

TESE
1988/19
O48

TESE 1988/19 O48

Autor: Oliveira, Luiz Alberto Rezende d
Título: Acoplamento não-mínimo com a g:



17537

16 817

LUIZ ALBERTO REZENDE DE OLIVEIRA

ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO COM A GRAVITAÇÃO E
ESPAÇOS DE WEYL INTEGRÁVEIS

Tese de

DOCTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1988

Dedicatória

A meus Mestres,

Luiz Alfredo Garcia-Roza

Claudio Ulpiano

Roberto Moreira Xavier

Takeshi Kodama

José Martins Salim

e especialmente a

Carmem Lúcia de Oliveira

Maurice Leon Gozlan

e a

Mario Novello,

toda a gratidão deste aprendiz.

LIVROS - PATRIMÔNIO	
CBPF / CNPq	
BIBLIOTECA	
Data	Registro
15/08/08	17537

A cerca de trezentos ou quatrocentos metros das Pirâmides me inclinei, tomei um punhado de areia, deixei-o cair silenciosamente um pouco mais longe e disse em voz baixa: "Estou modificando o Saara". O fato era mínimo, mas as engenhosas palavras eram exatas, e pensei que toda a minha vida havia sido necessária para que pudesse dizê-las.

Jorge Luis Borges, "Atlas"

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Mario Novello, orientador desta Tese e incentivador dos trabalhos que nela resultaram, pelo muito que aprendi, pelas lições de criatividade e espírito crítico, pelo ímpeto de pesquisa e pelo estímulo da amizade e da confiança com que me honrou, muito obrigado.

Ao Dr. José Martins Salim, que me apresentou a certa dama vertiginosa - a Cosmologia - e de quem tantas vezes hauri, nestes tempos íngremes, o exemplo estóico de resolução para emprender e perseguir a longa jornada rumo ao Zahir, agradeço muitíssimo.

Aos professores e companheiros do Departamento de Relatividade e Partículas - Carlos Marcio do Amaral[†], Ligia Rodrigues, Isaías Costa, Ívano Soares, Nelson Pinto, Nami Svaiter, Sergio Joffily, Luciane Rangel, João Torres, Renato Portugal, Ademir Lima, Maurício Calvão, Alberto Reis, Inácio Bediaga, e todos os demais colegas - agradeço o habitat em que se gerou e desenvolveu este trabalho. A Renato Pires, André Veloso e Filipe Paiva, em especial, agradeço a ajuda inestimável no manuseio de técnicas computacionais de cálculo.

A Sergio Machado, Marilda Pedroso, Letícia Parente, Bia Lessa, Daniel Dantas, André Monteiro, Nancy Mangabeira, Mauro Costa, Ciro Barroso, Tunga, Renato Camargo, Lilian Fontes, Henrique e Jô Antoun, Danilo Gomes, Roberto Bartholo, Narciso Teixeira, Marcos Batista, Beto Costa e a todos os alunos, companheiros e amigos que compartilharam idéias, diferenças e inquietações, que pros

sigamos.

A Carmem Oliveira, Marisia Violante, Marina Carvalho, Cleusa Ramos – e até mesmo Paulo Lang! – agradeço de todo o coração o imenso que por mim fizeram.

A Myriam Coutinho e Fatima Dantas, mais que a excelente datilografia, devo a bondade, alegria e paciência quase infinitas com que suportaram este fazedor de hieróglifos.

Ao CBPF/CNPq, casa de Ciência a que me orgulho de pertencer, agradeço o manah que cai dos céus.

A todos – felizmente, tantos! – que acompanharam, participaram e colaboraram neste trabalho; a todos – infelizmente, tantos! – que não pude agradecer aqui; a todos que amei, toquei e pertenci neste tomo de minha vida; a Itaipava, Ilhabela, à Urca e ao *blues*, uma saudação sufi.

R E S U M O

Consideramos no presente trabalho os efeitos físicos e cosmológicos advindos da adoção de acoplamentos não-mínimos entre campos escalares e vetoriais e a gravitação, com particular ênfase para sua interrelação (mercê da aplicação do método variacional de Palatini) com os espaços-tempo de Weyl integráveis (WISTs). Para tanto, resumizamos o panorama das investigações correntes em Cosmologia, discutimos os princípios de acoplamento mínimo e não-mínimo e expomos os fundamentos e as aplicações dos espaços de Weyl e WIST. Obtemos então no caso de campos vetoriais não-minimalmente acoplados duas novas classes de soluções cósmicas num WIST, para métricas homogêneas e isotrópicas (na ausência e na presença de matéria) e para métricas estáticas com simetria esférica. No caso de campos escalares não-minimalmente acoplados, sugerimos um mecanismo de geração de uma constante cosmológica como efeito de uma transição estrutural entre geometrias WIST e de Riemann, investigamos a analogia entre cenários não-mínimos e modelos pentadimensionais (obtendo como subproduto uma solução do modelo de Kaluza com constante cosmológica), consideramos a viabilidade de mecanismos de quebra espontânea e induzida de simetria, individual e sequencialmente, e terminamos com uma investigação de possíveis efeitos recíprocos entre a gravitação e outras interações no caso de um modelo fenomenológico de um processo de interação forte, o que propicia um contexto inédito para a aparição do número de Eddington 10^{39} . Concluimos com uma apreciação crítica desses resultados e o esboço de perspectivas futuras de aplicação.

SUMÁRIO

	Pag.
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	vi
ABSTRACT	vi
SUMÁRIO	vii
CAPÍTULO 1: Introdução: O ATUAL CONTEXTO COSMOLÓGICO	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - O Modelo Padrão	11
1.3 - Alternativas Correntes ao Modelo Padrão	19
1.4 - Conteúdo do Presente Trabalho	27
CAPÍTULO 2: ACOPLAMENTOS MÍNIMOS E NÃO-MÍNIMOS COM A GRAVITAÇÃO ...	32
2.1 - Representação Formal das Interações Gravitacionais .	32
2.2 - Acoplamentos Mínimos com a Gravitação	34
2.3 - Acoplamentos Não-Mínimos	40
2.4 - Variação à Palatini e Espaços de Weyl Integráveis ..	45
CAPÍTULO 3: ESPAÇOS DE WEYL E ESPAÇOS DE WEYL INTEGRÁVEIS	50
3.1 - Introdução	50
3.2 - Caracterização dos Espaços de Weyl	51
3.3 - Transformações Conformes e Espaços de Weyl Integrá- veis	61
3.4 - Algumas Aplicações dos Espaços de Weyl	66
3.5 - WIST como Modelos Viáveis para nosso Cosmos	80
CAPÍTULO 4: ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE CAMPOS VETORIAIS COM A GRAVI- TAÇÃO	87
4.1 - Introdução	87
4.2 - Fótons Não-Lineares e Universos Não-Singulares	92
4.3 - Variação à Palatini: Universos Marionete	104
4.4 - Soluções Homogêneas com Matéria num WIST	116
4.5 - Soluções Estáticas com Simetria Esférica num WIST ..	137

CAPÍTULO 5: ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE CAMPOS ESCALARES COM A GRAVI- TAÇÃO	157
5.1 - Introdução	157
5.2 - Quebra Espontânea de Simetria e Repulsão Cósmica	161
5.3 - Transições WIST - Riemann e a Constante Cosmológica .	169
5.4 - Acoplamento Não-Mínimo e Modelos Pentadimensionais ..	178
CAPÍTULO 6: ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE MAIS DE UM CAMPO ESCALAR	193
6.1 - Introdução	193
6.2 - Acoplamento de Vários Campos e Quebra de Simetria ...	197
6.3 - Acoplamentos Mistos e WIST	201
6.4 - Campos Escalares em Espaços Curvos e o Número de Ed- dington	210
CONCLUSÃO	220
REFERÊNCIAS E NOTAS	231

CAPÍTULO I

O ATUAL CONTEXTO COSMOLÓGICO

1.1. INTRODUÇÃO

Quando, no futuro, historiadores interessados na evolução das concepções das Ciências da Natureza se debruçarem sobre os desenvolvimentos sucedidos no decorrer de nosso século, não deixarão decerto de assinalar a ocorrência de profundas transformações em variados domínios da mais fundamental dessas ciências — a Física. Particularmente notável, porém, terá sido a verdadeira transmutação experimentada pela Física do Cosmos, do Universo em sua totalidade: a Cosmologia.

As primeiras décadas do século XX, com efeito, testemunharam a deposição e substituição de alguns dos fundamentos mais acreditados da visão de mundo termo-mecanicista que, a partir de Newton, os físicos haviam diligentemente consolidado para abarcar e interpretar, com considerável sucesso, as evidências físicas e astronômicas disponíveis então. No auge de sua madurez, o instrumental clássico acumulava importantes triunfos em inúmeros setores de investigação ^[1]; tão bem sucedido fora, de fato, em dar conta dos fenômenos físicos na escala de maçãs e planetas que em correspondência havia já se instalado e difundido, na cultura do

Ocidente, uma cosmovisão qualitativa, materialista e reducionista, segundo a qual o Universo físico seria o análogo de um vasto mecanismo, rigorosamente determinístico, analisável com ilimitada precisão e, por conseguinte, inteiramente predizível - refletindo uma aspiração a uma totalização maquínica do mundo físico que, como se sabe, logo encontraria sua hybris.

Efetivamente, experimentos decisivos terminaram por demonstrar a inadequação das abordagens clássicas no que tange tanto à descrição detalhada da estrutura da matéria e de seus componentes atômicos, quanto à medição de fenômenos envolvendo altas velocidades relativas [2]. Estas observações preludiam as demolidoras conclusões de que, inevitavelmente, limites teriam que ser impostos à aplicabilidade dos métodos clássicos quando se tratasse quer de escalas atômicas e energias minúsculas, quer de dimensões cósmicas e largas energias; e de que, para que se pudesse lograr a explicação correta destas classes de fenômenos alheios à perspectiva humana habitual, se fazia necessária uma revisão radical dos próprios princípios pelos quais as leis clássicas haviam sido edificadas. Assim, os processos microscópicos deverão doravante ser descritos por regras descontínuas de quantificação, de acordo com os princípios indeterministas, essencialmente probabilísticos, da Mecânica Quântica de Planck, De Broglie e Bohr [3]; o quadro Newtoniano de um espaço tridimensional Euclidiano e de um tempo universal absolutos, no qual partículas maciças, estáveis e impassíveis coordenam-se pela ação instantânea de forças mecânicas, cede lugar ao contínuo espaço-tempo quadridimensional de Minkowski e à possibilidade de conversão entre massa e energia advogados pela teoria da Relatividade Especial (TRE) de Einstein [4].

O mundo macroscópico do imensamente grande e o mundo microscópico do infimamente pequeno tornam-se assim as fronteiras modernas do conhecimento científico.

Uma das mais destacadas conseqüências desta revolução científica ou crise do paradigma clássico (para empregar a terminologia de T.S. Kuhn^[5]), e a que interessa mais de perto ao presente trabalho, consistiu precisamente na instituição de uma nova disciplina científica, a Cosmologia, incorporando aspectos da Física e da Astronomia e cujo objetivo derradeiro seria a elaboração de uma ciência do Macrocosmo. Com isto, foi pela primeira vez conduzido à alçada do escrutínio científico um domínio que, a rigor, fora até então freqüentado quase que exclusivamente pelas mitologias religiosas: o da descrição da gênese e do desenvolvimento do Cosmos como um todo, ou seja, da totalidade do que existe, do Universo enquanto expressão mais abrangente da realidade natural. Raros empreendimentos científicos experimentariam um incremento tão amplo, das primeiras décadas do século até nossos dias, quanto a investigação das características deste cenário cósmico global.

De um ponto de vista contemporâneo, podemos distinguir alguns fatores observacionais e conceituais historicamente importantes para a fundação e consolidação do moderno projeto cosmológico. Primeiramente, aperfeiçoamentos nas técnicas de observação astronômica implicaram a rápida derrocada da concepção clássica prévia do Cosmos como um Universo-ilha, consistindo unicamente de nossa própria galáxia. Já em 1926 Hubble encerra o aceso debate então corrente acerca da real extensão do Cosmos observável demonstrando a existência de inúmeras outras galáxias, similares

à Via Láctea, mas longínquas e independentes. E, três anos mais tarde, uma das mais extraordinárias evidências observacionais de todas as épocas inaugura a era da Cosmologia quantitativa moderna: a determinação, por Hubble, de uma relação linear entre distância e velocidade de afastamento para esses objetos distantes, indicando que as galáxias, de forma genérica, estariam sob um processo global de recessão mútua, afastando-se mais ou menos uniformemente umas das outras - ou, em outros termos, que o Universo como um todo estaria num estado dinâmico de expansão, caracterizando-se assim um processo evolutivo global que remete o próprio Cosmos a um desenvolvimento temporal, a uma História^[6].

Por outro lado, este revolucionário panorama de um Universo vasto e dinâmico, delineado pela Astronomia profunda, iria rapidamente encontrar uma expressão teórica adequada no interior do quadro conceitual de fundo proporcionado pela Teoria da Relatividade Geral (TRG) que Einstein, exclusivamente a partir de princípios primeiros e independentemente de quaisquer observações astronômicas^[7], havia elaborado em forma definitiva já em 1915, e que anos mais tarde pareceria, para Max Born, "o maior feito do pensamento humano sobre a Natureza, a mais impressionante combinação de penetração filosófica, intuição física e habilidade matemática"^[8]. Procurando generalizar os princípios da TRE para observadores em estado arbitrário de movimento, Einstein termina por promover uma imprevista e fecunda fusão entre a física da gravitação e a geometria não-Euclidiana de Riemann, relacionando a interação gravitacional (a força universal de atração entre as massas) à própria estrutura geométrica do espaço dos eventos físicos (através da qual os observadores podem estabelecer a noção fundamen

tal de separação entre eventos) e derivando correções à teoria Newtoniana da gravitação que, nas décadas seguintes, foram sendo progressivamente corroboradas pelos chamados testes "locais" ou "solares" da TRG^[9].

A expressão do princípio generalizado da Relatividade ("As leis da Física devem ser as mesmas para quaisquer observadores, inerciais ou acelerados") através desta combinação de argumentos geométricos e mecânicos, outrossim, iria resultar tanto numa teoria mais aperfeiçoada da interação gravitacional quanto em modificações substanciais da noção de espaço básico dos eventos: o espaço-tempo Riemanniano quadridimensional da TRG não mais poderá ser encarado, à la Newton, como um puro cenário geométrico passivo, independente dos processos físicos em que se acha envolvido seu conteúdo material. "Matéria atrai matéria", dizia Newton; "Tudo atrai tudo", poderia dizer Einstein. De acordo com a TRG, a presença de campos gravitacionais engendrados pela matéria (ou energia)^[10] torna-se equivalente a uma distorção (um "encurvamento") do próprio espaço-tempo; assim, a estrutura deste espaço-tempo de base será definida não aprioristicamente, e sim de modo operacional, a partir do uso de réguas e relógios associados a um dado observador arbitrário. Tal será, doravante, o campo de representação matemática dos processos físicos em escala cósmica.

Ao principiar as aplicações da TRG à Cosmologia, Einstein procurou desenvolver a descrição de um Cosmos finito e estático, modelo por ele considerado como o mais pertinente do ponto de vista da simplicidade e elegância filosóficas. As observações de Hubble, todavia logo demonstrariam a inexeqüibilidade de um Cosmos estático, delineando o quadro de um Universo homogêneo

mas dinâmico, expansivo^[11]. Deduziu-se então que, se o processo de expansão global pudesse ser retraçado para trás no tempo, numa dada ocasião do passado todas as galáxias deveriam convergir para uma região muito pequena, talvez mesmo para um único ponto. Este seria, portanto, o próprio momento da criação, o instante em que uma prodigiosa explosão assinalaria a entrada do Universo na existência: toda a matéria e toda a energia nele contidas teriam sua origem neste ponto inconcebível que Lemâitre^[12] apelidou de "Átomo Primordial" e que hoje denominamos por "estado singular originário" ou "singularidade inicial" [13].

No âmbito da TRG, a concepção de um Universo homogêneo e expansivo, emerso de um estado singular inicial, surgiu com os trabalhos pioneiros de Friedman, Eddington e Lemâitre, na década de 20. O desenvolvimento de modelos geométricos espacialmente homogêneos e isotrópicos deveu-se a Robertson e Walker, cerca de 1935; uma vez que homogeneidade e isotropia notáveis são as características mais marcantes que observamos hoje no Cosmos, ficaram a partir daí estabelecidos como "modelos geométricos padrão" os chamados Universos de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Os modelos FRW admitem tanto o caso de uma expansão perene (Universos "abertos") quanto o de ciclos de expansão e contração (Universos "fechados"). Em ambos os casos, porém, as pequenas dimensões (e portanto, altas densidades) do Universo primordial permitirão que a evolução cósmica global seja associada a uma "história térmica" do comportamento da matéria^[14].

Assim, já no final da década de 40, avanços em Física Nuclear e Física das Partículas Elementares capacitarão Gamow a prever a ocorrência de uma radiação eletromagnética "fóssil"

[15], que banharia uniformemente todo o espaço, como um remanescente do término de uma fase quente e densa, semelhante a um plasma, característica das primeiras etapas de desenvolvimento desses modelos singulares. Nessa ocasião, principiaria-se a formação do hidrogênio (que constitui cerca de 70% do conteúdo material do Cosmos) e a matéria do Universo perderia sua opacidade à luz, tornando-se transparente, em larga escala, à radiação luminosa, tal como observamos hoje. A verificação (casual) desta predição por Penzias e Wilson, mais de vinte anos depois^[16], não apenas invalidou a concepção até então competitiva de um Universo criado com geração contínua de matéria, proposta por Bondi, Hoyle e Gold na década de 50^[17], por fornecer uma importante corroboração observacional para os modelos FRW singulares, como iria também fundamentar uma colaboração cada vez mais estreita entre a Cosmologia Relativística e a Física das Partículas Elementares que culminaria na adoção, ao final da década de 60, do chamado "Modelo da Grande Explosão Quente" ("Hot Big Bang") como o paradigma moderno da Cosmologia^[18].

Efetivamente, tal conjugação de áreas distintas da investigação redundou no aprimoramento de um "modelo-padrão" que, para larga parte dos cosmólogos nas duas últimas décadas, proveria uma descrição consistente e acurada da evolução do Cosmos desde poucas frações de segundo após a grande explosão criadora inicial até o panorama homogêneo, isotrópico, transparente e expansivo que observamos presentemente no Universo acessível. Os sucessos em explicar tanto a origem da radiação cósmica de fundo de 3°K quanto as abundâncias relativas dos elementos conduziram a maioria dos físicos a encarar esse "modelo-padrão" (MP) como sen

do a realização culminante do que poderíamos denominar de Programa Cosmológico de Einstein, objetivando a produção de uma representação formal única, capaz de descrever o Cosmos enquanto um sistema totalizante, auto-referente e determinado tão-somente pela gravitação^[19].

Não obstante o prestígio praticamente consensual desfrutado pelo MP durante a década passada, todavia, observa-se na atualidade da Cosmologia uma multiplicação de esforços no sentido de transcender ou mesmo tornar obsoleta sua peculiar narrativa de episódios cósmicos. De fato, dificuldades conceituais e filosóficas persistentes parecem indicar que o MP forneceria um quadro demasiado simplista da evolução real do Cosmos, particularmente no que respeita à ocorrência de uma autêntica singularidade clássica na origem da expansão cósmica e à extrapolação ingênua da homogeneidade e isotropia características do modelo até essa mesma origem. Assim, um tanto ironicamente, propostas recentes da Física de Partículas Elementares, no rumo da elaboração de modelos de unificação das classes de partículas elementares e das interações não-gravitacionais que comparecem nos fenômenos microscópicos, têm presentemente indicado a necessidade de serem suplementadas algumas das instâncias do MP, especialmente no que tange à descrição dos estágios iniciais da evolução do Cosmos; a introdução de campos físicos adicionais, bem como o emprego de tratamentos quânticos ou heterodoxos do "fluido cosmológico" que representaria o conteúdo material do Universo, sugerem fortemente a ocorrência de comportamentos interativos primordiais mais complexos que os habitualmente preconizados.

De modo análogo, teorias alternativas à TRG na des-

criação dos fenômenos gravitacionais em larga escala, aptas a engendrar estruturas geométricas mais ricas e diversificadas que os modelos FRW que alicerçam o MP, têm sido sucessivamente invocadas no curso de variadas tentativas de resolução das dificuldades por ele apresentadas (como o grave problema da fixação das condições iniciais para a evolução cósmica posterior, por exemplo). Parece difundir-se crescentemente entre os físicos, por fim, a noção de que uma teoria quântica da gravitação consistente e manejável, uma vez desenvolvida, deverá acarretar uma profunda reconsideração de toda a questão da gênese do Cosmos^[20].

Estaria se estabelecendo em nossos dias, portanto, uma certa expectativa quanto a uma possível superação, a médio prazo, do atual paradigma cosmológico incarnado pelo MP. Alguns cosmólogos, de fato, procuram interrogar-se se os percalços (e também os sucessos) do MP nos últimos anos não estariam insinuando a obsolescência do próprio programa unificacionista de Einstein para a obtenção de um quadro completo, acabado e fechado de um Cosmos determinista e bem ordenado^[21]. Cabe então indagar, estaríamos nós a ponto de presenciar uma transformação radical da atual compreensão dos processos cósmicos globais, talvez similar ou comparável à ultrapassagem da interpretação de mundo Newtoniana no começo deste século?

Ernesto Sábato nos ensina que todo saber legitimamente científico possui dois elementos, um invariante e outro transitório. O elemento duradouro é o método científico, que consiste em observação cuidadosa e raciocínio impecável; o elemento variável, por sua vez, é o próprio produto da aplicação desse método, ou seja, os conteúdos sucessivos do saber em questão - daí advin-

do a natureza impermanente e necessariamente mutável dos enunciados de qualquer ciência^[22]. Devido a essa feição cambiante congênita aos modelos científicos consensualmente admitidos — tal como o MP — seria inevitável, portanto, o virem-a-ser aperfeiodos ou superados em alguma época posterior. Entretanto, somente a abertura de novos horizontes observacionais ou a produção de novas evidências experimentais bem comprovadas é que poderá definir, no caso específico da Cosmologia contemporânea, a preferência por uma dada teoria (por exemplo, o MP) à exclusão de uma série de concepções competitivas que lhe são virtualmente equivalentes. Parece-nos, assim, serem justificados os esforços para investigar-se, nos limites da observação experimental, a viabilidade física de modelos alternativos que possam ombrear-se ao MP na descrição dos complexos fenômenos compreendidos pela vastidão do Cosmos, de modo a ampliar o campo teórico e especulativo envolvido na difícil indagação a que aludimos acima.

O presente trabalho concerne a investigação de alternativas fisicamente viáveis ao paradigma-padrão através do exame das conseqüências provenientes do uso de acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e outros campos físicos em temas cosmológicos. Assim, nosso objetivo no restante desta Introdução será o de delinear um panorama mais detalhado das perspectivas correntes em Cosmologia, apresentando um rápido sumário dos fundamentos, das características e das dificuldades do MP e abordando, de modo igualmente sucinto, o leque de propostas alternativas atualmente sob consideração. Procuraremos, por meio desse quadro esquemático, esclarecer o contexto em que se inserem os desenvolvimentos aqui contidos.

Gostaríamos de acreditar que esta obra manifesta um pouco do espanto e do encantamento que a reflexão sobre o Universo de que participamos nunca deixou de oferecer aos que se aventuraram a empreendê-la — sentimentos que a lucidez Spinozista de Albert Einstein soube traduzir com profunda introspecção e genuíno espírito poético:

"No entanto, há momentos em que uma pessoa se sente livre de sua própria identificação com as limitações e insuficiências humanas. Nesses momentos, ela imagina-se em qualquer lugar de um pequeno planeta, contemplando com admiração a fria, mas profundamente comovente beleza do eterno, do impenetrável; a vida e a morte fundem-se e não existe evolução nem destino: apenas o ser."

1.2. O MODELO PADRÃO

Como vimos, a moderna Cosmologia Relativística enviada o desenvolvimento de modelos quantitativos do Universo, fundamentados nos princípios da TRG de Einstein, que possam ser comparados e adaptados às características globais do Cosmos observável, de modo a permitir a abordagem dos problemas da proveniência, da constituição e da história evolutiva do universo cósmico.

