig. 4.13 representam modelos cosmológicos não-singulares. Estes modelos são eternos, não nasceram de uma explosão inicial nem colapsarão no futuro. No passado infinito ($t \rightarrow -\infty$) são idênticos ao espaço-tempo de Minkowski ao qual retornam no futuro infinito ($t \rightarrow +\infty$). A densidade de energia ρ (ver eq. 4.4) nestes universos permanece finita durante sua história, embora não seja constante no tempo. A trajetória típica de uma dessas soluções fechadas é a seguinte: inicialmente tem lugar uma fase de contração que é sucedida por uma era de expansão, intervalos durante os quais a constante gravitacional decresce. A partir de um certo instante, porém, ainda com o Universo em plena expansão, G passa a aumentar até atingir um valor final constante, enquanto nos aproximamos do espaço-tempo Minkowskiano.

Como $\omega < -3/2$, não existem soluções com densidade de energia negativa no diagrama da fig. 4.13.

Vejamos agora o diagrama correspondente a valores de ω no intervalo $-3/2 < \omega < -4/3$ (fig. 4.14). Neste diagrama estão presentes seis raios invariantes, representados pelos segmentos AM, MA', BM, MB', CM e MC'. Esta subdivisão dos dois raios invariantes BM e MB' em seis, como já dissemos ante-

riormente, tem início quando $\omega = -3/2$. As regiões pontilhadas representam soluções com $\rho < 0$. Isto quer dizer que curvas situadas nestas regiões não podem descrever modelos fisicamente a ceitáveis, pelo menos do ponto de vista da Física clássica.

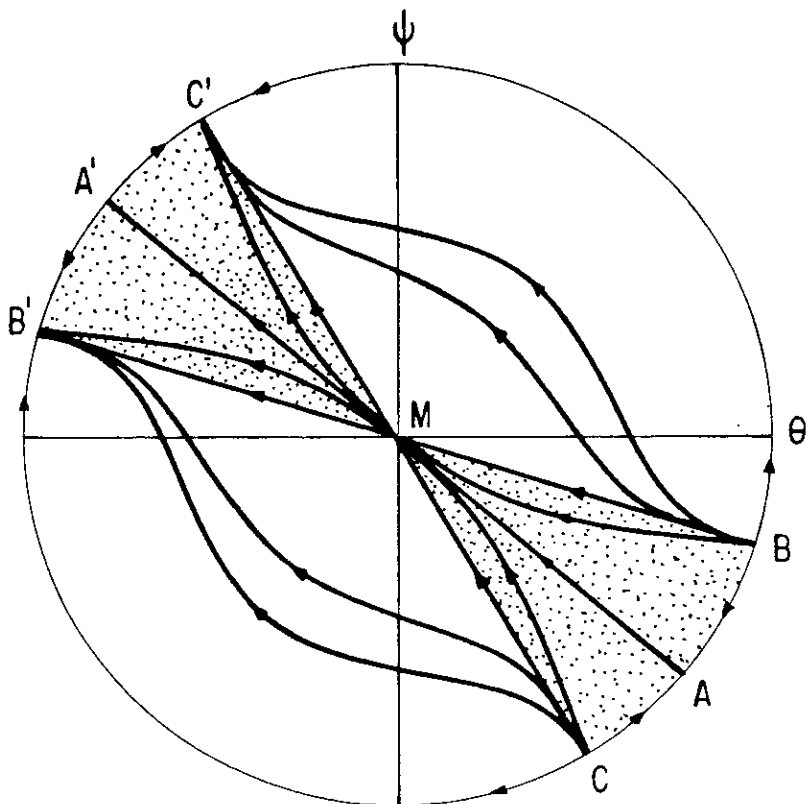


Fig. 4.14: Caso 'poeira' com $-3/2 < \omega < -4/3$

Por outro lado, ainda no diagrama da fig. 14.4, as soluções representadas pelas curvas BM, MB', CM e MC' , (raios invariantes) correspondem a soluções de vácuo, isto é, com $\rho = 0$ (ver Apêndice II), as quais apresentam singularidades na geometria, constituindo ora modelos com 'big-bang' (BM, CM), ora modelos colapsantes (MB', MC'). (Em todos os diagramas para

$\omega > -3/2$, independentemente do valor de λ , soluções representadas pelos raios invariantes acima serão soluções de vácuo). É interessante notar, neste ponto, que todas as soluções com $\rho < 0$, isto é, as soluções situadas dentro da região pontilhada, ou convergem para ou divergem do espaço-tempo de Minkowski (ou foram Minkowski no passado ou serão Minkowski no futuro). Por fim, temos as curvas situadas nos setores BMC' e CMB' , que começam com uma explosão inicial ($\theta = +\infty$), passam por uma fase de expansão seguida de uma contração acabando por sofrer um colapso no fim. Estas curvas não tendem em nenhum momento para o espaço-tempo de Minkowski (nem no passado, nem no futuro), muito embora assintoticamente elas se aproximem das soluções de vácuo.

O próximo diagrama que iremos considerar corresponde a $-4/3 < \omega < -1$ (fig. 4.15).

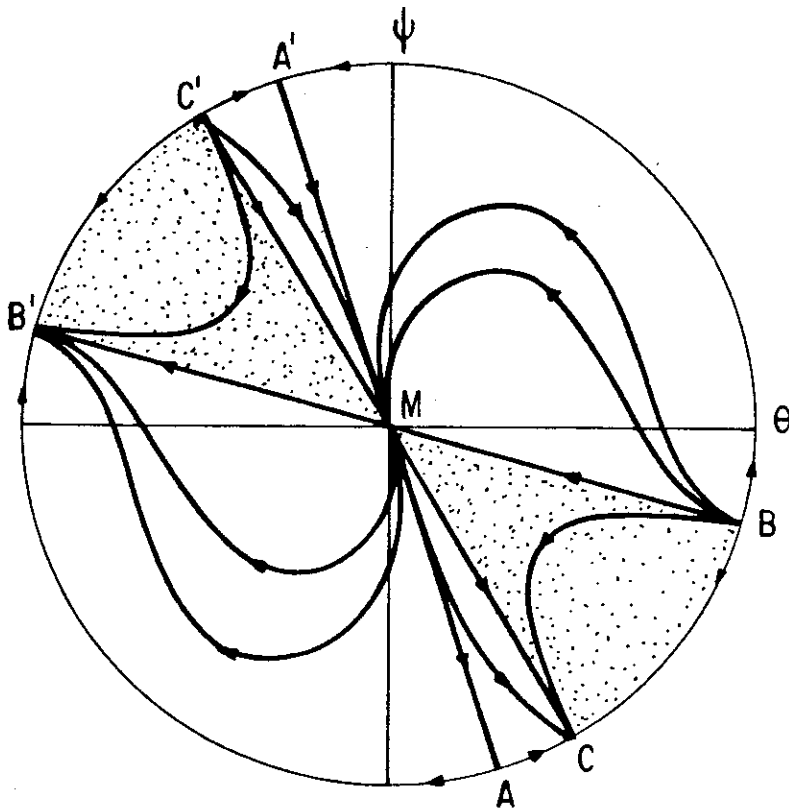


Fig. 4.15: Caso poeira com $-4/3 < \omega < -1$

Ao ultrapassar o valor $\omega = -4/3$ o quadro das soluções muda drasticamente. Primeiro, a curva CM inverte a orientação no tempo dando origem a uma consequência interessante: o espaço-tempo de Minkowski, assim como as soluções de vácuo, passam a ser completamente instáveis com relação a pequenas perturbações na densidade de energia ρ de tal forma que $\delta\rho < 0$ (propriedades de estabilidade do espaço-tempo de Minkowski) serão discutidas na seção 4.6). Outra mudança: quando $\omega > -4/3$ a linha AA' passa a se situar fora dos setores de densidade de energia negativa (região pontilhada), ao mesmo tempo em que a seta do tempo para os modelos representados por essa curva é invertida. MA representa agora modelos evoluindo a partir de uma era de Minkowski primordial que se expandem indefinidamente. Uma vez que MA se encontra numa região onde $\rho > 0$, parte de Minkowski e está em regime de expansão, temos aqui um caso de criação contínua de matéria-energia. Por sua vez, em A'M temos modelos que se contraem em direção ao espaço-tempo de Minkowski com a presença de processos de aniquilação de matéria-energia. As soluções situadas no setor BMA' são soluções com 'big-bang' que evoluem em direção à geometria de Minkowski (todas elas possuem $\rho > 0$, G crescente no início e decrescente nos estágios finais). Já o setor AMB' contém soluções que evoluem de maneira exatamente oposta. As soluções que partem de M e terminam em C diferem de MA por tenderem assintoticamente à solução de vácuo MC (o mesmo comentário se aplica à diferença entre o conjunto de curvas do setor A'MC' e à curva A'M).

Quando $\omega > -4/3$ dois casos merecem uma análise separada: $\omega = -1$ (fig. 4.16) e $\omega = 0$ (fig. 4.17). Vejamos, a se-

guir, os diagramas correspondentes a esses dois casos:

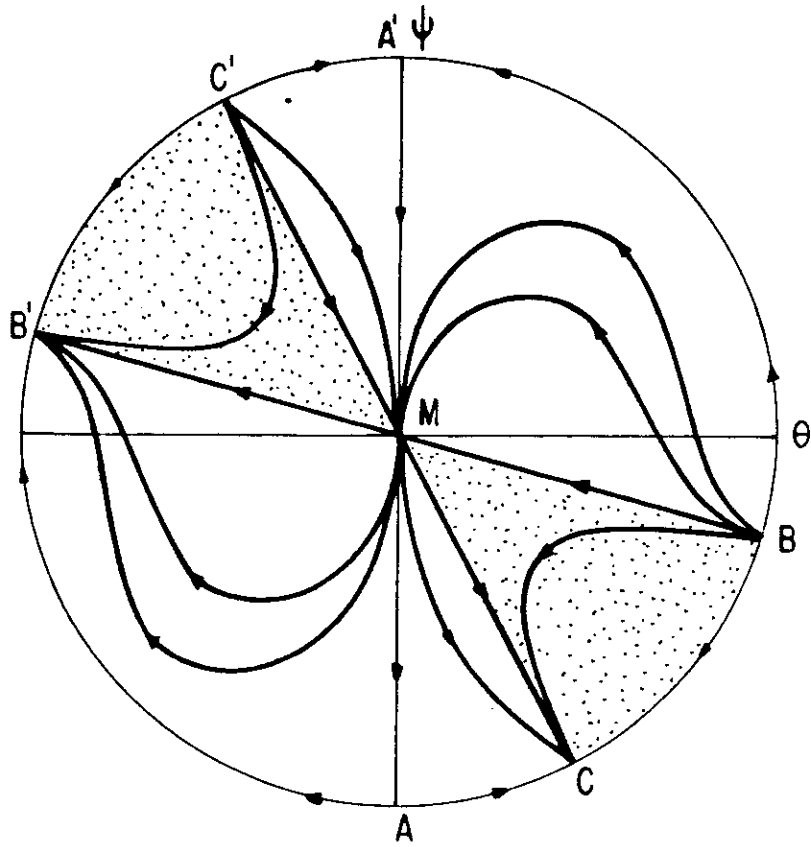


Fig. 4.16: Caso poeira com $\omega = -1$

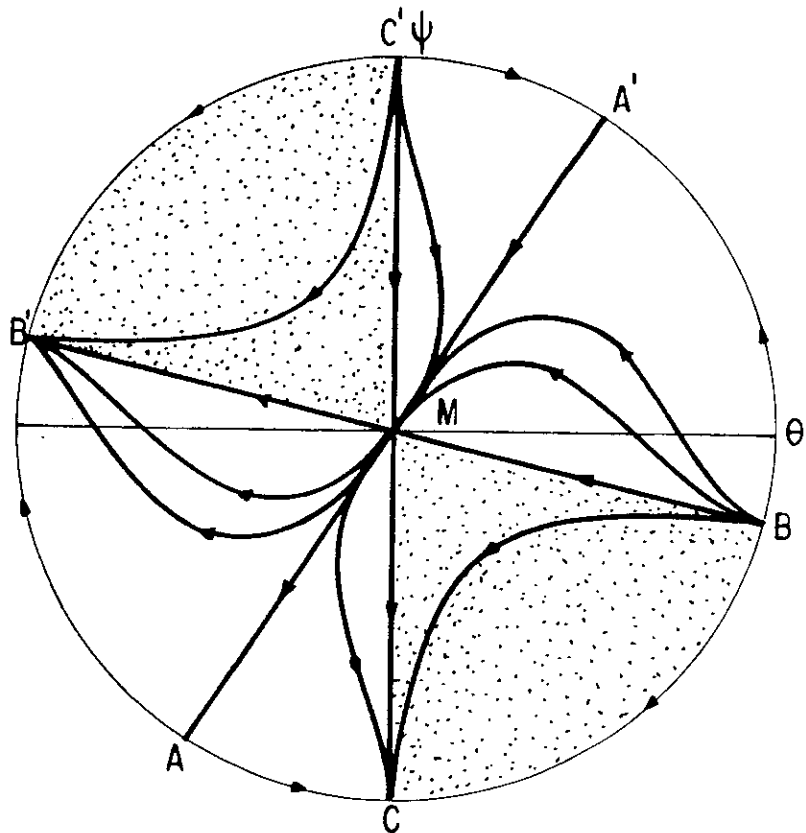


Fig. 4.17: Caso poeira com $\omega = 0$

Se compararmos a fig. 4.16 ($\omega = -1$) com a fig. 4.15 ($-4/3 < \omega < 1$) verificamos que a topologia das curvas no diagrama de fase não se modificou. Contudo, com relação aos modelos cosmológicos que essas curvas representam, temos algo novo quando $\omega = -1$. Por exemplo, agora o segmento AA' coincide com o eixo ψ , o que significa que modelos descritos pelos raios invariantes MA e $A'M$ são estáticos ($\theta = 0$). Isto significa que temos uma solução de Brans-Dicke na qual o espaço-tempo é estático, porém a constante gravitacional varia com o tempo. Além disso, nesta solução temos $\rho > 0$. A curva MA parte do espaço-tempo de Minkowski M onde $\theta = 0$ e $\rho = 0$. Logo, temos aqui novamente a presença de processos de criação enquanto que $A'M$ tende para M e aniquilação de matéria-energia.

Examinemos o diagrama para $\omega = 0$ (fig. 4.17). Vemos que as soluções estáticas situadas sobre $C'C$ são soluções de vácuo nas quais G varia com o tempo. Portanto, estamos diante de um campo escalar ϕ não sendo gerado por nenhum campo de matéria externo. Este fato viola a formulação usual do princípio de Mach^[33].

Ainda com relação às figuras 4.16 e 4.17, podemos afirmar que aí aparecem as soluções da teoria de Brans-Dicke que melhor concordam com a observação: soluções que representam modelos expansionistas de universo com densidade de energia positiva, provenientes de um 'big-bang' e com a constante gravitacional variável, satisfazendo a hipótese de Dirac (i.é., G decrescendo com o tempo num universo em expansão). Esta classe de soluções, a que acabamos de nos referir, está descrita pela curva $A'M$.

Como veremos mais adiante, exceto para os casos de radiação ($\lambda = \frac{1}{3}$) e de 'stiff matter', esse tipo de solução estará presente em todos os diagramas num certo intervalo bem definido de valores de ω . Assim, para modelos de poeira ($\lambda = 0$), esta solução existe quando $\omega > -1$; para $0 < \lambda < 1/3$ quando $\omega > \frac{1}{\lambda-1}$; para $1/3 < \lambda < 1$, quando $\omega < \frac{1}{\lambda-1}$. As soluções representadas pela curva MA possuem, uma "dinâmica" oposta a A'M e não possuem interesse físico. Chamamos a atenção também para as soluções do setor C'MA', que representam modelos não-estáticos com densidade de energia positiva, constante gravitacional decrescente, evoluindo para o espaço-tempo de Minkowski. Já no setor oposto CMA, as curvas não descrevem modelos cosmológicos aceitáveis do ponto de vista observacional.

Quando a constante de acoplamento ω é positiva (fig. 4.18), o único fato significativo que poderíamos acrescentar aos comentários do parágrafo anterior, diz respeito às soluções de vácuo representadas por C'M e MC que deixam ser modelos estáticos.

As regiões classicamente 'proibidas', isto é, as regiões onde a densidade de energia é negativa (setores MBC e MB'C') vão se tornando cada vez mais largas à medida que ω cresce, como bem podemos ver nos diagramas anteriores. No entanto, a partir de $\omega = -4/3$, a linha AA' ficará sempre fora da região 'proibida'. Quando $\omega \rightarrow +\infty$ (ver fig. 4.19) finalmente AA' irá coincidir com o eixo , único lugar do diagrama em que ρ não é negativo. Este resultado, na verdade, ilustra geometricamente o fato de que as soluções expansionistas com $\rho > 0$ tendem para a solução de Friedmann da relatividade geral, que, representada no

gráfico da fig. 4.19, aparece como o segmento A'M.

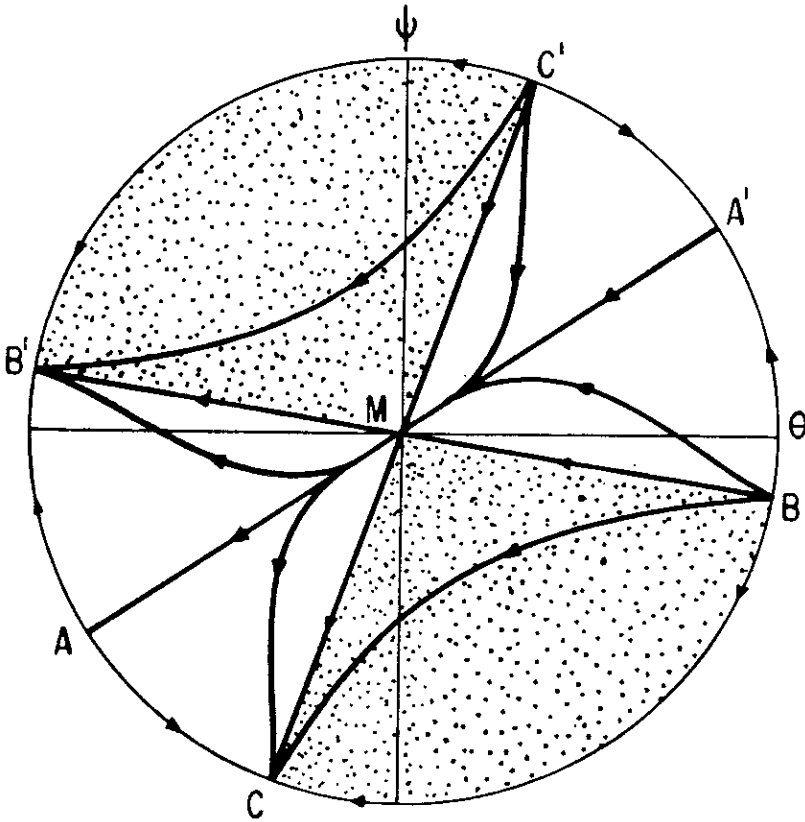


Fig. 4.18: Caso poeira com $\omega > 0$

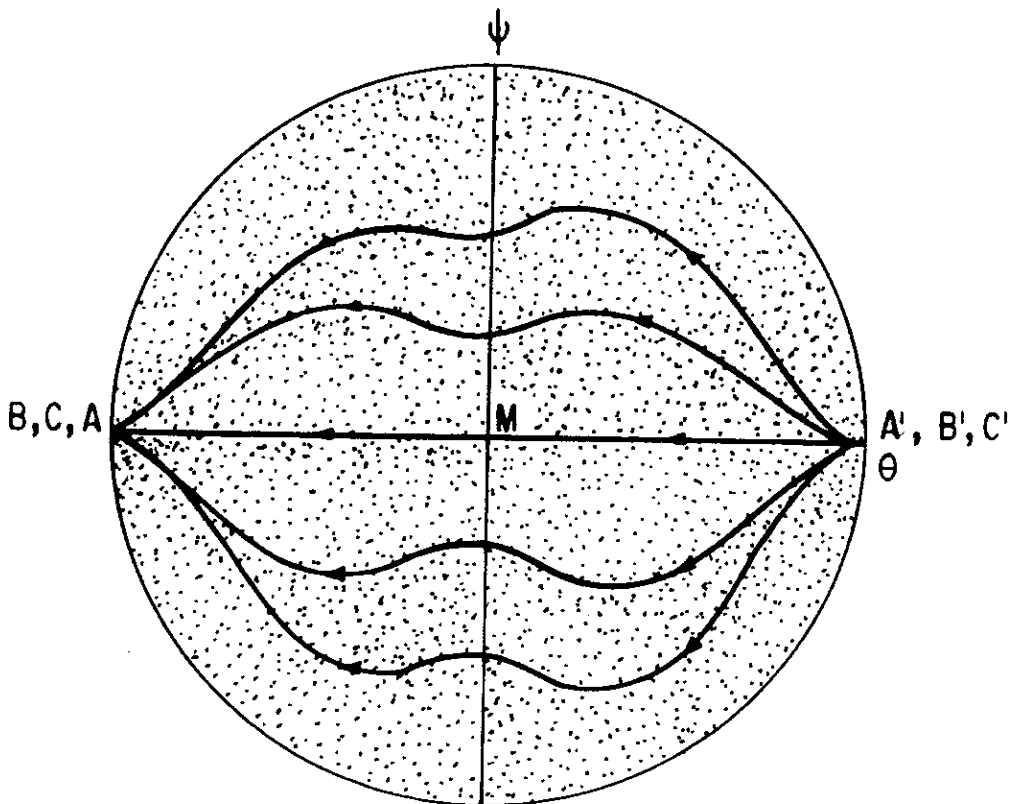


Fig. 4.19: Caso poeira no limite quando $\omega \rightarrow +\infty$

b) o caso radiação

É um fato bem conhecido na teoria de Brans-Dicke que para fluidos obedecendo a equação de estado $p = \frac{1}{3} \rho$ o campo escalar ϕ não tem fontes. Isto, pela simples razão que o traço T do tensor momentum-energia é nulo. Como consequência, qualquer solução de Einstein considerando o mesmo tipo de fluido satisfaz as equações de Brans-Dicke, se tomarmos $\phi = \frac{1}{G} = \text{const.}$ É interessante observar que este resultado pode ser imediatamente obtido através da análise dos diagramas de fase. (ver figs. 4.20, 4.21 e 4.22)

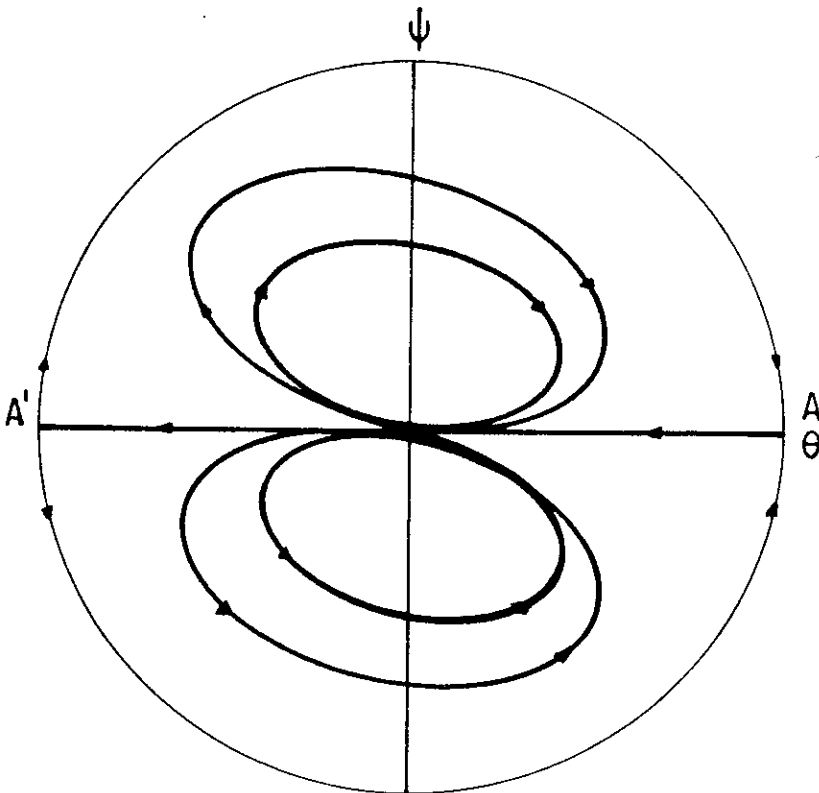


Fig. 4.20: Caso radiação com $\omega < -3/2$
(Não existem regiões com $\rho < 0$)

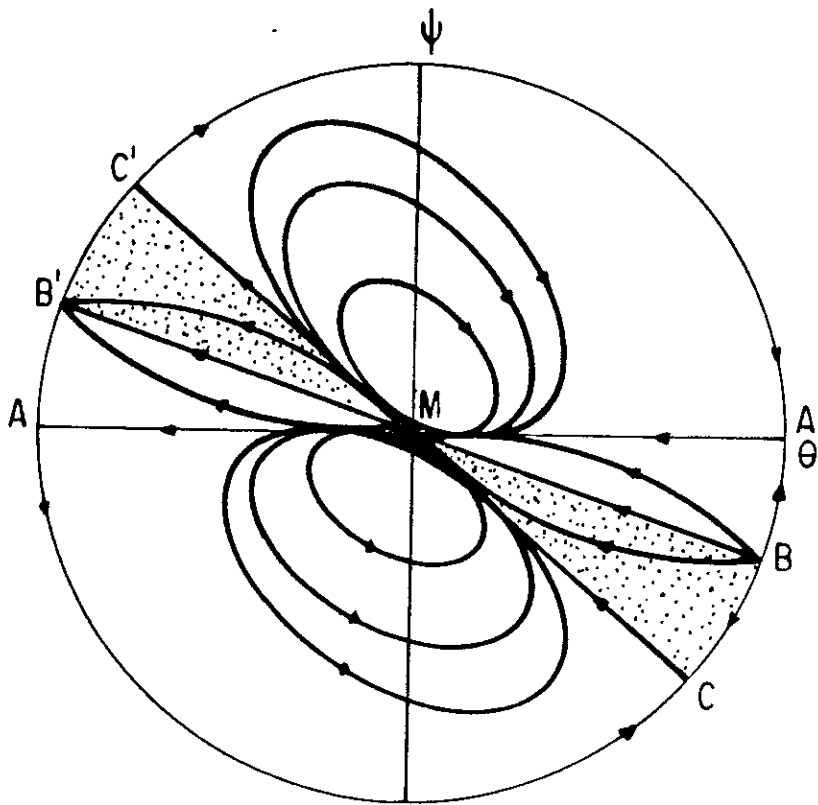


Fig. 4.21: Caso radiação com $-3/3 < \omega < -4/3$

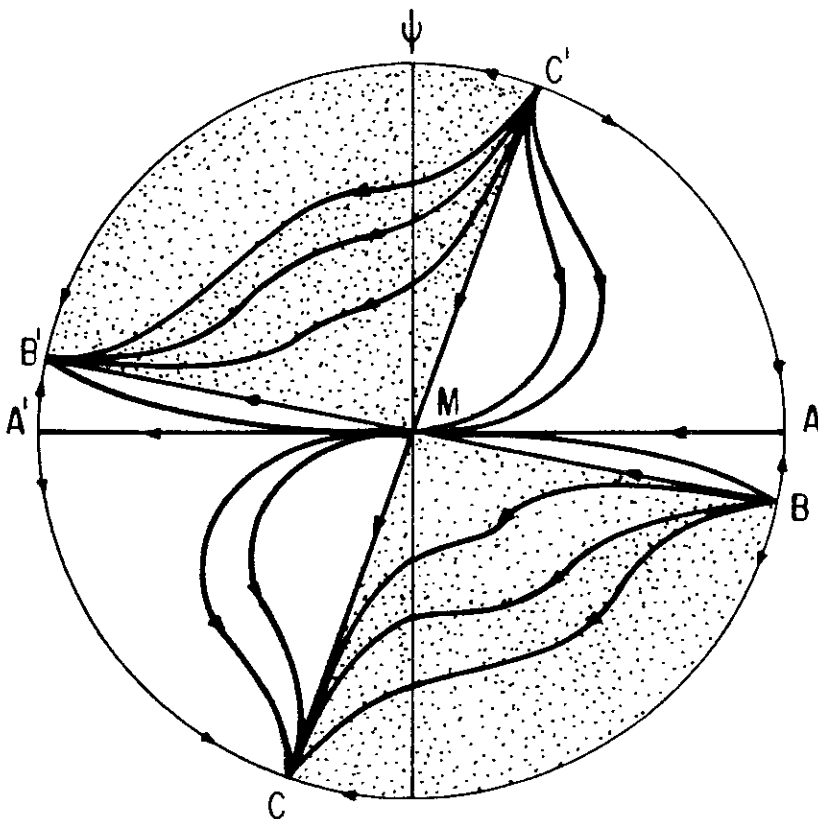


Fig. 4.22: Caso radiação com $\omega > 0$

Com efeito, de acordo com os três últimos diagramas, o segmento AA' que contém os raios invariantes AM e MA' é fixo, não depende do valor da constante de acoplamento ω , e coincide com o eixo θ ($\psi = 0$). Naturalmente que a solução de Friedmann para radiação dada por $R = R_0 t^{1/2}$, $\phi = \frac{1}{G} = \text{const.}$ e $\rho = \frac{3G}{32} \frac{1}{t^2}$ se situa sobre o raio invariante AM.

Os comentários que fizemos ao considerar o caso de um fluido sem pressão ('poeira') valem para a maioria das soluções dos diagramas de fase no caso de radiação. Entretanto, examinemos algumas propriedades novas que surgem nas figuras 4.20, 4.21 e 4.22.

Primeiro, se $\omega < -3/2$ (fig. 4.20) temos essencialmente a mesma configuração de curvas da fig. 4.13, a única diferença residindo na ocorrência de soluções com G constante.

Quando $-3/2 < \omega < -4/3$ (fig. 4.21) nos deparamos com a presença de curvas fechadas, que representam soluções cosmológicas não-singulares, situadas em regiões onde $\rho > 0$. Isto não constitui nenhuma violação dos teoremas de singularidade de Hawking-Penrose [1] uma vez que a condição forte de energia $\tilde{T}_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq \tilde{T}/2$ não é satisfeita neste caso.

Aqui, $\tilde{T}_{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia na versão revisada de Dicke e leva em conta o campo escalar ϕ [2]). Na verdade, isto explica a existência das soluções não-singulares encontradas por O'Hanlon e Tupper, por exemplo, para $\omega = -4/3$ [3].

