

RENATO PORTUGAL

MODELOS COSMOLÓGICOS EM REGIME DE MAGNETOHIDRODINAMICA

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro - 1988

AGRADECIMENTOS

Aos professores Jayme Tiomno e Ivano Damião Soares pela orientação durante meu doutoramento.

Ao Departamento de Física da UFF pela oportunidade de continuar meu doutoramento no CBPF através do meio PICD.

Ao Grupo de Física Teórica da UFF: profs. José Antônio, Nazira, Nivaldo, Tereza e Waldemar, pelo apoio.

Aos amigos do CBPF e da UFF que de forma direta ou indireta deram contribuições que me auxiliaram na realização dessa tese.

Ao CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA.	5
1.1 - Leis fenomenológicas da termodinâmica de fluidos simples.	5
1.2 - Termodinâmica relativística de plasmas.	9
1.3 - O Campo magnético cosmológico e a corrente de condutividade.	10
• CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES DE MAXWELL COM FONTES NOS MODELOS TIPO BIANCHI.	13
2.1 - Equações de Maxwell.	13
2.2 - Modelo para a corrente elétrica.	19
2.3 - Soluções com vetor de pointing nulo.	22
2.4 - Soluções com vetor de pointing não nulo.	30
2.5 - Soluções particulares.	37
2.6 - Conclusão.	39
CAPÍTULO 3 - MODELOS TIPO BIANCHI I, III E KANTOWSKI-SACHS.	40
3.1 - Bianchi III.	51
• 3.2 - Bianchi I.	61
3.3 - Kantowski-Sachs.	67
3.4 - Casos particulares.	86
3.5 - Conclusão.	99
CAPÍTULO 4 - MODELOS KANTOWSKI-SACHS COM LIMITE TIPO BERTOTTI-ROBINSON.	101
4.1 - Grandezas físicas.	102
4.2 - As soluções físicas.	103
4.3 - Soluções analíticas exatas.	108
CONCLUSÃO GERAL.	111
APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO DE REDUCE EM PC.	116
APÊNDICE B - PROGRAMAS EM REDUCE 3.2 PARA CÁLCULOS EM RELATIVIDADE GERAL.	127
APÊNDICE C - CÁLCULO COM FORMAS E O PROGRAMA EXCALC.	145
APÊNDICE D - RESULTADOS DE CÁLCULOS USANDO O REDUCE.	155
REFERÊNCIAS.	162

CONVENÇÕES

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ - índices de coordenadas - valores 0, 1, 2, 3

$A, B, C \dots$ - índices de tetradas - valores 0, 1, 2, 3

$[\alpha\beta\dots]$ - índices totalmente simétricos

$(\alpha\beta\dots)$ - índices totalmente antissimétricos

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_{\alpha} u_{\beta}$ onde u^{α} é o campo de velocidade dos observadores

$$\phi_{\alpha;\beta} = \phi_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \phi_{,\lambda} \quad - \text{derivada covariante}$$

$$\dot{\phi} = \phi_{,\alpha} u^{\alpha}$$

$$\dot{\phi}_{\alpha} = \phi_{\alpha;\beta} u^{\beta}$$

$$V_{\alpha;\beta;\lambda} - V_{\alpha;\lambda;\beta} = R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda} V_{\mu} \quad - \text{tensor de Riemann}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} \quad - \text{tensor de Ricci}$$

$$g = \det g_{\alpha\beta}$$

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad e \quad \epsilon_{ijk} = \epsilon_{0ijk}$$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad - \text{tensor de Levi-Civita}$$

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad - \text{dual de um tensor}$$

RESUMO

Duas propostas nortearam essa tese: Primeiro, propomo-nos a analisar configurações cosmológicas com distribuição de fluidos carregados e correntes elétricas. Para isso estudamos as equações de Maxwell com fonte tendo como fundo os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e analisamos modelos cosmológicos em regime de magnetohidrodinâmica. Em segundo lugar, tentamos inserir essa tese no contexto da computação algébrica, mostrando o uso da linguagem Reduce tanto em cosmologia como para cálculos algébricos gerais.

Obtivemos soluções para as equações de Maxwell para todos os modelos tipo Bianchi com uma corrente elétrica obedecendo a lei de Ohm. Na literatura essas equações só foram integradas na ausência de fontes. Analisamos através do método do potencial efetivo alguns modelos espacialmente homogêneos de modo a garantir que eles satisfaçam as condições físicas usuais, como a positividade da energia. Fizemos a análise termodinâmica dos modelos e o sinal da condutividade elétrica desempenhou um papel relevante nessa análise. Analisamos em particular uma classe de modelos Kantowski-Sachs que tem como limite os modelos tipo Bertotti-Robinson. Encontramos soluções exatas novas para Bianchi I, III e Kantowski-Sachs obedecendo uma equação de estado tipo $p=\lambda\rho$ e com condutividade elétrica positiva. Essas soluções satisfazem todos os requisitos físicos de um modelo cosmológico e servem também como solução interior para um fluido colapsando-se

em regime de magnetohidrodinâmica.

Fizemos programas na linguagem Reduce para cálculos dos tensores relevantes em Relatividade Geral e programas para montar as equações de Maxwell e Einstein, com o objetivo de construir algoritmos para se obter soluções de problemas em cosmologia através de um computador fornecendo uma quantidade mínima de informações. Exemplificamos o uso desses programas encontrando a solução de Friedmann plano com poeira, fornecendo apenas a base de tetradas. Todo o processo de cálculo dos tensores, montagem e resolução das equações é automático.

INTRODUÇÃO

Nosso interesse central nessa tese reside no estudo de modelos cosmológicos que admitem corrente elétrica como fonte nas equações de Maxwell. A motivação principal para esse enfoque está relacionado com a possível existência de um campo magnético cosmológico que permeia todo o universo com uma intensidade de 10^{-9} Gauss. Se esse campo existe hoje, ele também devia estar presente na era imediatamente anterior a recombinação. Uma vez que nessa era o conteúdo material do universo era hidrogênio ionizado, segue que a presença de um campo magnético provocaria uma corrente elétrica cosmológica.

Na literatura tem-se estudado modelos que admitem campo magnético^[1] para descrever o possível campo magnético cosmológico. No entanto, exceto por alguns autores^[2], não se tem introduzido termos de corrente elétrica nas equações de Einstein-Maxwell. Uma das propostas dessa tese está voltada para preencher essa lacuna. Os modelos de Friedmann-Robertson-Walker, que são os modelos que melhor descrevem o universo na maior parte de sua existência, não admitem a presença de um campo magnético. Uma vez que eles estão dentro da classe mais geral dos modelos espacialmente homogêneos, que podem admitir campos eletromagnéticos e corrente elétrica, segue que esses últimos são os candidatos mais naturais para substituir os modelos de Friedmann.

Os modelos cosmológicos que nos propomos estudar são espacialmente homogêneos com um conteúdo material dado por fluido perfeito mais campo eletromagnético. O fluido em média é eletricamente neutro, porém admite a presença de uma corrente de condutividade. Pretendemos assim, incorporar nos modelos as características necessárias para o estudo da proposta acima. Particularizamos a análise para os modelos Bianchi I, III e Kantowski-Sachs e, dentro das hipóteses que fizemos, esgotamos as possibilidades de soluções das equações de Einstein-Maxwell. Fizemos uma análise termodinâmica dos modelos estudados de forma a torná-los realistas com relação às leis básicas da física. Usamos os resultados da termodinâmica próxima ao equilíbrio e discutimos as possíveis modificações para um conteúdo material longe do equilíbrio termodinâmico.

Por outro lado, relacionado com o tema da tese citado acima, propomos-nos a analisar as equações de Maxwell com fonte nos modelos espacialmente homogêneos, pois esse pode ser o primeiro passo na análise dos possíveis conteúdos materiais de modelos cosmológicos que admitem campo eletromagnético e corrente elétrica. Analisamos todos os modelos de Bianchi de uma maneira unificada através do formalismo das formas diferenciais. Os modelos de Bianchi cobrem a classe de todos os modelos espacialmente homogêneos exceto o modelo Kantowski-Sachs. Obtivemos soluções analíticas exatas, dentro de certas restrições, para todos os tipos de Bianchi.

Grande parte dos cálculos algébricos dessa tese foi feita ou confirmada através do uso da linguagem algébrica REDUCE. Além disso os problemas aqui tratados geraram a necessidade de se fazer programas, por exemplo, para calcular os tensores de Riemann,

Ricci etc., que não estavam disponíveis na linguagem ou na literatura. Nesse contexto, essa tese visa a implementar a utilização de computação algébrica em cosmologia e que se torna relevante levando-se em conta que a linguagem Reduce (que era a única linguagem disponível no momento de realização dessa tese) não é específica para o uso em Relatividade Geral. Parte dos trabalhos relacionados com computação algébrica estão apresentados nos apêndices dessa tese como descrevemos no resumo do conteúdo da tese a seguir.

No capítulo 1 apresentamos como revisão um resumo dos principais resultados da termodinâmica relativística que estão relacionados com o tema desta tese, em particular, a relação entre o crescimento da entropia e o sinal da condutividade elétrica. Apresentamos também, alguns dados com relação ao campo magnético cósmico e discutimos sua relação com os modelos cosmológicos com corrente elétrica.

No capítulo 2 apresentamos soluções das equações de Maxwell com fonte tendo como fundo os modelos de Bianchi. A corrente elétrica obedece à lei de Ohm. Impondo-se restrições sobre a condutividade elétrica (σ), encontramos soluções para todos os modelos de Bianchi.

No capítulo 3 analisamos os modelos tipo Bianchi I, III e Kantowski-Sachs usando o mesmo elemento de linha da tese de mestrado^[3]. Restringimos-nos às soluções que obedecem a equação de estado $p=\lambda\rho$ com $-1/3\leq\lambda\leq 1$ e impusemos uma relação particular entre os coeficientes da métrica. Nessas condições, esgotamos a análise no sentido de garantir se um modelo é ou não solução das equações de Einstein-Maxwell analisadas satisfazendo as restrições físicas usuais.

No capítulo 4 extraímos as soluções encontradas no capítulo 3 que têm soluções tipo Bertotti-Robinson como limite e as analisamos em separado. Esse capítulo consiste basicamente na ref. [4] com alguns detalhes a mais.

No apêndice A mostramos como se implementa o REDUCE 3.2 em IBM-PC ou compatíveis. No apêndice B apresentamos programas em REDUCE 3.2 para cálculos em Relatividade Geral, por exemplo, programas para calcular tensores de Riemann, Ricci e Einstein e programas para montar as equações de Einstein e Maxwell. No apêndice C fizemos uma revisão de uma parte do programa EXCALC que é um pacote para cálculos com formas escrito em REDUCE. Mostramos como se calcula, através desse pacote, algumas grandezas geométricas relacionadas com uma dada métrica. No apêndice D exemplificamos como obtivemos alguns dos resultados algébricos dessa tese através do programa Reduce. Tentamos mostrar nesse apêndice o uso do Reduce tanto como uma linguagem de uso geral em cálculos algébricos como para aplicações em cosmologia.

Usamos nessa tese o sistema de unidades MKSA racionalizado^[5] e tomamos $\kappa=8\pi G/c^2=1$.

Nesse capítulo revisamos alguns resultados da termodinâmica relativística de fluidos simples e de plasmas. Em particular apresentamos a relação entre o crescimento da entropia e o sinal da condutividade elétrica. Fizemos uma revisão sobre o campo magnético cosmológico e sua relação com a corrente elétrica na fase imediatamente anterior à recombinação.

1.1 - LEIS FENOMENOLÓGICAS DA TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE FLUIDOS SIMPLES^[6]

Um fluido simples é caracterizado por um vetor densidade de fluxo de entropia s^α da forma:

$$s^\alpha = s^\alpha(T^{\mu\nu}, \mu^\gamma) \quad (1.1)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia e μ^γ é o fluxo de massa inerte^[6], isto é,

$$\mu^\gamma = \mu u^\gamma \quad (1.2)$$

onde μ é a densidade de massa inerte e u^γ é a quadri-velocidade do fluido.

A invariância de Lorentz da teoria termodinâmica implica^[6] que o tensor momentum-energia de um fluido simples em equilíbrio tem que ser da forma:

$$T_0^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - p h^{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

onde ρ é a densidade de energia ($\rho = \mu(1 + \epsilon)$ onde ϵ é a energia interna por partícula), p é a pressão termostática e $h^{\alpha\beta}$ é o tensor de projeção ($h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta$). Qualquer outro termo em $T^{\alpha\beta}$ será um termo de não equilíbrio, isto é, será um termo que produz variação de entropia. Sabemos, por outro lado que a forma mais geral para $T^{\alpha\beta}$ é

$$T^{\alpha\beta} = T_0^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

onde

$$\tau^{\alpha\beta} = q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha + \pi^{\alpha\beta} - \pi h^{\alpha\beta} \quad (1.5)$$

onde q^α é o fluxo de calor, $\pi^{\alpha\beta}$ é a pressão anisotrópica e π é a pressão viscosa. As leis fenomenológicas são leis que restringem os termos dissipativos q^α , $\pi^{\alpha\beta}$ e π de forma a garantir o crescimento da entropia, isto é, satisfazer a segunda lei da termodinâmica.

Uma das formas de se obter as leis fenomenológicas é através da expansão de s^α em termo de $\tau^{\alpha\beta}$ da forma:

$$s^\alpha = s_0^\alpha + \frac{\partial s^\alpha}{\partial T^{\mu\nu}} \tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial s^\alpha}{\partial T^{\mu\nu} \partial T^{\lambda\rho}} \tau^{\mu\nu} \tau^{\lambda\rho} + \dots \quad (1.6)$$

onde s_0^α é a densidade de fluxo de entropia do equilíbrio. Se $\tau^{\alpha\beta}$ for pequeno comparado com $T_0^{\alpha\beta}$ se diz que o fluido está em um estado próximo ao equilíbrio. A termodinâmica de primeira ordem se restringe a analisar os dois primeiros termos da expansão de s^α dado por (1.6) e a termodinâmica de segunda ordem ou causal [7,8] analisa os três primeiros termos de (1.6).

Vamos agora obter as leis fenomenológicas da termodinâmica de primeira ordem. É possível mostrar [6], como consequência da conservação de $T^{\mu\nu}$, que:

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial T^{\mu\nu}} = \frac{1}{T} h^\alpha_{[\mu} u_{\nu]} \quad (1.7)$$

onde T é a temperatura. Usando as eqs. (1.5)-(1.7) obtemos:

$$s^\alpha = s_0^\alpha + \frac{1}{T} \tau^{\alpha\beta} u_\beta \quad (1.8)$$

A segunda lei da termodinâmica impõe que $s^\alpha_{;\alpha} \geq 0$. Tomando a divergência da eq. (1.8), usando a lei de conservação de energia $u_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ e a lei de Gibbs:

$$Tds = d\varepsilon + pdv \quad (1.9)$$

onde $v=1/\mu$, obtemos

$$s^\alpha_{;\alpha} = -\frac{\pi\theta}{T} - \frac{q^\alpha(T_{,\alpha} - Tu_{\alpha}^{\cdot})}{T} + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} \quad (1.10)$$

Para garantir que $s^\alpha_{;\alpha} \geq 0^1$, podemos impor que

$$\pi = -\zeta\theta \quad (1.11)$$

$$q^\alpha = \kappa h^{\alpha\beta}(T_{,\beta} - Tu_{\beta}^{\cdot}) \quad (1.12)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = \eta\sigma^{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

onde ζ e η são os coeficientes de viscosidade volumar e cisalhamento respectivamente e κ é a condutividade térmica. A eq. (1.10) se reduz então a:

$$s^\alpha_{;\alpha} = \frac{\pi^2}{\zeta T} - \frac{q^\alpha q_\alpha}{\kappa T} + \frac{\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta}}{\eta T} \quad (1.14)$$

de forma que a segunda lei da termodinâmica está satisfeita. Pode-se mostrar^[6] que a imposição (1.11)-(1.13) corresponde a uma linearização em relação às grandezas viscosas da derivada do termo $u_\beta T^{-1}$ que aparece multiplicando $\tau^{\alpha\beta}$ na eq. (1.8). Essa derivação

¹ Estamos tomando derivada covariante no intuito da teoria poder ser usada para sistemas de coordenadas gerais no espaço de Minkovski e ser naturalmente generalizada para espaços curvos através do princípio de acoplamento mínimo.

surge no momento de se calcular $s^\alpha_{;\alpha}$. As relações (1.11)-(1.13) são chamadas de leis fenomenológicas de primeira ordem.

A teoria de primeira ordem apresenta alguns problemas: Como as leis fenomenológicas são equações parabólicas, elas conduzem a propagações com velocidade infinita para a viscosidade e fluxo de calor. Além disso essa teoria é instável e apresenta problemas em relação às condições iniciais de fluidos em rotação [9]. Esses problemas foram solucionados com a teoria de segunda ordem. Para exemplificar as principais características dessa teoria, vamos estender a lei (1.11) considerando apenas o efeito da viscosidade volumar para o crescimento da entropia [10].

Considerando $\pi^{\alpha\beta}$ e q^α nulos, a equação (1.6) se reduz a [6,8]:

$$s^\alpha = s^\alpha_0 - \frac{\tau \pi^2 u^\alpha}{2\zeta T} \quad (1.15)$$

onde τ é o tempo de relaxação associado à viscosidade volumar. Tomando a divergência da eq. (1.15) obtemos

$$s^\alpha_{;\alpha} = - \frac{\pi}{\zeta T} (\zeta \dot{\theta} + \tau \dot{\pi}) \quad (1.16)$$

Usamos novamente a lei de conservação da energia e a lei de Gibbs (1.9). Além disso, desprezamos termos de terceira ordem. Note que π , θ e \dot{T} são termos de primeira ordem pois eles se anulam no equilíbrio. Estamos supondo também que a derivada de ζ e τ são de primeira ordem. De (1.16) podemos ver que $s^\alpha_{;\alpha} \geq 0$ se

$$\pi = - \zeta \dot{\theta} - \tau \dot{\pi} \quad (1.17)$$

A equação (1.17) é a lei fenomenológica de segunda ordem para a pressão viscosa. Note a presença do termo $\tau \dot{\pi}$ que torna possível a causalidade da teoria dependendo do valor de τ .

1.2 - TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE PLASMAS^[11]

Na seção anterior analisamos as relações fenomenológicas que garantem que um fluido simples vai satisfazer a segunda lei da termodinâmica. Nessa seção vamos analisar as condições para que um plasma neutro satisfaça a primeira e segunda lei da termodinâmica. Um plasma é um gás onde a maior parte das moléculas está ionizada de forma que podemos considerá-lo como sendo a soma de duas componentes carregadas que são os ions e os elétrons livres^[11].

O tensor momentum-energia de um plasma é

$$T^{\alpha\beta} = T_{\text{mat}}^{\alpha\beta} + T_{\text{em}}^{\alpha\beta} \quad (1.18)$$

on $T_{\text{mat}}^{\alpha\beta}$ é dado pelas eqs. (1.3)-(1.5) e

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

onde $F^{\alpha\beta}$ é o tensor de Maxwell. A primeira lei da termodinâmica é a lei de conservação de energia $u^{\lambda} T^{\alpha\beta}_{;\lambda} = 0$, que pode ser expressa na forma^[11,12]:

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta + \pi_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} + q^{\alpha}_{;\alpha} + \dot{u}_{\alpha} q^{\alpha} + J_{\alpha} E^{\alpha} = 0 \quad (1.20)$$

onde

$$J^{\alpha} = F^{\alpha\beta}_{;\beta} \quad (1.21)$$

e

$$E^{\alpha} = F^{\alpha\beta} u_{\beta} \quad (1.22)$$

Note o aparecimento do termo $J_{\alpha} E^{\alpha}$ em (1.20) devido a presença do campo eletromagnético.

Para analisar o crescimento da entropia, vamos usar um método diferente do utilizado na seção anterior. Usando a lei de Gibbs (1.9) e a eq. (1.20) obtemos

$$\rho T \dot{s} = -\pi\theta - q^{\alpha}_{;\alpha} - q^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} + \pi_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} - J_{\alpha} E^{\alpha} \quad (1.23)$$

Note o aparecimento do termo $-J_{\alpha}E^{\alpha}$. Para satisfazer a segunda lei da termodinâmica, além das relações fenomenológicas (1.11), temos que impor que esse termo seja positivo. Se supusermos que a parte espacial da corrente (j^{α}) satisfaz a lei de Ohm

$$j^{\alpha} = \sigma E^{\alpha} \quad (1.24)$$

onde σ é a condutividade elétrica, então $-J_{\alpha}E^{\alpha} \geq 0$ se e somente se $\sigma \geq 0$. Assim, a termodinâmica de primeira ordem exige que a condutividade seja positiva para que a segunda lei da termodinâmica seja satisfeita. Observe que esse resultado depende da hipótese de proximidade do equilíbrio termodinâmico, isto é, que as grandezas viscosas sejam pequenas comparadas com as grandezas de equilíbrio. Para fluidos em estados longe do equilíbrio termodinâmico não podemos garantir que a condutividade seja positiva. De fato, existem exemplos na literatura [13-15] de semicondutores que apresentam condutividade elétrica negativa.

1.3 - O CAMPO MAGNÉTICO COSMOLÓGICO E A CORRENTE DE CONDUTIVIDADE [16]

Do ponto de vista astrofísico, o estudo do campo magnético tem uma relevância grande, pois seus efeitos influenciam em uma variedade de processos: influenciam na estabilidade e no equilíbrio de discos galácticos gasosos, são importantes na formação de estrelas e participam no confinamento, propagação e aceleração dos raios cósmicos. A intensidade desses campos magnéticos pode chegar a 10^{12} Gauss, por exemplo, nos pulsars.

O campo magnético foi observado em galáxias e aglomerado de galáxias com valores em torno de 10^{-5} Gauss e 10^{-7} Gauss

respectivamente. Esses campos geram efeitos observáveis como a radiação síncroton, efeito de polarização de ondas eletromagnéticas e o efeito de rotação de Faraday.

A nível cosmológico, Sofue et al^[17-19], usando o método de rotação de Faraday, mediram um campo magnético no espaço entre aglomerado de galáxias com uma intensidade da ordem de 10^{-9} Gauss. Essas medidas foram confirmadas por outros autores^[20-22] porém, ainda assim, dúvidas têm sido levantadas com relação a esses resultados, pois a direção do campo magnético cosmológico é muito próxima da direção do campo magnético da nossa galáxia, de forma que os resultados encontrados poderiam ter sido produzidos por efeitos locais.

Além das medidas físicas, existem várias razões teóricas para se supor a existência de um campo magnético cosmológico: i) Esse campo fornece uma explicação natural para a formação do campo magnético galático mesmo que o campo cosmológico seja de pequena intensidade, pois algumas teorias que explicam a formação dos campos galáticos, por exemplo a teoria do efeito dínamo, requer a existência de um campo magnético já existente que é amplificado pelo efeito dínamo. ii) Piddington^[23] argumenta que o campo cosmológico explicaria a geometria de algumas estruturas galáticas filamentosárias e a orientação preferencial das galáxias e fontes de rádio. iii) O campo magnético fóssil, que é usado como explicação para o campo de algumas estruturas astrofísicas, seria o remanescente do campo magnético cosmológico. Para que isso seja possível, o tempo de dissipação do campo magnético no interior das estruturas astrofísicas tem que ser compatível com a idade dessas estruturas.

A idéia de um campo permeando todo o universo foi proposto

inicialmente por Hoyle^[24] e, desde então, se tem estudado mecanismos para sua origem ou amplificação. Essa idéia estimulou a procura de soluções exatas das equações de Einstein-Maxwell. Uma vez que os universos de Friedmann não admitem a presença de campos eletromagnéticos, devido a isotropia, os modelos espacialmente homogêneos, tipo Bianchi e Kantowski-Sachs, são as alternativas mais imediatas para a análise de campos magnéticos em cosmologia. Na literatura existem várias soluções exatas nessa linha, por exemplo, veja refs. [25-34].

Na era imediatamente anterior à recombinação, o conteúdo material do universo era um plasma radiativo com cargas positivas (hidrogênio ionizado) e cargas negativas (elétrons)^[35]. Esse tipo de conteúdo favorece a amplificação do campo magnético cosmológico via efeitos hidrodinâmicos^[36-43]. Por outro lado, note que a presença de um campo magnético cósmico nessa era pode produzir o aparecimento de uma corrente de condutividade, dependendo do valor da condutividade elétrica, o que justifica o estudo de modelos cosmológicos com termos de corrente elétrica nas equações de Maxwell. Na literatura, existem várias soluções exatas com termo de corrente, por exemplo, veja refs [44-50]. Uma parte dessa tese se insere nesse contexto.

CAPITULO 2 - AS EQUAÇÕES DE MAXWELL COM FONTE NOS MODELOS DE BIANCHI

Nesse capítulo vamos analisar as equações de Maxwell com fonte tendo como fundo os modelos espacialmente homogêneos tipo Bianchi. Até agora essas equações só foram integradas na ausência de fontes. Vamos usar o formalismo das formas diferenciais para tratar os modelos de forma unificada. Dividiremos a análise das equações nas situações em que o vetor de Pointing do campo eletromagnético é nulo e não nulo.

2.1 - EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\begin{aligned}dF &= 0 \\d\tilde{F} &= \tilde{J}\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde F é a 2-forma eletromagnética, \tilde{F} seu dual e \tilde{J} é a 3-forma dual a 1-forma corrente elétrica.

Tomaremos como base local as formas ortonormais σ^i onde

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= dt = \omega^0 \\ \sigma^i &= R_i(t) \omega^i \quad (\text{sem soma})\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde ω^i são as formas translacionalmente invariantes sobre a superfície $t=\text{constante}$ dos modelos espacialmente homogêneos [51]

que foram classificados por Bianchi. As formas ω^i obedecem a uma equação do tipo

$$d\omega^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \omega^k \quad (2.3)$$

onde C^i_{jk} são as constantes de estruturas. Os valores não nulos de C^i_{jk} para os modelos de Bianchi I-IX para uma dada escolha^[52] dos σ^i estão mostrados na tabela I:

MODELOS DA CLASSE A ($C^i_{il} = 0 \forall i$)

$$\text{BIANCHI I} - C^i_{jk} = 0 \quad \forall i, j, k$$

$$\text{BIANCHI II} - C^1_{23} = 1$$

$$\text{BIANCHI VI}_0 - C^1_{23} = C^2_{13} = 1$$

$$\text{BIANCHI VII}_0 - C^1_{23} = C^2_{31} = 1$$

$$\text{BIANCHI VIII} - C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{21} = 1$$

$$\text{BIANCHI IX} - C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$$

MODELOS DA CLASSE B ($C^i_{il} \neq 0$ para algum i)

$$\text{BIANCHI III} = \text{BIANCHI VI}_{-1}$$

$$\text{BIANCHI IV} - C^1_{31} = C^1_{23} = C^2_{32} = 1$$

$$\text{BIANCHI V} - C^1_{31} = C^2_{32} = 1$$

$$\text{BIANCHI VI}_h - C^1_{23} = C^2_{13} = 1, \quad C^1_{31} = C^2_{32} = \sqrt{-h}$$

$$\text{BIANCHI VII}_h - C^1_{23} = C^2_{31} = 1, \quad C^1_{31} = C^2_{32} = \sqrt{h}$$

TABELA I - Constantes de estrutura dos modelos de Bianchi^[52]

Podemos agora projetar as formas diferenciais da teoria na base escolhida da seguinte maneira:

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta \quad (2.4)$$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta \quad (2.5)$$

$$J = J_\alpha \sigma^\alpha \quad (2.6)$$

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3!} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} J^\alpha \sigma^\beta \wedge \sigma^\mu \wedge \sigma^\nu \quad (2.7)$$

$$g = \eta_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \otimes \sigma^\beta \quad (2.8)$$

onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-+++)^1$. Os modelos de Bianchi que tem σ^i da forma (2.2) são chamados diagonais pois a métrica g assume a forma diagonal. De (2.4) e (2.6) segue que $F_{\alpha\beta}$ e J_α são tensores de Lorentz. Definiremos o campo elétrico e magnético com relação aos observadores ortogonais a superfície de homogeneidade da forma:

$$E_i = F_{i0} \quad (2.9)$$

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$$

com a convenção $\epsilon_{123} = \eta_{0123} = 1$. Observe que $\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ pois $\sqrt{-g} = 1$. Devido a homogeneidade espacial vamos impor que $E^i = E^i(t)$ e $B^i = B^i(t)$. Desenvolvendo as equações (2.4), (2.5) e (2.7) obtemos

$$F = E_i R_i^1 \omega^1 \wedge \omega^0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i R_j^j R_k^k \omega^j \wedge \omega^k \quad (2.10)$$

$$\mathbb{F} = -B_i R_i^1 \omega^1 \wedge \omega^0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} E^i R_j^j R_k^k \omega^j \wedge \omega^k \quad (2.11)$$

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} J^0 R_j^j R_k^k \omega^1 \wedge \omega^j \wedge \omega^k - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^i R_j^j R_k^k \omega^0 \wedge \omega^j \wedge \omega^k \quad (2.12)$$

Derivando as expressões (2.10) e (2.11) e usando (2.3) obtemos

¹ Nesse capítulo vamos mudar a convenção de $\eta_{\alpha\beta}$. Nos capítulos seguintes retomamos a convenção $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+---)$.

$$dF = \frac{1}{2} \left[E_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (B^i R_j R_k) \right] \omega^j \omega^k \omega^0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i R_j R_k C^j_{lm} \omega^l \omega^m \omega^k \quad (2.13)$$

$$dF^* = \frac{1}{2} \left[-B_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (E^i R_j R_k) \right] \omega^j \omega^k \omega^0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} E^i R_j R_k C^j_{lm} \omega^l \omega^m \omega^k \quad (2.14)$$

A equação $dF=0$ fornece:

$$\left[(E_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (B^i R_j R_k)) \omega^0 + \right.$$

$$\left. + B^i R_j R_k \epsilon_{ijk} C^j_{lm} \omega^k \right] \omega^l \omega^m = 0 \quad (2.15)$$

Como ω^0 e ω^k são formas independentes, segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (B^i R_j R_k) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B^i R_j R_k \epsilon_{ijk} C^j_{lm} = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Por sua vez, $dF^*=0$ implica que

$$\left[\left(-B_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (E^i R_j R_k) \right) \omega^0 + E^i R_j R_k \epsilon_{ijk} C^j_{lm} \omega^k \right] \omega^l \omega^m =$$

$$= \frac{1}{3!} \epsilon_{lmk} J^0 R_l R_m R_k \omega^l \omega^m \omega^k -$$

$$- \frac{1}{2} \epsilon_{lmk} J^1 R_l R_m R_k \omega^l \omega^m \omega^k \quad (2.18)$$

e da mesma forma que anteriormente, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} -B_i R_i C^i_{jk} + \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (E^i R_j R_k) = -\epsilon_{ijk} J^i R_j R_k \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^i R_j R_k \epsilon_{ijk} C^j_{lm} = -\epsilon_{lmk} J^0 R_l R_m R_k \end{array} \right. \quad (2.20)$$

As equações de Maxwell (2.16), (2.17), (2.19) e (2.20) podem ainda ser desenvolvidas. Multiplicando (2.17) por ϵ^{klm} obtemos

$$(\delta^k_k R_k - R_i - R_j) B^i R_j C^j_{ij} = 0 \quad (2.21)$$

Esse resultado pode ser escrito numa forma mais compacta:

$$B^i R_j R_k C^j_{ij} = 0 \quad (2.22)$$

assumindo que $j \neq k$ e $i \neq k$. Como $C^j_{ij} = -C^j_{ji}$ segue que $i \neq j \neq k$. Finalmente desenvolvendo (2.22) é fácil ver que:

$$B^i R_j R_k C^1_{i1} = 0 \quad (2.23)$$

Da mesma forma, (2.20) pode ser escrita como:

$$E^i R_j R_k C^j_{ij} = J^0 R_1 R_2 R_3 \quad (2.24)$$

e como antes (2.24) se reduz à:

$$E^i R_j R_k C^1_{i1} = J^0 R_1 R_2 R_3 \quad (2.25)$$

A equação (2.16) após ser multiplicada por ϵ^{klm} fica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[B^k (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) - \delta_1^k B^1 (R_1 R_2 + R_1 R_3) - \delta_2^k B^2 (R_1 R_2 + R_2 R_3) - \right. \\ \left. - \delta_3^k B^3 (R_1 R_3 + R_2 R_3) \right] + \frac{1}{2} \epsilon^{klm} E_i R_i C^1_{lm} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Analisando termo a termo, vemos que essa expressão pode ser escrita na forma mais compacta:

$$\frac{d}{dt} (B^k R_i R_j) + \frac{1}{2} \epsilon^{klm} E_p R_p C^p_{lm} = 0 \quad (k \neq j \neq i) \quad (2.27)$$

A equação (2.19) fica

$$\frac{d}{dt} (E^k R_i R_j) - \frac{1}{2} \epsilon^{klm} B_p R_p C^p_{lm} = -J^k R_i R_j \quad (k \neq j \neq i) \quad (2.28)$$

Assim, as equações de Maxwell são:

$$\left\{ \begin{array}{l} B^i R_j R_k C_{il}^1 = 0 \\ E^i R_j R_k C_{il}^1 = J^0 R_1 R_2 R_3 \\ \frac{d}{dt}(B^i R_j R_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} E_p R_p C_{lm}^p = 0 \\ \frac{d}{dt}(E^i R_j R_k) - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} B_p R_p C_{lm}^p = -J^i R_j R_k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.29) \\ (2.30) \\ (2.31) \\ (2.32) \end{array}$$

Essas equações foram obtidas primeiramente por Ftaclas e Cohen^[53] por analogia às equações obtidas por Hugston e Jacobs^[54] para campos de mesons vetoriais massivos. Ftaclas e Cohen fizeram algumas considerações sobre o caso $J^\alpha = \rho u^\alpha$ ($j^\alpha = 0$). Através da eq. (2.30) podemos ver que não existem modelos carregados da classe A ou modelos carregados com campo elétrico nulo. Além disso as únicas soluções carregadas com vetor de Pointing nulo ($\vec{E} // \vec{B}$) são puramente elétricas o que pode ser visto substituindo a expressão $\vec{E} = \alpha(t)\vec{B}$ na equação (2.30) e usando a equação (2.29). Se $\vec{B} = 0$ e $E_i \neq 0$ para algum i , as equações (2.29)-(2.32) podem ser satisfeitas no caso em que a carga cosmológica é diferente de zero.

A proibição de modelos carregados da classe A vem apenas das equações de Maxwell sem que a dinâmica, que é dada pelas equações de Einstein, fosse considerada. Isso significa que os modelos da classe A não admitem soluções carregadas nem quando o campo eletromagnético é apenas um campo teste. Os argumentos usados foram locais, de modo que nessas conclusões não entram considerações globais.

Ftaclas e Cohen não resolveram nenhuma dessas equações e esse problema foi primeiramente considerado por Lorentz^[52] que encontrou soluções para as equações de Maxwell sem carga

cosmológica e sem corrente elétrica. Daqui para frente consideraremos o problema de resolver essas equações com a quadri-corrente diferente de zero.

2.2 - MODELO PARA A CORRENTE ELÉTRICA

Na era imediatamente anterior ao desacoplamento da matéria e radiação, o conteúdo material do universo era hidrogênio ionizado e radiação eletromagnética [35] e, portanto, era um plasma radiativo. Se nessa fase existiu um campo eletromagnético "não nulo" cujo remanescente seria o campo magnético extragalático, uma corrente elétrica seria gerada. Se desprezarmos a parte radiativa do plasma, é a magnetohidrodinâmica [55] que estuda esse tipo de modelo.

A dinâmica desse fluido é descrita pelas seguintes equações:

$$d\mathbf{F}^* = 0, \quad \text{onde } T = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} dF = 0 \\ d\mathbf{F}^* = \mathbf{j} \end{cases} \quad (2.34)$$

onde $T_{\alpha\beta}$ é a soma do tensor momento-energia do fluido perfeito e do campo eletromagnético. As eqs (2.34) são as equações de Maxwell.

Vamos nos detalhar agora no estudo da corrente. Seja u^α o campo de velocidade dos ions pesados do fluido. Podemos decompor a corrente elétrica J^α nas suas partes espaciais e temporais da forma:

$$J^\alpha = \rho u^\alpha + j^\alpha \quad (2.35)$$

onde

$$\rho = -j^\alpha u_\alpha \quad (2.36)$$

é a carga elétrica vista por um observador comovente com o fluido
 • j^α é a parte espacial da corrente, isto é

$$j^\alpha u_\alpha = 0 \quad (2.37)$$

O termo ρu^α é chamado de corrente de convecção enquanto que j^α é chamado de corrente de condução ou de condutividade.

Para meios condutores, podemos supor que a corrente de condução é da forma

$$j^\alpha = j^\alpha(F_{\mu\nu}) \quad (2.38)$$

Estudaremos um fluido em que a lei de Ohm seja válida. Isso ocorre quando o período de variação do campo elétrico é grande comparado com o tempo médio de colisão das cargas livres (τ) com o fluido, de forma que os efeitos inerciais das cargas livres não precisam ser levados em conta. Na ausência de campos magnéticos, as cargas elétricas são aceleradas pelo campo elétrico e ao mesmo tempo são desaceleradas pelos sucessivos choques com as partículas do fluido, de modo que a força elétrica é compensada por uma força resistiva do meio. Nessa situação a corrente de condução depende linearmente do campo elétrico da forma

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.39)$$

onde σ é a condutividade elétrica que se reduz no modelo mais simples a ^[55]

$$\sigma = \frac{n_q q^2 \tau}{m} \quad (2.40)$$

onde q , m e n_q são a carga, massa e densidade das cargas livres respectivamente.

Na presença de campos magnéticos surge o efeito Hall, que é um termo devido a interação da corrente com o campo magnético. Essa interação pode ser vista como uma anisotropia da condutividade. Vejamos primeiramente a expressão não covariante. A corrente de condução é dada por:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \lambda \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.41)$$

Substituindo a expressão de \vec{j} no lado direito de (2.41), temos

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \lambda \sigma \vec{E} \times \vec{B} + \lambda^2 (\vec{j} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \lambda^2 B^2 \vec{j} \quad (2.42)$$

Usando novamente a expressão (2.41), temos

$$\vec{j} = \frac{\sigma}{1 + \lambda^2 B^2} \left[\vec{E} + \lambda \vec{E} \times \vec{B} + \lambda^2 (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right] \quad (2.43)$$

Essa expressão pode ser vista como uma decomposição de \vec{j} em três direções privilegiadas \vec{E} , \vec{B} e $\vec{E} \times \vec{B}$. O coeficiente $(\vec{E} \cdot \vec{B})$ do terceiro termo era esperado pois \vec{B} é um pseudovetor. O fator λ é dado por [55]

$$\lambda = \frac{q \tau}{m} \quad (2.44)$$

A expressão covariante de (2.43) com relação ao campo de observadores u^α é:

$$j^\alpha = \frac{\sigma}{1 + \lambda^2 B_\xi B^\xi} \left[g^{\alpha\beta} + \lambda \eta^{\alpha\beta\mu\nu} u_\mu B_\nu + \lambda^2 B^\alpha B^\beta \right] E_\beta \quad (2.45)$$

A expressão para a condutividade é então

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{1 + \lambda^2 B_\xi B^\xi} \left[g^{\alpha\beta} + \lambda \eta^{\alpha\beta\mu\nu} u_\mu B_\nu + \lambda^2 B^\alpha B^\beta \right] \quad (2.46)$$

Assim, na presença de campos magnéticos, a condutividade em geral é anisotrópica. Observe que quando o vetor de Poynting é nulo, isto é, \vec{E} paralelo a \vec{B} ou $\vec{B}=0$ (sem considerar o caso \vec{E} nulo), a

condutividade é isotrópica, pois se $E^{\alpha} = \alpha(t) B^{\alpha}$ a eq. (2.45) se reduz a:

$$j^{\alpha} = \sigma E^{\alpha} \quad (2.47)$$

Além da situação acima, podemos tomar a condutividade isotrópica como aproximação quando o inverso da frequência de Larmor, que é dada por $f_L^{-1} = (qB/m)^{-1}$, for grande comparada com o tempo médio de colisão das cargas livres. Isso pode ser visto da seguinte forma: o termo de acoplamento entre a corrente e o campo magnético pode ser desprezado se o raio de curvatura do círculo que as cargas livres percorreriam se só houvesse a interação magnética, for grande comparado com a distância média das partículas do fluido, isto é

$$d = v\tau \ll R = \frac{mv}{qB}$$

ou

$$t \ll \frac{m}{qB} = \frac{1}{f_L} \quad \rightarrow \quad f_L \tau \ll 1$$

Observe que na expressão (2.45) a ordem de grandeza do primeiro, segundo e terceiro termos são dadas respectivamente por 1, $f_L \tau$ e $f_L^2 \tau^2$. Portanto, em primeira aproximação vale a eq. (2.47).

Vamos analisar agora as configurações possíveis do campo eletromagnético dentro desse modelo de corrente apresentado. Vamos dividir a análise nos casos em que o vetor de Pointing é nulo e não nulo.

2.3 - SOLUÇÕES COM VETOR DE POINTING NULO

Quando o vetor de Pointing é nulo, isto é, $\vec{E} \perp \vec{B}$ ou $\vec{B} = 0$, a corrente assume a forma

$$J^\alpha = \rho u^\alpha + \sigma E^\alpha \quad (2.48)$$

Estudaremos o caso em que $u^\alpha = \delta_0^\alpha$, e portanto essas soluções só são válidas em modelos cosmológicos não inclinados.

Como $E^\alpha = F^\alpha_\beta u^\beta$ segue que $E^0 = 0$ e $E^i = F^i_0$ como já estávamos considerando. Assim $J^0 = \rho$ e $J^i = \sigma E^i$.

1) Soluções para os modelos da classe A

Os modelos da classe A são os modelos que satisfazem $C^1_{11} = 0$.