De acordo com a TRG, o cenário dos eventos cósmicos é um contínuo espaciotemporal de quatro dimensões, ou espaço-tempo, dotado de uma estrutura geométrica Riemanniana que capacita observadores providos de réguas e relógios a caracterizar opera-

cionalmente a noção fundamental de separação (ou intervalo) entre eventos quaisquer neste contínuo. A TRG preconiza ainda que as propriedades métricas de um dado espaço-tempo serão determinadas pelo campo gravitacional engendrado pelo conteúdo de matéria e energia nele contido; a gravitação é o grande agente organizador do Cosmos em larga escala.

Assim, a elaboração de um modelo cosmológico relativístico pressupõe a especificação de dois objetos teóricos básicos: uma configuração métrica do espaço-tempo, fixando em cada ponto uma regra para a medição de intervalos; e um "conteúdo material" representando a matéria e a energia distribuídas ao longo desse espaço-tempo (modernamente, costuma-se admitir que as galáxias e a energia radiante que preenchem o Cosmos são adequadamente descritas por um modelo de fluido, o chamado "fluido galático" ou "fluido cosmológico")^[23]. Esses componentes são correlacionados pelas equações de Einstein para a gravitação, que determinam em cada ponto do espaço-tempo a intensidade do campo gravitacional (e, portanto, a deformação local da geometria) associada a uma dada configuração do fluido cosmológico. O comportamento físico da matéria é regulado pelo princípio da conservação da energia-momento, através de equações (quadridimensionais) de conservação, derivadas das equações de Einstein para a gravitação. A descrição das propriedades da matéria, por fim, é completada através da escolha de equações de estado para o fluido cosmológico apropriadas às circunstâncias físicas dominantes em cada época da evolução universal.

- Estrutura matemática da TRG: em termos matemáticos, os com

ponentes básicos de um espaço-tempo da TRG são: uma variedade quadridimensional descrita por coordenadas arbitrárias $(x) \equiv x^\alpha$ (ver cap. 3); um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, simétrico e de segunda ordem, determinando a medida de intervalos na variedade; uma conexão simétrica (sem torção) $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\beta)$, identificada aos símbolos de Christoffel $\{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\}$ da geometria Riemanniana e definindo as derivações covariantes, as curvas geodésicas e o tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ da variedade. Por sua vez, a matéria e a energia contidas no espaço-tempo são descritas pelo tensor de energia-momentum $T_{\mu\nu}$, representando a energia, o momentum e as tensões de toda a matéria e todos os campos físicos nele presentes, e determinando a estrutura métrica da variedade através das equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ é o tensor de Ricci, $R \equiv R^\mu_{\mu}$ é o escalar de curvatura de Ricci, k é a constante gravitacional e Λ é a constante cosmológica, incluída por generalidade. As leis de conservação da energia-momentum do conteúdo material são expressos pela condição de divergência nula do tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$,

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0, \quad (1.2.2)$$

uma identidade obtida diretamente das equações de Einstein. Ademais, num modelo cosmológico define-se um campo de quadrivetores-velocidade V^μ , unitários, representando o movimento médio da matéria em cada ponto de espaço-tempo, e associados às linhas de universo de observadores fundamentais "co-moventes" ao fluido cosmológico [24].

Para principiarmos a discussão do atual modelo-padrão cosmológico (MP), recapitulemos por um momento o panorama em larga escala do Cosmos que lhe serve de motivação observacional. As observações astronômicas de longo alcance de que dispomos hoje, como contagens e mapeamentos de fontes individuais (galáxias, radiofontes, quasares, etc) e medições de radiação de fundo (rádio, micro-ondas, raios X e γ , etc), nos descortinam um Universo de imensas dimensões, composto basicamente por matéria condensada em galáxias e percorrido por energia radiante de diversos tipos, notavelmente homogêneo e isotrópico, irrotacional e em expansão (caracterizada pelo afastamento mútuo uniforme dos objetos distantes). No caso do MP, para representar este quadro genérico de organização do Cosmos são selecionadas as geometrias FRW exatamente homogêneas e isotrópicas, e uma equação de estado tipo "fluido perfeito" para o fluido cosmológico. A estrutura geométrica do MP tem assim um único parâmetro a determinar, o chamado fator de expansão ou raio do Universo, enquanto que o fluido cosmológico é caracterizado por duas variáveis (uma densidade de matéria-energia e uma pressão isotrópica) que satisfazem entre si uma relação linear [25].

Na moderna literatura, ademais das equações de Einstein para a gravitação e das equações de conservação de energia-momentum, enumeram-se dois outros preceitos teóricos básicos para a obtenção dos resultados do MP, a saber: a equação de Raychaudhury, que correlaciona as informações cinemáticas e dinâmicas disponíveis sobre a evolução de medições volumétricas entre os elementos de uma dada classe de observadores fundamentais, ditos "co-moventes" com o fluido cosmológico [26], e as chamadas

condições de energia, que constituem restrições genéricas que são impostas ad hoc com o objetivo de assegurar comportamentos "razoáveis" para a matéria, garantindo, por exemplo, sua estabilidade física, ou a atratividade dos efeitos gravitacionais por ela gerados. Esses condicionamentos exteriores ao comportamento da matéria são usualmente expressos por meio de desigualdades matemáticas a que devem estar submetidas a gravitação e as grandezas constitutivas do fluido material^[27].

A combinação dos fundamentos conceituais do MP esquematizados acima acarreta três importantes consequências: uma ida de finita para o Cosmos; uma origem singular, num instante cataclísmico de criação, de toda a matéria; e a ocorrência de horizontes causais de partículas. Essas conclusões foram consubstanciadas, na década de 60, numa série de teoremas matemáticos que advogam a eliminação inequívoca da regularidade de todo campo gravitacional possuindo matéria "bem-comportada" como fonte, uma vez que é prevista a existência, em algum domínio do espaço-tempo, de uma região singular na qual caminhos possíveis de observadores reais desapareceriam irremediavelmente de nossa representação espaciotemporal do mundo.

De fato, de acordo com os "teoremas da singularidade", a equação de Raychaudhury para métricas FRW e a condição de atratividade da gravitação implicam a existência de uma origem num certo instante finito do passado, no qual as distâncias que separam as "partículas" do fluido cosmológico se anulariam; neste instante inicial o Universo como um todo brotaria explosivamente da singularidade originária, tendo a curvatura do espaço-tempo um valor infinito neste ponto. As equações de conservação e de esta

do (relativas a um fluido "perfeito") quando aplicadas a estas épocas primordiais obrigam que grandezas representativas (como temperatura e densidade de energia) do fluido cosmológico se tornem igualmente divergentes (infinitas). Enfim, as equações de estado e de conservação, combinadas à equação de Raychaudhury implicam na ocorrência de horizontes delimitando as regiões do espaço-tempo acessíveis a trocas causais de sinais, em cada direção e em cada instante, para cada um dos observadores fundamentais envolvidos na descrição dos processos cósmicos, a partir da explosão inicial [28-30].

Essas propriedades do MP são suficientes para reproduzir satisfatoriamente, como já assinalamos, diversos aspectos do Universo observável, em particular a presença da radiação "fóssil" de fundo de 3°K e as abundâncias relativas dos elementos; e assim, os teoremas da singularidade receberam na última década uma aceitação tão generalizada que - quiçá infortunadamente - os esforços críticos ou alternativos foram praticamente inibidos, frente à pregnância e popularidade quase absolutas das conclusões do MP no interior da comunidade científica e, em consequência, da própria cultura contemporânea [31].

Não obstante esses sucessos e toda a sólida reputação desfrutada pelo MP até princípios desta década, todavia, a natureza extremamente peculiar de suas características principais - origem cataclísmica, divergências, horizontes - não deixou de suscitar interrogações irrespondidas e problemas de difícil interpretação, como enumeramos a seguir:

- O problema da homogeneidade: como o Universo pode se apre

sentar tão aproximadamente – se bem que não exatamente – homogêneo, se processos físicos decorridos a posteriori do momento de criação não podem ser responsabilizados por esta uniformidade, em virtude dos horizontes de partículas que restringiriam as trocas causais de informação mesmo entre setores circunvizinhos do "magma" inicial? De outro modo, de onde provém a alta entropia que o caracteriza hoje?

- O problema da planura ("flatness"): porquê a densidade presente observada de matéria no Cosmos é tão próxima do valor crítico que distingue universos FRW fechados, recolapsantes, de universos abertos, em perene expansão? Esta interrogação motivou a busca de evidências indiretas da existência de matéria "escura" (não detectável por via eletromagnética), aventada por diversas teorias contemporâneas da Física de Partículas, em quantidade suficiente para decidir a questão da abertura ou fechamento últimos do Cosmos.

- O problema da "constante cosmológica": porquê a "constante cosmológica" teria no presente um valor tão pequeno? (Ver cap.5).

- O problema da formação de galáxias: não há mecanismos conhecidos, no âmbito do MP, que possam explicar satisfatoriamente a origem, a evolução e as características das estruturas em pequena escala – por exemplo, as galáxias – no Universo^[32].

Essas dificuldades podem ser reunidas sob o título de "problemas das condições iniciais". Aparentemente, se faria necessário recorrer a um conjunto minuciosamente preciso de dados

iniciais para viabilizar, no contexto do MP, a evolução posterior do Cosmos - um balanço quase que miraculoso entre as constantes fundamentais da Física, representativas das propriedades da matéria e das interações. A aguda especificidade destas condições iniciais constitui-se assim num verdadeiro enigma, que tem inspirado diversas tentativas de abordagens esclarecedoras, abrangendo desde a hipótese dos grandes números de Dirac, nos anos 40 [33], até as recentes especulações (algumas de nítida conotação teleológica) baseadas no chamado "Princípio Antrópico" [34] (ver cap. 3).

- O problema da singularidade inicial: diversas objeções têm sido levantadas por muitos cientistas contra a noção de uma origem singular explosiva, tal como preconizada pelo MP. Primeiramente, as divergências (valores infinitos) de grandezas físicas nesta origem estariam apontando uma inconsistência matemática da teoria e, por conseguinte, uma provável incompletude física do modelo. Por outro lado, a própria criação de matéria a partir da singularidade inicial violaria o princípio da conservação da energia - que, no entanto, deveria entrar em vigor instantaneamente após o momento de criação. Uma vez que não há estruturas prévias à singularidade das quais pudessem porventura provir, a existência das leis físicas reconhecidas torna-se assim rigorosamente inexplicável. A concepção de uma origem singular, por fim, resultaria filosoficamente desagradável para muitos autores, pois a presença da singularidade inicial demarcaria uma fronteira ipso facto intransponível para a aplicação de quaisquer das leis físicas que supomos válidas em nosso mundo; um limite fatal no qual cessaria toda a possibilidade de conhecimento. Estes cientistas, ao invés

de favorecerem o processo de singularização inevitável prescrito pelos teoremas da singularidade, prefeririam contemplar a continuidade de modelagens físicas causais ao longo de toda a possível história evolutiva do Cosmos [32,35].

Em vista das dificuldades acima esboçadas, torna-se natural o fato de que se testemunhe hoje em dia um número crescente de esforços no sentido de adequar, suplementar ou mesmo substituir o MP, em especial na descrição dos instantes primordiais da evolução do Cosmos. A partir de variadas propostas de alteração da natureza ou da combinação dos elementos básicos em jogo, têm sido elaborados inúmeros cenários alternativos que objetivam suplantam, ou pelo menos atenuar, em muitos casos, os aspectos problemáticos exibidos pelo MP - como veremos a seguir.

1.3. ALTERNATIVAS CORRENTES AO MODELO-PADRÃO

De acordo com o substrato conceitual resumido na seção anterior, podemos a grosso modo discriminar o vasto espectro de alternativas fisicamente significativas aos pressupostos básicos do MP em grupos de propostas convergentes, como segue: reinterpretações das evidências astronômicas em favor da expansão cósmica; relaxamento das hipóteses de homogeneidade e/ou isotropia estritas em fases primordiais; modificações do comportamento físico da matéria, seja pela adição de novos campos físicos, seja através de alterações, clássicas ou quânticas, no conjunto de equações de estado-leis de conservação - condições de energia que define as propriedades do material cósmico; e mudanças nas características da gravitação e do espaço-tempo, pela substituição da

TRG por teorias alternativas na descrição dos processos gravitacionais em larga escala, dentre outros^[36]. De um modo geral, o objetivo comum a essas propostas é o de produzir a violação de algumas das hipóteses em que se baseiam os teoremas da singularidade, cerceando assim sua aplicabilidade: poder-se-ia mesmo argumentar que a estreiteza desses teoremas e a cabal implausibilidade física de singularidades e divergências conduzem quase que necessariamente à violação de algumas das condições dos teoremas. Consideraremos brevemente, no que segue, algumas dessas classes de abordagens similares.

- Revisões das evidências de uma atual fase expansiva: considerações astrofísicas questionam a interpretação vigente do desvio para o vermelho observado na luz de galáxias e quasares distantes como índice de uma expansão cósmica, atribuindo-o a efeitos de caráter local (gravitacionais, referidos ao movimento entre fonte e observador, ou de natureza desconhecida). Por outro lado, propostas de alteração dos mecanismos comumente admitidos para a propagação da luz (como a teoria da "luz cansada") podem tornar modelos de universos estacionários novamente admissíveis, e teorias bimétricas da gravitação implicam no abandono da expressão tradicional para o desvio luminoso. As evidências em favor destas tentativas de reinterpretção são muito disputadas, e no presente a hipótese de uma expansão cósmica global é partilhada pela maioria dos astrofísicos e cosmólogos^[37].

- Anisotropias e Inhomogeneidades: o enfraquecimento dos requisitos de homogeneidade espacial e isotropia estritas, caracte-

rísticos dos modelos FRW, implica em alterações na equação de Raychaudhury (em virtude do surgimento de termos de vorticidade, cisalhamento ou aceleração [38]). Podem assim ser obtidos modelos espacialmente homogêneos, mas anisotrópicos, com estágios muito similares aos universos FRW, exibindo todavia singularidades mais complexas (com ruptura de horizontes, por exemplo) ou mesmo "suaves" (grandezas do fluido sempre finitas), e que invocam condições iniciais menos restritivas [39]. Por sua vez, no caso de modelos espacialmente inhomogêneos, surge ademais a intrigante possibilidade de ocorrerem singularidades tipo-tempo nas quais a criação de matéria pode suceder em vários períodos da história cósmica, sob a forma de buracos brancos ou núcleos atrasados de criação [40]; nesses modelos, portanto, a singularidade é um objeto em permanente interação com o restante do Universo, e a "criação" torna-se um processo em contínua atualização. O estudo de variantes às geometrias FRW é hoje em dia um campo prolífico e ativo [41].

- Modificações dos atributos da matéria: consideraremos a seguir algumas das variadas propostas de alteração do comportamento tradicionalmente admitido para a matéria e a energia. Trata-se, na maioria dos casos, de engendrar cenários alternativos viáveis, através da introdução de campos suplementares ou de modificações no modelo de fluido perfeito do MP, para que seja sobrestado ou alterado o processo de singularização [35].

- A Constante Cosmológica: historicamente, o primeiro a promover a agregação ad hoc de objetos físicos de proveniência nebulosa aos esquemas da Cosmologia Relativística foi o próprio Eins-

tein ao introduzir, em 1917, a "constante cosmológica" Λ para permitir a organização do campo gravitacional quando dimensões cósmicas estão envolvidas [42]. Apesar da precisa natureza da constante Λ permanecer um problema em aberto ainda hoje (ver cap. 5), do ponto de vista prático sua introdução acarreta importantes modificações nas equações da gravitação, propiciando, de acordo com Starobinsky, a eliminação de eventuais anisotropias primordiais [43], ou a violação das condições de energia (através da geração de largas pressões negativas) de modo a serem obtidos universos FRW não-singulares (por exemplo, a solução de De Sitter). A dificuldade com estes modelos está em como compatibilizar um valor elevado de Λ e o modelo admitido para a formação da radiação de fundo cósmica [24,44].

- Modificações efetivas da equação de estado: diferentes propostas de modificação das equações de estado para fluidos cósmicos têm surgido ultimamente, a partir de variadas argumentações. Por exemplo, a adição de um coeficiente de viscosidade volumar (constante ou proporcional à densidade) ao modelo de fluido perfeito habitual pode gerar pressões negativas suficientes para que seja evitada a singularidade inicial [45]; generalizações da equação de estado, em conjunto com a hipótese de um limite máximo (a densidade de Planck) para a concentração da matéria, podem engendrar modelos não-singulares, reversíveis e compatíveis com a presente fase expansiva [46]; outras diferenças formais das equações do estado, embora não violando as condições de energia, tornam admissíveis singularidades FRW "frias" [47].

- Introdução de outros campos físicos: muita atenção tem sido

dedicada ultimamente ao estudo das conseqüências da introdução de novos campos cósmicos de caráter primordial, personagens ativos e complementares à gravitação na descrição da Cosmogênese e dos processos ulteriores em larga escala. Por exemplo, o emprego de campos escalares em temas cosmológicos ganhou relevo a partir da multiplicação de modelos em Física de Partículas nos quais desempenham importante ação dinâmica (como no mecanismo de Higgs^[48,49], e veio responder a uma necessidade realística de se considerar a gravitação contextualizada em domínios de interação mais abrangentes. Embora não se possua evidências observacionais diretas da existência de campos cósmicos deste tipo, não seria inverossímel supor que tivessem relevância em fases densas primordiais, implicando assim em modificações do quadro cosmológico padrão [50,51].

Desse modo, a presença de um campo escalar clássico com massa (ou acoplado a uma poeira) pode induzir a violação das condições de energia e ocasionar um "ressalto" ao invés da singularidade clássica, quando densidades nucleares são alcançadas^[27,52]. Analogamente, sempre que comportamentos quânticos da matéria (considerada num campo gravitacional de fundo) dominarem a equação de estado, é provável a violação das condições de energia e a reversão da singularização, em dimensões de ordem subatômica [53].

- Universos inflacionários: exemplos recentemente em voga de situações concretas em que efeitos quânticos podem conduzir à eliminação da singularidade são dados pelos modelos "inflacionários", caracterizados por uma fase primitiva de expansão muito rápida ("inflação") de todo o Cosmos. Starobinsky foi o primeiro a obter uma solução autoconsistente não-singular, com uma fase primor

dial tipo De Sitter, das equações de Einstein para o vazio (modificadas por correções quânticas de um-loop) [53]. Outras propostas para a elaboração de cenários inflacionários surgiram no âmbito das teorias Grande-Unificadas (GUTs) da Física de Partículas, onde a fase inflacionária é associada a transições de fase do "magma" primitivo (via mecanismo de Higgs, por exemplo) [55], tornando admissível que o Universo tenha surgido num estado não-singular de expansão exponencial, com propriedades similares aos universos estacionários de Bondi e Hoyle [56].

A concepção de um estágio inflacionário prévio ao presente regime Friedmaniano despertou grande interesse por sugerir, de um só golpe, a solução de vários problemas ingentes do MP. A expansão exponencial dos horizontes possibilita o contato causal de regiões atualmente muito afastadas, o que explica satisfatoriamente a notável homogeneidade que testemunhamos agora; a remoção da singularidade clássica e uma expansão rápida, por muitas ordens de grandeza, do raio universal permitem compatibilizar a concepção de uma criação espontânea do Universo, por flutuações quânticas, com as grandes dimensões do Cosmos de hoje. Todavia, têm sido muito discutidos os detalhes da conexão entre a fase primitiva de expansão rápida e a presente fase Friedmaniana, e os modelos inflacionários desenvolvidos até aqui parecem ainda requerer ajustes pouco naturais de parâmetros [57].

- Cosmologia quântica: parece generalizar-se nos últimos tempos a convicção de que uma formulação quântica da gravitação se revelará indispensável para uma correta apreciação dos eventos cósmicos primordiais, quando dimensões da ordem do comprimento de

Planck ($L_p \sim 1,6 \times 10^{-33}$ cm) se tornarem relevantes [58]. Alguns modelos específicos têm sido abordados na literatura recente; estes esforços, todavia, têm sido tecnicamente obstaculizados pela não-renormalizabilidade da TRG, e são ainda pouco nítidos, no momento, os contornos finais da teoria almejada. Uma vez implementada, uma teoria quântica de gravitação eficaz deverá conduzir a alterações substanciais das atuais concepções acerca da existência e das peculiaridades da singularidade originária do MP [59].

- Teorias alternativas da gravitação: a investigação das teorias alternativas à TRG na descrição dos processos gravitacionais em escala cósmica é franqueada pelo pequeno número de evidências observacionais de que todavia dispomos (em comparação, por exemplo, com a pletora de experimentos da Física de Partículas - ver cap. 6). Os conhecidos testes "locais" ou "solares" [60] demonstram que a TRG fornece uma representação confiável dos fenômenos gravitatórios nos limites do Sistema Solar; por outro lado, a generalização desses resultados locais para largos domínios do espaço-tempo não é uma ilação imediata nem se encontra rigorosamente estabelecida [58]. É lícito observar ainda que apenas duas soluções cosmológicas da TRG foram, de algum modo, "testadas" (FRW e Schwarzschild), e que diversas outras formações cósmicas admissíveis (como cordões cósmicos e paredes de domínio) não foram até aqui evidenciadas [62]. Espera-se que até meados da próxima década os aperfeiçoamentos na detecção de ondas gravitacionais possam aferir a eficácia das predições da TRG quando campos intensos e grandes dimensões estão envolvidos [63].

A maioria das propostas alternativas consiste assim

em variantes da TRG que prevêem cenários gravitacionais distintos do MP em escala global, graças à introdução de outros objetos ou campos físicos básicos (e.g., uma função de escala em teorias escalar-tensoriais como a de Brans e Dicke [64]; um fator ou "gauge" conforme nas teorias covariantes de escala ou G-variável de Dirac [33,65] e Canuto [66] (ver cap. 3); um campo escalar sem massa de energia negativa na teoria do Campo de Criação de Hoyle e Narlikar [32,67]; uma métrica adicional na teoria bimétrica de Rosen [68]; ou a existência de torções na teoria de Einstein-Cartan [69]) que redundam na adição de novos termos às equações de Einstein, em modificações nas leis de conservação e em equações suplementares para os novos elementos que deverão concomitantemente ser satisfeitas [70]. Essas alterações muitas vezes são suficientes para gerar a violação das condições dos teoremas da singularidade e permitir a eliminação da singularização e dos horizontes do MP [32,35]. Universos não-singulares podem também ser gerados a partir da hipótese da violação da invariância de Lorentz para altas energias [71], pelo emprego de Lagrangianas não-lineares nos termos de curvatura na descrição do campo gravitacional [72] e por tratamentos estocásticos do raio universal [73].

- Acoplamentos mais complexos com a gravitação: o estudo de formas de acoplamento mais complexas para representar a interação entre a gravitação e outros campos físicos tem por motivação tanto seu emprego crescente em modelos da Física de Partículas, quanto o próprio interesse das aplicações cosmológicas que pode proporcionar. Efetivamente, tem sido demonstrado em anos recentes [74] que a adoção de acoplamentos "não-mínimos" entre a gravitação e

outros campos acarreta modificações na descrição habitual das propriedades da matéria e do campo gravitacional, possibilitando assim uma série de conseqüências cosmológicas, como a geração de gravitação repulsiva, a violação das condições de energia e por conseguinte a obtenção de universos "eternos", não-singulares, e (em combinação com o princípio variacional de Palatini) a substituição da estrutura geométrica Riemanniana pelos espaços-tempo de Weyl integráveis (WISTs) [75].

As conseqüências do uso de acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e outros campos em temas cosmológicos, em particular sua conexão com os espaços-tempo de Weyl integráveis, e na consideração de possíveis efeitos de reciprocidade na interação entre a gravitação e as outras forças da Natureza constituem o escopo das investigações desenvolvidas nesta Tese.

1.4. CONTEÚDO DO PRESENTE TRABALHO

Este trabalho objetiva realizar um esforço amplo e sistemático, ainda que necessariamente limitado, de investigação das conseqüências físicas advindas da adoção de acoplamentos não-mínimos para representar os processos de interação entre a gravitação e campos escalares e vetoriais. Para tanto, podemos dividir a grosso modo o conteúdo temático desta Tese em três partes: primeiramente, procuraremos fornecer a fundamentação conceitual e o instrumental técnico indispensáveis para a compreensão dos problemas aqui abordados (caps. 1-3); a seguir, apresentamos os diversos resultados alcançados ao longo de nosso estudo, com particular ênfase para a interrelação entre cenários cosmológicos não-

-minimalmente acoplados e as estruturas geométricas de Weyl (caps. 4-6); a terceira parte, por fim, destina-se à discussão e apreciação críticas dos desenvolvimentos aqui expostos e ao esboço de perspectivas futuras de aplicação (cap. 7).