Quando $\omega > -4/3$ não temos mais soluções não-singulares. Aliás, este resultado é válido para todos os casos (qualquer que seja a equação de estado adotada) que examinaremos mais tarde. (A fig. 4.22 está desenhada para os valores po

sitivos de ω . Se $-4/3 < \omega < 0$ a única diferença está no fato de que a linha CC' passa pelo 2º e 4º quadrantes; a topologia do diagrama permanece inalterada). A curva C'M que aparece na fig. 4.22 é essencialmente a mesma do caso anterior ('poeira') (ver fig. 4.18), exceto pelo fato de que no caso de radiação as soluções representadas por esta curva tendem assintoticamente, às soluções de Friedmann (curva AM).

c) O caso $0 < \lambda < 1/3$

O caso em que λ se encontra no intervalo aberto $0 < \lambda < 1/3$ é intermediário entre os casos poeira e radiação. O movimento de rotação do raio invariante AA' está mostrado nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9, sendo idêntico ao do caso poeira. A quase totalidade dos diagramas quando $0 < \lambda < 1/3$ é similar aos diagramas para $\lambda = 0$. Contudo, além dos valores $\omega = -3/2$ e $\omega = -4/3$, ocorrem também bruscas mudanças na topologia do plano de fase quando $\omega = \omega^*(\lambda) = \frac{2\lambda - 4/3}{(\lambda - 1)^2}$ e $\omega = \omega^{**}(\lambda) = \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda^2 - 1}$. Naturalmente quando $\omega = 0$ (caso poeira), $\omega^*(\lambda) = \omega^{**}(\lambda) = -4/3$. E quando $\lambda = 1/3$ (caso radiação), $\omega^*(\lambda) = \omega^{**}(\lambda) = -3/2$. (ver Apêndice II). Estes novos pontos críticos $\omega^*(\lambda)$ e $\omega^{**}(\lambda)$ aparecem também quando $1/3 < \lambda < 1$. No caso que estamos examinando, isto é, $0 < \lambda < 1/3$, vale a seguinte desigualdade:

$$-3/2 < \omega^*(\lambda) < \omega^{**}(\lambda) < -4/3$$

Começemos então nossa análise considerando $\omega < -3/2$. Os diagramas correspondentes a $\omega < -3/2$ não apresentam qualitativamente nada de novo se compararmos com o caso poeira. Ou seja, quando $0 < \lambda < 1/3$ e $\omega < -3/2$ temos o mesmo diagrama da fig. 4.13. Quando $-3/2 < \omega < \omega^*(\lambda)$ novamente temos a reprodução exa

ta de um diagrama já analisado antes, que é o da fig. 4.14. Até aqui não há nada de novo também. Entretanto, se ω se encontra no intervalo $\omega^*(\lambda) < \omega < \omega^{**}(\lambda)$, então temos o diagrama abaixo. (ver fig. 4.23)

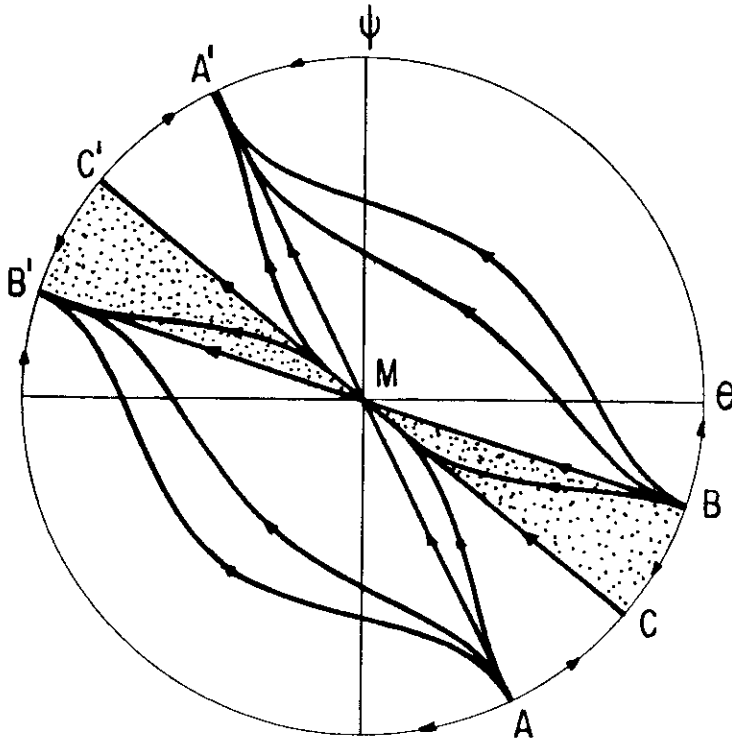


Fig. 4.23: Caso $0 < \lambda < 1/3$ e $\omega^*(\lambda) < \omega < \omega^{**}(\lambda)$

Neste diagrama (fig. 4.23) o raio invariante AM está situado na região de densidade de energia positiva, representando, assim, modelos expansivos surgindo de uma grande explosão nos quais a constante gravitacional aumenta. Em nenhum dos casos analisados previamente encontramos uma solução com tais características. Um comentário análogo pode ser feito com relação às soluções representadas por MA': estas descrevem universos colapsantes com G decrescente e uma fase inicial Minkowskiana. Por outro lado, as soluções que partem de B e se dirigem ao ponto A' são também novas: assintoticamente elas iniciam como soluções

de vácuo, atravessam uma fase de expansão seguida de uma fase contrativa até entrarem num processo de colapso, quando então a densidade de energia ρ se tornará infinita (AB' é simplesmente o reverso de BA').

Consideremos agora $\omega^{**}(\lambda) < \omega < -4/3$ (ver fig. 4.24).

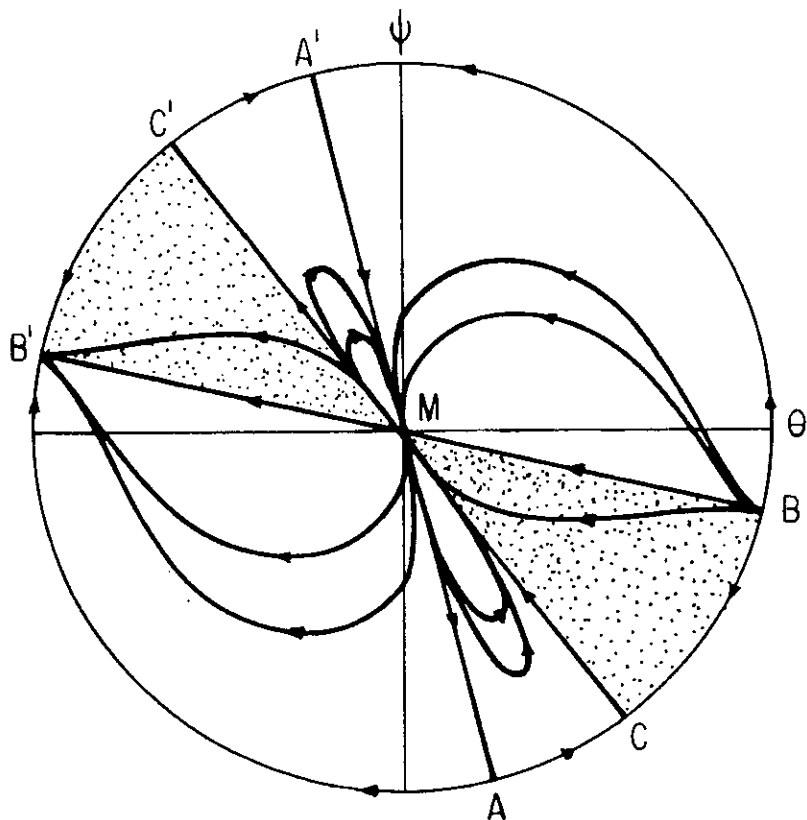


Fig. 4.24: Caso $0 < \lambda < 1/3$ e $\omega^{**}(\lambda) < \omega < -4/3$

Examinemos a fig. 4.24. Encontramos aqui curvas fechadas diferentes, por exemplo, das que aparecem no caso de radiação quando a constante de acoplamento toma valores no intervalo $-3/2 < \omega < -4/3$ (ver fig. 4.21): as soluções não-singulares descritas pelas curvas fechadas da fig. 4.24 são ou sempre expansivas ou sempre contrativas. Estas soluções desaparecerão quando ω for maior do que $-4/3$. Neste diagrama podemos também notar que as curvas $A'M$ e MA mudaram de orientação comparando

com o diagrama anterior.

Soluções estáticas análogas às do diagrama 4.16 (caso poeira com $\omega = -1$) são obtidas quando tomamos $\omega = \frac{1}{\lambda-1}$ (este valor é maior que $\omega^{**}(\lambda)$ quando $0 < \lambda < 1/3$). O diagrama de fase correspondendo a $\omega = \frac{1}{\lambda-1}$ é exatamente o mesmo da fig.4.16.

Quando $\omega = 0$ e $\omega > 0$ os diagramas de fase são também idênticos aos do caso poeira (ver figs. 4.17 e 4.18, respectivamente). Mais uma vez, gostaríamos de salientar que, exatamente como no caso poeira, as curvas mais significativas do ponto de vista dos dados observacionais, são as que estão situadas sobre o raio invariante A'M e as que se encontram dentro do setor A'MC'. Como já vimos, essas curvas descrevem modelos expansivos originados de um 'big-bang' com constante gravitacional decrescente e densidade de energia positiva.

A evolução dos diagramas à medida que $\omega \rightarrow +\infty$, quando $0 < \lambda < 1/3$, é idêntica ao caso poeira; tudo o que dissemos anteriormente é também válido neste caso.

d) O caso $1/3 < \lambda < 1$

Passemos agora a tratar do caso em que o fluido obedece a uma equação de estado do tipo $p = \lambda\rho$, onde $1/3 < \lambda < 1$, que é um caso intermediário entre radiação (já estudado) e 'stiff matter'. Considerando, agora, o sentido de rotação da linha AA', vemos que é contrário ao dos ponteiros do relógio, como foi ilustrado nas figs. 4.10, 4.11 e 4.12. Por outro lado, temos que $\omega^{**}(\lambda) < -3/2$. Se $\lambda < 1/2$, então $-3/2 < \omega^*(\lambda) < -4/3$. Se $\lambda \geq 1/2$, então $\omega^*(\lambda) \geq -4/3$. Logo, num certo intervalo de variação de ω , temos de distinguir entre duas possibilidades: se

$\lambda < 1/2$ ou se $\lambda \geq 1/2$.

Quando $\omega < \omega^{**}(\lambda)$ obtemos basicamente três diagramas diferentes correspondendo a: $\omega < \frac{1}{\lambda-1}$ (fig. 4.25), $\omega = \frac{1}{\lambda-1}$ (fig. 4.26) e $\frac{1}{\lambda-1} < \omega < \omega^{**}(\lambda)$ (fig. 4.27). Vejamos a seguir estes diagramas:

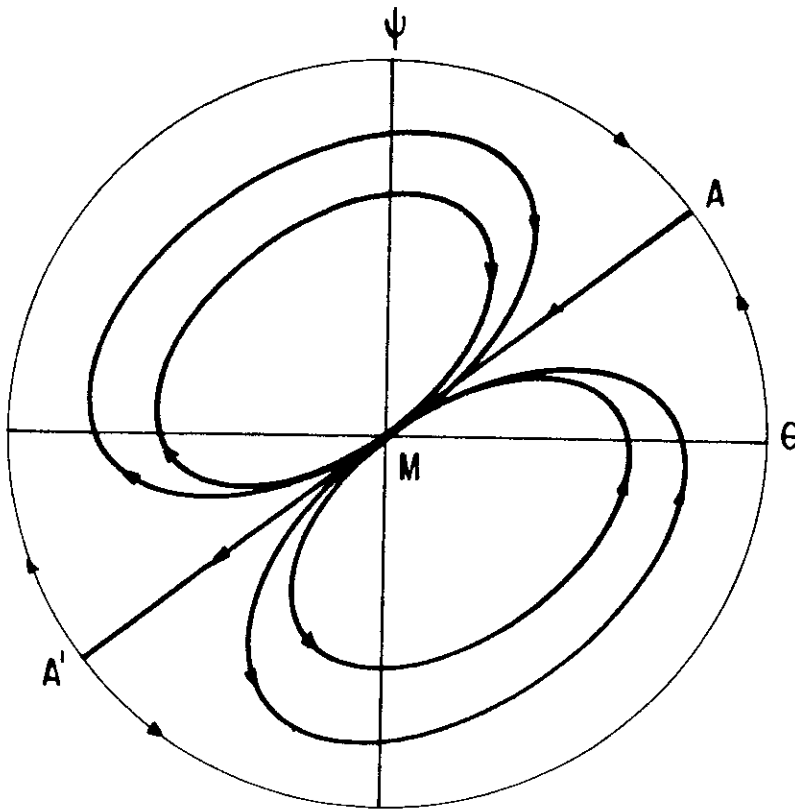


Fig. 4.25: Caso $1/3 < \lambda < 1$ e $\omega < \omega^{**}(\lambda)$

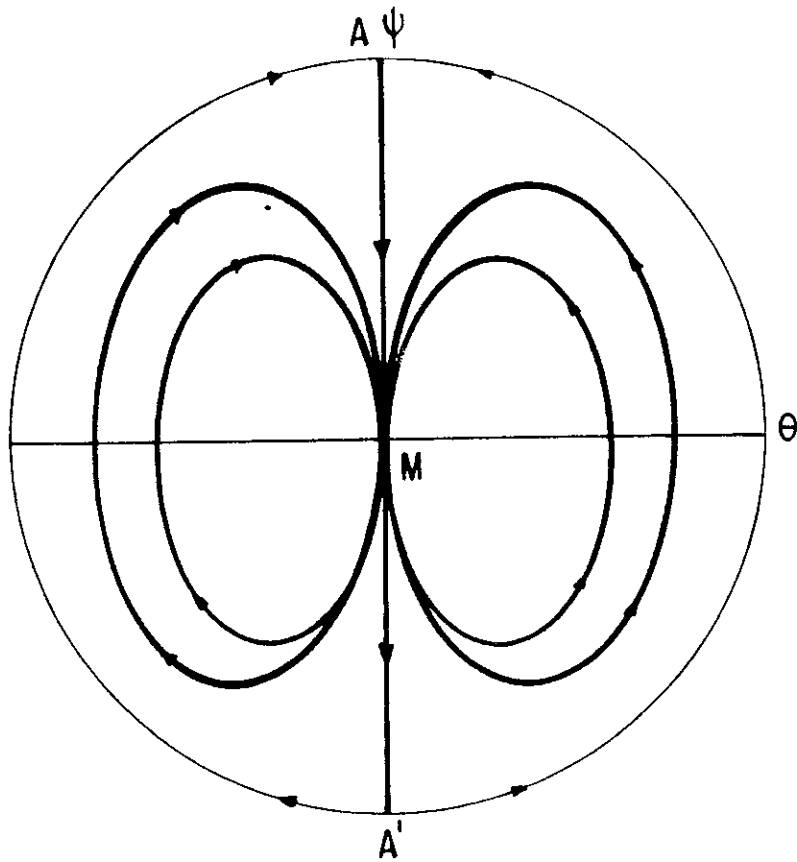


Fig. 4.26: Caso $1/3 < \lambda < 1$ e $\omega = \frac{1}{\lambda - 1}$

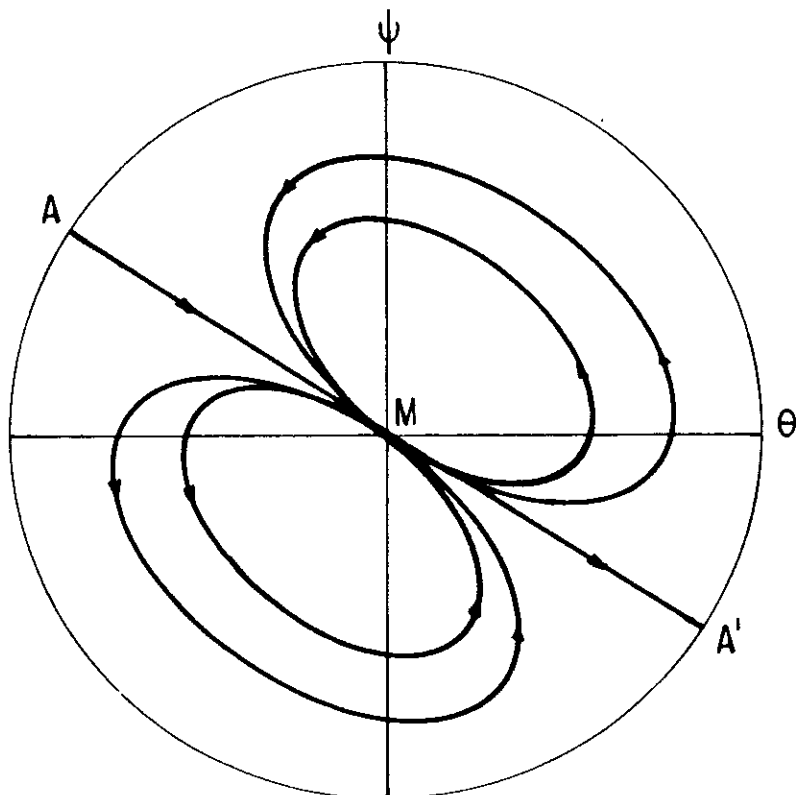


Fig. 4.27: Caso $1/3 < \lambda < 1$ e $\frac{1}{\lambda - 1} < \omega < \omega^{**}(\lambda)$

Nesses três últimos diagramas (figs. 4.25, 4.26 e 4.27) obtêm-se curvas fechadas que descrevem modelos não-singulares. No primeiro deles, quando $\omega < \frac{1}{\lambda-1}$ (fig. 4.25) destacamos também a solução cosmológica representada pelo raio invariante AM. Como já tivemos ocasião de frisar antes, esta solução exibe propriedades fisicamente desejáveis para um modelo cosmológico que pretenda concordar com os dados observacionais disponíveis atualmente. Entretanto, esta solução só existe para $\omega < \frac{1}{1-\lambda}$, ou seja, ω negativo, o que contraria os argumentos que restringem ω a valores positivos (ver Cap. I).

No diagrama da fig. 4.26, AM e MA' são as soluções estáticas com $\rho > 0$ já vistas anteriormente. Quanto às soluções não singulares (curvas fechadas), elas são de dois tipos: ou se referem a modelos expansivos ou a modelos contrativos. Ambos tendem para uma estrutura Minkowskiana de universo quando $t \rightarrow \pm\infty$, ao mesmo tempo que possuem vida eterna. Neles, a constante gravitacional G experimenta um aumento durante um certo período de tempo e depois começa a decrescer.

Com relação à fig. 4.27, aí temos configuração igual a do caso poeira com $\omega < -3/2$, porém com o tempo cósmico fluindo em sentido contrário (ver fig. 4.13).

Vamos agora investigar o diagrama correspondente a ω variando no intervalo $\omega^{**}(\lambda) < \omega < -3/2$, mostrado na figura que se segue:

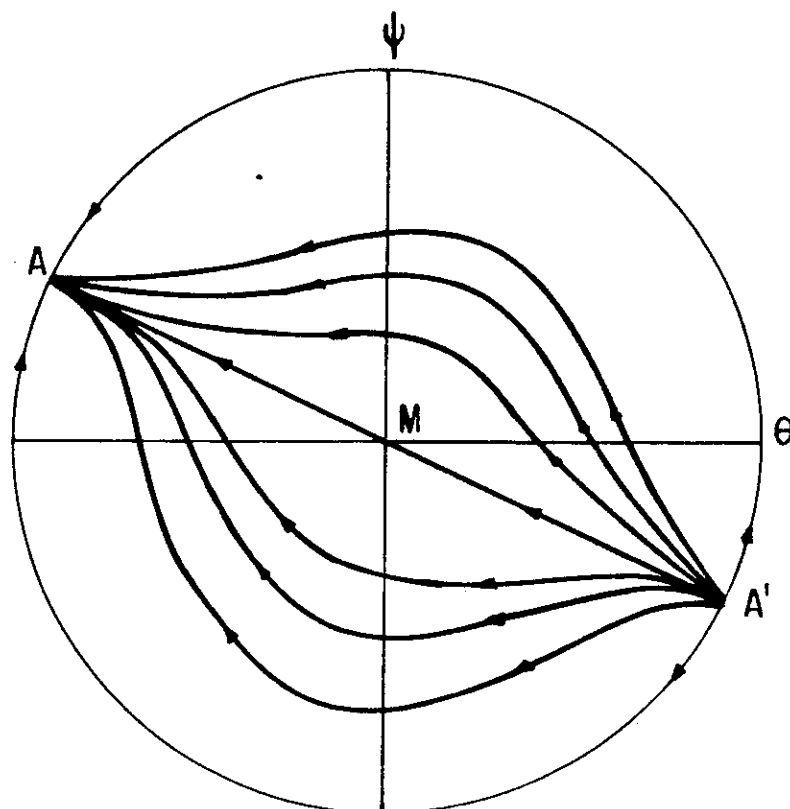


Fig. 4.28: Caso $1/3 < \lambda < 1$ e $\omega^{**}(\lambda) < \omega < -3/2$

Acima (fig. 4.28), as soluções situadas em AA' mudaram de orientação no tempo, comparando-se com o diagrama imediatamente anterior (fig. 4.27). Já as soluções não-singulares para $\omega < \omega^{**}(\lambda)$ deixaram de existir e tornaram-se soluções singulares com um 'big-bang' inicial (ponto A') evoluindo em direção ao colapso no futuro (ponto A). Soluções um tanto quanto similares já foram obtidas no caso poeira, entretanto, naquele caso as soluções ou se originavam ou tendiam para soluções de vácuo assintoticamente. (ver fig. 4.23).

Neste ponto, para prosseguirmos, devemos dividir nossa análise conforme seja $1/3 < \lambda < 1/2$ ou $1/2 \leq \lambda < 1$. Se $1/3 < \lambda < 1/2$, devemos investigar os seguintes próximos casos: $-3/2 < \omega < \omega^*(\lambda)$ (fig. 4.29), $\omega^*(\lambda) < \omega < -4/3$ (fig. 4.30) e

$\omega > -4/3$ (fig. 4.31). Se $1/2 < \lambda < 1$, então os casos que devem ser examinados são: $-3/2 < \omega < \omega^*$ (fig. 4.29), $-4/3 < \omega < \omega^*$ (fig. 4.33) e $\omega > \omega^*$.

Desse modo, vamos supor inicialmente que $1/3 < \lambda < 1/2$. Consideremos, então, a figura 4.29 que corresponde a $-3/2 < \omega < \omega^*(\lambda)$:

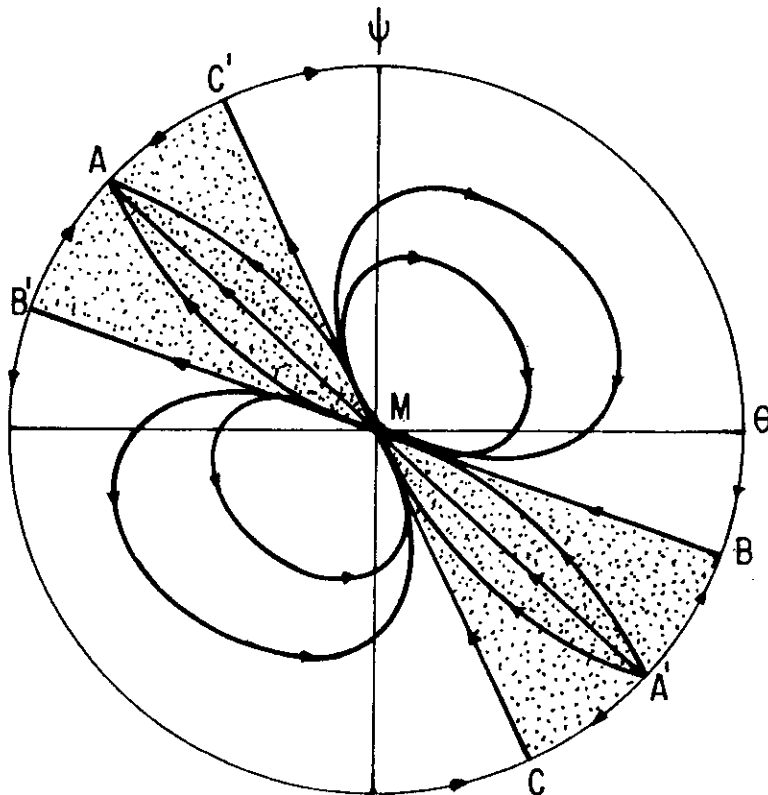


Fig. 4.29: Caso $1/3 < \lambda < 1/2$ e $-3/2 < \omega < \omega^*(\lambda)$

No diagrama acima (fig. 4.29) aparecem as regiões com densidade de energia negativa, bem como as soluções de vácuo BM , MB' , CM e MC' . As soluções com $\rho < 0$ já foram analisadas por nós, uma vez que são idênticas às da fig. 4.14, situadas na mesma região ($\rho < 0$), com a diferença de que estas últimas não tendem assintoticamente às soluções de vácuo próximo à singularidade. É interessante observar que as soluções com

densidade de energia positiva são todas não-singulares (curvas fechadas).

Quando $\omega^*(\lambda) < \omega < -4/3$ (ver fig. 4.30, a curva A'M (que antes se situava na região com $\rho < 0$) emerge na região onde a densidade de energia é positiva, descrevendo modelos em expansão nascidos de um 'big-bang' e evoluindo com uma constante gravitacional crescente. Este tipo de solução já foi encontrada antes, ao analisarmos a fig. 4.13.

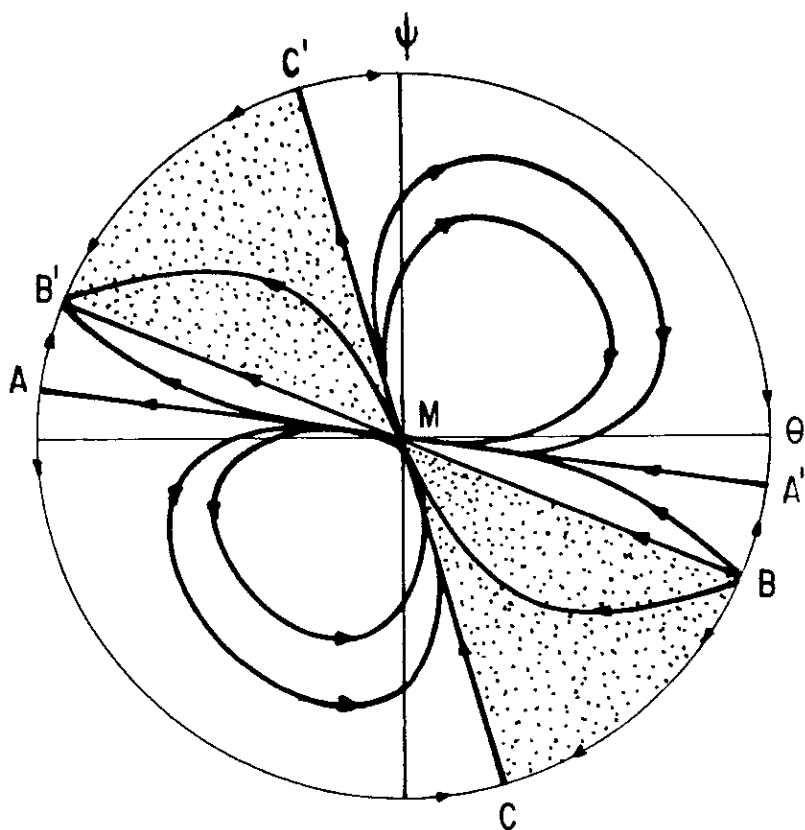


Fig. 4.30: Caso $1/3 < \lambda < 1/2$ e $\omega^*(\lambda) < \omega < -4/3$

A partir do instante em que ω se torna maior do que $-4/3$ embora ainda menor do que zero, temos o diagrama a seguir:

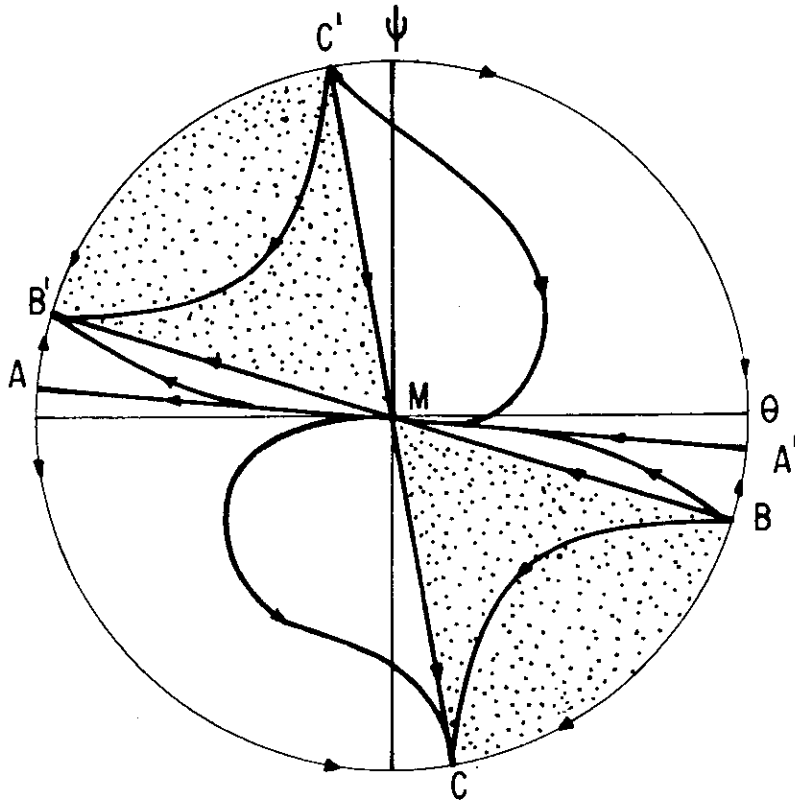


Fig. 4.31: Caso $1/3 < \lambda < 1/2$ e $-4/3 < \omega < 0$

Ao passar pelo valor $\omega = 0$, a linha CC' coincide com o eixo ψ e aí obtemos as soluções de vácuo estáticas já discutidas anteriormente (ver, por exemplo, fig. 4.17).