Nesse caso as equações de Maxwell (2.29)-(2.32) se reduzem à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(B^i R_j R_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} E_p R_p C^p_{lm} = 0 \quad (k \neq j \neq i) \end{array} \right. \quad (2.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(E^i R_j R_k) - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} B_p R_p C^p_{lm} = -\sigma E^i R_j R_k \quad (k \neq j \neq i) \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Sem perda de generalidade tomaremos i fixo e $E^j = E^k = B^j = B^k = 0$ para $j \neq k \neq i$. Isso garante que o vetor de Poynting é nulo. Verificando as constantes de estrutura dos modelos da classe A, podemos ver que p , l e m têm que assumir valores diferentes para que C^p_{lm} seja diferente de zero. Como nas equações acima $l \neq 1 \neq m$, segue que os termos $\epsilon^{ilm} E_p R_p C^p_{lm}$ só são diferentes de zero se $p=1$. Assim podemos escrever as eqs. (2.50) e (2.51) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(B^i R_j R_k) + \epsilon^i_{jk} E^i R^i C^i_{jk} = 0 \quad (k \neq j \neq i) \\ \frac{d}{dt}(E^i R_j R_k) - \epsilon^i_{jk} B_p R_p C^i_{jk} = -\sigma E^i R_j R_k \quad (k \neq j \neq i) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Vamos definir:

$$\frac{d}{d\eta_{(i)}} = \frac{R_j R_k}{R_i} \frac{d}{dt}$$

$$\tilde{E}_i = E_i R_j R_k$$

$$\tilde{B}_i = B_i R_j R_k$$

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\sigma R_j R_k}{R_i}$$

As equações (2.52) se reduzem à

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{B}^i}{d\eta_{(i)}} + \epsilon^i_{jk} \tilde{E}^i C^i_{jk} = 0 & (k \neq j \neq i) \\ \frac{d\tilde{E}^i}{d\eta_{(i)}} - \epsilon^i_{jk} \tilde{B}_p C^i_{jk} = -\tilde{\omega} E^i & (k \neq j \neq i) \end{cases} \quad (2.53)$$

Para resolver esse sistema de equações separaremos em dois casos:

CASO 1: $C^i_{jk} = 0$ para algum i

Se, para algum i , C^i_{jk} for nulo, as equações se reduzem à

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{B}^i}{d\eta_{(i)}} = 0 & (k \neq j \neq i) \\ \frac{d\tilde{B}^i}{d\eta_{(i)}} = -\tilde{\omega} E^i & (k \neq j \neq i) \end{cases} \quad (2.54)$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} B_i = \frac{b_i}{R_j R_k} \\ E_i = \frac{e_i}{R_j R_k} \exp \int_{\eta_{0(i)}}^{\eta_{(i)}} -\tilde{\omega}(t) dt \end{cases} \quad (2.55)$$

onde b_i e e_i são constantes e $i \neq j \neq k$. Se $\tilde{\omega} = 0$, as soluções de (2.55) recaem nas soluções encontradas por Lorentz^[52].

CASO 2: $C^i_{jk} \neq 0$ para algum i

Se para algum i C^i_{jk} for diferente de zero, pelas eqs. (2.53)

obtemos que

$$\tilde{B}^i = \frac{1}{\epsilon_{jk}^i C_{jk}^i} \left(\frac{d\tilde{E}^i}{d\eta_{(i)}} + \tilde{\sigma} \tilde{E}^i \right) \quad (2.56)$$

$$\frac{d^2 \tilde{E}^i}{d\eta_{(i)}^2} + \frac{d\tilde{\sigma}}{d\eta_{(i)}} \tilde{E}^i + \tilde{\sigma}^2 \tilde{E}^i = 0 \quad (2.57)$$

onde usamos que $(C_{jk}^i)^2 = 1$. No caso em que $\tilde{\sigma}$ é constante a eq. (2.57) se reduz à:

$$\frac{d^2 \tilde{E}^i}{d\eta_{(i)}^2} + \tilde{\sigma} \frac{d\tilde{E}^i}{d\eta_{(i)}} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{E}^i = 0 \quad (\tilde{\sigma} \text{ constante}) \quad (2.58)$$

Existem três tipos de soluções dependendo do valor da constante $k = \tilde{\sigma}^2 - 4$:

i) $k = 0$

$$E^i = \frac{e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\eta_{(i)}}}{R_j R_k} (a_1 + b_1 \eta_{(i)}) \quad (2.59)$$

Usado a equação (2.56), obtemos

$$B^i = \frac{\tilde{\sigma} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\eta_{(i)}}}{C_{jk}^i R_j R_k} \left(b_1 - \frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2} \eta_{(i)} \right) \quad (2.60)$$

ii) $k > 0$

$$E^i = \frac{e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\eta_{(i)}}}{R_j R_k} \left(a_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) + b_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) \right) \quad (2.61)$$

$$B^i = \frac{\tilde{\sigma} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\eta_{(i)}}}{C_{jk}^i R_j R_k} \left[\left(\frac{\sqrt{k}}{2} b_1 - \frac{\tilde{\sigma}}{2} a_1 \right) \cosh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) + \left(\frac{\sqrt{k}}{2} a_1 - \frac{\tilde{\sigma}}{2} b_1 \right) \sinh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) \right] \quad (2.62)$$

iii) $k < 0$

$$E^i = \frac{\tilde{\sigma}}{R_j R_k} e^{-\frac{\sigma}{2}\eta_{(i)}} \left(a_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) \right) \quad (2.63)$$

$$B^i = \frac{\tilde{\sigma}}{C_{jk}^i R_j R_k} e^{-\frac{\sigma}{2}\eta_{(i)}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{k}}{2} b_1 - \frac{\tilde{\sigma}}{2} a_1 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sqrt{k}}{2} a_1 - \frac{\tilde{\sigma}}{2} b_1 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\eta_{(i)}\right) \right\} \quad (2.64)$$

Pela tabela I podemos ver que as soluções para cada tipo de Bianchi da classe A são:

Bianchi I: Caso 1 para $i=1, 2$ e 3 .

Bianchi II: Caso 1 para $i=1$ e 2

Caso 2 para $i=3$

Bianchi VI_0 e VII_0 : Caso 1 para $i=3$

Caso 2 para $i=1$ e 2

Bianchi VIII e IX: Caso 2 para $i=1, 2$ e 3

Dentro do modelo que estamos considerando (vetor de Pointing nulo) as soluções para os modelos de Bianchi tipo I são totalmente gerais pois não há restrição alguma sobre as funções $\tilde{\sigma}$ e R_i . O mesmo ocorre com as soluções dos modelos do tipo II com $i=2$ ou $i=3$, e do tipo VI_0 e VII_0 com $i=3$. Além disso, podemos ver que para os modelos tipo I e IX todas as direções são equivalentes. Para os modelos tipo II, VII_0 e VIII existem apenas duas direções equivalentes e para o modelo tipo VI_0 não há direções equivalentes pois se as direções não diferem pela forma das soluções de E^i , diferem pelo sinal das soluções de B^i .

ii) Soluções para os modelos da classe B

Os modelos da classe B são definidos por

$$C_{11}^1 \neq 0 \quad \text{para algum } i \quad (\text{com soma em } 1)$$

Pela tabela I podemos ver que

$$C_{11}^1 = C_{21}^1 = 0 \quad \bullet \quad C_{31}^1 \neq 0$$

Nesse caso as equações de Maxwell (2.29)-(2.32) se reduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{l} B^3 = 0 \end{array} \right. \quad (2.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{C_{31}^1 E^3}{R_3} \end{array} \right. \quad (2.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(B^i R_j R_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} E_p R_p C_{ilm}^p = 0 \quad (k \neq j \neq i) \end{array} \right. \quad (2.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(E^i R_j R_k) - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} B_p R_p C_{ilm}^p = -\sigma E^i R_j R_k \quad (k \neq j \neq i) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

CASO 1: $E^3 \neq 0$

Nesse caso, para que o vetor de Pointing seja nulo, as componentes B^1 e B^2 do campo magnético tem que ser nulas, pois B^3 é nulo. Além disso, como $C_{1j}^3 = 0 \quad \forall i, j$, as eqs. (2.69) e (2.70) se reduzem a:

$$E_1 R_1 C_{23}^1 + E_2 R_2 C_{23}^2 = 0 \quad (2.69)$$

$$E_1 R_1 C_{31}^1 + E_2 R_2 C_{31}^2 = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{d}{dt}(E^i R_j R_k) = -\sigma E^i R_j R_k \quad (k \neq j \neq i) \quad (2.71)$$

As soluções das equações (2.71) são dadas por

$$E_i = \frac{e_i}{R_j R_k} \exp \int_{\eta_{o(i)}}^{\eta_{(i)}} -\tilde{\alpha}(t) dt \quad e_i \text{ constantes} \quad (2.72)$$

E portanto, pela equação (2.66), temos que

$$\rho = \frac{C_{31}^1 e_3}{R_1 R_2 R_3} \exp \int_{\eta_{o(i)}}^{\eta_{(i)}} -\tilde{\alpha}(t) dt \quad (2.73)$$

Pela tabela I vemos que para Bianchi IV, V, VI_h com h≠-1 e VII_h as equações (2.69) e (2.70) implicam que E₁=E₂=0. Para Bianchi VI₋₁ ∈ III, essas equações são identicamente satisfeitas. Essas soluções são gerais, pois nenhuma condição foi imposta a σ ou a R₁. Mais ainda, essas são as únicas soluções carregadas dentro do modelo de corrente que estamos considerando.

$$\text{CASO 2: } E^3 = 0$$

Nesse caso as equações de Maxwell se reduzem a:

$$B^3 = 0$$

$$\rho = 0$$

$$\frac{d}{dt}(B^1 R_2 R_3) + E^1 R_1 C^1_{23} + E^2 R_2 C^2_{23} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{d}{dt}(E^1 R_2 R_3) - B^1 R_1 C^1_{23} - B^2 R_2 C^2_{23} = -\sigma E^1 R_2 R_3 \quad (2.75)$$

$$\frac{d}{dt}(B^2 R_1 R_3) + E^1 R_1 C^1_{31} + E^2 R_2 C^2_{31} = 0 \quad (2.76)$$

$$\frac{d}{dt}(E^2 R_1 R_3) - B^1 R_1 C^1_{31} - B^2 R_2 C^2_{31} = -\sigma E^2 R_1 R_3 \quad (2.77)$$

Vamos mostrar agora que as equações acima não têm solução no caso geral se R₁=R₂ e se σR₃=constante. De fato, vamos definir

$$R_1 = R_2 = R$$

$$R_3 = S$$

$$\tilde{B}^1 = B^1 RS$$

$$\tilde{E}^1 = E^1 RS$$

$$\frac{d}{d\eta} = S \frac{d}{dt}$$

de forma que as equações (2.74)-(2.77) tomam a seguinte forma:

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{B}^1 + \tilde{E}^1 C^1_{23} + \tilde{E}^2 C^2_{23} = 0 \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{E}^1 - \tilde{B}^1 C^1_{23} - \tilde{B}^2 C^2_{23} = -\sigma S E^1 \quad (2.79)$$

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{B}^2 + \tilde{E}^1 C^1_{31} + \tilde{E}^2 C^2_{31} = 0 \quad (2.80)$$

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{E}^2 - \tilde{B}^1 C^1_{31} - \tilde{B}^2 C^2_{31} = -\sigma S \tilde{E}^2 \quad (2.81)$$

ou então

$$\frac{d}{d\eta} \vec{v} = M \vec{v} \quad (2.82)$$

onde

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \tilde{E}^1 \\ \tilde{E}^2 \\ \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} -\sigma S & 0 & C^1_{23} & C^2_{23} \\ 0 & -\sigma S & C^1_{31} & C^2_{31} \\ -C^1_{23} & -C^2_{23} & 0 & 0 \\ -C^1_{31} & -C^2_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que $\sigma S = \sigma_0 = \text{constante}$, as soluções desse sistema de equações diferenciais são dadas por:

$$\vec{v} = e^{\lambda \eta} \vec{v}_0$$

onde λ é um autovalor da matriz M e \vec{v}_0 é o autovetor correspondente. Os autovetores são obtidos resolvendo-se a equação $(M - \lambda I)\vec{v} = 0$, que devido a relação $B^\alpha = \alpha(t)E^\alpha$, se reduz à:

$$\begin{cases} (\alpha C_{32}^1 - \sigma S - \lambda) E^1 - \alpha C_{32}^1 E^2 = 0 \\ \alpha C_{13}^1 E^1 + (\alpha C_{13}^2 - \sigma S - \lambda) E^2 = 0 \\ -(C_{32}^1 + \lambda \alpha) E^1 + C_{23}^1 E^2 = 0 \\ -C_{13}^1 E^1 - (C_{13}^2 + \lambda \alpha) E^2 = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Não existe nenhum valor de λ que satisfaça simultaneamente as quatro equações acima, como pode ser verificado facilmente resolvendo as equações duas a duas. Segue então que, dentro das suposições que estamos considerando, não há nenhuma solução com $E^3=0$ para os modelos da classe B com vetor de Pointing nulo.

2.4 - SOLUÇÕES ADMITINDO VETOR DE POINTING NÃO NULO

a) Condutividade Isotrópica

Como foi discutido na seção 2.2, podemos ter situações nas quais a condutividade, em primeira aproximação, é isotrópica, mesmo quando o vetor de Pointing não é nulo. Assim, analogamente à seção 2.3, tomaremos $J^\alpha = \rho u^\alpha + \sigma E^\alpha$.

a.1) Soluções para os modelos da classe A

Para a classe A as equações de Maxwell (2.29)-(2.32) se reduzem às equações:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \frac{d}{dt} (B^i R_j R_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} E_p R_p C_{lm}^p = 0 & (k \neq j \neq i) \\ \frac{d}{dt} (E^i R_j R_k) - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} B_p R_p C_{lm}^p = -\sigma E^i R_j R_k & (k \neq j \neq i) \end{cases} \quad (2.84)$$

Temos agora seis equações, contrariamente ao caso (2.50)-(2.51), onde tínhamos apenas duas equações. Porém essas equações são desacopladas com relação aos diferentes índices, assim as soluções para cada i , serão análogas às soluções da seção 2.3. Da mesma forma que anteriormente podemos escrever as eqs. (2.84) na forma das eqs (2.53) com as mesmas convenções lá assumidas. As soluções de (2.84) no caso 1 são iguais às soluções da seção 2.3. No caso 2 aparece uma diferença, pois naquela seção impusemos uma única restrição sobre σ que foi:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma R_j R_k}{R_1} = \text{constante para um único } i$$

Agora temos que impor que

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma R_j R_k}{R_1} = \text{constante para } i=1,2,3$$

Isso implica que os R_i 's tem que ser proporcionais entre si. Com essa restrição valem também as soluções do caso 2 da seção 2.3 1).

a. ii) Soluções para os modelos da classe B

As equações nesse caso são iguais às eqs. (2.65)-(2.68). Para $i=3$, a equação (2.67) é identicamente satisfeita, pois nos modelos da classe B, $C_{12}^1 = 0 \forall i$. A equação (2.68) nos dá que:

$$\frac{d}{dt} (E^3 R_1 R_2) = -\sigma E^3 R_1 R_2$$

Portanto

$$E^3 = \frac{e_3}{R_1 R_2} \int_{t_0}^t -\alpha(x) dx \quad (2.85)$$

Pela equação (2.66), temos que:

$$\rho = \frac{C_{31}^1 \sigma_3}{R_1 R_2 R_3} \int_{t_0}^t -\sigma(x) dx \quad (2.86)$$

Para $i=1,2$ as equações (2.87) e (2.88) são iguais às eqs. (2.74)-(2.77), e como antes vamos supor que $R_1=R_2$ e $\sigma R_3 = \sigma_0 = \text{constante}$ de forma que podemos escrever essas equações da forma (2.82). As soluções são então dadas por:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}^1 \\ \tilde{E}^2 \\ \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \end{pmatrix} = e^{\lambda \eta} \vec{v}_0 \quad (2.87)$$

onde \vec{v}_0 é um autovetor correspondente ao autovalor λ dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + 2\sigma_0 \lambda^3 + \left[(C_{13}^2)^2 + (C_{23}^1)^2 - 2C_{23}^2 C_{13}^1 + \sigma_0^2 \right] \lambda^2 + \\ &+ \left[(C_{13}^2)^2 + (C_{23}^1)^2 - 2C_{23}^2 C_{13}^1 + \sigma_0^2 \right] \lambda + \left[C_{23}^2 C_{13}^1 - C_{13}^2 C_{23}^1 \right]^2 = 0 \quad (2.88) \end{aligned}$$

Vamos exibir explicitamente as soluções (2.87) para Bianchi VI_{-1} . Pela tabela I vemos que para Bianchi VI_{-1} a eq. (2.88) nos dá que $\lambda=0$ ou $\lambda=-\sigma_0$. Para $\lambda=0$ os autovetores são:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 - c_1 \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Nesse caso a solução de (2.87) se reduz à:



$$\tilde{E}^1 = \tilde{E}^2 = c_1$$

$$\tilde{B}^1 = c_2$$

$$\tilde{B}^2 = c_2 - c_1 \sigma_0$$

(2.90)

Para $\lambda = -\sigma_0$ os autovetores são:

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_2 \sigma_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(2.91)

Nesse caso a solução de (2.87) se reduz à:

$$\tilde{E}^1 = (c_1 - c_2 \sigma_0) \exp(-\sigma_0 \eta)$$

$$\tilde{E}^2 = c_1 \exp(-\sigma_0 \eta)$$

(2.92)

$$\tilde{B}^1 = \tilde{B}^2 = c_2 \exp(-\sigma_0 \eta)$$

b) Condutividade Anisotrópica

Consideraremos agora o caso em que a condutividade não é isotrópica, de forma que a expressão da quadricorrente é:

$$J^\alpha = \rho u^\alpha + \sigma^{\alpha\beta} E_\beta \quad (2.93)$$

onde $\sigma^{\alpha\beta}$ é dado por (2.46). Suporemos novamente que $u^\alpha = \delta_0^\alpha$ e $E^\alpha = F_{\alpha\beta} u^\beta$.

Para os modelos da classe A, as equações de Maxwell (2.29)-(2.32) se reduzem à:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \frac{d}{dt} (B^i R_j R_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} E_p R_p C_{lm}^p = 0 & (k \neq j \neq i) \\ \frac{d}{dt} (E^i R_j R_k) - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} B_p R_p C_{lm}^p = -\sigma^{il} E_1 R_j R_k & (k \neq j \neq i) \end{cases} \quad (2.94)$$

Para resolver essas equações, faremos as seguintes suposições:

Vamos fixar um valor para l , que pode ser 1, 2 ou 3 e tomaremos

$E^l = B^l = 0$ e $R_j = R_k$. Vamos definir:

$$S = R_l$$

$$R = R_j = R_k$$

$$\frac{d}{d\eta} = S \frac{d}{dt}$$

$$\tilde{E}^l = E^l K S$$

$$\tilde{B}^l = B^l R S \quad \text{onde } l=j \text{ ou } l=k$$

As eqs. (2.94) ficam então da seguinte forma:

$$\begin{cases} S \frac{d}{dt} (B^l R S) + \frac{1}{2} e^{lrs} E^l R_p S C_{rs}^p = 0 \\ S \frac{d}{dt} (E^l R S) + \frac{1}{2} e^{lrs} B^l R_p S C_{rs}^p = -\sigma^{lp} S E_p R S \end{cases} \quad (2.95)$$

Assim temos quatro equações com l assumindo o valor j ou k .

Observe que $C_{rs}^a \neq 0$ se $a \neq r \neq s$, assim:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{B}^l}{d\eta} + \frac{1}{2} e^{lrs} \tilde{E}^j C_{rs}^j + \frac{1}{2} e^{lrs} \tilde{E}^k C_{rs}^k = 0 \\ \frac{d\tilde{E}^l}{dt} - \frac{1}{2} e^{lrs} \tilde{B}^j C_{rs}^j - \frac{1}{2} e^{lrs} \tilde{B}^k C_{rs}^k = -\sigma^{lj} S \tilde{E}^j - \sigma^{lk} S \tilde{E}^k \end{cases} \quad (2.96)$$

Podemos colocar as eqs. (2.96) da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} \tilde{E}^j \\ \tilde{E}^k \\ \tilde{B}^j \\ \tilde{B}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^{lj} S & -\sigma^{lk} S & e_{ik}^j C_{ik}^j & 0 \\ -\sigma^{kj} S & -\sigma^{kk} S & 0 & e_{ij}^k C_{ij}^k \\ e_{ik}^j C_{ik}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij}^k C_{ij}^k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}^j \\ \tilde{E}^k \\ \tilde{B}^j \\ \tilde{B}^k \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

Vamos supor que a sub-matriz

$$S_0 = \begin{pmatrix} -\sigma_{ij}^{jj} & -\sigma_{ij}^{jk} \\ -\sigma_{ij}^{kj} & -\sigma_{ij}^{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{ij}^{jj} & -\sigma_{ij}^{jk} \\ -\sigma_{ij}^{kj} & -\sigma_{ij}^{kk} \end{pmatrix} = \text{constante} \quad (2.98)$$

Nesse caso o sistema (2.97) se reduz a um sistema de equações lineares a coeficientes constantes, dado por:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} \tilde{E}^j \\ \tilde{E}^k \\ \tilde{B}^j \\ \tilde{B}^k \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} \tilde{E}^j \\ \tilde{E}^k \\ \tilde{B}^j \\ \tilde{B}^k \end{pmatrix}$$

onde

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\sigma_{ij}^{jj} & -\sigma_{ij}^{jk} & c_{ik}^j & 0 \\ -\sigma_{ij}^{kj} & -\sigma_{ij}^{kk} & 0 & c_{ji}^k \\ c_{ki}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ij}^k & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

e j, k assumem valores diferentes de i e tal que $\epsilon_{jik} = 1$. Os autovalores de S_1 são dados pela seguinte equação:

$$\lambda^4 + \lambda^3(\sigma_{ij}^{jj} - \sigma_{ij}^{kk}) + \lambda^2[(c_{ik}^j)^2 + (c_{ji}^k)^2 + \sigma_{ij}^{jj}\sigma_{ij}^{kk} - \sigma_{ij}^{jk}\sigma_{ij}^{kj}] + \lambda[(c_{ik}^j)^2\sigma_{ij}^{kk} + (c_{ji}^k)^2\sigma_{ij}^{jj}] + [c_{ik}^j c_{ji}^k]^2 = 0 \quad (2.100)$$

Para Bianchi I, as soluções de (2.100) são $\lambda=0$ e

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\sigma_{ij}^{jj} - \sigma_{ij}^{kk} \pm \sqrt{(\sigma_{ij}^{jj} - \sigma_{ij}^{kk})^2 + 4\sigma_{ij}^{jk}\sigma_{ij}^{kj}}}{2} \quad (2.101)$$

Se o determinante de S_0 for diferente de zero, o autovetor correspondente a $\lambda=0$ gera a solução trivial $\tilde{E}^j = \tilde{E}^k = 0$. Se o determinante de S_0 é nulo o autovetor de S_1 correspondente a $\lambda=0$ é

dado por:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ -\sigma^{jJ} \\ \frac{\sigma^{jK}}{\sigma^{jK}} c_1 \\ 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

e portanto a solução nesse caso é:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^1 &= c_1 \\ \tilde{E}^k &= \frac{-\sigma^{jJ}}{\sigma^{jK}} c_1 \\ \tilde{B}^j &= \tilde{B}^k = c_2 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Para $\lambda_{\pm} \neq 0$, os autovetores de S_1 são:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ -\sigma^{jJ} - \lambda_{\pm} \\ \frac{\sigma^{jK} + \lambda_{\pm}}{\sigma^{jK} + \lambda_{\pm}} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

e portanto as soluções são:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^j &= c_1 \exp(-\lambda_{\pm} \eta) \\ \tilde{E}^k &= \frac{-\sigma^{jJ} - \lambda_{\pm}}{\sigma^{jK} + \lambda_{\pm}} c_1 \exp(-\lambda_{\pm} \eta) \\ \tilde{B}^j &= \tilde{B}^k = 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Para Bianchi II com $i=1$, a equação (2.100) se reduz a mesma equação do caso Bianchi I anterior e portanto as soluções são

dadas por (2.103) se $\lambda=0$ e por (2.105) se $\lambda=\lambda_{\pm}$ (eq. (2.101)), com a substituição $j=2$ e $k=3$ ou $j=3$ e $k=2$.

2.5 - SOLUÇÕES PARTICULARES

Na seção 2.3 resolvemos a eq. (2.57) no caso em que $\tilde{\sigma}$ era constante. Apresentaremos nessa seção algumas soluções particulares para essa equação com $\tilde{\sigma}$ dependendo de η das seguintes formas [56]:

i) $\tilde{\sigma}(\eta) = ae^{\eta} + 2$, $a = \text{constante}$

A solução é dada por:

$$E^1 = \frac{1}{R_j R_k} e^{-\eta_{(1)}} \exp \int_{\eta_{0(i)}}^{\eta_{(i)}} \frac{d_1 e^{-ae^{\eta}}}{c_1 + d_1 F_a(\eta)} d\eta \times$$

$$\times \left[b_1 + a_1 \int_{\eta_{0(i)}}^{\eta_{(i)}} \left(\exp - \int_{y_0}^y ae^x + \frac{2d_1 e^{-ae^x}}{c_1 + d_1 F_a(x)} dx \right) dy \right] \quad (2.106)$$

onde a_1, b_1, c_1, d_1 são constantes arbitrárias e

$$F_a(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-ae^x} dx = \int_{e^{\eta_0}}^{e^{\eta}} \frac{e^{-ay}}{y} dy \quad (2.107)$$

ii) Se $\tilde{\sigma}$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2 \tilde{\sigma}}{d\eta^2} + 2\tilde{\sigma} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\eta} + 2\tilde{\sigma} = 0 \quad (2.108)$$

então temos a seguinte solução para E^1 :

$$E^1 = \frac{1}{R_j R_k} \exp \int_{\eta_{o(i)}}^{\eta_{(i)}} -\beta(x) dx \left[b_1 + a_1 x \right. \\ \left. \times \int_{\eta_{o(i)}}^{\eta_{(i)}} \left[\exp \int_{y_0}^y (2\beta(x) - \tilde{\alpha}(x)) dx \right] dy \right] \quad (2.109)$$

onde

$$\beta(x) = \sqrt{1 + \frac{d\tilde{\sigma}}{dx}} \operatorname{tg} \left[\int \sqrt{1 + \frac{d\tilde{\sigma}}{dx}} dx + C \right] \text{ se } \frac{d\tilde{\sigma}}{dx} + 1 > 0 \quad (2.110)$$

iii) Seja ϕ uma função arbitrária. Se $\tilde{\sigma}$ satisfizer a equação:

$$\tilde{\sigma}^2 - 2 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\eta} = \phi^2 - 2 \frac{d\phi}{d\eta} + 4 \quad (2.111)$$

então temos soluções da seguinte forma (2.109), com $\beta(\eta)$ dado por:

$$\beta(\eta) = \frac{1}{2}(\phi(\eta) + \tilde{\sigma}(\eta)) \quad (2.112)$$

Por exemplo, se $\phi = \phi_0 = \text{constante}$ temos de (2.111) que

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{4 + \phi_0^2} \operatorname{cotg} \sqrt{1 + \frac{\phi_0^2}{4}} (\eta_0 - \eta) \quad (2.113)$$

e de (2.112) obtemos

$$\beta = \phi_0 + \sqrt{4 + \phi_0^2} \operatorname{cotg} \sqrt{1 + \frac{\phi_0^2}{4}} (\eta_0 - \eta). \quad (2.114)$$

Se $\phi = 2 \operatorname{tg}(\eta + \eta_0)$ então de (2.111) temos que

$$\tilde{\sigma} = \frac{2}{\eta_0 - \eta} \quad (2.115)$$

e de (2.112) obtemos

$$\beta = \operatorname{tg}(\eta + \eta_0) + \frac{1}{\eta_0 - \eta} \quad (2.116)$$

2.8 - CONCLUSÃO

Quando o vetor de Pointing é nulo, encontramos soluções para todos os modelos de Bianchi. Para os modelos da classe B encontramos soluções gerais no caso em que o campo magnético é nulo. Com relação a classe A, encontramos soluções gerais para Bianchi I, Bianchi II caso o campo eletromagnético tenha a direção de ω^2 ou ω^3 e Bianchi VI_0 e VII_0 caso \vec{E} tenha a direção ω^3 . Note que como os modelos tipo II, VI_0 e VII_0 não são isotrópicos, as soluções para cada direção podem ser diferentes. Para os outros modelos de Bianchi da classe A impusemos restrições sobre a condutividade elétrica, a saber $\sigma R_i / R_j R_k = \text{constante}$.

Quando o vetor de Pointing é não nulo, podemos ainda considerar a condutividade elétrica isotrópica quando o inverso da frequência de Larmor é grande comparado com o tempo médio de colisão das cargas livres. Nesse caso temos soluções análogas ao caso do vetor de Pointing nulo. Quando a condutividade é anisotrópica apresentamos soluções para Bianchi I e II com restrições sobre a condutividade (veja eq. (2.98)).

CAPÍTULO 3 - MODELOS TIPO BIANCHI I, III E KANTOWSKI-SACHS

Na tese de mestrado^[3] estudamos algumas soluções das equações de Einstein-Maxwell com a geometria dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(dx + 4m^2(\theta)d\phi)^2 - B^2(t)k^2(\theta)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

onde

$$\frac{4mm'}{k^2 \text{sen} \theta} = \lambda_1 \quad (3.2)$$

e

$$\frac{1}{k^2} \left[\frac{k''}{k} + \frac{k'}{k} \cotg \theta - \frac{k'^2}{k^2} - 1 \right] = \lambda_2 \quad (3.3)$$

sendo λ_1 e λ_2 constantes e $k' \equiv (dk/d\theta)$. Esse elemento de linha pode descrever os modelos tipo Bianchi I ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), Bianchi II ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$), Bianchi III ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$), Bianchi VIII ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 > 1$), Bianchi IX ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = -1$) e Kantowski-Sachs ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$). Como conteúdo material consideramos um fluido perfeito mais campo eletromagnético e devido a homogeneidade espacial dos modelos considerados fizemos a suposição de que os campos elétricos e magnéticos só dependiam do tempo. A quadrivelocidade dos observadores comoventes com o fluido foi tomada igual à $\partial/\partial t$. O elemento novo na tese de mestrado foi a introdução de uma corrente elétrica nas equações de Maxwell que obedecia a lei de Ohm da forma:

$$J^\alpha = \sigma E^\alpha \quad (3.4)$$

Mostramos que as equações de Einstein-Maxwell reduzem para duas o número de componentes independentes do tensor eletromagnético que chamamos de $E=F_{10}$ e $H=F_{23}$ onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. As equações de Einstein-Maxwell¹ ficaram então da forma:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{5\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} \right] + \Lambda \quad (3.5)$$

$$p = \frac{1}{2} \left[-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{3\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} + \frac{\lambda_2}{B^2} \right] - \Lambda \quad (3.6)$$

$$\sigma = -\frac{\dot{E}}{E} - \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{2\lambda_1 AH}{B^2 E} \quad (3.7)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{4\lambda_1^2 A^2}{B^4} + \frac{\lambda_2}{B^2} = -E^2 - H^2 \quad (3.8)$$

$$\frac{\ddot{H}}{H} + \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{2\lambda_1 AE}{B^2 H} = 0 \quad (3.9)$$

Na tese de mestrado usamos vários métodos para encontrar soluções para essas equações. Na seção 5.2 estudamos um caso particular que foi Kantowski-Sachs ($\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$) isotrópico ($A=B$) com a equação de estado $p=\lambda\rho$. No presente capítulo vamos estender a análise dessas soluções admitindo a possibilidade de soluções não isotrópicas da forma

$$A = B^r \quad \text{onde } r \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

e aplicar também a mesma análise para os modelos Bianchi I e Bianchi III. Os modelos Kantowski-Sachs, Bianchi I e III têm $\lambda_1=0$ de forma que as soluções das equações de Maxwell (3.7) e (3.9) são dadas por:

¹ No apêndice D mostramos como obtemos essas equações com o uso de computação algébrica, mais especificamente, com o programa REDUCE 3.3.

$$\sigma = - \frac{d}{dt} \ln(EB^2) \quad (3.11)$$

$$H = H_0 B^{-2} \quad (3.12)$$

Usando a relação (3.10) as equações (3.5), (3.6) e (3.8) ficam:

$$E^2 = (1-r) \frac{\ddot{B}}{B} + (1-r^2) \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda_2}{B^2} - \frac{H_0^2}{B^4} \quad (3.13)$$

$$\rho = \frac{r-1}{2} \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{r^2+4r+1}{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda_2}{2B^2} + \Lambda \quad (3.14)$$

$$p = - \frac{r+3}{2} \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{r^2+1}{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\lambda_2}{2B^2} - \Lambda \quad (3.15)$$

Vamos procurar soluções para essas equações que obedecem uma equação de estado da forma²:

$$p = \lambda \rho \quad \text{onde} \quad -\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1 \quad (3.16)$$

Substituindo as expressões de ρ e p dadas por (3.14) e (3.15) na equação acima obtemos a seguinte equação diferencial para $B(t)$:

$$\frac{(1+\lambda)r+3-\lambda}{2} \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{p_1 \dot{B}^2}{2B^2} - \frac{\lambda_2(1+\lambda)}{2B^2} + \Lambda(1+\lambda) = 0 \quad (3.17)$$

onde

$$p_1 = (1+\lambda)r^2 + 4\lambda r + 1 + \lambda \quad (3.18)$$

Para resolver a equação (3.17) vamos fazer uma substituição de variável de maneira a eliminar o termo em \dot{B}^2 . Se $d\eta = qdt$ a equação (3.17) fica na forma:

$$\frac{(1+\lambda)r+3-\lambda}{2} \frac{q^2}{B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{(1+\lambda)r+3-\lambda}{2} \frac{q}{B} \frac{dq}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} +$$

² Apesar do intervalo padrão para λ ser (0,1), a extensão para valores negativos será considerada já que alguns autores apresentaram situações nas quais ocorrem pressão negativa (veja ref. [57]).

$$+ \frac{P_1 q^2}{2B^2} \left(\frac{dB}{d\eta} \right)^2 - \frac{\lambda_2 (1+\lambda)}{2B^2} + \Lambda(1+\lambda) \quad (3.19)$$

Tomaremos q de tal forma que:

$$\frac{(1+\lambda)r+3-\lambda}{2} \frac{q}{B} \frac{dq}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} + \frac{P_1 q^2}{2B^2} \left(\frac{dB}{d\eta} \right)^2 = 0$$

A equação acima é satisfeita se

$$q = B^{-\alpha} \quad (3.20)$$

onde

$$\alpha = \frac{(1+\lambda)r^2 + 4\lambda r + 1 + \lambda}{(1+\lambda)r + 3 - \lambda} \quad (3.21)$$

A transformação de variável acima só é válida quando o denominador da eq. (3.21) não se anula. Se $(1+\lambda)r+3-\lambda=0$ não há necessidade de substituição de variáveis e veremos esse caso na seção 3.4. Observe que como $B \geq 0$, segue que t é uma função crescente de η e podemos tomar $\eta=0$ quando $t=0$.

Com q da forma (3.20) a eq. (3.19) se reduz à:

$$B'' + \frac{(2\lambda B^2 + \lambda_2)}{(r-r_0)} B^{2\alpha-1} = 0 \quad (3.22)$$

onde

$$r_0 = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad (3.23)$$

e ' denota derivada em relação a η . A integral primeira da eq. (3.22) é:

$$B'^2 + V(B) = C \quad (3.24)$$

onde C é uma constante de integração e

$$V(B) = \left[\frac{-\lambda_2}{\alpha(r-r_0)} + \frac{2\lambda B^2}{(\alpha+1)(r-r_0)} \right] B^{2\alpha} \quad (3.25)$$

A equação (3.24) pode ser posta na forma:

$$\varepsilon \int_{B_0}^B \frac{dB}{\sqrt{C - V(B)}} = \eta - \eta_0 \quad (3.26)$$

onde η_0 é uma constante e $\varepsilon = \pm 1$. Quando $\varepsilon = +1$ o modelo parte do raio inicial B_0 no instante $\eta = \eta_0$ e se expande podendo ou não entrar numa fase de contração. Quando $\varepsilon = -1$ o modelo parte de B_0 e se contrai podendo ou não passar a se expandir. Uma vez que $V(B)$ é uma função suficientemente complexa, não será possível obter uma solução geral para a integral do lado esquerdo de (3.26). O procedimento que adotaremos será analisar (3.24) como uma equação dinâmica de um sistema unidimensional com um potencial efetivo dado por (3.25). Assim, através dos possíveis gráficos de $V(B)$, podemos analisar qualitativamente a dinâmica das soluções uma vez fixado o valor da "energia total" C . No entanto, durante toda a evolução do modelo as grandezas ρ e E^2 tem que ser positivas, pois ρ negativo viola as condições de energia e E^2 negativo fornece um campo elétrico complexo. O sinal de σ por sua vez pode ser negativo em situações onde o conteúdo material está longe do equilíbrio termodinâmico.

Para analisar o sinal de ρ , E^2 e σ vamos expressar essas grandezas como funções da variável B . Das eqs. (3.13), (3.14) e usando que $d\eta = B^{-\alpha} dt$ obtemos:

$$\rho = \frac{r-1}{2} B^{-2\alpha-1} B'^2 + \left[\frac{r^2 + (4-\alpha)r + 1 + \alpha}{2} \right] B^{-2\alpha-2} B'^2 - \frac{\lambda_2}{2B^2} + \Lambda \quad (3.27)$$

$$E^2 = (1-r) B^{-2\alpha-1} B'^2 + \left[-r^2 + \alpha r + 1 - \alpha \right] B^{-2\alpha-2} B'^2 - \frac{\lambda_2}{B^2} - \frac{H_0}{B^4} \quad (3.28)$$

Usando (3.22) e (3.24) obtemos:

$$\rho = \frac{2\lambda}{(1+\lambda)(r-r_0)} \left(\frac{2(1-r)}{\alpha+1} + \frac{\lambda_2 r}{\alpha \lambda B^2} + \frac{C(r+1)(2r+1)}{\lambda B^{2\alpha+2}} \right) \quad (3.29)$$

$$E^2 = \frac{2\lambda}{r-r_0} \left(\frac{(r-1)(r+2)}{\alpha+1} - \frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{\alpha \lambda B^2} + \frac{C(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{(1+\lambda)\lambda B^{2\alpha+2}} \right) - \frac{H_0^2}{B^4} \quad (3.30)$$

onde

$$r_1 = -\frac{2\lambda}{\lambda+1} \quad (3.31)$$

Das eqs. (3.11) e (3.30) obtemos:

$$\sigma = \frac{2\lambda}{E^2 B^{\alpha+1} (r-r_0)} \left(\frac{2(1-r)(r+2)}{\alpha+1} + \frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{\alpha \lambda B^2} + \frac{C(\alpha-1)(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{(1+\lambda)\lambda B^{2\alpha+2}} \right) \frac{dB}{d\eta} \quad (3.32)$$

Para delimitar as regiões do gráfico $V(B)$ onde ρ , E^2 e σ são positivos será útil determinar os pontos onde essas grandezas se anulam. Para isso vamos igualar as expressões (3.29), (3.30) e (3.32) a zero e invertê-las de forma a obter C como função de B que correspondem as curvas onde ρ , E^2 e σ são nulos:

$$C_{\rho=0}(B) = \left(\frac{-\lambda_2 r}{\alpha(2r+1)(r+1)} + \frac{2(r-1)\lambda B^2}{(\alpha+1)(2r+1)(r+1)} \right) B^{2\alpha} \quad (3.33)$$

$$C_{E^2=0}(B) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \left(\frac{(r-r_0)H_0^2 B^{-2}}{2(1-r)(2r+1)} + \frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{\alpha(1-r)(2r+1)} + \frac{(r+2)\lambda B^2}{(\alpha+1)(2r+1)} \right) B^{2\alpha} \quad (3.34)$$

$$C_{\sigma=0}(B) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \left(\frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{\alpha(1-\alpha)(2r+1)(1-r)} + \frac{2(r+2)\lambda B^2}{(1-\alpha^2)(2r+1)} \right) B^{2\alpha} \quad (3.35)$$

Existem alguns casos particulares que devem ser tratados em separado, que são $\alpha=\pm 1$, $\alpha=0$, $r=\pm 1$, $r=-1/2$ e $\lambda=1$ pois anulam o denominador de alguma das equações acima. Esses casos serão

considerados na seção 3.4.

Ainda para análise do sinal de ρ , E^2 e σ , serão úteis as seguintes equações: Subtraindo (3.33) de (3.25) obtemos

$$V(B) - C_{\rho=0}(B) = \left[\frac{-\lambda_2}{(2r+1)(r+1)} + \frac{2\lambda B^2}{(2r+1)(r+1)} \right] B^{2\alpha} \quad (3.36)$$

Observe que as curvas $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ se interceptam no ponto

$$B_0^2 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} \quad (3.37)$$

caso λ_2 e λ tenham o mesmo sinal. Subtraindo (3.34) de (3.25) obtemos:

$$V(B) - C_{E^2=0} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \left[\frac{(r-r_0)H_0^2 B^{-2}}{2(r-1)(2r+1)} - \frac{\lambda_2(r-r_2)}{(1-r)(2r+1)} - \frac{\lambda B^2}{(2r+1)} \right] B^{2\alpha} \quad (3.38)$$

onde

$$r_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \quad (3.39)$$

E finalmente subtraindo (3.35) de (3.25) obtemos

$$V(B) - C_{\sigma=0}(B) = \left[\frac{-\lambda_2(3-\lambda)(r-r_3)(2r+1 + \sqrt{\frac{(3\lambda-1)(5-3\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)}})}{2(1-\omega)(r-r_0)(2r+1)(1-r)(1-\lambda)} + \right. \\ \left. - \frac{2((3-\lambda)r+2(2-\lambda))\lambda B^2}{(1-\omega)(r-r_0)(2r+1)(1-\lambda)} \right] B^{2\alpha} \quad (3.40)$$

onde

$$r_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(3\lambda-1)(5-3\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)}} \quad (3.41)$$

Note que r_3 só está definido no intervalo $1/3 \leq \lambda \leq 1$. Para $\lambda < 1/3$ o produto

$$(r-r_3)(2r+1 + \sqrt{\frac{(3\lambda-1)(5-3\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)}})$$

é real e positivo.

Além das limitações decorrentes do sinal das grandezas físicas envolvidas, existem as seguintes limitações com relação as condições iniciais:

i) As soluções devem começar da singularidade $B=0$ ou começar com raio infinito e terminar ou na singularidade $B=0$ ou se expandir para sempre.

ii) As soluções devem partir de uma solução cosmológica estática e evoluir para a singularidade $B=0$ ou se expandir para sempre. O processo inverso também é aceitável.

iii) Dadas certas condições iniciais que não são nem a singularidade $B=0$ nem uma solução cosmológica estática, a solução parte desse ponto inicial dado e evolui para a singularidade $B=0$ ou expande para sempre.

As possibilidades i) e ii) servem tanto para descrever uma solução cosmológica como para descrever evolução estelar. A possibilidade iii) serve apenas para descrever evolução estelar. Ela tem uma relevância menor no contexto de soluções exatas e não a discutiremos em detalhes.

Os parâmetros cinemáticos θ , $\sigma^{\alpha\beta}$, a^α e $\omega^{\alpha\beta}$ para a métrica (3.1) em relação aos observadores comoventes com o fluido perfeito são [58,3]:

i) Escalar de expansão:

$$\theta = v^\alpha{}_{;\alpha} = -\gamma^0{}_{AB} \eta^{BC} = \frac{(2+r)B'}{B^{1+\alpha}} \quad (3.42)$$

Observe que se $r > -2$ o sinal de θ é o mesmo de B' .

ii) Tensor de cisalhamento (na base de tetradas):

$$\sigma^{11} = -2\sigma^{22} = -2\sigma^{33} = \frac{2(1-r)B'}{3B^{1+\alpha}} \quad (3.43)$$

Para $r=1$, que representa o caso isotrópico, o tensor de

cisalhamento é nulo.

iii) Aceleração:

$$a_B = -\gamma_{B0}^0 = 0$$

iv) Tensor de rotação:

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} (-\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 - a_A \delta_B^0 + a_B \delta_A^0) = 0.$$

• Para traçar o gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$ os seguintes parâmetros são relevantes: r , Λ , α além de r_0 , r_1 , r_2 e r_3 . Discutiremos algumas propriedades gerais desses parâmetros que serão úteis adiante.