Assim, seguindo-se a esta Introdução, na qual pretendemos ter apresentado o contexto ideativo em que se inserem nossas investigações no âmbito da Cosmologia contemporânea, no cap. 2 discutimos a representação formal, através da formulação Lagrangiana da Teoria de Campos, dos processos gravitacionais de interação; em seguida, a partir da generalização para espaços curvos dos resultados habituais da Teoria de Campos no espaço de Minkowski, expomos os princípios do acoplamento mínimo e do acoplamento não-mínimo com a gravitação, associando-os respectivamente às chamadas forma forte e forma fraca do Princípio de Equivalência da TRG. Completamos nosso sumário sobre o problema da representação dos fenômenos gravitacionais pela apresentação dos procedimentos variacionais de Lagrange e de Palatini, comparando os esquemas dinâmicos resultantes e arguindo, por fim, a inexistência de princípios ou evidências observacionais que determinem a escolha exclusiva de um desses métodos variacionais.

No cap. 3 nos dedicamos então a estabelecer o instrumental matemático necessário para a construção dos cenários geométricos que servem de base para os modelos cosmológicos de que iremos tratar, expondo detalhadamente a fundamentação e as características dos espaços-tempo de Riemann e de Weyl e, através da consideração de transformações conformes, a relação entre os espaços de Riemann da TRG e os espaços conformalmente Riemannianos, ou espaços de Weyl integráveis (WISTs), que resultam da variação à Pa

latini de cenários gravitacionais não-minimalmente acoplados. Inventariando a seguir algumas das aplicações dos espaços de Weyl e de Weyl-integrável em diferentes domínios de pesquisa, terminamos nossas considerações introdutórias advogando a viabilidade física, no atual panorama observacional, de modelos cosmológicos baseados em estruturas geométricas do tipo WIST.

Começando nosso estudo de cenários cosmológicos provindos do uso de acoplamentos não-mínimos pelo caso de campos vectoriais conformalmente acoplados à gravitação, apresentamos como primeira motivação para nossas posteriores investigações a geração de universos homogêneos e isotrópicos não-singulares ("eternos"); principiando então a exposição dos resultados aqui desenvolvidos, elaboramos uma solução homogênea e isotrópica numa variedade WIST exibindo um curioso aspecto de indeterminação dinâmica (universos "Marionete"). A seguir, consideramos este cenário cosmológico num WIST quando introduzimos um conteúdo de matéria (minimalmente acoplada), obtendo soluções para os casos específicos de radiação e de poeira; a restrição Riemanniana de tal teoria é depois discutida em termos do estabelecimento de "leis de conservação" numa estrutura WIST. Encerramos este capítulo pela consideração de modelos estáticos com simetria esférica num WIST, buscando descrever transições estruturais e embebimentos de domínios cerrados entre estruturas WIST e Riemannianas, nos casos de métricas tipo Reissner-Nordstrom e do tipo conforme; conquanto os resultados para o primeiro caso tenha sido negativos em virtude da limitação do ansatz escolhido, no segundo obtivemos uma solução tipo Bertotti-Robinson para a restrição Riemanniana e uma solução do tipo conforme quando a variedade é WIST.

No cap. 5 prosseguimos nossa exploração dos efeitos cosmológicos advindos da adoção de acoplamentos não-mínimos pela consideração de campos escalares conformalmente acoplados à gravitação. Começando por expor a possibilidade de geração, neste contexto, de gravitação repulsiva através de um mecanismo de quebra espontânea de simetria, estendemos a seguir essa discussão para o caso de uma estrutura WIST dinamicamente gerada, o que nos permite associar a aparição de uma constante cosmológica a uma redução estrutural entre geometrias WIST e de Riemann. Investigamos a seguir a analogia sugerida nos trabalhos de Belinskii, Lifshitz e Khalatnikov entre teorias escalar-tensoriais de gravitação e modelos pentadimensionais do tipo Kaluza, verificando que tal analogia é válida somente no caso do espaço vazio; como subproduto dessa exploração, obtemos uma solução para um modelo pentadimensional com constante cosmológica.

No cap. 6, por sua vez, consideramos o caso em que múltiplos campos escalares estão não-minimalmente acoplados com a gravitação, o que permite elaborar mecanismos em cadeia de quebras de simetria no espaço Riemanniano. Ampliando a discussão para o caso de espaços WIST, analisamos mecanismos de indução de quebra de simetria entre campos escalares mínima e não-minimalmente acoplados. Finalizamos a apresentação de nossos resultados pela consideração de possíveis efeitos recíprocos entre a gravitação e outras interações da Natureza, devidos ao acoplamento não-mínimo, onde no caso de um modelo fenomenológico simples e bem conhecido de um processo de interação forte verificamos a curiosa aparição do antigo e misterioso número de Eddington 10^{39} .

O cap. 7 destina-se, finalmente, à apreciação críti-

ca dos resultados anteriormente obtidos, à discussão de problemas observacionais e conceituais da teoria e ao esboço de outras aplicações futuras. Assinalemos ainda que alguns desses resultados foram já divulgados em quatro publicações de circulação internacional e apresentados em seis seminários no país e no exterior (vide referências).

CAPITULO II

ACOPLAMENTO MÍNIMOS E NÃO-MÍNIMOS COM A GRAVITAÇÃO

2.1 REPRESENTAÇÃO FORMAL DAS INTERAÇÕES GRAVITACIONAIS

Logo que foram obtidas as equações de Einstein para a gravitação, principiouse a procura de uma formulação variacional adequada que permitisse a derivação dessas equações a partir dos métodos bem conhecidos da Teoria Clássica de Campos. O problema seria o de desenvolver uma representação Lagrangiana para os processos gravitacionais através do estabelecimento de um princípio de ação conveniente, ou seja, o de encontrar um funcional de ação

$$A = \int L_{\text{grav}} d^4x \quad (2.1.1)$$

cuja invariância com respeito a variações arbitrárias de parâmetros geométricos característicos da variedade ($\delta A = 0$) selecionasse precisamente as equações de Einstein como equações de movimento do campo gravitacional^[76]. Hilbert, em 1915, deu um passo fundamental nesse empreendimento ao verificar que, sob a hipótese de uma estrutura geométrica Riemanniana dada a priori, a invariância do funcional de ação (linear nos termos de curvatura) expresso por

$$A = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.1.2)$$

(onde

$$L_{EH} = \sqrt{-g} R \quad (2.1.3)$$

é a chamada densidade Lagrangiana de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional livre^[77], sendo $\sqrt{-g} \equiv [-\det(g_{\mu\nu})]^{1/2}$ o fator de invariância ou densidade de medida do volume quadridimensional elementar e R o escalar de curvatura de Ricci^[78], com relação a variações do único parâmetro geométrico independente (o tensor métrico $g_{\mu\nu}$) reproduzia corretamente as equações de Einstein na ausência de matéria (vazio),

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.4)$$

Na TRG, como sabemos, a presença de uma distribuição de matéria fixa as propriedades métricas do espaço-tempo, através da associação entre o campo gravitacional por ela gerado e a curvatura geométrica da variedade. Surge assim a necessidade de se estender a representação Lagrangiana dos processos gravitacionais para situações mais gerais, de modo a incluir também uma descrição apropriada das fontes materiais e dos efeitos de interação gravitacional sobre o comportamento da matéria e de outros campos físicos. Como proceder a uma generalização, para os espaços curvos da TRG, das equações de movimento bem conhecidas da Teoria de Campos no espaço plano de Minkowski da TRE?

Einstein, em 1916, prescreveu um procedimento que se tornaria a base para a maioria das generalizações posteriores de teorias primeiramente escritas no espaço de Minkowski e então

espaço plano de Minkowski, a equação de movimento de um campo escalar complexo $\phi(x)$ com massa m é obtida a partir da Lagrangiana

$$L_{\text{Mink}} = \phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} \eta^{\mu\nu} - m\phi^* \phi \quad (2.2.1)$$

(onde ϕ^* é o complexo conjugado de ϕ , a vírgula significa diferenciação simples em relação às coordenadas $(x) = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Lorentz do espaço de Minkowski). Esta equação é:

$$\square^{(0)} \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.2.2)$$

onde $\square^{(0)} \phi \equiv \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu}$ é o operador de Laplace da TRE^[81].

De acordo com o princípio de acoplamento mínimo, a equação correspondente num espaço curvo arbitrário, dotado de métrica $g_{\mu\nu}$, não deve exibir quaisquer funcionais dependentes da curvatura; isto conduz inequivocamente à forma

$$L_\phi = \sqrt{-g} (\phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} - m^2 \phi^* \phi) \quad (2.2.3)$$

Se introduzimos agora o termo de Einstein-Hilbert, dando conta do campo gravitacional, obtemos a Lagrangiana total da interação mínima campo escalar-gravitação,

$$L_{\phi, \text{grav}} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{k} R + \phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} - m^2 \phi^* \phi \right) \quad (2.2.4)$$

da qual resultam as equações de movimento do campo,

$$\square \phi + m^2 \phi = 0 \quad , \quad (2.2.5)$$

onde

$$\square \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{,\alpha} g^{\alpha\beta})_{,\beta} \quad (2.2.6)$$

é o operador de Laplace generalizado, e as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}^{\min}[\phi], \quad (2.2.7)$$

onde k é a constante de acoplamento gravitacional de Einstein e

$$T_{\mu\nu}^{\min}[\phi] \equiv \frac{1}{2} (\phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} + \phi_{,\nu}^* \phi_{,\mu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi_{,\lambda}^* \phi_{,\sigma} g^{\lambda\sigma} - m^2 \phi^* \phi) \quad (2.2.6)$$

é o tensor energia-momentum "mínimo" do campo ϕ , dado pela relação variacional [82]

$$\delta \int L_{\phi} d^4x = \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.2.9)$$

Fatores adicionais como potenciais, termos de auto-interação ou a presença de uma constante cosmológica podem ser facilmente incluídos nesta descrição [83]

- Acoplamento mínimo de campo vetorial com a gravitação: no caso de um campo vetorial $A_{\mu}(x)$ (por exemplo, um potencial eletromagnético na ausência de cargas externas) as equações de movimento da TRE são as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica em forma quadridimensional, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\mu\nu, \nu} = 0 \quad , \quad (2.2.10a) \\ F_{\mu\nu, \lambda} + F_{\nu\lambda, \mu} + F_{\lambda\mu, \nu} = 0 \quad , \quad (2.2.10b) \end{array} \right.$$

onde

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu} \quad (2.2.11)$$

é o tensor antisimétrico de Maxwell para o potencial A_μ [84]. A relação cíclica eq.(10b) resulta diretamente da definição eq. (11) do tensor $F_{\mu\nu}$; a eq.(10a) pode ser obtida a partir da Lagrangeana

$$L_{\text{mink}} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} . \quad (2.2.12)$$

Novamente, o princípio do acoplamento mínimo nos indica que o caminho mais natural para uma generalização relativisticamente invariante dos processos eletromagnéticos para espaços curvos consiste na substituição direta da métrica de Lorentz $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica Riemanniana arbitrária $g_{\mu\nu}$ e também das diferenciações simples por diferenciações covariantes; assim, definimos o tensor de Maxwell generalizado

$$F_{\mu\nu} \equiv A_\mu ||_\nu - A_\nu ||_\mu = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (2.2.13)$$

(onde a dupla barra significa diferenciação covariante no espaço de Riemann), que em virtude da antisimetria se reduz à forma tradicional eq.(11). Com esta definição, é imediatamente satisfeita a relação cíclica correspondente à eq.(10b),

$$F_{\mu\nu} ||_\lambda + F_{\nu\lambda} ||_\mu + F_{\lambda\mu} ||_\nu = 0 . \quad (2.2.14a)$$

A equação de movimento generalizada análoga à eq.(10a),

$$F^{\mu\nu} ||_\nu = 0 , \quad (2.2.14b)$$

pode ser obtida a partir da Lagrangiana de Maxwell generalizada

$$L_{\text{em}} = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.2.15)$$

onde o tensor contravariante $F^{\mu\nu}$ é construído com a métrica $g_{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} . \quad (2.2.16)$$

Introduzindo a representação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional, a Lagrangiana total da interação "mínima" campo vetorial-gravitação é expressa por

$$L_{\text{em-grav}} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] , \quad (2.2.17)$$

da qual resultam as equações de Maxwell para o campo vetorial eq. (2.14b),

$$F^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 0 , \quad (2.2.18)$$

e as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = -k E_{\mu\nu} , \quad (2.2.19)$$

onde

$$E_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.2.20)$$

é o tensor energia -momentum de Maxwell-Einstein para o campo vetorial. É simples a introdução de cargas ou correntes externas nesta representação [85].

Os exemplos descritos acima são instrutivos para que apreciemos alguns aspectos de interesse dos acoplamentos mínimos: em primeiro lugar, devido ao pequeno número de condições arbitrárias introduzidas, sua atraente simplicidade conceitual. Por outro lado, como já assinalamos, o uso de acoplamento mínimos costuma ser associado à chamada forma "forte" do Princípio de Equivalência da TRG - que pode ser expresso como a presunção

de que, em qualquer domínio do espaço-tempo, sempre se pode encontrar um sistema de referência Lorentziano local de modo a que as leis físicas sejam as mesmas que no espaço plano de Minkowski da TRE. Como no acoplamento mínimo os termos de curvatura não se mesclam com os campos de matéria, basta anular localmente as conexões afins da variedade para que as equações de movimento se reduzam à forma Minkowskiana desejada^[86].

Considera-se, na literatura, que a forma forte do Princípio de Equivalência recebe três tipos de confirmação observacional: a invariância da razão entre massa inercial e massa gravitacional (experiência de Eötvös), a presumível validade generalizada das equações de Maxwell da Eletrodinâmica, e a estabilidade de certas constantes adimensionais microscópicas^[87]. A aplicação estrita da forma "forte", todavia, tem sido questionada por muitos cientistas para os quais, no atual estado-da-arte, violações dessa forma são justificáveis, em especial quando estão sob consideração fenômenos envolvendo campos gravitacionais intensos, domínios muito amplos do espaço-tempo ou outros aspectos não-locais ("solares"). Preferem, assim, advogar uma forma "fraca" do Princípio de Equivalência ("Uma partícula-teste em queda livre segue uma 'linha reta' ou geodésica do espaço-tempo local, quaisquer que sejam sua estrutura ou composição internas"^[88]) que é fundamentada pela uniformidade da queda livre dos corpos sob a ação da gravidade verificada na experiência de Eötvös, e que é satisfeita por formas de acoplamento de maior complexidade que as requeridas pela norma mínima. Assim, se nos ocorre a indagação de se há, na presente época, um consenso generalizado acerca do primado de evidências definitivas ou princípios termi-

to mínima, à exclusão de quaisquer outras formas de representação, a resposta deverá ser negativa. Essa constatação nos franqueia, para além do domínio de escolhas formais simplistas, a investigação de acoplamentos gravitacionais de consequências mais abrangentes que as prescritas pelo procedimento mínimo da TRG usual - como veremos a seguir.

2.3 ACOPLAMENTOS NÃO-MÍNIMOS

Embora o uso tradicional de acoplamentos mínimos de fato exiba aspectos atraentes, em tempos mais recentes os físicos igualmente têm lançado mão de tipos mais complexos - "não-mínimos" - de acoplamento com a gravitação. De um modo geral, os acoplamentos não-mínimos admitem uma representação Lagrangiana da forma

$$L_T = L_{\text{grav}} + L_{\text{mat}} + L_{\text{int}}[\text{grav,mat}] \quad , \quad (2.3.1)$$

onde a introdução da Lagrangiana de interação L_{int} , contendo funcionais da curvatura mesclados a termos de matéria, acarreta a ocorrência de termos mistos também nas equações de movimento oriundas da variação da ação correspondente a L_T . Para citar um exemplo importante, recordemos o destacado papel que o acoplamento conforme entre os campos escalares e a gravitação tem desempenhado em modernas investigações na Física de Partículas, em conexão com modelos de quebra espontânea de simetria e transições de fase e, na Cosmologia, na elaboração de cenários alternativos variados^[14].

- Invariância conforme: a consideração de acoplamentos conformes de campos escalares com a gravitação em Física de Partículas é correlata à hipótese de uma invariância de escala ou conforme dos fenômenos de interação forte em altas energias (no limite de massa nula). Assim, neste procedimento a generalização das equações de movimento para espaços curvos deve ser tal que a expressão resultante seja invariante sob transformações conformes, que são transformações de escala em cada ponto do espaço-tempo caracterizadas por

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad , \quad (2.3.2)$$

onde $\Omega^2(x)$ é uma função escalar. Este mapeamento induz no escalar de curvatura R a transformação correspondente

$$R \rightarrow \tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} \left(R + 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right) \quad . \quad (2.3.3)$$

Se adotamos o princípio de que a generalização da teoria do campo escalar $\phi(x)$ para espaços curvos deve ser invariante sob estas transformações, observando que a modificação correspondente do campo ϕ é

$$\phi(x) \rightarrow \tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \phi(x) \quad , \quad (2.3.4)$$

somos conduzidos à Lagrangiana

$$L_{\text{conf}} = \sqrt{-g} [\phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{6} R \phi^* \phi] \quad (2.3.5)$$

e à conseqüente equação de movimento

$$\square \phi + (m^2 + \frac{1}{6} R) \phi = 0 \quad (2.3.6)$$

que são de fato conformalmente invariantes no limite $(m \rightarrow 0)$ [83]. Tomando o traço da equação de Einstein associada,

$$-\frac{1}{6} \phi^* \phi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{min}}[\phi] - \frac{1}{6} \square(\phi^* \phi) g_{\mu\nu} + \frac{1}{6} (\phi^* \phi)_{,\mu} \parallel_{\nu} \quad (2.3.7)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\text{min}}[\phi]$ é dado pela equação (2.8), obtemos

$$R = m^2 \phi^* \phi \quad , \quad (2.3.8)$$

de modo que a equação de campo escalar eq.(6) se torna

$$\square \phi + m^2 \phi + \frac{m^2}{6} (\phi^* \phi) \phi = 0 \quad , \quad (2.3.9)$$

e concluimos que o efeito líquido do acoplamento conforme sobre o comportamento do campo ϕ é equivalente à introdução de um termo de auto-acoplamento de quarta ordem na Lagrangiana "mínima" eq.(2.3), o que torna natural a consideração, nesse contexto, de mecanismos de quebra espontânea de simetria (ver caps. 5 e 6). Assim, embora a hipótese original de invariância de escala das interações fortes não haja recebido confirmação, acoplamentos não-mínimos do tipo conforme têm sido extensivamente empregados em Cosmologia, por exemplo na investigação de efeitos quânticos como a geração espontânea de um campo gravitacional por quebra de simetria [90], na qual a gravitação de Einstein pode ser considerada como uma manifestação clássica das propriedades quânticas do vácuo [53,91], ou a abordagem "autoconsistente" da criação do Universo a partir de um vácuo quântico de Minkowski [50,92], dentre outras (vide seção 1.3). Observemos ainda, para futura referência, que o termo de Einstein-Hilbert eq.(1.3) não é conformalmente invariante [93].

- Outros Acoplamentos Não-Mínimos: o interesse num exame contextualizado dos efeitos gravitacionais conduz naturalmente à promoção de acoplamentos não-mínimos com outros campos físicos, por exemplo, campos vetoriais. Em princípio, diversas formas não-mínimas de acoplamento são admissíveis, de acordo com o grau de complexidade desejado, e podem implicar na introdução de novas constantes físicas fundamentais. No presente trabalho, consideraremos acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e um campo escalar ϕ do tipo conforme,

$$L = \sqrt{-g} R\phi^2 \quad (2.3.10)$$

(onde $\phi^2 \equiv \phi^* \phi$), e entre a gravitação e um campo vetorial A_μ do tipo conforme,

$$L = \sqrt{-g} R A^2 \quad (2.3.11)$$

(onde $A^2 \equiv A_\mu A^\mu$),

ambos de primeira ordem nos termos de curvatura e de segunda ordem nos campos, e que não requerem a introdução de novas constantes físicas dimensionais. Pelas razões anteriormente mencionadas, esses acoplamentos violam a forma "forte" do Princípio de Equivalência; contudo, estão de acordo com a forma "fraca" (ver Cap.3).

É conveniente assinalar, a esta altura, que a adoção de acoplamentos gravitacionais não-mínimos não apenas implica a aparição de funções da curvatura nas equações de movimento dos campos físicos associados como também poderá resultar, reci-

procamente, na dependência dinâmica de algumas das características do campo gravitacional com relação aos outros campos. Esta observação permitiu a alguns pesquisadores encontrarem uma nova e atraente motivação para o emprego de acoplamentos não-mínimos em investigações cosmológicas; este tema nos conduz de volta ao problema da singularidade cósmica exibido pelo MP.

Como vimos (seção 1.2), os "teoremas da singularidade" prevêm, em algum domínio do espaço-tempo, a ocorrência de uma região singular para qualquer campo gravitacional possuindo matéria comum como fonte da curvatura^[28]. Entretanto, as hipóteses em que se baseiam estes teoremas não são facilmente justificáveis. Destre estes requisitos básicos, dois são particularmente frágeis e de aceitação, pelo menos, duvidosa:

- (i) a existência de uma superfície de Cauchy global;
- (ii) a condição $(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu})v^\mu v^\nu < 0$, para observadores tipo-tempo arbitrários dotados de velocidade v^μ .

Seria difícil conceber qualquer evidência ou observação real para o primeiro requisito; contudo, ele de fato permite a manutenção de uma perspectiva determinista clássica, e assim são poucos os autores que ousam especular para além de seus limites. A segunda hipótese, todavia, é bem mais objetiva - e também mais dramática. Sua validade, no contexto da TRG, está ligada à chamada condição de positividade da energia,

$$T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0 \tag{2.3.12}$$

que efetivamente implica, através das equações de Einstein eq. (1.2.1), a condição (ii) acima.

Precisamente aqui entra em cena a nova característica proporcionada pelo uso de acoplamentos não-mínimos, a que nos referimos há pouco: a capacidade de acarretar uma separação entre essas duas condições - a positividade de energia (eq.12) e a relação (ii) - em função de uma "renormalização" dinâmica da constante gravitacional k , inviabilizando deste modo a aplicação dos teoremas e remetendo a questão da existência ou não de uma verdadeira singularidade gravitacional a um exame frontal de cada solução cosmológica. Essa circunstância permite assim a obtenção de modelos de universo tipo FRW "eternos", não-singulares (como veremos no cap.4), além de outros efeitos cosmológicos de importância como a possível geração de gravitação repulsiva (antigravidade) por quebra espontânea da simetria (vide cap.5). Pode-se conjecturar, portanto, que um procedimento sistemático apropriado para a eliminação de regiões singulares desagradáveis consistiria na promoção de acoplamentos não-mínimos da gravitação com outros campos físicos^[89].

2.4 VARIAÇÃO À PALATINI E ESPAÇOS DE WEYL-INTEGRÁVEIS

Na formulação tradicional da Teoria de Campos, o passo imediato à escolha de uma Lagrangiana para um dado sistema físico é o de derivar as equações dinâmicas a partir de um procedimento variacional aplicado às variáveis fundamentais do problema^[76]. Como vimos na seção 2.1, sob a hipótese de uma estrutura geométrica Riemanniana dada a priori, as equações de Einstein para a gravitação podem ser obtidas da Lagrangiana de Einstein-Hilbert

eq.(1.3) se variarmos com respeito a um único objeto geométrico independente, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Numa geometria Riemanniana, com efeito, as conexões afins da variedade são dadas pelos símbolos de Christoffel da TRG [78],

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} [\text{Riemann}] = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} [g_{\mu\lambda, \nu} + g_{\nu\lambda, \mu} - g_{\mu\nu, \lambda}] , \quad (2.4.1)$$

os quais dependem somente da métrica $g_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas, de modo que basta a especificação do tensor métrico para que seja fixada a estrutura geométrica em todo o espaço-tempo. Doravante, denominaremos este procedimento de variação exclusiva do tensor métrico, numa estrutura espatiotemporal dada previamente, de "variação convencional" ou "variação à Lagrange".