Finalmente, o diagrama de fase para $\omega > 0$ está representado na fig. 4.32 a seguir:

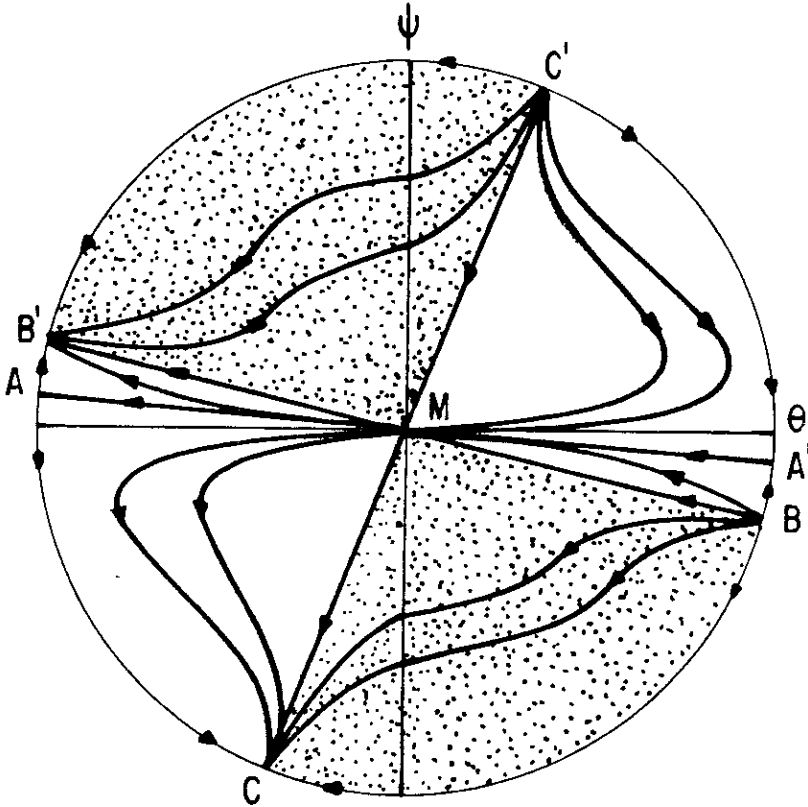


Fig. 4.32: Caso $1/3 < \lambda < 1/2$ e $\omega > 0$

Soluções situadas na região BMC' podem ser identificadas com modelos expansivos nos quais $\rho > 0$. Em todos eles há pelo menos uma fase em que G aumenta. Na solução $A'M$, entretanto, G é sempre crescente. Se fizermos $\omega \rightarrow +\infty$, obteremos o diagrama da fig. 4.19.

Agora, suponhamos que $1/2 < \lambda < 1$. Quando $-3/2 < \omega < -4/3$ teremos exatamente o mesmo diagrama da fig. 4.29, e para $-4/3 < \omega < \omega^*(\lambda)$ teremos o diagrama a seguir (fig. 4.33):

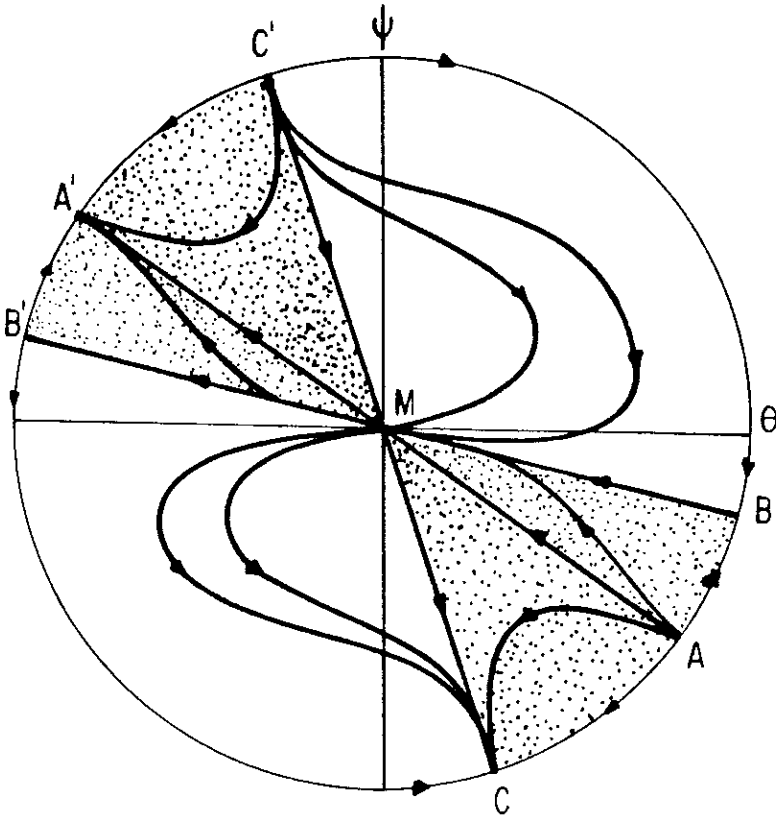


Fig. 4.33: Caso $1/2 < \lambda < 1$ e $-4/3 < \omega < \omega^*(\lambda)$

Finalmente, quando $\omega > \omega^*(\lambda)$ ou $\omega \rightarrow +\infty$ obtemos novamente os mesmos diagramas das figuras 4.32 e 4.19.

e) O caso 'stiff matter'

O próximo caso a ser examinado refere-se a modelos com fluido satisfazendo uma equação de estado do tipo 'stiff matter', isto é, $p = \rho$. Cinco diagramas são necessários para uma caracterização completa: $\omega < -3/2$ (fig. 4.34), $-3/2 < \omega < -4/3$ (fig. 4.29), $-4/3 < \omega < 0$ (fig. 4.35), $\omega > 0$ (fig. 4.36) e $\omega \rightarrow +\infty$ (fig. 4.37).

Inicialmente devemos chamar a atenção para o seguinte: se $\lambda = 1$ então AA' não gira no plano de fase $\theta\psi$ à medida

que ω varia. De fato, AA' é fixo, formando um ângulo de $-33,69^\circ$ com o sentido positivo do eixo θ .

Quando $\omega < -3/2$, contrariamente ao que sucede nos casos já analisados previamente, não temos curvas fechadas. Ao invés disso, aparecem somente modelos expansivos com um 'big-bang' inicial e uma fase colapsante subsequente (ver fig. 4.34).

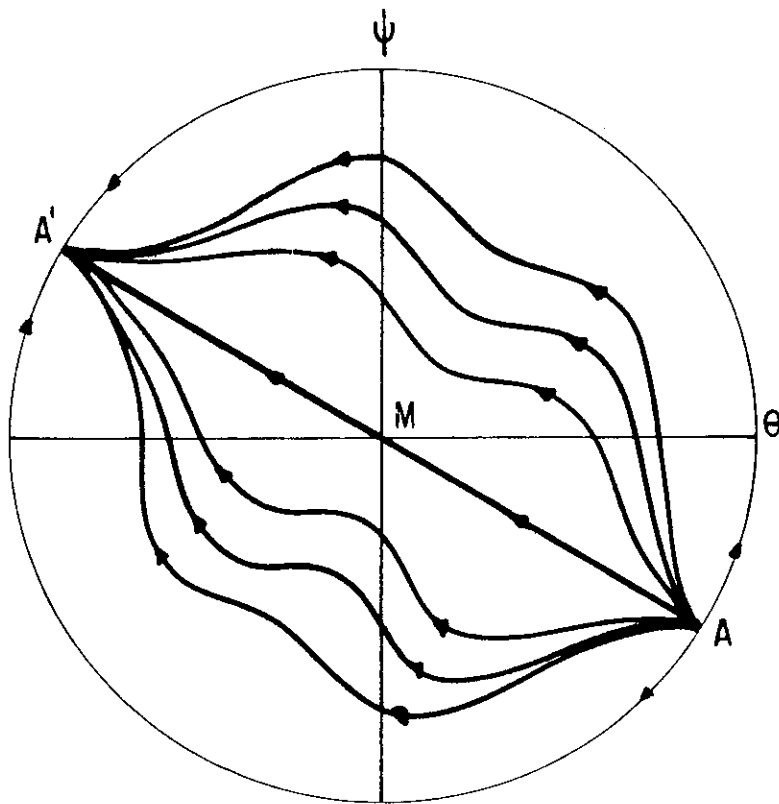


Fig. 4.34: Caso 'stiff matter' com $\omega < -3/2$

No intervalo $-3/2 < \omega < 3/4$ o diagrama de fase é idêntico ao da fig. 4.29. Entretanto, se $-4/3 < \omega < 0$, então teremos o diagrama de fig. 4.35:

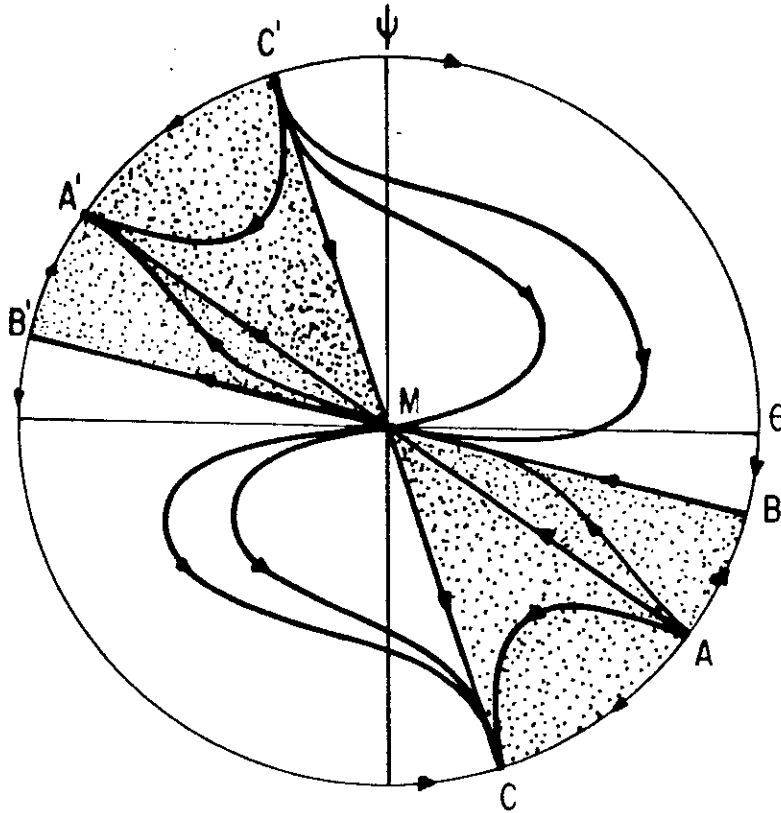


Fig. 4.35: Caso 'stiff matter' com $-4/3 < \omega < 0$

Os próximos diagramas correspondem a $\omega > 0$ (fig. 4.36) e a $\omega \rightarrow +\infty$ (fig. 4.37).

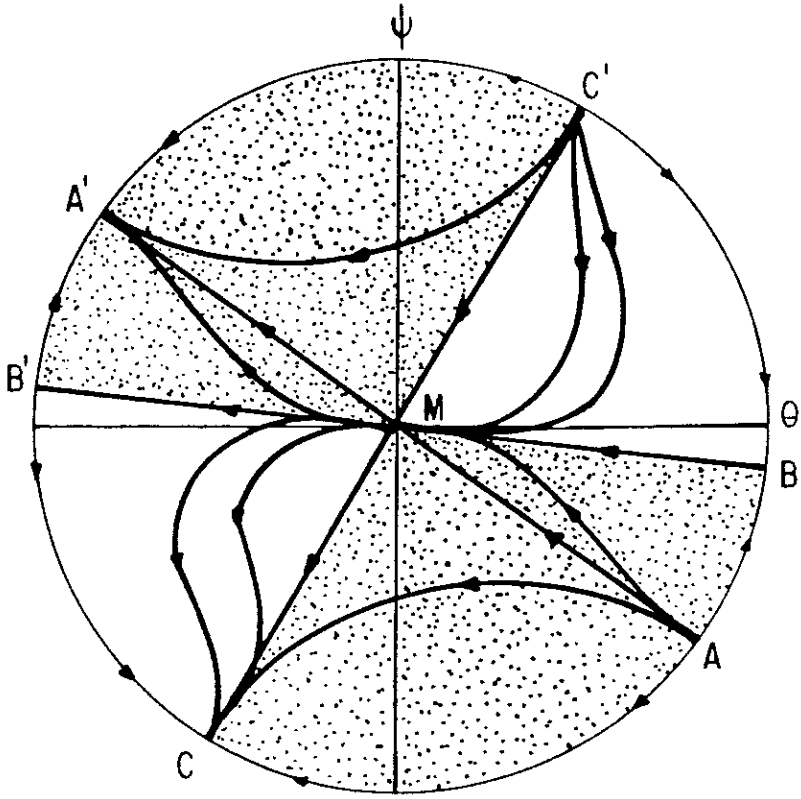


Fig. 4.36: Caso 'stiff matter' com $\omega > 0$

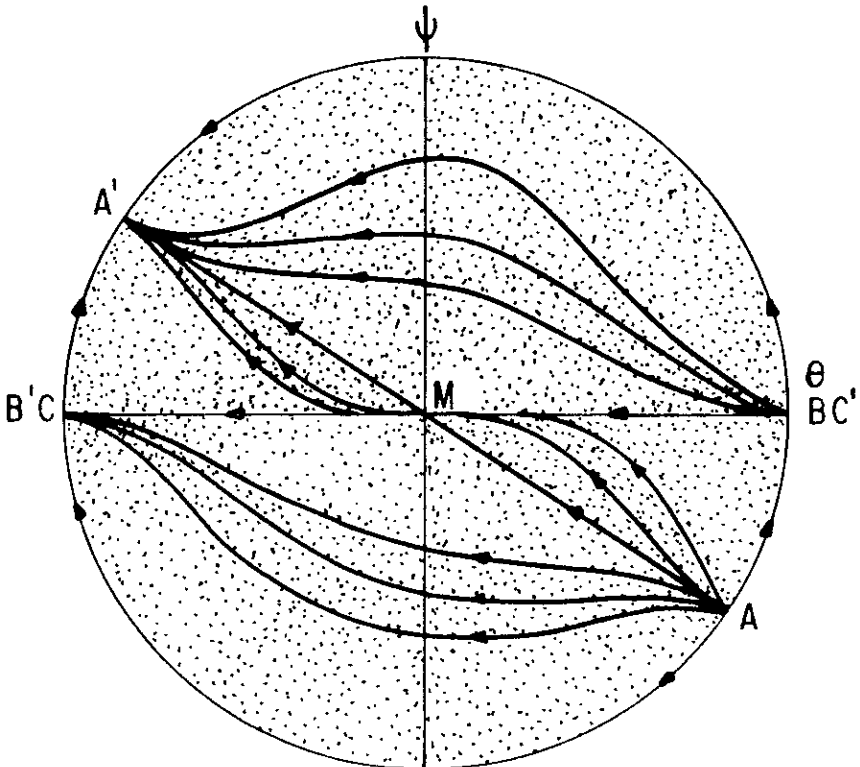


Fig. 4.37: Caso 'stiff matter' com $\omega \rightarrow +\infty$

Para o caso 'stiff matter' é importante observar que as soluções correspondentes aos raios invariantes AM e MA' têm densidade de energia positiva somente quando $\omega < -3/2$. Por outro lado, soluções não-singulares são permitidas unicamente no intervalo $-3/2 < \omega < -4/3$. Quanto ao comportamento das soluções quando $\omega \rightarrow +\infty$, vemos, do diagrama da fig. 4.37, que todas as soluções com $\rho > 0$ isto é, situadas nos setores BMC' e CMB' tendem para as soluções de vácuo representadas pelas curvas BM(ou C'M) e MB'(ou MC).

f) O caso $\lambda = -1$ ("vácuo de matéria + constante cosmológica")

É um fato bem conhecido que supor um fluido perfeito com a equação de estado $p = -\rho$ equivale formalmente a considerar vácuo de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$) e acrescentar um termo de constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ ao membro esquerdo das equações de Einstein na relatividade geral.

Nas teorias escalares-tensoriais mais gerais a 'constante' cosmológica usualmente é função de ϕ [46]. Contudo, não consideraremos aqui esta situação mais complicada. (ver Cap. I).

Uma vez que todas as soluções se referem ao vácuo, as regiões de densidade de energia negativa não mais existem neste caso. Os seguintes diagramas caracterizam topologicamente as soluções: $\omega < -3/2$ (fig. 4.38), $-3/2 < \omega < -4/3$ (fig. 4.39), $-4/3 < \omega < -5/6$ (fig. 4.40), $-5/6 < \omega < 0$ (fig. 4.15), $\omega < 0$ (fig. 4.18) e $\omega \rightarrow +\infty$ (fig. 4.19). Nas últimas três figuras, porém, que já foram obtidas para o caso poeira, é importante lembrar que quando $\lambda = -1$ não devemos mais considerar a região pontilhada como não-física. No mais, valem os comentários que fi-

zemos anteriormente. Vejamos agora os três primeiros diagramas:

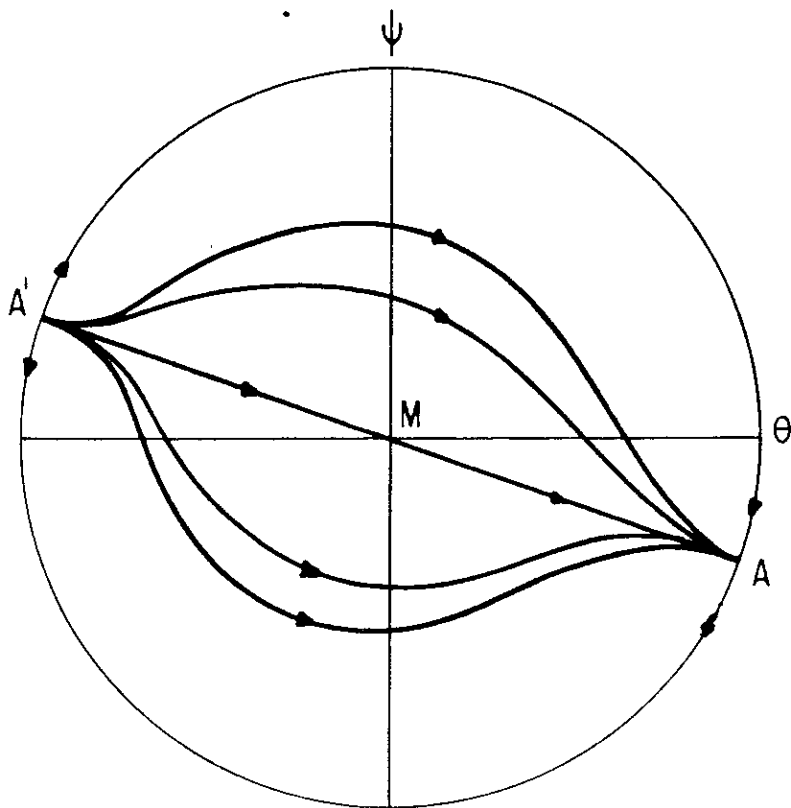


Fig. 4.38: Caso $\lambda = -1$ e $\omega < -3/2$

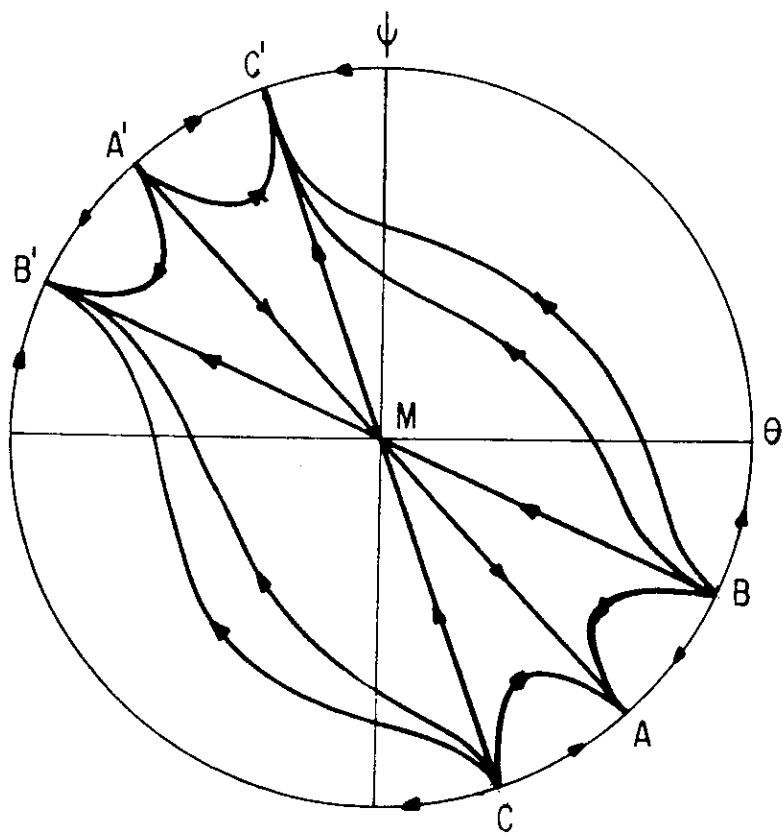


Fig. 4.39: Caso $\lambda = -1$ e $-3/2 < \omega < -4/3$

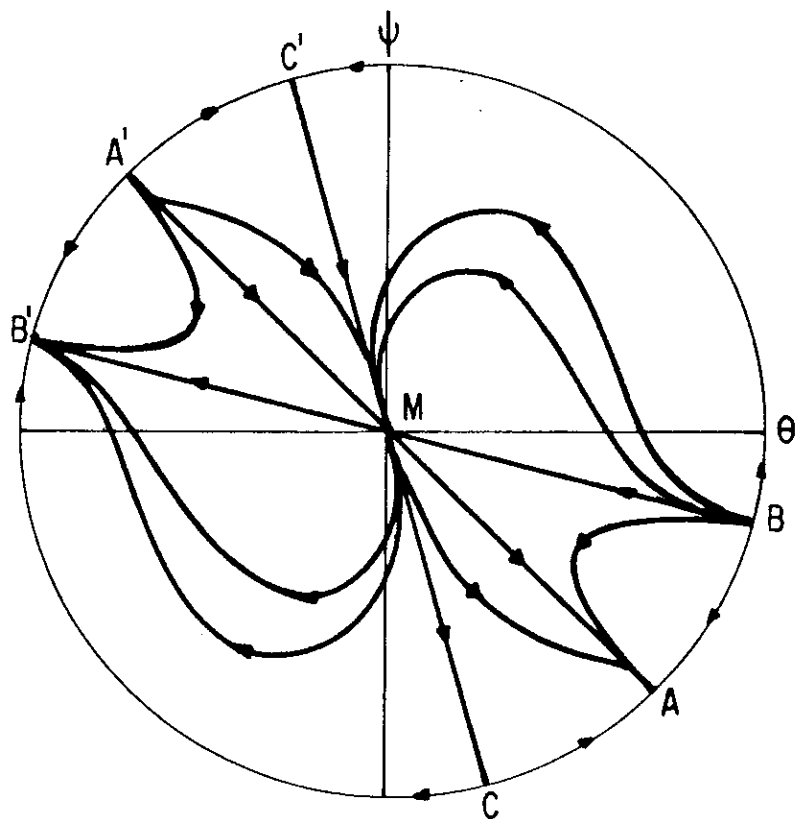


Fig. 4.40: Caso $\lambda = -1$ e $-4/3 < \omega < -5/6$

Comentemos o diagrama da fig. 4.38 que corresponde a $\omega < -3/2$. As curvas MA e A'M descrevem modelos expansivos e contrativos, respectivamente, já encontrados anteriormente (ver, por exemplo, a fig. 4.24). Ambas têm uma fase Minkowskiana. Por outro lado, todas as outras curvas do diagrama apresentam uma era de contração seguida de uma expansão e, também, uma fase com G decrescente acompanhada por outra na qual G cresce.

No diagrama da fig. 4.39 ($-3/2 < \omega < -4/3$) o ponto M, que representa o espaço-tempo de Minkowski, é completamente instável com relação a pequenas perturbações em θ e ψ , a menos que essas perturbações sejam feitas ao longo dos raios invariantes BM, CM ou A'M. (Voltaremos à questão da estabilidade do espaço-tempo de Minkowski na próxima seção). Os raios invariantes BM, CM, MB' e MC' continuam representando soluções de vácuo com $\Lambda = 0$.

Quando $-4/3 < \omega < -5/6$ (ver fig. 4.40) as soluções com "big-bang" que começam no ponto B e se situam no setor BMC' agora tendem para o espaço-tempo de Minkowski quando $t \rightarrow +\infty$.

Consideremos neste momento $\omega > -5/6$. Soluções estáticas estarão presentes quando $\omega = -1/2$. Para ω maior que este valor (se $-5/6 < \omega < -1/2$, AA' ainda permanece no segundo e quarto quadrantes), encontraremos mais uma vez modelos em expansão com explosão inicial e constante gravitacional decrescente (pois AA' se situa no primeiro e terceiro quadrantes).

Para terminar, vale chamar atenção para o fato de que quando $\lambda = -1$ não temos curvas fechadas como nos casos anteriores, implicando, portanto (com exceção de $\omega = -4/3$), a inexistência de modelos não-singulares.

4.6 PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE DO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Seria extremamente cansativo e tedioso analisar as propriedades de estabilidade do espaço-tempo de Minkowski, assim como de algumas soluções de Brans-Dicke, examinando um por um todos os diagramas de fase apresentados na seção precedente. É certo que existem algumas regularidades entre os diagramas. No entanto, mesmo essas regularidades não são suficientes para permitir um tratamento desse assunto de uma maneira mais simplificada ou generalizada. Desse modo, vamos nos restringir nesta seção à análise de propriedades de estabilidade em apenas dois diagramas, os quais consideramos bastante típicos.

Iniciaremos com o diagrama da fig. 4.13, que representa as soluções de Brans-Dicke para $\omega < -3/2$ e $0 \leq \lambda < 1/3$. Estamos interessados na estabilidade do espaço-tempo de Minkowski, o qual é representado em todos os diagramas pela origem M do plano de fase e que se constitui no único ponto de equilíbrio isolado do sistema dinâmico 4.3. O tipo de estabilidade que estamos tratando aqui deve ser entendido, naturalmente, no sentido usual da teoria de sistemas dinâmicos: consideramos soluções cujas condições iniciais $(\theta_0 = \theta(t_0), \psi_0 = \psi(t_0))$ são próximas do ponto de equilíbrio e observamos a evolução destas soluções com o tempo (ver Apêndice I).

Examinando o diagrama da fig. 4.13 verificamos que, com exceção da linha AA', o espaço-tempo de Minkowski apresenta uma propriedade bastante curiosa de estabilidade a pre

sença de curvas fechadas próximas à origem torna o espaço-tempo de Minkowski localmente instável frente a algumas pequenas perturbações em θ e ψ , porém globalmente estável uma vez que as curvas fechadas que saem de M retornam a este ponto quando $t \rightarrow +\infty$. Por outro lado, perturbações em M ao longo de AM ou de MA' implicam simplesmente em estabilidade si multaneamente local e global.

Consideremos agora a fig. 4.18 que corresponde a $\omega > 0$ e $0 \leq \lambda < 1/3$. Podemos classificar as regiões deste diagrama em três: setor BMC', setor B'MC e a região com densidade de energia negativa (área pontilhada). A solução representada pela curva A'M pertence ao setor BMC'. Perturbações finitas do espaço-tempo de Minkowsky com relação a θ , ψ e também à densidade de energia ρ dentro desta região tendem a desaparecer com o tempo. Portanto, BMC' é uma região de estabilidade para M. De forma análoga, B'MC é uma região de instabilidade: pequenas perturbações tendem a afastar cada vez mais o modelo da origem M. Se perturbarmos o espaço-tempo de Minkowski via a densidade de energia, de tal maneira que $\delta\rho < 0$ (o que equivale a penetrar na região pontilhada), então cairemos numa região de instabilidade, pois aí as soluções tendem a se distanciar indefinidamente de M.

4.7 CONCLUSÃO

Ao finalizar este capítulo podemos, de fato, constatar que a crescente utilização da teoria dos sistemas dinâmicos como uma poderosa ferramenta no estudo de modelos cosmológicos é também uma consequência do fato de que a análise dos modelos não se restringe a soluções isoladas; ao contrário, são clássicas inteiras de soluções que podem ser analisadas.

Neste capítulo, foram considerados modelos de universo preditos por uma teoria escalar-tensorial da gravitação tomando-se como hipótese uma geometria homogênea, isotrópica e espacialmente euclidiana. Os diagramas mostrados cobrem, digamos, o essencial acerca da cosmologia de Brans-Dicke para fluidos perfeitos e este tipo de geometria. O passo seguinte, nos parece natural, seria de incluir neste programa um estudo de modelos com fonte de fluido imperfeito e examinar os efeitos que seriam causados por fenômenos dissipativos tais como segunda viscosidade ("bulk viscosity"). Acontece que quando a segunda viscosidade é incluída no tensor momentum-energia da matéria, o sistema dinâmico obtido com as equações de Brans-Dicke é modificado pela presença de termos cúbicos em θ e ψ . As funções polinomiais $F_{\lambda\omega}$ e $H_{\lambda\omega}$ deixam de ser homogêneas, o que torna o sistema bem mais complicado.