Na figura 3.1 traçamos o gráfico dos parâmetros r_0 , r_1 , r_2 e r_3 .

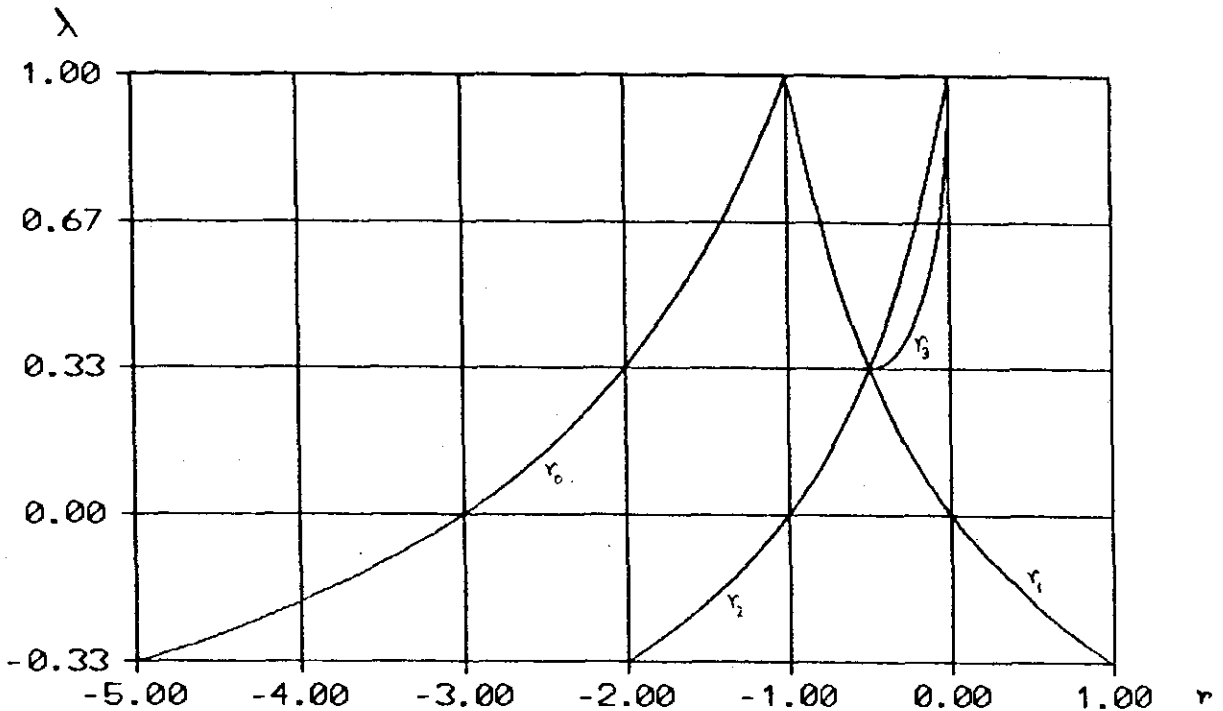


FIGURA 3.1 - Gráfico de r_0 , r_1 , r_2 e r_3

Observe que nos restringimos ao intervalo $-1/3 \leq \lambda \leq 1$ para r_0 , r_1 e r_2 e ao intervalo $1/3 \leq \lambda \leq 1$ para r_3 . A partir dos gráficos acima

podemos ver as regiões do plano λr onde r é maior ou menor que r_0 , r_1 , r_2 e r_3 , que será útil na análise do sinal dos coeficientes de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$.

Vamos mostrar agora que o sinal de α e $(r-r_0)$ estão relacionados. De (3.21) podemos ver que o gráfico de $\alpha(r)$, com λ fixo, é da forma:

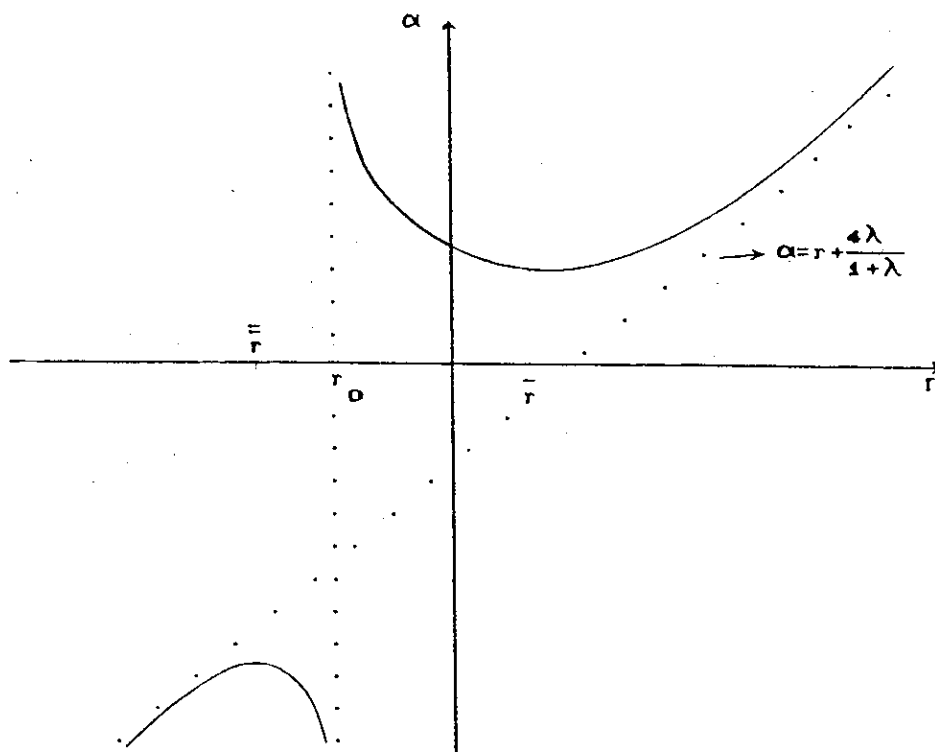


FIGURA 3.2 - Gráfico de $\alpha(r)$

onde

$$\bar{r} = \frac{\lambda - 3 + \sqrt{2(\lambda - 1)(3\lambda - 5)}}{\lambda + 1} \quad (3.44)$$

$$\underline{r} = \frac{\lambda - 3 - \sqrt{2(\lambda - 1)(3\lambda - 5)}}{\lambda + 1}$$

e

$$\alpha(\bar{r}) = \frac{6\lambda - 6 + 2\sqrt{2(\lambda - 1)(3\lambda - 5)}}{\lambda + 1} \quad (3.45)$$

$$\alpha(\underline{r}) = \frac{6\lambda - 6 - 2\sqrt{2(\lambda - 1)(3\lambda - 5)}}{\lambda + 1}$$

Da eq. (3.45) concluímos que $\alpha(\bar{r}) \geq 0$ e $\alpha(\bar{r}) \leq 0$ para $-1/3 \leq \lambda \leq 1$, então pela fig. 3.2 podemos ver que $\alpha(r)(r-r_0) \geq 0$. Outra maneira de chegar a esse último resultado é mostrar que $p_1 \geq 0$ para $-1/3 \leq \lambda \leq 1$ (veja eq. (3.18)), porém o método que adotamos nos dá informações sobre α que serão úteis adiante.

Pelas eqs. (3.25) e (3.33) vemos que a forma das funções $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ é

$$f(B) = (c_1 + c_2 B^2) B^{2\alpha} \quad (3.46)$$

Com relação a α existem 3 tipos de comportamento para a função $f(B)$ dependendo se $\alpha < -1$, $-1 < \alpha < 0$ ou $\alpha > 0$. Assim, vamos dividir a análise em três casos:

CASO 1: $\alpha < -1$

Existem 4 formas para o comportamento de $f(B)$ dependendo do sinal de c_1 e c_2 que são:

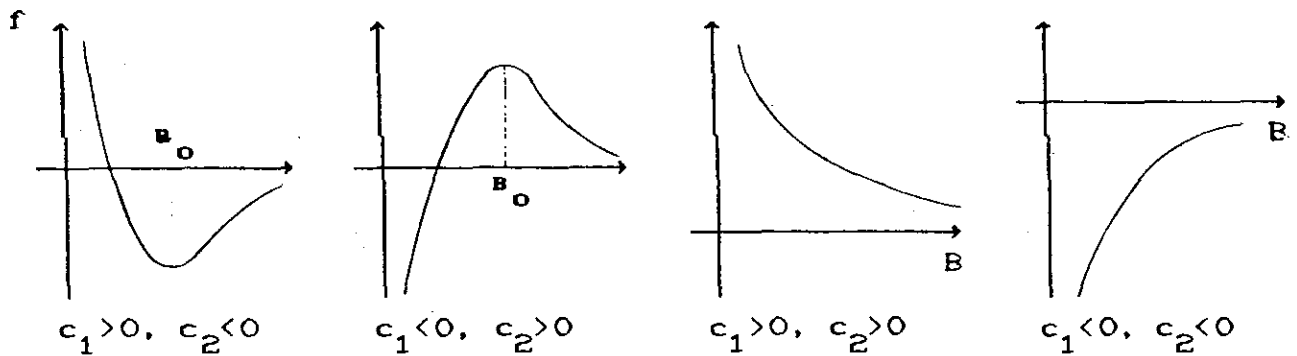


FIGURA 3.3 - Comportamento de $f(B)$ para $\alpha < -1$

O valor de B_0 é

$$B_0 = \sqrt{\frac{-\alpha c_1}{(\alpha+1)c_2}} \quad (3.47)$$

CASO 2: $-1 < \alpha < 0$

Para esse caso, os comportamentos possíveis de $f(B)$ são:

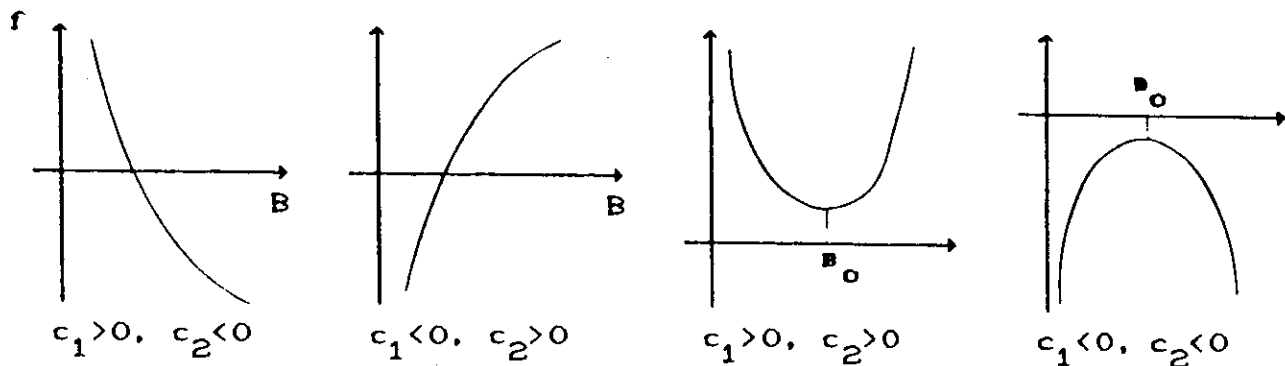


FIGURA 3.4 - Comportamento de $f(B)$ para $-1 < \alpha < 0$

CASO 3: $\alpha > 0$

Os comportamentos possíveis para $f(B)$ são:

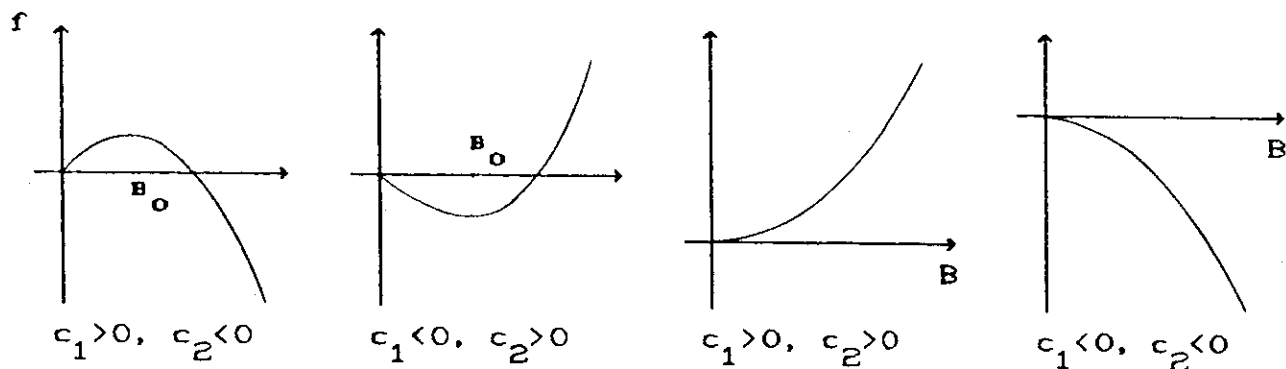


FIGURA 3.5 - Comportamento de $f(B)$ para $\alpha > 0$

3.1 - BIANCHI III ($\lambda_2 > 0$)

CASO 1: $\alpha < -1$

a) $\Lambda > 0$

Nesse caso vamos descrever em detalhes a maneira como obteremos o comportamento qualitativo das curvas $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$. Nos casos seguintes, o comportamento das curvas pode ser obtido de maneira análoga. Quando $\alpha < -1$ temos que $r < r_0$ pois já vimos que $\alpha(r - r_0) > 0$. É fácil ver que nesse caso $(\alpha + 1)(r - r_0) > 0$. De (3.25)

podemos ver que $V(B)$ cai no caso $(c_1 < 0, c_2 > 0)$ (veja fig. 3.3). Da eq. (3.33) vemos que $C_{\rho=0}(B)$ também cai no caso $(c_1 < 0, c_2 > 0)$, pois $r < -1$ (Note que $r_0 \leq -1$). Da eq. (3.36) sabemos que: i) $V(B)$ e $C_{\rho=0}$ se interceptam no ponto $B_0 = \sqrt{\lambda_2 / (2\Lambda)}$. ii) Para $B < B_0$ temos que $C_{\rho=0}(B) > V(B)$ e para $B > B_0$ temos que $C_{\rho=0}(B) < V(B)$, assim o comportamento do gráfico de $V(B)$ (linha contínua) e $C_{\rho=0}(B)$ (linha tracejada) é:

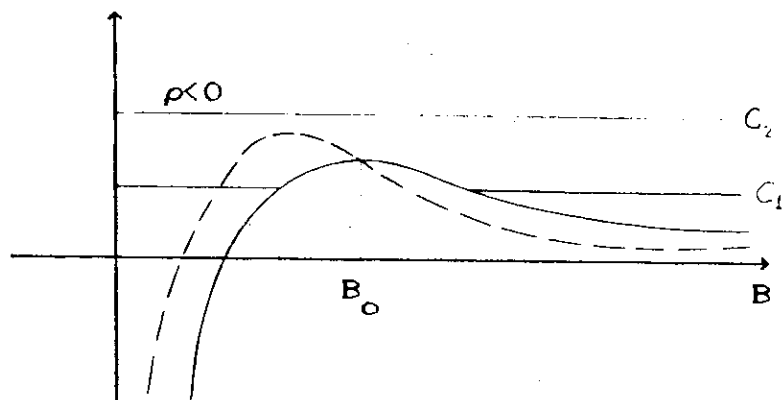


FIGURA 3.6 - Gráfico de $V(B)$ (linha contínua) e de $C_{\rho=0}(B)$ (linha tracejada)

Uma vez que a curva $C_{\rho=0}$ representa os pontos onde $\rho=0$ segue que para os pontos acima dessa curva, ρ tem um determinado sinal e para os pontos abaixo, ρ tem o sinal oposto. Pela eq. (3.29) podemos ver, por exemplo tomando o limite quando B tende a zero, que $\rho < 0$ acima da curva $C_{\rho=0}$. Observe pela fig. 3.6 que não há nenhuma solução do tipo i) ou ii) discutidos na pag. 47, pois para qualquer valor de C (na fig. 3.6 exibimos dois valores para C), sempre haverá uma fase onde ρ é negativo.

b) $\Lambda < 0$

Para $\Lambda < 0$, $V(B)$ e $C_{\rho=0}$ são do tipo $(c_1 < 0, c_2 < 0)$. De (3.36) vemos que $V(B) < C_{\rho=0}(B) \forall B$. Assim:

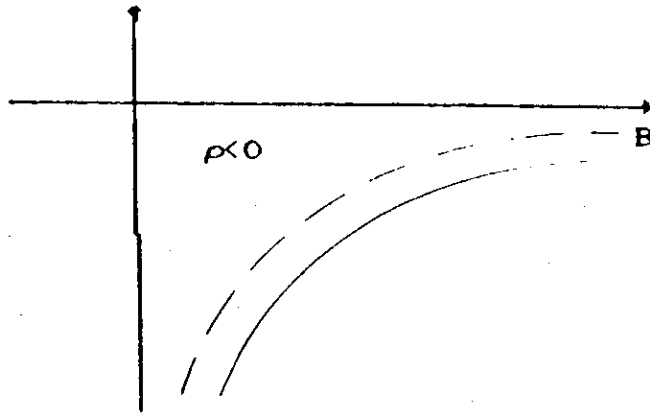


FIGURA 3.7 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Observe que nesse caso também não há nenhuma solução física.

c) $\Lambda=0$

Para $\Lambda=0$ vemos diretamente de (3.25), (3.33) e (3.36) (sem usar a fig. 3.3) que o comportamento de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ é igual ao caso b) acima de forma que esse caso também não admite soluções físicas.

CASO 2: $-1 < \alpha < 0$

a) $\Lambda > 0$

Seguindo o procedimento adotado no CASO 1, podemos ver que o comportamento de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ é como mostrado na figura abaixo (cf. fig. 3.4):

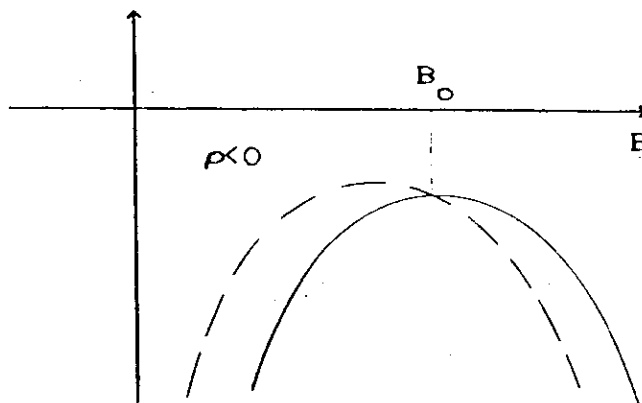


FIGURA 3.8 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Pela fig. 3.8 vemos que não há soluções físicas.

b) $\Lambda < 0$

Nesse caso obtemos os seguintes gráficos:

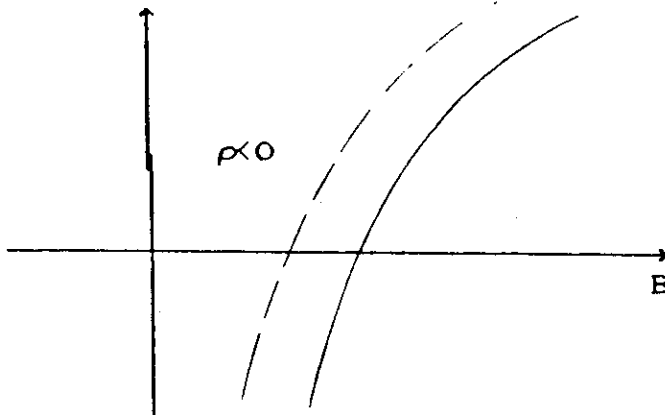


FIGURA 3.9 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Novamente não há soluções físicas.

c) $\Lambda = 0$

Esse caso é igual ao item c) do caso 1.

CASO 3: $\alpha > 0$

Veremos primeiramente o caso $\Lambda < 0$.

a) $\Lambda < 0$

O comportamento de $V(B)$ (eq. (3.25)) independe de r , de fato, c_1 e c_2 são negativos para qualquer r . O comportamento de $C_{\rho=0}(B)$ (eq. (3.33)), por sua vez, depende de r conforme mostram os gráficos abaixo (cf. fig. 3.5):

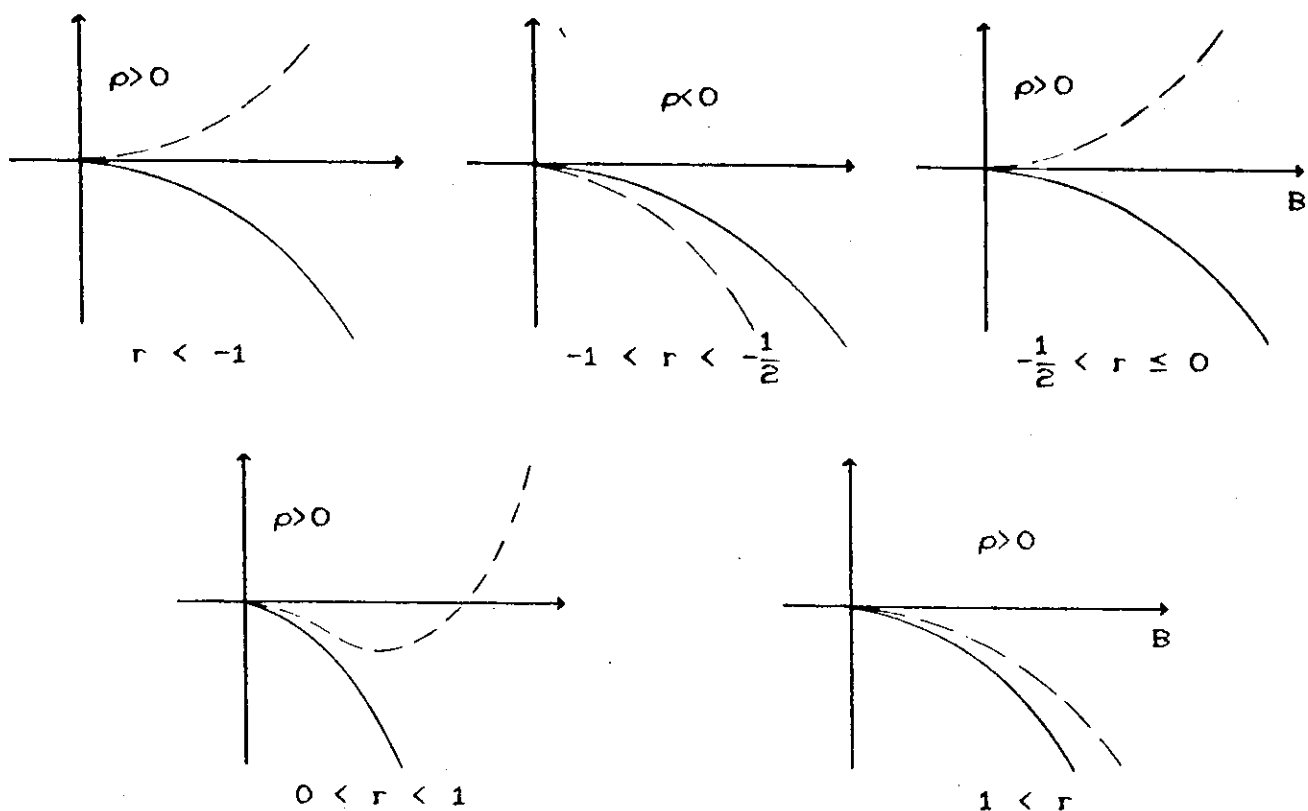


FIGURA 3.10 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Podemos ver pelos gráficos que para nenhum valor de r é possível ter soluções físicas.

b) $\Lambda > 0$

Esse caso é mais trabalhoso pois é necessário analisar o sinal de E^2 para mostrar que não há soluções. Seguindo o mesmo procedimento do item a) acima podemos traçar o gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$, como mostrado na figura abaixo:

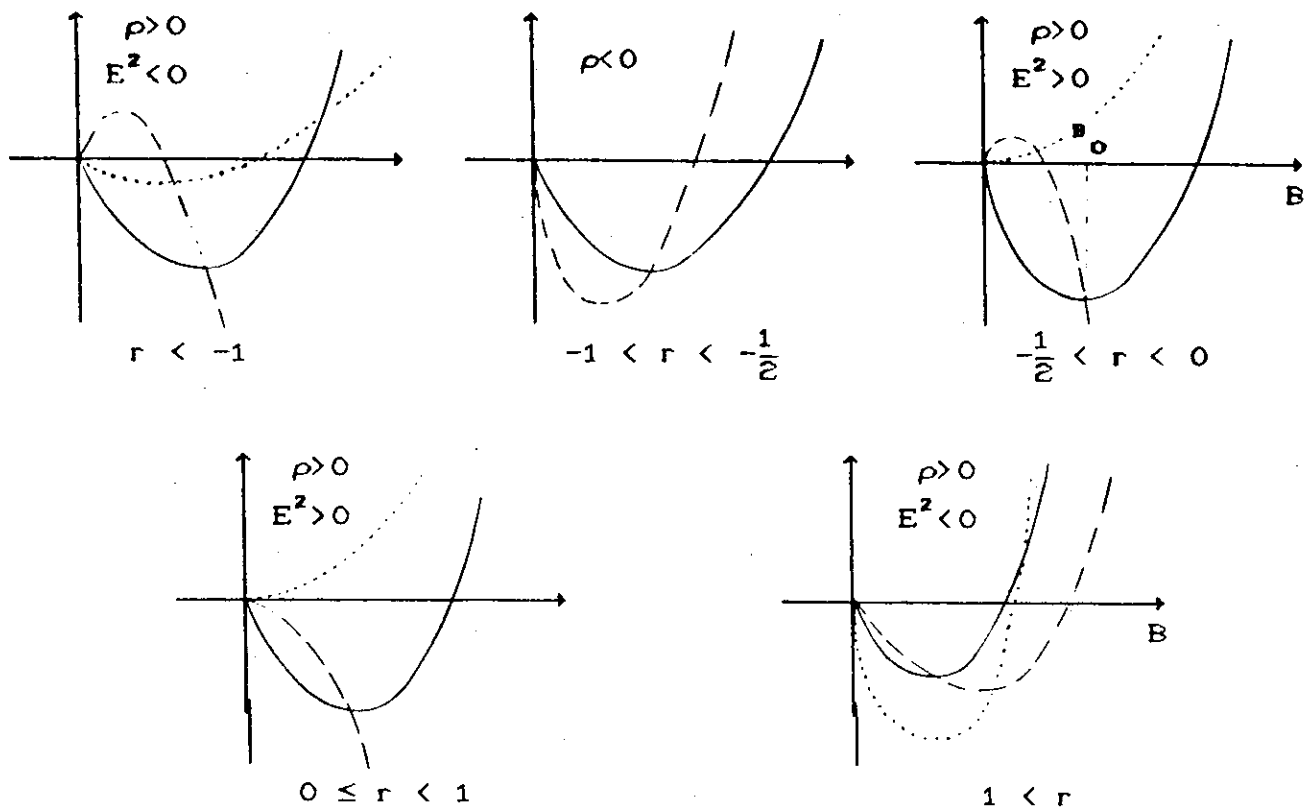


FIGURA 3.11 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Pela análise do sinal de ρ , somente para r no intervalo $(-1, -1/2)$ é que podemos garantir que não há soluções físicas. Para os outros intervalos traçamos a curva $C_{E^2=0}(B)$ (linha pontilhada) usando a equação (3.34) e (3.38). Estamos supondo inicialmente que $H_0=0$. Uma vez que o termo H_0^2/B^4 entra com sinal negativo em (3.30), a presença do campo magnético diminui a região de soluções permitidas. Assim, consideraremos o caso $H_0 \neq 0$ somente para os casos que restarem da análise com $H_0=0$. Para determinar o sinal de E^2 em cada região delimitada pela curva $C_{E^2=0}(B)$ usamos a equação (3.30). Observe que dependendo se r é maior ou menor que r_1 ou r_2 , mais de um tipo de comportamento para $C_{E^2=0}(B)$ é possível para um mesmo intervalo de r . Pela análise dos gráficos da fig. 3.11 vemos que não há nenhuma solução física para $\Lambda > 0$, pois ou ρ ou E^2

sempre se tornam negativos para algum valor de B.

c) $\Lambda=0$

Seguindo o mesmo procedimento dos itens anteriores, obtemos os seguintes gráficos:

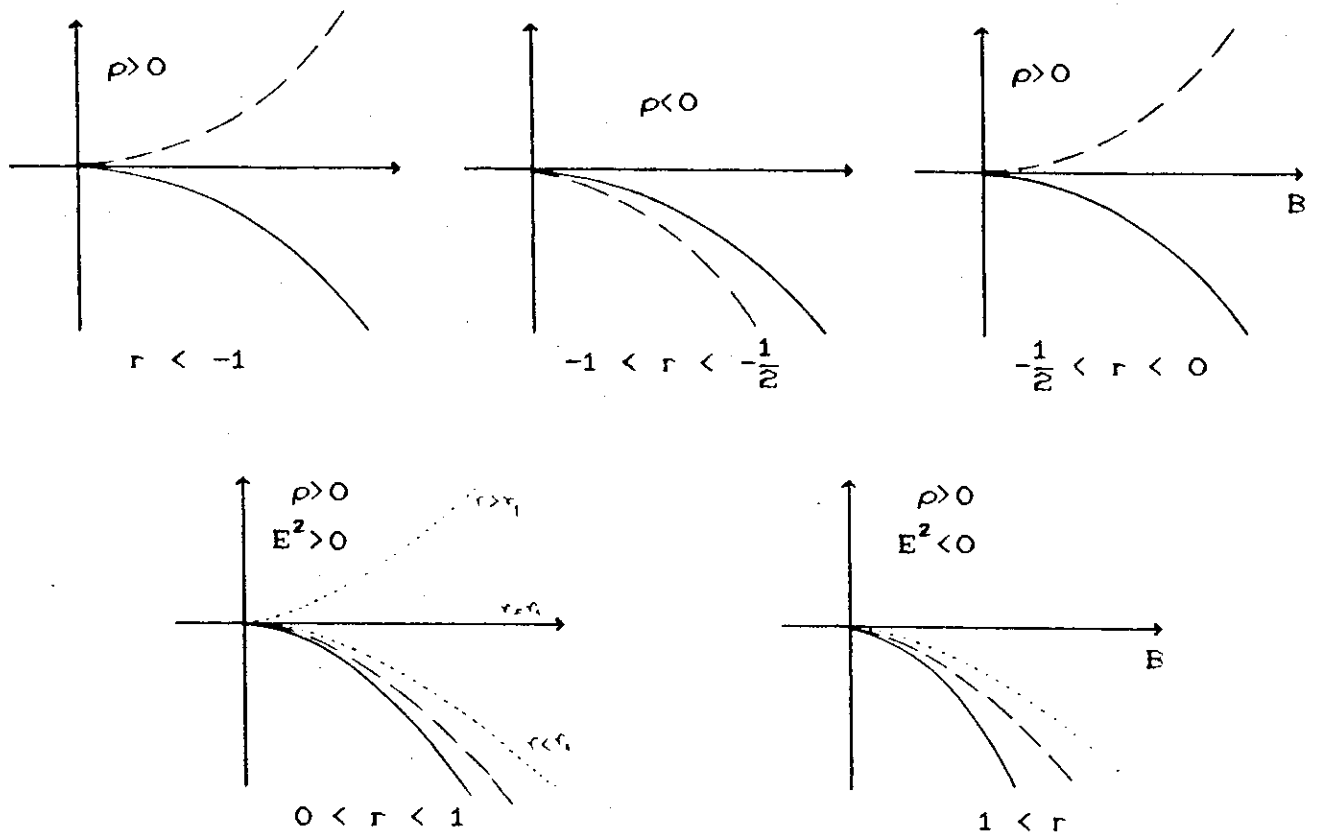


FIGURA 3.12 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Analisando os gráficos acima vemos que somente para r no intervalo $(0,1)$ e satisfazendo a relação $r \leq r_1$, é possível se ter soluções com $E^2 > 0$ e $\rho > 0$ do tipo i) descrito na página XX, desde que $C \geq 0$. Devemos acrescentar também os pontos $r=0$ pois das eqs. (3.29) e (3.30) vemos que ρ e E^2 são positivos para $C \geq 0$. Os pontos $r=1$ implicam que $E^2=0$ e portanto $\sigma=0$.

Concluimos que para Bianchi III o único caso em que é possível ter soluções físicas dentro das restrições que impusemos (ver eqs. (3.10) e (3.16)), é: $\alpha > 0$, $\Lambda=0$, $0 \leq r < 1 \cap r \leq r_1$ e $C \geq 0$. Vamos

agora analisar o comportamento dessas soluções. Primeiramente vamos delimitar no plano λr os valores que λ e r podem assumir. Na figura 3.13 traçamos o gráfico da função $\lambda = \lambda(r_1)$:

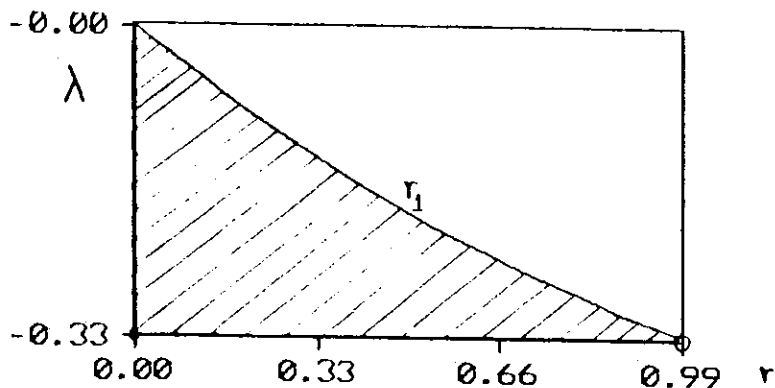


FIGURA 3.13 - Região de soluções para Bianchi III

Uma vez que $0 \leq r < 1$ e $-1/3 \leq \lambda \leq 0$ segue que a região hachuriada da fig. 3.13 representa a região permitida para r e λ . Pela eq. (3.21) podemos mostrar que para r e λ nessa região, os valores que α assume estão no intervalo $(0, 1/2]$. A relação entre α e os parâmetros r e λ será analisada adiante, e a fig. 3.18 resume essa relação.

Vamos agora obter as grandezas físicas relevantes em função do tempo. A eq. (3.26) se reduz à:

$$\epsilon \int_{B_0}^B \frac{dB}{\sqrt{C + \frac{\lambda_2 B^{2\alpha}}{\alpha(r-r_0)}}} = \eta - \eta_0 \quad (3.48)$$

Quando $C=0$ a integral acima é facilmente resolvida. Usando que $d\eta = B^{-\alpha} dt$ e tomando $B_0 = 0$, obtemos:

$$B = \epsilon \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha(r-r_0)}} (t-t_0) \quad (3.49)$$

De (3.48) vemos que $t \in (t_0, \infty)$ caso a solução esteja em expansão ($\theta > 0$), isto é, $\varepsilon = +1$, e $t \in (-\infty, t_0)$ caso a solução esteja em contração ($\theta < 0$), isto é, $\varepsilon = -1$. Das eqs. (3.14), (3.13) e (3.11) obtemos que:

$$\rho = \frac{2r}{(1+\lambda)(t-t_0)^2} \quad (3.50)$$

$$E = \frac{\sqrt{2r(r_1-r)}}{|(t-t_0)|} \quad (3.51)$$

$$\sigma = -\frac{1}{t-t_0} \quad (3.52)$$

Observe que para σ ser positivo ε tem que ser negativo, ou seja, a solução tem que estar em contração. Esse fato ocorre também para $C \neq 0$. De fato, a eq. (3.32) para $\Lambda = 0$ se reduz à:

$$\sigma = \frac{2}{E^2 B^{\alpha+1} (r-r_0)} \left[\frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{\alpha B^2} + \frac{C(\alpha-1)(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{(1+\lambda)B^{2\alpha+2}} \right] \frac{dB}{d\eta} \quad (3.53)$$

Observe que como $r < r_1$ e $\alpha \leq 1/2$ segue que σ tem o sinal contrário a B' o que prova a afirmação feita acima. Nas soluções que se seguem vamos considerar que $B=0$ para $\eta=0$ e que $\eta \in (-\infty, 0)$ de forma que o modelo começa de um raio infinito no instante $\eta = -\infty$ e se contrai até a singularidade $B=0$ que ocorre no instante $\eta=0$. O valor de ε tem que ser então igual a -1 também para $C > 0$.

Para $C \neq 0$ a integral (3.48) tem soluções em termos de funções elementares somente se ^[59] $\alpha = 1/k$, $k=2,3,4,\dots$. Para $\alpha = 1/2n$, $n=1,2,3,\dots$ obtemos:

$$\eta = \frac{\alpha^{n-1} (r-r_0)^n}{\lambda_2^n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{2n-2j-1} \binom{n-1}{j} \right] \left\{ C^{n-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$- \left[C + \frac{\lambda_2}{\alpha(r-r_0)} B^{2\alpha} \right]^{n-J-\frac{1}{2}} C^J \quad (3.54)$$

Para $n=1$, ou seja $\alpha=1/2$, obtemos:

$$B = \frac{\eta}{2} \left[\frac{\lambda_2 \eta}{r-r_0} - 2\sqrt{C} \right] \quad (3.55)$$

Para $\alpha=1/(2n+1)$, podemos fazer a substituição de variável $x=B^\alpha$ para obter a seguinte integral:

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \int_{B^\alpha}^0 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{C + bx^2}} \quad (3.56)$$

onde

$$b = \frac{\lambda_2}{\alpha(r-r_0)} \quad (3.57)$$

A eq. (3.56) pode ser integrada recursivamente usando as seguintes expressões [59]:

$$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{C + bx^2}} = \frac{x^{2n-1}}{2nb} \sqrt{C + bx^2} - \frac{(2n-1)C}{2nb} \int \frac{x^{2n-2} dx}{\sqrt{C + bx^2}} \quad (3.58)$$

e

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{asinh} \sqrt{\frac{b}{C}} x \quad (3.59)$$

Para $n=1$, temos que:

$$\eta = -\sqrt{\frac{\alpha(r-r_0)}{\lambda_2}} \operatorname{asinh} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha(r-r_0)C}} B \quad (3.60)$$

Usando que $d\eta=B^{-\alpha}dt$, obtemos:

$$B(t) = \sqrt{\frac{\lambda_2 t^2}{\alpha(r-r_0)} - 2\sqrt{C} t} \quad (3.61)$$

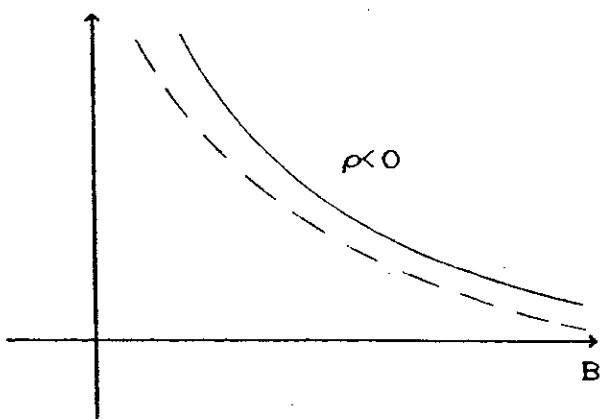
onde $t \in (-\infty, 0)$.

3.2 - BIANCHI I ($\lambda_2=0$)

Vamos agora analisar o modelo Bianchi I ($\lambda_2=0$). Vamos supor inicialmente que $\Lambda \neq 0$. O método de obtenção dos gráficos é análogo ao método usado na seção 3.1.

CASO 1: $\alpha < -1$

a) $\Lambda > 0$



b) $\Lambda < 0$

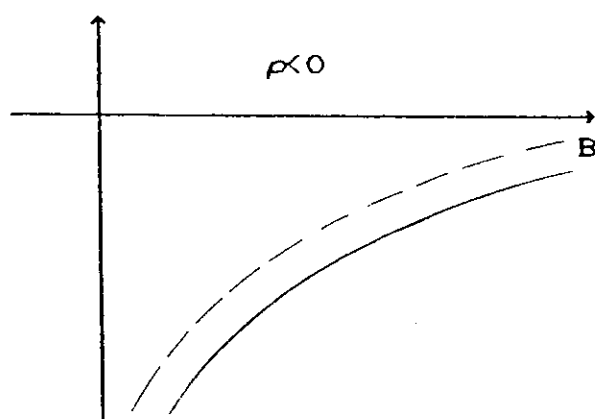


FIGURA 3.14 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Pela fig. 3.14 vemos que não há soluções para $\Lambda > 0$ ou $\Lambda < 0$.

CASO 2: $-1 < \alpha < 0$

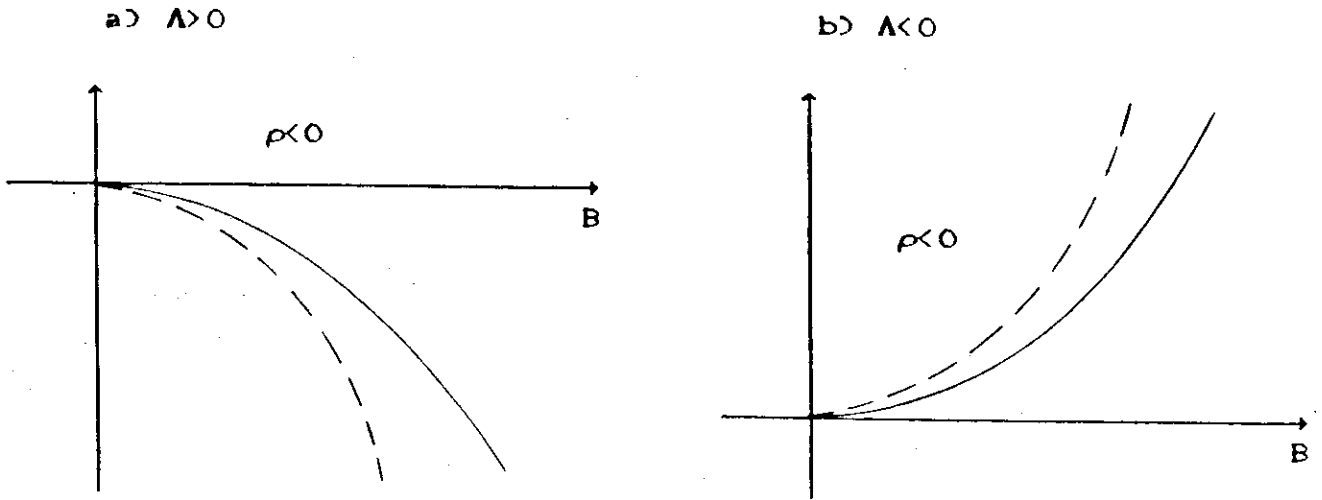


FIGURA 3.15 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Novamente não há soluções para $\Lambda > 0$ ou $\Lambda < 0$.