O procedimento convencional de variação esquematizado acima não é, todavia, o único com sentido físico. Tornou-se comum, desde o trabalho de Palatini [94,95], considerar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e as conexões afins $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ como variáveis geométricas independentes na derivação variacional das equações dinâmicas. Em Teoria Clássica de Campos esta abordagem é análoga a uma variação independente das coordenadas generalizadas e dos momenta correspondentes, do que resultam, simultaneamente, as equações de movimento de Euler-Lagrange e a definição canônica dos momenta [60]. Partindo de uma variedade afim de estrutura não especificada, se variarmos a Lagrangiana de Einstein-Hilbert em relação a $g_{\mu\nu}$ e a $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, independentemente, obtemos as equações de Einstein para o vazio,

$$[\delta g_{\mu\nu}] : \quad R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad (2.4.2)$$

e também a relação

$$[\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}]: \quad g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu}||_{\alpha} = 0 \quad (2.4.3)$$

(onde o ponto-e-vírgula significa diferenciação covariante num espaço afim genérico), que caracteriza uma estrutura geométrica Riemanniana, por implicar na identificação das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ da variedade afim aos símbolos de Christoffel $\{\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\}$ da TRG (ver cap.3).

O "Método de Palatini", portanto, não apenas permite obter as equações de Einstein para o vazio como proporciona também uma derivação natural da estrutura geométrica Riemanniana da TRG, através de um procedimento variacional, e não como uma hipótese a priori. Este belo resultado é ainda mais geral, pois pode ser igualmente obtido quando algum tipo de matéria é acoplado à gravitação - desde que este acoplamento seja mínimo. Este aspecto peculiar parece ter passado despercebido até recentemente, quando foi demonstrado^[96] que a aplicação do método de Palatini, no caso de acoplamento não-mínimos com a gravitação, conduz naturalmente não a uma estrutura geométrica Riemanniana, mas a uma estrutura conformalmente Riemanniana - ou, como é mais comumente referido, a um espaço-tempo de Weyl-integrável (WIST). Veremos, em seguida, um exemplo simples e direto dessa argumentação^[97].

- Variação à Palatini de um acoplamento conforme campo escalar-gravitação: consideremos um termo conforme de acoplamento entre um campo escalar e a gravitação, tal como na eq.(3.10):

$$L = \sqrt{-g}R\phi^2 \quad . \quad (2.4.4)$$

Variando à Palatini, obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 R &= \delta \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 g^{\mu\nu} [\delta \Gamma_{\mu\alpha;\nu}^\alpha - \delta \Gamma_{\mu\nu;\alpha}^\alpha] = \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x [(\sqrt{-g} \phi^2 g^{\mu\nu})_{;\alpha} - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} \phi^2 g^{\lambda\mu})_{;\lambda} \delta_\alpha^\nu - \\
 &- \frac{1}{2} (\sqrt{-g} \phi^2 g^{\nu\lambda})_{;\lambda} \delta_\alpha^\mu] \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad , \quad (2.4.5)
 \end{aligned}$$

onde usamos um sistema de coordenadas no qual, localmente, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$, e também a relação [60]

$$(\sqrt{-g})_{;\alpha} \equiv (\sqrt{-g})_{,\alpha} - \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda (\sqrt{-g}) \quad . \quad (2.4.6)$$

Uma vez que as variações são presumidas independentes, da eq.(5) resultam as equações de Einstein para o vazio,

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.4.7)$$

e a equação

$$2(\sqrt{-g} \phi^2 g^{\mu\nu})_{;\alpha} - (\sqrt{-g} \phi^2 g^{\lambda\mu})_{;\lambda} \delta_\alpha^\nu - (\sqrt{-g} \phi^2 g^{\lambda\nu})_{;\lambda} \delta_\alpha^\mu = 0 \quad (2.4.8)$$

que, sob contração ($\nu = \alpha$), nos conduz a

$$(\sqrt{-g} \phi^2 g^{\mu\nu})_{;\alpha} = 0 \quad . \quad (2.4.9)$$

Um exercício simples de cálculo tensorial (ver cap.4) nos mostra que este último resultado é equivalente à relação

$$g_{\mu\nu;\alpha} = - \left(\frac{\phi^2}{\phi^2} \right)_{,\alpha} g_{\mu\nu} \quad (2.4.10)$$

que de fato caracteriza uma estrutura WIST, como veremos no próximo capítulo.

Concluimos assim que o emprego do método de Palatini no caso de acoplamentos não-mínimos permite a elaboração de cenários gravitacionais em que as propriedades da estrutura geométrica da variedade são prescritas dinamicamente pela interação recíproca entre o campo gravitacional e a matéria. A geração dinâmica de estruturas WIST, e toda uma série de consequências de interesse cosmológico que exploraremos no decurso deste trabalho, constituem sem dúvida evidências suplementares da riqueza conceitual proporcionada pelo uso de acoplamentos não-mínimos. Cabe ainda frisarmos a observação de que, de modo análogo à questão da escolha de uma representação formal mínima ou não-mínima para os fenômenos gravitacionais, tampouco no domínio dos princípios variacionais encontramos uma regra geral que restrinja nossa liberdade de selecionar o método variacional - à Lagrange ou à Palatini - a ser empregado na abordagem dos problemas teóricos atuais. Do ponto de vista formal, os dois princípios são equivalentes; praticamente, contudo, produzem cenários físicos distintos, igualmente merecedores de consideração^[58].

Dedicaremos o próximo capítulo, por conseguinte, à fundamentação técnica e conceitual necessária para a consideração dos efeitos cosmológicos decorrentes do uso de acoplamentos não-mínimos e para a discussão de problemas ligados à natureza e à descrição da estrutura geométrica do espaço-tempo.

CAPÍTULO III

ESPAÇOS DE WEYL E ESPAÇOS DE WEYL INTEGRÁVEIS

3.1. INTRODUÇÃO

A partir do estabelecimento da TRG como eixo do novo paradigma gravitacional pós-Newtoniano, o sucesso alcançado por Einstein ao promover uma "geometrização" da força gravitacional, associando-a à curvatura geométrica do espaço-tempo, motivou diversos autores a buscar uma descrição unificada, com base geométrica, que incorporasse tanto a gravitação quanto a outra interação fundamental de longo alcance, o eletromagnetismo. Um exemplo dessas tentativas é a teoria pentadimensional de Kaluza-Klein, na qual uma dimensão espacial "extra" é assimilada a um potencial eletromagnético, e que modernamente tem inspirado uma série de modelos multidimensionais com aplicação nas teorias superunificadas da Física de Partículas e na teoria de supercordas^[99]. Um outro exemplo é a proposta de unificação gravitação-eletromagnetismo apresentada por Hermann Weyl em 1918^[100], na qual a liberdade de "gauge" ou calibre do potencial eletromagnético é associada a um fator de escala local de medida de comprimentos, do que resulta uma estrutura geométrica conformalmente invariante — o espaço de Weyl — na qual, ao contrário do caso Riemanniano, não é em geral possí-

vel definir uma unidade de comprimento válida globalmente, ao longo de toda a variedade.

De fato, a curvatura do espaço-tempo requerida pela TRG de Einstein pode ser discutida em termos da noção de deslocamento paralelo de um vetor; num espaço Riemanniano, o transporte de um vetor por deslocamento paralelo ao longo de um circuito fechado resulta na variação da direção final do vetor em relação à inicial. A proposta de Weyl foi supor que também o comprimento de um vetor, além de sua direção, variasse sob transporte, o que é uma generalização natural da estrutura geométrica de Riemann. Neste capítulo, após a introdução do instrumental matemático indispensável, consideraremos as características dos espaços de Weyl e discutiremos algumas de suas aplicações físicas, do modelo original de unificação às teorias cosmológicas atuais.

3.2. CARACTERIZAÇÃO DOS ESPAÇOS DE WEYL

- Conceitos básicos: podemos definir uma variedade diferenciável $M^{(n)}$ de dimensão n como um conjunto $\{P\}$ de eventos sobre o qual existe um mapeamento um-a-um com o espaço \mathbb{R}^n das n -plas coordenadas $x^{(n)} = (x^1, \dots, x^n)$ de números reais, satisfazendo as seguintes condições:

(i) para todo ponto P de $M^{(n)}$, existe uma vizinhança $M_i = \text{Viz}_i(P)$, definida através da noção de distância no \mathbb{R}^n ,

$$M_i = \text{Viz}_i(P) = \{Q \in M^{(n)} \mid \text{dist}(x_P^{(n)} - x_Q^{(n)}) < \epsilon_i\}, \quad (3.2.1)$$

onde ϵ_i é um real positivo;

(ii) a união das vizinhanças M_i recobre a variedade $M^{(n)}$:

$$M^{(n)} = U(M_i) ; \quad (3.2.2)$$

(iii) as noções de continuidade e diferenciabilidade em $M^{(n)}$ são definidas via o cálculo diferencial no \mathbb{R}^n .

No que se segue, omitiremos por comodidade o índice dimensional n e denotaremos por índices gregos α, β , etc, as coordenadas de um ponto arbitrário P de M : $x_{(P)} = (x^\mu)_{(P)}$. Adotaremos também a convenção de soma de Einstein^[101].

Dada uma variedade diferenciável M , podemos caracterizar objetos geométricos como escalares, vetores e tensores de acordo com seu comportamento frente a transformação de coordenadas $x \rightarrow \tilde{x}$:

- escalares: $\tilde{A} = A$ (3.2.3)

-vetores: $\left\{ \begin{array}{l} \text{contravariantes: } \tilde{A}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{covariantes: } \tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu \end{array} \right.$ (3.2.4a)

(3.2.4b)

- tensores: $\tilde{T}^\alpha_\gamma = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\tilde{x}^\gamma} T^{\rho\sigma}_\lambda$. (3.2.5)

Consideremos um campo vetorial $\vec{\xi}(x) = \xi^\alpha(x^\mu)$ definido em M . Sob uma variação infinitesimal das coordenadas,

$$x \rightarrow x' = x + dx, \quad (3.2.6)$$

as componentes ξ^α do vetor $\vec{\xi}$ experimentam uma transformação expressa por

$$\xi^\alpha(x) \rightarrow \xi^\alpha(x + dx) = \xi^\alpha(x) + d\xi^\alpha(x). \quad (3.2.7)$$

Necessitamos uma regra para especificar o acréscimo adquirido pelas componentes ξ^α ao "transportarmos" $\vec{\xi}$ do ponto x para o ponto infinitesimalmente próximo x' . Adotaremos aqui a lei de transporte afim pela qual o acréscimo $d\xi^\alpha$ é uma forma bilinear nas componentes ξ^α e nas variações infinitesimais dx^μ :

$$d\xi^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \xi^\beta dx^\gamma, \quad (3.2.8)$$

onde os coeficientes $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x)$ são as chamadas conexões afins da variedade M . Sob uma transformação arbitrária de coordenadas $x \rightarrow \tilde{x}$, as conexões $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ se comportam como

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\gamma} \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\gamma}, \quad (3.2.9)$$

ou seja, os objetos Γ não são tensores. Exigiremos que esses objetos sejam simétricos nos índices covariantes (ausência de torção),

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha, \quad (3.2.10)$$

do que resulta ser sempre possível encontrar, localmente, um sistema de coordenadas no qual o acréscimo $d\xi^\alpha$ associado ao transporte infinitesimal do vetor $\vec{\xi}$ se anula. Uma variedade diferenciável onde é satisfeita a regra de transporte afim é dita uma variedade afim, e sua estrutura é invariante em relação a transformações lineares das coordenadas [102].

Para podermos especificar procedimentos de medição e comparação de grandezas numa variedade afim, necessitamos estabelecer um processo covariante (i.e., invariante por transformações arbitrárias de coordenadas) de diferenciação de objetos geométricos. Consideremos, por simplicidade, um campo vetorial $\vec{\xi}(x)$ definido sobre uma variedade M. Comparando o vetor $\vec{\xi}^*(x + dx)$, obtido pelo uso da lei de transporte afim eq. (8) sobre $\vec{\xi}(x)$ ao longo de um deslocamento infinitesimal dx , com o valor $\vec{\xi}(x + dx)$ do campo nesse ponto verificamos (em primeira ordem de aproximação) que esses vetores se identificam caso a diferencial absoluta

$$D \xi^\mu \equiv (\xi^\mu_{, \nu} + \Gamma^\mu_{\alpha \nu} \xi^\alpha) dx^\nu = \xi^\mu;_{\nu} dx^\nu \quad (3.2.11)$$

se anule. Como a quantidade

$$\xi^\mu_{; \nu} \equiv \xi^\mu_{, \nu} + \Gamma^\mu_{\alpha \nu} \xi^\alpha \quad (3.2.12)$$

é um tensor independente dos acréscimos dx^μ , por analogia com o cálculo em espaços planos somos induzidos a denominá-la derivada covariante do campo $\vec{\xi}$. Se anularmos localmente as conexões Γ , a eq. (12) se reduz a uma diferenciação ordinária. É imediata a generalização para o caso de vetores covariantes,

$$\xi_{\mu; \nu} \equiv \xi_{\mu, \nu} - \Gamma^\alpha_{\mu \nu} \xi_\alpha \quad (3.2.13)$$

e para tensores quaisquer, por exemplo,

$$T^{\mu \nu};_\alpha = T^{\mu \nu}_{, \alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha \lambda} T^{\lambda \nu} + \Gamma^\nu_{\alpha \lambda} T^{\mu \lambda} \quad (3.2.14a)$$

$$T_{\mu \nu};_\alpha = T_{\mu \nu, \alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha \mu} T_{\lambda \nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha \nu} T_{\mu \lambda} \quad (3.2.14b)$$

Uma variedade afim é dita um espaço métrico quando é dotada, ademais das conexões afins Γ , de um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, definido em toda a variedade, que permita a conversão de índices contravariantes em covariantes e a construção de uma expressão covariante para o produto escalar entre dois vetores $\vec{\xi}_1(x)$ e $\vec{\xi}_2(x)$ num dado ponto:

$$(\vec{\xi}_1 \cdot \vec{\xi}_2) = \xi_1^\mu \xi_{2\mu} = g_{\mu\nu} \xi_1^\mu \xi_2^\nu . \quad (3.2.15)$$

Por conseguinte, o comprimento l de um vetor $\vec{\xi}$ num ponto qualquer da variedade é definido pelo escalar

$$l^2 = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu , \quad (3.2.16)$$

e o elemento de linha infinitesimal ds associado a uma variação infinitesimal dx^α das coordenadas tem a expressão

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (3.2.17)$$

No presente trabalho consideraremos métricas $g_{\mu\nu}$ simétricas,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} , \quad (3.2.18)$$

sendo a conversão inversa, de índices covariantes em contravariantes, obtida pela contração (multiplicação tensorial) com o tensor recíproco $g^{\mu\nu}(x)$ dado pela relação

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (3.2.19)$$

onde δ_λ^μ é um delta de Kronecker, $\delta_\lambda^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$

- Variação de comprimentos: variando infinitesimalmente o comprimento l^2 de um vetor $\vec{\xi}$ num dado ponto (eq.(16)),

encontramos

$$d(\ell^2) = d(g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) = d(g_{\mu\nu}) \xi^\mu \xi^\nu + g_{\mu\nu} (d\xi^\mu) \xi^\nu + g_{\mu\nu} \xi^\mu (d\xi^\nu) . \quad (3.2.20)$$

Empregando a lei de transporte afim (eq. (8)), obtemos

$$\begin{aligned} d(\ell^2) &= (g_{\mu\nu, \alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma g_{\sigma\mu}) dx^\alpha \xi^\mu \xi^\nu = \\ &= (g_{\mu\nu; \alpha} dx^\alpha) \xi^\mu \xi^\nu = (Dg_{\mu\nu}) \xi^\mu \xi^\nu , \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

de acordo com a definição eq. (11) da diferencial absoluta D . Concluimos assim que, se é válida a condição

$$Dg_{\mu\nu} = 0 , \quad (3.2.22)$$

o comprimento de um vetor não variará sob um transporte paralelo a si próprio. Torna-se então possível definir uma unidade absoluta de comprimentos para todos os pontos da variedade: o comprimento assim fixado será independente do particular caminho adotado no transporte paralelo entre dois pontos infinitesimalmente próximos [103]. Se, por outro lado, $Dg_{\mu\nu} \neq 0$, haverá variação de comprimentos sob transporte paralelo. Seja então o tensor $Q_{\mu\nu\alpha}$, simétrico nos dois primeiros índices ($Q_{\mu\nu\alpha} = Q_{\nu\mu\alpha}$), definido por

$$Q_{\mu\nu\alpha} \equiv g_{\mu\nu; \alpha} = g_{\mu\nu, \alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma g_{\sigma\mu} . \quad (3.2.23)$$

Observemos que, em virtude da relação eq. (19), temos $Q^{\mu\nu}{}_\alpha = -g^{\mu\nu}{}_{; \alpha}$. Permutando índices e adicionando, verificamos que

$$(Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu}) = (g_{\mu\nu, \alpha} + g_{\nu\alpha, \mu} - g_{\alpha\mu, \nu}) - 2\Gamma_{\mu\alpha}^\sigma g_{\sigma\nu} . \quad (3.2.24)$$

Multiplicando esta última relação pelo fator $\frac{1}{2} g^{\lambda\nu}$, encontramos

para a conexão afim $\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}$, a expressão

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} = \{\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\} - \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu}), \quad (3.2.25)$$

onde

$$\{\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\alpha\nu,\mu}) \quad (3.2.26)$$

são os chamados símbolos de Christoffel eq. (2.4.1) da TRG. Portanto, se $Q_{\mu\nu\alpha} = 0$ as conexões $\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}$ se reduzem aos símbolos de Christoffel $\{\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\}$, de modo que uma estrutura geométrica Riemanniana pode ser caracterizada pela identidade

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu||\alpha} = 0, \quad (3.2.27)$$

(onde a dupla barra denota derivação covariante no espaço de Riemann, empregando somente os símbolos $\{\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\}$), como afirmamos na seção 2.4. Em consequência, numa variedade Riemanniana vale a eq. (22) e assim, os comprimentos são preservados sob transporte paralelo. Essa condição é normalmente expressa pela integral de linha

$$\oint dl = 0, \quad (3.2.28)$$

indicando que a variação total de comprimentos em um circuito infinitesimal fechado arbitrário é nula^[84].

- Espaços de Weyl: quando $Q_{\mu\nu\alpha} \neq 0$, comprimentos de vetores variam sob transporte afim. Weyl, em 1918^[104], propôs a introdução de um campo vetorial $\vec{\omega}(x) = \omega_{\alpha}(x^{\mu})$, definido sobre uma variedade afim com métrica $g_{\mu\nu}$, como um novo objeto geométrico fundamental que regularia localmente as variações de comprimento no

transporte de vetores, em virtude da escolha do ansatz

$$Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} \omega_{\alpha} . \quad (3.2.29)$$

Nesse caso, de acordo com a eq. (25) as conexões afins $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ são da
das por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda} \omega_{\nu} - g_{\nu\lambda} \omega_{\mu} - g_{\mu\nu} \omega_{\lambda}) . \quad (3.2.30)$$

Das eqs. (21,16) concluímos também que a variação do comprimento de um vetor ξ^{μ} ao ser transportado segundo um incremento dx^{α} será

$$d(\ell^2) = (g_{\mu\nu;\alpha} dx^{\alpha}) \xi^{\mu} \xi^{\nu} = g_{\mu\nu} \omega_{\alpha} dx^{\alpha} \xi^{\mu} \xi^{\nu} = \ell^2 \omega_{\alpha} dx^{\alpha} . \quad (3.2.31)$$

Obtemos assim uma teoria em que a variação local $d(\ell^2)$ do comprimento de um vetor transportado infinitesimalmente é uma função linear do comprimento ℓ^2 , do incremento dx^{α} e do vetor de escala (ou de "gauge") ω_{α} . Como tanto ℓ^2 quanto $\omega_{\alpha} dx^{\alpha}$ são escalares, a relação eq. (31) é manifestamente covariante. Definimos assim um espaço de Weyl ^[100,105] como uma variedade afim a quatro dimensões, do
tada de uma métrica $g_{\mu\nu}$ (empregada na determinação de comprimentos), de uma conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ (empregada na construção de derivadas co
variantes) e de um vetor de gauge ω_{α} (empregado na determinação de variações de comprimentos) satisfazendo as relações fundamentais

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} \omega_{\alpha} \quad (3.2.32a)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda} \omega_{\nu} + g_{\nu\lambda} \omega_{\mu} - g_{\mu\nu} \omega_{\lambda}) \quad (3.2.32b)$$

$$d(\ell^2) = \ell^2 \omega_{\alpha} dx^{\alpha} \quad (3.2.32c)$$

sendo ainda o elemento infinitesimal de linha dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.2.33)$$

onde escolhemos a assinatura (+---) para o tensor métrico.

- Quantidades geométricas no espaço de Weyl: usando as prescrições da geometria afim^[106], podemos construir uma versão Weyliana para quantidades geométricas relevantes. Dado um campo vetorial $\xi^\alpha(x)$ definido numa variedade de Weyl W , a curvatura dessa variedade é definida pela relação

$$\xi^\alpha{}_{;\beta;\gamma} - \xi^\alpha{}_{;\gamma;\beta} = R^\alpha{}_{\lambda\beta\gamma} \xi^\lambda, \quad (3.2.34)$$

onde

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\rho} \Gamma^\rho{}_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\rho} \Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} \quad (3.2.35)$$

é o tensor de curvatura de Riemann. Uma vez que a conexão de Weyl $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ (eq. 30) consiste na soma do símbolo de Christoffel $\{\alpha{}_{\beta\gamma}\}$ com um termo que depende apenas da métrica $g_{\mu\nu}$ e do vetor de gauge ω_α , esta expressão se reduz a

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} = & \bar{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} + \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_{\beta} \omega_{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \omega_\beta \parallel [\gamma \delta^\alpha{}_{\lambda}] + \frac{1}{2} \omega^\alpha \parallel [\lambda g_\gamma]_\beta + \\ & + \frac{1}{4} \delta^\alpha{}_{[\lambda} \omega_{\gamma]} \omega_\beta + \frac{1}{4} g_{\beta[\gamma} \omega_{\lambda]} \omega^\alpha + \frac{1}{4} \delta^\alpha{}_{[\gamma} g_{\lambda]} \beta \omega_\rho \omega^\rho, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

onde

$$\bar{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} = \{\alpha{}_{\beta\gamma}, \lambda\} - \{\alpha{}_{\beta\lambda}, \gamma\} + \{\alpha{}_{\lambda\rho}\} \{\rho{}_{\gamma\beta}\} - \{\alpha{}_{\gamma\rho}\} \{\rho{}_{\lambda\beta}\} \quad (3.2.37)$$

é o tensor de Riemann num espaço Riemanniano (no qual vale $g_{\mu\nu} \parallel^\alpha = 0$),

$$W_{\lambda\gamma} = (\omega_{\lambda||\gamma} - \omega_{\gamma||\lambda}) = (\omega_{\lambda,\gamma} - \omega_{\gamma,\lambda}) \quad (3.2.38)$$

é o chamado tensor de gauge de Weyl, e onde o símbolo [...] denota antissimetrização, ou seja,

$$A_{[\alpha\beta]} = (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}). \quad (3.2.39)$$

Analogamente, o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ definido por

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\mu} + \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} \quad (3.2.40)$$

tem no espaço de Weyl a expressão

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} \omega_{\alpha||\beta} + \frac{1}{2} \omega_{\beta||\alpha} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha}\omega_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega^{\gamma}_{||\gamma} - \omega_{\gamma}\omega^{\gamma}), \quad (3.2.41)$$

onde

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \{\alpha\mu\}_{,\beta} - \{\alpha\beta\}_{,\mu} + \{\beta\mu\}\{\rho\alpha\} - \{\mu\rho\}\{\beta\alpha\} \quad (3.2.42)$$

é o tensor de Ricci num espaço Riemanniano, e o escalar de curvatura R ,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (3.2.43)$$

tem a expressão

$$R = \bar{R} - 3\omega^{\gamma}_{||\gamma} + \frac{3}{2} \omega_{\gamma}\omega^{\gamma}, \quad (3.2.44)$$

onde $\bar{R} = g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta}$ é a forma Riemanniana. Por fim, o tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} Rg_{\alpha\beta} \quad (3.2.45)$$

tem num espaço de Weyl a forma

$$G_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} \omega_{\alpha} || \beta + \frac{1}{2} \omega_{\beta} || \alpha - \frac{1}{2} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + g_{\alpha\beta} (\omega^{\gamma} || \gamma - \frac{1}{4} \omega_{\gamma} \omega^{\gamma}), \quad (3.2.46)$$

sendo $\bar{G}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\alpha\beta}$, mais uma vez, a versão Riemanniana. Dora-vante, quantidades construídas num espaço Riemanniano serão sempre denotadas por uma barra transversal superior, para distingui-las das expressões Weylianais mais gerais nas quais estiverem incluídas.