Voltando aos diagramas apresentados neste capítulo, gostaríamos de acrescentar alguns comentários finais:

i) Quando fazemos a constante de acoplamento ω tender a infinito, vemos que em todos os casos analisados o semi-eixo positivo de θ torna-se uma solução do sistema. Com exceção do caso em que $\lambda = 1$, esta solução pode ser identificada com o modelo de Friedmann com curvatura espacial nula. Além do mais, a densidade de energia ao longo do eixo θ é sempre positiva, não importa o valor de ω . Estes resultados exibem uma perfeita concordância com o fato de que a teoria de Brans-Dicke deve se reduzir à relatividade geral quando se toma o limite $\omega \rightarrow +\infty$ e se faz $\phi = \text{constante}$.

ii) A existência de valores críticos de ω para os quais

os diagramas de fase sofrem bruscas mudanças deve ser mencionada mais uma vez. Mudanças na estrutura topológica de um sistema dinâmico são geralmente conhecidas como bifurcações^[58].

iii) Evidências experimentais e teóricas parecem restringir o parâmetro ω a valores positivos, embora qual seja o limite inferior para ω permaneça um ponto controverso^[46]. Contudo, ao considerar $\omega > 0$ e $0 \leq \lambda < 1/3$ notamos a presença de uma solução especial dada pelo raio invariante AM. Os modelos representados por esta curva exibem três propriedades imprescindíveis aos modelos de Brans-Dicke que pretendam descrever o nosso universo físico (pelo menos do ponto de vista da Cosmologia Padrão): a existência de um 'big-bang' seguido por uma expansão, um contínuo decréscimo da constante gravitacional à medida que o universo se expande e, finalmente, uma densidade de energia positiva. É surpreendente que sejamos levados a existência destes modelos simplesmente através do exame dos diagramas de fase prescindindo do conhecimento das soluções analíticas.

iv) A não-existência de soluções não-singulares quando $\omega > -4/3$ pode ser inferida imediatamente através dos diagramas. Para o caso $\lambda = -1$ é interessante notar que (exceto quando $\omega = -4/3$ e aí temos infinitos pontos de equilíbrio, cada um representando um universo de De Sitter não-singular) todas as soluções são singulares. Não obtemos a solução não-singular de De Sitter (como acontece na relatividade geral quando temos constante cosmológica e vácuo de matéria) ao tomar $\omega \rightarrow +\infty$. Quanto ao caso 'stiff matter', soluções não-singulares aparecem apenas no intervalo $-3/2 < \omega < -4/3$.

v) Na segunda versão de Dirac^[62], as equações para o campo gravitacional são dadas por $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}(\phi))$, onde G é constante e $\tilde{T}_{\mu\nu}(\phi)$ é o tensor momentum-energia devido ao campo escalar. Ao tomarmos $p = -\rho$ temos que $T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu}$ e, assim, as equações acima se tornam $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu}(\phi)$ se fizermos $\Lambda = 8\pi G\rho = \text{const.}$. Portanto, assim como acontece na relatividade geral, substituindo na equação de estado $\lambda = -1$ é formalmente equivalente a considerar vácuo de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$) desde que se inclua um termo de constante cosmológica nas equações. Todavia, na versão original da teoria de Brans-Dicke, tomar $\lambda = -1$ e $T_{\mu\nu} = 0$ equivale a termos o seguinte sistema de equações:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi\rho}{\phi} \left(\frac{2\omega + 1}{2\omega + 3} \right) g_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu}, \quad (4.5.a)$$

$$\square \phi = \frac{32\pi}{2\omega + 3} \rho. \quad (4.5.6)$$

Ao passarmos o limite $\omega \rightarrow +\infty$ e $\phi = \frac{1}{G} = \text{const.}$, obtemos simplesmente $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, exatamente como no caso da relatividade geral. Agora, se considerarmos a formulação mais geral das teorias escalares-tensoriais (ver refs. [46,43]) e tomarmos a "função cosmológica" $\Lambda(\phi)$ como sendo uma constante, então chegaremos às seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{8\pi}{\phi} \left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega + 1}{2\omega + 3} T \right) - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu} \quad (4.6.a)$$

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} (8\pi T - 2\phi\Lambda). \quad (4.6.b)$$

Se $T_{\mu\nu} = 0$ (vácuo), essas equações tornam-se:

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu;\nu} \quad (4.6.a')$$

$$\square \phi = \frac{-2\phi\Lambda}{2\omega + 3} \quad (4.6.b')$$

Apesar de serem semelhantes na forma, há uma diferença fundamental entre estas últimas equações e as equações 4.5: o coeficiente de $g_{\mu\nu}$ em (4.5.a) não pode ser tomado constante, a menos que seja imposto $\Lambda = \text{const.}$

vi) Inúmeras classes de soluções de Brans-Dicke com geometrias do tipo Friedmann-Robertson-Walker e seção espacial euclidiana encontradas na literatura são da forma $R(t) = R_0 t^p$ e $\phi(t) = \phi_0 t^q$, com p e q constantes. No plano de fase $\theta\psi$, soluções deste tipo situam-se exatamente sobre os raios invariantes $\psi/\theta = \text{const.}$. Uma análise detalhada dessas classes de soluções, assim como a elaboração de um método para construir novas soluções será o assunto do próximo capítulo.

Ao escolhermos uma métrica do tipo Robertson-Walker-Friedmann, é fundamental que as hipersuperfícies $t = \text{cte}$ possuam geometria euclidiana, isto é, $K = 0$. Do contrário, não será possível reduzir as equações de campo a um sistema dinâmico. É curioso, no entanto, verificar que a hipótese $K = 0$ havia sido feita por Dirac baseada em outros argumentos, no contexto de uma cosmologia que considera também G variando com o tempo cósmico [68].

*"So, in Physics, a paradox is only a confusion
in our own understanding"*

(R.P. Feynmann, "Lectures on Physics")

CAPITULO V

UM METÓDO PARA GERAR SOLUÇÕES NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Este capítulo é, na verdade, uma continuação do nosso estudo sobre modelos homogêneos e isotrópicos na teoria de Brans-Dicke. No capítulo precedente, analisamos esses modelos à luz dos diagramas de fase correspondentes ao sistema dinâmico obtido das equações de campo. De posse dos diagramas, pudemos ter uma visão global das soluções do sistema e, a partir daí, tirar importantes conclusões. Uma dessas conclusões refere-se ao fato de que um grande número de soluções de Brans-Dicke encontradas na literatura têm uma característica em comum: quando são representadas no plano de fase $\theta\psi$ localizam-se exatamente sobre um dos três segmentos AA' , BB' e CC' , os quais contêm os raios invariantes do sistema dinâmico. Como vimos no Cap. IV, os raios invariantes, além de eles mesmos serem soluções do sistema dinâmico, delimitam setores distintos de soluções, sendo, nesse sentido, fundamentais do ponto de vista da estrutura dos diagramas. A existência e a localização dos raios invariantes no plano de fase depende dos valores atribuídos à constante de acoplamento ω e à equação de estado do fluido. (Naturalmente, estamos considerando aqui, as mesmas hipóteses feitas no Cap. IV sobre a geometria dos modelos e sobre a natureza do fluido, fonte do

campo gravitacional e do campo escalar).

Como já vimos no capítulo anterior, o número de raios invariantes depende do valor de ω . Se $\omega < -3/2$, temos apenas os dois raios invariantes AM e MA', ambos representados sobre o segmento AA' (ver figs. 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12); se $\omega > -3/2$ aparecem os raios invariantes BM, MB', CM e MC' em BB' e CC' (ver figs. 4.4, 4.5 e 4.6).

Para obter os raios invariantes do sistema dinâmico 4.3 (ver Cap. IV), fazemos uma mudança de variáveis. Em vez de trabalhar com θ e ψ , escrevemos as equações do sistema em coordenadas polares. Assim, tomando $\theta = r \cos \alpha$ e $\psi = r \sin \alpha$ obtemos o seguinte:

$$\dot{r} = r^2 Z_{\lambda\omega}(\alpha) \quad (5.1.a)$$

$$\dot{\alpha} = r N_{\lambda\omega}(\alpha) \quad (5.1.b)$$

onde $N_{\lambda\omega}(\alpha) = H_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha - F_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha$ e $Z_{\lambda\omega}(\alpha) = H_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha + F_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha$.

São as raízes da equação

$$N_{\lambda\omega}(\alpha) = 0 \quad (5.2)$$

que nos fornecem os raios invariantes do plano de fase, os quais consistem em semi-retas $\alpha = \text{const.}$, passando pela origem ($\theta = 0$, $\psi = 0$) (ver apêndice II). Por serem soluções do sistema dinâmico, os raios invariantes uma vez conhecidos, podem nos levar automaticamente à construção de classes de soluções, sem ser necessária a resolução de uma única equação diferencial. É o que veremos na próxima seção.

A função $N_{\lambda\alpha}(\omega)$ será dada por:

$$N_{\lambda\omega}(\alpha) = \frac{1}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{1 - 3\lambda}{3} \right) \cos^3 \alpha + (\lambda\omega - 3\lambda - \omega) \cos^2 \alpha \sin \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{9\lambda\omega - 7\omega - 6}{2} \right) \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{3\omega}{2} (1 + \omega - \lambda\omega) \sin^2 \alpha \right]. \quad (5.3)$$

Agora, se $\lambda = 1/3$ (caso radiação), então nós vemos que $\sin \alpha = 0$ é uma raiz de 5.2. Inversamente, se $\sin \alpha = 0$ é uma raiz da equação 5.2, então $\lambda = 1/3$.

Inicialmente, tomemos $\lambda \neq 1/3$ (como no Cap. IV), a qui também não consideraremos ω assumindo o valor $\omega = -3/2$, a não ser no caso radiação). Observamos, então, que resolver 5.2 é equivalente a resolver a equação abaixo:

$$\left(\frac{1 - 3\lambda}{3} \right) \xi^3 + (\lambda\omega - 3\lambda - \omega) \xi^2 + \left(\frac{9\lambda\omega - 7\omega - 6}{2} \right) \xi + \frac{3\omega}{2} (1 + \omega - \lambda\omega) = 0 \quad (5.4)$$

onde pusemos $\xi \equiv \cotg \alpha = \frac{\theta}{\psi}$.

É possível fatorar 5.4 da seguinte maneira:

$$\left[\left(\frac{1 - 3\lambda}{3} \right) \xi + \lambda\omega - \omega - 1 \right] \left[\xi^2 + 3\xi - \frac{3\omega}{2} \right] = 0 \quad (5.5)$$

Então, se $\omega < -3/2$, existe uma única raiz real de 5.5, a saber,

$$\xi_3 = \frac{3(1 + \omega - \lambda\omega)}{1 - \lambda} \quad (5.6)$$

Por outro lado, quando $\omega > -3/2$, surgem mais duas raízes reais:

$$\xi_1 = -\frac{3}{2} (1 + \sqrt{1 + 2\omega/3}) \quad (5.7)$$

e

$$\xi_2 = -\frac{3}{2} (1 - \sqrt{1 + 2\omega/3}) \quad (5.8)$$

Com essas raízes determinadas, os seis raios invariantes serão dados por:

$$\alpha_i^{(1)} = \text{arc cotg } \xi_i \quad \text{e} \quad \alpha_i^{(2)} = \alpha_i^{(1)} + \pi,$$

$i = 1, 2, 3.$

5.1 A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES A PARTIR DOS RAIOS INVARIANTES

Para gerar soluções a partir dos raios invariantes relembremos uma vez mais que os raios invariantes, eles próprios, são curvas integrais do plano de fase. Deste fato resulta que podemos obter um meio de encontrar soluções das equações de Brans-Dicke, conforme ilustraremos nos exemplos que se seguem.

Considere-se, por exemplo, a bem conhecida solução cosmológica de Brans-Dicke^[63] que corresponde a um fluido sem pressão (poeira) e a uma geometria com curvatura espacial nula:

$$\phi(t) = \phi_0 t^{\frac{2}{3\omega + 4}} \quad (5.9.a)$$

$$R(t) = R_0 t^{\frac{2\omega + 2}{3\omega + 4}} \quad (5.9.b)$$

onde ϕ_0 e R_0 são constantes. Calculando θ e ψ , parâmetros que expressam a expansão do modelo e a variação da constante gravitacional, obtemos para esta solução:

$$\theta = 3 \frac{\dot{R}}{R} = \frac{3(2\omega + 2)}{3\omega + 4} \frac{1}{t} , \quad (5.10.a)$$

$$\psi = \frac{\dot{\phi}}{\phi} = -\frac{\dot{G}}{G} = \frac{2}{3\omega + 4} \frac{1}{t} . \quad (5.10.b)$$

Notando, porém, que $\frac{\theta}{\psi} = \text{const.} = 3(1 + \omega)$, concluímos que 5.10 refere-se necessariamente à solução do sistema dinâmico correspondendo justamente a um dos raios invariantes. Com efeito, fazendo $\lambda = 0$, identificamos imediatamente a solução acima como um dos raios invariantes $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_3^{(2)}$. No capítulo IV, dependendo do valor assumido por ω , esta solução aparece nos diagramas que descrevem o caso poeira da seguinte maneira: nas figuras 4.13 ($\omega < -3/2$) e 4.14 ($-3/2 < \omega < -4/3$) ela está representada por AM; já da fig. 4.15 ($-4/3 < \omega < -1$) em diante, a correspondência será dada por A'M.

Um outro exemplo bastante ilustrativo é dado pelas soluções de Nariai [64, 65, 66], as quais constituem uma classe de soluções válidas para métricas do tipo Friedmann - Robertson - Walker com seção espacial euclidiana e fluidos perfeitos obedecendo à equação de estado $p = \lambda\rho$:

$$R(t) = R_0 t^{P_1} \quad (5.11.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^{P_2} \quad (5.11.b)$$

com $P_1 = \frac{2 + 2\omega(1 - \lambda)}{4 + 3\omega(1 - \lambda^2)}$ e $P_2 = \frac{2(1 - 3\lambda)}{4 + 3\omega(1 - \lambda^2)}$.

Aqui, novamente, um simples cálculo de θ e ψ nos mostra imedia-

tamente que 5.11.a e 5.11.b definem curvas localizadas exatamente sobre a reta AA', podendo corresponder ao raio invariante AM ou A'M^(†). Se, por exemplo, considerarmos $0 < \lambda < 1/3$, então para $\omega < -3/2$ (fig. 4.13), $-3/2 < \Delta \omega^*(\lambda)$ (fig. 4.14), e $\omega^*(\lambda) < \omega < \omega^{**}(\lambda)$ (fig. 4.23), as soluções de Nariai corresponderão a AM; a partir de $\omega > \omega^{**}(\lambda)$, corresponderão a A'M. A situação é exatamente a mesma quando $1/3 < \lambda < 1$. No caso $\lambda = 1$ (caso 'stiff matter') teremos $\theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t}$ e $\psi = -\frac{1}{t}$; de tal forma que a solução 5.11 se encontra exatamente sobre o raio invariante AM qualquer que seja o valor de ω . (ver figs. 4.34, 4.35, 4.36 e 4.37).

Uma rápida análise destes dois últimos exemplos é suficiente para nos sugerir uma generalização quase óbvia das soluções que se situam sobre os raios invariantes AM e A'M. Com efeito, consideremos a seguinte classe de soluções:

$$R(t) = R_0 t^{\frac{1 + \omega - \lambda \omega}{f(\lambda, \omega)}} \quad (5.12.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^{\frac{1 - 3\lambda}{f(\lambda, \omega)}} \quad (5.12.b)$$

onde $f(\lambda, \omega)$ é uma função arbitrária de λ e ω . É fácil ver que cada solução dessa classe é uma solução do sistema dinâmico 4.3 que se localiza exatamente sobre o segmento AA', satisfa-

(†) É imediato calcular θ e ψ neste caso: $\theta = \frac{3p_1}{t}$ e $\psi = \frac{p_2}{t}$. Podemos expressar esses parâmetros na forma $\theta = \frac{3}{2} (1-\lambda) \left[\frac{\omega - \frac{1}{\lambda-1}}{1 - \frac{\omega}{\omega^{**}(\lambda)}} \right]$ e $\psi = \frac{1 - 3\lambda}{2(1 - \frac{\omega}{\omega^{**}(\lambda)})}$, onde $\omega^{**}(\lambda) = -4/3 \cdot \frac{1}{1-\lambda^2}$. (ver Cap. IV).

zendo, portanto, as equações de Brans-Dicke. No exemplo precedente, as soluções de Nariai correspondem à escolha particular $f(\lambda, \omega) = 2 + \frac{3}{2}\omega(1 - \lambda^2)$.

Do mesmo modo, as equações 5.7 e 5.8 sugerem as generalizações a seguir:

$$R(t) = R_0 t^{\frac{1 \pm \sqrt{1 + 2\omega/3}}{g(\omega)}} \quad (5.13.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^{-\frac{2}{g(\omega)}} \quad (5.13.b)$$

com $g(\omega)$ uma função arbitrária de ω .

5.2 SOLUÇÕES DE VÁCUO E A EQUAÇÃO DA DENSIDADE DE ENERGIA

Conforme vimos no Capítulo IV, podemos deduzir das equações de Brans-Dicke a seguinte expressão que nos dá a densidade de energia $\rho(t)$ em função de θ e ψ :

$$\frac{8\pi\rho}{\phi} = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\omega}{2} \psi^2 + \theta\psi \quad (5.14)$$

Para $\phi(t)$ e $R(t)$ dados pelas equações 5.13.a e 5.13.b, temos:

$$\frac{8\pi\rho}{\phi} = \frac{1}{f^2(\lambda, \omega) t^2} [3(1 + \omega - \lambda\omega)^2 - \frac{\omega}{2}(1 - 3\lambda)^2 + (1 - 3\lambda)(1 + \omega - \lambda\omega)]. \quad (5.15)$$

Entretanto, para as classes de soluções dadas pelas equações 5.13.a e 5.13.b, as quais estão situadas sobre

as linhas BB' e CC', temos que o lado direito da equação 5.14 se anula, ou seja, $\rho = 0$ ([†]). Pode-se verificar imediatamente que estas classes contêm, como casos particulares, as soluções de vácuo obtidas analiticamente por O'Hanlon e Tupper^[34] dadas por

$$R(t) = R_0 t^q, \quad (5.16.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^r, \quad (5.16.b)$$

onde $\frac{1}{r} = -\frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{3(2\omega + 3)}]$ e $q = \frac{1}{3} (1 - r)$. Também é interessante notar que a solução especial para $\omega = -4/3$, descoberta por estes mesmos autores, que corresponde a uma geometria do tipo de Sitter na teoria de Brans-Dicke sem constante cosmológica:

$$R(t) = R_0 \exp(t) \quad (5.17.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 \exp(-3t) \quad (5.17.b)$$

situa-se sobre a linha BB'. De fato, quando $\omega = -4/3$, $\theta/\psi = -1$. Se examinarmos agora, as equações 4.3, veremos que para $\omega = -4/3$ e $\theta = -\psi$, temos necessariamente

$$\dot{\theta} = 0, \quad ,$$

$$\dot{\psi} = 0.$$

(†) Para comprovar isto basta substituir na equação 5.14 $\theta/\psi = \cotg \xi = -\frac{3}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 2\omega/3})$.

Quer dizer, o plano de fase $\theta\psi$ tem uma linha ($\theta = -\psi$) de pontos de equilíbrio múltiplos (ver ref. [58]), cada um dos quais representando soluções do tipo De Sitter.

5.3 O LIMITE DA RELATIVIDADE GERAL

A teoria da gravitação de Brans-Dicke é formulada de tal maneira a reproduzir as equações de Einstein no limite quando ω tende para infinito e $\phi = \frac{1}{G} = \text{constante}$. Isto levanta a seguinte questão: as soluções de Brans-Dicke tendem às soluções de Einstein quando esse mesmo limite é tomado? Como mostraremos na próxima seção, a resposta à esta questão é negativa.

Os modelos de Friedmann com métrica espacialmente euclidiana para fluido perfeito com equação de estado $p = \lambda\rho$ são dados por [23]

$$R(t) = R_0 t^{\frac{2}{3(1+\lambda)}} \quad (5.18.a)$$

$$\rho(t) = \frac{G}{8\pi} \frac{4}{3(1+\lambda)^2} \frac{1}{t^2} \quad (5.18.b)$$

Portanto, exigir que as soluções de Brans-Dicke se reduzam às equações de Einstein quando $\omega \rightarrow \infty$ e $\phi = \frac{1}{G} = \text{constante}$ implica impor restrições sobre as funções $f(\lambda, \omega)$. Assim, a comparação entre as equações 5.12.a e 5.18.a determina a seguinte forma para $f(\lambda, \omega)$:

$$f(\lambda, \omega) = h(\lambda) + \frac{3\omega}{2} (1 - \lambda^2) + O(\lambda, \omega) \quad , \quad (5.19)$$

onde $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{O(\lambda, \omega)}{\omega} \right] = 0$ e $h(\lambda)$ é uma função arbitrária de λ . Se $f(\lambda, \omega)$ não puder ser posta nesta forma, então, seguramente o limite relativístico não será satisfeito pelas soluções das equações 5.12. Quanto às soluções de Nariai, vemos claramente que constituem um caso particular de 5.19. Além disso, se $f(\lambda, \omega)$ é da forma 5.19, então automaticamente ϕ tenderá para $\phi_0 = \text{const}$ quando tomarmos $\omega \rightarrow \infty$.

Da mesma maneira, é necessário impor restrições sobre as funções $g(\omega)$ nas equações 5.13.a e 5.13.b. Contudo, uma vez que estamos lidando agora com soluções de vácuo, devemos obter a geometria estática do espaço-tempo de Minkowski quando o limite $\omega \rightarrow \infty$ é tomado. Esta condição implica

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\omega}}{g(\omega)} = 0 \quad (5.20)$$

Vale mencionar aqui que as soluções de vácuo de O'Hanlon e Tupper referidas na seção anterior não satisfazem essa condição.

5.4 O CASO RADIAÇÃO

Quando $\lambda = 1/3$ temos que os raios invariantes AM e $A'M$ não dependem de ω . De fato, como podemos deduzir da equação 5.3, $\lambda = 1/3$ implica que $\alpha_3^{(1)} = 0$ e $\alpha_3^{(2)} = \pi$, o que significa, por sua vez, $\psi = 0$ (ou seja, $\phi = \text{const.}$). A equação 4.3.a se reduz, então, a

$$\dot{\theta} = -\frac{2}{3} \theta^2, \quad (5.21)$$

que, após integração imediata, nos dá a solução Friedmanniana

$$R(t) = R_0 (t + m)^{\frac{1}{2}} \quad (5.22)$$

Concluimos, desse modo, que neste caso a classe de soluções representada pelo raio invariante AM (representando modelos que partem de uma singularidade - ver diagramas no Capítulo IV relativos ao caso radiação) contém a solução de Friedmann para radiação e seção espacial plana. Além do mais, é interessante notar que este resultado é independente de se tomar o limite $\omega \rightarrow \infty$. A razão disso é que o campo escalar ϕ não tem fontes no caso radiação, pois $T = 0$ (ver equação 4.1.b); portanto, qualquer solução da relatividade geral satisfaz as equações de Brans-Dicke quando $\lambda = 1/3$.

Para terminar esta seção, façamos um ligeiro comentário sobre soluções de radiação encontradas na literatura que correspondem a raios invariantes do sistema dinâmico 4.3. É possível mostrar (ver Apêndice II) que quando $\omega = -3/2$ as linhas BB' e CC' coincidem no plano de fase e têm por equação $\theta/\psi = -3/2$. Examinando, por outro lado, a solução para radiação e $\omega = -3/2$ encontrada por Singh e Deo^[67], dada por

$$R(t) = R_0 t \quad , \quad (5.23.a)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^{-2} \quad , \quad (5.23.b)$$

$$\rho(t) = \frac{F}{R^4(t)} \quad (5.23.c)$$

vemos que este é um caso em que $\theta/\psi = -3/2$. Concluimos, portanto, que a solução de Singh e Deo (que, aliás, não satisfaz a hipóte

se de Dirac, pois a constante gravitacional $G = 1/\phi$ aumenta com a idade do universo) situa-se exatamente sobre as linhas BB' e CC' , e corresponde aos raios invariantes coincidentes BM e CM . Além disso, a constante F , deixada indeterminada por Singh e Deo deve ser necessariamente nula devido à equação 5.14.

5.5 COMENTÁRIOS FINAIS

Gostaríamos, ao finalizar este capítulo, de acrescentar alguns comentários finais sobre as soluções representadas pelas equações 5.12 e 5.13:

i) Com relação a singularidades, podemos dizer que todas as soluções construídas a partir dos raios invariantes apresentam um comportamento singular na geometria (colapso do espaço-tempo). Para demonstrar este fato basta lembrar que, por sua própria natureza, os raios invariantes se estendem no plano de fase $\theta\psi$ a regiões onde θ e (ou) ψ são infinitos. A única exceção a isto tem lugar quando $\omega = -4/3$, pois, aí surge uma linha inteira de pontos de equilíbrio múltiplos implicando que θ e ψ permanecem constante no tempo.

ii) Uma classe de soluções bastante interessante nas quais a geometria é estática, embora a constante gravitacional varie com o tempo, é obtida ao se escolher $\omega = \frac{1}{\lambda-1}$ nas equações 5.12. Temos, então,

$$\phi = \phi_0 t^{\frac{-2 - 3/\omega}{f(\lambda, \omega)}} \quad (5.24)$$

A solução estática de Raychandhuri^[23] corresponde, na verdade, à escolha particular $f(\lambda, \omega) = -1 - \frac{3}{2\omega}$, sendo um caso particular das soluções de Nariai discutidas na seção 5.1.

5.6 CONCLUSÃO

A obtenção de classes de soluções exatas para uma equação de estado geral e constante de acoplamento arbitrária na teoria de Brans-Dicke não é, geralmente, uma tarefa fácil, mesmo quando se trabalha com métricas homogêneas e isotrópicas. Neste capítulo, desenvolvemos um método de encontrar soluções cuja simplicidade é mesmo surpreendente, uma vez que não é preciso resolver uma única equação diferencial. Este resultado por si só é suficiente para revelar o importante papel que a teoria de sistemas dinâmicos pode desempenhar na investigação teórica da cosmologia.

APÊNDICE I

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Neste apêndice faremos uma rápida introdução à teoria dos sistemas dinâmicos, abordando apenas os tópicos que consideramos essenciais para uma aplicação prática a problemas do tipo dos que são tratados nesta tese. Evitaremos, portanto, uma abordagem rigorosa do ponto de vista matemático, a qual pode ser encontrada facilmente na literatura (ver, por exemplo, refs. [58, 59, 71, 72.3 73]). Além do mais, procuraremos nos limitar à teoria bidimensional, pela simples razão de que, fundamentalmente, nosso objetivo final visa à construção de diagramas de fase em duas dimensões. Serão considerados também, somente os chamados sistemas autônomos, os quais definiremos adiante.

I. TEOREMAS FUNDAMENTAIS E A APROXIMAÇÃO LINEAR

Um sistema dinâmico de ordem n é constituído por um sistema de n equações diferenciais do tipo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.I.1}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad , \end{aligned} \tag{A.I.1}$$

onde as funções $F_i(x_1, \dots, x_n, t)$ são de classe C^k e definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e $x_i = x_i(t)$. sendo t um parâmetro que toma valores num intervalo (a,b) da reta. (Para simplificar, podemos considerar $C^k = C^\infty$, $U = \mathbb{R}^{n+1}$ e $(a,b) = \mathbb{R}$). Quando as funções F_i não dependem explicitamente de t dizemos que o sistema é autônomo (ou estacionário).

Enunciemos, de início, dois teoremas básicos da teoria dos sistemas dinâmicos autônomos:

Teorema I:

Dado qualquer ponto $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ existe um e, somente um, conjunto de funções $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ que é solução do sistema de equações A.I.1 e que satisfaz, ao mesmo tempo, a condição inicial $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$.

O segundo teorema diz respeito à continuidade das soluções com relação às condições iniciais:

Teorema II:

Sejam $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ e $\{\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)\}$ soluções de A.I.1 com condições iniciais $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ e $\bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n(t_0) = \bar{x}_n^0$, onde t_0 pertence ao intervalo aberto (t_1, t_2) . Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|\bar{x}_i^0 - x_i^0| < \delta$, então $|\bar{x}_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon$ qualquer que seja $t \in (t_1, t_2)$.

Vamos considerar, de agora em diante, apenas sis

temas autônomos de segunda ordem. Usaremos a seguinte notação:

$$\dot{x} = F(x, y)$$

$$\dot{y} = H(x, y) . \quad (\text{A.I.2})$$

Podemos identificar x e y como coordenadas cartesianas no plano euclidiano. As soluções $\{x(t), y(t)\}$ passam, então, a descrever trajetórias (ou curvas integrais) nesse plano, que chamaremos de plano de fase. O conjunto de curvas (ou trajetórias) no plano de fase constitui o que se conhece como diagrama de fase.

Em hidrodinâmica, diagramas de fase em duas (ou três dimensões) são usados para descrever fluxos ("flows") de partículas de um fluido. As funções do lado direito das equações (A.I.1) representam o campo de velocidades do fluido. No caso de sistemas autônomos, temos um fluido em regime estacionário ("steady flow"). Se acontecer de, em algum ponto $P(x_0, y_0)$, o campo de velocidades se anular, teremos o que se denomina na linguagem da hidrodinâmica, um ponto de estagnação. Na teoria dos sistemas dinâmicos, porém, refere-se a esses pontos como pontos de equilíbrio (ou pontos críticos).

Um ponto de equilíbrio $P(x_0, y_0)$ constitui, na verdade, uma solução trivial do sistema dinâmico: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, a qual não descreve uma curva no plano de fase e, sim, apenas um ponto.

A determinação dos pontos críticos e de sua natureza topológica é essencial para a construção dos diagramas de fase. É possível classificá-los conforme a configuração das

curvas em sua vizinhança. Essa classificação é topologicamente invariante^[58].

Ao analisar um determinado ponto crítico $P(x_0, y_0)$ podemos, através de uma translação no plano, considerá-lo exatamente na origem $O(0,0)$. E, como estamos considerando que as funções F e H são analíticas, podemos desenvolvê-las em série de Taylor em torno da origem, obtendo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + O_1(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + O_2(x, y) \end{aligned} \quad , \quad (A.I.3)$$

onde $a = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$, $b = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$, $c = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0$, $d = \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0$, e $O_1(x, y)$, $O_2(x, y)$ representam termos de ordem superior a um em x e y .

Um importante resultado demonstrado por Bendixon^[74] consiste no fato de que é possível analisar a configuração das curvas na vizinhança da origem simplesmente considerando-se a parte linear de A.I.3, desde que $ad - bc \neq 0$ ^(*). Portanto, estudaremos o comportamento das trajetórias do sistema dinâmico A.I.2 na vizinhança da origem a partir do sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (A.I.4)$$

Uma maneira alternativa de escrever (A.I.4) é

(*) Neste apêndice não consideraremos o caso em que $ad - bc = 0$, o qual da origem aos chamados pontos múltiplos de equilíbrio.^[58].

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} , \tag{A.I.5}$$

onde x é a matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz não-singular ($\det A \neq 0$).

A matriz A , definida acima, contém todas as informações sobre o comportamento das curvas integrais na vizinhança da origem. Com efeito, demonstra-se que são os autovalores de A que determinam a natureza topológica do ponto crítico $O(0,0)$. Suponhamos que λ_1 e λ_2 sejam os autovalores de A . Através de uma transformação linear no plano de fase do tipo $\vec{x} = C \vec{u}$, onde $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, sendo C uma matriz não-singular, a equação A.I.5 torna-se

$$\dot{\vec{u}} = B\vec{u} , \tag{A.I.6}$$

onde $B = C^{-1}AC$. Uma vez que C é arbitrária, podemos escolher C de maneira que B fique na forma canônica de Jordan. Temos, então, os seguintes casos:

- a) Os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e distintos.