CASO 3: $0 < \alpha$

a) $\Lambda > 0$

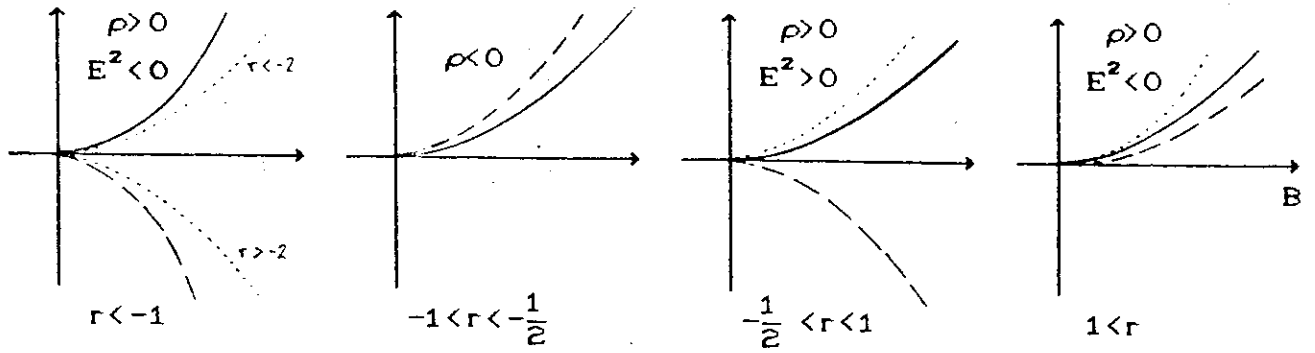


FIGURA 3.16 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Pela fig. 3.15 vemos que não há soluções.

b) $\Lambda < 0$

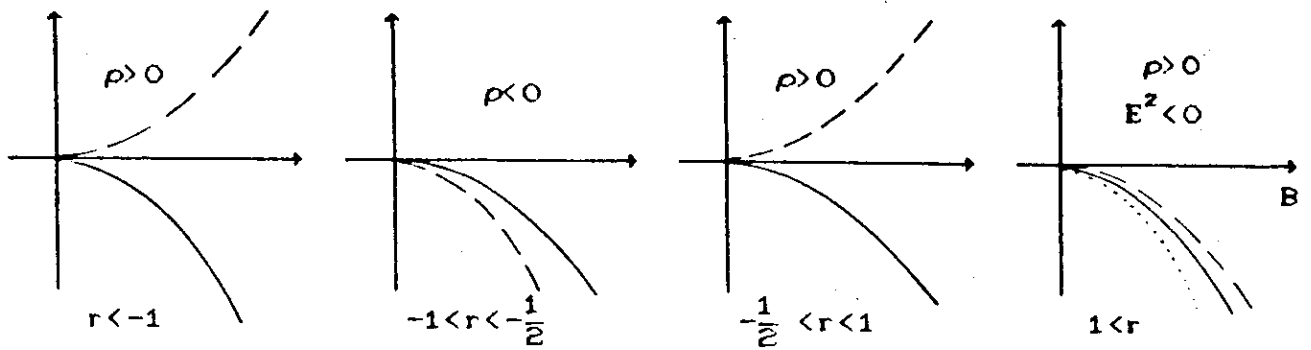


FIGURA 3.17 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Novamente não há soluções.

Vamos agora analisar o caso $\Lambda=0$ que, como veremos, admite soluções físicas. Vamos supor inicialmente que $H_0=0$. De (3.24), (3.29), (3.30) e (3.32) temos que:

$$B = [\sqrt{C} (1+\alpha)]^{\frac{1}{1+\alpha}} t^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.62)$$

$$\rho = \frac{2(r+1)(2r+1)}{(1+\lambda)(r-r_0)(1+\alpha)^2 t^2} \quad (3.63)$$

$$E^2 = \frac{2(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{(1+\lambda)(r-r_0)(1+\alpha)^2 t^2} \quad (3.64)$$

$$\sigma = \frac{\alpha-1}{(\alpha+1)t} \quad (3.65)$$

De (3.63) vemos que $\rho > 0$ para $r > -1/2$ e $r_0 < r < -1$ e de (3.64) vemos que $E^2 > 0$ para $r < r_0$ e $-1/2 < r < 1$. Assim, para que ρ e E^2 sejam positivos temos que restringir r ao intervalo $(-1/2, 1)$.

Vamos mostrar agora que:

$$r \in [-1/2, 1] \text{ e } \lambda \in [-1/3, 1] \Rightarrow \alpha \in [0, 2]$$

Uma vez que para qualquer $r \in [-1/2, 1]$ temos que $r > r_0$, pela fig. 3.2 podemos ver que o menor valor de α será dado por $\alpha(\bar{r})$ e o maior

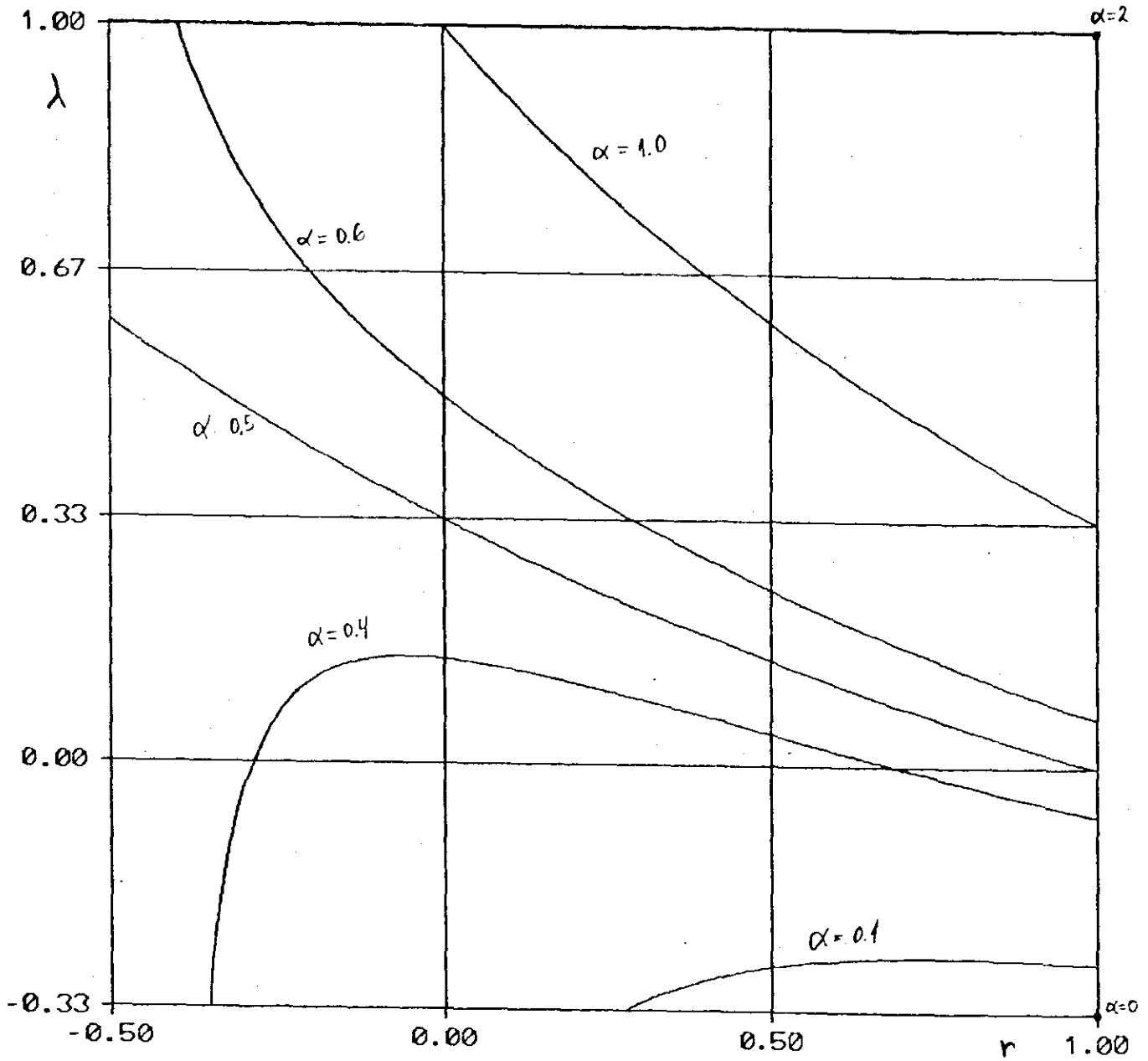


FIGURA 3.18 - Curvas α =constante para alguns valores da constante no intervalo $[0,2]$. Observe que da eq. (3.21) α =const implica que λ é uma função de r . As curvas $\lambda(r)$ estão mostradas na figura para $-1/3 \leq \lambda \leq 1$ e $-1/2 \leq r \leq 1$.

será dado por $\alpha(r=-1/2)$ ou $\alpha(r=1)$. Pela eq. (3.45) podemos ver que se $\lambda \in [-1/3, 1]$ então o menor valor de $\alpha(\bar{r})$ é zero. Logo o limite inferior para α é zero. Usando a eq. (3.21) temos que $\alpha(r=-1/2)=1/2$ e $\alpha(r=1)=(1+3\lambda)/2$. Segue então que o maior valor de α é 2, que ocorre quando $r=\lambda=1$.

A partir da eq. (3.21), podemos explicitar λ como função de r :

$$\lambda = \frac{-r^2 + ar + 3\alpha - 1}{r^2 - (\alpha - 4)r + \alpha + 1} \quad (3.66)$$

Na fig. 3.18 traçamos curvas $\lambda(r)$ para vários valores de α com r e λ na região $r \in [-1/2, 1]$ e $\lambda \in [-1/3, 1]$. Observe que a curva $\alpha=1/2$ divide as outras curvas em dois tipos: As curvas com $\alpha > 1/2$ cortam a reta $\lambda=1$ e as curvas com $\alpha < 1/2$ cortam a reta $\lambda=-1/3$. Note que $\alpha=2$ corresponde ao ponto $(r, \lambda)=(1, 1)$ e $\alpha=0$ ao ponto $(r, \lambda)=(1, -1/3)$. Os pontos sobre a reta $r=-1/2$ estão incluídos na curva $\alpha=1/2$, pois se substituirmos $r=-1/2$ na expressão de α dada por (3.21) obteremos $\alpha=1/2$ independentemente do valor de λ . A fig. 3.18 será útil na análise de todos os casos que veremos nesse capítulo.

Analisamos o sinal de ρ e E^2 . Com relação ao sinal da condutividade elétrica, note por (3.65) que σ é positivo se: i) $\alpha > 1$ e $B' > 0$ e ii) $\alpha < 1$ e $B' < 0$.

As soluções com $\theta > 0$ foram apresentadas por Dunn&Tupper^[2], de forma que no caso dele $\alpha > 1$. Na sua notação, ele considerou

$$\begin{aligned} A &= t^a \\ B &= t^b \end{aligned} \quad (3.67)$$

A região no plano bxa que fornece soluções físicas corresponde ao triângulo pontilhado MNL (veja ref. [2] pg. 315):

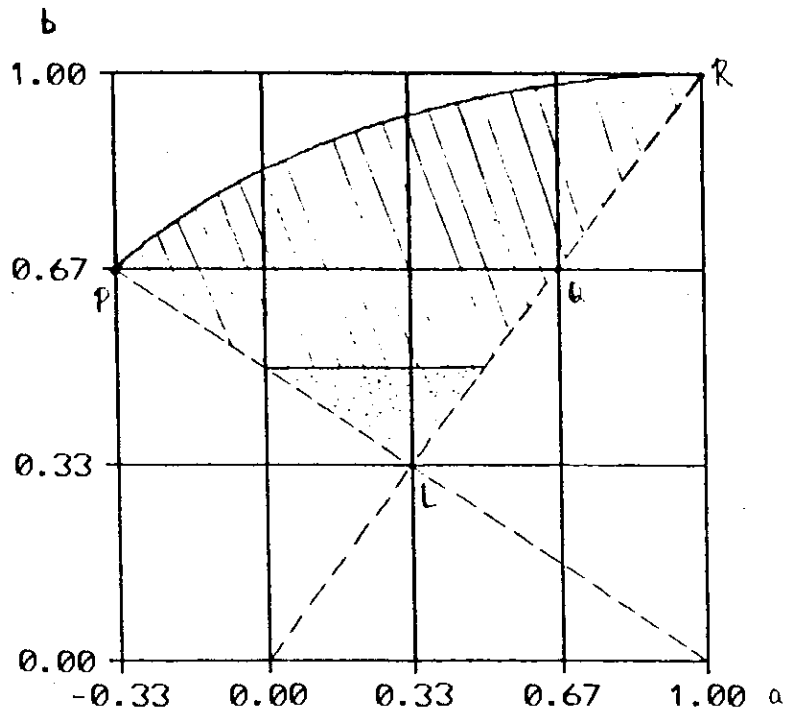


FIGURA 3.19 - Região de soluções no plano bxa

De fato essa região corresponde a especificação $\alpha > 1$, $-1/2 < r < 1$, $-1/3 < \lambda < 1$. Pois note de (3.62) e (3.67) que

$$b = \frac{1}{1+\alpha} \quad (3.68)$$

e como $A=B^r$ segue que $a=rb$. Para α no intervalo $[1,2)$ temos que $1/3 < b \leq 1/2$ (cf fig. 3.19). Vamos agora analisar o domínio de a . Pela fig. 3.18 vemos que r varia de 1 até o valor da intercessão da curva $\alpha=\text{constante}$ com a reta $\lambda=1$. Substituindo $\lambda=1$ na eq. (3.21) obtemos que o valor de r na intercessão dessas curvas é $\alpha-1$. Assim para um dado valor de b , temos que $b(\alpha-1) < a < b$. Porém de (3.68) temos que $\alpha=(1-b)/b$, assim $1-2b < a < b$. O menor valor de a está limitado pela reta $b=-(a+1)/2$ (reta ML na fig. 3.19) e o maior valor de a está limitado pela reta $a=b$ (reta LN na fig. 3.19). Isso reproduz a região encontrada por Dunn&Tupper^[2] (região pontilhada da fig. 3.19).

No presente caso $0 < \alpha < 2$, de forma que a região de soluções no plano b - a é maior. É fácil de ver que α no intervalo $(1/2, 2)$ corresponde ao triângulo PQL. Quando α é menor que $1/2$, o menor valor para a não é mais dado pela reta $b = -(a+1)/2$, pois as curvas $\alpha = \text{constante}$ cortam agora a reta $\lambda = -1/3$. Através de um desenvolvimento análogo ao do parágrafo anterior, podemos ver que o menor valor nesse caso está limitado pela curva PR (ver fig. 3.19) cuja equação é:

$$b = \frac{a+5 - \sqrt{25+34a-23a^2}}{12} \quad (3.69)$$

Concluimos então que para a condutividade elétrica ser positiva, a e b tem que estar na região hachuriada da fig. 3.19 caso $\theta < 0$ e na região pontilhada caso $\theta > 0$. As retas PL e LR devem ser excluídas pois para esses pontos E^2 é nulo. A curva PR deve ser incluída na região com $\theta < 0$. Note que sobre a reta $b=1/2$ a condutividade é nula. Essa reta separa as regiões com $\theta > 0$ e $\theta < 0$. A positividade de ρ e E^2 está assegurada nessas regiões.

Vamos mostrar agora que se $H_0 \neq 0$ então não há soluções com condutividade não nula. De fato, de (3.64) podemos ver que se $\alpha < 1$ então E^2 fica negativo quando B tende a zero e se $\alpha > 1$ então E^2 fica negativo quando B tende a infinito. Segue que α tem que ser igual a 1, porém de (3.65) vemos que nesse caso $\sigma = 0$.

3.3 - KANTOWSKI-SACHS ($\lambda_2 < 0$)

Analisaremos agora o modelo Kantowski-Sachs ($\lambda_2 < 0$) que contém um número grande de soluções.

CASO 1: $\alpha < -1$

a) $\Lambda > 0$

Podemos obter o gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ a partir do gráfico da fig. 3.7 pois das eqs. (3.25) e (3.33) podemos ver que $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ trocam de sinal quando trocamos o sinal de Λ e λ_2 . Assim obtemos:

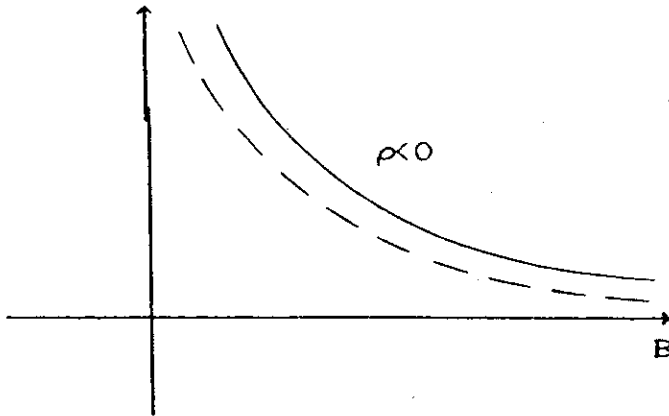


FIGURA 3.20 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Pe a fig. 3.20 vemos que não há soluções.

b) $\Lambda < 0$

Como no item a), através da fig 3.6 obtemos:

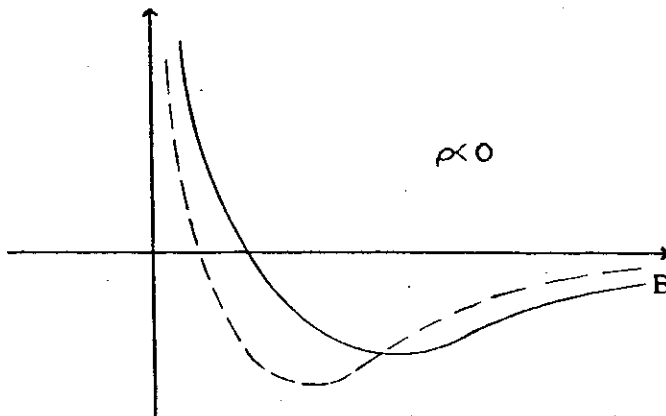


FIGURA 3.21 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Novamente não há soluções.

c) $\Lambda = 0$

De (3.25), (3.33) e (3.36) podemos ver que para $\Lambda=0$ o comportamento de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ é igual ao caso a) acima (fig. (3.22)) e portanto não admite nenhuma solução.

CASO 2: $-1 < \alpha < 0$

a) $\Lambda > 0$

Usando a fig. 3.9 obtemos:

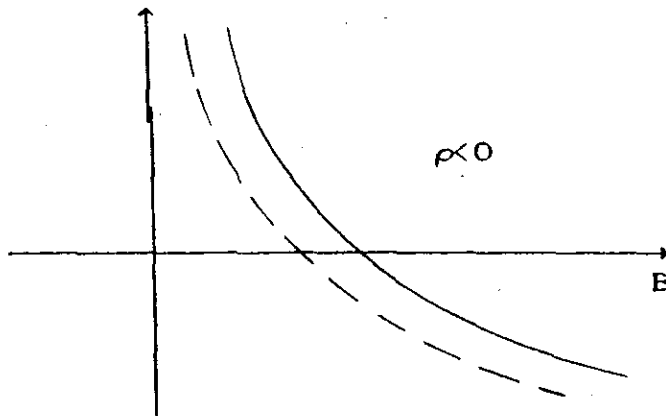


FIGURA 3.22 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Pela fig. 3.22 segue que não há soluções.

b) $\Lambda < 0$

Usando a fig. 3.8 obtemos:

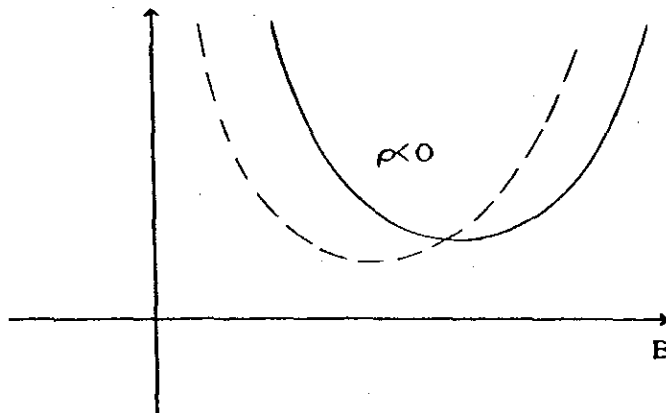


FIGURA 3.23 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Vemos pela fig. 3.23 que não há soluções.

c) $\Lambda=0$

Esse caso é igual ao item c) do CASO 1 anterior. Portanto não há soluções.

CASO 3: $\alpha > 0$

a) $\Lambda > 0$

Através da fig. 3.10 podemos obter o gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ e das eqs. (3.34) e (3.38) podemos obter os gráficos de $C_{E^2=0}(B)$:

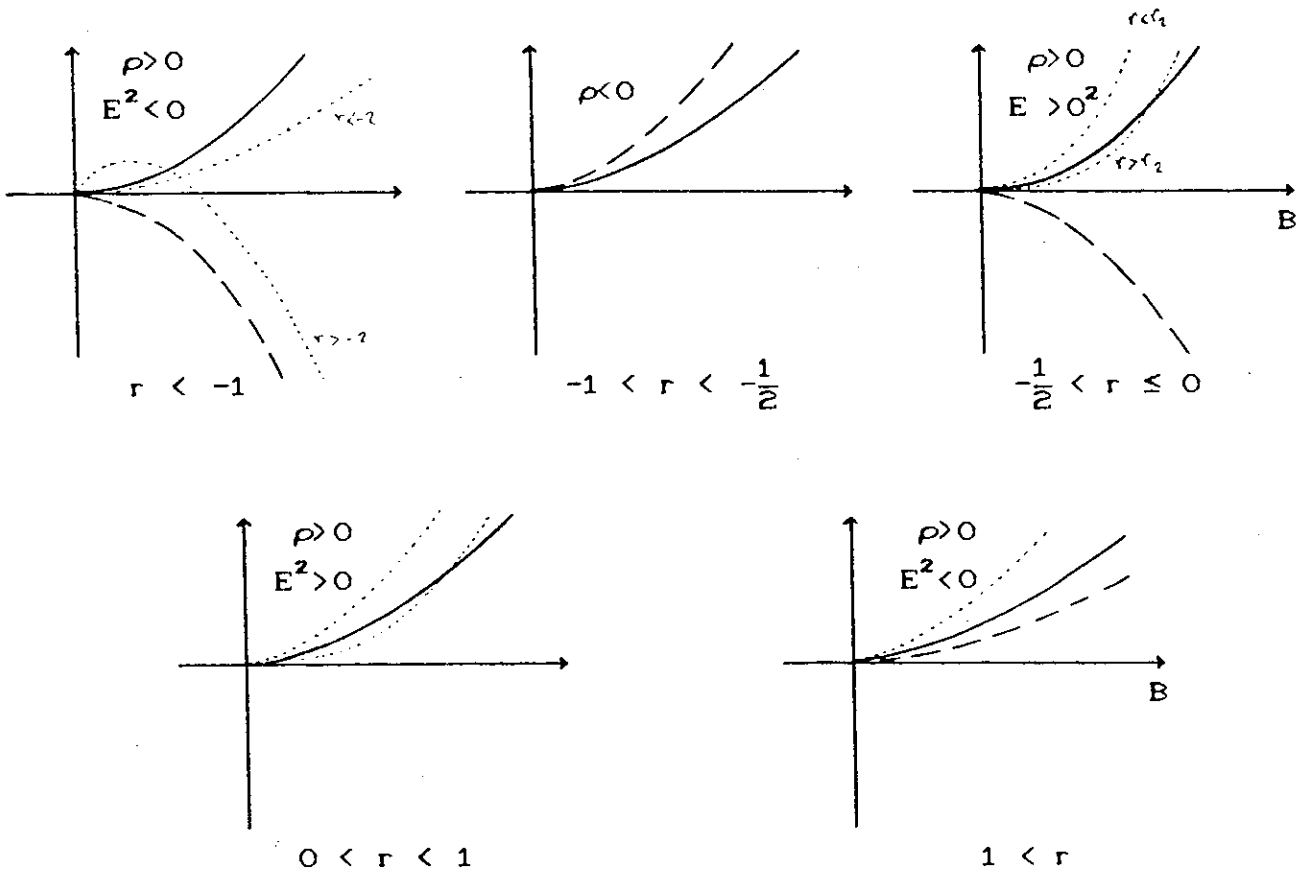


FIGURA 3.24 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Podemos ver pela fig. 3.24 que existem soluções nesse caso com ρ e E^2 positivos se $r \in (-1/2, 1)$ e $r > r_2$. Analisaremos adiante com mais detalhes esse caso.

b) $\Lambda < 0$

Da mesma forma que no item a), a partir da fig. 3.11 e das eqs. (3.34) e (3.38), traçamos os seguintes gráficos:

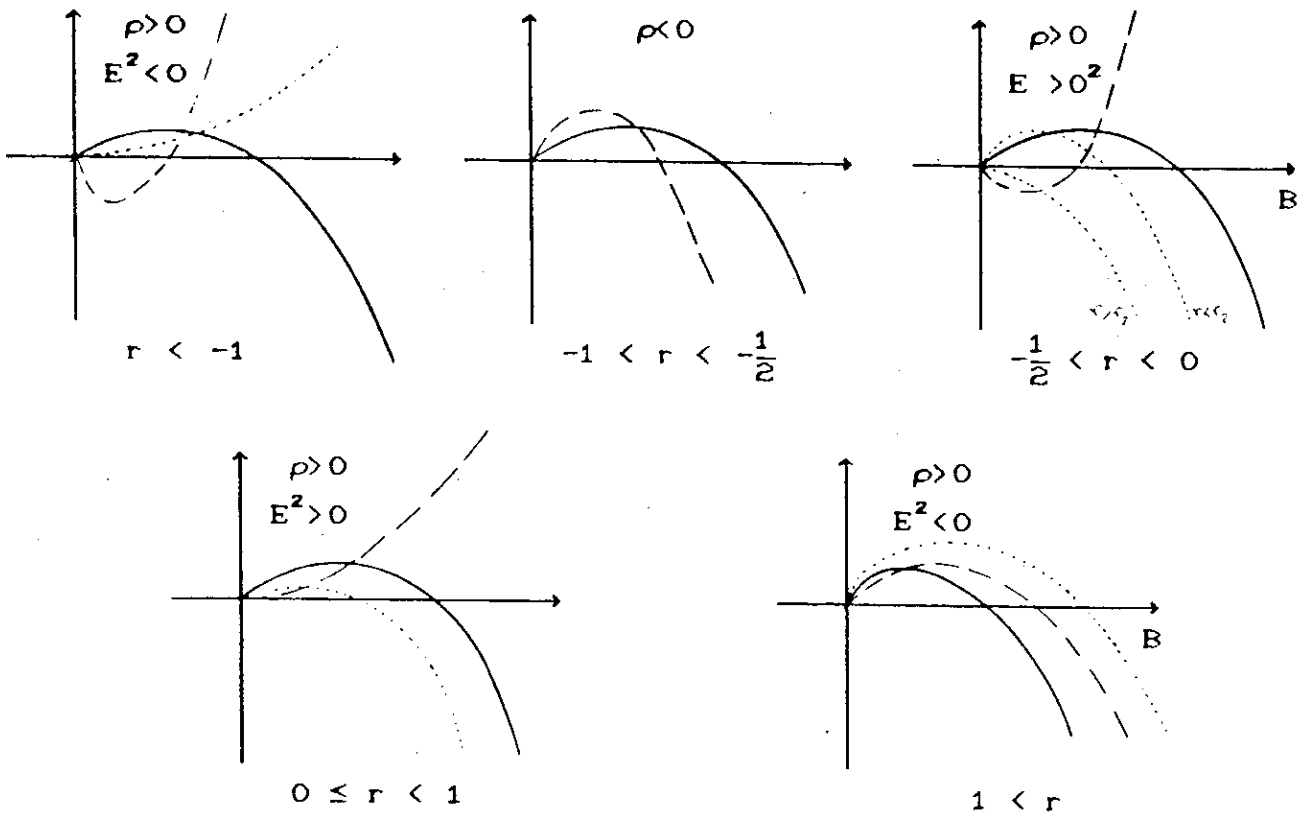


FIGURA 3.25 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Nesse caso também existem soluções para r no intervalo $(-1/2, 1)$, que serão analisadas com mais detalhes adiante.

c) $\Lambda = 0$

A partir da fig. 3.12 e da eq. (3.34) obtemos:

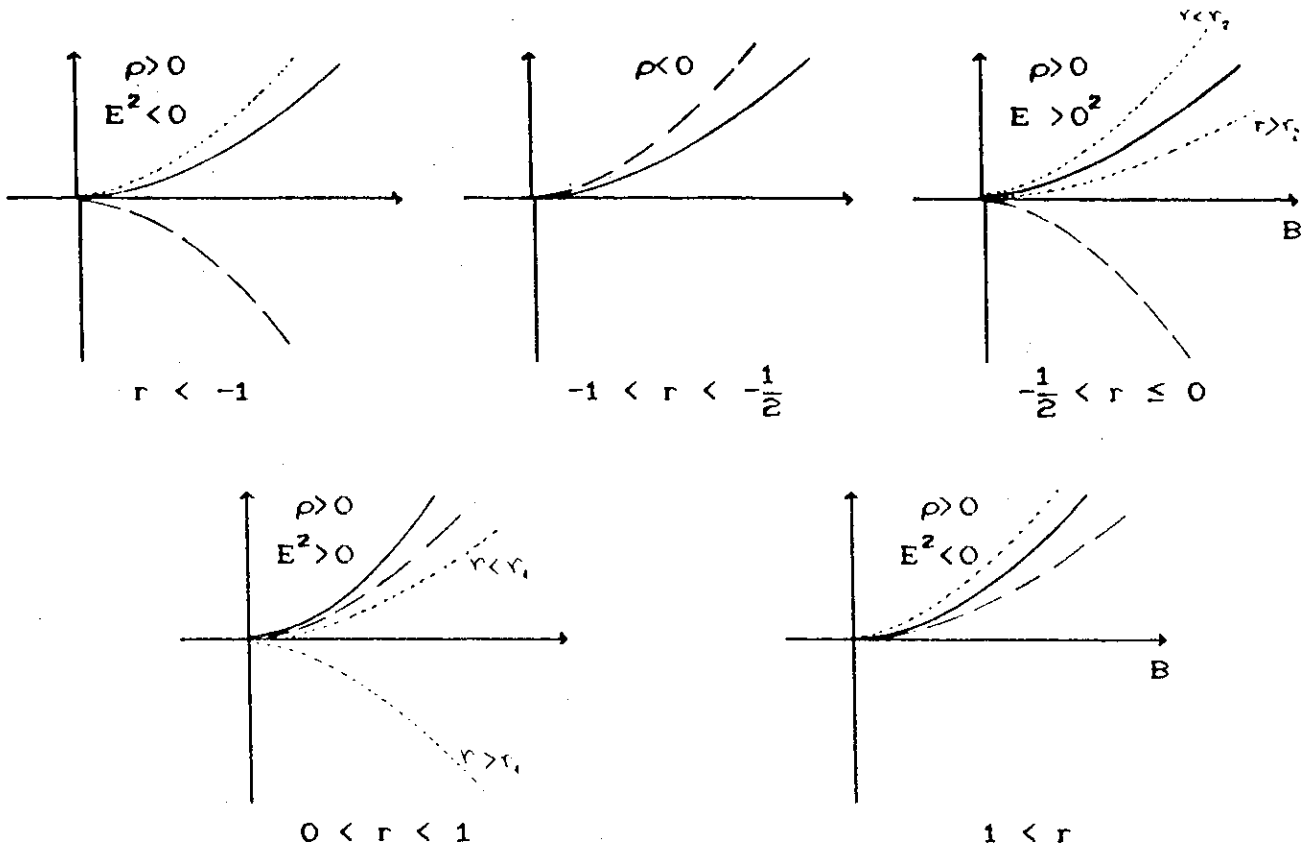


FIGURA 3.26 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$

Novamente existem soluções para r no intervalo $(-1/2, 1)$ desde que $r > r_2$.

Vamos agora analisar com mais detalhes os casos que admitem soluções físicas. Vamos começar com os modelos que têm $\Lambda < 0$ (caso b) acima).

KS1. $\Lambda < 0, r > r_2$

Vamos analisar primeiro o caso $r > r_2$. Na fig. 3.27 podemos ver o gráfico de $V(B)$ (—), $C_{\rho=0}(B)$ (---) e $C_{E^2=0}(B)$ (.....). Note que existem outras formas para a curva $C_{E^2=0}(B)$, porém pela eq. (3.3B) podemos mostrar que se $r > r_2$ então $V(B) > C_{E^2=0}(B) \forall B$, assim os argumentos a seguir valem para todas as formas das curvas $C_{E^2=0}(B)$.

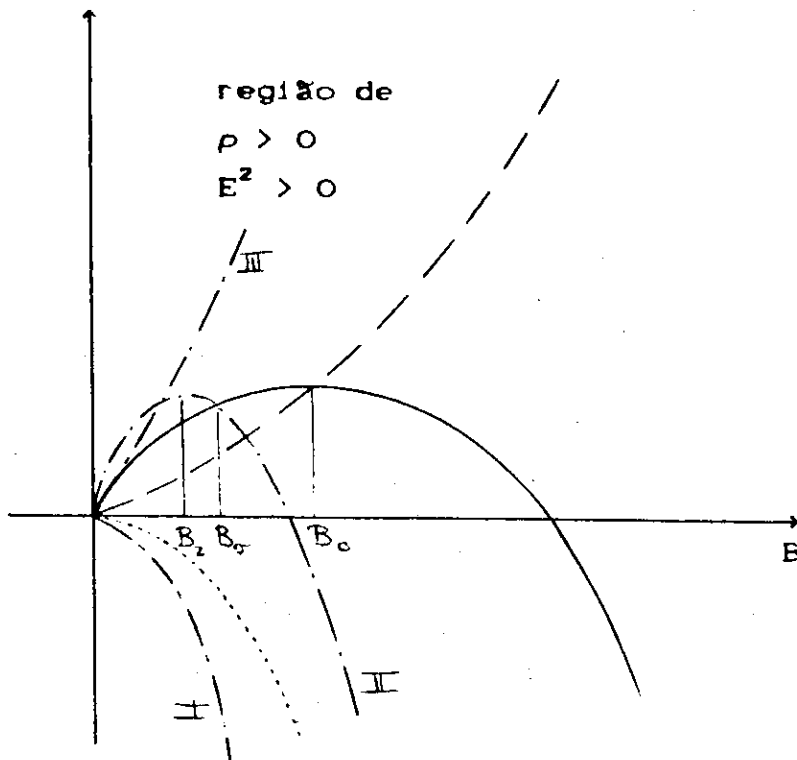


FIGURA 3.27 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}$, $C_{E^2=0}$ e $C_{\sigma=0}$

Para que ρ não fique negativo, C tem que satisfazer a relação:

$$0 < C \leq V(B_o) = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(r-r_o)(-2\Lambda)^\alpha} \quad (3.70)$$

Para $0 < C < V(B_o)$, o modelo parte da singularidade $B=0$ e expande até o raio $B=V^{-1}(C)$ e volta para a singularidade.

Para $C=V(B_o)$ existem três possibilidades que são:

i) O modelo é estático com raio $B=B_o$. Podemos ver de (3.14) e (3.13) que $\rho=0$ e $E^2 > 0$. Essa solução é conhecida na literatura como solução tipo Bertotti-Robinson^[60-62] (TBR). No capítulo 4 discutimos as soluções TBR com mais detalhes.

ii) O modelo parte da singularidade $B=0$ e se expande até a solução TBR.

iii) O modelo parte da solução TBR e se contrai até a singularidade $B=0$.

Para todos os casos acima o sinal de ρ e E^2 será positivo. A análise do sinal de σ por sua vez é mais trabalhosa. Pela eq. (3.40) podemos ver que existem três tipos de curvas $C_{\sigma=0}(B)$ (---) (veja fig. 3.27) dependendo dos valores dos parâmetros α e r_3 que determinam o sinal dos coeficientes c_1 e c_2 da função $V(B) - C_{\sigma=0}(B)$. O tipo I é caracterizado por $V(B) > C_{\sigma=0}(B) \forall B$. Por (3.40) podemos ver que esse tipo ocorre somente se $\alpha < 1$ e $r > r_3$. Na fig. 3.1 podemos visualizar a região que caracteriza o tipo I no plano $\lambda \times r$. Por (3.32) segue que $\sigma B'$ é negativo para a região da fig. 3.27 acima da curva $C_{\sigma=0}(B)$. Assim os modelos desse tipo têm a condutividade elétrica negativa durante a fase de expansão ($B' > 0$) e têm condutividade positiva durante a fase de contração ($B' < 0$). Note que somente quando $C = V(B_0)$ é que podemos ter a condutividade positiva definida durante toda a evolução do modelo, pois o modelo pode partir da solução tipo Bertotti-Robinson e se contrair até a singularidade. Devido a importância dessas soluções elas serão consideradas em separado no capítulo 4.

O tipo II é caracterizado por $V(B) \leq C_{\sigma=0}(B)$ para $B \leq B_0$ (veja fig. 3.27) e $V(B) > C_{\sigma=0}(B)$ para $B > B_0$. Pela eq. (3.40) isso ocorre somente se $r < r_3$. O valor de B_0 pode ser obtido igualando-se o lado direito de (3.40) a zero:

$$B_0^2 = \frac{-\lambda_2(3-\lambda)(r-r_3)(2r+1 + \sqrt{\frac{(3\lambda-1)(5-3\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)}})}{4\lambda(1-r)[(3-\lambda)r+2(2-\lambda)]} \quad (3.71)$$

Note que B_0^2 é menor que B_0 pois de (3.37) e (3.71) obtemos:

$$B_0^2 - B_0 = \frac{\lambda_2(r+3-2\lambda)}{\lambda(1-r)[(3-\lambda)r+2(2-\lambda)]} > 0 \quad (3.72)$$

O ponto B_2 (veja fig. 3.27) corresponde ao ponto de máximo de $C_{\sigma=0}(B)$, e pode ser encontrado derivando o lado direito de (3.35)

em relação a B e igualando-o a zero:

$$B_2^2 = \frac{-\lambda_2 r(r-r_1)}{2\lambda(1-r)(r+2)} \quad (3.73)$$

O sinal da condutividade elétrica dos modelos com C tal que $C_{\sigma=0}(B_2) < C \leq V(B_0)$ têm o mesmo comportamento das soluções do tipo I. Quando $0 < C \leq C_{\sigma=0}(B_2)$ a condutividade muda de sinal mais de uma vez durante a evolução do modelo, de forma que seu sinal não está diretamente correlacionado com o sinal de B'. Uma vez que acima da curva $C_{\sigma=0}(B)$ $\sigma B'$ é negativo (ver eq. (3.32)) segue que os modelos começam com condutividade negativa. Observe que as soluções que partem da solução TBR só terão condutividade elétrica positiva durante toda a evolução se $C_{\sigma=0}(B_2) < V(B_0)$. A relação $C_{\sigma=0}(B_2) = V(B_0)$ implica em uma curva $\lambda(r)$ de forma que para (λ, r) à direita dessa curva temos que $C_{\sigma=0}(B_2) < V(B_0)$ e (λ, r) à esquerda temos que $C_{\sigma=0}(B_2) > V(B_0)$. Essa curva $\lambda(r)$ será obtida de uma forma mais simples no capítulo 4, onde analisamos de maneira completa o sinal da condutividade para as soluções com $C = V(B_0)$.

O tipo III é caracterizado por $C_{\sigma=0}(B) > V(B) \forall B$, e por (3.40) vemos que esse tipo é caracterizado por $\alpha > 1$. Por (3.32) podemos ver que $\sigma B'$ é positivo para a região acima da curva $C_{\sigma=0}(B)$. Pela fig. 3.27 vemos que todos os modelos desse tipo trocam o sinal da condutividade passando por um instante em que ela é nula, inclusive as soluções com $C = V(B_0)$.

KS2. $\lambda < 0, r < r_2$

Vamos analisar agora o caso $r < r_2$. Pela fig. 3.1 vemos que se $r < r_2$ então $r(r-r_1) < 0$ e $\alpha < 1$. Nesse caso, de (3.34) e (3.35) vemos que $C_{E=0}^2(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$ têm a forma mostrada na fig. 3.28:

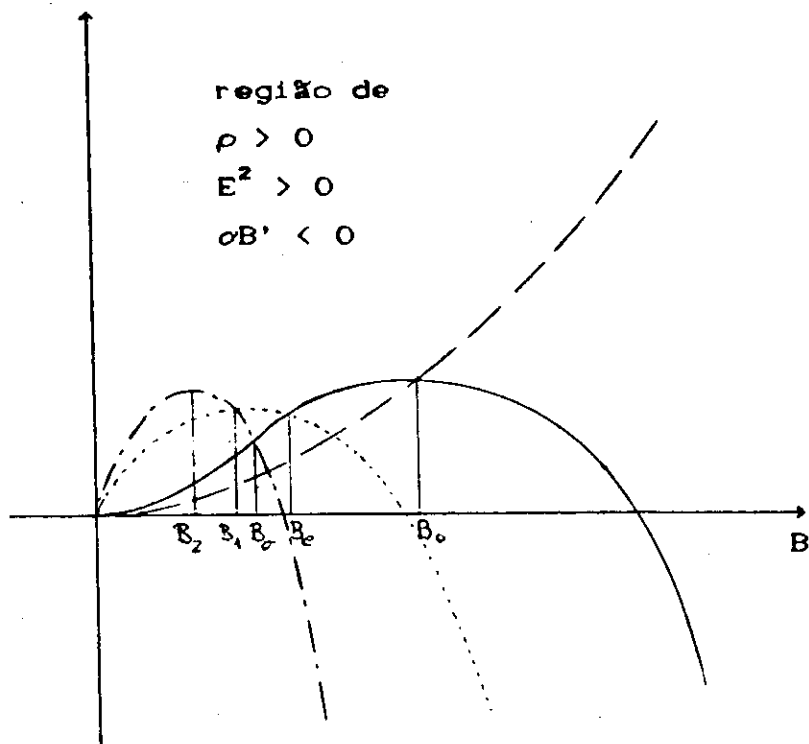


FIGURA 3.28 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}$, $C_{E^2=0}$ e $C_{\sigma=0}$

O ponto B_1 , que corresponde ao ponto de máximo da curva $C_{E^2=0}(B)$ é dado por:

$$B_1^2 = \frac{-\lambda_2 r(r-r_1)}{\Lambda(1-r)(r+2)} \quad (3.74)$$

De (3.35) de (3.34) podemos mostrar que $C_{\sigma=0}(B_1) = C_{E^2=0}(B_1)$, assim as curvas $C_{\sigma=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$ se interceptam no ponto B_1 . O ponto B_2 que corresponde ao ponto de máximo de $C_{\sigma=0}(B)$ cuja expressão é dada por (3.73) satisfaz a seguinte relação: $B_2 = B_1/2$. O ponto B_o corresponde ao ponto de intersecção de $C_{\sigma=0}(B)$ e $V(B)$, cuja expressão é dada por (3.71).