3.3. TRANSFORMAÇÕES CONFORMES E ESPAÇOS DE WEYL INTEGRÁVEIS

Um espaço de Weyl, como vimos, é caracterizado pelas relações eqs. (2.32). Contudo, a escolha da eq. (2.32a),

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} \omega_{\alpha} \quad (3.3.1)$$

pela qual encontramos a forma (2.32b) da conexão Weyliana $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, não fixa univocamente as 14 variáveis compreendidas na descrição da métrica $g_{\mu\nu}$ e do vetor de gauge ω_{α} . De fato, consideremos uma transformação conforme ^[107] análoga à eq. (2.3.2),

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (3.3.2)$$

na qual o valor da métrica em cada ponto da variedade é multiplicado por um fator de escala, a função escalar $\Omega^2(x)$. Sob uma transformação conforme, outras grandezas relevantes são mapeadas como segue:

$$\text{Conexão afim: } \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{\Omega} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\mu} \Omega_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \Omega_{,\mu} - g_{\mu\nu} \Omega_{,\lambda}) \quad (3.3.3)$$

$$\text{Escalar: } \tilde{\phi} = \frac{1}{\Omega^2} \phi \quad (3.3.4)$$

$$\text{Densidade invariante de volume: } \sqrt{-g} = \Omega^4 \sqrt{-\tilde{g}} \quad (3.3.5)$$

$$\text{Tensor de Ricci: } \overset{\vee}{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu} + \frac{1}{2} Q g_{\mu\nu}), \quad (3.3.6)$$

onde

$$Q_{\mu\nu} = \frac{4}{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega} \right)_{;\nu;\mu} - 2 g^{\lambda\sigma} \left(\frac{1}{\Omega} \right)_{,\lambda} \left(\frac{1}{\Omega} \right)_{,\sigma} g_{\mu\nu} \quad (3.3.7)$$

e

$$Q = \frac{4}{\Omega} \left(- \frac{\Omega}{\Omega^2} \right)_{,\lambda} g^{\beta\lambda} - 8 \frac{\Omega_{,\lambda} \Omega_{,\sigma}}{\Omega^4} g^{\lambda\sigma} . \quad (3.3.8)$$

$$\text{Escalar de curvatura: } \overset{\vee}{R} = \frac{1}{\Omega^2} \left(R + 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right), \quad (3.3.9)$$

onde o operador Laplaciano \square é dado pela eq. (2.2.6).

Ora, inspecionando a expressão eq. (2.30) da conexão Weyliana $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, verificamos que sob uma transformação de gauge [100] do vetor ω_{α} da forma

$$\omega_{\alpha} \rightarrow \overset{*}{\omega}_{\alpha} = \omega_{\alpha} + \frac{\Omega^2}{\Omega^2} \overset{\alpha}{}, \quad (3.3.10)$$

a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ se transformará como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \rightarrow \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{\Omega} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\mu} \Omega_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \Omega_{,\mu} - g_{\mu\nu} \Omega_{,\lambda}) \quad (3.3.11)$$

reproduzindo identicamente a eq. (3). Deste modo, podemos concluir que sob a aplicação combinada de uma transformação conforme eq. (2) e da transformação de gauge eq. (10), a estrutura afim do espaço de Weyl mantem-se invariante, pois nesse caso

$$\overset{\vee}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} . \quad (3.3.12)$$

Analogamente, da eq. (1) transformada temos

$$\begin{aligned} \overset{\nu}{g}_{\mu\nu;\alpha}^* &= (\Omega^2 g_{\mu\nu})^*_{;\alpha} = \Omega^2_{, \alpha} g_{\mu\nu} + \Omega^2 g_{\mu\nu;\alpha} = \overset{\nu}{g}_{\mu\nu}^* \omega_\alpha = \\ &= \Omega^2 g_{\mu\nu} (\omega_\alpha + \frac{\Omega^2_{, \alpha}}{\Omega^2}), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

que se reduz à expressão original eq. (1). Assim, a eq. (1) é indistintamente satisfeita quer pelo par $(g_{\mu\nu}, \omega_\alpha)$, quer por $(\overset{\nu}{g}_{\mu\nu}, \overset{*}{\omega}_\alpha)$.

Num espaço de Weyl, portanto, as relações angulares entre curvas ou vetores são globalmente preservadas, uma vez que a razão

$$\frac{A^\alpha B_\alpha}{|A| |B|} \equiv \frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{(g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta)^{1/2} (g_{\alpha\beta} B^\alpha B^\beta)^{1/2}} \quad (3.3.14)$$

é conformalmente invariante. Por outro lado, a invariância eq. (12) das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ implica na manutenção da mesma lei de transporte afim, eq. (2.8). Todavia, localmente os comprimentos se alteram

$$\overset{\nu}{l}^2 = \Omega^2 l^2, \quad (3.3.15)$$

de modo que não é possível o estabelecimento de um padrão de comprimentos válido em toda a variedade; em cada ponto, unidades arbitrárias de comprimento podem ser eleitas e correlacionadas entre si, através de transformações conformes e de gauge que não afetam a estrutura afim do espaço. Em geral, tampouco ocorre a conservação de comprimentos sob transporte paralelo, pois da eq. (2.32c) temos

$$2 \oint \frac{dl}{l} = \oint \omega_\alpha dx^\alpha \neq 0. \quad (3.3.16)$$

Interroguemo-nos agora sobre a relação entre os espaços de Riemann e de Weyl. Verificamos de imediato que se o vetor de gauge ω_α for nulo, a eq. (1) se reduz à eq. (2.27), e a estrutura Weyliana a uma estrutura de Riemann. Por outro lado, essa condição também pode ser obtida se temos

$$\omega_\alpha = \Phi_{, \alpha} \quad (3.3.17)$$

(ou seja, se o vetor de gauge é o gradiente de uma função escalar $\Phi(x)$), pois nesse caso podemos realizar uma transformação de gauge tal que

$$\omega_\alpha \rightarrow \overset{*}{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + \frac{\Omega^2}{\Omega^2} \omega_\alpha = 0, \quad (3.3.18)$$

onde o fator conforme Ω^2 é determinado por

$$\Phi = -\ln \Omega^2. \quad (3.3.29)$$

A estrutura assim alcançada terá de fato caráter Riemanniano, pois

$$\overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}, \quad (3.3.20)$$

e também

$$\tilde{g}_{\mu\nu; \alpha}^* = \tilde{g}_{\mu\nu} \overset{*}{\omega}_\alpha = 0. \quad (3.3.21)$$

Observamos ainda que, sendo válida a eq. (17), o uso do teorema de Stokes [84]

$$\oint_C A_\alpha dx^\alpha = \int_S (\text{rot } A_\alpha) \cdot d\vec{S}, \quad (3.3.22)$$

(onde C é um circuito fechado envolvendo a área S) nos mostra que

$$2 \oint_C \frac{d\ell}{\ell} = \oint_C \omega_\alpha dx^\alpha = \int_S \text{rot}(\text{grad}\Phi) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.3.23)$$

ou seja, os comprimentos são preservados sob transporte paralelo num circuito infinitesimal fechado.

Essas características conduziram à denominação de espaços conformalmente-Riemannianos ou espaços de Weyl-integráveis (WISTs) [96] aos espaços de Weyl cujo vetor de gauge é o gradiente de uma função escalar. Uma estrutura WIST, portanto, é caracterizada pela eq. (17) ou, o que é o mesmo, pela relação

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \quad , \quad (3.3.24)$$

onde $\phi(x)$ é uma função escalar das coordenadas.

Analogamente ao caso Riemanniano da TRG, num WIST a variação total de comprimento num percurso fechado é nula, pois a condição de integrabilidade (anulação do tensor de gauge)

$$W_{\alpha\beta} = (\omega_{\alpha,\beta} - \omega_{\beta,\alpha}) = 0 \quad (3.3.25)$$

que permite a preservação de comprimentos sob transporte num circuito infinitesimal é automaticamente satisfeita, bem como a relação de antissimetria

$$W_{\alpha\beta} = -W_{\beta\alpha} \quad , \quad (3.3.26)$$

e a relação cíclica

$$W_{\alpha\beta;\gamma} + W_{\beta\gamma;\alpha} + W_{\alpha\gamma;\beta} = 0. \quad (3.3.27)$$

Em princípio, um espaço WIST é sempre redutível a um espaço Riemanniano por meio de uma transformação de gauge análoga à eq. (18). Convém assinalar, todavia, que suas estruturas não são idênticas, em virtude das conexões afins serem distintas; e, por outro lado, quando uma estrutura WIST é gerada dinamicamente (co-

mo nos casos concretos que veremos nos próximos capítulos), tal redução só será possível na ausência de impedimentos dinâmicos. Se tal não for o caso, um dado espaço WIST recairá numa estrutura de Riemann somente quando $\phi = \text{const.}$, ou seja, quando $\omega_{\alpha}^{\dot{}} = 0$.

Em vista da invariância conforme e de gauge exibida pela teoria, Weyl introduziu a noção de peso sob uma transformação conforme. O peso P de um objeto arbitrário $T_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ sob uma transformação como a eq. (2) é definido por

$$P[T_{\beta \dots}^{\alpha \dots}] = n \quad , \quad (3.2.28)$$

se $T_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ se transforma como

$$T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \Omega^2 n T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \quad . \quad (3.2.29)$$

Por exemplo, das eqs. (5,9), vemos que $P[\sqrt{-g}] = 2$ e $P[R] = -1$. Se uma dada grandeza G é tal que $P[G] = 0$, essa grandeza é invariante sob transformações de escala locais, como a eq. (15). Assim, uma teoria construída com objetos tensoriais de peso zero será bi-covariante, ou seja, covariante em relação a transformações de coordenadas e a transformações da escala de unidades [66,108].

3.4. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE WEYL E WEYL-INTEGRÁVEL

Weyl elaborou a noção de uma estrutura geométrica conformalmente invariante, incluindo como objetos fundamentais tanto o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ quanto o vetor de gauge ω_{α} , com o objetivo de promover a unificação, sob uma descrição geométrica comum,

da gravitação e do eletromagnetismo. Quando se abandona a prescrição Riemanniana de comparação arbitrária de comprimentos em favor dos princípios de uma verdadeira "geometria da proximidade", observa ele, "surge uma geometria que, sendo aplicada ao Universo, surpreendentemente explica não só os fenômenos da gravitação, mas também os do campo eletromagnético. Na teoria assim constituída, ambas estas categorias de fenômenos brotam da mesma fonte, não sendo, em geral, de modo nenhum possível fazer entre gravitação e eletricidade qualquer separação que não seja arbitrária" [104].

- Teoria da unificação de Weyl: tal unificação será obtida a partir da identificação do vetor de gauge ω_α ao potencial A_μ do campo eletromagnético. Nesse caso, o tensor de gauge $W_{\alpha\beta}$ eq.(28) se identifica ao tensor de Maxwell eq. (2.2.13)

$$W_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}), \quad (3.4.1)$$

pelo que concluímos que na teoria de Weyl a liberdade de fixação de gauge do potencial eletromagnético ganha um novo sentido físico, associado à invariância conforme da geometria de Weyl, pois automaticamente temos

$$P[F_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.4.2)$$

A elaboração de equações dinâmicas bi-covariantes demanda que a densidade Lagrangiana escolhida seja um escalar de peso zero; com os tensores característicos da gravitação e do eletromagnetismo podemos construir grandezas apropriadas tais como

$$\sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \sqrt{-g} R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda}, \sqrt{-g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \sqrt{-g} R^2 \quad (3.4.3)$$

(observemos que $P[\sqrt{-g}R] = 1$, e assim a formulação de Einstein-Hilbert não é conformalmente invariante, como assinalamos na seção 2.3).

Weyl adotou a generalização mais simples da Lagrangiana de Einstein-Maxwell eq. (2.2.17):

$$L_W = \sqrt{-g} [R^2 + \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}], \quad (3.4.4)$$

onde α é uma constante a ser convenientemente fixada e R é o escalar de curvatura num espaço de Weyl eq. (2.44). Variando a Lagrange a ação correspondente, e escolhendo uma escala local de comprimentos (o "gauge natural" de Weyl) tal que

$$R = \lambda = \text{const.}, \quad (3.4.5)$$

encontramos a forma variacional equivalente

$$\delta \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} \bar{R} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2k} (1 - 3A'_\mu A'^\mu) \right] d^4x = 0 \quad (3.4.6)$$

(onde tomamos $A'_\mu = \sqrt{\lambda} A_\mu$, $F'_{\mu\nu} = \sqrt{\lambda} F_{\mu\nu}$, e $\alpha = -\frac{k}{2}$). Os dois primeiros termos desta expressão reproduzem a Lagrangiana de Einstein-Maxwell usual eq. (2.2.17), e assim dela resultam as equações de Einstein eq. (2.2.19) modificadas por um termo proporcional ao "fator cosmológico" λ ,

$$\bar{G}_{\mu\nu} = -k E'_{\mu\nu} + 0(\lambda), \quad (3.4.7)$$

e também as equações de Maxwell na presença de correntes,

$$F'^{\alpha\beta} \parallel_\beta = -\frac{3\lambda}{k} A'^\alpha = J'^\alpha. \quad (3.4.8)$$

Em virtude da anti-simetria de $F'_{\mu\nu}$, a corrente J'^α satisfaz a e-

equação de conservação

$$(\sqrt{-g} J'^{\alpha})_{,\alpha} = 0 . \quad (3.4.9)$$

Como o fator cosmológico λ pode ser muito pequeno, a teoria de Weyl reproduz, localmente, as descrições tradicionais da gravitação e do eletromagnetismo, fundindo-as numa formulação unificada e de grande apelo estético [100,105].

- Crítica de Einstein: não obstante essa elegância formal, entretanto, a não-integrabilidade do transporte paralelo intrínseca à geometria de Weyl ensejou uma abordagem crítica, e aparentemente demolidora, de Einstein. Consideremos o caso muito simples de um campo gravitacional estático radial associado a um campo eletrostático também radial, de modo que

$$A_{\mu} = A_0(r) \delta_{\mu}^0 . \quad (3.4.10)$$

Dois relógios idênticos, situados nos pontos P e Q, medem a coordenada $x^0 = t$ através de um processo cíclico de período τ_0 (as oscilações eletrônicas de um certo átomo, por exemplo). De acordo com a expressão de Weyl para a variação de comprimentos eq.(2.31), temos

$$l = l_0 \exp \int_0^t A_0 dx^0 = l_0 \exp (A_0 t) . \quad (3.4.11)$$

Sendo o tempo físico medido em P dado por $\tau_P = \frac{l_P}{c}$, obtemos

$$\tau_P = \tau_0 \exp [A_0(P) t] . \quad (3.4.12)$$

Mas então os períodos registrados pelos relógios nos pontos distintos P e Q serão correlacionados por

$$\frac{t_P}{t_Q} = \exp ([A_0(P) - A_0(Q)]t) . \quad (3.4.13)$$

Como, em princípio, $A_0(P) \neq A_0(Q)$, resulta que os períodos medidos pelos dois relógios serão progressivamente dissincronizados - o que significa que as frequências dos espectros de radiação de átomos idênticos poderiam depender da história e/ou da particular localização dos mesmos. Contudo, é um fato experimental comprovado que as linhas espectrais de um dado átomo se distribuem de maneira nítida e bem-definida; assim, conclui Einstein, a teoria de Weyl está em contradição com a observação [109].

Embora não levasse em conta a correta descrição quântica dos fenômenos microscópicos, a crítica de Einstein representou um sério revés para a proposta de unificação de Weyl, cuja forma original logo deixaria de merecer interesse; de fato, apenas recentemente se observou que, ao menos no caso de espaços de Weyl integráveis, tal objeção não se aplica, visto que num WIST as variações de comprimento são naturalmente integráveis (vide eq. (3.2.3)), como no caso Riemanniano. Contudo, a argumentação física e o formalismo matemático introduzidos por Weyl encontraram aplicação em diversos domínios da Física - em particular a noção de invariância de gauge que, após o desenvolvimento da moderna teoria quântica, o próprio Weyl associou ao transplante do vetor de estado de um dado sistema quântico [110], e que a partir dos anos 60 iria constituir a espinha dorsal das tentativas contemporâneas de unificação das interações através das teorias de gauge da Física de Partículas [48]. Consideraremos, a seguir, algumas abordagens físicas, baseadas nas idéias de Weyl, que nos auxiliarão a traçar um quadro representativo de seu presente estatuto conceitual.

- Revisões da Teoria de Weyl: podemos assinalar algumas tentativas de reformulação da teoria de Weyl, ao longo das últimas décadas, que de modo geral objetivam eliminar ou atenuar seus aspectos mais vulneráveis, em especial o problema da variação de comprimentos sob transporte criticado por Einstein, por meio de variadas argumentações físicas. Utiyama^[111], por exemplo, procuram do aproximar a invariância de escala ligada à fenômenos de alta energia (ver seção 2.3) às transformações de gauge de Weyl, introduz um campo escalar de "medida" ϕ , que corresponde à medida de integração atribuída a cada ponto do espaço-tempo. Quando se emprega este campo de medida como padrão local para a medição de quantidades físicas, resulta ser possível escrever as equações de movimento do sistema campo de gauge-campo de medida de maneira gauge-invariante; todavia, nesse contexto o campo de gauge ω_α de Weyl não deve ser identificado ao potencial eletromagnético A_μ , por exibir uma densidade de energia negativa e adquirir, no interior das partículas materiais, um caráter taquiônico. Uma vez que esse campo seria confinado ao interior das partículas, Utiyama sugere associá-lo a uma força de coesão que coligaria e estabilizaria os subcomponentes das partículas elementares (a maneira do confinamento dos quarks proposto décadas mais tarde pela Cromodinâmica Quântica^[112]). Recentemente, novas soluções da chamada teoria do campo de gauge de Weyl-Utiyama têm sido obtidas^[113].

Rosen^[114], por outro lado, procura resolver a dificuldade da não-integrabilidade de comprimentos da geometria de Weyl através da modificação da lei de transporte paralelo de vetores e do uso de vetores "padrão" (cujo comprimento é gauge-invariante). Às equações de movimento derivadas de um princípio varia-

cional similar ao de Dirac (ver adiante), podem resultar tanto em um campo eletromagnético convencional quanto em um campo vetorial mesônico, correspondendo a um campo de fótons massivos ou a um campo mesônico que poderia proporcionar a "massa faltante" necessária para determinar a escolha de modelos cosmológicos FRW fechados. A fixação de um gauge adequado permite reproduzir os efeitos da expansão de Hubble. Por fim, recentemente foi demonstrado que a introdução de quantidades complexas conduz a uma rearticulação formal da teoria da unificação de Weyl, na qual as condições de integrabilidade das equações de campo selecionam as leis de um fluido clássico perfeito sujeito a interações eletromagnéticas. O limite puramente gravitacional da teoria são as equações de Einstein da TRG, e no caso puramente eletromagnético suas previsões coincidem com as da teoria de Maxwell^[115].

- Espaços de Weyl e Teoria Quântica: uma curiosa aplicação da teoria de transporte de comprimentos de Weyl ao domínio das estruturas atômicas foi elaborada por London em 1927^[116]. Descrevendo o movimento circular de um elétron em torno de um próton, cujo campo é caracterizado por um potencial da forma eq. (10) com $A(r) = \frac{\alpha}{r}$ (sendo α uma constante numérica que conecta o potencial eletrostático $\frac{1}{r}$ ao termo geométrico de gauge $A(r)$), London investiga as condições para que a variação Weyliana de comprimentos ao longo de uma dada órbita circular se anule (ou, de acordo com a eq. (12), para que o período orbital τ seja constante) e verifica que, admitindo uma "constante de estrutura fina" imaginária $\alpha = \frac{i}{137}$, os possíveis raios r_n de órbitas ao longo das quais a escala de comprimentos é preservada são determinados pela fórmula

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2}, \quad (3.4.14)$$

expressão idêntica à dos raios de Bohr da antiga teoria quântica (sendo n um inteiro positivo, \hbar a constante de Planck, m a massa do elétron e e sua carga) [117]. Assim, na teoria de London a preservação da escala de comprimentos numa estrutura de Weyl introduz naturalmente a regra de Bohr-Sommerfeld para a quantização das órbitas do átomo de hidrogênio, fixando ainda um valor (imaginário) para a constante de estrutura fina. Embora não impliquem a previsão de novos fenômenos, esses resultados são sugestivos por indicarem que as regras da Mecânica Quântica podem ser obtidas de um formalismo clássico de base geométrica. Recentemente, foi demonstrado que a construção de um espaço de fase quântico fundamentado na geometria de Weyl e London permite a obtenção do comutador fundamental de Dirac $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, a partir do qual toda a estrutura da moderna teoria quântica pode ser formalmente desenvolvida [118].

Seria a teoria de London sugestiva de uma conexão profunda, e ainda insuspeita, entre os fenômenos de natureza quântica e as estruturas geométricas descritas pelos espaços de Weyl? De outro modo, seriam os espaços onde ocorrem variações de comprimentos sob transporte (como os de Weyl) bons candidatos para a fundamentação de uma teoria que, a partir de elementos geométricos clássicos, lograsse uma interpretação adequada dos processos microscópicos típicos? Na moderna literatura, com efeito, encontramos diversas reflexões acerca desta indagação. Pode-se mostrar, por exemplo, que a forma tradicional da equação de Schrödinger da Mecânica Quântica não-relativística é recuperada quando se

admite que as "forças" de origem quântica que afetam o movimento de uma partícula são associadas a efeitos de curvatura provindos da presença do vetor de gauge ω_α numa estrutura de Weyl. Assim, ao contrário das abordagens estocásticas anteriores, de Madelung/Bohm ou de Feynês/Nelson, nesta interpretação as flutuações estocásticas do movimento de uma partícula quântica são atribuídas a uma "reação" da estrutura geométrica (manifesta através da lei de transporte de comprimentos eq. (2.8)) à presença da própria partícula. Os efeitos quânticos, portanto, teriam origem num certo tipo de realimentação ("feedback") entre a geometria do espaço e a dinâmica da matéria; presumivelmente, um resultado análogo poderia ser obtido num caso propriamente relativístico^[119].

Outra aproximação entre a teoria quântica e os espaços de Weyl foi assinalada no contexto das abordagens axiomáticas à TRG. Com efeito, diferentes esquemas axiomáticos dos princípios da TRG empregando raios luminosos e partículas-teste clássicas como conceitos primitivos terminam por engendrar uma estrutura Weyliana, ao invés de Riemanniana, para o espaço-tempo, e parece não haver uma maneira de eliminar essa distinção a partir desses elementos primitivos somente. Todavia, pode-se demonstrar que a inclusão de uma descrição quântica do comportamento da matéria, contendo a dinâmica clássica como limite, em um esquema gravitacional que seja completo (ou seja, que incorpore todas as leis físicas não-gravitacionais, em particular os princípios da teoria quântica) e auto-consistente (no sentido de que, irrespectivamente ao método produtivo empregado, o resultado de um experimento deve ser o mesmo), é suficiente para determinar a redução da estrutura Weyliana axiomáticamente prescrita ao caso Riemanniano convencional^[120].

Os resultados que acabamos de citar aparentemente insinuam uma curiosa complementaridade entre formulações quânticas e alguns aspectos geométricos da teoria de Weyl. A construção de um formalismo relativístico que abrangesse os efeitos quânticos como corolário viria de encontro à aspiração de Einstein, cuja postura crítica em relação à Mecânica Quântica pode ser relacionada a seu desejo de deduzir a teoria quântica de uma teoria relativística clássica^[121].