Neste caso, a matriz B tem a forma:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ,$$

e o sistema dinâmico A.I.6, fica

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_1 u , \\ \dot{v} &= \lambda_2 v , \end{aligned} \tag{A.I.7}$$

cuja solução será

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{\lambda_1 t} \\ v &= v_0 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{A.I.8}$$

onde u_0 e v_0 são constantes.

Suponhamos agora que λ_1 e λ_2 sejam ambos positivos e que, sem perda da generalidade, $\lambda_1 < \lambda_2$. Vamos, então, que se desenhamos essas curvas no plano de fase, obteremos o seguinte diagrama:

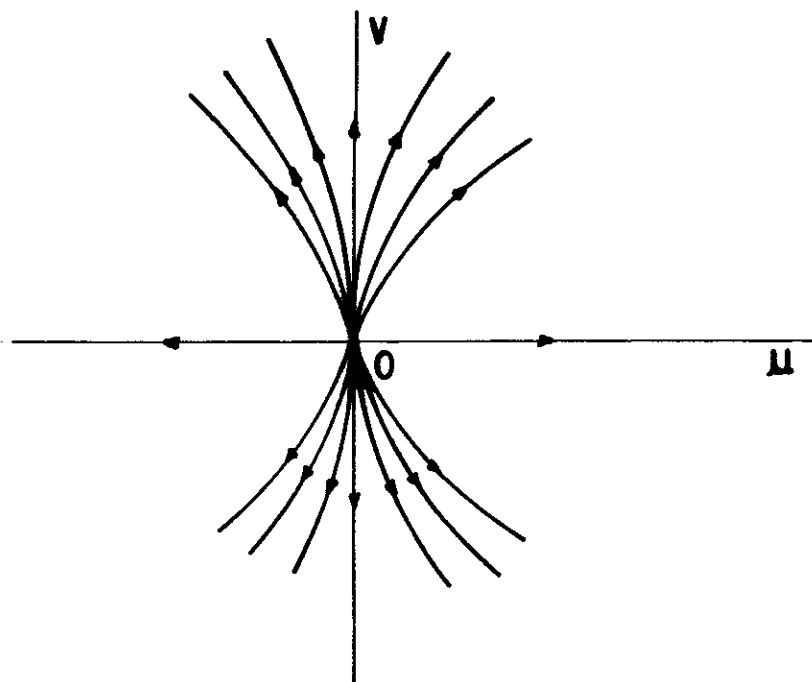


Fig. A.1: Nó de duas tangentes instável

Observando o diagrama acima vemos que todas as trajetórias na vizinhança da origem afastam-se dela quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, todas as curvas são tangentes ao eixo v em 0 , com exceção das duas trajetórias localizadas no eixo u . Um ponto de equilíbrio com uma configuração de curvas em sua vizinhança igual à da fig. A1, constitui um nó de duas tangentes instável. Por outro lado, se λ_1 e λ_2 forem negativos, teremos um nó de duas tangentes estável (ver fig. A2)

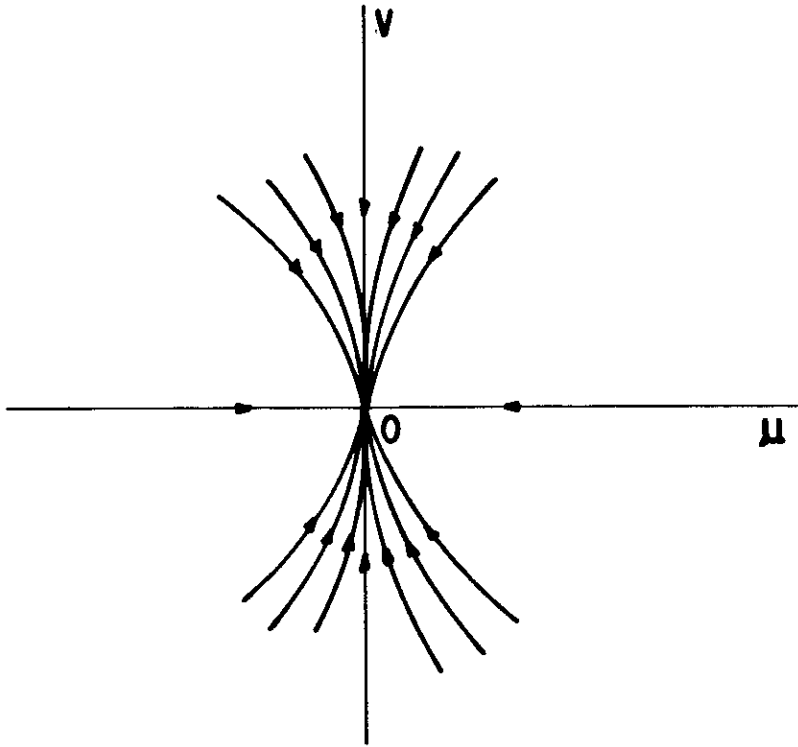


Fig. A.2: Nô de duas tangentes estável

Vamos admitir agora que λ_1 e λ_2 têm sinais contrários. Nesse caso, é imediato ver que A.I.8 nos dá o seguinte diagrama, onde tomamos $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, cuja configuração é conhecida como ponto de sela.

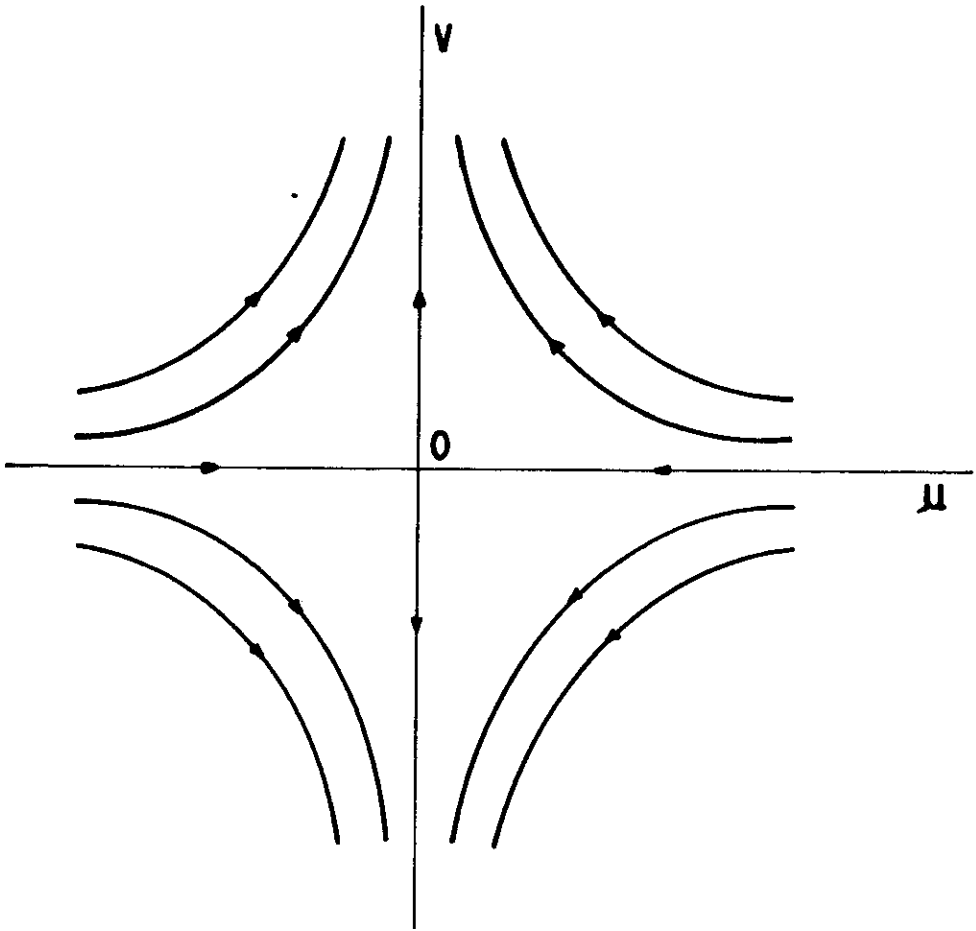


Fig. A.3: Ponto de sela ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)

b) Os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e iguais.

Suponhamos, primeiramente, que a matriz B posta na forma canônica de Jordan tenha ordem 0. Isto quer dizer que B pode ter a forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

As equações do sistema dinâmico serão dadas, então, por

$$\dot{u} = \lambda u ,$$

$$\dot{v} = \lambda v ,$$

(A.I.9)

que nos dão como solução:

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{\lambda t} , \\ v &= v_0 e^{\lambda t} . \end{aligned} \tag{A.I.10}$$

Assim, se $\lambda > 0$ teremos um nó estelar instável (fig. A.4). Caso contrário, isto é, se $\lambda < 0$ teremos um nó estelar estável (fig. A.5).

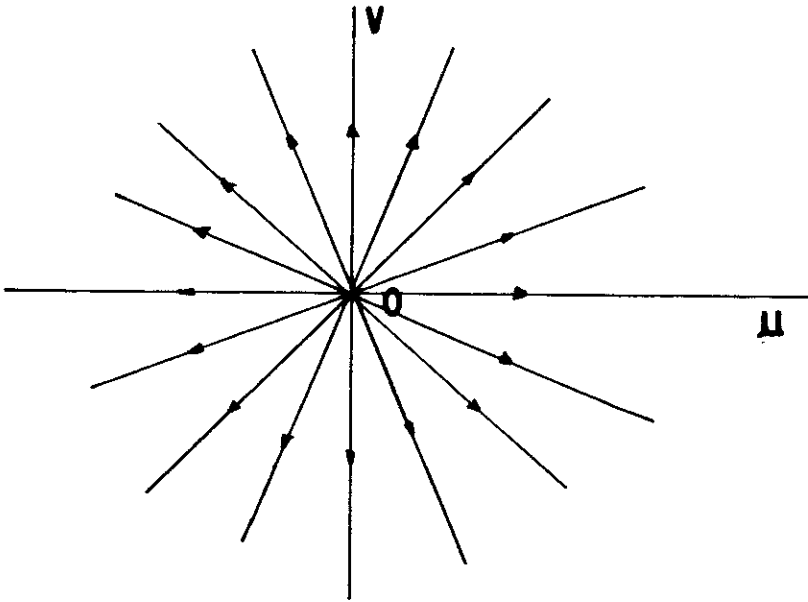


Fig. A.4: Nó estelar instável

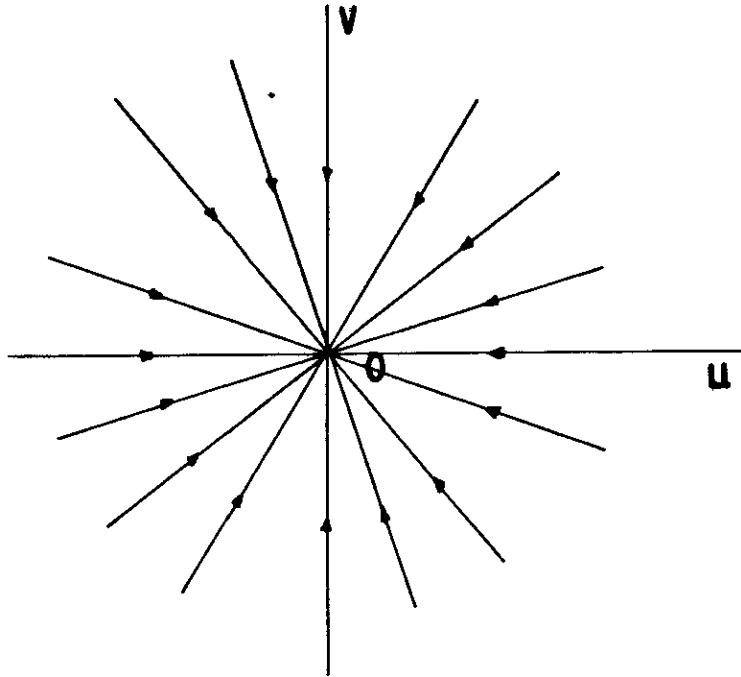


Fig. A.5: Nô estelar estável

Caso a matriz B , na forma canônica, tenha ordem 1, isto é, possua uma forma do tipo

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

as equações do sistema ficarão dadas por:

$$\dot{u} = \lambda u + v$$

$$\dot{v} = \lambda v \quad , \quad (\text{A.I.11})$$

cuja solução vem dada por

$$u = (u_0 + v_0 t) e^{\lambda t}$$

$$v = v_0 e^{\lambda t} \quad (\text{A.I.12})$$

Para $\lambda > 0$, as curvas representadas pelas equações acima definem o seguinte diagrama, caracterizando um nó de uma tangente instável.

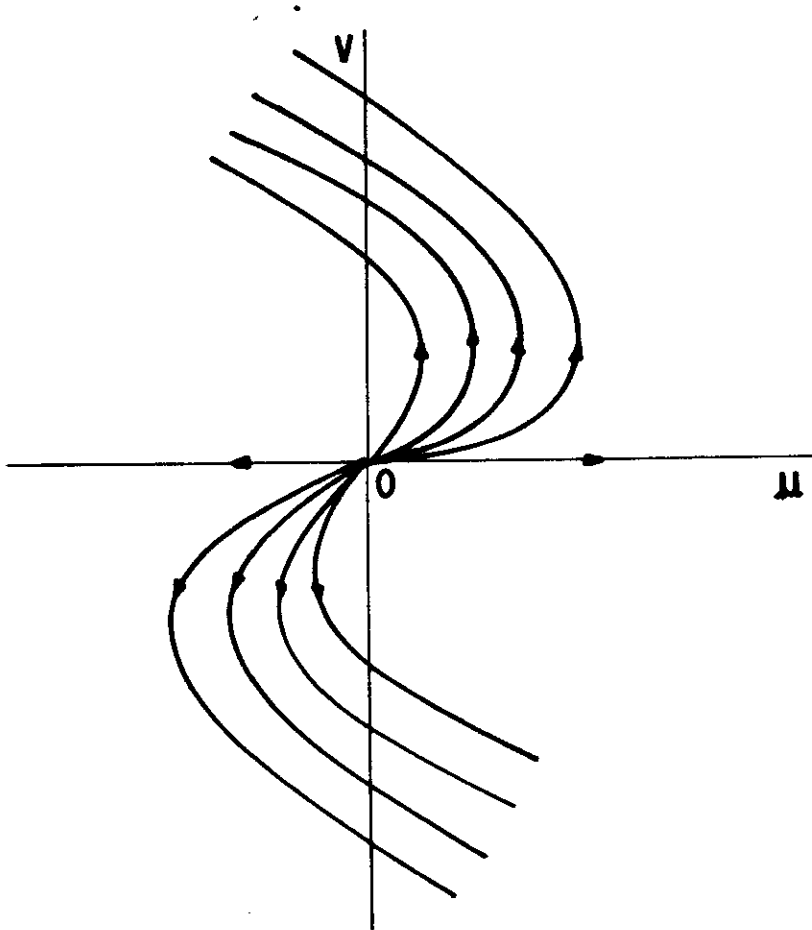


Fig. A.6: Nó de uma tangente instável

Naturalmente, quando $\lambda < 0$, temos um nó de uma tangente estável (fig. A.7).

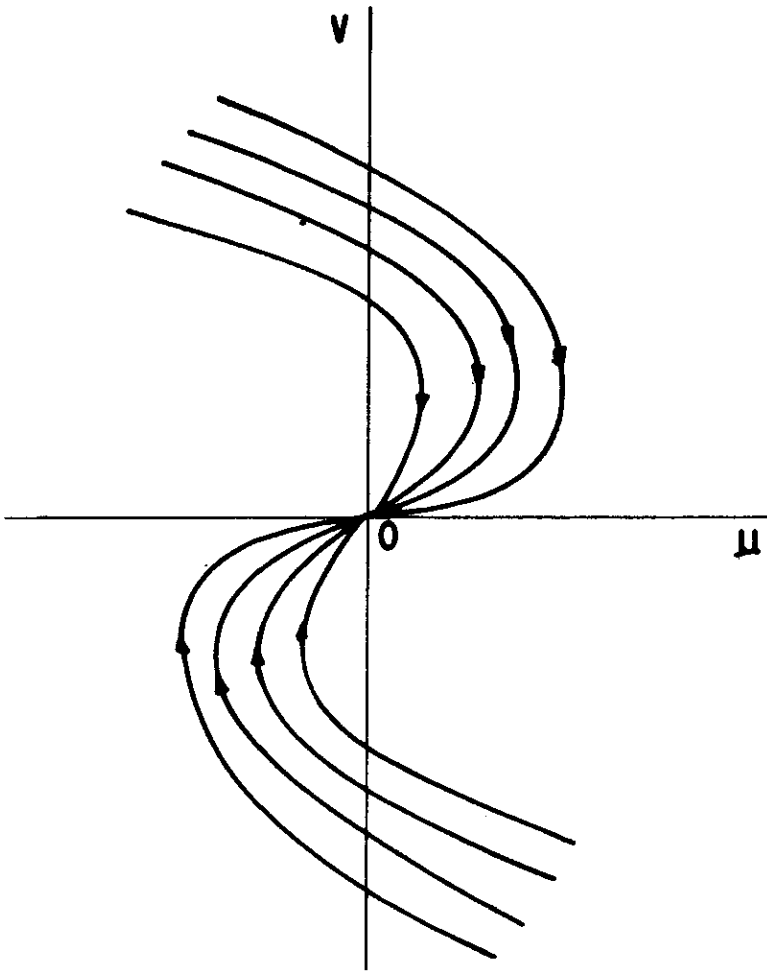


Fig. A.7: Nó de uma tangente estável

c) Os autovalores λ_1 e λ_2 são complexos.

Suponhamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \delta + i\beta$. Nesse caso, é possível, através de uma transformação linear, deixar o sistema dinâmico na forma:

$$\dot{u} = \delta u - \beta v$$

$$\dot{v} = \beta u + \delta v . \tag{A.I.13}$$

Definindo $z = u + iv$, as equações acima podem ser escritas como:

$$\dot{z} = (\delta + i\beta)z,$$

cuja solução imediata em coordenadas polares (r, α) nos dá

$$z = r e^{i\alpha}$$

$$\text{com } r = r_0 e^{\delta(t-t_0)} \text{ e } \alpha = \beta(t-t_0), \quad (\text{A.I.14})$$

sendo r_0 e t_0 constantes reais.

Temos, então, o seguinte: se $\delta > 0$ e $\beta > 0$, a configuração do diagrama de fase é a de um foco instável.

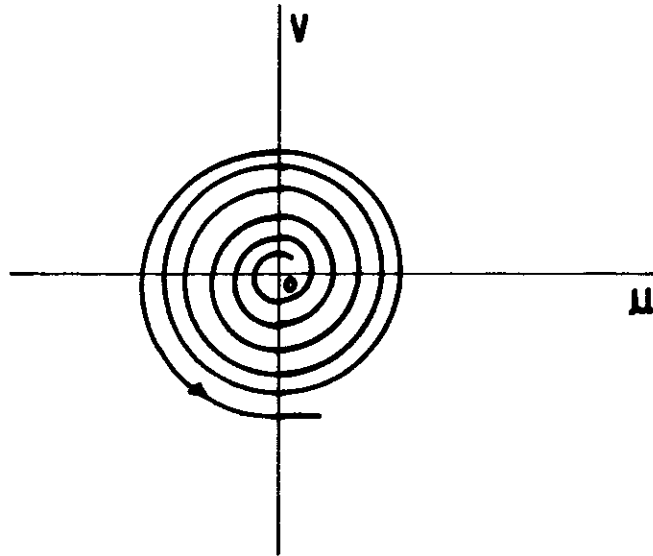


Fig. A.8: Foco instável com $\beta > 0$

Se trocarmos o sinal de β nas equações A.I.14 ob temos ainda um foco instável, porém o sentido de rotação das trajetórias é o inverso do caso anterior.

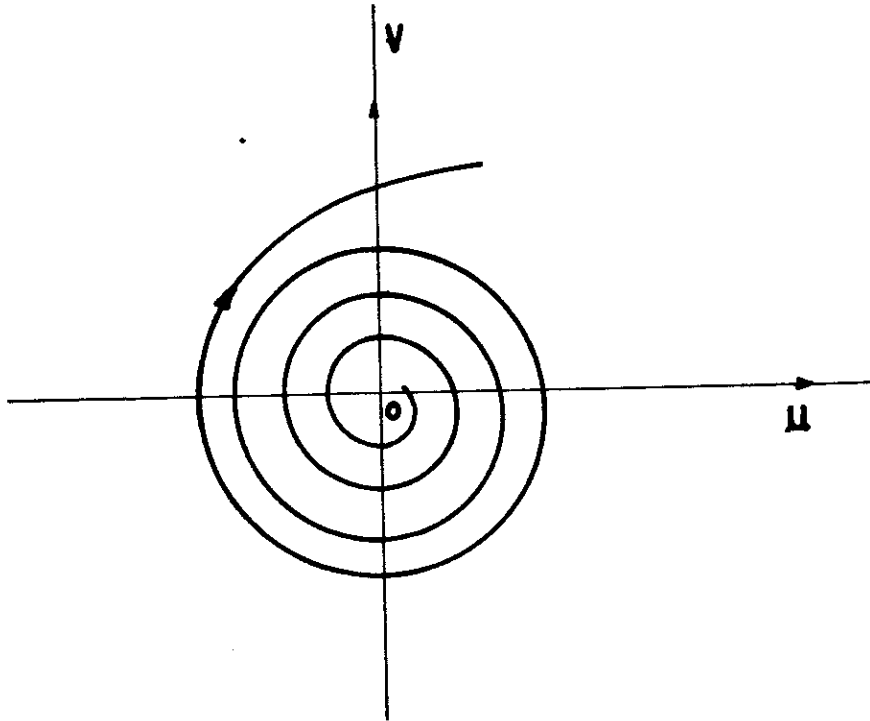


Fig. A.9: Foco instável com $\beta < 0$

Assim podemos ver facilmente que o sentido de rotação das trajetórias é determinado pelo sinal de β . Para $\alpha < 0$ é imediato verificar que teremos focos estáveis.

No caso em que λ_1 e λ_2 são imaginários puros ($\pm i\beta$), então as equações se tornam:

$$\dot{u} = -\beta v$$

$$\dot{v} = \beta u \quad , \quad (\text{A.I.15})$$

cuja integração nos dá

$$u^2 + v^2 = R^2 \quad ,$$

representando uma família de circunferências com centro na origem ($R^2 > 0$ é uma constante de integração). O ponto crítico O ,

é o chamado de centro (ver fig. A.10) e, como antes, o sinal β indica o sentido da rotação das curvas.

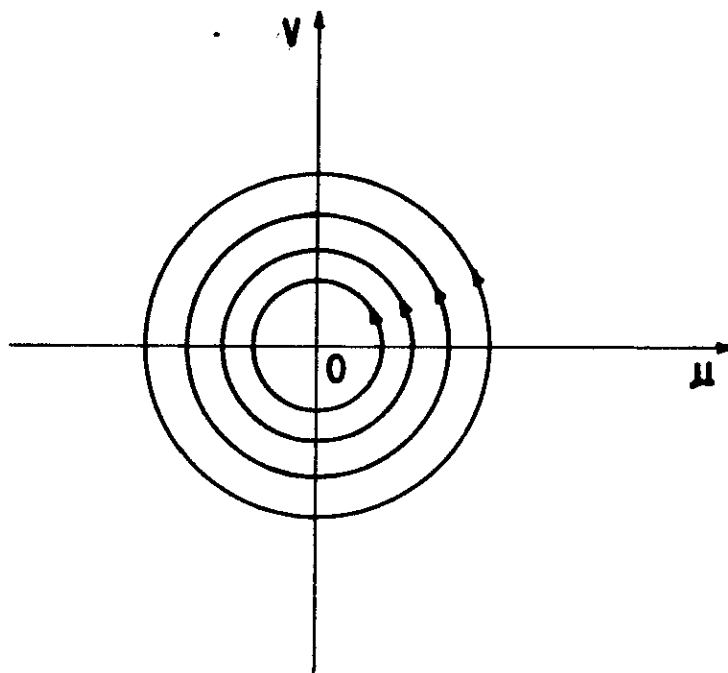


Fig. A.10: Centro (com $\beta > 0$)

Todas as configurações mostradas através dos diagramas de fase (figs. A.1 - A.10) podem ser abreviadas numa formulação única, enunciando-se o seguinte teorema:

Teorema III:

Dado o sistema dinâmico bidimensional autônomo e linear

$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy \tag{A.I.4}$$

definamos B a matriz dos coeficientes de x e y:

$$B \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$I \equiv a + d$ (o traço de B) e $\Omega \equiv ad - bc \neq 0$ (o determinante de B).
Então, existe uma transformação linear não-singular C tal que
é possível deixar o sistema A.I.4 numa das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \dot{u} &= \lambda_1 u \\ \dot{v} &= \lambda_2 v, \quad (\lambda_1 \lambda_2 < 0) \end{aligned}$$

se $\Omega < 0$;

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \dot{u} &= \lambda_1 u \\ \dot{v} &= \lambda_2 v, \quad (\lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2) \end{aligned}$$

se $0 < 4\Omega < I^2$;

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \dot{u} &= \lambda u + v \\ \dot{v} &= \lambda v, \quad (\lambda \neq 0) \end{aligned}$$

se $0 < 4\Omega = I^2$ e $b^2 + c^2 \neq 0$;

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \dot{u} &= \lambda u \\ \dot{v} &= \lambda v, \quad (\lambda \neq 0) \end{aligned}$$

se $0 < 4\Omega = I^2$ e $b = c = 0$;

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad \dot{u} &= \delta u - \beta v \\ \dot{v} &= \beta u + \delta v, \quad (\delta \beta \neq 0) \end{aligned}$$

se $0 < I^2 < 4\Omega$;

$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad \dot{u} &= -\beta v \\ \dot{v} &= \beta u, \quad (\beta \neq 0) \end{aligned}$$

se $0 = I^2 < 4\Omega$.

Podemos, portanto, construir a tabela abaixo:

i	$4\Omega < 0$	ponto de sela
ii	$0 < 4\Omega < I^2$	nó de duas tangentes
iii	$0 < 4\Omega = I^2, \quad \beta^2 + \gamma^2 > 0$	nó de uma tangente
iv	$0 < 4\Omega = I^2, \quad \beta^2 + \gamma^2 = 0$	nó estelar
v	$0 < I^2 < 4\Omega$	foco
vi	$0 = I^2 < 4\Omega$	centro

Tabela A.I.1

II. SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Os sistemas dinâmicos planares homogêneos de ordem m se caracterizam pelo fato de que as funções F e H das equações A.I.2 são homogêneas de ordem m nas variáveis x e y , isto é, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m F(x, y)$ e $H(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m H(x, y)$.

Para estudar sistemas homogêneos no plano é preferível trabalhar com coordenadas polares r e α ($x = r \cos \alpha$ e $y = r \sin \alpha$). As equações A.I.2 nestas coordenadas passam a ser lidas:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^m Z(\alpha) , \\ \dot{\alpha} &= r^{m-1} N(\alpha) , \end{aligned} \tag{A.I.16}$$

onde $Z(\alpha) = H(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha + F(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha$ e $N(\alpha) = H(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha - F(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha$.

Nosso objetivo aqui é estudar a configuração das curvas no plano de fase nas vizinhanças de pontos de equilíbrio

isolados. Portanto, estaremos supondo aqui que numa certa vizinhança de $O(o,o)$, as funções F e H se anulam simultaneamente somente na origem $x=0, u=0$. Como consequência disso, temos que $O(o,o)$ é um ponto de equilíbrio isolado e, então, necessariamente $Z^2(\alpha) + N^2(\alpha) > 0$ para qualquer ponto P do plano distinto de $O(o,o)$, pelo menos numa vizinhança deste. (na verdade, esta é a própria definição de ponto de equilíbrio isolado^[59]).

Definamos, agora, o conceito de raio invariante. Seja P um ponto qualquer distinto da origem e α o ângulo que o vetor \vec{OP} forma com o sentido positivo do eixo x . Seja \vec{v} um vetor tangente à trajetória que passa por P orientado segundo o sentido dessa mesma trajetória. Chamemos de γ o ângulo que v forma com \vec{OP} , o qual pode variar no intervalo $-\lambda < \gamma \leq \pi$. É possível mostrar que

$$\cos \gamma = Z(\alpha) [F^2(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) + H^2(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)]^{-1/2}$$

e

$$\text{sen } \gamma = N(\alpha) [F^2(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) + H^2(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)]^{-1/2} \quad (\text{A.I.17})$$

Vamos supor, neste instante, que tenhamos como trajetórias possíveis do sistema (A.I.16) linhas retas (ou raios) partindo da origem. É claro que para cada linha desse tipo $\gamma=0$, e assim teremos definido um raio invariante. De (A.I.17) vemos que através da equação

$$N(\alpha) = 0 \quad (\text{A.I.18})$$

obtemos os raios invariantes do sistema. É imediato observar que se tivermos uma configuração de nó estelar a equação (A.I.18) deve ser satisfeita identicamente. Por outro lado, se

se tratar de um centro ou de um foco, evidentemente $N(\alpha)$ não terá raízes reais.

Uma vez encontrado um raio invariante α_0 , passemos a analisar a configuração das curvas em sua vizinhança. Seja, por exemplo, α_0 um raio invariante isolado, obtido da equação (A.I.18). Podemos expandir as funções $Z(\alpha)$ e $N(\alpha)$ próximo à origem, em torno de α_0 , obtendo:

$$Z(\alpha) = Z(\alpha_0) [1 + s(\alpha - \alpha_0)] , \quad (\text{A.I.19})$$

onde $s = \frac{1}{Z(\alpha_0)} \left. \frac{dZ}{d\alpha} \right|_{\alpha = \alpha_0}$ (Pelo fato de que na vizinhança de um

ponto de equilíbrio $N^2(\alpha) + Z^2(\alpha) > 0$, podemos assegurar que $Z(\alpha_0) \neq 0$.); e

$$N(\alpha) = \frac{N^{(k)}(\alpha_0) (\alpha - \alpha_0)^k}{k!} [1 + q(\alpha - \alpha_0)] , \quad (\text{A.I.20})$$

sendo α_0 um zero de ordem k de $N(\alpha)$, $N^{(k)}(\alpha_0)$ a k -ésima derivada de $N(\alpha)$ em $\alpha = \alpha_0$ e $q = \frac{1}{k+1} \frac{N^{(k+1)}(\alpha_0)}{N^{(k)}(\alpha_0)}$. Devido à hipótese

de continuidade de $Z(\alpha)$, $N(\alpha)$ e suas derivadas, s e q são limitados.