O ponto B_e corresponde ao ponto de intersecção de $C_{E^2=0}(B)$ e $V(B)$. Note que se $B_1 < B_e$ então as soluções físicas são tais que $C_{E^2=0}(B_1) \leq C \leq V(B_o)$ e se $B_e < B_1$ então as soluções físicas são tais que $C_{E^2=0}(B_e) \leq C \leq V(B_o)$. Assim, é importante estabelecer a região de valores de λ e r onde B_e seja maior ou menor que B_1 . De (3.38)

temos que:

$$B_e^2 = \frac{-\lambda_2(r-r_2)}{\Lambda(1-r)} \quad (3.75)$$

Igualando (3.75) com (3.74) encontramos que os pontos no plano λr onde $B_e^2 = B_1^2$ são dados pela curva

$$\lambda = f_1(r) = \frac{3r+2}{r+2} \quad (3.76)$$

Quando r está a direita da curva f_1 temos que $B_e^2 < B_1^2$ e quando r está a esquerda temos que $B_e^2 > B_1^2$.

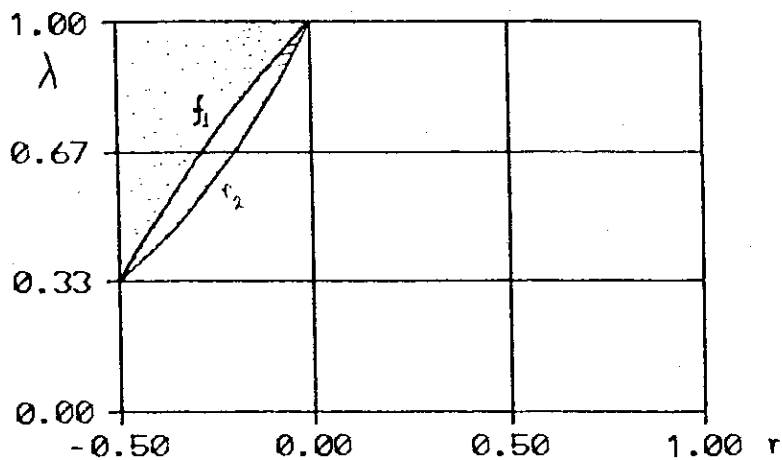


FIGURA 3.29 - Gráfico de $f_1(r) = \frac{3r+2}{r+2}$ e $r_2(r) = \frac{1+r}{1-r}$.

A parte pontilhada da fig. 3.29 representa a região onde $C_{E=0}^2(B_e) \leq C \leq V(B_0)$ e a parte hachurada a região onde $C_{E=0}^2(B_1) \leq C \leq V(B_0)$. Note pela fig. 3.28 que $C_{E=0}^2(B_e) \leq V(B_0)$ qualquer que seja o valor de B_e . No entanto, a relação $C_{E=0}^2(B_1) \leq V(B_0)$ é um vínculo que tem que ser satisfeito e que reduz a região de soluções da fig. 3.29. A análise desse vínculo sai como consequência da análise feita no capítulo 4, onde mostramos que para os pontos (r, λ) acima da curva f da fig 4.2, E^2 é positivo para todo B e consequentemente $C_{E=0}^2(B_1) \leq V(B_0)$. Para os pontos abaixo da curva f , temos $C_{E=0}^2(B_1) > V(B_0)$.

A análise do sinal de σ é análoga a análise feita para o tipo II do caso KS1.

KS3. $\alpha > 0$, $\Lambda > 0$, $r \in (-1/2, 1)$ tal que $r > r_2$

Na fig. 3.30 mostramos o comportamento das curvas $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$.

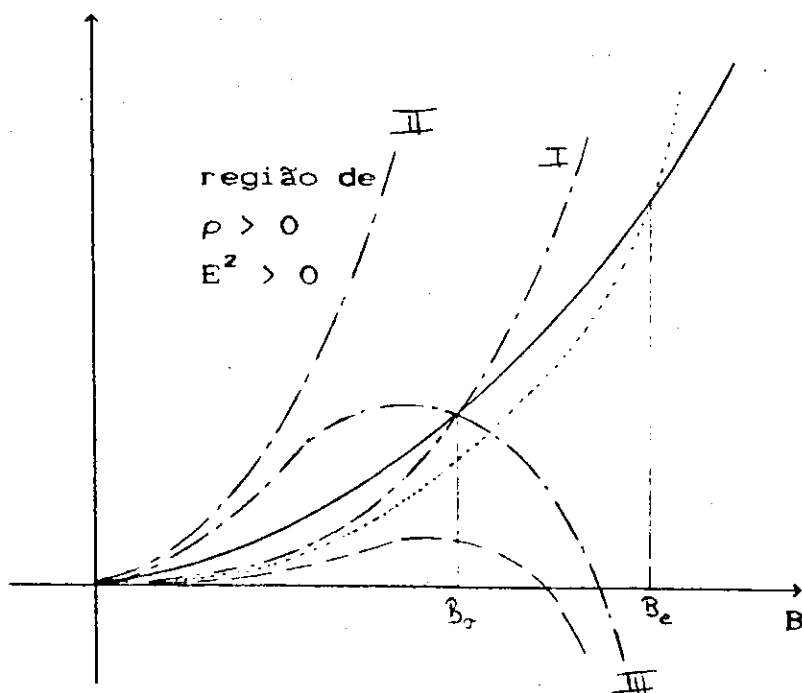


FIGURA 3.30 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}$, $C_{E^2=0}$ e $C_{\sigma=0}$

O ponto B_e é dado por (3.75). Pela fig. 3.30 vemos que as soluções que têm ρ e E^2 positivos durante toda a sua evolução são tais que $0 < C \leq V(B_e)$ onde:

$$V(B_e) = \frac{-2\lambda_2}{\alpha(r-r_0)(1-r)(1+\lambda)} \left(\frac{-\lambda_2(r-r_2)}{\Lambda(1-r)} \right)^\alpha \quad (3.77)$$

Note que todos os modelos partem da singularidade e expandem até um raio máximo e retornam a singularidade. Como no caso KS1 existem três tipos de comportamento para a curva $C_{\sigma=0}(B)$ dependendo dos parâmetros α e r_3 . O tipo I (veja a fig. 3.30) é caracterizado por $\alpha < 1$, $r > r_3$, o tipo II por $r < r_3$ e o tipo III por

$\alpha > 1$. O sinal de $\sigma B'$ é positivo acima da curva $C_{\sigma=0}(B)$ para o tipo III e é negativo para os tipos I e II, pois de (3.32) vemos que o sinal de $\sigma B'$ acima de $C_{\sigma=0}(B)$ depende se α é maior ou menor que 1. A análise do sinal da condutividade elétrica fica agora bastante simples e é similar a análise feita no caso KS1.

KS4. $\Lambda=0, r > r_2$

Os gráficos de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$ estão mostrados na fig. 3.31. Existem outras possibilidades de comportamento das curvas $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{E^2=0}(B)$, porém todas elas estão abaixo da curva $V(B)$. Assim, a positividade de ρ e E^2 está garantida se $C \geq 0$.

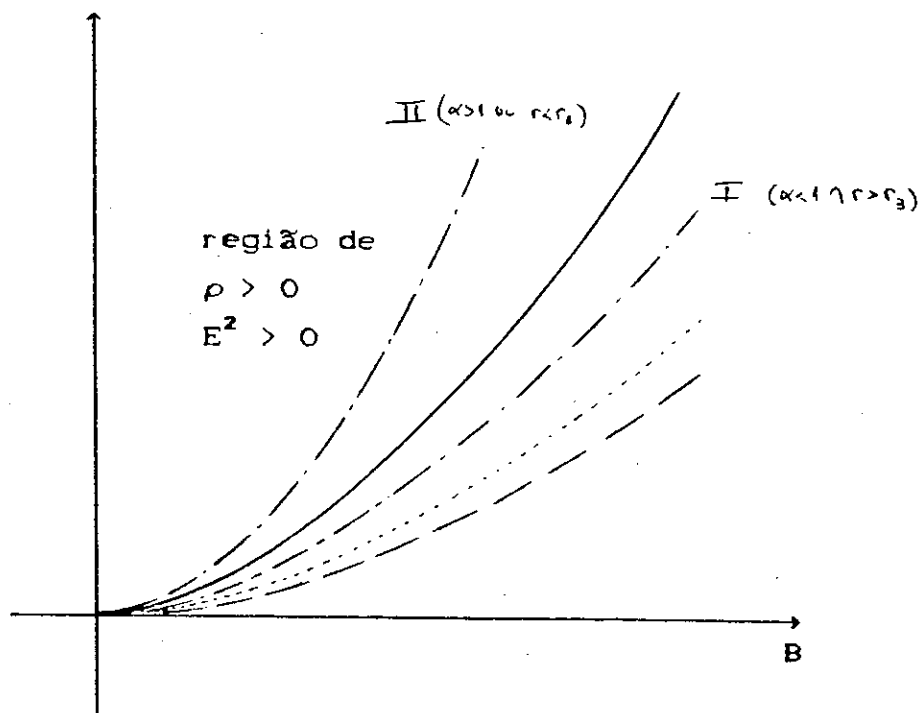


FIGURA 3.31 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$

Existem dois casos para a curva $C_{\sigma=0}(B)$. Se $\alpha > 1$ ou se $r < r_3$ da eq. (3.40) vemos que $C_{\sigma=0}(B)$ está acima da curva $V(B)$ e se $\alpha < 1$ e $r > r_3$ $C_{\sigma=0}(B)$ está abaixo da curva $V(B)$. No segundo caso podemos ver de

(3.32) que $\sigma B'$ é negativo acima da curva $C_{\sigma=0}(B)$. Assim os modelos começam com condutividade negativa e seu sinal muda quando a expansão se reverte. No primeiro caso a condutividade começa positiva se $\alpha > 1$ e negativa se $r < r_3$ e ocorrem três mudanças de sinal até que o modelo retorne a singularidade, que se dão nos dois momentos em que o modelo corta a curva $C_{\sigma=0}(B)$ e quando a expansão se reverte.

Vamos analisar agora os modelos tipo Kantowski-Sachs com $H_0 \neq 0$. Vamos começar com o caso $\Lambda < 0$.

KSS. $\Lambda < 0$, $H_0 \neq 0$

(quando $H_0 \neq 0$, a região de soluções no plano λ - r está contida na região de soluções do caso $H_0 = 0$. Segue então que o intervalo de soluções para r e λ estão contidos nos intervalos $[-1/2, 1]$ e $[-1/3, 1]$ respectivamente. Da eq. (3.30) podemos ver que E^2 é positivo definido somente se $\alpha \geq 1$, pois se $\alpha < 1$ o termo $-H_0^2/B^4$ domina quando B tende a zero.

Na fig. 3.32 traçamos o gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$, $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$. Os gráficos de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ são os mesmos do caso KS1, e o gráfico de $C_{\sigma=0}(B)$ é igual ao tipo III ($\alpha > 1$) do caso KS1. Assim a análise do sinal de ρ e σ já está feita e resta apenas a análise do sinal de E^2 . O gráfico de $C_{E^2=0}(B)$ se modifica agora devido a presença do primeiro termo na eq. (3.34).

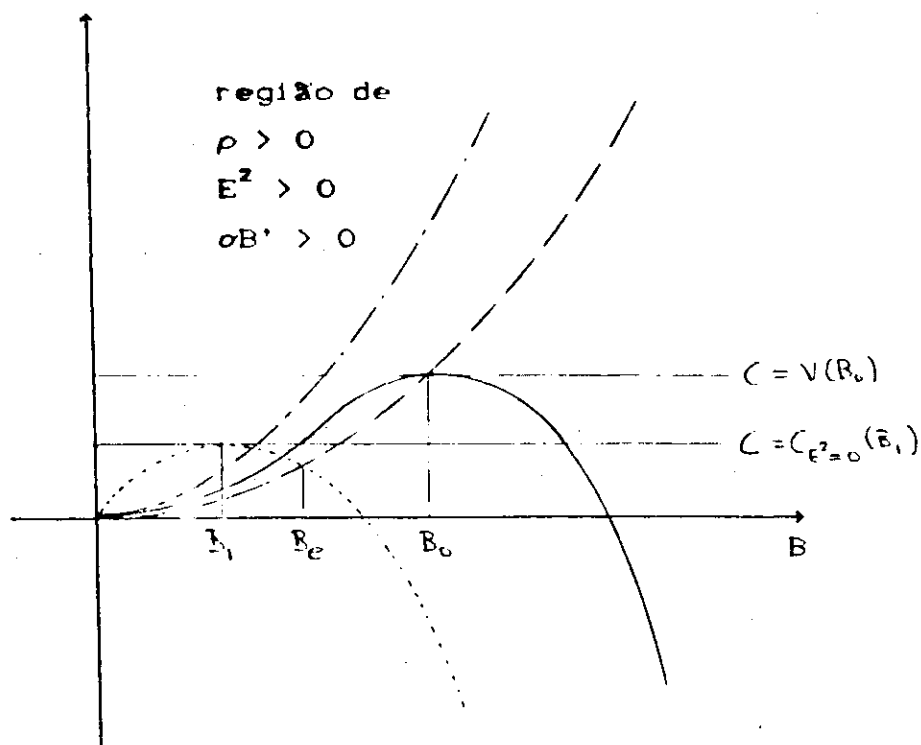


FIGURA 3.32 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}$, $C_{E^2=0}$ e $C_{\sigma=0}$

Usando (3.34) segue que o ponto B_e (ver fig. 3.32) é dado por:

$$B_e^2 = \frac{\sqrt{-\lambda_2(r-r_2)^2 + 2(1-r)(r-r_0)(-\lambda H_0^2)} + \lambda_2(r-r_2)}{2(1-r)(-\lambda)} \quad (3.78)$$

Derivando (3.34) em relação a B e igualando a zero obtemos B_1 :

$$B_1^2 = \frac{\sqrt{-\lambda_2 r^2 (r-r_1)^2 + 2(1-r)(r-r_0)(r+2)(\alpha-1)(-\lambda H_0^2)} + \lambda_2 r (r-r_1)}{2(1-r)(r+2)(-\lambda)} \quad (3.79)$$

Vamos mostrar agora que $B_1 < B_e$. Note que podemos escrever B_e^2 e B_1^2 da seguinte forma:

$$B_e^2 = \sqrt{\mu^2 + \nu H_0^2} - \mu$$

e

$$B_1^2 = \sqrt{\gamma^2 + \delta H_0^2} - \gamma$$

onde

$$\mu = \frac{\lambda_2(r-r_2)}{2\lambda(1-r)} ; \quad \nu = \frac{r-r_0}{2(-\lambda)(1-r)} \quad (3.80)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_2 r(r-r_1)}{2\lambda(1-r)(r+2)} ; \quad \delta = \frac{(r-r_0)(\alpha-1)}{2(-\lambda)(1-r)(r+2)}$$

É fácil ver que $\delta < \nu$. Seja g uma função de H_0 dada por:

$$g(H_0) = B_e^2 - B_1^2$$

Note que $g(0)=0$ e que

$$\lim_{H_0 \rightarrow \infty} g(H_0) = (\sqrt{\nu} - \sqrt{\delta}) H_0 > 0.$$

Vamos supor por absurdo que $B_1^2 > B_e^2$, nesse caso a função g tem que admitir pelo menos um valor de H_0 onde $g'(H_0)=0$ pois caso contrário g não assumiria valores negativos. Derivando g e igualando a zero obtemos:

$$H_0^2 = \frac{\delta^2 \mu^2 - \nu^2 \gamma^2}{\gamma \nu (\nu - \delta)} \quad (3.81)$$

Para que a equação acima tenha solução temos que ter $\delta\mu - \nu\gamma > 0$, porém:

$$\delta\mu - \nu\gamma = \frac{(\lambda-3)(r-r_3)(2r+1 + \sqrt{\frac{(3\lambda-1)(5-3\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)}})}{8(2+r)(1-r)^2(1+\lambda)} < 0 \quad (3.82)$$

de forma que chegamos a uma contradição.

Como $B_1^2 < B_e^2$, pela fig. 3.32 vemos que a positividade de E^2 está garantida se $C_{E=0}^2(B_1) \leq C \leq V(B_0)$. Segue que para existir soluções temos que ter $C_{E=0}^2(B_1) \leq V(B_0)$. Essa relação implica que, dado valores para λ e r , existirá sempre um limite superior para H_0 cujo valor só poderá ser obtido numericamente devido a complexidade da expressão $C_{E=0}^2(B_1)$. Isto será exemplificado no próximo capítulo para um dado valor de α no caso de uma solução com limite tipo Bertotti-Robinson.

KS6. $A > 0, H_0 \neq 0$

Como no caso anterior temos que impor a relação $\alpha \geq 1$, para que E^2 seja sempre positivo. As curvas $V(B)$, $C_{\rho=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$ (tipo III) têm o mesmo comportamento do caso KS3. A curva $C_{E^2=0}(B)$, dada por (3.34), tem a forma mostrada na figura abaixo:

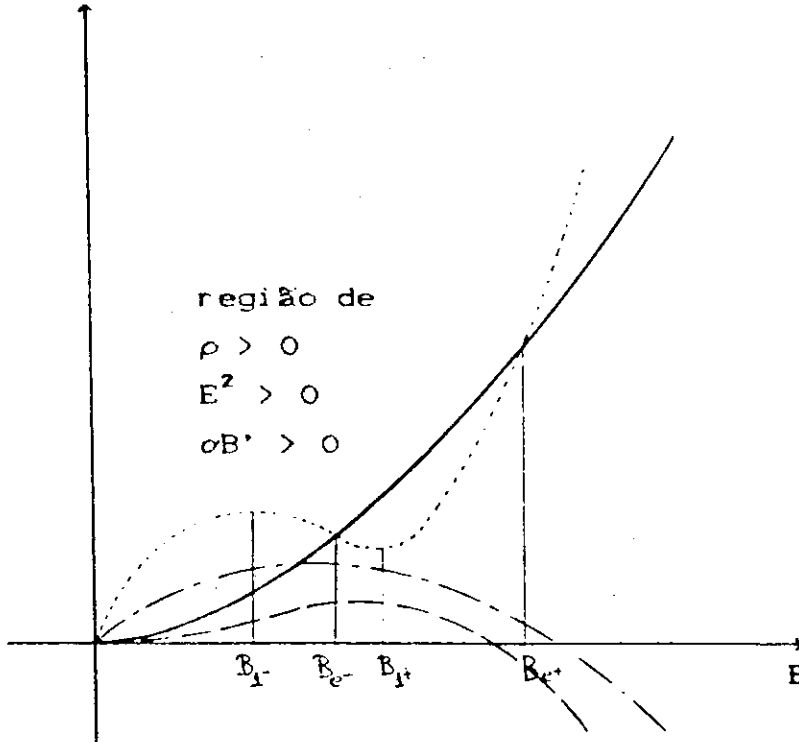


FIGURA 3.33 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}$, $C_{E^2=0}$ e $C_{\sigma=0}$

Para que exista solução física a curva $C_{E^2=0}(B)$ tem que ter uma parte abaixo da curva $V(B)$. Isso ocorre se:

$$\Delta H_0^2 \leq \frac{(r-r_2)^2}{2(1-r)(r-r_0)} \quad (3.83)$$

pois nesse caso a equação $C_{E^2=0}(B) - V(B) = 0$ admite duas soluções reais B_{e+} e B_{e-} dadas por:

$$B_{e\pm} = \frac{r-r_2 \pm \sqrt{(r-r_2)^2 - 2\Delta H_0^2(r-r_0)(1-r)}}{2\Delta(1-r)} \quad (3.84)$$

Os pontos $B_{1\pm}$ (veja fig. 3.33) são dados por:

$$B_{1\pm}^2 = \frac{r(r-r_1) \pm \sqrt{r^2(r-r_1)^2 - 2\lambda(r+2)(\alpha-1)(r-r_0)(1-r)H_0^2}}{2\lambda(1-r)(r+2)} \quad (3.85)$$

onde B_{1-} corresponde a um ponto de máximo e B_{1+} corresponde a um ponto de mínimo. Vamos mostrar agora, de maneira similar ao caso anterior, que $B_{1-}^2 < B_{e-}^2$. Usando as expressões (3.80) com λ no lugar de $-\lambda$ podemos escrever:

$$B_{e-}^2 = \mu - \sqrt{\mu - \nu H_0^2}$$

$$B_{1-}^2 = \gamma - \sqrt{\gamma - \delta H_0^2}$$

Note que se $g(H_0^2) = B_{e-}^2 - B_{1-}^2$ então $g(0) = 0$. Porém, diferente do caso anterior, aqui H_0^2 tem um valor máximo dado por μ^2/ν . No entanto podemos mostrar que $g(\sqrt{\mu^2/\nu}) > 0$. De fato, temos que:

$$g(\sqrt{\mu^2/\nu}) = \mu - \gamma + \sqrt{\frac{\nu\gamma^2 - \delta\mu^2}{\nu}}$$

A curva $\lambda = f_1(r)$ dada pela eq. (3.76) fornece os pontos onde $\mu = \gamma$.

Para $r > f_1$ temos que $\mu > \gamma$. Além disso usando (3.80) temos que:

$$\nu\gamma^2 - \delta\mu^2 = \frac{r^3(1+\lambda)^3 + r^2(3\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 11) + 12r(1-\lambda)^3}{8(2+r)^2(1-r)^3(1+\lambda)^4[(1+\lambda)r+3-\lambda]} \quad (3.86)$$

É fácil ver que para λ e r nos intervalos $[1/3, 1]$ e $[0, 1]$ respectivamente temos que $\nu\gamma^2 - \delta\mu^2 > 0$. Assim $g(\sqrt{\mu^2/\nu})$ é real e positivo. Como no caso anterior, a derivada de g se anula somente se $\nu\gamma - \delta\mu$ for negativo, porém já mostramos que essa expressão é positiva. Segue então que $g' > 0$, logo $B_{e-}^2 > B_{1-}^2$.

Pela fig. 3.33 vemos que as soluções físicas devem ter C de tal forma que $C_{E=0}^2(B_{1-}) \leq C \leq V(B_{e+})$. Além dessa condição, temos que impor como antes que $C_{E=0}^2(B_{1-}) \leq V(B_{e+})$. Essa relação implica em um

vínculo entre r , λ e H_0 , que deve ser analisado numericamente devido a complexidade das expressões de $C_{E^2=0}^2(B_{1-})$ e $V(B_{e+})$.

KS7. $A=0$, $H_0 \neq 0$

Novamente temos que impor $\alpha \geq 1$. As curvas $V(B)$, $C_{\rho=0}^2(B)$ e $C_{\sigma=0}^2(B)$ (tipo II) são iguais as do caso KS4. A curva $C_{E^2=0}^2(B)$ (eq. 3.34)) se modifica conforme mostra a figura abaixo:

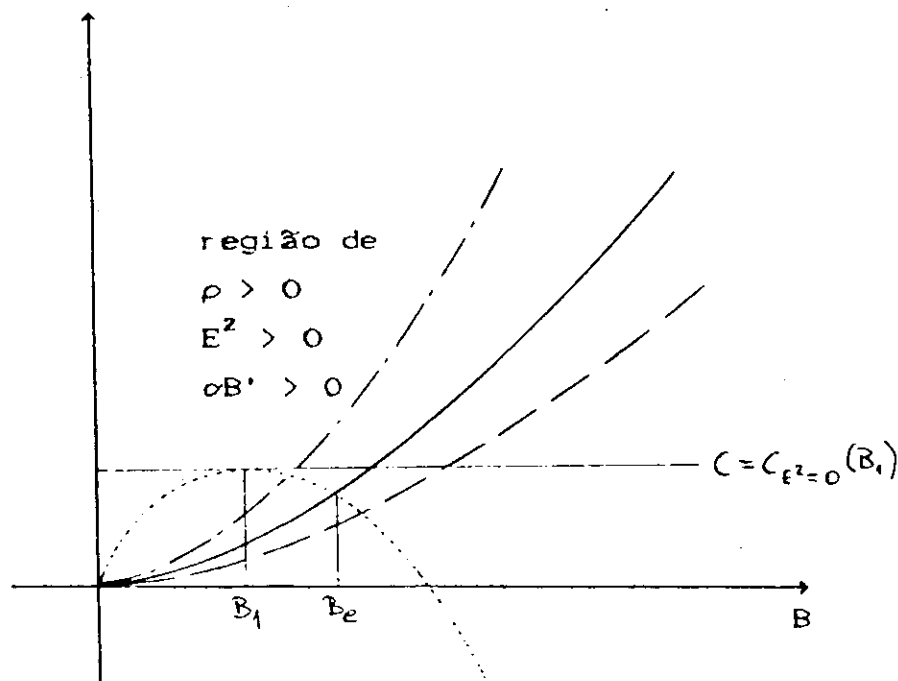


FIGURA 3.34 - Gráfico de $V(B)$, $C_{\rho=0}^2$, $C_{E^2=0}^2$ e $C_{\sigma=0}^2$

O ponto B_e é dado por (ver eq. (3.38))

$$B_e^2 = \frac{-(r-r_0)H_0}{2\lambda_2(r-r_0)} \quad (3.87)$$

O ponto B_1 é dado por (ver eq. (3.38))

$$B_1^2 = \frac{(1-\alpha)(r-r_0)H_0}{2\lambda_2 r(r-r_1)} \quad (3.88)$$

Note que $B_1^2 - B_e^2$ fornece uma expressão com numerador igual ao da eq. (3.86) e denominador positivo. Logo $B_1^2 \leq B_e^2$.

Assim as soluções físicas são tais que $C \geq C_{E=0}^2(B_1)$, onde

$$C_{E=0}^2(B_1) = \frac{(r-r_0)(1+\lambda)H_0^2}{2\alpha(1-r)(2r+1)(1-\lambda)} \left[\frac{(1-\alpha)(r-r_0)H_0^2}{2\lambda_2 r(r-r_1)} \right]^{\alpha-1} \quad (3.89)$$

3.4 - CASOS PARTICULARES

a) $r=0$ ($\alpha=\pm\infty$)

Quando $r=r_0$ não há necessidade de substituição de variável para integrar a eq. (3.17). De fato, ela se reduz à:

$$B^2 = \frac{(1+\lambda)^2}{2(1-\lambda)(5-3\lambda)} (\lambda_2 - 2\Lambda B^2) \quad (3.90)$$

Quando $\lambda=1$ temos que p_1 dado por (3.18) é nulo. De (3.17) segue que B tem que ser constante igual a $\lambda_2/2\Lambda$. Nesse caso obtemos uma solução tipo Bertotti-Robinson. Vamos supor então que $\lambda \neq 1$. De (3.14) segue que:

$$\rho = \frac{\lambda_2(\lambda-3) + 8\Lambda B^2}{(1-\lambda)(5-3\lambda)B^2} \quad (3.91)$$

Com relação a positividade de ρ vamos dividir a análise em quatro casos dependendo do sinal de λ_2 e Λ . Nenhum desses casos fornece soluções físicas:

i) $\lambda_2 < 0, \Lambda < 0$

De (3.90) vemos que para B^2 ser positivo B tem que satisfazer a relação $B^2 > (\lambda_2/2\Lambda)$. Porém de (3.91) vemos que nesse caso $\rho < 0$.

ii) $\lambda_2 \leq 0, \Lambda \geq 0$

De (3.90) vemos que $B^2 \leq 0$.

³ Quando $\lambda_2 = \Lambda = 0$ segue de (4.91) que $\rho = 0$. Nesse caso não podemos ter uma corrente elétrica pois não existirão portadores de carga.

$$iii) \lambda_2 \geq 0, \Lambda \leq 0$$

De (3.91) vemos que $\rho \leq 0$.

$$iv) \lambda_2 > 0, \Lambda > 0$$

De (3.90) e (3.91) vemos que B^2 e ρ não podem ser simultaneamente positivos.

No processo de integração da eq. (3.22) aparecem dois casos particulares que são $\alpha=0$ e $\alpha=-1$. Note que o denominador de (3.25) se anula para $\alpha=0$ ou $\alpha=-1$.

$$b) \alpha=0$$

De (3.21) vemos que $\alpha=0$ implica que:

$$\lambda = - \frac{r^2 + 1}{r^2 + 4r + 1} \quad (3.92)$$

O gráfico de $\lambda(r)$ está mostrado na figura abaixo:

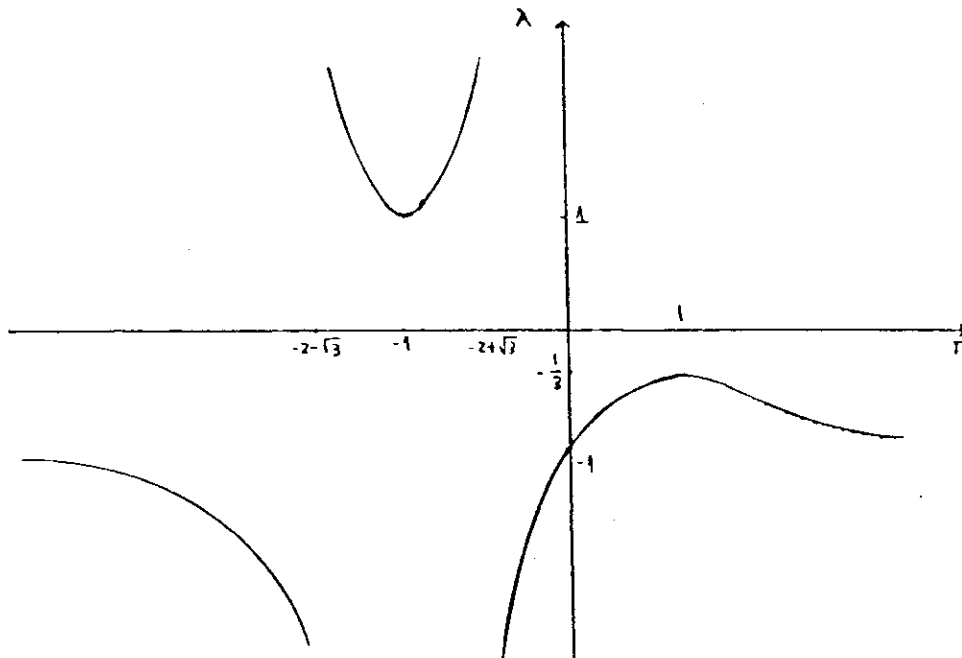


FIGURA 3.35 - Gráfico de $\lambda(r)$

Uma vez que $-1/3 \leq \lambda \leq 1$, pela fig. 3.35 vemos que os únicos valores que r pode assumir é $r=-1$ se $\lambda=-1$ e $r=1$ se $\lambda=-1/3$. O caso $\lambda=-r=1$

fornece uma solução tipo Bertotti-Robinson como pode ser visto de (3.17). Vamos analisar então o caso $\lambda = -1/3$, $r=1$. A eq. (3.17) nos dá:

$$\ddot{B} - \frac{\lambda_2}{6B} + \frac{\Lambda B}{3} = 0 \quad (3.93)$$

A integral primeira é dada então por:

$$\dot{B}^2 - \frac{\lambda_2}{3} \ln B + \frac{\Lambda B^2}{3} = C \quad (3.94)$$

Usando (3.94) nas eqs. (3.14) e (3.13) obtemos:

$$\rho = \frac{1}{B^2} \left(\lambda_2 \ln B - \frac{\lambda_2}{2} + 3C \right) \quad (3.95)$$

$$E^2 = - \frac{\lambda_2}{B^2} - \frac{H_0^2}{B^4} \quad (3.96)$$

Para que E^2 seja positivo em algum intervalo de B temos que impor $\lambda_2 < 0$, isto é, o modelo tem que ser do tipo Kantowski-Sachs.

Vamos analisar o sinal de ρ através do método do potencial efetivo. De (3.94) obtemos

$$V(B) = - \frac{\lambda_2}{3} \ln B + \frac{\Lambda B^2}{3} \quad (3.97)$$

e de (3.95) obtemos:

$$C_{\rho=0}(B) = - \frac{\lambda_2}{6} (2 \ln B - 1) \quad (3.98)$$

e

$$V(B) - C_{\rho=0}(B) = \frac{-\lambda_2 + 2\Lambda B^2}{6} \quad (3.99)$$

Para $\Lambda \geq 0$ os gráficos de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ estão mostrado na figura abaixo:

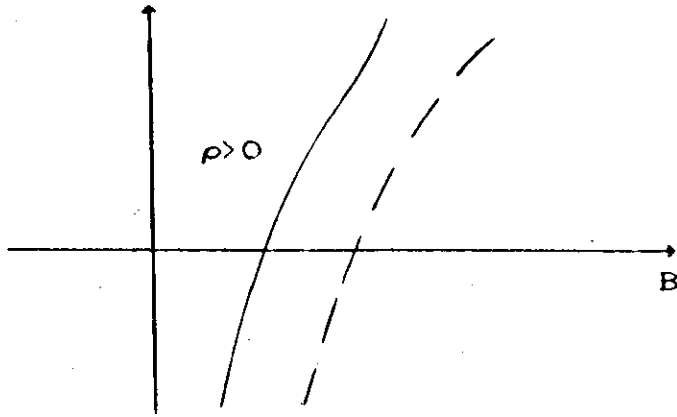


FIGURA 3.36 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Observe que todas as soluções partem da singularidade $B=0$, expandem-se até um raio máximo e contraem-se até a singularidade. Note de (3.96) que H_0 tem que ser nulo para garantir a positividade de E^2 .

Para $\Lambda < 0$ o gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ está mostrado na fig. 3.37:

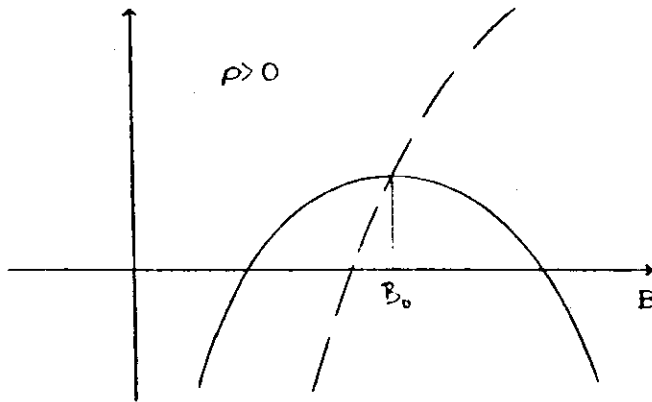


FIGURA 3.37 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Para que ρ seja positivo temos que impor $C \leq V(B_0)$. Se $C < V(B_0)$ o modelo parte da singularidade, expande até um raio máximo e retorna a singularidade. Se $C = V(B_0)$ temos duas possibilidades: i) o modelo parte da singularidade $B=0$ e se expande até a solução tipo Bertotti-Robinson $B=B_0$, ii) o modelo parte da solução TBR e

se contrai até a singularidade $B=0$. Em ambos os casos temos que impor $H_0=0$ para garantir a positividade de E^2 .

O sinal de σ pode ser obtido da eq. (3.11) que nos dá:

$$\sigma = -\frac{B}{\dot{B}} \quad (3.100)$$

Assim a condutividade é negativa durante a fase de expansão do modelo e é positiva durante a fase de contração. É possível ter um modelo com σ positivo durante toda a evolução quando $C=V(B)$ no caso ii) descrito no parágrafo anterior.

c) $\alpha=-1$

Para $\alpha=-1$ a eq. (3.21) nos dá que:

$$\lambda = -\frac{r^2+r+4}{r(r+5)} \quad (3.101)$$

O gráfico de $\lambda(r)$ está mostrado na figura abaixo:

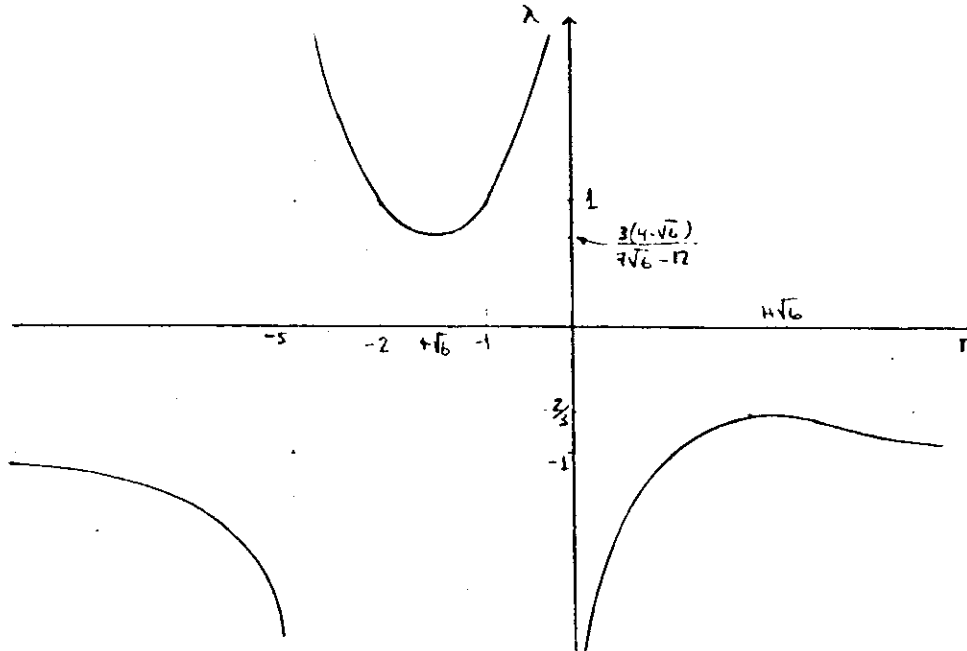


FIGURA 3.38 - Gráfico de $\lambda(r)$

Como $-1/3 \leq \lambda \leq 1$ segue pela fig. 3.38 que r está limitado ao

intervalo $-2 \leq r < -1$. A eq. (3.22) se reduz à:

$$B'' + \frac{\lambda_2(1-r)}{(2r+1)(r+1)B^3} - \frac{2\Lambda(1-r)}{(2r+1)(r+1)B} = 0 \quad (3.102)$$

A integral primeira é dado por (3.24) onde $V(B)$ é:

$$V(B) = \frac{\lambda_2(1-r)}{(2r+1)(r+1)B^2} - \frac{4\Lambda(1-r) \ln B}{(2r+1)(r+1)} \quad (3.103)$$

De (3.37), (3.102), (3.24) e (3.103) obtemos

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{-\lambda_2 r^2(r+5)}{2(2r+1)(r+1)B^2} - \frac{2r(r^2+4r-5)\Lambda}{(2r+1)(r+1)} \ln B + \\ & + \frac{r(r+5)\Lambda}{(2r+1)(r+1)} + \frac{r(r+5)C}{2} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Invertendo a eq. (3.104) obtemos:

$$C_{\rho=0}(B) = \frac{\lambda_2 r}{(2r+1)(r+1)B^2} + \frac{4(r-1)\Lambda}{(2r+1)(r+1)} \ln B - \frac{2\Lambda}{(2r+1)(r+1)} \quad (3.105)$$

De (3.104) e (3.105) obtemos:

$$V(B) - C_{\rho=0}(B) = \frac{-\lambda_2 + 2\Lambda B^2}{(2r+1)(r+1)B^2} \quad (3.106)$$

Existem quatro possibilidades de comportamento de $V(B)$ dependendo do sinal de λ_2 e Λ . Nenhuma dessas possibilidades admite soluções físicas, de fato: Usando (3.103), (3.105) e (3.106) podemos traçar as curvas $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$ conforme mostrado na figura abaixo:

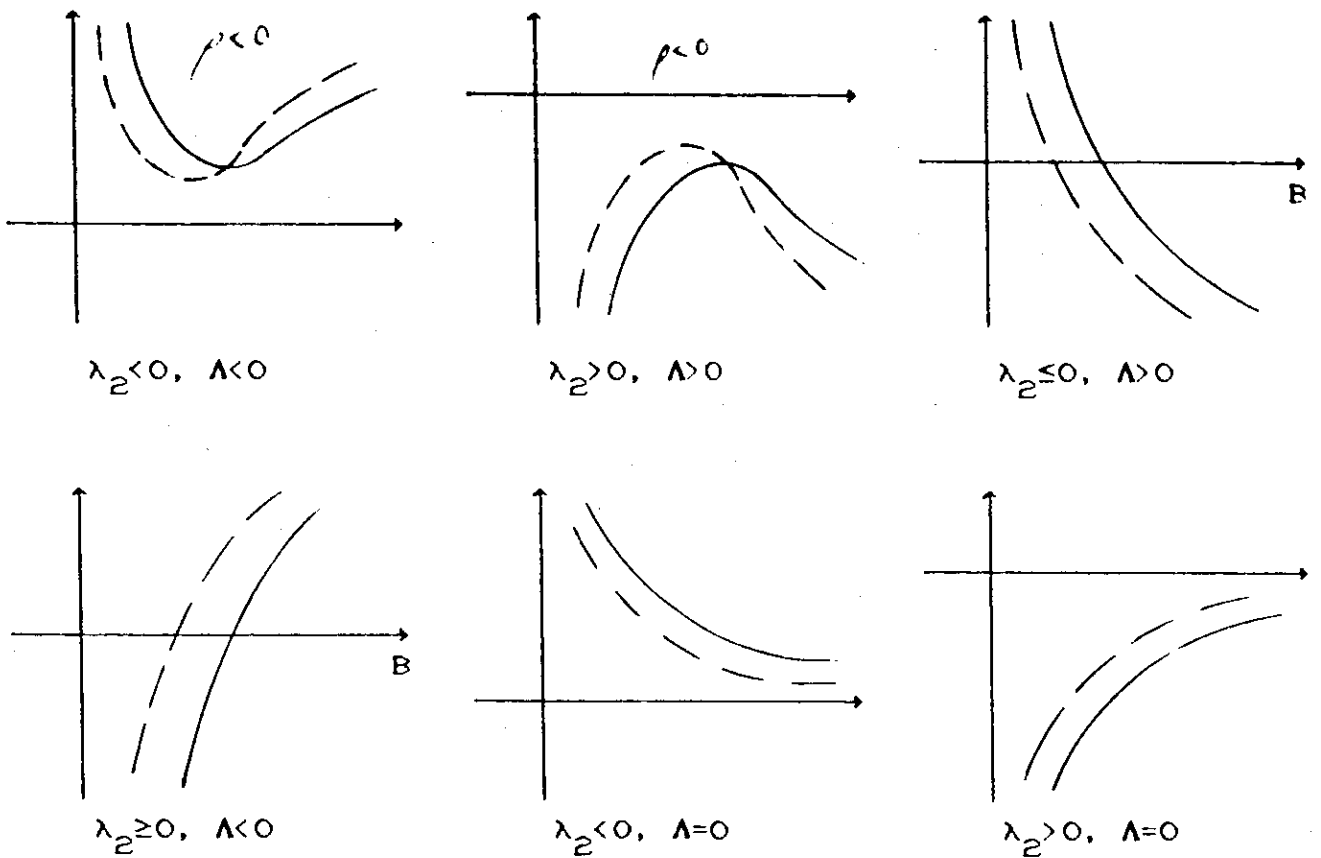


FIGURA 3.39 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{\rho=0}(B)$

Analisando os gráficos acima vemos que o caso $\alpha = -1$ não admite soluções físicas.

d) $\alpha = 1$

Quando $\alpha = 1$ não podemos inverter a eq. (3.32) para obter $C_{\sigma=0}(B)$. Da eq. (3.21) temos que $r = 2(1-\lambda)/(1+\lambda)$ onde $1/3 \leq \lambda \leq 1$, assim a eq. (3.32) se reduz à:

$$\sigma = \frac{B}{(5-3\lambda)(1+\lambda)E^2 B^2} \left[2(3\lambda-1)\Lambda + \frac{\lambda_2(1-\lambda)}{B^2} \right] B' \quad (3.107)$$

Os únicos casos com ρ e E^2 positivos admitindo $\alpha = 1$ são os casos KS1, KS3 e KS4. Para KS1 ($\Lambda < 0$) e KS4 ($\Lambda = 0$) temos que $\sigma B' < 0$. Para KS3 ($\Lambda > 0$) temos que $\sigma B'$ é negativo para $B < B_c$ onde

$$B_c = \frac{-\lambda_2(1-\lambda)}{2(3\lambda-1)\Lambda} \quad (3.108)$$

e $\alpha B'$ é positivo para $B > B_c$.

e) $r = -1$

De (3.21) segue que se $r = -1$ então $\alpha = 1$. Note que nesse caso o denominador da eq. (3.33) é nulo. Assim temos que usar diretamente a eq. (3.29) para análise do sinal de ρ . De (3.29) obtemos:

$$\rho = \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{2\Lambda B^2 - \lambda_2}{B^2} \right] \quad (3.109)$$

De (3.25) temos que:

$$V(B) = \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} (-\lambda_2 B^2 + \Lambda B^4) \quad (3.110)$$

Existem quatro tipos de gráficos de $V(B)$ dependendo do sinal de λ_2 e Λ . Vamos mostrar que não há soluções físicas em nenhum caso.