- Cosmologia dos Grandes Números: Eddington^[122] ofereceu à curiosidade e à controvérsia dos pesquisadores que o sucederam a intrigante observação de que certas relações adimensionais, expressas por números extremamente grandes, podiam ser construídas a partir de razões entre quantidades bem conhecidas, surgidas em diversos domínios (macro- e microscópicos) da Física, e que pareciam de algum modo convergir para o chamado número de Eddington 10^{39} (ver cap. 6). Assim, medindo a razão das intensidades das interações elétrica e gravitacional entre prótons e elétrons obtém-se $\frac{e^2}{Gm_e m_p} \sim 10^{39}$; o número de partículas contidas em nosso horizonte (ou seja, que se afastam de nós com velocidade $v < \frac{c}{2}$), acredita-se, seria da ordem de 10^{80} , que é aproximadamente o quadrado do número de Eddington; e ainda, o tempo de existência do Universo ($\sim 10^{16}$ s, segundo o MP), quando avaliado em unidades atômicas de tempo ($\frac{e^2}{m_e c^2} \sim 10^{-23}$ s), resulta no mesmo número, 10^{39} . Essas "coincidências" pareceram a muitos cientistas, ao longo das últimas décadas, sugerir o indício de alguma simetria profunda, ainda apenas entrevista, do Universo físico (e, para outros, apenas uma trivialidade matemática). Sua presumível importância para a ela-

boração de uma teoria mais fundamental da Natureza tem motivado assim uma série de tentativas de derivação ou justificação dessas relações a partir de variados princípios e argumentações físicas.

Para citar um exemplo recente, uma abordagem que ultimamente tem recebido muita atenção é proporcionada pela consideração do assim denominado "Princípio Antrópico", que pretende correlacionar os valores reais, efetivos, de diversas constantes fundamentais da Física com certas propriedades do mundo natural, principalmente aquelas de que resulta a possibilidade da presença do Homem, como observador^[34]. A existência das relações adimensionais de Eddington entre constantes físicas representativas do Macro- e do Microcosmos, todas aparentemente convergindo para o número 10^{39} , indicaria uma "acidentalidade" muito baixa para nosso Universo. Se a Natureza, argumenta-se, não houvesse determinado esta extraordinária calibração de constantes físicas, e proporcionado por conseguinte certas condições de estabilidade para os sistemas físicos reais, o Homem não poderia ter vindo à existência — de modo que o Universo deve ser o que é, uma vez que o Homem existe. Diversas formulações do Princípio Antrópico similares à que enunciamos acima tem sido propostas na literatura^[123]; infelizmente, todavia, nem este programa nem qualquer outro, até agora, foi efetivamente capaz de engendrar uma racionalização completa sobre a ocorrência desses valores peculiares, que continuam a perturbar os físicos (sobre a atualidade dessa assertiva, vide o cap. 6).

Já em 1938, entretanto, Dirac produziria a primeira de uma série de propostas cosmológicas em que as relações adimen

sionais de Eddington suplementariam a TRG de Einstein na constituição de uma nova base para a Cosmologia^[33,124]. Observando que uma dessas relações envolve períodos de tempo (especificamente, a unidade atômica de tempo e a idade prevista do Universo), Dirac sugere o princípio de que, em qualquer época do Cosmos, as relações de Eddington devem coincidir - a chamada "Hipótese dos Grandes Números" (HGN). Assim, com o propósito de conciliar tais "coincidências" numéricas com a concepção de um Universo evolutivo, não-estacionário, torna-se necessário considerar a possibilidade de que pelo menos algumas das denominadas "constantes fundamentais" não sejam de fato constantes, mas sim variem de acordo com o tempo cósmico. Supondo ademais a estabilidade das grandezas microscópicas (as massas e cargas de partículas subatômicas e a constante de Planck h) e da velocidade da luz c , resulta uma teoria em que o fator de acoplamento com a interação gravitacional (a "constante de Newton" G) é variável segundo a época cósmica. A variação da "constante" gravitacional G , é claro, implica em profundas consequências cosmológicas^[65]; diversas outras abordagens modernas, baseadas em diferentes argumentações, irão redundar analogamente em modelos de teorias "G-variantes", como as teorias de Fierz^[125] e Jordan^[83,126], a teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke^[127] (fundada em considerações Machianas) e a teoria da ação-à-distância de Hoyle e Narlikar^[128], dentre outras^[129].

Numa reformulação posterior de sua proposta original^[130], Dirac procura reabilitar a então rejeitada teoria unificada de Weyl adaptando-a à sua concepção de uma cosmologia dos grandes números. Seu objetivo é também adequar a variação do fator G de corrente da HGN à descrição do campo gravitacional provida pela

TRG de Einstein, na qual G (ou, equivalentemente, a constante de Einstein k) é manifestamente constante. A teoria quântica, assinala ele, parece inviabilizar o uso de espaços de Weyl, uma vez que é possível definir um padrão atômico característico de comprimentos, pois como um relógio atômico mede tempos de uma maneira absoluta, tomando unidades em que $c = 1$ obtém-se um padrão absoluto de distâncias, em escala microscópica. Podemos então supor que, sob transporte paralelo, comprimentos de vetores expressos em tais unidades atômicas permanecerão invariantes, sendo dispensado o uso da liberdade de gauge das geometrias Weyliananas. Todavia, prossegue, a TRG envolve unidades de tempo oriundas de processos gravitacionais macroscópicos (como a periodicidade das órbitas planetárias, por exemplo). Pode-se então conceber a coexistência, na Natureza, de dois elementos de linha diferentes, digamos ds_A^2 e ds_E^2 , correspondendo a dois sistemas naturais de unidades - ou gauges - microscópicas e macroscópicas, os chamados sistemas atômico e de Einstein. Não há, em princípio, razão para supor que os padrões de tempo dos dois sistemas estejam permanentemente sincronizados; a geometria de Weyl torna-se assim o cenário natural para a introdução de um fator escalar $\beta(x)$ de conversão entre os gauges, resultando dessa modificação da teoria unificada de Weyl uma teoria escalar-tensorial da gravitação e do eletromagnetismo, com o fator $\beta(x)$ conformalmente acoplado ao escalar de curvatura de Weyl R (que assim comparece linearmente na Lagrangiana). As equações de Einstein são recuperadas, pois quando expressa em unidades gravitacionais G é constante; contudo, a estrutura de Weyl permite uma transformação para o gauge atômico, em cujo sistema de unidades G é uma função do tempo cósmico. Rosen^[131], recentemente, re

tomou esta "teoria de Dirac-Weyl" da gravitação e do eletromagnetismo, modificando-a pela introdução de uma segunda métrica de fundo, para assim obter uma correção do valor previsto por Dirac para a variação do fator G.

- Teoria Covariante de Escala: talvez a expressão mais ambiciosa dessa corrente de abordagens cosmológicas um tanto "pitagóricas" capitaneada por Dirac tenha sido, até agora, a chamada "teoria gauge-covariante" (ou covariante de escala) desenvolvida por Canuto e colaboradores [66]. Aqui uma função conforme $\beta(x)$ similar à de Dirac, mas diretamente ligada ao vetor de gauge de Weyl ω_α , é introduzida para permitir a correlação entre unidades atômicas e unidades de Einstein (segundo o espírito da teoria de Dirac-Weyl, mas sem pretender a unificação com o eletromagnetismo), de modo a que seja obtido um conjunto conformalmente covariante de equações de Einstein generalizadas, válidas em qualquer sistema de unidades e que portanto exibem, além da covariância de coordenadas usual da TRG, também uma covariância de escala ou de gauge. Devido à presença do fator conforme β (tal que $ds_E^2 = \beta^2 ds_A^2$) em associação com o vetor de gauge $\omega_\alpha = (-\ln \beta^2)_{,\alpha}$ que é um elemento básico da geometria, a estrutura do espaço-tempo resulta ser a de um WIST (e não Riemanniana). Em virtude da covariância de escala apresentada pela teoria, este aspecto não apresenta qualquer dificuldade, uma vez que em princípio pode-se sempre recalibrar o sistema de unidades, através de uma transformação de gauge, de modo a exprimir os resultados de observações de uma maneira Riemanniana. A teoria covariante de escala, assim, representa uma formulação bi-covariante da gravitação na qual se insere com naturalida

de a concepção dos grandes números de Dirac como uma regra para a fixação da correspondência entre unidades atômicas e gravitacionais, empregando elegantemente as propriedades das geometrias WIST, e que implica em modificações suaves, ainda que mensuráveis, dos resultados tradicionais em escala local da TRG, manifestas por exemplo numa variação secular das órbitas planetárias. A evidência negativa oferecida por um experimento aparentemente decisivo (envolvendo a variação da órbita de Marte^[132]), entretanto, representou um golpe quase fatal contra esta teoria.

3.5. WISTS COMO MODELOS VIÁVEIS PARA NOSSO COSMOS

Considerando o panorama de aplicações dos espaços de Weyl e Weyl-integrável que esquematizamos acima, observamos que seu emprego foi associado principalmente à aspiração por uma simetria ou princípio de invariância mais abrangente que englobasse, além da invariância frente a transformações de coordenadas usual da TRG, também uma invariância complementar de gauge ou de escala, permitindo assim a assimilação geométrica da gravitação e do eletromagnetismo, como na tentativa original de Weyl, ou a incorporação da HGN ao paradigma gravitacional da TRG, como nas abordagens de Dirac e Canuto. A busca de novas simetrias profundas na Natureza, de fato, é uma das motivações mais vigorosas para os avanços da pesquisa fundamental em nossa época impregnada pelas concepções unificadoras e harmônicas de Einstein; daí o entusiasmo despertado, na década de 60, pelas indicações de uma possível invariância conforme exibida pelos processos elementares em altas energias, como comentamos no capítulo 2. Entretanto, a posterior

verificação de fortes evidências de que vivemos num mundo que não é conformalmente invariante - ou seja, que os fenômenos físicos parecem depender de uma escolha particular de uma estrutura Riemanniana, de modo que transformações de escala dependentes de posição são em princípio observáveis, ao menos em escala macroscópica - retiraria assim a base fundamental de justificação de teorias conformalmente invariantes como as de Dirac-Weyl e Canuto.

Poderíamos talvez ser tentados, neste momento, a generalizar esse resultado e, tomando-o em conjunto com outras dificuldades e objeções, inferir apressadamente que em consequência o uso genérico de geometrias Weylianais aos problemas cosmológicos contemporâneos estaria igualmente prejudicado. Tal generalização, no entanto, se nos afigura precipitada e indevida, sendo a consequente conclusão claramente refutada pela consideração dos efeitos cosmológicos provindos da geração dinâmica de estruturas do tipo WIST através do emprego de acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e outros campos físicos - pois esse esforço de investigação, como pretendemos demonstrar ao longo do presente trabalho (caps. 4-7) nos permite asseverar a viabilidade física, no atual estado da arte, de modelos WIST de nosso Cosmos, não obstante a presumível evidência da não-invariância conforme das leis físicas.

De fato, antecipando por um momento os argumentos desenvolvidos nos próximos capítulos, quando o esquema variacional Lagrangiano que escolhemos para descrever processos interativos gravitacionais em escala cósmica acaba por resultar num sistema de equações dinâmicas compreendendo a especificação de uma configuração geométrica do tipo WIST (como é o caso dos esquemas não-mínimos que iremos considerar), desde o começo temos que lidar

com dois objetos geométricos básicos, a saber, o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ – empregado, como vimos, em medições de comprimentos – e uma função escalar $\phi(x)$, conectada ao vetor de gauge ω_α pela relação típica $\omega_\alpha = \phi_{,\alpha}$, e portanto empregada na medição de variações de comprimentos. A função ϕ pode ser descartada através de uma transformação da escala de unidades, tal como nas teorias conformes citadas acima, somente se obstáculos dinâmicos (como vínculos de consistência, por exemplo) não se fizerem presentes – do contrário, para que seja obtido um cenário consistente, a invariância conforme da teoria deve ser quebrada. Assim, transformações conformes de escala podem não ser eficazes para operar a redução de uma estrutura WIST gerada dinamicamente a uma estrutura Riemanniana (o que, todavia, de fato acontece se o campo ϕ for constante). A possibilidade de tal redução estrutural, portanto, está intimamente associada ao conjunto dinâmico satisfeito pelo particular processo gravitacional em questão, ou seja, depende fundamentalmente do desempenho dinâmico do campo ϕ em cada caso, e somente considerando exemplos de situações concretas (como nos capítulos seguintes) poderemos deliberar sobre o caráter conforme do respectivo modelo^[89]. Essa constatação torna manifesto um dos aspectos mais instigantes – e também mais controversos – relativos ao uso de modelos geométricos Weylianos: sua riqueza e complexidade estruturais.

Com efeito, inventariando e apreciando, de diferentes ângulos, as objeções historicamente significativas ao emprego de configurações geométricas do tipo Weyl, tanto Utiyama quanto Dirac e Rosen^[133] terminam por resumi-las em dois grupos básicos de argumentos:

(i) considerações envolvendo o problema da não-integrabilidade dos percursos fechados em geometrias de Weyl, nos moldes da crítica de Einstein;

(ii) ceticismo ou aberta postura crítica no que concerne à complexidade dos sistemas de equações dinâmicas resultantes dos modelos Weylianos, uma vez que para muitos este aspecto redundaria numa descrição excessivamente complexa e difícil, ou até mesmo não manejável, dos processos gravitacionais.

Ora, no caso das estruturas WIST dinamicamente geradas de que tratamos aqui a objeção de Einstein é naturalmente superada, pois como já observamos (seção 4) nas geometrias WIST o transporte de comprimentos num circuito é automaticamente integrável; por outro lado, de um ponto de vista um pouco menos ortodoxo a complexidade estrutural desses modelos, assinalada e lamentada pelo segundo grupo de opiniões, pode vir a representar um fator muito útil na elaboração de um novo quadro conceitual de fundo, abrangendo uma rica variedade de características físicas, que quase que certamente seria requerido por uma ampliação do escopo atual de investigações cosmológicas. Mais especificamente, se a partir de princípios físicos bem conhecidos e de técnicas costumeiras pudermos elaborar cenários de processos gravitacionais em estruturas WIST que dêem lugar, de maneira consistente, a modelos de Cosmos admissíveis dentro dos presentes limites observacionais (como será nosso objetivo no que se segue), então teremos obtido soluções de efetivo interesse cosmológico, ainda que as dificuldades computacionais envolvidas na derivação de tais soluções constituam um obstáculo suplementar a ser superado.

Assim, a geração dinâmica de estruturas WIST, concomitante à descrição de processos de interação entre a gravitação e outros campos físicos por meio de acoplamentos não-mínimos, propicia um novo domínio de intercâmbio entre o comportamento da matéria e as características da estrutura espatiotemporal que pode ser explorado para a construção de modelos cosmológicos viáveis, ou seja, compatíveis com a observação, e que permite a incorporação dos resultados tradicionais da TRG a um esquema mais abrangente envolvendo uma estrutura matemática e um contexto ideativo mais ricos [134,135]. Como assinalamos anteriormente (seção 1.3), as únicas soluções cosmológicas da TRG que foram, de alguma maneira, "verificadas", são as soluções de Friedman e de Schwarzschild; a obtenção dessas mesmas soluções, numa estrutura WIST engendrada dinamicamente por um acoplamento não-mínimo, deverá portanto resultar na consolidação de uma cosmologia WIST igualmente "completa" e merecedora de um estatuto conceitual se não idêntico, pelo menos equivalente ao do MP.

Dada a escassez de evidências determinantes, os modelos WIST que elaboramos presentemente equiparam-se, em termos observacionais, aos modelos Riemannianos costumeiros (ver cap. 7); assim, somente uma presumível definição experimental a médio ou longo prazo é que poderá determinar a efetiva viabilidade desses modelos - e, de fato, de quaisquer outros modelos cosmológicos contemporâneos, inclusive o MP. Todavia, o enriquecimento estrutural conferido pelo uso de estruturas WIST proporciona, além disso, a cogitação de diversas abordagens inéditas e atraentes, como por exemplo a possível geração de largas anisotropias primordiais (ou seja, de um largo tensor de Weyl) sem que, necessariamente, os

termos (Riemannianos) de curvatura e as grandezas associadas ao fluido material se tornem divergentes^[136]; ou a conjectura de regimes assintóticos em que a função Φ assumira um valor constante, o que corresponderia a regiões em que a estrutura do espaço-tempo é Riemanniano^[35,93]. Podemos assim conceber cenários em que domínios cerrados de geometria Riemanniana se relacionariam assintoticamente através de uma seqüência de estruturas WIST - ou, reciprocamente, panoramas em que domínios WIST estão imersos em uma estrutura de fundo Riemanniana.

Dando asas à imaginação - o que não seria absolutamente estranho ao espírito ousadamente especulativo de muitas das abordagens contemporâneas - poderíamos também admitir, à maneira de Utiyama, que tais domínios WIST tivessem relevância em escala microscópica. Assim, ainda que a invariância conforme fosse violada em escala macroscópica, domínios microscópicos localizados do tipo WIST ou Weyl, embebidos em um quadro de fundo Riemanniano, estariam aptos a exibí-la. Essas "bolhas de Weyl" constituiriam domínios microscópicos da geometria não-Riemanniana semelhantes aos "mini-universos" ("Friedmons") de Markov^[73,137], ou às "bolhas de vazio" consideradas em algumas concepções atuais da teoria quântica da gravitação^[50,138], que poderiam ser associados a novas propriedades do mundo físico de modo a possibilitar um novo modelo de organização básica dos fenômenos naturais^[135]. Essas cogitações são ilustrativas da amplitude do campo especulativo entreato pelo uso de acoplamentos não-mínimos em abordagens cosmológicas.

Em virtude dessas considerações, optamos no presente trabalho por admitir que estruturas WIST são aptas para fundamen

tar o desenvolvimento de modelos plausíveis para nosso Cosmos; a partir dessa premissa, procuraremos nos capítulos seguintes sintetizar e explorar alguns dos aspectos de interesse cosmológico oferecidos pelo acoplamento não-mínimo de campos vetoriais e de campos escalares com o campo gravitacional, tendo como objetivo genérico concorrer para a elaboração de uma Cosmologia WIST (ou, mais a propósito, "não-mínima") consistente, realística e fisicamente admissível.

CAPITULO IV

ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE CAMPOS VETORIAIS COM A GRAVITAÇÃO

4.1. INTRODUÇÃO

A observação experimental da influência da gravitação sobre o comportamento dos fótons (o chamado encurvamento gravitacional do caminho luminoso, que Eddington verificou memoravelmente em 1919^[139]) constituiu sem dúvida uma das mais notáveis predições da TRG, inaugurando o moderno contexto observacional para a descrição dos fenômenos interativos entre a gravitação e o eletromagnetismo na Cosmologia. Desde então, numerosas teorias e experimentos têm buscado abordar, mercê dos princípios da Eletrodinâmica e dos desenvolvimentos da TRG, os processos de interação e os efeitos recíprocos entre os campos eletromagnético e gravitacional, procurando compreender como as interações eletromagnéticas são afetadas quando descritas num espaço-tempo curvo e, inversamente, quais são os efeitos da força eletromagnética sobre o campo gravitacional.

Efeitos gravitacionais sobre o eletromagnetismo, de fato, têm sido exaustivamente estudados. Pode-se demonstrar, por exemplo, que a influência da gravitação pode ser tomada como equi

valente à presença de um meio material caracterizado por constantes dielétricas ϵ, μ que dependem somente da geometria (ou seja, $\epsilon = \epsilon[g_{\mu\nu}]$ e $\mu = \mu[g_{\mu\nu}]$), o que representa uma resposta microscópica ao espaço curvo de fundo^[140]. Ao longo da direção contrária de inquérito, muitas configurações espaciotemporais de interesse, quer localizadas (geons^[141]) quer globais (soluções cosmológicas^[103]), podem ser geradas a partir da energia de um campo de fótons. Sem embargo dessas considerações, contudo, o conjunto de equações que governa o sistema geminado gravitação-eletromagnetismo pode estar ainda em forma incompleta, pois todavia não conhecemos, por exemplo, o comportamento real de campos elétricos e magnéticos na presença de campos gravitacionais intensos; ou, por outro lado, tampouco temos comprovada a estrita validade da forma forte do Princípio de Equivalência (e, em decorrência, a do princípio de acoplamento mínimo - vide seção 2.2) em tais condições. Essa ambigüidade permitiu a elaboração de diversas conjeturas sugerindo que, em determinadas situações ou estágios do desenvolvimento cósmico, poderiam surgir fenômenos críticos e comportamentos não-lineares do campo eletromagnético drasticamente destintos dos processos bem conhecidos em condições habituais; ou, como assinalamos na seção 1.3, que a descrição da força gravitacional e da geometria do espaço-tempo fundamentada na TRG necessitaria ser suplementada, no caso de regimes intensos, por teorias alternativas da interação gravitacional.

No domínio da Eletrodinâmica, diferentes motivações físicas foram levantadas na literatura para o estudo de teorias não-lineares do campo eletromagnético. O tradicional problema das divergências na origem ($r=0$) do modelo clássico do elétron inspi-

rou Born e Infeld^[142], dentre outros, a produzir uma teoria não-linear do eletromagnetismo a partir da introdução ad hoc de um comprimento fundamental (o "raio" mínimo do elétron) com o objetivo de atender ao "princípio da finitude" (grandezas físicas significativas não devem divergir) e proporcionar assim um modelo satisfatório do elétron, facilitando a remoção dos infinitos que obstavam uma quantização apropriada dos fenômenos eletromagnéticos. De modo análogo, a introdução de efeitos quânticos conduziu à consideração de teorias não-lineares em que o comportamento do campo se alteraria bruscamente nas proximidades do elétron^[143]. Outros autores, ainda, interessaram-se pelo aspecto da quebra de invariância do gauge eletromagnético (a liberdade de fixação por transformações de gauge do potencial A_μ , manifesta na teoria de Maxwell - vide seção 2.2) exibido por diversos modelos não-lineares^[144]. Nossa particular conexão com este tema, porém, repousa na moderna constatação de que cenários não-lineares resultam naturalmente da adoção de acoplamentos do tipo não-mínimo entre o eletromagnetismo (ou campos vetoriais) e a gravitação - o que iremos ilustrar com exemplos concretos em breve.

No que tange a propostas de modificação dos atributos convencionais da gravitação, mencionamos nos capítulos 1 e 3 algumas das variadas teorias alternativas que, por diversas razões, propõem-se a complementar a TRG na descrição de situações peculiares do campo gravitacional, e que muitas vezes redundam na violação da forma forte do Princípio de Equivalência. Verificamos assim que diversas argumentações correntes parecem concordar na conveniência de ampliar-se o escopo tradicional de representação dos processos interativos eletrogravitacionais, seja através da

suposição de não-linearidades nas equações do eletromagnetismo, seja a partir de princípios alternativos para a descrição da gravitação e do espaço-tempo, visando aprofundar a atual compreensão acerca da natureza das duas interações fundamentais de longo alcance e seus possíveis papéis no desenrolar da história cósmica.

A promoção de acoplamentos não-mínimos entre campos eletromagnéticos e gravitacionais pode assim ser encarada como um procedimento original e abrangente de caracterização dos processos de interação eletrogravitacional, objetivando viabilizar a elaboração de um programa amplo e sistematizado de abordagem das questões envolvidas na descrição destes processos e na consideração de possíveis consequências cosmológicas. De fato, a adoção de acoplamentos do tipo não-mínimo não apenas possibilita a incorporação natural de termos não-lineares às equações habituais do eletromagnetismo, como também torna admissível, em virtude da influência dinâmica recíproca do campo eletromagnetismo sobre as propriedades do campo gravitacional (típica deste modo de acoplamento), a construção de cenários geométricos exibindo comportamentos gravitacionais bem mais complexos que os da TRG convencional, não obstante estarem de acordo com a forma fraca do Princípio de Equivalência (vide seção 2.3).

Por exemplo, como argumentamos antecipadamente no capítulo 2 e iremos demonstrar em seguida, por meio do uso de acoplamentos não-mínimos é possível engendrar situações não-lineares em que um campo de fótons ordinários pode ocasionar a violação dos requisitos dos teoremas da singularidade, dando lugar a soluções cósmicas tipo FRW não-singulares representando universos eternos, sem princípio nem fim. Por outro lado, quando lançamos

mão do método variacional de Palatini, encontramos uma estrutura geométrica do tipo WIST dinamicamente associada ao comportamento deste campo de fótons - o que resultará na obtenção de soluções cosmológicas num WIST manifestando alguns aspectos bastante peculiares. A grande complexidade das teorias assim obtidas é contornada pela escolha de ansätze simples.

Desse modo, ainda que o programa de abordagens não-mínimas que iremos seguir deva ser tomado tão-somente como uma primeira aproximação a uma teoria mais realística das relações entre as interações fundamentais, ainda por estabelecer, acreditamos estar suficientemente justificada nossa opção de eleger o princípio do acoplamento não-mínimo como o eixo diretor de nossas investigações, e empreender a exploração das variadas possibilidades conceituais e das ricas estruturas dinâmicas por ele oferecidas.