As equações (A.I.19) e (A.I.20) juntamente com (A.I.17) nos permite determinar a configuração das curvas vizinhas a um raio invariante nas proximidades da origem. Com efeito, temos aqui as seguintes possibilidades:

- a) k é ímpar e $Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) > 0$ (tipo I),
- b) k é ímpar e $Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) < 0$ (tipo II),
- c) k é par e ≥ 2 (tipo III).

Se representarmos o campo vetorial (\dot{x}, \dot{y}) , ou ainda, as tangentes às trajetórias em cada ponto do plano de fase nas vizinhanças do raio invariante por setas, teremos então os diagramas:

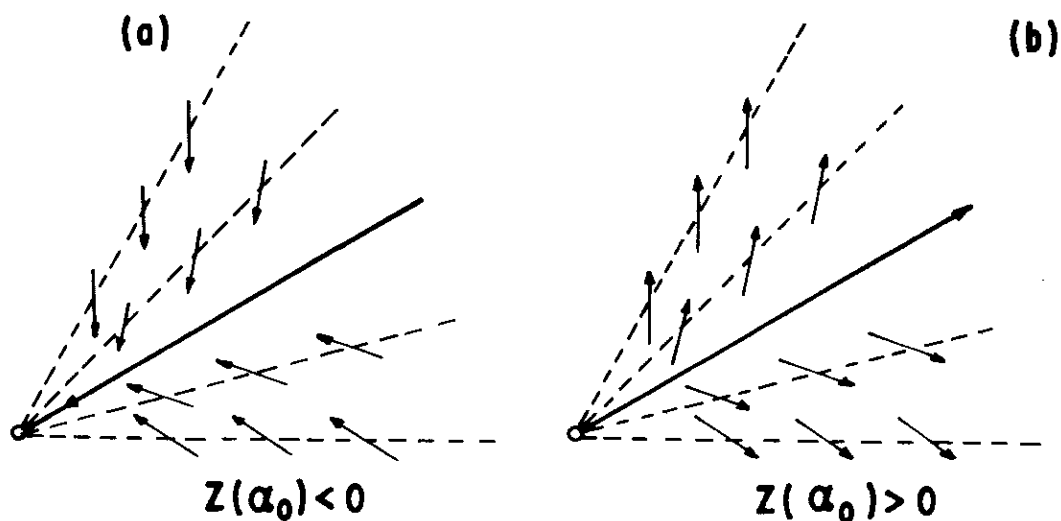


Fig. A.11: Tipo I (k ímpar e $Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) > 0$)

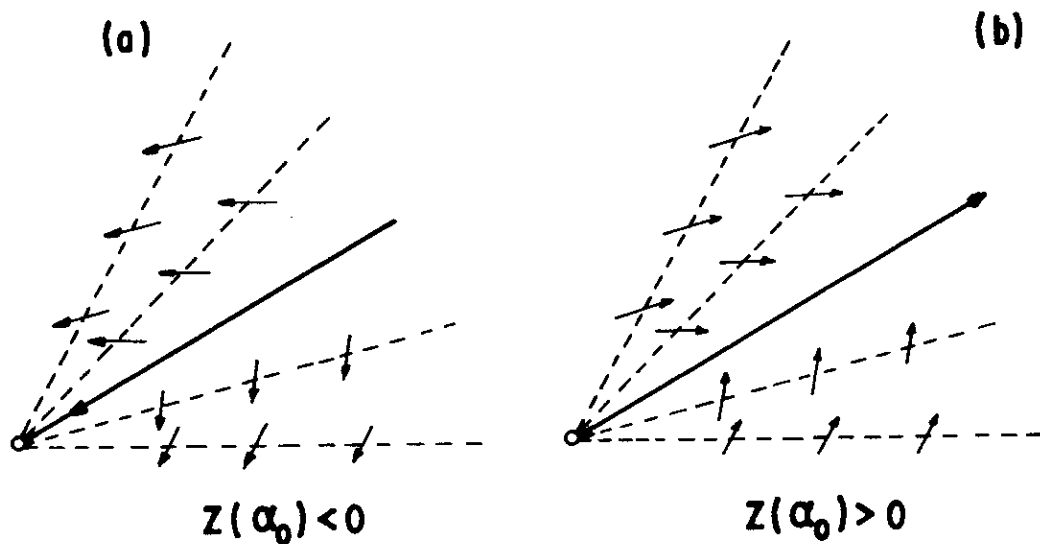


Fig. A.12: Tipo II (k ímpar e $Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) < 0$)

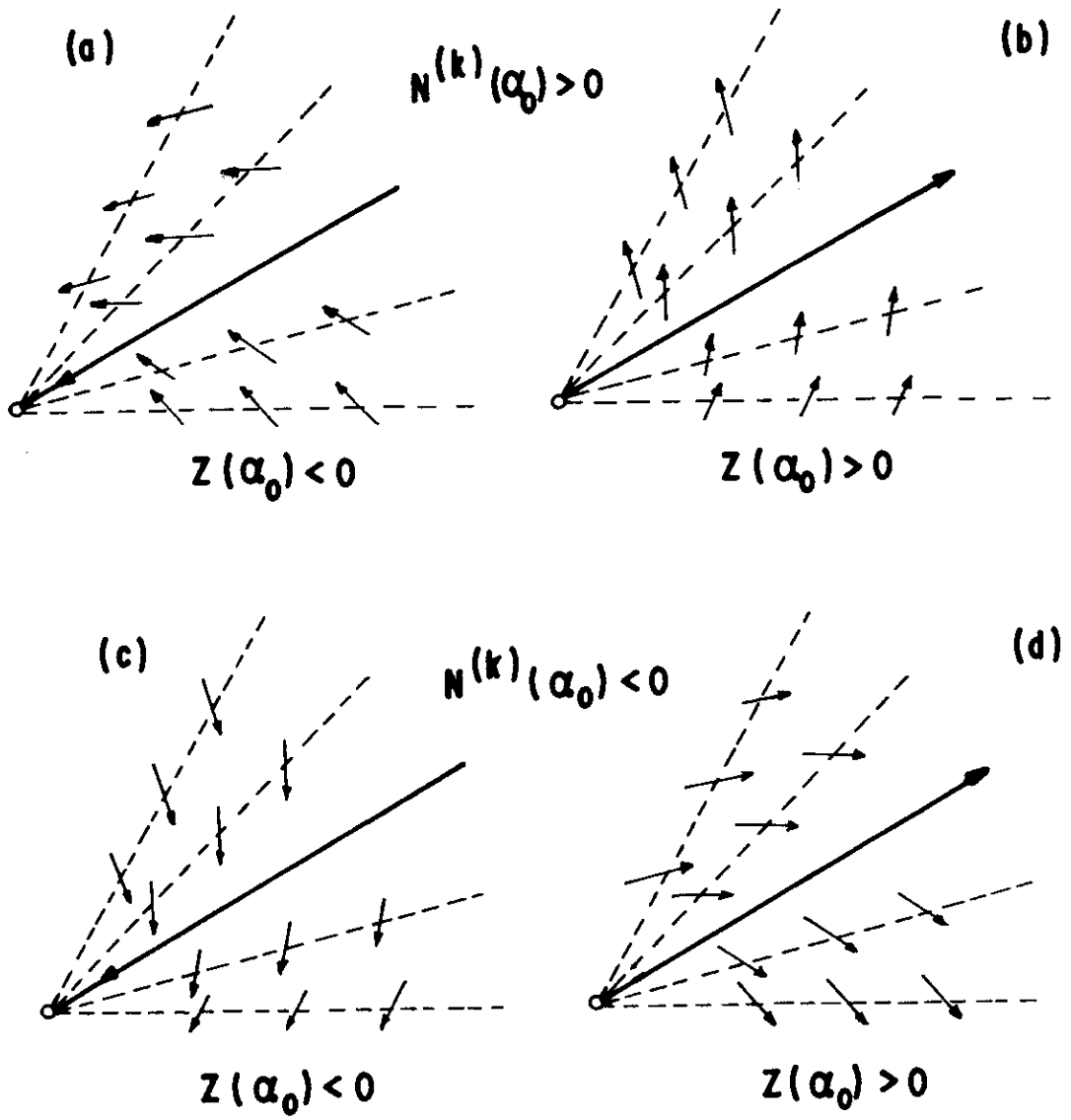


Fig. A.13: Tipo III (k para $e \geq 2$)

Determinada a configuração do campo vetorial que define o sistema dinâmico, estudemos agora o comportamento das trajetórias nas vizinhanças de um raio invariante. Um ângulo α é dito normal se estiver na vizinhança de um raio invariante α_0 , isto é, se $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, onde $\delta > 0$. Temos, então, os seguintes resultados, que enunciaremos sem demonstrar^(*):

i) As configurações possíveis de trajetórias pertencentes a um ângulo normal α definido pelo raio invariante α_0 correspondentes ao tipo I estão representadas pela figura A.14 abaixo:

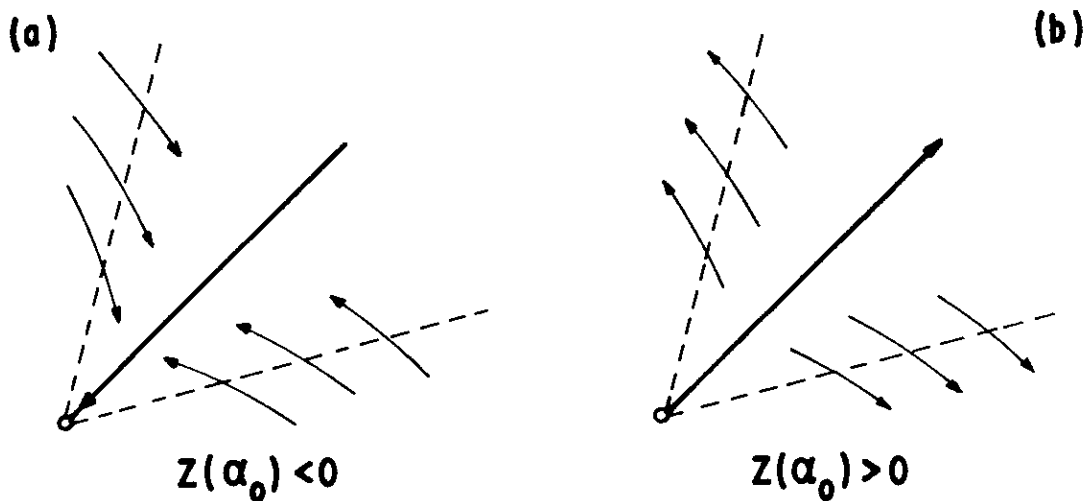


Fig. A.14: Tipo I. $(Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) > 0)$

(*) A demonstração rigorosa desses resultados pode ser encontrada na ref. [59].

ii) Para ângulos normais correspondendo ao tipo II, com k ímpar e maior ou igual a 3, temos as configurações seguintes:

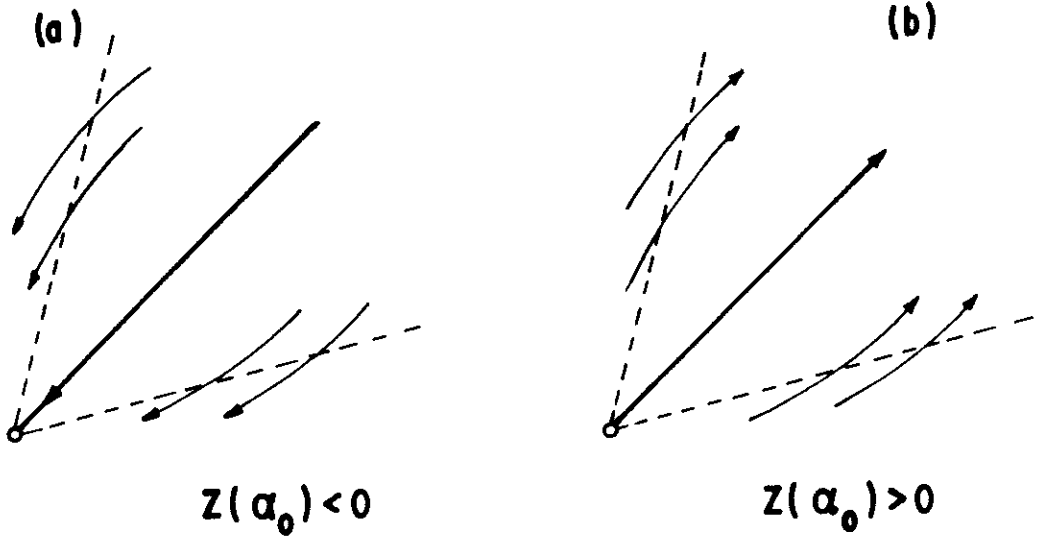


Fig. A.15: Tipo II ($Z(\alpha_0)N^{(k)}(\alpha_0) < 0, k = 3, 5, \dots$)

iii) O caso $k = 1$ para o tipo II merece uma atenção especial. Aqui aparecem três situações distintas: a) se as trajetórias são do tipo II, i.e., $Z(\alpha_0)N'(\alpha_0) < 0$ e, além disso, $Z^2(\alpha_0) + Z(\alpha_0)N'(\alpha_0) > 0$, então teremos as mesmas configurações da fig. A.15; b) se, no entanto, as trajetórias são do tipo II com $Z^2(\alpha_0) + Z(\alpha_0)N'(\alpha_0) < 0$, então teremos a figura a seguir:

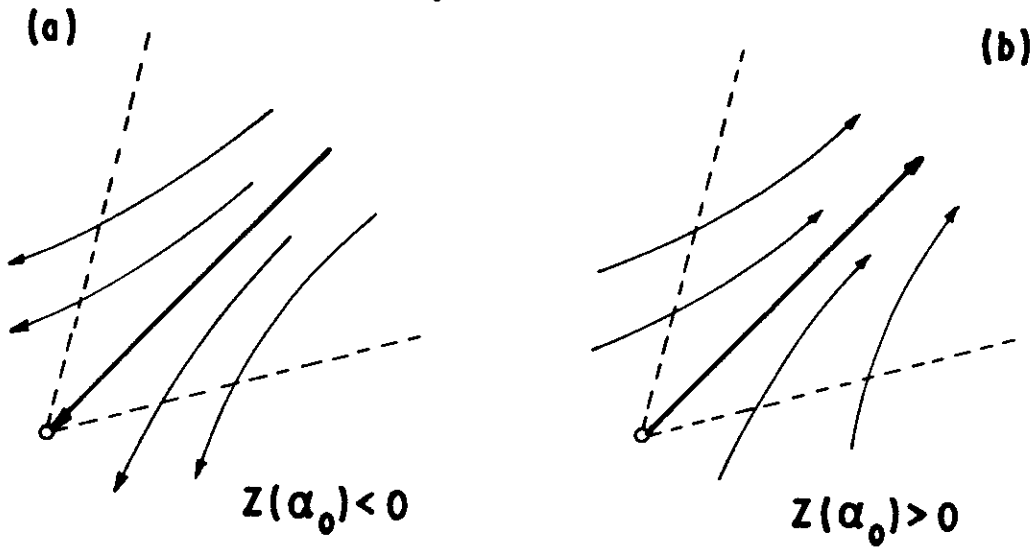


Fig. A.16: Tipo II ($k = 1$ e $Z^2(\alpha_0) + Z(\alpha_0)N'(\alpha_0) < 0$)

c) finalmente, se $Z(\alpha_0) + N'(\alpha_0) = 0$, o caso é um pouco mais complexo. A curvatura C de uma dada curva plana expressa em coordenadas polares $r = r(\alpha)$ vem dada pela fórmula

$$C = \frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \quad (\text{A.I.21})$$

Portanto, para saber se a curva num ponto P do plano é convexa ou côncava com relação à origem é suficiente verificar o sinal de $2r'^2 + r^2 - rr''$. Fazendo uso da equação $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\alpha} = \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}$, por sua

vez obtida de A.I.16, encontramos:

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{r^2(\alpha)}{N^2(\alpha)} \left[N^2(\alpha) + Z^2(\alpha) + Z(\alpha) \frac{dN(\alpha)}{d\alpha} - N(\alpha) \frac{dZ(\alpha)}{d\alpha} \right].$$

(A.I.22)

Se $\alpha = \alpha_0$ é um raio invariante, então o sinal da curvatura em α_0 depende unicamente da expressão $Z^2(\alpha) + Z(\alpha_0)N'(\alpha_0)$. Considere-mos, agora, a expansão de Taylor das funções $N(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ nas vizinhanças de α_0 :

$$Z(\alpha) = Z(\alpha_0) + Z'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + Z''(\alpha_0) \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} + \dots + Z^{(\ell)}(\alpha_0) \frac{(\alpha - \alpha_0)^\ell}{\ell!} + O_1[(\alpha - \alpha_0)^{\ell+1}],$$

$$N(\alpha) = -Z(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + N''(\alpha_0) \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} + \dots + N^{(\ell)}(\alpha_0) \frac{(\alpha - \alpha_0)^\ell}{\ell!} + O_2[(\alpha - \alpha_0)^{\ell+1}].$$

Podemos escrever, então, que

$$N^2(\alpha) + Z^2(\alpha) + Z(\alpha)N'(\alpha) - Z'(\alpha)N(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - \alpha_0) + a_2(\alpha - \alpha_0)^2 + \dots + a_\ell(\alpha - \alpha_0)^\ell + O[(\alpha - \alpha_0)^{\ell+1}],$$

(A.I.23)

onde $a_0 = Z(\alpha_0)[Z(\alpha_0) + N'(\alpha_0)]$, $a_1 = Z(\alpha_0)[2Z'(\alpha_0) + N''(\alpha_0)]$,

No caso (c) $Z(\alpha_0) + N'(\alpha_0) = 0$, implicando que $a_0 = 0$. Suponhamos que a_ℓ ($\ell \geq 1$) seja o primeiro coeficiente não-nulo da série (A.I.23). Enunciamos, então, o seguinte resultado: quando $k = 1$ e $Z(\alpha_0) + N'(\alpha_0) = 0$ existem quatro configurações possíveis, conforme ℓ seja par ou ímpar e a_ℓ seja positivo ou negativo: (ver fig. A.17).

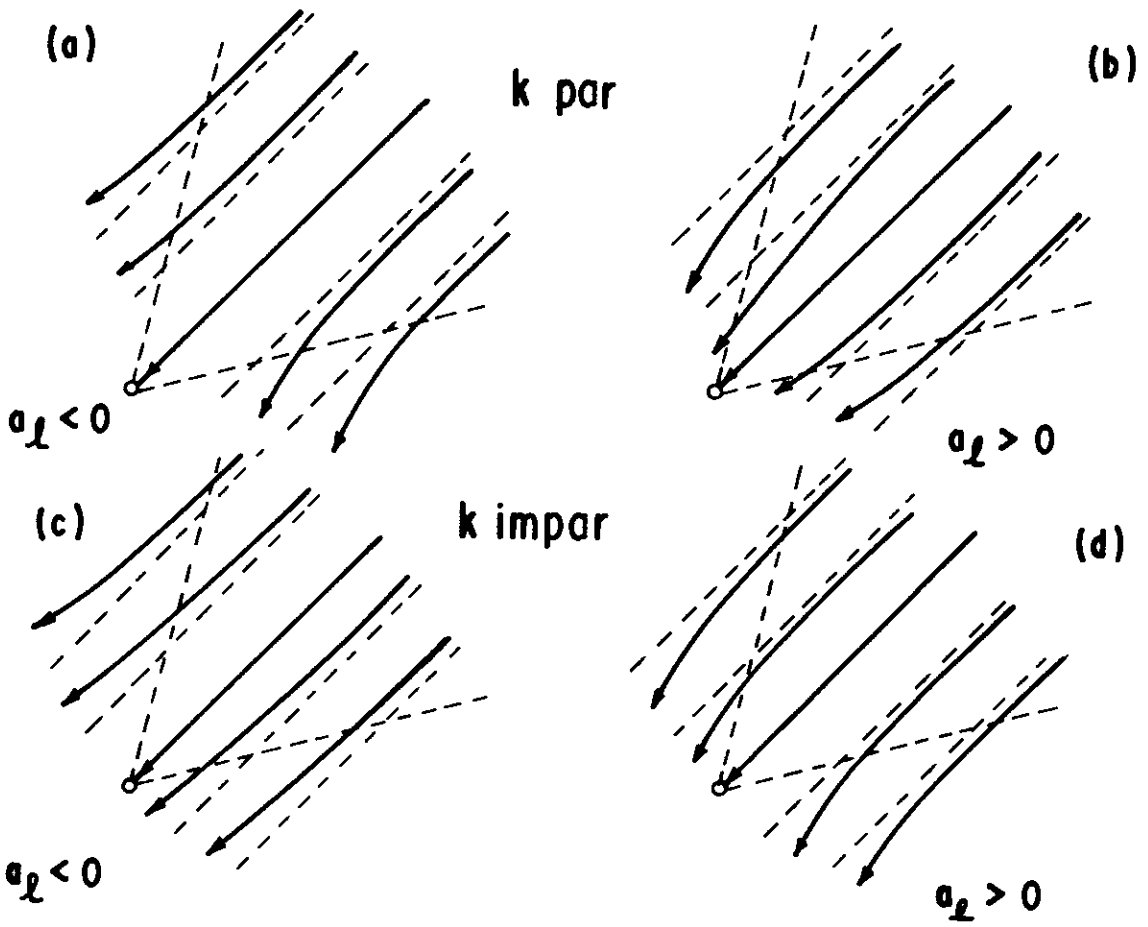


Fig. A.17: Tipo II ($k = 1$ e $Z(\alpha_0) + N'(\alpha_0) = 0$)

iv) quando k é par ($k \geq 2$) a configuração de curvas é do tipo III e está representada pela figura abaixo (fig. A.18):

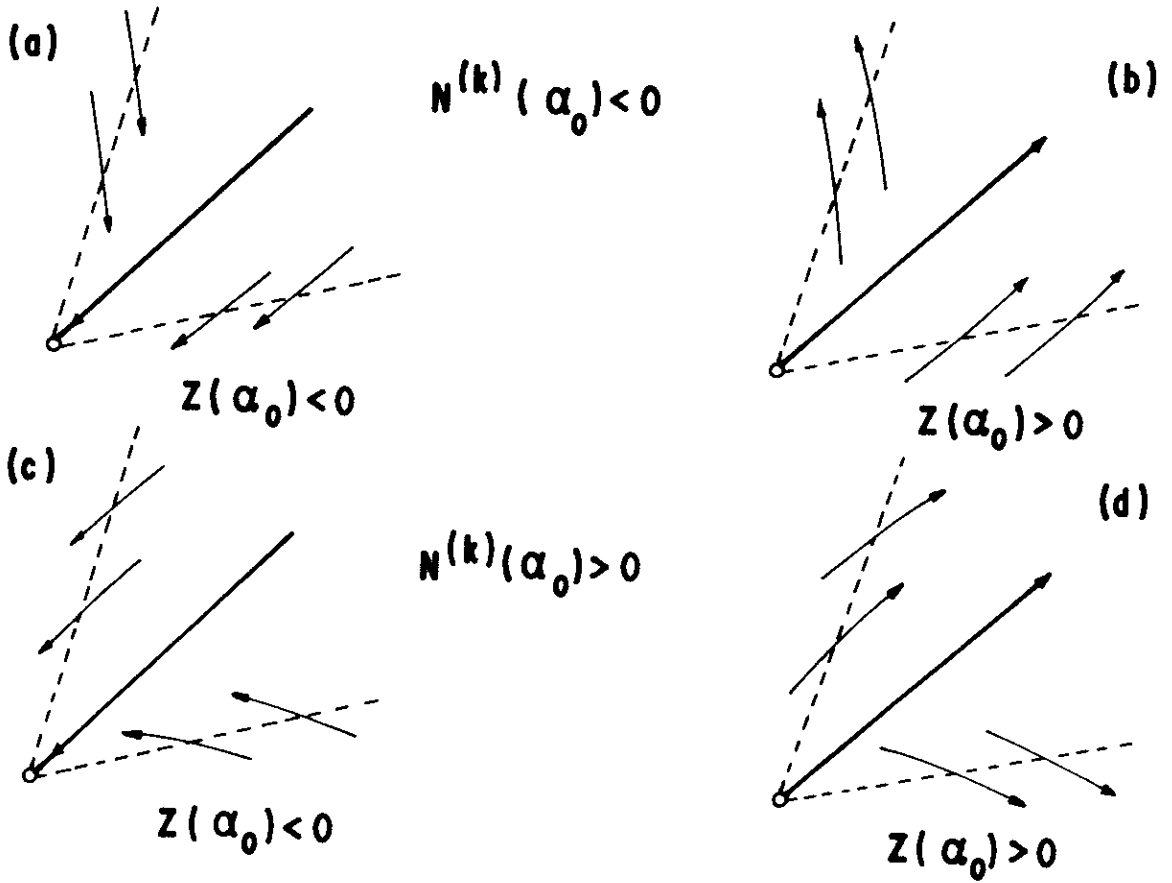


Fig. A.18: Tipo III (k par e ≥ 2)

Para terminar esta seção, apresentaremos as três possíveis configurações de trajetórias entre setores do plano delimitados por dois raios invariantes isolados. Esses setores, usualmente denominados de elítico (a), hiperbólico (b) e parabólico (c), estão mostrados na figura a seguir:

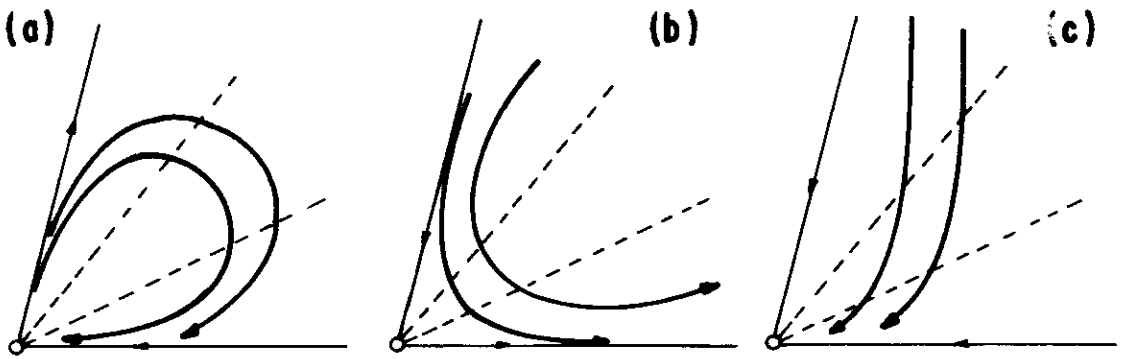
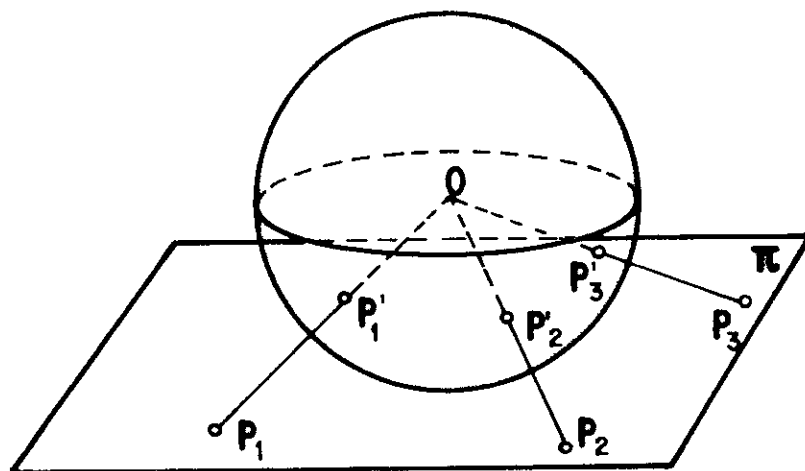


Fig. A.19: Trajetórias entre raios invariantes

III. ANÁLISE DO SISTEMA DINÂMICO NO INFINITO

Para se obter uma análise completa do diagrama de fase de um sistema dinâmico, é preciso se conhecer o comportamento das curvas integrais, ou das trajetórias, no 'infinito'. O método geralmente utilizado para essa análise consiste no que se denomina de 'compactificação' do plano, ou ainda, na projeção do plano de fase π na esfera de Poincaré, definida como um mapeamento do plano (x,y) num dos hemisférios de uma esfera S_2 . A idéia de se trabalhar na esfera de Poincaré se deve ao fato de ser possível uma correspondência entre pontos de π no infinito e pontos no equador da esfera (ver fig. A.20).



A figura acima ilustra o chamado mapeamento de Poincaré. Seja, por exemplo, P_1 um ponto do plano. Traçamos

uma linha reta de P_1 até o centro O de S_2 . O ponto P'_1 , chamado de projecção de P_1 , é o ponto de S_2 interceptado pela linha P_1O . (Aqui trabalhamos com o hemisfério inferior de S_2).

Num mapeamento desse tipo, consideramos a esfera S_2 com raio unitário. Evidentemente, curvas integrais no plano de fase xy corresponderão à famílias de curvas na esfera de Poincaré, linhas retas que passam pela origem serão mapeados em círculos máximos perpendiculares ao equador e pontos no infinito estarão associados a pontos no equador de S_2 . Posteriormente, faremos uma segunda projeção de todo o hemisfério inferior da esfera num disco fechado D do plano, baixando perpendiculares ao próprio plano. Apesar de ser um abuso de linguagem, continuaremos a nos referir às configurações de curvas projetadas no disco, como diagramas na esfera de Poncaré. Assim, todo o plano xy será equivalente a um disco fechado. Todavia, ao analisar pontos no infinito do plano de fase, será conveniente antes realizar projeções dos pontos da esfera em planos tangentes na altura do equador de S_2 . A seguir, vamos expor com detalhes as idéias aqui introduzidas.