1) $\lambda_2 \geq 0, \Lambda \leq 0$

De (3.109) segue que $\rho \leq 0$. Portanto esse caso não admite solução física.

1i) $\lambda_2 > 0, \Lambda > 0$

O gráfico de $V(B)$ e os pontos onde $\rho = 0$ estão mostrados na fig. 3.40:

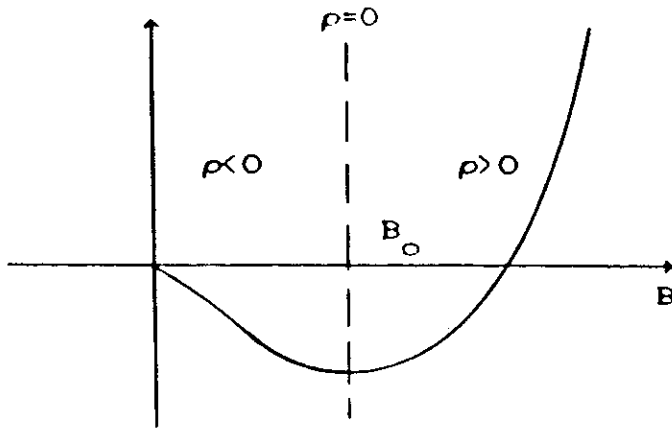


FIGURA 3.40 - Gráfico de $V(B)$ e $\rho=0$

A esquerda da curva $B=B_0$ temos que $\rho < 0$ e a direita temos que $\rho > 0$. É fácil ver pela fig. 3.40 que não há soluções físicas.

Para as possibilidades restantes será necessário analisar o sinal de E^2 . De (3.34) obtemos:

$$C_{E^2=0}(B) = \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} \left[\frac{\lambda_2(\lambda-1)}{\lambda+1} - \Lambda B^2 \right] B^2 \quad (3.111)$$

Subtraindo (3.19) de (3.20) obtemos:

$$V(B) - C_{E^2=0}(B) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \left[\frac{-\lambda_2\lambda}{\lambda+1} + \Lambda B^2 \right] B^2 \quad (3.112)$$

iii) $\lambda_2 < 0, \Lambda < 0$

Os gráficos de $V(B)$, $\rho=0$ e $C_{E^2=0}(B)$ estão mostrados na figura abaixo:

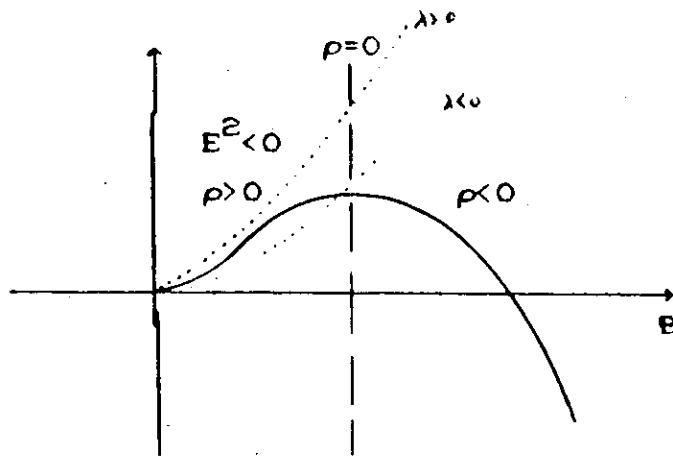


FIGURA 3.41 - Gráfico de $V(B)$, $\rho=0$ e $C_{E^2=0}^z(B)$

Pela fig. 3.41 vemos que não há soluções físicas nesse caso.

iv) $\lambda_2 \leq 0$, $\Lambda \geq 0$

O gráfico de $V(B)$ e $C_{E^2=0}^z(B)$ estão mostrados abaixo:

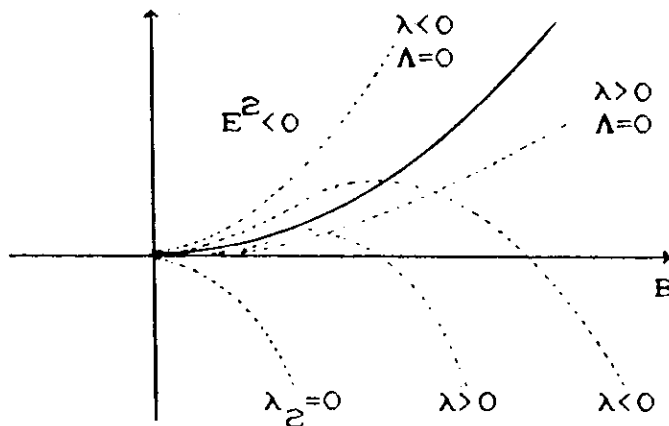


FIGURA 3.42 - Gráfico de $V(B)$ e $C_{E^2=0}^z(B)$

Note que não há soluções com E^2 positivo.

f) $r = -1/2$

De (3.29), (3.30) e (3.32) podemos ver que quando $r = -1/2$ não é possível inverter as expressões de ρ , E^2 e σ para obter $C_{\rho=0}^z(B)$, $C_{E^2=0}^z(B)$ e $C_{\sigma=0}^z(B)$. Analisaremos o sinal dessas grandezas diretamente de suas expressões. Note da eq. (3.21) que quando

$r = -1/2$ temos $\alpha = 1/2$. Assim, as eqs. (3.29) e (3.30) se reduzem a:

$$\rho = \frac{4(1+\lambda)}{5-3\lambda} \left[2\Lambda - \frac{\lambda_2}{B^2} \right] \quad (3.113)$$

$$E^2 = \frac{2(1+\lambda)}{5-3\lambda} \left[-3\Lambda + \frac{(3\lambda-1)\lambda_2}{(1+\lambda)B^2} \right] \quad (3.114)$$

Observe que para Bianchi III, o comportamento de $V(B)$, mostrado nas figs. 3.10, 3.11 e 3.12, é tal que o modelo sempre atinge a singularidade $B=0$ ou expande para sempre. Tomando os limites $B \rightarrow 0$ e $B \rightarrow \infty$, podemos ver de (3.113) e (3.114) que ρ e E^2 não podem ser simultaneamente positivos.

Para Bianchi I ($\lambda_2 = 0$), note que ρ e E^2 têm sinais contrários, portanto nesse caso também não há soluções físicas.

Para Kantowski-Sachs ($\lambda_2 < 0$) existem soluções físicas. Vamos dividir a análise em três casos:

i) $\Lambda > 0$

De (3.113) vemos que ρ é positivo definido. De (3.114) vemos que para E^2 ser positivo λ tem que estar no intervalo $-1/3 \leq \lambda \leq 1/3$ (que é equivalente a condição $r_2 < r = -1/2$) e B tem que ter um valor máximo dado por:

$$B_{\text{máx}}^2 = \frac{\lambda_2(3\lambda-1)}{3\Lambda(1+\lambda)} \quad (3.115)$$

Assim o valor de C tem que ser tal que $0 \leq C \leq V(B_{\text{máx}})$. Note que $B_{\text{máx}}^2$ coincide com B_e^2 dado por (3.75) quando $r = -1/2$. Assim esse caso pode ser incluído como caso limite na análise feita no caso KS3.

ii) $\Lambda < 0$

De (3.113) vemos que $\rho > 0$ desde que $B \leq B_0$. De (3.114) vemos que E^2 é positivo para $B \leq B_0$ e $-1/3 \leq \lambda \leq 1/3$ (ou $r > r_2$). Portanto esse caso pode ser incluído na análise feita no caso KS1.

iii) $\Lambda = 0$

De (3.113) vemos que $\rho > 0$ e de (3.114) vemos que λ tem que estar no intervalo $-1/3 \leq \lambda \leq 1/3$ para que E^2 seja positivo. Como $r = -1/2$ esse intervalo para λ equivale a condição $r > r_2$ (veja fig. 3.1). Assim esse caso pode ser incluído na análise feita no caso KS4.

g) $r=1$

Quando $r=1$ não podemos inverter as expressões de E^2 e σ para obtermos $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$. Porém a análise do sinal de E^2 e σ é bastante simples pois de (3.13) e (3.11) obtemos:

$$E^2 = - \frac{\lambda_2}{B^2} \quad (3.116)$$

$$\sigma = - \frac{B}{B} \quad (3.117)$$

Assim E^2 só é positivo nos modelos tipo Kantowski-Sachs ($\lambda_2 < 0$), e o sinal de σ é contrário ao de B . Esse caso pode ser incluído como caso limite da análise feita no caso KS1 e KS3.

h) $\lambda=1$

Quando $\lambda=1$ não podemos inverter E^2 e σ para obter $C_{E^2=0}(B)$ e $C_{\sigma=0}(B)$. As eqs. (3.30) e (3.32) se reduzem à:

$$E^2 = \frac{2}{1+r} \left[(r-1)\Lambda - \frac{\lambda_2 r}{B^2} \right] \quad (3.118)$$

$$\sigma = \frac{2}{1+r} \left[2(r-1)\Lambda + \frac{\lambda_2 r}{B^2} \right] B' \quad (3.119)$$

Para Bianchi III não há soluções pois, da análise feita na seção 3.1, os únicos casos que têm ρ positivo são $\alpha > 0$ com $\Lambda \geq 0$. Se $\Lambda = 0$, pela figura 3.12 vemos que r tem que ser positivo porém por

(3.118) segue que $E^2 < 0$. Suponha agora que $\Lambda > 0$. De (3.21) segue que $r > -1$. Pela fig. 3.11 vemos que r tem que ser maior que $-1/2$ e podemos ver que todos os modelos partem da singularidade $B=0$. De (3.118) segue que r tem que ser negativo para que E^2 possa ser positivo no limite $B \rightarrow 0$. De (3.118) podemos ver que quando $-1/2 < r < 0$, E^2 se torna negativo sempre que $B > \lambda_2/3\Lambda$. Porém da fig. 3.11 podemos ver que B sempre assume valores maiores que B_0 (que é dado por $\lambda_2/2\Lambda$) logo E^2 sempre fica negativo em um certo intervalo de B . Portanto Bianchi III não admite soluções.

O modelo Bianchi I por sua vez admite soluções físicas com campo elétrico e condutividade constantes para esse caso particular. Da análise feita na seção 3.2, os únicos casos com ρ positivos são os casos $\alpha > 0$. Quando $\Lambda = 0$, segue que $E^2 = \sigma = 0$. Quando $\Lambda < 0$, da fig. 3.17 vemos que r tem que ser maior que 1, porém de (3.118) segue que $E^2 < 0$. Quando $\Lambda > 0$ e $r > 1$ de (3.118) segue que E^2 é positivo e constante dado por:

$$E^2 = \frac{2(r-1)\Lambda}{r+1} \quad (3.120)$$

De (3.119) segue que

$$\sigma = \frac{4(1-r)AB'}{1+r} \quad (3.121)$$

Assim σ é negativo quando $B' > 0$ e positivo quando $B' < 0$. Note pela fig. 3.16 que o modelo parte da singularidade, expande até um raio máximo e retorna a singularidade.

O modelo Kantowski-Sachs também admite soluções. Na seção 3.3 vimos que para ρ ser positivo temos que ter $\alpha > 0$ ou seja $r > -1$. Para r pertencendo ao intervalo $(-1/2, 1)$ podemos incluir esse caso como limite dos casos KS1, KS3 e KS4. Para r no intervalo $(-1, -1/2)$ vemos das figs. 3.24, 3.25 e 3.26 que $\rho < 0$. Para $r > 1$ temos que $E^2 > 0$

somente se $\Lambda \geq 0$. Note pelas figs. 3.24 e 3.26 que o modelo parte da singularidade, expande até um raio máximo e retorna a singularidade. Da eq. (3.119) vemos que o modelo tem inicialmente condutividade negativa e ela troca de sinal pelo menos uma vez quando a expansão se reverte.

3.5 - CONCLUSÃO

Analisamos através do método do potencial efetivo as equações de Einstein-Maxwell para os modelos Bianchi I, III e Kantowski-Sachs tendo como conteúdo material fluido perfeito mais campo eletromagnético. Os modelos estão em regime de magnetohidrodinâmica pois as equações de Maxwell admitem um corrente elétrica tipo espaço obedecendo a lei de Ohm. Impusemos que uma equação de estado do tipo $p = \lambda \rho$ fosse obedecida com $\lambda \in (-1/3, 1)$ e nos restringimos a analisar os modelos com $A = B^r$. Nessas condições encontramos soluções para Bianchi III que partem de um raio infinito e se contraem até a singularidade $B=0$. A condutividade elétrica é positiva e a região permitida para os parâmetros r e λ está mostrada na fig. 3.13. Apresentamos soluções analíticas exatas quando $\alpha = 1/k$, $k=2,3,4, \dots$. Encontramos soluções para Bianchi I do mesmo tipo das encontradas para Bianchi III porém a região dos parâmetros r e λ é a região abaixo da curva $\alpha=1$ da fig. 3.18. A região acima da curva $\alpha=1$ fornece soluções que se expandem com condutividade positiva que já eram conhecidas na literatura [2].

Para Kantowski-Sachs encontramos duas classes de soluções: A primeira contem as soluções que partem da singularidade $B=0$

expandem até um raio máximo e retornam a singularidade. Essas soluções são de vários tipos: Elas admitem constante cosmológica e campo magnético nulo ou não nulo e elas podem ser isotrópicas e anisotrópicas. A região dos parâmetros r e λ cobrem todas a fig. 3.18. Essas soluções, no entanto, sempre têm uma fase em que a condutividade é negativa e uma fase em que ela é positiva. A segunda classe são as soluções que têm as soluções tipo Bertotti-Robinson (TBR) como configuração limite. Elas podem ser de dois tipos: Podem partir da singularidade $B=0$ e expandir até a solução TBR com condutividade negativa definida ou partir da solução TBR e se contrair até a singularidade com condutividade positiva definida. Devido a importância dessas últimas do ponto de vista de soluções exatas em cosmologia, analisámo-las em separado no capítulo 4.

Dentro das restrições da equação de estado $p=\lambda\rho$ e da relação $A=B^r$, esgotamos completamente as possibilidades de análise para os modelos Bianchi I, II e Kantowski-Sachs no sentido de garantir para um dado valor de r e de λ se a solução é física ou não.

CAPÍTULO 4 - MODELOS KANTOWSKI-SACHS COM LIMITE TIPO
BERTOTTI-ROBINSON^[4]

Uma vez que a condutividade elétrica só é negativa quando o conteúdo material está em um estado longe do equilíbrio termodinâmico, as soluções com condutividade positiva são mais importantes do ponto de vista de soluções exatas.

Nesse capítulo vamos considerar apenas as soluções encontradas no capítulo anterior que têm a solução tipo Bertotti-Robinson como caso limite, pois para essas soluções é possível ter a condutividade positiva definida durante toda a evolução do modelo.

Para análise da positividade de ρ , $E^{\hat{z}}$ e σ usaremos um método diferente do método usado no capítulo anterior, porém haverá uma certa repetição em alguns pontos. A análise das soluções desse capítulo está mais detalhada do que a que foi apresentada das mesmas soluções no capítulo anterior, e também apresentaremos algumas soluções analíticas novas.

As soluções com limite tipo Bertotti-Robinson são as soluções tipo Kantowski-Sachs com Λ negativo e $C=V(B_0)$. A métrica do modelo Kantowski-Sachs pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = dt^2 - A(t)^2 dx^2 - B(t)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2) \quad (4.1)$$

Quando A e B são constantes, essa métrica é um caso limite das soluções encontradas por Bertotti^[60] e Robinson^[61]. Bertotti estudou as variedades que são produto de duas superfícies de

curvatura constante. No caso da métrica (4.1) com A e B constantes, a primeira superfície tem a métrica:

$$ds_+^2 = dt^2 + A^2 dx^2$$

e a segunda superfície tem a métrica:

$$ds_-^2 = -B^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

Um tensor é dito decomponível se as componentes com índices mistos das duas superfícies são nulas e se as componentes relativas a primeira superfície só dependem das coordenadas t e x assim como as componentes relativa a segunda só dependem de θ e ϕ . De (4.1) vemos que a métrica acima é decomponível e nesse caso se diz que o espaço-tempo é decomponível. Segue então que o tensor de Ricci é decomponível e portanto terá a forma:

$$R_{\mu\nu} = K_+ g_{+\mu\nu} + K_- g_{-\mu\nu}$$

onde K_+ e K_- são as curvaturas gaussianas da primeira e da segunda superfícies respectivamente. Para a métrica (4.1) podemos ver que $K_+ = 0$ e $K_- = B^2$, assim, a primeira superfície é um plano e a segunda é uma esfera de curvatura positiva. Segue então que a solução tipo Bertotti-Robinson que é limite da métrica (4.1) é o produto de um plano por uma esfera da forma:

$$ds^2 = dt^2 - B_0^2 r^2 dx^2 - B_0^2 (d\theta^2 + \text{sen}(\theta)^2 d\phi^2) \quad (4.2)$$

4.1 - AS GRANDEZAS FÍSICAS

Para que o modelo tenha a solução TBR como limite, temos que impor $C=V(B)$, isto é,

$$C = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(r-r_0)(2\Lambda)^\alpha} \quad (4.3)$$

onde usamos as eq. (3.37) e (3.25). As eqs (3.29), (3.30) e (3.32) se reduzem a:

$$P = \frac{-2\Lambda}{(1+\lambda)(r-r_0)} \left[\frac{2(r-1)}{\alpha+1} + \frac{r}{\alpha\Lambda B^2} + \frac{2(2r+1)(r+1)}{\alpha(\alpha+1)(r-r_0)(-2\Lambda)^{\alpha+1} B^{2\alpha+2}} \right] \quad (4.4)$$

$$E^2 = \frac{-2\Lambda}{(r-r_0)} \left[\frac{(1-r)(r+2)}{\alpha+1} - \frac{r(r-r_1)}{\alpha\Lambda B^2} + \frac{2(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{\alpha(\alpha+1)(r-r_0)(1+\lambda)(-2\Lambda)^{\alpha+1} B^{2\alpha+2}} \right] - \frac{H_0^2}{B^4} \quad (4.5)$$

$$\rho = \frac{-2\Lambda}{E^2 B^{1+\alpha} (r-r_0)} \left[\frac{2(r-1)(r+2)}{\alpha+1} + \frac{r(r-r_1)}{\alpha\Lambda B^2} + \frac{2(\alpha-1)(2r+1)(1-r)(1-\lambda)}{\alpha(\alpha+1)(r-r_0)(1+\lambda)(-2\Lambda)^{\alpha+1} B^{2\alpha+2}} \right] \frac{dB}{d\eta} \quad (4.6)$$

4.2 - AS SOLUÇÕES FÍSICAS

Usando as eqs. (4.4) e (4.5) vamos mostrar que a positividade de ρ e E^2 implica que $-1/2 \leq r \leq 1$. Já mostramos que $\alpha(r-r_0) \geq 0$ (parágrafo após eq. (3.45)). Vamos mostrar agora que $\alpha > 0$. Da eq. (3.25) podemos ver que os coeficientes da função $f(B)$ definida em (3.46) são:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha(r-r_0)}$$

$$c_2 = \frac{-2\Lambda}{(\alpha+1)(r-r_0)}$$

Segue que $c_1 > 0$ e o sinal de c_2 depende de α da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha < -1 & \rightarrow c_2 > 0 \\ -1 < \alpha < 0 & \rightarrow c_2 < 0 \\ 0 < \alpha & \rightarrow c_2 > 0 \end{cases}$$

Analisando as figs. 3.3 a 3.5, vemos que a única possibilidade é $\alpha > 0$, pois a solução TBR ($B=B_0$) deve ser um máximo do potencial $V(B)$ para que existam soluções. Nesse caso as soluções TBR são instáveis e decaem em soluções tipo Kantowski-Sachs com condutividade não nula.

Existem dois intervalos possíveis para o fator de escala B que são $(0, B_0]$ e $[B_0, \infty)$. No segundo intervalo ou ρ ou E^2 fica negativo, pois quando $B \rightarrow \infty$ o primeiro termo de (4.4) e de (4.5) domina. Se $r > 1$ temos que $E^2 < 0$ e se $r \leq 1$ temos que $\rho < 0$. Assim B tem que pertencer ao intervalo $(0, B_0]$. Quando $B \rightarrow 0$ o último termo de ρ e o terceiro termo de E^2 ficam dominantes. Note que se $r > 1$ então E^2 se torna negativo e se $r < -1/2$ então ρ se torna negativo. Assim $-1/2 \leq r \leq 1$ é uma condição necessária para a positividade de ρ e E^2 , o que prova a afirmação feita.

Vamos analisar agora o sinal de ρ , E^2 e σ . Com relação ao sinal de ρ , note de (4.4) que $\rho=0$ para $B=B_0$, como esperado. E como o último termo de (4.4) cresce mais rapidamente do que os dois primeiros termos quando B diminui, segue que $\rho > 0$ para $B \in (0, B_0)$. Até esse ponto da análise existem dois tipos de soluções que são as soluções que partem da singularidade $B=0$ e expandem até $B=B_0$ e as soluções inversas que partem da solução TBI e se contraem até a singularidade.

Para analisar o sinal de E^2 vamos dividir a análise em dois casos dependendo do valor de α :

i) $0 \leq \alpha < 1$ ou $\alpha = 2$

Da eq. (4.5) vemos que nesse caso H_0 tem que ser nulo para que E^2 seja positivo quando $B \rightarrow 0$. Da eq. (4.5) vemos que o comportamento de E^2 é da forma mostrada na figura abaixo:

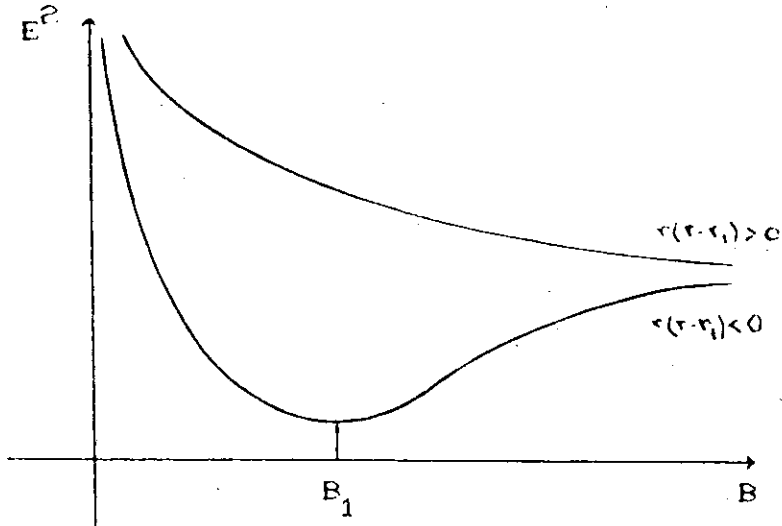


FIGURA 4.1 - Gráfico de $E^2(B)$

O valor de B_1 é:

$$B_1^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{-1}{2\lambda} \left\{ \frac{(r-1)(2r+1)(1-\lambda)}{r(r-r_0)(r-r_1)(1+\lambda)} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.7)$$

Observe que se $E^2(B_1) \geq 0$ garantiremos que $E^2 \geq 0 \forall B$. Substituindo (4.7) em (4.5) e igualando $E^2(B_1)$ a zero obtemos:

$$\left[\frac{2r(r-r_1)}{(r-1)(r+2)} \right]^{\alpha+1} - \frac{2(1-\lambda)(2r+1)}{(1+\lambda)(r+2)(r-r_0)} = 0 \quad (4.8)$$

Uma vez que a curva f corresponde aos pontos onde E^2 é nulo, segue que para os pontos acima da de f , E^2 terá sinal oposto dos pontos abaixo de f . Da eq. (4.5), vemos que para $r=1$, E^2 é positivo, logo para os pontos acima de f , E^2 é positivo para todo B . Para os pontos abaixo de f , E^2 é negativo para um certo

intervalo de B . Esse intervalo tem uma intercessão não nula com o intervalo $(0, B_0]$ como vamos mostrar agora: Da fig. 3.28 observe que como a curva $C_{F=0}(B)$ está acima da curva $V(B)$ para B pequeno. Como essas curvas só se interceptam em um ponto fora da origem, segue que se E^2 ficar negativo para algum valor de B , podemos ver da fig. 3.28 que E^2 ficará negativo para algum intervalo de B contido em $(0, B_0]$, o que prova a afirmação feita. Assim os pontos abaixo da curva f devem ser descartados pois não fornecem soluções físicas.

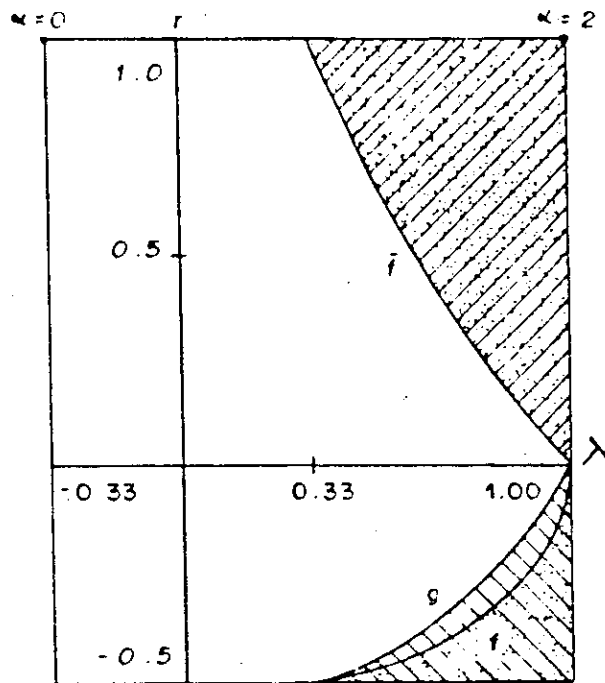


FIGURA 4.2 - Domínio de positividade de ρ , E^2 e σ

ii) $1 \leq \alpha < 2$

Aqui existem duas possibilidades: Primeiro, se $H_0 = 0$ de (3.18) vemos que E^2 é positivo. Na fig. 4.2, a região representada nesse caso corresponde a região hachuriada a acima da curva \bar{f} , que é a

curva $\alpha=1$.

A segunda possibilidade é $H_0 \neq 0$. Nesse caso existe um valor máximo para AH_0^2 que depende de λ e r , que analisaremos somente para o caso $\alpha=1$, que é o único caso de ii) que admite σ positivo, como veremos abaixo.

Finalmente vamos analisar o sinal de σ . Vamos dividir em três casos:

i) $1 < \alpha < 2$, $\lambda \neq 1$ e $r \neq 1$

Nesse caso a condutividade elétrica sempre tem uma fase em que ela fica negativa. Vamos supor que $B' > 0$. De (3.19) podemos ver que quando $B \rightarrow 0$ a condutividade é positiva. Porém o valor de σ avalia o no ponto $B=B_0$ é dado por:

$$\sigma(B_0) = \frac{8\alpha(\alpha+1)\Lambda}{E_2^2 B^{1+\alpha}} \frac{dB}{d\eta} \quad (4.9)$$

Uma vez que $\sigma(B_0) < 0$ segue que para algum valor de B a condutividade troca de sinal, esteja o modelo se expandindo ou contraindo. Assim vamos excluir esse intervalo de soluções.

ii) $0 \leq \alpha \leq 1$

O comportamento de $\sigma(B)E_2^2 B^{1+\alpha}/B'$ (eq. (4.6)) como função de B é similar ao comportamento de E^2 como mostrado na fig. 4.1. Para analisar a positividade de σ seguiremos a mesma linha de raciocínio usada para E^2 no caso $0 \leq \alpha < 1$. O ponto de mínimo de $\sigma(B)E_2^2 B^{1+\alpha}/B'$ é dado por:

$$E_2^2 = \frac{-1}{2\Lambda} \left[\frac{(\alpha-1)(r-1)(2r+1)(1-\lambda)}{r(r-r_0)(r-r_1)(1+\lambda)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.10)$$

Substituindo B_2 na eq. (4.6) e igualando a zero obtemos

$$\left[\frac{r(r-1)}{(r-1)(r+2)} \right]^{\alpha+1} - \frac{(1-\alpha)(1-\lambda)(2r+1)}{(1+\lambda)(r+2)(r-r_0)} = 0 \quad (4.11)$$

A curva g da fig. 4.2 representa os pontos (r, λ) que satisfazem a eq. (4.11). Vamos impor que $B' < 0$. Para (r, λ) abaixo da curva g , σ é negativo para um certo sub-intervalo de $(0, B_0)$ e para (r, λ) acima de g , σ é positivo definido em $(0, B_0)$. Se tomarmos $B' > 0$ não será possível ter σ positivo definido em $(0, B_0)$.

iii) $(\lambda=1, 0 < r \leq 1)$ e $(r=1, 1/3 < \lambda \leq 1)$

É fácil ver da eq. (4.6) que os intervalos $(\lambda=1, 0 < r \leq 1)$ e $(r=1, 1/3 < \lambda \leq 1)$ devem ser incluídos pois fornecem σ positivo se $B' < 0$.

Concluimos então que a região não hachuriada da fig. 4.2, incluindo as fronteiras mais os pontos $(\lambda=1, 0 < r \leq 1)$ e $(r=1, 1/3 < \lambda \leq 1)$ é a região de soluções que têm ρ , E^2 e σ positivos definidos e correspondem a soluções que se contraem a partir da solução tipo Bertotti-Robinson (4.2) em direção a singularidade $B=0$. Essas soluções podem ser usadas como um modelo interior para uma estrela em colapso em regime de magnetohidrodinâmica.

4.3 - SOLUÇÕES ANALÍTICAS EXATAS

Vamos integrar explicitamente a eq. (3.26) para os seguintes valores de α :

a) $\alpha=1/2$

De (3.21) vemos que para $\alpha=1/2$ existem duas possibilidades de

relação entre λ e r que são i) $\lambda = (1-r)/(r+3)$. Nesse caso os valores admissíveis para λ e r são $0 \leq \lambda \leq a$ e $b \leq r \leq 1$ onde o ponto (a,b) é aproximadamente igual a $(0.55, -0.42)$ e corresponde ao ponto de intersecção entre a curva $\alpha=1/2$ e a curva g (veja fig 4.2 e confronto com a fig. 3.18). ii) $r = -1/2$ e $-1/3 \leq \lambda \leq 1/3$. A eq. (3.26) se reduz à:

$$-\frac{\sqrt{3(r-r_0)\sqrt{-2\Lambda}}}{2} \int_{B_0}^B \frac{dB}{\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{-2\Lambda}B}{2} - \sqrt{-2\Lambda}B^3}} = \eta - \eta_0 \quad (4.12)$$

cuja solução é dada por:

$$B = \frac{1}{\sqrt{-2\Lambda}} \left[3 \operatorname{tgh}^2 \frac{\sqrt{3}k_0}{2\sqrt{2}} (\eta - \eta_0) - 2 \right] \quad (4.13)$$

onde

$$k_0 = \sqrt{\frac{(1+\lambda)\sqrt{2\Lambda}}{6(1-\lambda)}}$$

para a possibilidade i),

$$k_0 = \sqrt{\frac{2(1+\lambda)\sqrt{2\Lambda}}{5-3\lambda}}$$

para a possibilidade ii), e

$$\eta_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

para ambas as possibilidades.

b) $\alpha=1$

Quando α é igual a 1, temos da eq. (3.21) que $r = 2(1-\lambda)/(1+\lambda)$ de forma que $1/3 \leq \lambda \leq 1$ e $0 \leq r \leq 1$. Se $H_0 \neq 0$, temos que impor a relação:

$$-\Lambda H_0^2 \leq \frac{(3\lambda-1)(1-\lambda)}{2(5-3\lambda)(1+\lambda)} \quad (4.14)$$

para que E^2 , dado pela eq. (4.5), fique positivo para $B \in (0, B_0]$. A integral (3.26) se reduz à:

$$-2\sqrt{\frac{(3\lambda-5)\Lambda}{\lambda+1}} \int_{B_0}^B \frac{dB}{\sqrt{1 + 4\Lambda B^2 + 4\Lambda^2 B^4}} = \eta - \eta_0 \quad (4.15)$$

cuja solução é:

$$B = \frac{1}{\sqrt{-2\Lambda}} \operatorname{tgh} L_0 (\eta_0 - \eta) \quad (4.16)$$

onde

$$L_0 = \sqrt{\frac{\lambda+1}{2(5-3\lambda)}}$$

c) $\alpha=2$

Quando $\alpha=2$ podemos ver pela fig. 3.18 que $r=\lambda=1$. A integral (3.26) se reduz à:

$$4\sqrt{3}\Lambda \int_{B_0}^B \frac{dB}{\sqrt{1 - 12\Lambda^2 B^4 - 16\Lambda^3 B^6}} = \eta - \eta_0 \quad (4.17)$$

cuja solução é:

$$B = \frac{1}{\sqrt{-2\Lambda}} \left[\frac{\sinh^2 B_0 \eta - 6 \cosh B_0 \eta + 6}{\sinh^2 B_0 \eta - 24} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

Observe que $\eta = -\sinh^{-1} 2\sqrt{6}/B_0$ anula o denominador da eq. (4.18) porém esse ponto não é uma singularidade da função $B(\eta)$ pois o numerador também se anula, de fato, a função $B(\eta)$ é contínua para todo η . Observe de (4.5) que H_0 tem que ser nulo para que E^2 seja positivo. Note que essa solução é isotrópica pois $r=1$.

CONCLUSÃO GERAL

Como tínhamos exposto na introdução, uma das propostas da tese era a de estudar modelos em regime de magnetohidrodinâmica para descrever o universo durante a fase imediatamente anterior a recombinação. Nessa fase a presença de um campo eletromagnético provocaria uma corrente de condutividade e portanto o conteúdo material estaria em um regime de magnetohidrodinâmica. O remanescente desse campo eletromagnético seria o campo magnético inter-aglomerado de galáxias de intensidade provável de 10^{-9} Gauss.

Com relação a essa proposta encontramos um resultado negativo, pois no capítulo 3 chegamos ao seguinte resultado: A condutividade elétrica é positiva durante toda a evolução do modelo somente se as soluções estão em contração. Para se ter soluções em expansão o conteúdo material tem que estar em um estado longe do equilíbrio termodinâmico, para justificar uma condutividade negativa. A princípio não há razões para supor que na era imediatamente anterior à recombinação, o conteúdo material estivesse muito fora do equilíbrio termodinâmico. Assim o caminho mais natural dentro da proposta dessa tese seria mudar a relação $A=B^{\Gamma}$ ou tentar analisar outros modelos do tipo Bianchi.

No entanto chegamos a diversos resultados teóricos. Na seção 3.1 apresentamos soluções do tipo Bianchi III com condutividade positiva que partem de um raio infinito e se contraem até a

singularidade. Essas soluções têm Λ igual a zero e o tensor de cisalhamento diferente de zero. Quando o parâmetro r é nulo a singularidade é tipo panqueca na direção $\partial/\partial x$. Apresentamos soluções analíticas exatas quando $\alpha=1/k$ onde $k=2,3,4 \dots$.

Na seção 3.2, extendemos a região de soluções encontrada por Dunn&Tupper^[2] para os modelos tipo Bianchi I. As soluções também partem de um raio infinito e se contraem até $B=0$. A condutividade é positiva e soluções analíticas exatas para todos os modelos foram exibidas.

Na seção 3.3 encontramos um série de soluções tipo Kantowski-Sachs através da análise qualitativa das equações de Einstein. Em geral as soluções partem da singularidade $B=0$, expandem até um raio máximo e retornam a singularidade. A condutividade muda de sinal pelo menos uma vez durante a evolução dos modelos. Nesse caso encontramos soluções de diversos tipos: Com e sem campo magnético, com e sem constante cosmológica, isotrópicas e anisotrópicas. Nos casos em que a constante cosmológica é negativa encontramos uma classe de soluções tipo Kantowski-Sachs que tem a solução tipo Bertotti-Robinson (TBR) como limite, isto é, os modelos partem da solução TBR e se contraem até a singularidade $B=0$. A condutividade é positiva e encontramos soluções de vários tipos. A solução inversa também é possível. Nesse caso, porém, a condutividade é negativa. Os modelos com limite tipo Bertotti-Robinson foram analisados em detalhe no capítulo 4.

Ainda com relação a seção 3.3, podemos ver dos gráficos das fig. 3.27, 3.28 e 3.32 que as soluções TBR que correspondem ao ponto $B=B_0$ (ver eq. (3.37)) são instáveis e decaem em soluções tipo Kantowski-Sachs em contração com condutividade positiva, que

são as soluções analisadas no capítulo 4.

Na seção 3.4 analisamos os casos particulares que surgiram no processo de integração da equação diferencial (3.17). Esses casos são em geral limites dos casos tratados nas seções anteriores, sendo que alguns deles forneceram soluções físicas enquanto que outros não. Com essa análise esgotamos todas as possibilidades de soluções para Bianchi I, III e Kantowski-Sachs dentro das restrições que impusemos que foram a equação de estado $p=\lambda\rho$ e a relação $A=B^r$ (eq. 3.10).

Além dos parâmetros físicos Λ , H_0 , λ_2 as soluções são caracterizadas pelos parâmetros λ e r . Restringimo-nos a analisar as soluções com $\lambda \in (-1/3, 1]$ e mostramos que r tem que estar no intervalo $[-1/2, 1]$. Para Bianchi III, r tem que estar no intervalo $0 \leq r \leq 1$ ou $r \leq r_1$. Pela nossa análise, dado λ e r , podemos dizer se o modelo é ou não uma solução física satisfazendo as condições físicas usuais.

Os modelos aqui tratados servem como solução interior para um fluido se colapsando em regime de magnetohidrodinâmica. Note que grande parte das soluções tipo Kantowski-Sachs do capítulo 3 tem condutividade elétrica positiva durante a fase de contração e portanto servem para descrever a evolução de estrelas com σ positivo. Nesse caso a estrela tem que partir de um certo raio máximo finito. As soluções com σ negativo podem ser usadas em colapso de fluidos longe do equilíbrio termodinâmico.

Fizemos a análise termodinâmica dos modelos analisados. A termodinâmica de primeira ordem impõe que a condutividade elétrica seja positiva para que a segunda lei seja satisfeita. Essa imposição pode ser relaxada caso o conteúdo material esteja longe do equilíbrio termodinâmico. O sinal de σ foi analisado para todos

os modelos.

Como já dissemos, no capítulo 4 analisamos os modelos Kantowski-Sachs que têm a solução tipo Bertotti-Robinson como limite. A exigência de positividade de ρ , σ e E^2 restringe a classe de soluções para as soluções que partem da solução TBR ($B=B_0$) e se contraem até a singularidade $B=0$ levando um intervalo de tempo infinito. A região de soluções está descrita na fig. 4.2. Se o campo magnético é nulo, a região física dos parâmetros λ e r é a região não hachurada da fig. 4.2 incluindo as fronteiras e os pontos $(\lambda=1, 0 < r \leq 1)$ e $(r=1, 1/3 < \lambda \leq 1)$. Se o campo magnético é diferente de zero, a região física corresponde a curva \bar{f} excluindo os pontos extremos. Exibimos soluções analíticas exatas em termos de funções elementares nos casos $\alpha=1/2, 1$ e 2 .

No capítulo 2 analisamos as equações de Maxwell com fonte nos modelos de Bianchi. Consideramos a quadrivelocidade ortogonal a superfície de homogeneidade. Quando o vetor de Pointing é nulo, encontramos soluções para todos os modelos de Bianchi da classe A (Bianchi tipo I, II, VI₀, VII₀, VIII e IX) desde que a condutividade elétrica satisfaça a relação $\sigma R_j R_k / R_i = \text{constante}$ onde $i \neq j \neq k$. Para a classe B (Bianchi tipo IV, V, VI_h e VII_h) encontramos soluções para todos os tipos com campo magnético nulo. Essas últimas não impõem nenhuma restrição sobre σ e elas admitem uma carga elétrica não nula, diferente das soluções da classe A, que não admitem. Todas as soluções recaem nas soluções encontradas por Lorentz^[2] quando tomamos $\sigma=0$.

Quando o vetor de Pointing é não nulo, encontramos soluções para todos os modelos da classe A com a condição de isotropia da condutividade. Exibimos também soluções para o modelo Bianchi VI₋₁ \equiv III. Quando a condutividade é anisotrópica, exibimos soluções

para Bianchi I e II impondo-se restrições sobre a condutividade.

Além dos resultados físicos, apresentamos nos apêndices alguns resultados com relação a computação algébrica em particular com relação a linguagem Reduce. Os apêndices A e B são originais em seu conteúdo e vieram a preencher uma lacuna com relação ao uso do Reduce em PC's e aplicações do Reduce a Relatividade Geral. O apêndice C foi baseado no manual do EXCALC^[63] porém está mais dirigido para aplicações em Relatividade Geral. No apêndice D, nosso objetivo é mostrar como se usa o Reduce para realizar os cálculos algébricos dessa tese através de alguns exemplos.