Assim, principiaremos o roteiro de nossas indagações acerca dos efeitos cosmológicos associados ao emprego de acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e outros campos físicos pela consideração, ao longo deste capítulo, de modelos em que campos vetoriais (e.g., o campo eletromagnético) se encontram acoplados conformalmente (vide seção 2.3) com a gravitação. Os primeiros resultados relevantes para a implementação de nosso "programa cosmológico WIST" consistem na apresentação de duas novas classes de soluções cosmológicas em estruturas WIST, do tipo FRW e do tipo estático com simetria esférica, cujas características discutiremos em detalhe.

4.2. FÓTONS NÃO-LINEARES E UNIVERSOS NÃO-SINGULARES

Consideremos a teoria do acoplamento conforme de um campo vetorial $A_\mu(x^\alpha)$ com a gravitação expressa pela Lagrangiana não-mínima [145]

$$L_{NM} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta R A_\mu A^\mu + L_{mat} \right], \quad (4.2.1)$$

onde distinguimos o termo de Einstein-Hilbert $1/k R$ (eq. 2.1.3) e o termo de Maxwell $-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ (eq. 2.2.15) compondo a representação "mínima" (eq. (2.2.17) do acoplamento eletrogravitacional, e também o termo de acoplamento conforme $\beta R A_\mu A^\mu$ eq. (2.3.11), sendo β uma constante adimensional. Como é usual, temos $F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ eq. (2.2.13), k é a constante de Einstein, R é o escalar de curvatura da variedade eq. (3.2.43) e L_{mat} é um termo de matéria, minimalmente acoplado, eq. (2.1.5).

Supondo uma estrutura Riemanniana do espaço-tempo a priori determinada, a variação à Lagrange (tomando o vetor A_μ e a métrica $g_{\mu\nu}$ como variáveis independentes) da Lagrangiana eq. (1) resulta nas seguintes equações de movimento [146]:

$$[\delta A_\mu]: \quad F^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = -\beta R A^\mu, \quad (4.2.2)$$

$$[\delta g^{\mu\nu}]: \quad \left(\frac{1}{k} + \beta A^2 \right) G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta R A_{\mu} A_{\nu} + \beta (\square A^2) g_{\mu\nu} - \beta A^2 \parallel_{\nu} - T_{\mu\nu} (mat) \quad (4.2.3)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein eq. (3.2.45), $T_{\mu\nu} (mat)$ é o tensor momentum-energia usual da matéria eq. (2.2.9), $E_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum de Einstein-Maxwell do acoplamento mínimo (eq. 2.2.30), \square é o operador

de Laplace generalizado (eq. (2.2.6), a dupla barra indica derivação covariante num espaço de Riemann eq. (3.2.27), e onde finalmente tomamos $A^2 = A_\mu A^\mu$.

Observemos algumas das características marcantes deste sistema de equações dinâmicas: primeiramente, constatamos que tanto a equação de Maxwell quanto a de Einstein da formulação mínima eqs. (2.2.18 e 2.2.19) são substancialmente modificadas. A equação de Maxwell adquire um termo não-linear, proporcional ao escalar de curvatura R , que implica na quebra da invariância de calibre da teoria, e que pode ser interpretado como representando uma "massa de repouso" de origem cosmológica para o campo A_μ . Supondo ademais a presença de cargas externas, temos de acrescentar à eq. (2) um termo de corrente expresso por um vetor $J_{\text{ext}}^\mu(x)$; nesse caso, a eq. (2) se torna

$$F^{\mu\nu} \parallel_\nu = -\beta R A^\mu + J_{\text{ext}}^\mu. \quad (4.2.4)$$

Tomando a divergência dessa relação temos

$$J_{\text{ext}}^\mu \parallel_{\mu} = \beta (R A^\mu) \parallel_{\mu}, \quad (4.2.5)$$

de modo que, se a divergência do termo $(R A^\mu)$ não se anula, não há conservação de carga. Nesse caso, o número de partículas carregadas criadas depende do valor do escalar de curvatura R — a "massa cosmológica" do fóton — e só ocorrerá criação de cargas em regiões em que R for não-nulo. Os efeitos de uma quebra da conservação de carga em escala cosmológica foram discutidos, dentre outros, por Lyttleton e Bondi [147] e por Hoyle [148].

Tomando agora o traço da equação de Einstein modificada eq. (3), encontramos

$$\frac{1}{k} R = T_{\text{mat}} - 3\beta \square A^2, \quad (4.2.6)$$

onde $T_{\text{mat}} = T_{\mu}^{\mu}(\text{mat})$ é o traço do tensor energia-momentum da matéria. Assim, substituindo na eq. (4), obtemos a relação

$$F^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 3k\beta^2 (\square A^2) A^{\mu} - k\beta T_{\text{mat}} A^{\mu} + J_{\text{ext}}^{\mu}, \quad (4.2.7)$$

que exhibe explicitamente o caráter não-linear da teoria. De fato, este tipo de comportamento não-linear pode ser equivalentemente deduzido (com exceção do termo de T_{mat} , é claro) de uma Lagrangiana puramente eletromagnética da forma

$$L_{\text{NL}} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda (A^{\mu} A_{\mu} \parallel_{\alpha})^2 \quad (4.2.8)$$

como se pode facilmente verificar [145].

Por sua vez, a partir da eq. (7), a equação de onda para o potencial vetor A_{μ} é dada por

$$\square A^{\mu} + R^{\mu}_{\alpha} A^{\alpha} - (A^{\alpha} \parallel_{\alpha}) \parallel^{\mu} = 3k\beta^2 (\square A^2) A^{\mu}, \quad (4.2.9)$$

na ausência de matéria e correntes ($T_{\mu\nu}(\text{mat})=0$, $J_{\text{ext}}^{\mu}=0$). Reconhecemos, nos dois primeiros termos, o operador de onda de De Rham em espaços curvos. A natureza manifestamente não-linear do campo A_{μ} nesse esquema é novamente evidenciada pelos termos restantes [83,149]

Passemos então a considerar a descrição do campo gravitacional proporcionada pela equação de Einstein modificada eq. (3). Observamos de imediato uma notável característica, típica dos acoplamentos não-mínimos, e representando uma distinção substancial com relação ao esquema convencional da TRG: a renormalização da constante gravitacional k , em virtude do fator $(+\beta A^2)$ provindo do termo de acoplamento conforme. É precisamente este aspecto he

terodoxo, na verdade, que irá possibilitar a violação das condições dos teoremas da singularidade (especificamente, da condição de energia eq. (2.3.13) por um "gás de fótons" ordinário^[150], vide seção 2.3). Com efeito, reescrevendo a (eq. (3) na forma canônica, obtemos

$$G_{\mu\nu} = - k_{ren} T_{\mu\nu}^{eff} \quad (4.2.10)$$

onde a "constante gravitacional" renormalizada k_{ren} é dada por

$$k_{ren} = \left(\frac{1}{k} + \beta A^2 \right)^{-1}, \quad (4.2.11)$$

e $T_{\mu\nu}^{eff}$ compreende todas as demais contribuições, do campo e da matéria, presentes no lado direito da eq. (3).

Verificamos assim uma das mais notáveis consequências da adoção de acoplamentos não-mínimos: a dependência da constante "efetiva" da gravitação, k_{ren} , com relação ao comportamento do campo A_μ (ou, se se quiser, do "campo escalar" A^2). Em princípio, de acordo com o regime do campo A_μ (e com o sinal de β), é possível até mesmo a obtenção de uma "constante" negativa ($k_{ren} < 0$), o que equivaleria a uma força gravitacional repulsiva! Veremos, no próximo capítulo, um mecanismo similar, envolvendo no caso campos escalares, de geração de condições em que a interação gravitacional se torna repulsiva (antigravidade); contentemo-nos, no momento, por comprovar que, para um dado conjunto de observadores tipo-tempo assinalados por um campo de velocidades $\{V_\mu\}$, a condição de energia eq. (2.3.12),

$$T_{\mu\nu}^{eff} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (4.2.12)$$

poderá não mais implicar, através da equação de Einstein, a validade do requisito ($G_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0$) dos teoremas da singularidade (vide seção 2.3), o que viabiliza a investigação, neste contexto, de soluções cosmológicas não-singulares. Como também, em virtude do comportamento não-linear do campo A_μ , o tensor efetivo $T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ pode ser interpretado como uma "fonte não-linear" da curvatura, concluimos que o cenário interativo proporcionado pela teoria não-mínima acima descrita ultrapassa em muito os limites tradicionais do MP [151].

- Universos Eternos: com o objetivo de estabelecer um roteiro de cálculo para nossas deduções posteriores, ilustraremos nossa assertiva acerca da superação dos teoremas da singularidade no caso de cenários não-minimalmente acoplados pela apresentação de uma classe de soluções cósmicas tipo FRW homogêneas e isotrópicas, mas explicitamente não-singulares, do sistema conjugado campo vetorial-gravitação descrito pelas eqs. (2 e 3), representando universos (populados por fótons comuns) "eternos", sem princípio nem fim [145, 150].

Consideremos, na ausência de matéria e correntes externas ($T_{\mu\nu}=0, J_{\text{ext}}^\mu=0$), o ansatz de que o potencial $A_\mu(x^\alpha)$ seja dado por

$$A_\mu = (A(t), 0, 0, 0), \quad (4.2.13)$$

o que corresponde a um campo de fótons "longitudinais" ordinários. Nesse caso, temos de imediato que

$$F_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2.14)$$

Observemos, no entanto, que devido aos termos provindos do acoplamento não-mínimo a anulação de $F_{\mu\nu}$ não significa a consequente nulidade da energia do campo A_μ , como no caso usual (mínimo). A eq. (2) então implica a restauração da simetria de gauge nesse caso, pois

$$R = 0, \tag{4.2.15}$$

o que por sua vez, pela (eq. 6), redundando em

$$\square A^2 = 0. \tag{4.2.16}$$

Definindo

$$\Omega(t) \equiv \left(\frac{1}{k} + \beta A^2(t)\right) \tag{4.2.17}$$

verificamos a partir das eqs. (15,16) que o sistema não-linear original eqs. (2,3) pode ser escrito como

$$\square \Omega = 0, \tag{4.2.18a}$$

$$R_{\mu\nu} = - \frac{\Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu}}{\Omega} \tag{4.2.18b}$$

Concluimos então que nosso "gás de fótons longitudinais" é efetivamente a fonte responsável pela curvatura do espaço-tempo [83].

Procuremos agora uma solução espacialmente homogênea e isotrópica do sistema resultante eqs. (18a,b). Adotando coordenadas esféricas (t, χ, θ, ϕ) , o elemento infinitesimal de linha de uma geometria FRW homogênea e isotrópica é dado por [26]

$$ds_{FRW}^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - S^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \tag{4.2.19}$$

onde o "raio universal" $S(t)$ é o único parâmetro livre.

Aplicando técnicas simples e bem-conhecidas de cálculo, é possível demonstrar que, nesse caso, o sistema eqs. (18a,b) se reduz a

$$\square \Omega = \ddot{\Omega} + 3\dot{\Omega} \frac{\dot{S}}{S} = 0, \quad (4.2.20)$$

$$3 \frac{\ddot{S}}{S} = - \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}, \quad (4.2.21a)$$

$$\frac{\dot{S}}{S} + 2 \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 - \frac{2\sigma''}{S^2 \sigma} = - \frac{\dot{S}}{S} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}, \quad (4.2.21b)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} + 2 \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 - \frac{1}{S^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) = - \frac{\dot{S}}{S} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}, \quad (4.2.21c)$$

(onde o ponto e a plica representam diferenciações simples em relação, respectivamente, às coordenadas t e χ). As eqs. (21b, c), manifestando a homogeneidade da geometria, implicam que

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} = 0, \quad (4.2.22)$$

uma equação bem conhecida com soluções

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{(seção Euclidiana)} & (4.2.23a) \\ \text{sen} \chi & \text{(seção fechada)} & (4.2.23b) \\ \text{sh} \chi & \text{(seção aberta)} & (4.2.23c) \end{cases}$$

Colocando

$$\epsilon = - \frac{\sigma''}{\sigma}, \quad (4.2.24)$$

verificamos que, respectivamente, $\epsilon = (0, +1, -1)$. Assim, temos agora o sistema

$$\ddot{\Omega} + 3\frac{\dot{\Omega}}{S} = 0, \quad (4.2.25a)$$

$$3\frac{\dot{\Omega}}{S} = -\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}, \quad (4.2.25b)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} + 2\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{2\varepsilon}{S^2} = -\frac{\dot{S}}{S} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}. \quad (4.2.25c)$$

Integrando a eq. 25a), obtemos a relação

$$\dot{\Omega} = \text{const. } S^{-3}. \quad (4.2.26)$$

No caso $\varepsilon = -1$ (seção aberta, correspondendo a $\sigma(\chi) = \text{sh } \chi$ na eq. (19)), uma simples inspeção mostrará que, fazendo $\beta = -1$ (de modo que $\Omega = (\frac{1}{K} - A^2)$), a solução de Novello-Salim-Heintzmann (solução NSH),

$$S(t) = \sqrt{t^2 + p^2} \quad (4.2.27a)$$

$$A^2(t) = \frac{1}{K} \left(1 - \frac{t}{S}\right) \quad (4.2.27b)$$

satisfaz o sistema desejado (eqs. 25a, 25b e 25c), sendo p uma constante que mede o valor mínimo do raio universal $S(t)$. Se $p=0$, temos $S=t$, $A^2=0$ — o que corresponde ao espaço-tempo vazio de Minkowski, escrito no sistema (não-inercial) de coordenadas de Milne-Schücking. Quando $p \neq 0$, é trivial a construção de modelos que não exibem singularidade, e que portanto poderiam ser infinitamente antigos — ou "eternos". Ao contrário do MP singular, mesmo no momento de maior contração universal (em $t = 0$) não há divergências no tensor momentum-energia associado ao gás de fótons, e assim as grandezas correspondentes da curvatura permanecem também sempre finitas [35].

É curioso assinalar que esta mesma forma de dependência funcional não-singular do raio universal com relação ao tempo cósmico, $S(t) = \sqrt{t^2 + \text{const.}}$, foi obtida por Melnikov e Orlov^[152] no âmbito da investigação de efeitos quânticos do vácuo, representados por meio de um campo escalar $\phi(x)$ sem massa conformalmente acoplado à gravitação numa geometria FRW aberta ($\epsilon = -1$), e sujeito a um mecanismo de quebra espontânea de simetria do estado fundamental (vácuo); e também por Gasperini^[71], no contexto inteiramente diverso de uma teoria em que a invariância de Lorentz local (ou seja, a simetria sob o grupo local de invariância $SO(3)$) é violada no limite de energias muito altas de um modelo FRW fechado ($\epsilon = 1$). Segundo Zeldovich^[153], esta forma de dependência temporal da função $S(t)$ é mais adequada que o resultado convencional do MP, por admitir naturalmente o espaço vazio de Minkowski como limite assintótico.

As propriedades dessa classe de "universos eternos" NSU podem ser melhor visualizadas se fizermos apelo à teoria dos sistemas dinâmicos^[154], empreendendo uma análise das equações genéricas de movimento (eqs. 25b, 25c) no caso de métricas FRW. Fazendo $x = 3 \frac{\dot{S}}{S}$, $y = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}$, estas equações se reduzem a um sistema planar autônomo,

$$\dot{x} = -\frac{1}{3}x^2 + xy, \quad (4.2.28a)$$

$$\dot{y} = -y^2 - xy. \quad (4.2.28b)$$

Os aspectos característicos deste sistema dinâmico podem ser apreciados traçando-se as curvas integrais correspondentes num diagrama de fase projetado sobre a esfera de Poincaré (on

de compatificamos todo o espaço de fase (x,y) como na figura (4.2.1) abaixo:

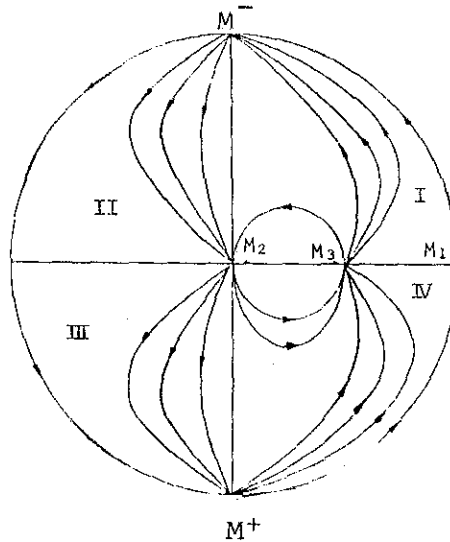


Fig. 4.2.1 - Gráfico de fase compatificado do sistema fóton-gravitação não minimalmente acoplado correspondente às (eqs 25). As soluções NSH pertencem aos quadrantes II e III. Os pontos M^+ e M^- representam o espaço-tempo de Minkowski.

Algumas considerações acerca deste diagrama dinâmico: as soluções NSH pertencem aos quadrantes II e III. Acompanhando o parâmetro temporal t ao longo do eixo da figura, verificamos que cada solução NSH principia coincidente com o espaço-tempo vazio de Minkowski no ponto M^- (que corresponde ao infinito passado, $(t = -\infty)$), alcança seu estado de contração máxima (caracterizado pelo valor do raio mínimo p) na origem $(t=0)$, e então identifica-se novamente, no infinito futuro $(t = +\infty)$, ao espaço de Minkowski em M^+ . Assim, podemos dizer que segundo esses modelos o Universo se origina do vazio de Minkowski no infinito passado, contrai-se até o valor mínimo P do raio universal - e portanto não exhibe singularidade - e a seguir se expande indefinidamente até coincidir novamente com o vazio Minkowskiano no infinito futuro^[89].

De acordo com o valor da constante p (um parâmetro arbitrário extra que dispomos para fixar, por exemplo, a taxa de desaceleração da expansão cósmica), essa fase expansiva poderá ser tão semelhante a descrição convencional do MP quanto se deseje (excluída, é claro, a singularidade inicial). Desse modo, adotando o comprimento de Planck $L_p \approx 10^{-33}$ cm como valor do raio mínimo p , Melnikov e Orlov obtêm resultados para o desvio máximo para o vermelho, para o parâmetro de desaceleração e para a idade da presente fase expansiva que são consistentes com os dados observacionais [35, 152].

Todavia, devido à fase anterior de contração, o Universo poderia ser infinitamente antigo [25]. Essa longevidade ilimitada levanta toda uma série de questões sem paralelo no contexto do MP explosivo. Por exemplo, o problema da produção de entropia: como poderia a matéria, num tal universo eterno, subsistir organizadamente depois de uma fase infinitamente longa de contração sem haver desaparecido, desde há muito, coagulada em buracos negros? Do mesmo modo, no terreno filosófico, são tão abrangentes e peculiares as consequências de um Cosmos eterno (poderiam a Vida — ou mesmo a Inteligência — serem infinitamente arcaicos?) que parecem requerer a elaboração de um programa inteiramente original de abordagens cosmológicas para que possam ser devidamente apreciadas [19].

Retornando à análise da fig. (1), somos tentados a fazer a identificação dos espaços de Minkowski representados por M^- e M^+ . Embora essa identificação não seja livre de ambigüidades, poderíamos nesse caso interpretar o diagrama como expressando um Universo eterno cíclico, com períodos de duração infinita, começando como uma flutuação do vácuo de Minkowski e esvaindo-se

no vácuo Minkowskiano mais uma vez, e assim sucessivamente. Para completar nossos comentários, mencionemos o fato de que outras soluções (exibindo singularidade no ponto M_3) do sistema dinâmico (eq. 28), interessantes por si mesmas, podem ser encontradas nos quadrantes resmanescentes^[155].

Concluimos assim a desejada demonstração de que um campo ordinário de fótons, não-minimalmente acoplado à gravitação, permite a obtenção de soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas, mas não-singulares, alternativas à descrição usual fornecida pelo MP. Nosso próximo objetivo, nas duas seções seguintes, será o de proceder à derivação de soluções análogas, tipo FRW, desse mesmo cenário eletrogravitacional não-mínimo, mas já agora (mercê da aplicação do método de Palatini) associado a uma estrutura geométrica do tipo WIST. O exame dessa teoria não-mínima de processos eletrogravitacionais num WIST, com efeito, conduz a uma classe de soluções cósmicas exibindo a separação dinâmica de um certo campo "escalar" cósmico (especificamente, o componente temporal do potencial A_μ), o qual resulta, em consequência, por ser inteiramente indeterminado. Desde já, frisemos que não estamos proclamando ser tal indeterminação uma propriedade geral dos sistemas gravitacionais; não obstante, mostraremos no que se segue que é possível encontrar uma classe especial de configurações nas quais a fonte da curvatura da estrutura métrica do espaço-tempo é uma função escalar de origem inacessível - como se uma "constante cosmológica" localmente distinta, e de proveniência ignorada, fosse atribuída a cada ponto do espaço-tempo (vide cap. 5). Por outro lado, verificaremos que a coerência interna do conjunto de equações dinâmicas em questão nos impede de procurar atribuir es

se aspecto intrigante do modelo simplesmente a um tratamento dinâmico impróprio, e assim facilmente rejeitável por razões de consistência.

Tal peculiaridade nos induziu muito naturalmente a denominar essa classe de soluções tipo FRW num WIST de "Universos Marionete" [156].

4.3. VARIACÃO À PALATINI: UNIVERSOS MARIONETE

Consideremos novamente a teoria não-mínima da interação eletrogravitacional proporcionada pela Lagrangiana (eq. 2.1),

$$L_{NM} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta R A_{\mu} A^{\mu} + L_{mat} \right]. \quad (4.3.1)$$

Como vimos na seção 2.4, na ausência ($\beta=0$) do termo de acoplamento não-mínimo, a variação à Palatini ($g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ tomados como variáveis geométricas independentes) dessa Lagrangiana conduz à caracterização de uma estrutura Riemanniana para o espaço-tempo e às equações de Einstein e de Maxwell habituais da TRG. Entretanto, quando admitimos o acoplamento não-mínimo ($\beta \neq 0$), a aplicação do método conduz a uma teoria não-linear combinada, do eletromagnetismo e da gravitação, numa estrutura geométrica WIST - como demonstraremos em seguida [96].