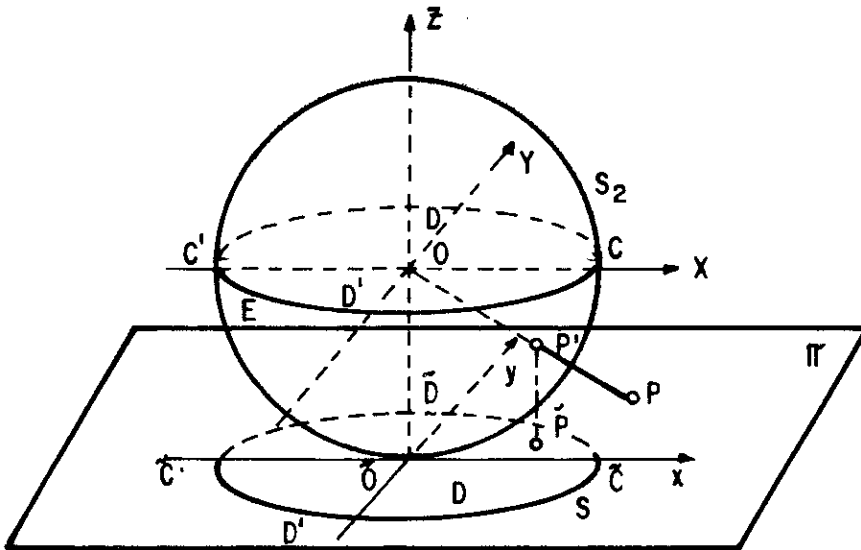
Consideremos uma esfera unitária S_2 , cuja equação seja dada por

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 . \quad (\text{A.I.24})$$

Seja T_s o plano tangente ao polo sul de S_2 (ver fig. A.21). Façamos T_s coincidir com o plano de fase que estamos analisando. Então, se $P(x,y)$ é um ponto qualquer do plano de fase, podemos traçar uma reta que passe por P e pelo centro O da esfera S_2 , interceptando S_2 no ponto P' do hemisfério inferior, o que defi

ne um mapeamento do plano tangente T_S na esfera. Reciprocamente, qualquer ponto do hemisfério inferior, com exceção de pontos situados sobre o equador, define, pela projeção inversa, exatamente um ponto no plano. Os pontos do equador correspondem a pontos no infinito do plano.

Como estamos interessados no comportamento das trajetórias no infinito do plano de fase, deveremos estudar o comportamento das trajetórias em S_2 em pontos próximos ao equador. Para isso, consideremos C e C' dois pontos situados na interseção da linha do equador E com o eixo X , D e D' na interseção de E com o eixo Y (ver fig. A.21).



O plano π^* definido pela equação $X=1$ toca a esfera S_3 justamente no ponto C (ver fig. A.I.22). Podemos definir em $*$ um sistema de coordenadas cartesianas (u,z) com origem C de tal for

ma que o eixo u seja paralelo a U e o eixo z , antiparalelo a Z . Seja P' um ponto do hemisfério inferior de S_2 (diferente de D e D'). A interseção da linha reta que passa pelo centro O de S_2 e P' com o plano π^* define o ponto P^* . Temos, assim, um mapeamento do hemisfério inferior de S_2 em π^* . Considerando, agora, o plano de fase original π podemos compor essas duas projeções já definidas e obter um mapeamento direto de π em π^* (excluindo, naturalmente, do domínio do eixo y do plano de fase π). Assim, se quisermos estudar o comportamento de trajetórias nas vi

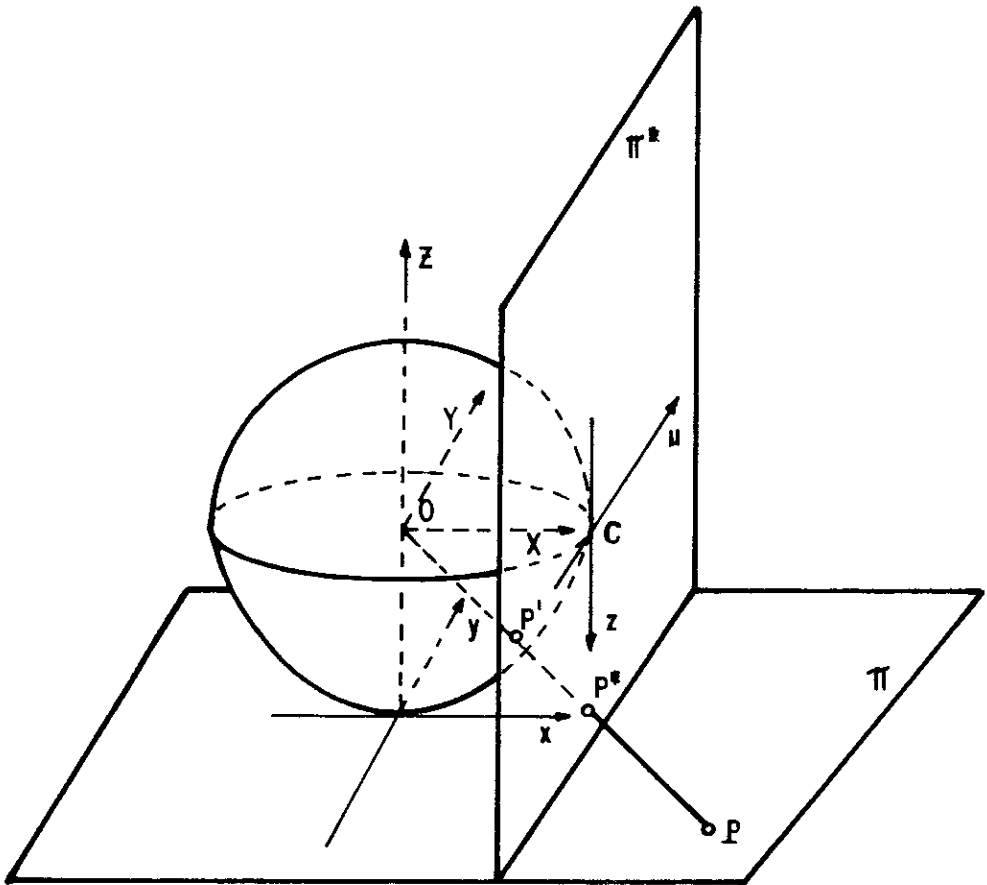


Fig. A.22: Análise no 'infinito'

zinhanças de algum ponto do equador, com exceção de D ou D' , de vemos trabalhar no plano π^* . Caso estejamos interessados em analisar as trajetórias nas vizinhanças de D ou D' , consideraremos, ao invés do plano π^* , o plano π^{**} tangente a S_2 em D e definimos o mesmo tipo de projeção como no caso de π^* . Em π^{**} te remos coordenadas (v,z) , com o eixo v paralelo ao eixo x , e o ei xo z , antiparalelo ao eixo Z .

Começaremos nossa análise com o plano π^* . Suponhamos que $P(x,y)$ seja um ponto no plano de fase π , fora do eixo y , e $P^*(u,z)$ imagem de P em π^* . As equações que relacionam as coordenadas de P e P^* são as seguintes:

$$u = \frac{Y}{X} , \quad (\text{A.I.25a})$$

$$z = \frac{1}{X} , \quad (\text{A.I.25b})$$

ou

$$x = \frac{1}{Z} , \quad (\text{A.I.26a})$$

$$y = \frac{u}{Z} . \quad (\text{A.I.26b})$$

Se, em vez de π^* , estivéssemos no plano π^{**} , as relações entre as coordenadas de $P(x,y)$ e $P^{**}(v,z)$ seriam dadas por

$$v = \frac{x}{z} , \quad (\text{A.I.27a})$$

$$z = \frac{1}{u} , \quad (\text{A.I.27b})$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{F^*(u, z)}{z^m} , \quad (\text{A. I. 31a})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{H^*(u, z)}{z^m} , \quad (\text{A. I. 31b})$$

e

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F^{**}(u, z)}{z^m} , \quad (\text{A. I. 32a})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{H^{**}(u, z)}{z^m} . \quad (\text{A. I. 32b})$$

Definindo, ainda, a variável τ por $d\tau = \frac{dt}{z^m}$, as equações acima se reduzem a:

$$\frac{du}{d\tau} = F^*(u, z) , \quad (\text{A. I. 33a})$$

$$\frac{dz}{d\tau} = H^*(u, z) , \quad (\text{A. I. 33b})$$

e

$$\frac{dv}{d\tau} = F^{**}(v, z) , \quad (\text{A. I. 34a})$$

$$\frac{dz}{d\tau} = H^{**}(v, z) . \quad (\text{A. I. 34b})$$

Observemos que, se m for par, o sentido das trajetórias dos sistemas (A.I.31) e (A.I.32) não varia quando passamos para os sistemas (A.I.33) e (A.I.34) através da transformação de variáveis $d\tau = \frac{dt}{z^m}$. Se m for ímpar, o sentido das trajetórias será inver

tido para trajetórias situadas em $z < 0$.

Já sabemos que para estudar o comportamento das trajetórias no infinito do plano de fase π , devemos examinar pontos sobre o equador de S_2 . Através das projeções definidas anteriormente, somos levados aos planos π^* e π^{**} , com o sistema dinâmico definido nesses planos pelas equações (A.I.33) e (A.I.34). Aplicamos, então, a teoria desenvolvida na seção A.I.1 para determinar os pontos de equilíbrio e a configuração das curvas nas vizinhanças destes pontos. Assim, podemos determinar o comportamento de todas as curvas em pontos próximos ao equador de S_2 . Feito isso, podemos finalmente projetar ortogonalmente todo o hemisfério inferior de S_2 no plano de fase π (ver fig. A.21). Assim, as trajetórias desse hemisfério serão mapeadas em trajetórias situadas no interior de um disco D limitado por um círculo S , imagem da linha E do equador da esfera de Poincaré. Os pontos de equilíbrio em S_2 serão projetados em pontos de equilíbrio de D .

O diagrama de fase construído no disco D nos fornece uma descrição bastante completa do sistema dinâmico (A.I.2) definido no plano, pois acrescenta o comportamento das trajetórias no infinito. Há uma correspondência biunívoca entre pontos do plano de fase e pontos no interior do disco D . Os pontos situados na borda de D , isto é, no círculo S , representam pontos do plano de fase do infinito.

Para concluir, apresentaremos um sumário do procedimento a ser seguido (sugerido por A. Andronov^[58] quando se pretende a investigação de sistemas dinâmicos no infinito:

1. Aplicar as transformações de Poincaré

$$x = \frac{v}{z} , \quad (\text{A.I.28a})$$

$$y = \frac{1}{z} . \quad (\text{A.I.28b})$$

As transformações acima são conhecidas como transformações de Poincaré. As transformações correspondentes para o sistema dinâmico A.I.2, definido originalmente no plano de fase π , vêm de terminadas por:

$$\frac{du}{dt} = -uzF\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zH\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) , \quad (\text{A.I.29a})$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2F\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) , \quad (\text{A.I.29b})$$

no caso do plano π^* , e,

$$\frac{dv}{dt} = zF\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvH\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) , \quad (\text{A.I.30a})$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2H\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) , \quad (\text{A.I.30b})$$

para o plano π^{**} . É claro que para $z \neq 0$, as trajetórias dos sistemas dinâmicos (A.I.29) e (A.I.30) nada mais são do que as projeções das trajetórias do sistema dinâmico A.I.2, nos planos π^* e π^{**} , respectivamente.

Na seção anterior, consideramos sistemas homogêneos de ordem m . Aqui, faremos uma hipótese mais geral: vamos supor que as funções $F(x,y)$ e $H(x,y)$ sejam polinômios cujo maior grau é m . Isto nos permite escrever (A.I.29) e (A.I.30) da seguinte forma:

$$x = \frac{1}{z} , \quad (\text{A.I.26a})$$

$$y = \frac{u}{z} , \quad (\text{A.I.26b})$$

obtendo o sistema dinâmico

$$\frac{du}{dt} = -uzF\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zH\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{F^*(u, z)}{z^m} , \quad (\text{A.I.31a})$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2F\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{H^*(u, z)}{z^m} , \quad (\text{A.I.31b})$$

sendo m o menor inteiro não-negativo tal que a forma acima das equações, seja possível.

2. Através da mudança de variáveis definida por $d\tau = \frac{dt}{z^m}$, considerar o sistema dinâmico

$$\frac{du}{d\tau} = F^*(u, z) , \quad (\text{A.I.33a})$$

$$\frac{dz}{d\tau} = H^*(u, z) , \quad (\text{A.I.33b})$$

e determinar os pontos de equilíbrio tomando $z = 0$. Feito isto, construir o diagrama de fase do sistema (A.I.33) na vizinhança de cada ponto de equilíbrio $P^*(u, 0)$.

3. Para cada ponto de equilíbrio $P^*(u, 0)$ determinar os pontos antípodas correspondentes \tilde{P} e \tilde{P}' situados sobre o círculo S do disco D . Estes pontos são obtidos justamente da interseção da reta $y = ux$ com o círculo S . Seja U_+ uma vizinhança positiva ($z > 0$) do ponto $P^*(u, 0)$. Consideremos \tilde{U}_+ a imagem de U_+

via o mapeamento ortogonal, já definido, de π^* em D . De modo a nálogo, seja U_- uma vizinhança negativa ($z < 0$) de $P^*(u,0)$ e con sideremos a imagem \tilde{U}_- de U_- pelo mesmo mapeamento. Na figura A.23, a seguir, representamos esses mapeamentos, tomando, como hipótese que a abscissa de $P^*(u,0)$ é positiva. As imagens de C e C' correspondem aos pontos \tilde{C} e \tilde{C}' , respectivamente, enquanto que D e D' são levados em \tilde{D} e \tilde{D}' .

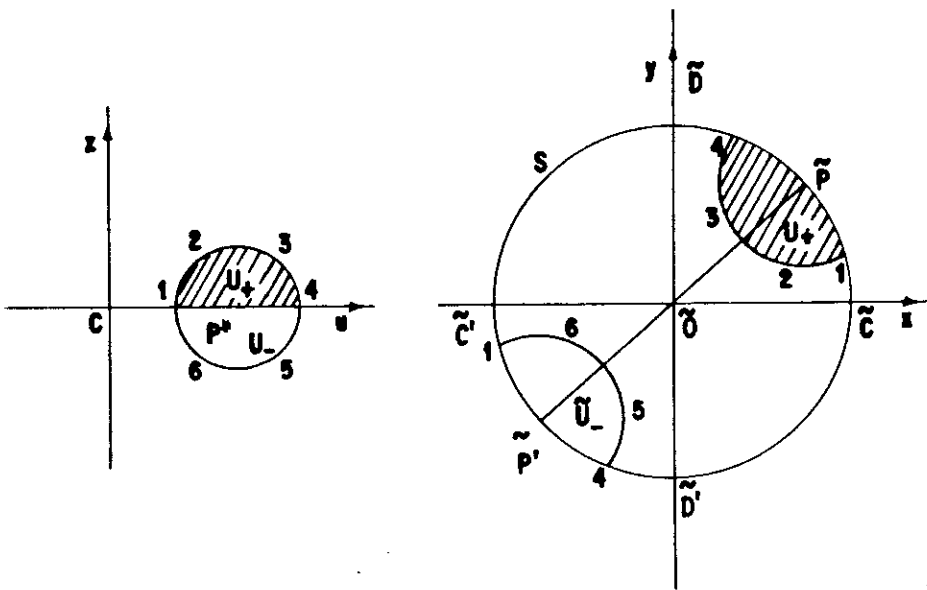


Fig. A.23: Mapeamento $\pi^* \rightarrow D$

4. Se m é ímpar, devemos inverter o sentido das trajetórias quando mapeamos U_- em \tilde{U}_- .

5. Aplicar a transformação de Poincaré

$$x = \frac{y}{z}, \quad (\text{A.I.27a})$$

$$Y = \frac{1}{z}, \quad (\text{A.I.27b})$$

tendo como resultado o sistema

$$\frac{dv}{dt} = zF\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvH\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{F^{**}(v, z)}{z^n} \quad (\text{A.I.30a})$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2H\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{H^{**}(v, z)}{z^n} \quad (\text{A.I.30b})$$

que pode ser reduzido à forma

$$\frac{dv}{dt} = F^{**}(v, z) \quad (\text{A.I.34a})$$

$$\frac{dz}{dt} = H^{**}(v, z) \quad (\text{A.I.34b})$$

6. Construir o diagrama de fase do sistema acima na vizinhança do ponto $D(0,0)$ e fazer o mapeamento da vizinhança positiva $V_+(z > 0)$ de D na vizinhança \tilde{V}_+ do ponto \tilde{D} no disco D , bem como a vizinhança negativa $V_-(z < 0)$ de D na vizinhança \tilde{V}_- de \tilde{D}' , seguindo o esquema da fig. A.24 a seguir.

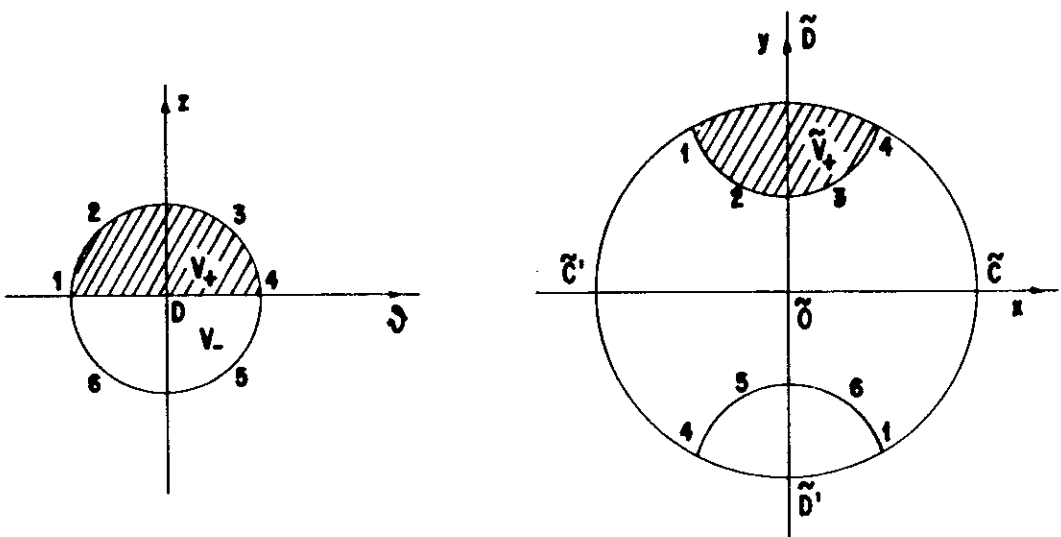


Fig. A.24: Mapeamento $\pi^{**} \rightarrow D$

7. Caso n seja ímpar, o sentido das trajetórias deve ser invertido quando mapeamos V_- em \tilde{V}_- .

Abaixo, damos um exemplo de um diagrama de fase construído no disco D (ver fig. A.25) ilustrando o comportamento das trajetórias no infinito de um certo sistema dinâmico.

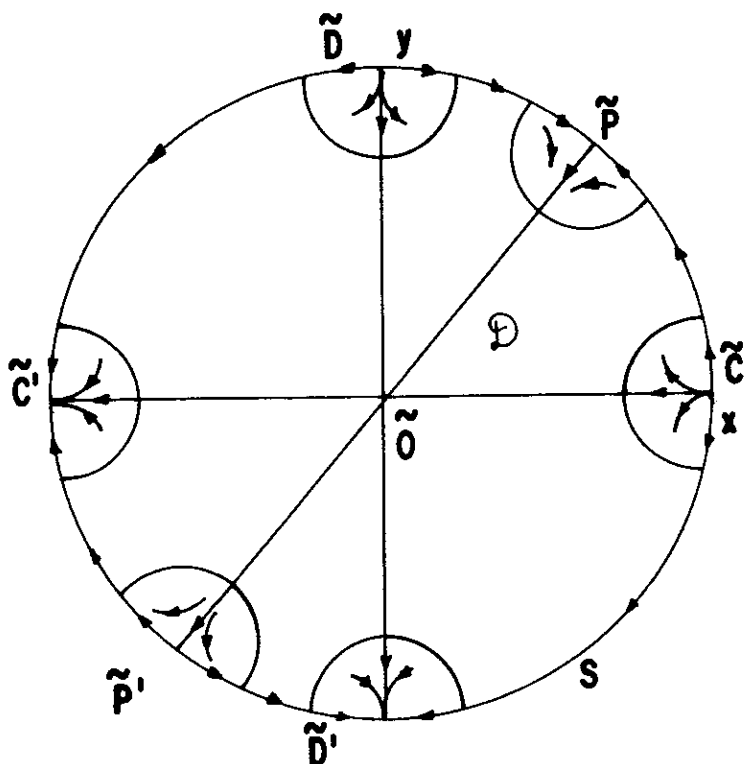


Fig. A.25: Diagrama de fase representando trajetórias no infinito

No diagrama acima, temos seis pontos de equilíbrio no infinito. Os pontos \tilde{P} e \tilde{P}' são pontos de sela, \tilde{C} e \tilde{D} representam nós de duas tangentes instáveis, e \tilde{C}' e \tilde{D}' correspondem a nós de duas tangentes estáveis. Aqui devemos acrescentar a seguinte observação: como $z = 0$ constitui trajetórias, em geral, do sistema A.I.33, definido em π^* , representamos essas trajetórias no círculo S , mesmo sabendo que não existem correspondentes no plano de fase π .

APÊNDICE II

ANÁLISE DO SISTEMA DINÂMICO OBTIDO DAS EQUAÇÕES DE BRANS-DICKE

O objetivo deste apêndice é de apresentar um breve resumo do procedimento adotado para a obtenção dos diagramas de fase do capítulo IV. No apêndice I, delineamos os pontos que julgamos essenciais da teoria geral dos sistemas dinâmicos. Temos aqui, portanto, uma aplicação prática da teoria ao caso do sistema dinâmico formado pelas equações de Brans-Dicke 4.3.

Para obter os diagramas de fase mostrados no capítulo IV, precisamos dividir nossa análise em duas partes: a análise da origem M ($\theta = 0, \psi = 0$) do plano de fase e a análise dos pontos de equilíbrio no infinito.

I. ANÁLISE DA ORIGEM

Como já tivemos ocasião de observar, o sistema dinâmico formado pelas equações (4.3.a) e (4.3.b) é um sistema planar, autônomo, de 2ª ordem e homogêneo. Com exceção do caso $\omega = -4/3$, a origem M (que corresponde ao espaço-tempo de Minkowski) é o único ponto de equilíbrio do sistema. Se $\omega = -4/3$, o sistema dinâmico 4.3 toma a seguinte forma:

$$\dot{\theta} = (\theta + \psi) [(4\lambda - 2)\theta + (8\lambda - 2)\psi] \quad (\text{A.II.1.a})$$

$$\dot{\psi} = (\theta + \psi) [(1 - 3\lambda)\theta - (1 + 6\lambda)\psi] , \quad (\text{A.II.1-b})$$

o que significa que temos uma linha de pontos múltiplos de equilíbrio em $\theta = -\psi$. Este caso particular não foi considerado.

Por se tratar de um sistema homogêneo, devemos em primeiro lugar encontrar os raios invariantes de 4.3 (ver Apêndice I). No capítulo V, vimos que, ao fazer a mudança de variáveis $\theta = r \cos \alpha$ e $\psi = r \sin \alpha$, o sistema dinâmico passa a ser escrito na forma

$$\dot{r} = r^2 Z_{\lambda\omega}(\alpha) , \quad (5.1.a)$$

$$\dot{\alpha} = r N_{\lambda\omega}(\alpha) , \quad (5.1.b)$$

onde $N_{\lambda\omega}(\alpha) = H_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha - F_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha$ e $Z_{\lambda\omega}(\alpha) = H_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha + F_{\lambda\omega}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha$. As raízes da equação

$$N_{\lambda\omega}(\alpha) = 0 \quad (5.2)$$

nos dão precisamente os raios invariantes

$$\alpha_i^{(1)} = \text{arc cotg } \xi_i \quad \text{e} \quad \alpha_i^{(2)} = \alpha_i^{(1)} + \pi ,$$

($i = 1, 2, 3$) onde

$$\xi_3 = \frac{3(1 + \omega - \lambda\omega)}{1 - 3\lambda}$$

$$\xi_1 = -\frac{3}{2} (1 + \sqrt{1 + 2\omega/3})$$

e

$$\xi_2 = -\frac{3}{2} (1 - \sqrt{1 + 2\omega/3}) ,$$

com a variável ξ sendo definida por $\xi \equiv \cotg \alpha = \frac{\theta}{\psi}$. (ver cap.V).

Uma vez determinados os raios invariantes no plano de fase, precisamos, para caracterizar a natureza topológica da origem, calcular o valor que as funções $Z_{\lambda\omega}(\alpha)$ e $N_{\lambda\omega}^{(1)}(\alpha) = \frac{dN_{\lambda\omega}(\alpha)}{d\alpha}$ assumem em $\alpha = \alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$. Com esses valores calculados e com auxílio dos teoremas do apêndice I, podemos determinar as configurações das curvas do diagrama próximas à origem e entre os setores definidos pelos raios invariantes. A seguir, damos as expressões das funções $N_{\lambda\omega}(\alpha)$, $Z_{\lambda\omega}(\alpha)$ para valores arbitrários de λ e ω :

$$N_{\lambda\omega}(\alpha) = \frac{\text{sen}^3 \alpha}{2\omega + 3} \left[\left(\frac{1 - 3\lambda}{3} \right) \cotg^3 \alpha + (\lambda\omega - 3\lambda - \omega) \cotg^2 \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{9\lambda\omega - 7\omega - 6}{2} \right) \cotg \alpha + \frac{3\omega}{2} (1 + \omega - \lambda\omega) \right] \quad (5.3)$$

$$Z_{\lambda\omega}(\alpha) = \frac{\text{sen}^3 \alpha}{2\omega + 3} \left[- (2 + \omega + \lambda\omega) \cotg^3 \alpha + (1 - 3\lambda) \left(\frac{1}{3} + \omega \right) \cotg^2 \alpha + \right. \\ \left. + \left(-\frac{7\omega}{2} - 2 - 3\lambda + \frac{3\lambda\omega^2}{2} - \frac{3\omega^2}{2} \right) \cotg \alpha - \frac{6 + 5\omega - 3\lambda\omega}{2} \right] .$$

(A.II.2)

Calculando $N_{\lambda\omega}^{(1)}(\alpha)$ e tomando $\alpha = \alpha_i^{(1)}$, obtemos (para $\omega > -3/2$):

$$N_{\lambda\omega}^{(1)}(\alpha_i^{(1)}) = \frac{3\lambda - 1}{3(2\omega + 3)} \text{sen} \alpha_i^{(1)} \left[(\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_1) (\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_1) (\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_3) + (\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_2) \cdot \\
 & \cdot (\cotg \alpha_i^{(1)} - \xi_3)] . \qquad \qquad \qquad (A.II.3a)
 \end{aligned}$$

Se $\omega < -3/2$, teremos:

$$N_{\lambda\omega}^{(1)}(\alpha_3^{(1)}) = \frac{3\lambda - 1}{2\omega + 3} \operatorname{sen} \alpha_3^{(1)} (\xi_3^2 + 3\xi_3 - \frac{3\omega}{2}) \qquad (A.II.3b)$$

Ao escrever estas duas últimas equações, fizemos uso do fato de que a função $N_{\lambda\omega}(\alpha)$ pode ser fatorada da seguinte maneira:

$$N_{\lambda\omega}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2\omega + 3} [(\frac{1 - 3\lambda}{3}) \cotg \alpha + \lambda\omega - \omega - 1] [\cotg^2 \alpha + 3\cotg \alpha - \frac{3\omega}{2}] . \qquad (A.II.4)$$

De acordo com a variação dos parâmetros λ e ω , os valores assumidos pelas equações (5.3)', (A.II.2) e (A.II.3) são suficientes para caracterizar a natureza dos ângulos normais, conforme vimos na seção II do apêndice I.

II. ANÁLISE NO INFINITO

Para estudar a configuração dos pontos de equilíbrio no infinito precisamos colocar o sistema dinâmico (4.3) na forma A.I.33 e A.I.34 (no nosso caso particular $m = 2$), aplicando as transformações (A.I.26) e (A.I.27). Com exceção do caso $\lambda = 1/3$ (radiação), é suficiente trabalhar apenas com A.I.34. Os diagramas de fase locais do sistema (A.I.33) (ou de (A.I.34)) são obtidos através do procedimento canônico descrito na seção I do apêndice I. Assim, de acordo com os valores assumidos pelo traço I e pelo determinante Ω (ver tabela A.I.1), determinamos a na

tureza topológica dos pontos no infinito, isto é, pontos situados no equador da esfera de Poncaré e que correspondem a pontos sobre a circunferência S do disco D (ver apêndice I, seção III). Para $\lambda \neq 1/3$, o traço $I_{\lambda\omega}$ e o determinante $\Omega_{\lambda\omega}$ definidos pela matriz do sistema A.I.34 são dados pelas seguintes expressões:

$$I_{\lambda\omega}(v) = -\frac{1}{2\omega+3} \left[4\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)v^2 + (2\lambda\omega - 4\omega - 9\lambda - 2)v + 6(\lambda\omega - \omega - 1) \right] \quad (\text{A.II.5})$$

$$\Omega_{\lambda\omega}(v) = \frac{1}{(2\omega+3)^2} \left[(1-3\lambda)v^2 + 2(\lambda\omega - \omega - 3\lambda)v + \left(\frac{9\lambda\omega}{2} - \frac{7\omega}{2} - 3\right) \right] \cdot \left[\frac{(1-3\lambda)}{3}v^2 - (2\omega+2+3\lambda)v - \left(\frac{6+5\omega-3\lambda\omega}{2}\right) \right] \quad (\text{A.II.6})$$

As equações acima são obtidas diretamente do sistema dinâmico (4.3) escrito na forma A.I.34 aplicando-se às transformações A.I.27. Nas variáveis v e z , portanto, (4.3) se escrevem como:

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{1}{2\omega+3} \left[\left(\frac{1-3\lambda}{3}\right)v^3 + (\lambda\omega - \omega - 3\lambda)v^2 + \left(\frac{9\lambda\omega}{2} - \frac{7\omega}{2} - 3\right)v + \frac{3\omega}{2}(1 + \omega - \lambda\omega) \right] \quad (\text{A.II.7a})$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{z}{2\omega+3} \left[\left(\frac{1-3\lambda}{3}\right)v^2 - (2\omega+2+3\lambda)v - \left(\frac{6+5\omega-3\lambda\omega}{2}\right) \right] \quad (\text{A.II.7b})$$

Para obter os pontos de equilíbrio no equador da esfera de Poncaré, devemos fazer $z = 0$. Com isso, o lado direi-

to da equação (A.II.7b) automaticamente se anula, restando resolver a equação $\frac{dv}{dt} = 0$. Ora, as raízes desta equação são exatamente as mesmas que nos dão os raios invariantes (ver eq. 5.2 no capítulo V), o que era de se esperar, uma vez que raios invariantes determinam pontos de equilíbrio no infinito. Vemos também aqui que a linha do equador da esfera de Poincaré, isto é, $z = 0$ constitui uma trajetória do sistema dinâmico A.II.7.