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO DE REDUCE EM PC

A.1 - PC COM DISCO RÍGIDO

O REDUCE pode ser copiado de um disco rígido para os disquetes através do comando:

```
C> BACKUP C:\REDUCE A:/S
```

A chave /S é necessária pois o programa REDUCE possui subdiretórios que precisam ser estruturados no BACKUP. Porém, antes de dar esse comando observe o seguinte: Para montar o REDUCE necessário um arquivo imagem que é gerado após a implementação¹. Os nomes mais comuns para esses arquivos imagens são FULL (496 kb), BREDUCE.FRZ (496 kb), UOINIT.FRZ (332 kb), TREDUCE.FRZ (315 kb), etc. Observe que a maioria deles tem a terminação FRZ (de FReeZe) e não os confunda com os arquivos de mesmo nome com terminação SL que são escritos em LISP identificáveis com o comando type. Estes arquivos imagens são dependentes tanto do PC utilizado como da sua configuração no momento em que os arquivos foram gerados. Portanto é perda de tempo copiá-los pois não servirão para outro PC. Para evitar isso, copie os arquivos imagens para o diretório raiz e apague-os do diretório REDUCE (caso estejam bloqueados use o comando ATTRIB -R nomearquivo). Dê

¹ Usaremos a seguinte nomenclatura: Instalação significa gravar o programa REDUCE no disco rígido do PC. Implementação significa gerar os arquivos imagem que permitirão montar o REDUCE e montagem significa levar o arquivo imagem para a RAM o que pode ser feito, por exemplo, através dos comandos REDUCE ou REDUCE FULL.

o comando de BACKUP e depois lembre de trazer os arquivos imagens de volta do diretório raiz para o diretório REDUCE de maneira a deixar o PC utilizado da mesma forma como foi encontrado. (Para bloquear novamente os arquivos use o comando ATTRIB +R arquivo).

Com o BACKUP feito da forma acima, o REDUCE ocupará 3 disquetes de 360 kbytes. Além do programa REDUCE existe disponível também o manual da linguagem que ocupa um disquete.

(a) Instalação

Para copiar o REDUCE dos disquetes flexíveis para um disco rígido use o comando

```
C> RESTORE A: C:/S
```

A chave /S é novamente necessária para estruturar os subdiretórios do REDUCE.

(b) Implementação

Para gerar o arquivo imagem da versão completa do REDUCE, deve-se primeiro copiar o arquivo BREDUCE.SL para UOINIT.SL e então dar o comando

```
C> REDUCE I
```

dentro do diretório REDUCE. Verifique através do comando CHKDSK se há pelo menos 495 kbytes disponíveis na RAM e se há essa mesma quantidade disponível no disco rígido. Para reconhecer o arquivo BREDUCE.SL caso ele esteja com nome diferente, note que ele ocupa 3690 bytes de memória e seu conteúdo é:

```

*****
*
* (C) Copyright 1986 by Jed J. Marti
* File:                BREDUCE.BL
*
*                      Big REDUCE Session Construction
*
* File constructs a REDUCE session (basic algebra, differentiation,
* matrices, high energy physics) and exits. This file should
* be renamed as UOINIT.BL before use. To create the session file
* type:
*   REDUCE I
* A file named FULL will be created. To execute this session
* type:
*   REDUCE FULL
*
* Revision History: (Created 4/18/86)
*
*****

(SETQ *OUTPUT NIL)                                * Kills messages (optional).
\p
* You can change the location of fast files by modifying the
* names in the following. For example: "B:\FASL" instead of
* "\REDUCE\FASL". Make sure to include the final back slash.
(SETQ LOADDIRECTORIES!*                          * Load directories.
      (APPEND LOADDIRECTORIES!*
            ("REDUCE\FASL"
             "\REDUCE\FASL"))                    * Look here for basic fast files.
                                             * REDUCE fast files.

(FLOAD "ACCEL")                                  * Accelerator (optional).

* The following can be placed anywhere. No final \ can be included.
(FLOAD "PATHNAME")                              * $directory equates.
(PUT 'RSRC 'PATHNAME "\REDUCE\SRC")             * $RSRC is reduce source dir.
(PUT 'RFASL 'PATHNAME "\REDUCE\FASL")         * $RFASL is reduce fast dir.
(PUT 'RUTILS 'PATHNAME "\REDUCE\RUTILS")      * $RUTILS is red. test dir.
(PUT 'FASL 'PATHNAME "\REDUCE\FASL")         * $FASL is UO-LISP fast dir.
(SETQ *FLING: T)                                * Necessary for speed.

* Basic arithmetic code.
(FLOAD "GENERIC")                              * Generic arithmetic (necessary).
(FLOAD "BIGNUM")                               * Big numbers (necessary).
(FLOAD "FLOAT")                               * Floating point (necessary).
(FLOAD "NUMBERIN")                            * Numeric input (necessary).

* Other miscellaneous stuff.
(FLOAD "PRETTY")                              * Pretty print (optional).

* RLISP and friends.
(FLOAD "RLISP")                               * RLISP (necessary).
(FLOAD "REND")                               * Machine dependent (necessary).
(FLOAD "CEDIT")                              * Editor (optional).

* Basic algebra.
(FLOAD "ALG1")                               * Basic algebra (necessary).
(FLOAD "ALG2")                               * Pattern matching (necessary).
* Other things.
(FLOAD "MATR")                               * Matrices (optional).

```

```

(FLOAD "HEPHYSE")           * High energy physics (optional).
(FLOAD "PART")              * Structure subs. (optional).
(FLOAD "SOLVE")             * Solve eqns. (optional).

* Choose one (but not both) of the following.
(FLOAD "INTEG")             * Integration (optional).
(FLOAD "FACTOR")           * Factorization (optional).
(FLOAD "BFLOAT")           * Big floats (optional).

* KLUIGE area.
(FLOAD "(LARGESTI-SMALLI-MODULUS)) * For factorizer (necessary).
(SETQ LARGESTI-SMALLI-MODULUS 4095)

* Clean up and build session freeze.
(SETQ !*OUTPUT T)
(SETQ !*INIT T)             * Initialization done (necessary).
(RECLAIM)
(INITREDUCE)                * Initialize RLISP (necessary).
(UPROGN (CLOSE (RDS NIL))   * Select input file (necessary).
        (FREEZE "FULL")    * Freeze session (necessary).
(BEGIN))                    * Start RLISP (necessary).

STOP                         * Necessary.

```

Em um PC-XT essa implementação leva cerca de 15 minutos e no final da operação o prompt é dado no DOS. É útil verificar se os arquivos BREDUCE.FRZ ou FULL foram criados.

(c) Montagem

Para montar o REDUCE dê o comando (dependendo do nome do arquivo imagem gerado):

```

C:\REDUCE> reduce breduce.frz
              ou
              reduce full

```

OBS: 1 - Uma outra forma de montar o REDUCE é renomear os arquivos imagens BREDUCE.FRZ ou FULL para UOINIT.FRZ e então dar o comando REDUCE no diretório REDUCE. Ao se dar esse comando sem especificar o arquivo imagem, o arquivo de nome UOINIT.FRZ será automaticamente procurado.

2 - Para montar o REDUCE, a RAM tem que estar sempre da mesma forma como ela estava no momento em que o REDUCE foi implementado. Assim qualquer mudança no arquivo CONFIG.SYS, seja no comando

DEVICE ou BUFFER, ou no arquivo AUTOEXEC.BAT seja no comando PROMPT ou PATH fará com que o REDUCE não possa ser montado porque a configuração da RAM estará modificada já que os comandos citados são residentes. Para funcionar, ou inicializamos o PC da mesma forma de quando o arquivo imagem foi gerado ou geramos um novo arquivo imagem BREDUCE.FRZ ou FULL. Note também que após o uso de qualquer outro comando residente do DOS, como o PRINT, SHARE, GRAPHYCS, etc. o REDUCE só poder ser montado reinicializando-se o PC.

3 - Suponha que o REDUCE foi implementado a partir do diretório REDUCE e queremos montá-lo a partir do diretório raiz e não no diretório REDUCE, por exemplo, com o comando REDUCE (pois isso evita uma troca de diretório toda vez que inicializamos o PC). Se criarmos um arquivo de lote cujo nome seja REDUCE.BAT e cujo conteúdo seja

```
echo off
cd\reduce
reduce full
cd\
echo on
```

não conseguiremos montar o REDUCE, pois quando o arquivo de lote for processado, a ocupação de RAM será modificada. Será necessário gerar um outro arquivo imagem, através também de um arquivo de lote com os seguintes comandos:

```
echo off
cd\reduce
reduce i
cd\
echo on
```

Note que para cada maneira de montar o REDUCE, deve existir um arquivo imagem correspondente, que deve ser implementado da mesma forma de como será montado. Acima vimos um exemplo, pois se queremos montar o REDUCE através de um arquivo de lote temos que

implementá-lo também através de um arquivo de lote.

Uma vez que o PC-XT tem uma capacidade de memória pequena para o REDUCE completo (Total: 640 kb, REDUCE FULL: 496 kb, DOS: ±40 kb => RAM disponível: ±104 kb), é bastante útil implementar uma versão menor do REDUCE. As versões que estão disponíveis são: NREDUCE.SL (3451 bytes) - versão média do REDUCE: não tem os três maiores módulos que são os de fatorização, integração e precisão numérica.

TREDUCE.SL (3363 bytes) - versão para teste do REDUCE: corresponde a versão NREDUCE sem os módulos para resolução e obtenção de partes de expressões algébricas.

MREDUCE.SL (3089 bytes) - versão mínima do REDUCE: operações algébricas básicas e diferenciação.

Para implementar uma dessas versões, o procedimento é o mesmo da versão completa, com a diferença de que é o arquivo NREDUCE.SL, TREDUCE.SL ou MREDUCE.SL que deve ser copiado para UOINIT.SL e não o arquivo BREDUCE.SL. Para montar o REDUCE, veja qual foi o nome do arquivo imagem gerado: Provavelmente será NREDUCE.FRZ, TREDUCE.FRZ ou MREDUCE.FRZ. Nesse caso dê o comando

```
C:\REDUCE> reduce nreduce.frz      ou
                  treduce.frz      ou
                  mreduce.frz
```

Além das versões acima, pode-se criar novas versões editando-se o arquivo BREDUCE.SL e retirando comandos do tipo (veja a listagem acima):

```
(FLOAD "nome do módulo")
```

que fará com que o respectivo módulo não seja implementado. Note que podemos criar várias combinações que poderão ser úteis dependendo do caso particular, principalmente na implementação do REDUCE em PC sem disco rígido (veja adiante).

Além das versões de REDUCE, é possível gerar o RLISP através do arquivo RLISP.SL e o UC-LISP através do UOLISP.SL.

(d) Implementação em PC de uso comum

Parece-nos que a implementação em PC-XT mais útil à maioria dos usuários de REDUCE é ter duas versões: A primeira seria uma versão completa que poderia ser montada com o comando REDUCE FULL dado no diretório REDUCE. A segunda seria a versão NREDUCE que poderia ser montada com o comando REDUCE dado também no diretório REDUCE. Assim, o arquivo imagem gerado através do arquivo BREDUCE.SL deve ter o nome FULL e o arquivo imagem gerado através do NREDUCE.SL deve ter o nome UOINIT.FRZ.

Se o REDUCE será implementado em PC's de uso comum, sugerimos o procedimento de montagem descrito no capítulo "INTRODUÇÃO AO PC-DOS" da ref. [62], que é inicializar o PC a partir de um disquete especialmente preparado para o REDUCE. Uma das finalidades dessa forma de montagem é deixar o máximo de RAM disponível, que é crucial para o funcionamento do REDUCE em um PC-XT.

A.2 - PC SEM DISCO RÍGIDO

É possível montar o REDUCE em PC sem disco rígido usando apenas dois acionadores e três disquetes. Mostraremos como se monta a versão NREDUCE e ficará claro como se monta outras versões que podem ser mais úteis para alguma aplicação particular.

É necessário ter dois disquetes especialmente preparados para gerar o arquivo imagem que será gravado em um terceiro disquete formatado com espaço para 332 kbytes. Descreveremos o conteúdo

desses dois disquetes (chamaremos de disquete A e B) de forma que eles poderão ser preparados caso não seja possível copiá-los. Para isso é necessário ter um PC com disco rígido e com o REDUCE implementado.

O conteúdo do disquete A deve ser:

```
Volume in drive A is REDUCE1
Directory of A:\
```

```
COMMAND  COM      23210   3-07-85   1:43p
REDUCE   EXE     173889   7-12-86  11:04a
PCLISP           24832   7-09-86   7:59p
FASL      <DIR>      12-12-87   3:55p
RFASL     <DIR>      12-12-87   3:56p
UOINIT   SL       2483    12-12-87   4:04p
          6 File(s)          10025 bytes free
```

O conteúdo do diretório FASL deve ser:

```
.          <DIR>      12-12-87   3:55p
..         <DIR>      12-12-87   3:55p
GENERIC    6400     6-12-86   9:52p
FLOAT     6016     5-28-86  12:04a
BIGNUM    7938     1-07-86  12:49p
NUMBERIN  3714     1-07-86  12:49p
ACCEL     1024     5-25-86   6:25p
TRACE     2733     1-07-86  12:45p
PRETTY    2432     4-18-86  11:14a
PATHNAME   768     4-04-86  11:01p
          10 File(s)          10025 bytes free
```

O conteúdo do diretório RFASL deve ser:

```
.          <DIR>      12-12-87   3:56p
..         <DIR>      12-12-87   3:56p
SOLVE     40064    4-06-86   7:08p
MATR      9472     4-05-86   4:50p
          4 File(s)          10025 bytes free
```

O conteúdo do arquivo UOINIT.SL deve ser:

```
(SETQ !*OUTPUT NIL)
(SETQ LOADDIRECTORIES!*
  (APPEND LOADDIRECTORIES!*
    ('("\FASL\"))))
```

```
(FLOAD "ACCEL")
```

```
(FLOAD "PATHNAME")
```

```

(SETQ LOADDIRECTORIES!*
  (APPEND LOADDIRECTORIES!*
    ("B:\RFASL\")))
(PUT 'RSRC 'PATHNAME "\REDUCE\SRC")
(PUT 'RFASL 'PATHNAME "B:\RFASL")
(PUT 'FASL 'PATHNAME "A:\FASL")
(SETQ !*FLINK T)

```

% Basic arithmetic code.

```

(FLOAD "GENERIC")
(FLOAD "BIGNUM")
(FLOAD "FLOAT")
(FLOAD "NUMBERIN")
(FLOAD "PRETTY")

```

% RLISP and friends.

```

(FLOAD "RLISP")
(FLOAD "REND")
(FLOAD "CEDIT")

```

% Basic algebra.

```

(FLOAD "ALG1")
(FLOAD "ALG2")

```

% Other things.

```

(FLOAD "PART")
(FLOAD "HEPHYS")

```

```

(SETQ LOADDIRECTORIES!*
  (APPEND LOADDIRECTORIES!*
    ("A:\RFASL\")))
(PUT 'RFASL 'PATHNAME "A:\RFASL")
(FLOAD "MATR")
(FLOAD "SOLVE")

```

% KLUDGE area.

```

(FLUID '(LARGEST!-SMALL!-MODULUS))
(SETQ LARGEST!-SMALL!-MODULUS 4095)

```

% Clean up and build session freeze.

```

(SETQ !*OUTPUT T)
(SETQ !*INIT T)
(RECLAIM)
(INITREDUCE)
(PROGN (CLOSE (RDS NIL))
  (FREEZE "B:UOINIT.FRZ")
  (BEGIN))

```

STOP

O conteúdo do disquete B deve ser:

```

Volume in drive B is REDUCE2
Directory of B:\

```

```

RFASL          <DIR>          12-12-87   4:17p
              1 File(s)       6144 bytes free

```

O conteúdo do diretório RFASL deve ser:

```

      <DIR>      12-12-87    4:17p
      <DIR>      12-12-87    4:17p
ALG1      101888    8-29-86    9:00p
ALG2      32552    6-29-86    10:33a
ALPHAS    1408     6-12-86    10:02p
LINMODP   2304     6-16-86    10:07p
HEPHYS    19200    4-05-86    4:51p
COEFFTS   7680     6-12-86    10:02p
CPRES     1664     6-12-86    10:02p
DEGSETS   2304     6-12-86    10:03p
EZGCD     22912    6-12-86    10:03p
ELISP     48000    4-04-86    10:55p
RPRINT    16514    2-27-86    8:13p
RSLTNT    512      6-16-86    10:10p
VECPOY    4480     6-16-86    10:11p
ZMODE     640      6-16-86    10:11p
FLUIDS    6144     6-12-86    10:01p
FSUPPOF   7168     6-12-86    10:01p
LOGFNS    130      2-27-86    8:13p
IMAGESET  7936     6-16-86    10:06p
MHENSENS  10240    6-16-86    10:07p
MODPOLY   11904    6-16-86    10:09p
MULTIHEN  9344     6-16-86    10:10p
NATURAL   1280     6-16-86    10:10p
PART      2048     4-05-86    1:42p
PFACTOR   4608     6-16-86    10:10p
PRES      4096     6-16-86    10:10p
REND      3200    1-01-80    12:53a
CEDIT     5504     4-05-86    4:01p
      29 File(s)      6.44 bytes free
```

Para gerar o arquivo imagem siga os seguintes passos:

1. Insira o disquete A no acionador a: e o disquete B no acionador b:.

2. Inicialize o PC.

3. Dê o comando

A> reduce 1

4. Observe que ora a lâmpada do acionador a: está acesa ora a lâmpada do b: está acesa. Quando ambas as lâmpadas apagarem, retire o disquete B do acionador b: e insira o terceiro disquete (que deve estar formatado e com 332 kbytes livres).

Em um PC-XT as lâmpadas ficarão apagadas aproximadamente por um minuto de forma que há uma margem de segurança grande para a

troca dos disquetes. O processo completo leva cerca de 9 minutos e a troca deve ser realizada em torno do sétimo minuto. O prompt é dado no acionador a: e para montar o REDUCE dê o comando

A) reduce b:

Assim, todas as vezes que for montar o REDUCE, será necessário usar apenas o disquete A e o disquete com a imagem UOINIT.FRZ gravada. Observe que para cada PC é necessário gerar um arquivo imagem, porém se for usar o REDUCE no mesmo PC basta gerar o arquivo imagem uma vez. Lembre de inicializar o PC através do disquete A quando for usar o REDUCE.

APENDICE B - PROGRAMAS EM REDUCE 3.2 PARA CÁLCULOS EM RELATIVIDADE GERAL

Nosso objetivo nesse apêndice é mostrar como obter, através de uma linguagem algébrica, soluções de um problema de soluções exatas em cosmologia. Para isso, basta fornecer a matriz de tetradas associada a uma dada métrica. Todo o processo de cálculo do tensor de Ricci, estruturação das equações de Einstein e o processo de resolução dessas equações pode ser implementado no computador.

Descrevemos aqui o uso dos programas RIEMANN, RICCI, MAXWELL, EE e EQDIF que servem para calcular as componentes dos tensores de Riemann, Einstein, Ricci, escalar de curvatura, montar as equações de Maxwell e Einstein e resolver um certo tipo de equação diferencial que aparece com frequência em cosmologia. Todos os tensores são calculados em uma base de tetradas previamente escolhida. Esses programas foram feitos em 1984 e foram apresentados em um seminário no Departamento de Relatividade e Partículas do CBPF em 1985.

A estrutura geral desses programas é:

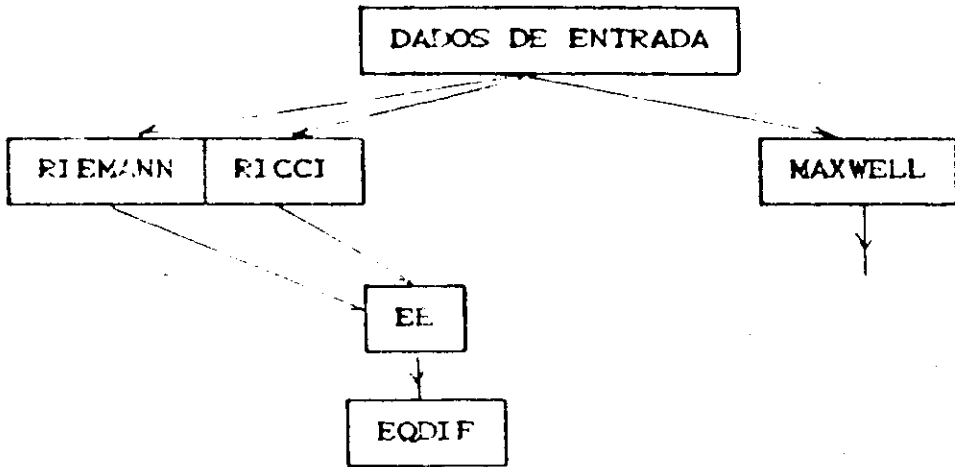


FIGURA B.1

"Dados de entrada" é um arquivo que contém as variáveis usadas (por exemplo: t, x, y, z), a matriz de tetradas, as dependências funcionais das funções que aparecem na métrica e o tensor de Maxwell se for o diferente de zero. Por exemplo, se o elemento de linha é (Kantowski-Sachs):

$$ds^2 = dt^2 - A(t)^2 dx^2 - B(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \quad \text{B.1}$$

então o arquivo de dados deve conter os seguintes comandos.

i) As variáveis

$x(0) := t\$$

$x(1) := k1\$$

$x(2) := teta\$$

$x(3) := f1\$$

ii) Se as tetradas são $\theta^0 = dt$, $\theta^1 = Adx$, $\theta^2 = Bd\theta$, $\theta^3 = B\sin(\theta)d\phi$.

então:

$mt(0,0) := 1\$$

$mt(1,1) := A\$$

$mt(2,2) := b\$$

$mt(3,3) := b*\sin(teta)\$$

iii) Como A e B são funções de t, escrevemos:

f1(a,t,a!'.a!")\$

f1(b,t,b!'.b!")\$

O comando F1(A,T,A!'.A!") estabelece que A depende de T e dá os nomes A' e A'' para as derivadas primeira e segunda em relação a T respectivamente. O sinal ! deve ser colocado antes de ' e '' pois são caracteres especiais (não são nem letras nem números) e no REDUCE esses caracteres só podem ser usados em nome de variáveis se precedidos pelo sinal !. Caso A dependesse de duas variáveis, x e y por exemplo, daríamos então o seguinte comando:

f2(a, x, y, ax, ay, axx, axy, ayy)\$

No caso de três variáveis:

f3(a, x, y, z, ax, ay, az, axx, axy, axz, ayy, ayz, azz)\$

No caso de quatro variáveis:

f4(a, t, x, y, z, at, ax, ay, az, att, atx, aty, atz, axx, axy, axz, ayy, ayz, azz)\$

Os programas RIEMANN, RICCI, e MAXWELL usam os dados contidos nos arquivos de dados para calcular os seguintes tensores:

Programa RIEMANN

Esse programa calcula na base de tetradas todas as componentes independentes totalmente covariante e exhibe na tela os tensores de Riemann, Ricci, Einstein e escalar de curvatura. Esse programa foi feito de maneira a calcular somente as componentes independentes do tensor de Riemann e todas as outras componentes não nulas são calculadas usando as simetrias desse tensor. Conforme podemos observar na listagem do programa adiante, o "loop" para calcular as componentes RIEMANN(A1,B1,C1,D1) dá exatamente vinte voltas que é o número de componentes independentes de $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$. Outros programas para a mesma finalidade,

por exemplo Chan⁽⁶⁵⁾, não estão otimizados nesse sentido e têm um "loop" com mais voltas que o necessário (36 voltas no caso da ref. (65)) o que faz com que o programa leve mais tempo para calcular as componentes do tensor de Riemann, além de dificultar a impressão das componentes independentes.

O programa RIEMANN calcula e imprime também as componentes covariantes do tensor de Einstein, Ricci e escalar de curvatura.

Para usar esse programa devemos digitar dentro do REDUCE, os seguintes comandos:

```
in riemann;
```

O programa será interrompido após um certo tempo com a pergunta:

```
CONT ? Y or N
```

Devemos digitar N e então

```
IN nome do arquivo de dados;
```

```
CONT;
```

Os resultados sairão na tela do terminal. Para que os resultados saiam em um arquivo, os comandos acima devem ser precedidos pelo comando

```
OUT -nome de arquivo de saída;
```

Alguns comandos acima dependem do sistema operacional do computador utilizado. No nosso caso estamos usando o sistema MTS.

Programa RICCI

Esse programa calcula as componentes covariantes do tensor de Ricci, Einstein, e escalar de curvatura. Ele deve ser usado quando não se deseja calcular o tensor de Riemann, especialmente se a métrica for grande, isto é, se contém muitas funções arbitrárias que dependem de muitas variáveis. Nesse programa só são calculadas as 18 componentes independentes necessárias para calcular os

tensores de Ricci e Einstein. A componente R_{0123} , R_{3012} , ... não são calculadas.

A maneira de usar esse programa é igual a do programa RIEMANN exceto pelo comando inicial que é:

```
in ricci;
```

Programa MAXWELL

Esse programa usa o mesmo arquivo de dados dos programas RIEMANN e RICCI. Devemos especificar porém, quais componentes do tensor de Maxwell são nulas e quais são as dependências funcionais das componentes não nulas. Por exemplo, no caso de apenas E_x e H_x serem não nulos e dependerem apenas do tempo, devemos acrescentar ao arquivo de dados os seguintes comandos:

```
hy := hz := ey := ez := 0$
```

```
f1(ex, t, ex!', ex!')$
```

```
f1(hx, t, hx!', hx!')$
```

Esses dados também podem ser introduzidos interativamente.

O programa MAXWELL calcula na base de tetradas as equações de Maxwell:

$$F^{AB}_{, \mu} e^{\mu}_B = J^A \quad \text{B.2}$$

$$F_{[AB, \mu} e^{\mu}_{c]} = 0 \quad \text{B.3}$$

O resultado do lado esquerdo da eq. (B.2) é guardado no ARRAY J(A) e o resultado da eq. (B.3) é guardado no ARRAY EM(D) onde D assume o valor que faz com que η_{ABCD} seja não nulo. Para usar esse programa, procedemos de maneira igual aos programas anteriores exceto pelo comando inicial que é:

```
in maxwell;
```

Um exemplo de saída desse programa para a métrica B.1 é:

$$J(1) := (-2 * B' * EX) / B - EX'$$

$$O := (2 * B' * HX) / B + HY'$$

que correspondem as eqs. (3.7) e (3.9) quando $\lambda_1 = 0$ e $J(1) = 0$.

Programa EE

Esse programa monta as equações de Einstein para fluido perfeito e as exibe da seguinte forma:

$$\rho = \text{"funções da geometria"} \quad \text{B.4}$$

$$p = \text{"funções da geometria"} \quad \text{B.5}$$

$$\text{equações diferenciais restantes} \quad \text{B.6}$$

onde ρ e p são a densidade e pressão medidas por um observador comovente com o fluido. O lado direito das eqs. B.4 e B.5 contém apenas as funções arbitrárias que aparecem na métrica (veja exemplo a seguir).

Para usar o programa EE devemos primeiro calcular o tensor de Einstein através do programa RICCI ou RIEMANN, e então dar o comando:

```
in EE;
```

O programa procura a partir da equação $G_{00} = kT_{00}$ duas equações independentes contendo ρ e p , resolve o sistema para essas variáveis e exibe o resultado que serão as equações B.4 e B.5. O programa substitue então as expressões de ρ e p nas equações de Einstein restantes e exibe. Temos assim as equações diferenciais restantes em termos das funções arbitrárias que aparecem na métrica. Essas equações são guardadas no ARRAY EQD. Note que essa não é a única maneira de escrever essas equações, e não obteremos necessariamente a forma mais simples de apresentação. Em termos computacionais, é uma tarefa bastante complicada decidir qual é a

forma mais simples de apresentação de expressões algébricas e em geral depende do usuário.

Programa EQDIF

Esse programa resolve equações diferenciais do tipo

$$\alpha \frac{\ddot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{A}^2}{A^2} + F(A) = 0 \quad \text{B.7}$$

onde α e β são constantes e $F(A)$ é uma função de A . O programa calcula a integral primeira e exhibe na forma:

$$\frac{ds}{dt} := \dots \quad (\text{onde } s \text{ é uma nova variável definida por esta equação})$$

$$\left(\frac{dA}{ds}\right)^2 + V(A) = C \quad (C = \text{constante})$$

$$V(A) := \dots$$

O programa calcula as expressões de \dot{A} e \ddot{A} da forma:

$$\dot{A} = f1(A, C)$$

$$\ddot{A} = f2(A, C)$$

e exhibe as expressões de ρ e p da forma:

$$\rho = \rho(A, C)$$

$$p = p(A, C)$$

O programa encontra a função $A=A(s)$ caso a integral

$$\int \frac{dA}{\sqrt{C-V(A)}}$$

tenha solução em termos de funções elementares.

Esse programa deve ser usado após o programa EE. Primeiro temos que carregá-lo com o comando:

```
in EQDIF;
```

Para resolver a equação diferencial B.7 damos então o comando:

```
eqdif( $\alpha$ ,  $\beta$ , F(A));
```

Como exemplo do uso desses programas, vamos analisar o modelo de Friedmann plano cuja métrica pode ser posta na forma:

$$ds^2 = dt^2 - A(t)^2 [dx^2 + x^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]$$

O arquivo de dados, cujo nome pode ser *friedmann*, deve ser então:

```
x(0):=t$
x(1):=k1$
x(2):=teta$
x(3):=f1)$

mt(0,0):=1$
mt(1,1):=A$
mt(2,2):=A*x$
mt(3,3):=A*x*sin(teta)$

f1(A,t,A',A'');
```

A partir desse ponto, o que estiver em itálico é porque foi digitado no terminal e em letras maiúscula são as resposta do computador.

```
in ricci;
```

```
OFF ECHOS$
```

```
OFF ECHOS$
```

```
CHAME O ARQUIVO DOS DADOS:      IN .....
```

```
CONT? Y OR N
?n
```

```
in friedmann;
```

```
cont;
```

```
RICCI(0,0) := ( - 3*A'')/A
```

```
RICCI(1,1) := A''/A + (2*A')2/A
```

```
RICCI(2,2) := A''/A + (2*A')2/A
```

```
RICCI(3,3) := A''/A + (2*A')2/A
```

$$EC := (C - 6 * A'') / A + (C - 6 * A')^2 / A^2$$

$$EINSTEIN(0,0) := (3 * A')^2 / A^2$$

$$EINSTEIN(1,1) := (C - 2 * A'') / A + (C - A')^2 / A^2$$

$$EINSTEIN(2,2) := (C - 2 * A'') / A + (C - A')^2 / A^2$$

$$EINSTEIN(3,3) := (C - 2 * A'') / A + (C - A')^2 / A^2$$

in ee;

$$RO := (3 * A!''**2) / (KAP * A**2) + LG / KAP \$$$

$$PE := (C - 2 * A!''') / (KAP * A) + (C - A!''**2) / (KAP * A**2) + (C - LG) / KAP \$$$

Através do programa EE obtivemos as equações de Einstein para um fluido perfeito. Vamos agora resolver essas equações para poeira ($p=0$) e sem constante cosmológica ($LG=0$). Note que a equação $PE=0$ é da forma B.7 com $\alpha=-2$ e $\beta=-1$. Assim, vamos usar o programa EQDIF da forma:

in eqdif;

eqdif(-2,-1,0);

RESULTADOS INTERMEDIARIOS

SEJA S UMA NOVA VARIÁVEL TAL QUE:

$$DS/DT = 1 / \text{SQRT}(A)$$

$$RO = (3 * \text{CONST}) / (KAP * A^3)$$

$$PE = 0$$

RESULTADOS FINAIS

$$S - S_0 = (\text{SQRT}(\text{CONST}) * A) / \text{CONST}$$

A solução foi dada na variável S que está relacionada com t da forma $S \propto t^{2/3}$. Assim vemos que o programa fornece a solução de Friedmann tipo poeira.

*** PROGRAMA RIEMANN ***

OFF ECHO\$

MATRIX TETR(4,4), TETRINV(4,4);

ARRAY XC(3), ETAC(3), MTC(3,3), MTIC(3,3), CC(3,3,3), GAMAC(3,3,3)\$

ETAC(0) := 1\$ETAC(1) := ETAC(2) := ETAC(3) := -1\$

IN PROCEDURES;

WRITE "CHAME O ARQUIVO DE DADOS: IN; " \$
PAUSE;

on gcd;

forall x let cos(x)**2 = 1 - sin(x)**2;

forall x let cosh(x)**2 = 1 + sinh(x)**2;

FOR A1=1:4 DO FOR B1=1:4 DO TETR(A1,B1) := MTC(A1-1,B1-1);

TETRINV := 1/TETR\$

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO MTI(A1,B1) := TETRINV(A1+1,B1+1);

FOR A1=0:3 DO

 FOR B1=0:3 DO

 FOR C1=B1+1:3 DO

 << CCA1,B1,C1) := FOR K11=0:3 SUM FOR L11=0:3 SUM
 DF(MTC(A1,K11),X(L11))*(MTI(L11,B1)*MTI(K11,C1) -
 MTI(L11,C1)*MTI(K11,B1))\$

 CCA1,C1,B1) := -CCA1,B1,C1) >>\$

on nero\$

FOR A1=0:3 DO

 FOR B1=A1+1:3 DO

 FOR C1=0:3 DO

 << WRITE GAMAC(A1,B1,C1) := (ETAC(A1)*CCA1,B1,C1) -
 ETAC(B1)*CCB1,A1,C1) - ETAC(C1)*CCC1,A1,B1))/\$

 GAMAC(B1,A1,C1) := -GAMAC(A1,B1,C1) >>\$

ARRAY RIEMANN(3,3,3,3), RICCI(3,3), EINSTEIN(3,3);

```

FOR A1=0:2 DO
  FOR B1=A1+1:3 DO
    FOR C1=A1:2 DO
      FOR D1=MAX(B1,C1+1):3 DO
        << RIEMANN(C1,D1,A1,B1) := RIEMANN(B1,A1,D1,C1) :=
          RIEMANN(D1,C1,B1,A1) := RIEMANN(A1,B1,C1,D1) :=
          FOR MI=0:3 SUM (DF(GAMAC(A1,B1,D1),X(MI))*MTI(MI,C1) -
            DF(GAMAC(A1,B1,C1),X(MI))*MTI(MI,D1) + ETAC(MI)*
            GAMAC(A1,B1,MI)*(GAMAC(MI,C1,D1) - GAMAC(MI,D1,C1)) +
            ETAC(MI)*(GAMAC(MI,B1,D1)*GAMAC(A1,MI,C1) -
            GAMAC(MI,B1,C1)*GAMAC(A1,MI,D1))) $
          RIEMANN(B1,A1,C1,D1) := -RIEMANN(A1,B1,C1,D1)$
          RIEMANN(A1,B1,D1,C1) := -RIEMANN(A1,B1,C1,D1)$
          RIEMANN(D1,C1,A1,B1) := -RIEMANN(A1,B1,C1,D1)$
          RIEMANN(C1,D1,B1,A1) := -RIEMANN(A1,B1,C1,D1) >>$

RIEMANN(0,3,1,2) := RIEMANN(2,1,3,0) := RIEMANN(3,0,2,1) :=
RIEMANN(1,2,0,3) := -RIEMANN(0,1,2,3) + RIEMANN(0,2,1,3)$

RIEMANN(2,1,0,3) := -RIEMANN(1,2,0,3)$

RIEMANN(1,2,3,0) := -RIEMANN(1,2,0,3)$

RIEMANN(3,0,1,2) := -RIEMANN(1,2,0,3)$

RIEMANN(0,3,2,1) := -RIEMANN(1,2,0,3)$

FOR A1=0:2 DO
  FOR B1=A1+1:3 DO
    FOR C1=A1:2 DO
      FOR D1=MAX(B1,C1+1):3 DO
        WRITE RIEMANN(A1,B1,C1,D1) := RIEMANN(A1,B1,C1,D1)$

IF RIEMANN(0,1,2,3)=0 OR RIEMANN(0,2,1,3)=0 THEN
  WRITE RIEMANN(1,2,0,3) := RIEMANN(1,2,0,3)$

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1:3 DO
  << RICCI(B1,A1) := RICCI(A1,B1) :=
    FOR C1=0:3 SUM ETACC1)*RIEMANN(C1,A1,C1,B1)$
  WRITE RICCI(A1,B1) := RICCI(A1,B1) >>$

EC := FOR A1=0:3 SUM ETACA1)*RICCI(A1,A1);

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1:3 DO
  << EINSTEIN(B1,A1) := EINSTEIN(A1,B1) :=
    RICCI(A1,B1)-IF A1=B1 THEN ETACA1)*EC/2$
  WRITE EINSTEIN(A1,B1) := EINSTEIN(A1,B1) >>$

OFF NERO, GCD;

END;

```

*** PROGRAMA RICCI ***

OFF ECHOS

MATRIX TETR(4,4), TETRINV(4,4);

ARRAY X(3), ETAC(3), MTC(3,3), MTI(3,3), CC(3,3,3), GAMAC(3,3,3)\$

ETAC(0) := 1\$ ETAC(1) := ETAC(2) := ETAC(3) := -1\$

IN PROCEDURES;

WRITE "CHAME O ARQUIVO DOS DADOS: IN;"\$
PAUSE;

on gcd;

forall x let cos(x)**2=1 - sin(x)**2;

forall x let cosh(x)**2=1 + sinh(x)**2;

FOR A1=1:4 DO FOR B1=1:4 DO TETR(A1,B1) := MTC(A1-1,B1-1);

TETRINV := 1/TETR;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO MTI(A1,B1) := TETRINV(A1+1,B1+1);

CLEAR TETR, TETRINV;

```
FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=0:3 DO
    FOR C1=B1+1:3 DO
      << CCA1,B1,C1 := FOR K11=0:3 SUM FOR L11=0:3 SUM
        DFC(MTC(A1,K11),X(L11))*(MTI(L11,B1)*MTI(K11,C1) -
        MTI(L11,C1)*MTI(K11,B1))$
      CCA1,C1,B1 := - CCA1,B1,C1 >>$
```

```
FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1+1:3 DO
    FOR C1=0:3 DO
      << GAMAC(A1,B1,C1) := (ETAC(A1)*CCA1,B1,C1 - ETAC(B1)*
      CC(B1,A1,C1) - ETAC(C1)*CC(C1,A1,B1))/2$
```

GAMAC(B1,A1,C1) := -GAMAC(A1,B1,C1) >>\$

CLEAR C\$

ARRAY RIEMANN(3,3,3,3), RICCI(3,3), EINSTEIN(3,3);


```

FOR A1=0:2 DO
  FOR B1=A1+1:3 DO
    RIEMANN(B1,A1,B1,A1) := RIEMANN(A1,B1,A1,B1) :=
    FOR MI=0:3 SUM (DF(GAMAC(A1,B1,B1),X(MI)))*MTI(MI,A1) -
    DF(GAMAC(A1,B1,A1),X(MI))*MTI(MI,B1) + ETAC(MI)*
    GAMAC(A1,B1,MI)*(GAMAC(MI,A1,B1) - GAMAC(MI,B1,A1)) + ETAC(MI)*
    (GAMAC(MI,B1,B1)*GAMAC(A1,MI,A1) - GAMAC(MI,B1,A1)*
    GAMAC(A1,MI,B1))) $

FOR A1=0:2 DO
  FOR B1=A1+1:3 DO
    FOR C1=0:3 DO
      IF (A1 NEQ C1) AND (B1 NEQ C1) THEN RIEMANN(C1,A1,C1,B1) :=
      FOR MI=0:3 SUM (DF(GAMAC(C1,A1,B1),X(MI))*MTI(MI,C1) -
      DF(GAMAC(C1,A1,C1),X(MI))*MTI(MI,B1) + ETAC(MI)*
      GAMAC(C1,A1,MI)*(GAMAC(MI,C1,B1) - GAMAC(MI,B1,C1)) +
      ETAC(MI)*(GAMAC(MI,A1,B1)*GAMAC(C1,MI,C1) -
      GAMAC(MI,A1,C1)*GAMAC(C1,MI,B1))) $

CLEAR GAMA$

ON NERO$

FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1:3 DO
    WRITE RICCI(A1,B1) := FOR C1=0:3 SUM ETAC(C1)*
    RIEMANN(C1,A1,C1,B1)$

CLEAR RIEMANN$

EC := FOR A1=0:3 SUM ETACA1)*RICCI(A1,A1);

FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1:3 DO
    WRITE EINSTEIN(A1,B1) := RICCI(A1,B1) - IF A1=B1 THEN
    ETACA1)*EC/2 $

OFF NERO, GCD;

END;

```

OFF ECHOS

CLEAR EX,EY,EZ,HX,HY,HZ\$

MATRIX TETR(4,4),TETRINV(4,4);

ARRAY X(3),ETAC(3),MT(3,3),MTI(3,3),CC(3,3,3),GAMAC(3,3,3)\$

ETAC(0) := 1\$ETAC(1) := ETAC(2) := ETAC(3) := -1\$

IN PROCEDURES;

WRITE "CHAME O ARQUIVO DOS DADOS: IN;"\$
PAUSE;

WRITE "DE A DEPENDENCIA FUNCIONAL DE EX,EY,EZ,HX,HY,HZ";
PAUSE;

FOR A1=1:4 DO FOR B1=1:4 DO TETR(A1,B1) := MT(A1-1,B1-1);

TETRINV := 1/TETR\$

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO MTI(A1,B1) := TETRINV(A1+1,B1+1);

CLEAR TETR,TETRINV;

FOR A1=0:3 DO
 FOR B1=0:3 DO
 FOR C1=B1+1:3 DO
 << CC(A1,B1,C1) := FOR K11=0:3 SUM FOR L11=0:3 SUM
 DF(MT(A1,K11),X(L11))*MTI(L11,B1)*MTI(K11,C1) -
 MTI(L11,C1)*MTI(K11,B1) >> \$
 CC(A1,C1,B1) := -CC(A1,B1,C1) >> \$

FOR A1=0:3 DO
 FOR B1=A1+1:3 DO
 FOR C1=0:3 DO
 << GAMAC(A1,B1,C1) := (ETAC(A1)*CC(A1,B1,C1) -
 ETAC(B1)*CC(B1,A1,C1) - ETAC(C1)*CC(C1,A1,B1))/2 \$
 GAMAC(B1,A1,C1) := -GAMAC(A1,B1,C1) >> \$

CLEAR C\$

ARRAY J(3),TM(3,3),EM(3)\$

TM(0,1) := -EX\$ TM(0,2) := -EY\$ TM(0,3) := -EZ\$

TM(1,2) := HZ\$ TM(1,3) := -HY\$ TM(2,3) := HX\$

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1+1:3 DO TM(B1,A1) := -TM(A1,B1)\$

ON NERO;

WRITE " "\$

WRITE " "\$

WRITE "EQUACOES DE MAXWELL NA BASE DE TETRADAS";

FOR A1=0:3 DO

WRITE J(A1) := FOR B1=0:3 SUM FOR C1=0:3 SUM
ETAC(A1)*ETAC(B1)*ETAC(C1)*(DFCTM(A1,B1),X(C1))*MTI(C1,B1) +
GAMAC(A1,B1,C1)*TM(B1,C1) + GAMAC(C1,B1,C1)*TM(A1,B1))\$

BEGIN INTEGER K1\$

K1 := 1\$

FOR A1=0:1 DO

FOR B1=A1+1:2 DO

FOR C1=B1+1:3 DO

<< EM!? := FOR D1=0:3 SUM

ETAC(D1)*(DFCTM(A1,B1),X(D1))*MTI(D1,C1) +
DFCTM(C1,A1),X(D1))*MTI(D1,B1) + DFCTM(B1,C1),X(D1))*
MTI(D1,A1) + GAMAC(D1,A1,C1)*TM(B1,D1) +
GAMAC(D1,C1,B1)*TM(A1,D1) + GAMAC(D1,B1,A1)*TM(C1,D1) +
GAMAC(D1,B1,C1)*TM(D1,A1) + GAMAC(D1,A1,B1)*TM(D1,C1) +
GAMAC(D1,C1,A1)*TM(D1,B1))\$

IF EM!? NEQ 0 THEN << EMCK1 := EM!?\$

WRITE "O := ",EMCK1)\$ K1 := K1-1 >> >> \$

END\$

OFF NERO;

END;

*** PROGRAMA EE ***

CONVENÇÃO:

EQUAÇÃO DE EINSTEIN: $G_{AB} + LG * \eta_{AB} = (RO + PE) * V_A V_B - PE * \eta_{AB}$

ONDE: $G_{AB} = \text{EINSTEIN}(A, B)$
 $LG = \text{CONSTANTE COSMOLÓGICA}$

OFF ECHO;

CLEAR RO, PE, KAPA, LG;

ARRAY EE(3,3);

```
FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1:3 DO
    EE(A1,B1) := EINSTEIN(A1,B1) + (LG+KAPA*PE)*
      (IF A1=B1 THEN ET(A1)) - KAPA*(RO+PE)*MTI(0,A1)*MTI(0,B1) $
```

BEGIN INTEGER KO, K1, K2;

```
FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1:3 DO
    IF KO NEQ 2 THEN
      IF DF(EE(A1,B1),RO) NEQ 0 OR DF(EE(A1,B1),PE) NEQ 0 THEN
        IF KO=0 THEN << EQ1 := EE(A1,B1)$ KO := 1 >> ELSE
          IF EE(A1,B1) - EQ1 NEQ 0 THEN
            << EQ2 := EE(A1,B1)$ KO := 2 >>$
```

SOLVE(1,X!*Z); %ESSE COMANDO PERMITE DESLIGAR A CHAVE SOLVEWRITE

OFF SOLVEWRITE;

SOLVE(LST(EQ1, EQ2), RO, PE)\$

WRITE RO := SOLN(1,1);

WRITE PE := SOLN(1,2);

ARRAY EQD(8)\$

```
FOR A1=0:3 DO
  FOR B1=A1:3 DO
    IF EE(A1,B1) NEQ 0 THEN
      << EQD(K1+1) := EE(A1,B1)$ K1 := K1+1 >>$
```

ON NERO;

```
IF K1>0 THEN FOR A1=1:K1 DO
  << FOR B1=0:A1-1 DO
    IF EQ(X A1)-EQ(X B1)=0 THEN K2 := 1 $
    IF K2=0 THEN WRITE "0 := ",EQ(X A1) ELSE K2 := 0 >> $
```

END\$

ON SOLVEWRITE, NERO;

END;

ALGEBRAIC PROCEDURE EQDIF(X,Y,Z)\$

BEGIN\$

IF X=0 THEN
 IF Y=0 THEN RETURN EQUACAO! MAL! DEFINIDA ELSE
 WRITE INT(SQRT(-Y/Z/A,A),":=T-T0"
 ELSE

BEGIN\$

CLEAR A, S, A!, S, A!, SS, CONST;

DEPEND A,S; DEPEND A!,S,S;

LET DF(A!,S,S) = A!,SS, DF(A,S) = A!,S;

ON RAT;

A!' := A!,S*A**(-Y/X)\$

A!'!' := DF(A! ',S)*A**(-Y/X)\$

A!,SS := -Z*A**(1+2*Y/X)/X\$

VA := -2*INT(A!,SS,A)\$

A!,S := SQRT(CONST-VA)\$

WRITE "RESULTADOS INTERMEDIARIOS";

WRITE " SEJA S UMA NOVA VARIÁVEL TAL QUE:";

WRITE " DS/DI := ",A**(-Y/X);

WRITE " ",!(DA!/DS!)**2+V!(A!)," := CONST";

WRITE " V(A) := ",VA;

WRITE " RO := ",RO;

WRITE " PE := ",PE;

WRITE "RESULTADOS FINAIS";

WRITE " S-S0 := ",INT(1/A!,S,A);

END\$

END\$

END;

APÊNDICE C - CÁLCULO COM FORMAS E O PROGRAMA EXCALC

O objetivo desse apêndice é apresentar como calcular as grandezas geométricas associadas a uma dada métrica através do pacote EXCALC^[63,66], que é um programa para cálculos com formas diferenciais escrito na linguagem REDUCE. Apresentamos também os principais resultados do cálculo exterior que são úteis para se obter essas grandezas geométricas.

A derivada exterior é uma aplicação que leva uma p-forma numa (p+1)-forma e satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad d(\theta + a\omega) &= d\theta + ad\omega \\ \text{ii)} \quad d(\theta \wedge \omega) &= d\theta \wedge \omega + (-1)^p \theta \wedge d\omega \\ \text{iii)} \quad d^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{C.1}$$

onde θ é uma p-forma, ω é uma forma qualquer e $a \in \mathbb{R}$. Na base coordenada escrevemos:

$$\theta = \frac{1}{p!} \theta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad \text{C.2}$$

e

$$d\theta = \frac{1}{p!} \frac{\partial \theta_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad \text{C.3}$$

No EXCALC a derivada exterior é o operador d , e as formas são declaradas com o comando PFORM, por exemplo para declarar θ uma p-forma escrevemos:

$$\text{pform teta=p;} \quad \text{C.4}$$

As relações C.1 já estão implementadas no EXCALC.

Em uma variedade riemanniana quadri-dimensional podemos

definir em cada ponto quatro campos vetoriais ortonormais $\langle e_A, A=0,1,2,3 \rangle$ que servem como base para o espaço tangente à variedade em cada ponto. Esses campos são chamados de tetradas. Podemos definir as 1-formas $\langle o^A, A=0,1,2,3 \rangle$ duais a e_A através da relação:

$$\langle e_B | o^A \rangle = \delta^A_B \quad \text{C.5}$$

onde $\langle | \rangle$ representa o produto interno de vetores com formas. Na base coordenada escrevemos

$$e_A = e^\mu_A \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{C.6}$$

e

$$o^A = e^\mu_A dx^\mu \quad \text{C.7}$$

onde $e^\mu_B e^\mu_A = \delta^A_B$. Um elemento de linha

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{C.8}$$

pode ser escrito como

$$ds^2 = \eta_{AB} o^A o^B \quad \text{C.9}$$

se

$$g_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\mu_B = \eta_{AB} \quad \text{C.10}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci γ^A_{BC} são definidos por:

$$\gamma^A_{BC} = - e^\mu_A{}_{;\lambda} e^\mu_B e^\lambda_C \quad \text{C.11}$$

Pode-se mostrar, usando o fato de η_{AB} ser constante, que

$$\gamma^A_{BC} = - \gamma^A_{CB} \quad \text{C.12}$$

As 1-formas de rotação são definidas por:

$$\omega_{AB} = \gamma_{ABC} o^C \quad \text{C.13}$$

Derivando exteriormente a equação C.7 e usando a equação acima, obtemos:

$$d\omega^A = -\omega^A_{\ B} \wedge \omega^B \quad \text{C.14}$$

A equação acima é chamada de primeira equação de estrutura de Cartan. Pode-se mostrar, usando o fato de que a derivada covariante de $g_{\alpha\beta}$ se anula, que

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \quad \text{C.15}$$

No EXCALC definimos as 1-formas ω^A através do comando COFRAME. Por exemplo, se o elemento de linha é dado por (Schwarzschild):

$$ds^2 = \psi^2 dt^2 - \psi^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \text{C.16}$$

então no EXCALC escrevemos:

$$\text{pform psi}=0; \quad \text{C.17}$$

$$\text{fdomain psi}=psi(r); \quad \text{C.18}$$

$$\begin{aligned} \text{coframe } \omega(t) &= \text{psi} * d(t), \\ \omega(r) &= 1/\text{psi} * d(r), \\ \omega(\text{teta}) &= r * d(\text{teta}), \\ \omega(\text{fi}) &= r * \sin(\text{teta}) * d(\text{fi}) \\ \text{with signature } &(1, -1, -1, -1); \quad \text{C.19} \end{aligned}$$

Observe que com a escolha das tetradas acima, o elemento de linha C.16 pode ser escrito na forma C.9. Nesse caso não é necessário fornecer a métrica ao EXCALC mas apenas a assinatura. O comando C.18 declara que psi é uma função de r.

As 1-formas de rotação ω_{AB} podem ser obtidas no EXCALC através do comando RIEMANNCONX, por exemplo:

$$\text{riemannconx } \omega; \quad \text{C.20}$$

$$\omega(k, -1) := \omega(k, -1); \quad \text{C.21}$$

$$\omega^R_T := e_R \text{psi} * \omega^T$$

$$\omega^T_R := e_R \text{psi} * \omega^T$$

$$OM^{TETA}{}_R := \frac{O^{TETA} * PSI}{R}$$

$$OM^{FI}{}_R := \frac{O^{FI} * PSI}{R}$$

$$OM^R{}_{TETA} := \frac{O^{TETA}}{R}$$

$$OM^{FI}{}_{TETA} := \frac{O^{FI} * COS(TETA)}{SIN(TETA) * R}$$

$$OM^R{}_{FI} := \frac{O^{FI} * PSI}{R}$$

$$OM^{TETA}{}_{FI} := \frac{O^{FI} * COS(TETA)}{SIN(TETA) * R}$$

O comando C.2 faz com que os termos ω^A_B sejam listados. As letras k e l são índices mudos. O índice sem sinal é contravariante e o índice com sinal menos é covariante. A expressão $\partial_R PSI$ significa $\partial(PSI)/\partial R$.

As tetradas e_A são definidas através do comando FRAME, por exemplo:

```
frame e; C.22
```

O produto interno é definido no EXCALC por $v \cdot w$, onde v é um vetor e w é uma forma. Por exemplo, $\langle e_A | \omega^B \rangle$ pode ser calculado através dos seguintes comandos:

```
pform eta(k,l)=0; C.23
```

```
eta(k,-l) := e(-l)_{;o(k)}; C.24
```

$$ETA^T{}_T := 1$$

$$ETA^R{}_R := 1$$

$$ETA^{TETA}{}_{TETA} := 1$$

$$\text{ETA}^{\text{FI}}_{\text{FI}} := 1$$

Podemos ver que o resultado de C.24 é η^k_1 como esperado (estamos omitindo os termos nulos). O comando C.23 define eta como uma função (forma de grau zero) de dois índices.

Os coeficientes de rotação de Ricci γ^A_{BC} podem ser obtidos usando a expressão C.13:

$$\text{pform gama}(k,1,m)=0; \quad \text{C.25}$$

$$\text{gama}(k,-1,-m) := e(-m) \wedge \text{om}(k,-1); \quad \text{C.26}$$

$$\text{GAMA}^R_{T T} := \Theta_R \text{PSI}$$

$$\text{GAMA}^T_{R T} := \Theta_R \text{PSI}$$

$$\text{GAMA}^{\text{TETA}}_{R \text{TETA}} := -\frac{\text{PSI}}{R}$$

A.1 - Tensor de Riemann, Einstein e Ricci

O tensor de Riemann pode ser obtido da segunda equação de estrutura de Cartan:

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad \text{C.27}$$

onde

$$\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \omega^C \wedge \omega^D \quad \text{C.28}$$

No EXCALC escrevemos da seguinte forma:

$$\text{factor } \wedge; \quad \text{C.29}$$

$$\text{pform curv}(k,1)=2; \quad \text{C.30}$$

$$\text{antisymmetric curv}; \quad \text{C.31}$$

$$\text{curv}(k,-1) := d \text{om}(k,-1) + \text{om}(k,-m) \wedge \text{om}(m,-1); \quad \text{C.32}$$

$$\text{CURV}^R_T := -O^T \wedge O^R * (e_R^R \text{PSI} * \text{PSI} + e_R \text{PSI}^2)$$

$$\text{CURV}^{\text{TETA}}_T := \frac{O^T \wedge O^{\text{TETA}} * e_R \text{PSI} * \text{PSI}}{R}$$

O comando C.29 faz com que termos que tenham produto exterior sejam fatorizados. O comando C.31 declara CURV uma forma totalmente antissimétrica e esse comando deve sempre ser dado quando for o caso, pois reduz os cálculos internos do EXCALC. As componentes do tensor de Riemann são obtidas através dos comandos:

$$\text{pform riemann}(k, l, m, n) = 0; \quad \text{C.33}$$

$$\text{riemann}(k, -l, -m, -n) := e(-n) \wedge (e(-m) \wedge \text{curv}(k, -l)); \quad \text{C.34}$$

$$\text{RIEMANN}^T_{R T R} := e_R^R \text{PSI} * \text{PSI} + e_R \text{PSI}^2$$

$$\text{RIEMANN}^T_{\text{TETA T TETA}} = \frac{e_R \text{PSI} * \text{PSI}}{2R}$$

O comando C.34 usa um espaço de memória grande devido ao grande número de índices, e facilmente esgota a memória de um PC se a métrica não for simples.

Para obtermos o tensor de Einstein G^A_B procedemos da seguinte forma: Definimos a 1-forma de Einstein G^A por:

$$G^A = G^A_B o^B \quad \text{C.35}$$

Seja $*G^A$ a 3-forma dual a G^A . Podemos mostrar que

$$*G^A = -\frac{1}{2} (o^A \wedge o^B \wedge o^C) * \wedge_{BC} \quad \text{C.36}$$

Sabendo que no EXCALC o dual de uma forma é obtido através do

operador #, para obter as formas de Einstein escrevemos:

$$\text{pform einsteinstar}(k)=3, \text{einsteinf}(k)=1; \quad \text{C. 37}$$

$$\text{einsteinstar}(k) := -1/2 * \#(\text{o}(k)^{(1)} \wedge \text{o}(m)) \wedge \text{curv}(1, -m); \quad \text{C. 38}$$

$$\text{EINSTEINSTAR}^T := \frac{\text{O}^R \wedge \text{TETA} \wedge \text{O}^{FI} * (2 * \text{e}_R \text{PSI} * \text{R} * \text{PSI} + \text{PSI}^2 - 1)}{\text{R}^2}$$

$$\text{EINSTEINSTAR}^R := \frac{\text{O}^T \wedge \text{TETA} \wedge \text{O}^{FI} * (2 * \text{e}_R \text{PSI} * \text{R} * \text{PSI} + \text{PSI}^2 - 1)}{\text{R}^2}$$

$$\text{einsteinf}(k) := \# \text{einsteinstar}(k); \quad \text{C. 39}$$

$$\text{EINSTEINF}^T := \frac{\text{O}^T * (2 * \text{e}_R \text{PSI} * \text{R} * \text{PSI} + \text{PSI}^2 - 1)}{\text{R}^2}$$

Para obter as componentes do tensor de Einstein escrevemos:

$$\text{pform einstein}(k, 1)=0; \quad \text{C. 40}$$

$$\text{symmetric einstein}; \quad \text{C. 41}$$

$$\text{einstein}(k, -1) := \text{e}(-1) _ \text{einsteinf}(k); \quad \text{C. 42}$$

$$\text{EINSTEIN}^T_T := \frac{2 * \text{e}_R \text{PSI} * \text{R} * \text{PSI} + \text{PSI}^2 - 1}{\text{R}^2}$$

A 1-forma de Ricci é dada por:

$$R^A = R^A_B \text{O}^B = R^{AC}_{BC} \text{O}^B = \langle \text{e}_B | \Omega^{AB} \rangle \quad \text{C. 43}$$

onde R^A_B é o tensor de Ricci. No EXCALC escrevemos

$$\text{pform riccif}(k)=1; \quad \text{C. 44}$$

$$\text{riccif}(k) := \text{e}(-m) _ \text{curv}(k, m); \quad \text{C. 45}$$

$$\text{RICCIF}^T := \frac{0^T * (\epsilon_R \text{ PSI} * R * \text{PSI} + \epsilon_R \text{ PSI}^2 * R + 2 * \epsilon_R \text{ PSI} * \text{PSI})}{R}$$

Para obter os componentes do tensor de Ricci escrevemos:

$$\text{pform ricci}(k, l) = 0; \quad \text{C. 46}$$

$$\text{symmetric ricci}; \quad \text{C. 47}$$

$$\text{ricci}(k, -l) := \text{e}(-l)_{; \text{riccif}}(k); \quad \text{C. 48}$$

$$\text{RICCI}^T_T := \frac{\epsilon_R \text{ PSI} * R * \text{PSI} + \epsilon_R \text{ PSI}^2 * R + 2 * \epsilon_R \text{ PSI} * \text{PSI}}{R}$$

O escalar de curvatura R pode ser obtido das seguintes maneiras:

$$\text{pform ec} = 0; \quad \text{C. 49}$$

$$\text{ec} := \text{e}(-m)_{; \text{riccif}}(m); \quad \text{C. 50}$$

$$\text{EC} := \frac{2 * (\epsilon_R \text{ PSI} * R^2 * \text{PSI} + \epsilon_R \text{ PSI}^2 * R^2)}{2} + \frac{4 * \epsilon_R \text{ PSI} * R * \text{PSI} + \text{PSI}^2 - 1}{2}$$

ou

$$\text{ec} := \text{ricci}(m, -m) \quad \text{C. 51}$$

Uma outra maneira de se obter R^A_B e G^A_B é através das componentes do tensor de Riemann da forma:

$$\text{ricci}(k, -l) := \text{riemann}(k, m, -l, -m) \quad \text{C. 52}$$

$$\text{einstein}(k, -l) := \text{ricci}(k, -l) - (\text{e}(-l)_{; \text{o}}(k)) * \text{ricci}(m, -m) / 2 \quad \text{C. 53}$$

Em geral, esse último procedimento não é o método mais eficiente, pois necessita das componentes do tensor de Riemann. No EXCALC devemos evitar o máximo possível de trabalhar com os coeficientes

das formas e sim manipular as formas em si. Apenas quando necessário projetamos a forma para obter os coeficientes.

A.2 - Tensor de Weyl

A 2-forma de Weyl é dada pela seguinte expressão [61]:

$$C^{AB} = \Omega^{AB} - \frac{1}{2}(S^A \wedge o^B - S^B \wedge o^A) - \frac{R}{12} o^A \wedge o^B \quad C.54$$

onde

$$S^A = R^A - \frac{1}{4}R o^A \quad C.55$$

S^A é a 1-forma de Ricci sem traço. As componentes do tensor de Weyl podem ser obtidas da eq. C.54 da seguinte forma:

$$C^{AB}_{CD} = \langle e_D | \langle e_C | C^{AB} \rangle \rangle \quad C.56$$

$$= R^{AB}_{CD} - \frac{1}{2} (\eta^A_C S^B_D + \eta^B_D S^A_C - \eta^A_D S^B_C - \eta^B_C S^A_D) - \frac{R}{12} (\eta^A_C \eta^B_D - \eta^A_D \eta^B_C) \quad C.57$$

onde S^A_B são as componentes do tensor de Ricci sem traço, isto é,

$$S^A_B = \langle e_B | S^A \rangle = R^A_B - \frac{1}{4}R \eta^A_B \quad C.58$$

No EXCALC escrevemos então:

$$\text{pform weyl}(k,1)=2, \text{ riccist}(k)=1; \quad C.59$$

$$\text{riccist}(k) := \text{riccif}(k) - \text{ec} * \text{o}(k) / 4\$ \quad C.60$$

$$\text{weyl}(k,1) := \text{curv}(k,1) - (\text{riccist}(k) \wedge \text{o}(1) - \text{riccist}(1) \wedge \text{o}(k)) / 2 - \text{ec} * \text{o}(k) \wedge \text{o}(1) / 12\$ \quad C.61$$

Para obter as componentes do tensor de Weyl escrevemos:

$$\text{pform weyl}(k,1,m,n)=0; \quad C.62$$

$$\text{weyl}(k,1,m,n) := \text{e}(n)_!(\text{e}(m)_! \text{weyl}(k,1))\$ \quad C.63$$

A.3 - Quantidades Cinemáticas

Vamos supor que a velocidade na base de tetradas é dada por:

$$v^A = \delta^A_0 \quad \text{C. 64}$$

Nesse caso os parâmetros cinemáticos são dados por ⁽⁵⁷⁾:

i) Escalar de expansão

$$\theta = \gamma^A_{0A} \quad \text{C. 65}$$

ii) Tensor de cisalhamento (Shear)

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(\gamma^0_{AO}\eta_{BO} + \gamma^0_{BO}\eta_{AO} - \gamma^0_{AB} - \gamma^0_{BA} - \frac{2}{3}(\eta_{AB} - \eta_{AO}\eta_{BO})) \quad \text{C. 66}$$

iii) Tensor de rotação

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2}(\gamma^0_{BA} - \gamma^0_{AB} + \gamma^0_{AO}\eta^0_B - \gamma^0_{BO}\eta^0_A) \quad \text{C. 67}$$

iv) Vetor aceleração

$$a_A = -\gamma^0_{AO} \quad \text{C. 68}$$

Uma vez calculadas as componentes de γ^A_{BC} e η^A_B , no EXCALC escrevemos:

$$\text{pform expansao}=0, \text{ cisa}(k,1)=0, \text{ rot}(k,1)=0, \text{ acel}(k)=0; \quad \text{C. 69}$$

$$\text{expansao} := \text{gama}(k,t,-k); \quad \text{C. 70}$$

$$\begin{aligned} \text{cisa}(k,1) := & 1/2*(\text{gama}(t,k,-t)*\text{eta}(1,-t) + \\ & + \text{gama}(t,1,-t)*\text{eta}(k,-t) - \\ & - \text{gama}(t,k,1) - \text{gama}(t,1,k) - \\ & - 2/3*teta*(\text{eta}(k,1) - \\ & - \text{eta}(k,-t)*\text{eta}(1,-t))); \end{aligned} \quad \text{C. 71}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(k,1) := & 1/2*(\text{gama}(t,k,1) - \text{gama}(t,1,k) + \\ & + \text{gama}(t,k,-t)*\text{eta}(t,1) - \\ & - \text{gama}(t,1,-t)*\text{eta}(t,k)); \end{aligned} \quad \text{C. 72}$$

$$\text{acel}(k) := -\text{gama}(t,k,-t); \quad \text{C. 73}$$

APÊNDICE D - RESULTADOS DE CÁLCULOS USANDO REDUCE

Grande parte dos resultados algébricos dos capítulos 3 e 4 dessa tese foi feita ou confirmada através do programa REDUCE. Nesse apêndice mostramos como obtivemos alguns desses resultados. As grandezas geométricas, como o tensor de Ricci, foram primeiramente obtidas através dos programas descritos no apêndice B. Esses cálculos foram refeitos mais tarde com o programa EXCALC em um PC. Mostramos a seguir como realizamos esses cálculos com alguns comentários explicativos.

O comando abaixo carrega o pacote EXCALC.

```
LOAD "excalc";
```

Os comandos a seguir declaram como funções os parâmetros A, B, k e m, que aparecem na métrica (3.1) e também especificam as dependências funcionais.

```
PFORM A=0,B=0,K=0,M=0;
```

```
FDOMAIN A=A(T),B=B(T),K=K(TETA),M=M(TETA);
```

O comando abaixo estabelece a base de tetradas que serão usadas para se obter o tensor de Ricci. Estamos seguindo a escolha e notação usadas na tese de mestrado [1].

```
COFRAME O T = D T,
```

```
    O KI = A*(D KI + 4*M**2*D FI),
```

```
    O TETA = B*K*D TETA,
```

```
    O FI = B*K*SIN(TETA)*D FI
```

```
WITH SIGNATURE (+1,-1,-1,-1);
```

Os comandos a seguir estabelecem os vetores tetradas (com nome E, tal que $\langle E_{\mathbf{a}} | O^{\mathbf{A}} \rangle = \eta^{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}$) e as 1-formas de rotação $\omega_{\mathbf{AB}}$ (com nome OM).

FRAME E;

RIEMANNCONX OM;

Os comandos abaixo implementam as relações (3.2) e (3.3).

LET @ (M, TETA) = LAM1 * K ** 2 * SIN (TETA) / 4 / M;

LET @ (K, TETA, TETA) = LAM2 * K ** 3 - COS (TETA) * @ (K, TETA) / SIN (TETA)
+ @ (K, TETA) ** 2 / K + K;

Os comandos a seguir servem para melhorar a forma de saída das expressões a serem calculadas, fatorizando os termos com derivadas parciais.

FACTOR @ (B, T, D), @ (A, T, D), @ (B, D), @ (A, D), LAM1, LAM2;

ON RAT;

Calculamos agora as grandezas geométricas $\Omega^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}$, através da segunda equação de estrutura de Cartan, e o tensor de Ricci.

PFORM CURV (J, L) = 2;

CURV (J, -L) := D OM (J, -L) + OM (J, -M) ^ OM (M, -L) \$

PFORM RICCI (J, L) = 0;

SYMMETRIC RICCI;

RICCI (J, -L) := EC (-L) _ ; (EC (-M) _ ; CURV (J, M));

$$\text{RICCI}^T \quad T := \frac{2 * e_T \quad T^B}{B} + \frac{e_T \quad T^A}{A}$$

$$\text{RICCI}^{KI} \quad KJ := \frac{e_T \quad T^A}{A} + \frac{2 * e_T \quad B * e_T \quad A}{A * B} + \frac{2 * \text{LAM1}^2 * A^2}{4}$$

$$\text{RICCI}^{\text{TETA}} \quad \text{TETA} := \frac{e_T \quad T^B}{B} + \frac{e_T \quad B^2}{B^2} + \frac{e_T \quad B * e_T \quad A}{A * B} +$$

$$- \frac{2 * \text{LAM1}^2 * A^2}{B^4} + - \text{LAM2} / B^2$$

$$\text{RICCI}^{FI}_{FI} := \frac{e_T T^B}{B} + \frac{e_T B^2}{B^2} + \frac{e_T B * e_T A}{A * B} +$$

$$- \frac{2 * \text{LAM1}^2 * A^2}{B^4} + - \text{LAM2} / B^2$$

Os comandos a seguir estabelecem a quadri-velocidade ($v^A = \delta^A_0$) e o tensor de Maxwell F^{AB} .

PFORM V(L)=0, F(CJ,L)=0, TEM(CJ,L)=0;

V(T):=1\$ V(KI):=V(TETA):=V(FI):=0\$

ANTISYMMETRIC F;

F(CJ,L) := 0\$

F(C-KI, -T) := CE\$

F(C-TETA, -FI) := CM\$

FF := F(CJ,L)*F(C-J, -L)\$

Os comandos abaixo definem a métrica η^{AB} e calcula o tensor momentum-energia para fluido perfeito mais campo eletromagnético.

PFORM ETACK,L) = 0;

ETACK,L) := E(L)_;(CK)\$

TEM(CJ,L) := RO*V(CJ)*V(L) - P*(ETACJ,L) - V(CJ)*V(L)
+ F(CJ, -N)*F(CN, L) + FF*ETACJ,L)/4\$

$$\text{TEM}^{TT} := \frac{CE^2 + CM^2 + 2*RO}{2}$$

$$\text{TEM}^{KI KI} := \frac{CE^2 + CM^2 - 2*P}{2}$$

$$\text{TEM}^{TETA TETA} := \frac{CE^2 + CM^2 + 2*P}{2}$$

$$\text{TEM}^{FI FI} := \frac{CE^2 + CM^2 + 2*P}{2}$$

Os comandos a seguir montam as equações de Einstein e guardam

o resultado no tensor EE^{AB} . As equações são então $EE^{AB}=0$.

PFORM $EE(J,L) = 0$;

$EE(J,L) := RICCI(J,L) - (TEM(J,L) - ETAC(J,L)*TEM(N,-N)/2)$;

$$EE^{TT} := - \left(\frac{2 * e_{TT}^B}{B} + \frac{e_{TT}^A}{A} + \frac{CE^2 + CM^2 + RO + 3 * P}{2} \right)$$

$$EE^{KI KI} := \frac{e_{TT}^A}{A} + \frac{2 * e_{TT}^B * e_{TT}^A}{A * B} + \frac{2 * LAM1^2 * A^2}{4} + \frac{CE^2 + CM^2 - RO + P}{2}$$

$$EE^{TETA TETA} := \frac{e_{TT}^B}{B} + \frac{e_{TT}^{B^2}}{B^2} + \frac{e_{TT}^B * e_{TT}^A}{A * B} + \frac{2 * LAM1^2 * A^2}{B^4} - \frac{LAM2}{B^2} - \frac{CE^2 + CM^2 + RO - P}{2}$$

$$EE^{FI FI} := \frac{e_{TT}^B}{B} + \frac{e_{TT}^{B^2}}{B^2} + \frac{e_{TT}^B * e_{TT}^A}{A * B} + \frac{2 * LAM1^2 * A^2}{B^4} - \frac{LAM2}{B^2} - \frac{CE^2 + CM^2 + RO - P}{2}$$

Note que $EE^{\phi\phi} = EE^{\theta\theta}$, assim temos três equações a três incógnitas. Essas equações podem ser resolvidas com o comando SOLVE:

LET $CE**2=CE2$;

RES:=SOLVE(LST(EE(T,T), EE(KI,KI), EE(FI,FI)), LST(RO,P,CE2));

$$RES := \left(\left(RO = - \frac{e_{TT}^B}{2 * B} + \frac{e_{TT}^A}{2 * A} + \frac{e_{TT}^{B^2}}{2 * B^2} + \frac{5 * e_{TT}^B * e_{TT}^A}{2 * A * B} + \frac{(2 * LAM1^2 * A^2 - LAM2 * B^2)}{(2 * B^4)}, \right. \right.$$

$$P = - \left(\frac{3 * e_{TT}^B}{2 * B} + \frac{e_{TT}^A}{2 * A} + \frac{e_{TT}^{B^2}}{2 * B^2} + \frac{e_{TT}^B * e_{TT}^A}{2 * A * B} + \frac{(2 * LAM1^2 * A^2 + LAM2 * B^2)}{(2 * B^4)} \right),$$

$$CE2 = \left(\frac{e_T T^B}{B} - \frac{e_T T^A}{A} + \frac{e_T B^2}{B^2} - \frac{e_T B * e_T A}{A * B} + \right. \\ \left. - (4 * LAM1^2 * A^2 + LAM2 * B^2 + CM^2 * B^4) / B^4 \right)$$

Devido a problemas com falta de memória no PC, vamos continuar os cálculos fora do EXCALC. Para isso vamos guardar o último resultado em um arquivo chamado ROPE através dos seguintes comandos:

```
OUT "A:ROPE";
OFF NAT;
RES := FIRST(RES)$
PART(FIRST(RES),0) := := ;
PART(SECOND(RES),0) := := ;
PART(THIRD(RES),0) := := ;
WRITE "END";
ON NAT;
SHUT "A:ROPE";
```

Uma vez que vamos sair do EXCALC temos que editar o arquivo ROPE e trocar o comando @ por DF. Ao recomeçar a seção de REDUCE damos então os seguintes comandos:

```
DEPEND A,T;
DEPEND B,T;
IN "A:ROPE";

RO := 1/2*DF(A,T,T)*A**(-1) + 5/2*DF(A,T)*DF(B,T)*A**(-1)*B**(-1)
- 1/2*DF(B,T,T)*B**(-1) + 1/2*DF(B,T)**2*B**(-2) + LAM1**2*A**2*
B**(-4) - 1/2*LAM2*B**(-2)+LG$

P := - (1/2*DF(A,T,T)*A**(-1) + 1/2*DF(A,T)*DF(B,T)*A**(-1)*
B**(-1) + 3/2*DF(B,T,T)*B**(-1) + 1/2*DF(B,T)**2*B**(-2) -
LAM1**2*A**2*B**(-4) - 1/2*LAM2*B**(-2))-LG$

CE2 := - (DF(A,T,T)*A**(-1) + DF(A,T)*DF(B,T)*A**(-1)*B**(-1) -
DF(B,T,T)*B**(-1) - DF(B,T)**2*B**(-2) + 4*LAM1**2*A**2*B**(-4) +
LAM2*B**(-2) + CM**2)$
```

Vamos agora implementar a relação (3.10). Daqui para frente tomaremos $\lambda_1 = 0$.

A: =B**R\$

LAM1: =0\$

FACTOR DF(B,T,2),DF(B,T),LAM2;

ON RAT;

Os comandos a seguir implementam a relação (3.16) até colocá-la na forma da eq. (3.22).

EE: =LP*RO-P;

$$EE := DF(B,T,2) * \frac{LP*R - LP + R + 3}{2*B} + DF(B,T)^2 * \frac{(LP*R^2 + 4*LP*R + LP + R^2 + 1)/(2*B^2) - LAM2 * \frac{LP + 1}{2*B^2} + LG*(LP + 1)}{2*B^2}$$

P1: =PART(EE,2)*2*B**2/DF(B,T)**2;

$$P1 := \frac{LP^2 * R^2 + 4 * LP * R + LP + R^2 + 1}{2 * B^2}$$

P2: =PART(EE,1)*2*B/DF(B,T,2);

$$P2 := LP * R - LP + R + 3$$

ALFA1: =P1/P2;

$$ALFA1 := \frac{LP^2 * R^2 + 4 * LP * R + LP + R^2 + 1}{LP * R - LP + R + 3}$$

DEPEND B,ETA;

B!. = DF(B,ETA)*B**(-ALFA)\$

B!.. := DF(B!.,ETA)*B**(-ALFA)\$

FACTOR DF(B,ETA,2),DF(B,ETA),LAM2;

EE1: =SUB(DF(B,T)=B!.,DF(B,T,2)=B!..,EE);

$$\begin{aligned}
 EE1 := & DF(D, ETA, 2) * \frac{LP * R - LP + R + 3}{2 * B^{2 * ALFA * B}} + DF(D, ETA)^2 * \\
 & (ALFA * LP * R - ALFA * LP + ALFA * R + 3 * ALFA - LP * R^2 - \\
 & 4 * LP * R - LP - R^2 - 1) / (2 * B^{2 * ALFA * B^2}) - \\
 & LAM2 * \frac{LP + 1}{2 * B^2} + LG * (LP + 1)
 \end{aligned}$$

SUB(ALFA=ALFA1 , PART(EE1 , 2));

0

EE1 := EE1 - PART(EE1 , 2);

$$\begin{aligned}
 EE1 := & DF(B, ETA, 2) * \frac{LP * R - LP + R + 3}{2 * B^{2 * ALFA * B}} - \\
 & LAM2 * \frac{LP + 1}{2 * B^2} + LG * (LP + 1)
 \end{aligned}$$

EE1 := EE1 / PART(EE1 , 1) * DF(B, ETA, 2);

$$\begin{aligned}
 EE1 := & DF(B, ETA, 2) - \frac{LP + 1}{B * (LP * R - LP + R + 3)} * \\
 & * (B^{2 * ALFA} * LAM2) + 2 * B^{2 * ALFA} * LG * B * \frac{LP + 1}{LP * R - LP + R + 3}
 \end{aligned}$$

EE1 := SUB(LP=(RO+3)/(1-RO) , EE1);

$$EE1 := DF(B, ETA, 2) + \frac{B^{2 * ALFA} * LAM2}{B * (RO - R)} - \frac{2 * B^{2 * ALFA} * LG * B}{RO - R}$$

Observe que a equação acima é a equação (3.22) se tomarmos $EE1=0$.

O processo acima pode ser continuado no REDUCE de forma a obter as equações (3.24) até (3.40).

REFERÊNCIAS:

- [1] - Zeldovich, Ya. B. e Novikov, I. D. - Relativistic Astrophysics, The Structure and Evolution of the Universe (ed. Steigman, G., University Press, Chicago, 1983)
- [2] - Dunn, K. A. e Tupper, B. O. J. - Ap. J. 235, 307 (1980).
- [3] - Portugal, R. - Modelos Cosmológicos Tipo Bianchi I, II, VIII, IX e Kantowski-Sachs com Fluido Perfeito e Campos Eletromagnéticos com Corrente de Condutividade. - Tese de Mestrado, CBPF (1984).
- [2] - Lorentz, D. - Astrophys. Space Sci. 83, 63 (1982).
- [3] - Ftaclas, C. e Cohen, J. M. - Charged Homogeneous Cosmologies - Ap. J., 227, 13 (1979).
- [4] - Portugal, R. e Damão Soares, I. - Magnetohydrodynamic Cosmologies with a Bertotti-Robinson Limit - Ap. J., 316, 483 (1987).
- [5] - Jackson, J. D. - Classical Electrodynamics - (John Willey & Sons, New York 1975).
- [6] - Dixon, W. G. - Special Relativity: The Foundation of Macroscopic Physics - (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [7] - Müller, I. - Toward Relativistic Thermodynamics - Arch. Rational Mech. Anal. 34, 259 (1969).
- [8] - Israel, W. - Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory - Ann. Phys. (N.Y.), 100, 310, (1976).
- [9] - Hiscock, W. A. e Lindblom, L. - Stability and Causality in Dissipative Relativistic Fluids - Ann. Phys. (N.Y.), 151, 466 (1983).
- [10] - Lima, J. A. S., Portugal, R. e Waga, I. - Bulk-viscosity-driven Asymmetric Inflationary Universe - Phys. Rev. D 37, 2755 (1988).
- [11] - de Groot, S. R. e Suttorp, L. G. - Foundations of Electrodynamics - (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1972).
- [12] - Ellis, G. F. R. - Relativistic Cosmology - Cargèse Lectures in Physics, Vol VI (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [13] - Esaki, L. e Tsu, R. - Superlattice and Negative Conductivity in semiconductors - IBM Res. Note, RC-2418, (Mar 1958).

- [14] - Esaki, L. e Tsu, R. - Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors - IBM J. Res. Develop. pp 61 (Jan 1970).
- [15] - Esaki, L. - A Bird's-Eye View on the Evolution of Semiconductor Superlattices and Quantum Wells. - IEEE J. Quantum Electron., QE-22, 1611 (1986).
- [16] - Asseo, E e Sol, H. - Extragalactic Magnetic Fields - Phys. Rep. 148, 307 (1987).
- [17] - Sofue, Y.; Fujimoto, M. e Kawabata, K. - Publ. Astron. Soc. Japan 20, 388 (1968).
- [18] - Kawabata, K.; Fujimoto, M.; Sofue Y. e Fukui, M. - Publ. Astron. Soc. Japan 21, 293 (1969).
- [19] - Kawabata, K.; Fujimoto, M.; Sofue Y. e Fukui, M. - Publ. Astron. Soc. Japan 31, 125 (1979).
- [20] - Reinhardt, M. e Thiel, M. A. - Astrophys. Lett 7, 101 (1970).
- [21] - Reinhardt, M. - Astronomy and Astrophysics 38, 1389 (1973).
- [22] - Kobolov, V. M.; Reinhardt, M. e Sazonov, V. N. - Astrophys. Lett. 17, 183 (1976).
- [23] - Piddington, J. M. - Astrophys. and Space Sci. 59, 237 (1978).
- [24] - Hoyle, F. - XI Solvay Conf., Brussels (1958).
- [25] - Posen, G. - J. Math. Phys. 3, 313 (1962).
- [26] - Rosen, G. - Phys. Rev. 136, B287 (1964).
- [27] - Doroshkevich, A. G. - Astrophysics 1, 138 (1967).
- [28] - Zeldovich, Ya. B. - Soviet Phys. JETP 21, 656 (1965).
- [29] - Thorne, K. S. - Ap. J. 148, 51 (1967).
- [30] - Jacobs, K. C. - Ap. J. 155, 379 (1969).
- [31] - Tsoubelis, D. - Lett. Nuovo Cimento 26, 274 (1979).
- [32] - Lorentz, D. - Phys. Lett. A80, 235 (1980).
- [33] - Ryan, M. P.; Waller, S. M. e Shepley, L. C. - Ap. J. 254, 425 (1982).
- [34] - Fenelly, A. J. - Ap. J. 252, 410 (1982).
- [35] - Weinberg, S. - Gravitation and Cosmology - (Wiley, New York 1972).
- [36] - Harrison, E. R. - Nature 224, 1089 (1969).

- [37] - Harrison, E. R. - Mon. Not. R. Astron. Soc. 147, 279 (1970).
- [38] - Kihara, T. e Miyuoshi, K. - Publ. Astron. Soc. Japan 22, 245 (1970).
- [39] - Brecher, K. e Blumenthal, G. R. - Astrophys. Lett. 6, 169 (1970).
- [40] - Matsuda, T.; Sato, H. e Takeda, H. - Publ. Astron. Soc. Japan 23, 1 (1971).
- [41] - Harrison, E. R. - Phys. Rev. Lett. 30, 188 (1973).
- [42] - Harrison, E. R. - Mon. Not. R. Astron. Soc. 165, 185 (1973).
- [43] - Beierlein, R. - Mon. Not. R. Astron. Soc. 184, 843 (1978).
- [44] - Fenelly, A. J. - Phys. Rev. D 21, 2107 (1980).
- [45] - Tupper, B. O. J. - Ap. J. 216, 192 (1977).
- [46] - Tupper, B. O. J. - Gen. Rel. Grav. 15, 47 (1983).
- [47] - Tupper, B. O. J. - Gen. Rel. Grav. 15, 849 (1983).
- [48] - Dunn, K. A. e Tupper, B. O. J. - Ap. J. 204, 322 (1976).
- [49] - Dunn, K. A. e Tupper, B. O. J. - Ap. J. 222, 405 (1978).
- [50] - Coley, A. A. e Tupper, B. O. J. - Ap. J. 280, 26 (1984).
- [51] - Ryan, M. P. e Shepley, L. C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies - (Princeton University Press, New Jersey 1975).
- [52] - Lorentz, D. - Astrophys. Space Sci. 83, 63 (1982).
- [53] - Ftacilas, C. e Cohen, J. M. - Charged Homogeneous Cosmologies - Ap. J., 227, 13 (1979).
- [54] - Hugston, L. P. e Jacobs, K. C. - Ap. J. 160, 147 (1970).
- [55] - Bekenstein, J. D. e Oron, E. - Phys. Rev. D 18, 1809 (1978).
- [56] - Kamke, E. - Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen - (Chelsea Publishing Company, New York 1971).
- [57] - Sakharov, A. D. - Soviet Phys. JETP - 22, 241 (1966).
- [58] - Novello, M. - Cosmologia Relativística - II Escola de Cosmologia e Gravitação, Vol I, Novello, M. (editor) CBPF (1980).
- [59] - Gradstein, J. S. e Ryzhik, I. M. - Tables of Integrals, Series and Products (Academic Press 1980).

- [60] - Bertotti, B. - Phys. Rev. 110, 1331 (1959).
- [61] - Robinson, I. - Bull. Acad. Poloniae Scie. - 7, 351 (1959).
- [62] - Kramer, D.; Stephani, H.; MacCallum, M. e Herlt, E. - Exact Solutions of Einstein's Field Equations - (Berlim: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1980).
- [63] - Schrüfer, E. - EXCALC User's Manual - (Rand Report 1986).
- [64] - Portugal, R. - Reduce para PC-compatível - Apostila a ser publicada (1988).
- [65] - Chan, R. - Manual de Programas para a Relatividade Geral - Publicações do Observatório Nacional n. 06/1988.
- [66] - Schrüfer, E. - Exterior Calculus on a Computer - Notas de Aula da "School on Advanced Technics in Computational Physics" (ICTP, Trieste 1986).