III. O CASO RADIAÇÃO ($\lambda = 1/3$)

Para o caso $\lambda = 1/3$ (radiação) trabalhamos com a variável u , ao invés de v . A razão disso reside no fato de que quando $\lambda = 1/3$, temos um raio invariante fixo em $\psi = 0$ (ver eq. (4.3)). Portanto, temos dois pontos de equilíbrio no infinito ao longo do eixo u , a saber, $(-\infty, 0)$ e $(+\infty, 0)$. Na fig. A.21, do apêndice I, esses pontos correspondem a C e C' , com $(x, y) = (\theta, \psi)$. Na variável u , o sistema dinâmico (4.3) para $\lambda = 1/3$ se reduz a

$$\frac{du}{dt} = \frac{\omega}{2} u^3 - u^2 - \frac{u}{3}, \quad (\text{A.II.8a})$$

Tomando $z = 0$ vemos que existem três pontos de equilíbrio no eixo u do plano π^{**} (ver apêndice I) caso $\omega > -3/2$ (Se $\omega < -3/2$, apenas $u = 0$ define um ponto de equilíbrio):

$$u = 0, \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2/3}}{\omega} \quad (\omega \neq 0) \quad (\text{A.II.9})$$

A matriz que determina a estrutura topológica desses pontos (de acordo com a tabela A.I.1) será dada por

$$B(u) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \omega u^2 - 2u - 1/3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} + \frac{\omega}{2} u^2 \end{pmatrix}$$

A análise da origem no caso $\lambda = 1/3$ segue-se exatamente da mesma maneira como no caso de λ arbitrário. Por exemplo, calculando $N(\alpha)$, $N^{(1)}(\alpha)$, $Z(\alpha)$ para os raios invariantes $\alpha = \alpha_i^{(1)}$ obtidos de $N(\alpha) = 0$, encontramos, para qualquer valor de ω :

$$N(\alpha) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \alpha (\cotg^2 \alpha + 3 \cotg \alpha - \frac{3\omega}{2}), \quad (\text{A.II.10})$$

$$N^{(1)}(\alpha_i^{(1)}) = -N^{(1)}(\alpha_1^{(2)}) = -\operatorname{sen} \alpha_1^{(1)} \cdot \sqrt{1 + 2\omega/3}, \quad (\text{A.II.11})$$

$$N^{(1)}(\alpha_2^{(1)}) = -N^{(1)}(\alpha_2^{(2)}) = \operatorname{sen} \alpha_2^{(1)} \cdot \sqrt{1 + 2\omega/3}, \quad (\text{A.II.12})$$

$$N^{(1)}(\alpha_3^{(1)}) = -N^{(1)}(\alpha_3^{(2)}) = -1. \quad (\text{A.II.13})$$

onde aqui $\alpha_i^{(1)}$ e $\alpha_i^{(2)}$ ($i=1,2$) estão definidos no capítulo V (ver equações (5.7) e (5.8)), $\alpha_3^{(1)} = 0$ e $\alpha_3^{(2)} = \pi$.

Concluindo, devemos acrescentar que os cálculos necessários para caracterizar a natureza dos ângulos normais e a configuração dos pontos de equilíbrio, adotando o procedimento do apêndice I, foram realizados usando computação numérica, atribuindo-se valores a λ e ω . Entretanto, boa parte desses cálculos puderam ser efetuados também algebricamente. O fato de estarmos trabalhando com um sistema homogêneo, onde os raios invariantes determinam pontos de equilíbrio no infinito, torna

a construção dos diagramas mais simplificada, uma vez que a configuração local na origem pode sugerir a configuração das curvas no infinito e vice-versa. A seguir, apresentamos um programa típico para determinação das funções $N_{\lambda\omega}^{(1)}(\alpha)$, $Z_{\lambda\omega}(\alpha)$, $Z_{\lambda\omega}(\alpha) \cdot N_{\lambda\omega}(\alpha) + Z_{\lambda\omega}^2(\alpha)$, $I_{\lambda\omega}(v)$, $\Omega_{\lambda\omega}(v)$, $I_{\lambda\omega}^2(v) - 4\Omega$, utilizando um microcomputador PX-compatível e linguagem BASIC (Foram realizados também cálculos numéricos com maior grau de precisão utilizando FORTRAN. Para verificar a correção de cálculos algébricos mais complicados, utilizamos algumas vezes o REDUCE).

PROGRAMA EM BASIC UTILIZADO NA

CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS DE FASE

```

10 DEF FNTETA1(W)=ATN(-2/(3*(1+SQR(1+2*W/3))))
20 DEF FNTETA2(W)=ATN(-2/(3*(1-SQR(1+2*W/3))))
30 DEF FNTETA3(L,W)=ATN((1-3*L)/(3*(1+W-L*W)))
40 DEF FNN13(L,W,T)=((3*L-1)/3)*(1/(2*W+3))*SIN(T)*(1/TAN(T)+2+3*1/TAN(T)-3*W/2)
50 DEF FNZ(L,W,T)=SIN(T)+3/(2*W+3)*(-2-W-L*W)*(1/TAN(T)+3)+(1-3*L)*(1/3+W)*(1/TAN(T)+2)+(-7*W/2-2-3*L+3*L*W+2/2-3*W+2/2)*(1/TAN(T))-((6+5*W-3*L*W)/2)
60 DEF FNOME(T,L,W)=((1-3*L)*(1/TAN(T)+2)+2*(L*W-W-3*L)*(1/TAN(T))+(9*L*W/2-7*W/2-3))*((1-3*L)/3)*(1/TAN(T)+2-(2*W+2+3*L)*1/TAN(T))-((6+5*W-3*L*W)/2)
70 DEF FNI(T,L,W)=4*(1/3-L)*(1/TAN(T)+2+(2*L*W-4*W-9*L-2)*1/TAN(T)+6*(L*W-W-1)
80 DEF FNN11(L,W,T1,T2,T3)=(3*L-1)/(3*(2*W+3))*SIN(T1)*(1/TAN(T1)-1/TAN(T2))*(1/TAN(T1)-1/TAN(T3))
90 DIM L(7),W(21)
100 FOR D=1 TO 7
110 READ L(D)
120 NEXT D
130 FOR D=1 TO 9
140 READ W(D)
150 NEXT D
160 FOR D=1 TO 7
170 W(10)=-4/3-(3/2)*L(D)+2
172 W(11)=-4/3-(3/2)*L(D)+2+.01
174 W(12)=-4/3-(3/2)*L(D)+2-.01
176 W(13)=-1.5+.5*((1-3*L(D))/(1-L(D)))+2
177 W(16)=4/(3*(L+2-1)):W(17)=W(16)-.01:W(18)=W(16)+.01
178 W(19)=-4/3:W(20)=-4/3-.01:W(21)=-4/3+.01
180 FOR K=16 TO 21
190 X3=FNTETA3(L(D),W(K))
200 N3=FNN13(L(D),W(K),X3)
210 Z3=FNZ(L(D),W(K),X3)
220 TT3=Z3+2+Z3*N3
230 O3=FNOME(X3,L(D),W(K))
240 I3=FNI(X3,L(D),W(K))
250 M3=I3+2-4*O3
260 IF W(K)<(-3/2) THEN 480
270 X1=FNTETA1(W(K)):X2=FNTETA2(W(K))
280 N1=FNN11(L(D),W(K),X1,X2,X3)
290 Z1=FNZ(L(D),W(K),X1)
300 TT1=Z1+2+Z1*N1
310 O1=FNOME(X1,L(D),W(K))
320 I1=FNI(X1,L(D),W(K))
330 M1=I1+2-4*O1
340 N2=FNN11(L(D),W(K),X2,X1,X3)
350 Z2=FNZ(L(D),W(K),X2)
360 TT2=Z2+2+Z2*N2
370 O2=FNOME(X2,L(D),W(K))
380 I2=FNI(X2,L(D),W(K))
390 M2=I2+2-4*O2
395 LPRINT "lambda = ";L(D),"omega = ";W(K),W(1)
400 LPRINT "teta 1 ";X1
410 LPRINT "n1 = ";N1,"z1 = ";Z1,"tt1 = ";TT1
420 LPRINT "o1 = ";O1,"i1 = ";I1,"m1 = ";M1
430 LPRINT
440 LPRINT "teta 2 ";X2
450 LPRINT "n2 = ";N2,"z2 = ";Z2,"tt2 = ";TT2
460 LPRINT "o2 = ";O2,"i2 = ";I2,"m2 = ";M2
470 LPRINT
480 LPRINT "LAMBDA = ";L(D),"OMEGA = ";W(K),"TETA 3 = ";X3
490 LPRINT "n3 = ";N3,"Z3 = ";Z3,"TT3 = ";TT3
500 LPRINT "o3 = ";O3,"i3 = ";I3,"m3 = ";M3
530 NEXT K
540 NEXT D
550 END

```

APÊNDICE III

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA DO PLANO DE FASE

Há diversas maneiras de se representar o plano de fase que descreve as trajetórias de um sistema dinâmico numa variedade compacta. Usualmente, essa variedade é uma esfera S_2 . A representação das curvas de um sistema em S_2 torna possível se determinar o comportamento das trajetórias no infinito, através do que se costuma chamar "compactificação do infinito" (ver apêndice I). A esfera S_2 recebe o nome de esfera de Poincaré. Todavia, o modo de se projetar (ou mapear) o plano de fase na esfera de Poincaré não é único. No apêndice I descrevemos uma maneira de construir diagramas em S_2 , utilizando o procedimento indicado por Andronov^[1]. Esse foi o método aplicado na elaboração dos diagramas de fase do capítulo IV.

Nos diagramas apresentados no capítulo III, as trajetórias do sistema dinâmico III.5 (originado do acoplamento não-mínimo do campo vetorial A_μ com a gravitação) também estão representados na esfera de Poincaré. Todavia, aqui o tipo de mapeamento que reproduz o plano de fase em S_2 é diferente do utilizado no apêndice I e no capítulo IV. Naturalmente, a escolha de um determinado mapeamento vai depender da configuração das curvas no plano de fase. No caso específico do sistema dinâmico III.5, por exemplo, utilizando uma projeção estereográfi

ca, do tipo que iremos descrever logo mais, o caráter cíclico das soluções singulares da fig. III.4 aparece explicitamente, o que não acontece se usarmos o mapeamento definido no apêndice I.

O mapeamento do plano de fase na esfera de Poincaré utilizando uma projeção estereográfica que dá origem aos diagramas do capítulo III pode ser descrito da seguinte maneira: Consideremos, na fig. A.III.1, o plano de fase π tangente à esfera S_2 , sendo o ponto de tangência o polo norte PN de S_2 , coincidindo com a origem O de π . Seja C o centro de S_2 e P_1 um ponto de π . A reta que une P_1 a C, corta S_2 em dois pontos. Consideremos somente o ponto visível P_1' da interseção de P_1C com S_2 . Diremos, então, que P_1' é a projeção estereográfica de P_1 . De maneira análoga, P_2' é a projeção estereográfica de P_2 . Assim,

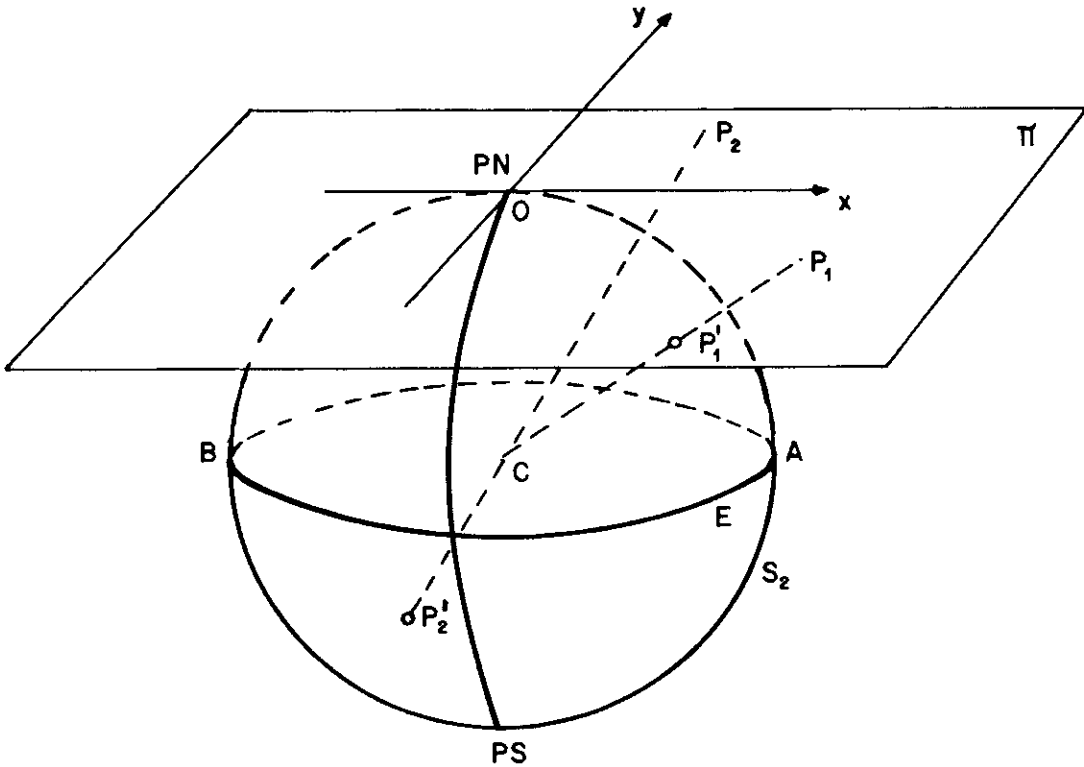


Fig. A.III.1: Projeção estereográfica de π em S_2

qualquer curva integral do plano de fase π será projetada numa curva em S_2 . Pontos no infinito de π serão mapeados na linha do equador E de S_2 . O eixo x de π terá como imagem, a circunferência $PN - A - PS - B - \dot{P}N$ e o eixo y será projetado no meridiano $PN - PS$. É interessante observar que tanto PN como PS são imagens da origem do plano de fase π ; portanto, esses dois pontos devem ser identificados. Desse modo, todo o plano de fase poderá ser representado na parte visível da esfera de Poincaré.

Para construir o diagrama de fase correspondente ao sistema dinâmico III.5 no plano, procedemos conforme os métodos descritos nas seções I e II do apêndice I (observe-se que o sistema III.5 é homogêneo de 2ª ordem). Obtemos, então, o diagrama da fig. A.III.2:

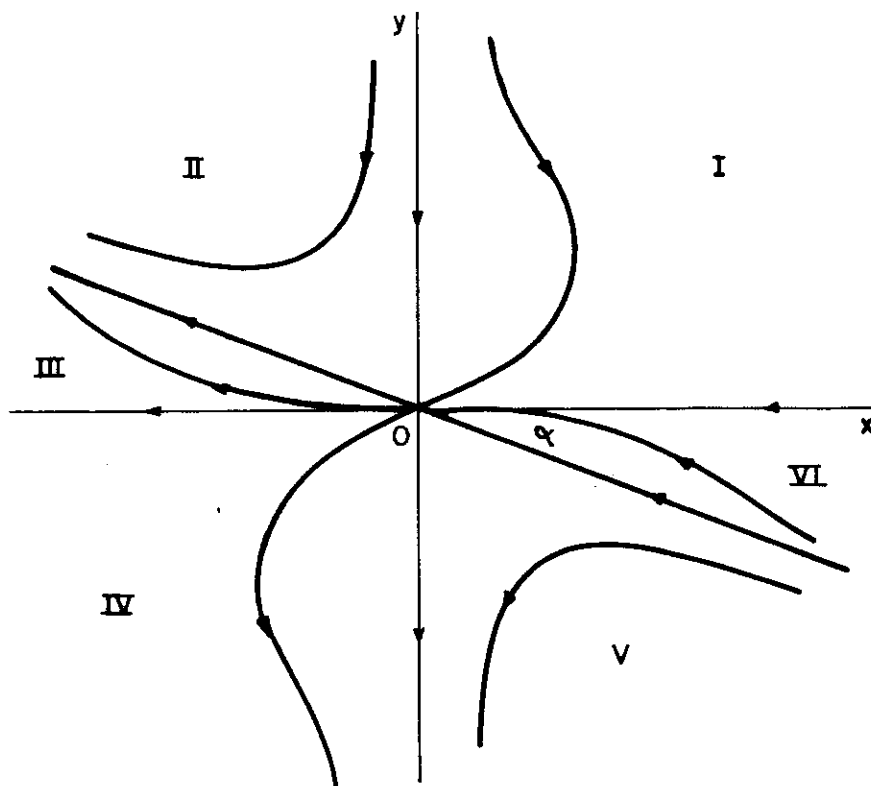


Fig. A.III.2: Diagrama de fase no plano correspondente ao sistema dinâmico III.5

No diagrama anterior, as soluções de Novello-Salim (ver fig. III.2) estão situadas nas regiões I e IV. As soluções singulares representadas pelas figuras III.3 e III.4 correspondem, aqui, às curvas das regiões III e IV, respectivamente. Os pontos $M^{(-)}$ e $M^{(+)}$ são imagens da origem O e as soluções fechadas da fig. III.4 são a projeção das trajetórias das regiões II e V. Ainda no diagrama anterior, temos seis raios invariantes: dois no eixo x , dois no eixo y e dois sobre a reta que forma um ângulo α com o eixo x , com $\text{tg } \alpha = -1/3$. Estes dois últimos raios invariantes aparecem na fig. III.1 como separatrizes que unem o ponto B a $M^{(-)}$ ou $M^{(+)}$.

Finalmente, se quisermos representar o sistema dinâmico III.5 na esfera de Poincaré adotando o método da seção III do apêndice I, obteremos o seguinte diagrama:

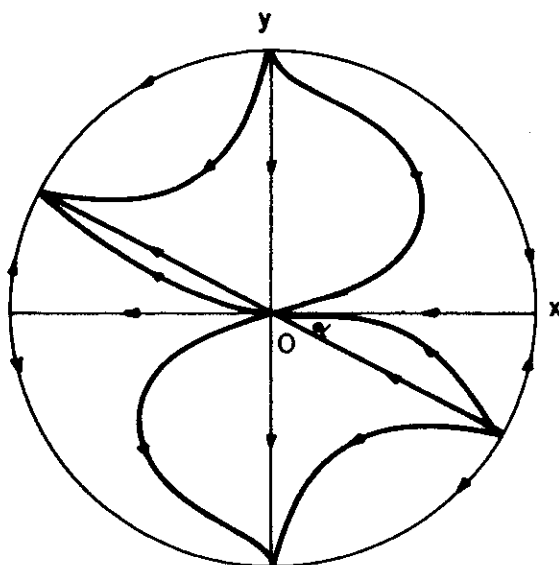


Fig. A.III.3: Diagrama de fase de III.5 na representação do apêndice I

CONCLUSÃO

A teoria dos sistemas dinâmicos tem se mostrado extremamente útil na investigação teórica da Cosmologia e da Astrofísica^[1]. A possibilidade de se realizar uma análise de classes inteiras de soluções que correspondem a modelos cosmológicos distintos, através de diagramas de fase, sem necessariamente resolver analiticamente as equações de campo, tem atraído bastante o interesse dos cosmólogos^[1].

Nesta tese, utilizamos a teoria dos sistemas dinâmicos na abordagem de três tópicos: a teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke; o acoplamento não-mínimo entre o eletromagnetismo e a gravitação; e modelos homogêneos e isotrópicos com viscosidade na relatividade geral.

Começamos pela teoria de Brans-Dicke. Aplicando a teoria dos sistemas dinâmicos no exame de modelos homogêneos e isotrópicos para fluido perfeito com equação de estado $p = \lambda\rho$ e constante de acoplamento ω arbitrária, construímos diagramas de fase na esfera de Poincaré. A análise dos diagramas nos leva a obtenção de vários resultados, os quais estão descritos detalhadamente na conclusão do capítulo IV. Entre esses resultados, podemos citar, por exemplo, o fato de que as soluções mais conhecidas na literatura correspondem às curvas mais simples dos diagramas, ou seja, os raios invariantes. A constatação desse fato nos levou à formulação de um método para obtenção de classes de soluções generalizando inúmeros modelos da literatura. Este método

foi desenvolvido no capítulo V. Através dos diagramas de fase, concluímos que as soluções cosmológicas em melhor concordância com os dados observacionais de que dispomos atualmente devem necessariamente restringir os valores de λ e ω a certos intervalos bem definidos. Obtemos, também, que todas as soluções para $\omega > -4/3$ são singulares e analisamos as propriedades de estabilidade do espaço-tempo de Minkowski com relação a perturbações na densidade de energia, na expansão, e na taxa de variação da 'constante' gravitacional. Mostramos, por outro lado, a existência de regiões de densidade de energia negativa na esfera de Poincaré e como elas evoluem a medida que ω e λ variam.

Ao considerar as soluções obtidas do acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo na teoria de Novello-Salim^[1], a análise qualitativa do sistema dinâmico correspondente às equações de campo nos revela um quadro teórico extremamente rico, como a existência de universos eternos que tendem assintoticamente ao espaço-tempo de Minkowski, de universos singulares em expansão ou colapsantes, e ainda de situações que sugerem mudança na topologia do universo.

Finalmente, considerando universos com viscosidade, observamos que, tanto nos modelos de Belinski-Khalatnikov^[1] como nos modelos de Novello-Araújo^[1], analisados via sistemas dinâmicos, os diagramas de fase revelam a existência de soluções não-singulares. No primeiro caso, trata-se da conhecida solução de Murphy^[1], que considera uma geometria homogênea e isotrópica e fluido com viscosidade linear. A busca de uma solução correspondente para o segundo caso, isto é, levando em conta uma viscosidade quadrática, nos levou a modelos homogêneos e

isotrópicos, não-singulares e em expansão, descrevendo uma fase inflacionária do universo.

REFERÊNCIAS

- [1] Misner, C.W. (1968). *Astrophys. J.* 151, 431.
- [2] Murphy, G. (1973). *Phys. Rev. D.* 8, 4231.
- [3] Zel'dovich, Ya.B. and Starobinskii, A.A. (1972). *Sov. Phys. JETP*, 34, 1159.
- [4] Vereshkov, G.M. et al. (1977). *Sov. Phys. JETP*, 46, 1041.
- [5] Novello, M. and Araújo, R.A. (1980). *Phys. Rev. D*, 22, 260.
- [6] Novello, M. and d'Olival, J.B.S. (1980). *Acta Phys. Pol.*, B 11, 3.
- [7] Novello, M. (1980). *Nucleonika*, 25, 1405.
- [8] Romero, C (1988). *Rev. Bras. Fís.*, 18, nº1, 75.
- [9] Novello, M. and Salim, J.M. (1979). *Phys. Rev. D* 20, 377.
- [10] Novello, M. and Romero, C. (1987). *Gen. Rel. Grav.* 19, 1003.
- [11] Romero, C., Oliveira, H.P. and Mello Neto, J.T. (1988). "Qualitative Analysis of Cosmological Models in Brans-Dicke Theory", *Astrophys. and Space Sci.* (submetido para publicação). Trabalho apresentado na conferência "Fifth Marcel Grossmann Meeting", Perth, 8-13 de Agosto de 1988.
- [12] Romero, C. and Oliveira, H.P. (1988). "Brans-Dicke exact solutions: a dynamical system approach", *Astrophys. Space Sci.* (submetido para publicação).
- [13] L'Apparent, V. de, Geller, M.J. and Huchra, J.P. (1986). *Astrophys. Journ.* 302, L1.
- [14] MacCallum, M.A.H. (1985). "Relativistic Cosmological Models" (Observational and Theoretical Aspects of Relativistic Astrophysics and Cosmology - Ed. Sanz, J.L. and Goicoechea, J.L., World Scientific Publishing Co.).
- [15] Raine, D.J., "The Isotropic Universe" (Adam Hilger, Bristol, 1981).

- [16] Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A., "Gravitation" (Freeman and Company, New York, 1973).
- [17] Peebles, P.J.E., "Physical Cosmology" (Princeton University Press, Princeton, 1971).
- [18] Friedmann, A. (1922). A. Phys. 10, 377.
- [19] Soares, I.D., Notas de aula do curso "Cosmologia Relativística" (CBPF).
- [20] Novello, M. "Cosmologia Relativista" (II Escola de Cosmologia e Gravitação, João Pessoa, 1980).
- [21] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., "Fluid Mechanics" (Pergamon Press, Oxford, 1959).
- [22] Adler, R., Bazin M. and Schiffer, M., "Introduction to General Relativity" (McGraw-Hill, Tokyo, 1965).
- [23] Kramer, D., Stephany, H., MacCallum, M. and Herlt, E., "Exact solutions of Einstein's field equations" (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980).
- [24] Assad, M.J.D. and Lima, J.A.S. (1988), Gen. Rel. Grav. (a ser publicado).
- [25] Weinberg, S. "Gravitation and Cosmology", (John Wiley & Sons, New York, 1972).
- [26] Davies, P.C.W., "Space and time in the Modern Universe", (Cambridge University Press, Cambridge, 1977).
- [27] Ellis, G.F.R., "Standard Cosmology" (Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation", Ed. Novello, M., World Scientific, Singapore, 1987).
- [28] Raychaudhuri, A.K., "Theoretical Cosmology" (Clarendon Press, Oxford, 1979).
- [29] Hawking, S. and Ellis, G.F.R., "Large scale structure of spacetime" (Cambridge University Press, 1973).
- [30] Heller, M., Klimek, Z. and Suszycki, L. (1973), Astrophys. Space Sci., 20, 205.

- [31] Heller, M. and Suszycki, L. (1974), Acta Phys. Pol., B5, 345.
- [32] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., "Classical Theory of Fields" (Pergamon Press, Oxford, 1971).
- [33] Brans, C.H. and Dicke, R.H. (1961), Phys. Rev., 124, 925.
- [34] O'Hanlon, J. and Tupper, B.J. (1972), Nuovo Cim. 87, 305.
- [35] Trantman, A. (1973), Nature, Lond. (Phys. Sci.), 242, 7.
- [36] Rowan-Robinson, M., "Cosmology", (Clarendon Press, Oxford, 1977).
- [37] Zel'dovich, Ya.B. (1968), Soviet. Phys, Usp., 11, 381.
- [38] Narlikar, J.V., "Non-standard cosmologies", (Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation. Ed. Novello, M., World Scientific, Singapore, 1987).
- [39] Marochnik, L.S., Pelikhov, N.V. and Vereshkov, G.M. (1975) Astrophys. Space Sci., 34m 249.
- [40] Melnikov, V.N. and Orlov, S.V. (1979), Phys. Lett.A, 70, 263.
- [41] Goenner, H.F.M. (1984), Found. Phys. 14, nº 9, 865.
- [42] Novello, M., "The program of an eternal universe", (Fifth Brazilian School of Cosmology", Ed. Novello, M. World Scientific, Singapore, 1987).
- [43] Jordan, P. (1955), Scherkraft und Weltall, Vieweg. Braunschweig.
- [44] Sciama, D.W. (1953), Mon. Not. R. Astr. Soc. 113, 34.
- [45] Narlikar, J. "The structure of the Universe" (Oxford University Press, Oxford, 1977).
- [46] Will, C.M., "Theory and experiment in gravitational physics" (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [47] Lorentz-Petzold, D. (1984), Phys. Rev. D, 29, 2399.
- [48] Pimentel, L.O. (1984), Astrophys. Space Sci. 112, 175.

- [49] Rowan-Robinson, M., "Cosmology" (Clarendon Press, Oxford, 1981).
- [50] Greenstein, G.S. (1968), *Astrophys Space Sci.* 2, 155.
- [51] Singh, R.T. and Deo, S. (1987), *Int. J. Theor. Phys.*, 26, 901.
- [52] Dirac, P.A.M. (1938), *Proc. R. Soc. A* 165, 199.
- [53] Shapiro, I.I., Smith, W.B., Ingalls, R.P. and Pettengill, G.H. (1971), *Phys. Rev. Lett.* 26, 27.
- [54] Chen, C. and Stothers, R. (1976), *Phys. Rev. Lett.*, 36, 833.
- [55] Oliveira, H.P. and Salim, J.M. (1987). "Non-equilibrium Friedmann Cosmologies". Preprint, CBPF.
- [56] Belinski, V.A. and Khalatnikov, I.M. (1975). *Sov. Phys. JETP*, 42, 205.
- [57] Belinski, V.A. and Khalatnikov, I.M. (1977). *Sov. Phys. JETP*, 45, 1.
- [58] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I. and Maier, A.G., "Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems" (John Wiley & Sons, New York, 1973).
- [59] Sansoni, G. and Conti, R., "Non-linear Differential Equations" (Pergamon Press, Oxford, 1964).
- [60] Dirac, P.A.M. (1973). *Proc. Roy. Soc. A*333, 403.
- [61] Wesson, P.S. "Gravity, Particles, and Astrophysics" (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980).
- [62] Dicke, R.H. (1962). *Phys. Rev.*, 125, 2163.
- [63] Dicke, R.H. (1968). *Astrophys. J.* 154, 892.
- [64] Nariai, H. (1968). *Prog. Theor. Phys.* 40, 49.
- [65] Nariai, H. (1968). *Prog. Theor. Phys.* 42, 544.
- [66] Lorenz-Petzold, D. "Exact Brans-Dicke-Bianchi Solutions" (Lectures Notes in Physics, vol. 205, Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [67] Singh, R.T. and Deo, S. (1987). *Int. J. Theor. Phys.* 26, 901.

- [68] Dirac, P.A.M. (1937). *Nature*, 139, 323.
- [69] Bogoyavlensky, O.I. "Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics" (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [70] Gold, Z.A., Szydlowski, M. and Heller, M. (1977). *Gen. Rel. Grav.* 19, 707.
- [71] Davies, T.V. and James, E.M. "Non-linear differential equations" (Addison-Wesley, Massachusetts, 1966).
- [72] Birkoff, G. and Rotta, G. "Ordinary differential equations" (Ginn and Company, Boston, 1962).
- [73] Hirsch, M.W. and Smale, S. "Differential equations, dynamical systems and linear algebra". (Academic Press, New York, 1974).
- [74] Bendixon, A. (1901). *Acta Math.* 24, 9.

"ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS NA TEORIA DE
BRANS-DICKE, SOLUÇÕES COM ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO E
UNIVERSOS VISCOÇOS"

CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO

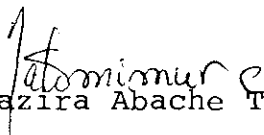
Tese de Doutorado apresentada no Centro Bra-
sileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Na-
cional de Desenvolvimento Científico e Tec-
nológico, fazendo parte da Banca Examinado-
ra os seguintes professores:



Mário Novelio - Presidente



Murari Mohan Som



Nazira Abache Tomimura



Isaias Costa



José Martins Salim

Rio de Janeiro, 26 de agosto de 1988