- Variação à Palatini de L_{NM} : numa variedade afim genérica, não determinada a priori, variando com respeito às variáveis independentes ($\Lambda_{\mu}, g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$) a ação correspondente à Lagrangiana (eq.1), temos formalmente

$$\delta \Lambda_{NM} = \delta \left[L_{NM} d^4 x = \int d^4 x \left(\frac{\delta L_{NM}}{\delta A_\mu} \cdot \delta A_\mu + \frac{\delta L_{NM}}{\delta g^{\mu\nu}} \cdot \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta L_{NM}}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha} \cdot \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) \right] = 0. \quad (4.3.2)$$

As equações de movimento obtidas com respeito às variações independentes de cada variável são as seguintes:

$$[\delta A_\mu]: \quad F^{\mu\nu} \Big|_V = -\beta R A^\mu, \quad (4.3.3)$$

reproduzindo a eq. (2.2); no caso de incluirmos cargas ou correntes externas, devemos acrescentar um termo de corrente $J_{\text{ext}}^\mu(x)$, tal como na eq. (2.4).

$$[\delta g^{\mu\nu}]: \quad \Omega G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta R A_\mu A_\nu - T_{\mu\nu}(\text{mat}), \quad (4.3.4)$$

onde, a exemplo da eq. (2.17), fizemos

$$\Omega(x) = \left(\frac{1}{K} + \beta A^2(x) \right), \quad (4.3.5)$$

sendo $A^2 = A_\mu A^\mu$, e onde o tensor energia momentum $T_{\mu\nu}(\text{mat})$ representando a matéria (minimalmente acoplada) é dado pela fórmula variacional [157] eq. (2.2.9),

$$\delta \int \sqrt{-g} L_{\text{mat}} d^4 x = \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu}(\text{mat}) \delta g^{\mu\nu} d^4 x. \quad (4.3.6)$$

$$[\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha]: \quad [(\sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu});_\alpha - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} \Omega g^{\lambda\mu});_\lambda \delta_\alpha^\nu - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} \Omega \lambda^{\nu\lambda});_\lambda \delta_\alpha^\mu] \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0, \quad (4.3.7)$$

expressão que, recordando o desenvolvimento realizado na seção 2.4 para a obtenção da eq. (2.4.10) se reduz à relação

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\mu} = g_{\mu\nu} (-\ell n \Omega)_{,\alpha}. \quad (4.3.8)$$

Este resultado, de acordo com a eq. (3.3.24), efetivamente caracteriza uma estrutura geométrica do tipo WIST, sendo o vetor de gauge ω_{α} dado por

$$\omega_{\alpha} = (-\ell n \Omega)_{,\alpha}. \quad (4.3.9)$$

Consideremos alguns aspectos relevantes do sistema de equações de movimento resultante, composto pelas eqs. (3,4,8) acima. A eq. (8) demonstra que a estrutura geométrica da variedade é de modo natural do tipo WIST, em virtude do acoplamento não-mínimo; por conseguinte, a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ (vide eq. 3.2.30)) conterá termos dependentes do vetor de gauge ω_{α} dado pela eq. (9) e, portanto, dependentes do potencial A_{μ} , através do fator Ω . Esta interrelação dinâmica entre o regime de atividade do campo A_{μ} e a geometria da variedade (e por conseqüência também as propriedades do campo gravitacional), proporcionada pelo acoplamento não-mínimo, torna-se mais transparente quando examinamos as equações de movimento análogas às equações de Maxwell e de Einstein na presente teoria, eqs. (3,4). Recordando as expressões assumidas pelas grandezas da curvatura num espaço de Weyl eqs. (3.2.44, 46) podemos reescrever estas equações de modo a explicitar as componentes puramente Riemannianas:

$$R^{\mu\nu}{}_{||\nu} = -\beta (\bar{R} - 3\omega_{\alpha}{}^{||\alpha} + \frac{3}{2} \omega_{\alpha} \omega^{\alpha}) A^{\mu}, \quad (4.3.10a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} G_{\mu\nu} = & -E_{\mu\nu} - \beta (\bar{R} - 3\omega^\alpha{}_{||\alpha} + \frac{3}{2} \omega_\alpha^\omega{}^\alpha) A_\mu A_\nu - T_{\mu\nu}[\text{mat}] - \Omega [-\frac{3}{2} \omega_\mu{}_{||\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \omega_\nu{}_{||\mu} - \frac{1}{2} \omega_\mu^\omega{}_\nu + g_{\mu\nu} (\omega^\alpha{}_{||\alpha} - \frac{1}{4} \omega_\alpha^\omega{}^\alpha)] . \end{aligned} \quad (4.3.10b)$$

Vemos assim que a equação para o campo A_μ é manifestamente não-linear, em virtude da presença de um complicado funcional de A_μ contido no escalar de curvatura R , e que pelo mesmo motivo que na seção anterior (a introdução de uma "massa de repouso cosmológica"), a invariância de gauge da teoria é quebrada. Por outro lado, assinalamos novamente a renormalização da constante gravitacional k , de acordo com o fator Ω , e a aparição de complexos "termos de fonte" no lado direito da equação de Einstein eq. (10b), devidos à natureza Weyliana da variedade. De fato, a geração dinâmica do vetor de gauge ω_α eq. (9) que é, ao par da métrica $g_{\mu\nu}$, um objeto geométrico essencial da geometria, e a concomitante dependência de ω_α com relação ao campo A_μ são evidências bem caracterizadas de que o presente esquema não-mínimo diferencia-se bastante do escopo convencional da TRG^[134].

Outra observação importante é a de que, devido à presença do termo de Einstein-Hilbert $\frac{1}{K} R$ na Lagrangiana eq. (1), a invariância conforme da teoria é violada (vide seção 2.3)^[107]. Desse fato resulta não ser possível, em geral, proceder à redução da estrutura WIST dinamicamente gerada pela teoria a uma estrutura Riemanniana usual por meio de transformações conformes, tal como nas teorias de Dirac e de Canuto, como já observamos na seção 3.5. Essa estrutura WIST reduzir-se-á ao caso Riemanniano, todavia, quando for válida a condição

$$\Lambda^2 = A_\mu A^\mu = \alpha^2 = \text{const.}, \quad (4.3.11)$$

pois evidentemente, nesse caso, teremos $\omega_\alpha = 0$ e portanto, a identificação das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ aos símbolos de Christoffel $\{\alpha_{\mu\nu}\}$ da TRG, segundo a eq. (3.2.30). O limite Riemanniano da teoria é expresso então, pelo sistema

$$F^{\mu\nu} \parallel_\nu = -\beta \bar{R} A^\mu, \quad (4.3.12a)$$

$$\frac{1}{k_{\text{ren}}} \bar{G}_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta \bar{R} A_\mu A_\nu - T_{\mu\nu}[\text{mat}], \quad (4.3.12b)$$

(onde $k_{\text{ren}} = \Omega^{-1}$, como na eq. (2.11)), o qual se identifica ao caso análogo (vide eqs. (2.2,3)) da seção anterior.

A condição eq. (11) implica a fixação de um gauge para o potencial A_μ , de modo que a invariância de gauge da teoria eletrodinâmica correspondente é perdida. Esta condição de gauge foi abordada anteriormente, em contextos inteiramente distintos do tema de acoplamentos não-mínimos, por Dirac (sugerindo uma nova teoria clássica do elétron através da introdução de um campo de velocidades $V_\mu = \alpha^{-1} A_\mu$) [158] e por Nambu (examinando o caso quântico e procurando interpretar o fóton como um bóson de Goldstone numa teoria de gauge em que a invariância de Lorentz é quebrada [159]). Escolhendo o valor apropriado $\alpha = \frac{m_e}{c}$, ambos concluem que as respectivas teorias estão de acordo com as observações experimentais. Ora, o limite Riemanniano da presente teoria diferencia-se das teorias de Dirac e Nambu somente num ponto: a introdução do fator de "massa" cosmológico $\bar{R} A^\mu$. Desse modo, no que concerne a experimentos laboratoriais locais, esse limite é indistinguível da Eletrodinâmica padrão de Maxwell-Einstein [96]. Por fim, a equação de Einstein resultante eq. (12b) é idêntica à eq.

(2.3) discutida na seção antecedente – ou seja, todas as soluções anteriormente discutidas estão contidas no limite Riemanniano da teoria Weyliana que agora exploramos.

- Universos Marionete: seguindo o procedimento esquematizado na seção 2, procuremos elaborar uma solução especial do conjunto eqs. (3,4,8) de equações dinâmicas. Começamos por demandar uma estrutura métrica do espaço-tempo que seja homogênea e isotrópica, tal como no MP. Adotaremos assim o elemento de linha de uma geometria FRW anteriormente discutido (eq. 2.19),

$$ds_{FRW}^2 = dt^2 - S^2(t) [dx^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (4.3.13)$$

Consideremos uma situação em que não ocorre o desaparecimento de matéria (ou seja, $L_{mat} = 0$ donde $T_{\mu\nu}[mat] = 0$). Ora, já que $E_{\mu}^{\mu} = 0$ e os termos em $\beta R A^2$ se cancelam, contraindo a equação de Einstein eq. (3) obtemos

$$\frac{1}{K} R = T_{\mu}^{\mu}[mat], \quad (4.3.14)$$

de modo que na ausência de matéria teremos espaços WIST de curvatura nula, quer dizer, $R = 0$.

A exemplo da eq. (2.13), vamos escolher para o potencial $\Lambda_{\mu}(x)$ o ansatz

$$\Lambda_{\mu} = (A(t), 0, 0, 0) \quad (4.3.15)$$

que corresponde, como vimos, a um gás de fótons "longitudinais". Verificamos imediatamente que, nesse caso, a equação de Maxwell eq. (3) é automaticamente satisfeita, pois o campo $F^{\mu\nu}$ é nulo. Por sua vez, a equação de Einstein eq. (3) reduz-se apenas (já que

$E_{\mu\nu} = 0$, logo $E_{\mu\nu} = 0$) a

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.3.16)$$

A eq. (8), que caracteriza a estrutura WIST de variedade, numa métrica FRW receberá a expressão

$$\omega_\alpha = (a(t)),_{\alpha} = \dot{a} \delta_\alpha^0, \quad (4.3.17)$$

onde, a partir da eq. (17), definimos

$$a(t) = -\ln \Omega(t) = -\ln\left(\frac{1}{k} + \beta A^2(t)\right). \quad (4.3.18)$$

Recorrendo novamente à eq. (3.2.46), a equação de Einstein eq. (16) se torna

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \omega_{\mu} \parallel_{\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\mu} \omega_{\nu} - (\omega^{\alpha} \parallel_{\alpha} - \frac{1}{4} \omega_{\alpha} \omega^{\alpha}) g_{\mu\nu}. \quad (4.3.19)$$

É instrutivo comentar, neste ponto, a similaridade entre esta equação e as relações que ocorrem em teorias escalar-tensoriais da gravitação [64]. Consideremos, por exemplo, a mais popular dessas teorias, proposta por Brans e Dicke [127], na qual um campo escalar Φ é introduzido (por motivações Machianas) para permitir a variação da constante gravitacional G (vide seções 1.3 e 3.4), do que derivam as equações de movimento

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \frac{m}{\Phi^2} (\Phi,_{\mu} \Phi,_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi,_{\lambda} \Phi,^{\lambda}) + \frac{1}{\Phi} (\Phi,_{\mu} \parallel_{\nu} - g_{\mu\nu} \square \Phi), \quad (4.3.20a)$$

$$\square \Phi = 0. \quad (4.3.20b)$$

A semelhança entre as eqs. (19) e (20a) é transparente (vide seção 5.4 adiante). Todavia, uma relação tal como a eq.

(20b), que restringe o campo ϕ de Brans e Dicke e permite assim a interligação completa das dinâmicas dos campos escalar e tensorial, está ausente em nossa teoria. Este aspecto peculiar é consequência da eleição do ansatz eq. (15), pois uma vez que a eq. (3) é automaticamente satisfeita, uma relação suplementar envolvendo o "campo escalar" $A^2 = A_\mu A^\mu$ (i.e., o fator Ω) resulta eliminada.

Aí reside também a origem do curioso aspecto de "in determinação" a que aludimos ao cabo da seção prévia: a causa física da evolução do Universo (ou seja, a fonte da curvatura) resulta ser misteriosamente atribuída a uma função arbitrária, não determinada dinamicamente, que exprime o grau de "Weylização" do espaço-tempo. Com efeito, no caso do ansatz em questão, a eq. (19) assume a forma

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + g_{\mu\nu}) \ddot{a} + \frac{1}{2} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - g_{\mu\nu}) \dot{a}^2 - \\ - \dot{a} \frac{\dot{S}}{S} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{5}{2} g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (3\ddot{a} - \frac{3}{2} \dot{a}^2 + 9\dot{a} \frac{\dot{S}}{S}) g_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

onde fizemos uso da eq. (17) e também, para o cálculo das diferenças covariantes Riemannianas (denotadas, como sempre, pelo símbolo $\|$) numa métrica FRW, empregamos as relações^[9]

$$\| \begin{matrix} 0 \\ \mu\nu \end{matrix} \| = \frac{\dot{S}}{S} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - g_{\mu\nu}), \quad (4.3.22a)$$

$$\| \begin{matrix} \mu \\ 0\mu \end{matrix} \| = \frac{3\dot{S}}{S}. \quad (4.3.22b)$$

Como $R = 0$, a eq. (21) obviamente redundando em

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + g_{\mu\nu}) \ddot{a} + \frac{1}{2} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - g_{\mu\nu}) \dot{a}^2 - \frac{\dot{a}\dot{S}}{S} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{5}{2} g_{\mu\nu}). \quad (4.3.23)$$

Essa equação, por sua vez, se reduz às contribuições provenientes dos componentes (0-0) e (1-1) (pois, em virtude da homogeneidade da métrica FRW eq. (13), as contribuições de (2-2) e (3-3) somente reproduzem a de (1-1) - vide eq. (2.22)), como segue:

$$(0-0): \quad \frac{2\ddot{S}}{S} = \ddot{a} + \frac{\dot{a}\dot{S}}{S}, \quad (4.3.24a)$$

$$(1-1): \quad \frac{\dot{S}}{S} + \frac{2\dot{S}^2}{S^2} - \frac{2\sigma''}{S^2\sigma} = \frac{1}{2}\ddot{a} - \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{5}{2}\dot{a}\frac{\dot{S}}{S}, \quad (4.3.24b)$$

onde as notações são as previamente convencionadas. Da eq. (2.9b) decorre que, sendo t e χ coordenadas independentes, devemos ter

$$\frac{\sigma''}{\sigma} = \frac{1}{2} S^2 \left[\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{2\dot{S}^2}{S^2} - \frac{1}{2}\ddot{a} + \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{5}{2}\dot{a}\frac{\dot{S}}{S} \right] = \text{const.} = -\epsilon \quad (4.3.25)$$

e, de acordo com a eq. (2.24), no presente caso FRW obtemos $\epsilon = (0, +1, -1)$, dependendo do valor atribuído à função $\sigma(\chi)$ na eq. (2.23).

Substituindo a eq. (24a) na eq. (25), encontramos

$$\left(\frac{\dot{S}^2}{S^2} - \dot{a}\frac{\dot{S}}{S} + \frac{\dot{a}^2}{4} \right) = \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2} \right)^2 = -\frac{\epsilon}{S^2}, \quad (4.3.26)$$

de onde obtemos

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{a}}{2} \pm \frac{\sqrt{-\epsilon}}{S} \quad (4.3.27)$$

Uma vez que $a(t)$ e $S(t)$ são supostas funções reais o valor $\epsilon = 1$, correspondente a modelos fechados, deve ser excluído.

Ora, empregando a identidade

$$\left[\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2\right] = \frac{\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}^2}{S^2} \quad (4.3.28)$$

verificamos que a eq. (24a) é diretamente obtida da eq. (27); como a própria eq. (27) decorre da combinação das eqs. (24a,b), esta última é igualmente satisfeita de modo automático. Assim, o sistema de equações eq. (24) envolvendo as funções $a(t)$ e $S(t)$ é redundante (como poderíamos esperar em vista da eliminação da eq. (3)), e reduz-se a uma única condição correlacionando as dependências funcionais de $a(t)$ e $S(t)$: a eq. (27) ou, equivalentemente, a relação

$$\dot{S} - \frac{1}{2} \dot{a}S \mp \sqrt{-\epsilon} = 0 \quad (4.3.29)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem^[160] da forma

$$\dot{Y}(t) + P(t) Y(t) + Q(t) = 0, \quad (4.3.30)$$

cuja solução geral é dada por

$$Y(t) = \exp(-\int P dt) \left[\int -Q \exp(\int P dt) dt + \text{const.} \right]. \quad (4.3.31)$$

Podemos assim integrar a eq. (29) e obter a solução

$$S(t) = \exp\left(\frac{a(t)}{2}\right) \left[\pm \sqrt{-\epsilon} \int \exp\left(-\frac{a(t)}{2}\right) dt + \text{const.} \right], \quad (4.3.32)$$

ou, recordando a eq. (18),

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \left[\pm \sqrt{-\epsilon} \int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.} \right] = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{k} + \beta A^2(t)\right)^{1/2}} \left[\pm \sqrt{-\epsilon} \int \left(\frac{1}{k} + \beta A^2(t)\right)^{1/2} dt + \text{const.} \right] \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Procuremos discutir alguns dos aspectos mais relevantes da solução exibida acima. Em primeiro lugar, devemos apontar que a eq. (33) é a solução completa e final de nosso conjunto de equações dinâmicas eqs. (3,4,8). Vemos assim que o comportamento das propriedades métricas do Universo, neste esquema, é regulado por uma função não determinada dinamicamente que mede o grau de Weylização da variedade. Esta indeterminação, compreendida na arbitrariedade da função Ω (ou, o que é o mesmo, da componente $A(t)$), resulta da eliminação automática da eq. (3) no caso de ansatz escolhido, e permite a geração de inúmeras estruturas métricas interessantes e originais, paralelamente ao aspecto característico de afastamento, por parte da estrutura espaciotemporal, do regime Riemanniano costumeiro (quando $A(t) \neq \text{const.}$). A título de ilustração, verificamos por exemplo que uma solução tipo NSH eq. (2.27a),

$$S(t) = (t^2 + p^2)^{1/2}, \quad (4.3.34)$$

onde $p^2 = \text{const.}$, corresponde à escolha da função (quando tomamos $\beta = -1$)

$$A(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{k}{S^2(t)}\right), \quad (4.3.35)$$

no caso da seção Euclidiana ($\epsilon=0$), e a

$$A(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{k(t+S(t))^2}{S^2(t)}\right), \quad (4.3.36)$$

no caso aberto ($\epsilon = -1$).

Por outro lado, o limite Riemanniano da teoria é obtido quando é válida a condição $A^2(t) = \text{const.}$, eq. (11), pois nesse caso $\omega_{\alpha} = \dot{\delta}_{\alpha}^0 = 0$. A solitária eq. (29) nos diz então que,

num domínio de Riemann, nossa solução obedece à fórmula

$$\dot{S} = \pm \sqrt{-\epsilon}, \quad \epsilon = (0, -1) \quad (4.3.37)$$

Assim, obtemos

$$S(t)_{RST} = \pm \sqrt{-\epsilon} t + \text{const.} \quad (4.3.38)$$

como é igualmente indicado pela própria eq. (33). No caso da seção Euclidiana ($\epsilon=0$), temos $S(t)=\text{const.}$, o que resulta no espaço-tempo de Minkowski. No da seção aberta ($\epsilon=-1$), temos $S(t) = \pm t + \text{const.}$, o que (ã exclusão do sinal negativo) corresponde a uma solução tipo Friedman, $S(t) \sim t^n$, $n = \text{const.}$, singular na origem ($t=0$) [26]. Observemos que o caso $A^2 = \text{const.}$, se exigido ab initio na teoria, equivaleria simplesmente a uma renormalização da constante k na Lagrangiana de Einstein-Maxwell eq. (2.2.17). Todavia, quando introduzida como um vínculo dinâmico ou como um limite de um domínio funcional, como na presente solução, a imposição de um cenário Riemanniano resulta na eliminação do aspecto de indeterminação a que aludimos acima, fixando assim os universos de Friedman/Minkowski eq. (38) como soluções terminais da teoria. A hipótese de que poderíamos ter $a(t) = \text{const.}$ durante uma determinada época (e não constante em outras) nos conduz à concepção de possíveis fases universais em que se alternam (ou se incluem) estruturas geométricas de Riemann e de Weyl (analogamente às "bolhas de WIST" que discutiremos na seção 5), durante as quais o campo $A(t)$ manifesta-se fisicamente a modo ativo, para em seguida assemelhar-se a um "fantasma" - ou vice-versa.

Uma interrogação que imediatamente nos assedia concerne o estatuto conceitual da solução eq. (33): qual é, precisa

mente, o status físico do "campo escalar" $A(t)$? No que respeita à presente solução, a resposta cabível é análoga à da questão da ocorrência da constante cosmológica Λ , ou da presença da singularidade no MP (vide seção 1.3): trata-se de uma característica básica, de um genuíno datum initialis da teoria, associado à natureza tipicamente Weyliana do espaço-tempo. Do mesmo modo que a constante Λ teria uma misteriosa origem global (vide cap. 5), nosa função $A(t)$ representaria um certo tipo de variável cósmica exercendo influência sobre os fenômenos eletrogravitacionais.

De um ponto de vista mais geral, vemos que no presente esquema a forma da evolução do raio universal $S(t)$ torna-se dependente de uma função inteiramente incontrolável, $A(t)$, que devido ao acoplamento não-mínimo está associada à natureza Weyliana da estrutura do espaço-tempo. A aparição desta arbitrariedade num contexto cosmológico constitui, indubitavelmente, uma notável característica do sistema dinâmico engendrado pela Lagrangiana eq. (1). Uma vez que a função $A(t)$ (que expressa a presença do gás de "fótons longitudinais" e que pode ser entendida como sendo a origem da curvatura do Cosmos) é completamente indeterminada e pode outrossim ser prescrita à vontade, somos intuitivamente conduzidos a denominar as soluções FRW num WIST eq. (33) de "Universos Marionete" [151].

4.4. SOLUÇÕES HOMOGÊNEAS COM MATÉRIA NUM WIST

Consideremos mais uma vez o cenário não-mínimo propiciado pela Lagrangiana eq. (3.1),

$$L_{NM} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta R A_{\mu}^{\mu} + L_{mat} \right]. \quad (4.4.1)$$

Admitiremos nesta seção a presença de uma Lagrangiana de matéria L_{mat} (minimalmente acoplada à gravitação), representando um "fluido perfeito" caracterizado por duas funções das coordenadas, uma densidade $\rho(x)$ e uma pressão isotrópica $p(x)$, que deverão ademais ser correlacionadas por meio de uma equação de estado apropriada (vide seções 1.2 e 1.3). Variando à maneira de Palatini, encontramos as equações de movimento eqs. (2.3, 4, 8):

$$F^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = -\beta R A^{\mu} + J_{ext}^{\mu}, \quad (4.4.2)$$

onde incluímos em L_{mat} um termo de corrente externa $J_{ext}^{\mu} A_{\mu}$, à maneira da eq. (2.4);

$$\Omega G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta R A_{\mu} A_{\nu} - T_{\mu\nu} [mat], \quad (4.4.3)$$

onde $T_{\mu\nu}$, no caso, corresponde ao tensor energia-momentum representativo de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu}, \quad (4.4.4)$$

sendo $\{V_{\mu}\}$ um conjunto de vetores tipo-tempo unitários ($V_{\mu} V^{\mu} = 1$) associado a um campo de observadores fundamentais e $h_{\mu\nu}$ o projetor tridimensional usual^[161],

$$h_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{V_{\mu} V_{\nu}}{V_{\mu} V^{\mu}} \right) = \left(g_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu} \right); \quad (4.4.5)$$

e ainda a caracterização da estrutura WIST,

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} \omega_{\alpha} = g_{\mu\nu} (-\ell n \Omega)_{,\alpha} \quad (4.4.6)$$

onde Ω é dado novamente pela eq. (3.5).

Num universo homogêneo e isotrópico tipo FRW, expresso pelo elemento de linha eq. (2.19), adotamos o mesmo ansatz temporal que nas eqs. (2.13,3.15) ,

$$A_{\mu}(x) = (\Lambda(t), 0, 0, 0) , \quad (4.4.7)$$

representando um gás de fótons longitudinais não-minimalmente acoplado. Nesse caso temos $F_{\mu\nu}=0$ (e logo $E_{\mu\nu}=0$), e também que

$$\omega_{\alpha} = (a(t))_{,\alpha} = \dot{a}\delta_{\alpha}^0 , \quad (4.4.8)$$

onde novamente,

$$a(t) = -\ln\Omega(t) = -\ln\left(\frac{1}{K} + \beta A^2(t)\right). \quad (4.4.9)$$

Fixando o campo de velocidades $V_{\mu} = \delta_{\mu}^0$ (dito co-movente ao fluido cosmológico), obtemos

$$J_{\text{ext}}^{\mu} = \beta R A^{\mu} = \beta R A(t) \delta_0^{\mu} , \quad (4.4.10a)$$

$$\Omega G_{\mu\nu} = -(\rho + \beta R A^2) \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + p h_{\mu\nu} . \quad (4.4.10b)$$

Assim, na ausência de correntes externas, teremos necessariamente $R = 0$. Contraíndo a equação de Einstein eq. (10b), encontramos

$$\frac{1}{K} R = T^{\mu}_{\mu} = (\rho - 3p) , \quad (4.4.11)$$

onde T^{μ}_{μ} é o traço do tensor $T_{\mu\nu}$ da matéria minimalmente acoplada. Numa estrutura WIST, o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ assume a forma da eq. (3.2.46),

$$G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \omega_{\mu} ||_{\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\nu} ||_{\mu} - \frac{1}{2} \omega_{\mu} \omega_{\nu} + (\omega^{\alpha} ||_{\alpha} - \frac{1}{4} \omega_{\alpha} \omega^{\alpha}) g_{\mu\nu} . \quad (4.4.12)$$

Fazendo uso da eq. (8), a eq. (10b) se transforma na expressão

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} = & [\ddot{a} + \frac{1}{2} \dot{a}^2 - (k(\rho-3p) + 4e^a p)] \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - \dot{a} \{o_{\mu\nu}\} + \\ & + [e^a p - (\ddot{a} + \dot{a} \{o^{\mu}_{\mu}\} - \frac{\dot{a}^2}{4})] g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Com recurso às eqs. (3.22), obtemos então

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} = & [\ddot{a} + \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \dot{a} \frac{\dot{S}}{S} - (k(\rho-3p) + 4e^a p)] \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \\ & + [e^a p - \ddot{a} - 2\dot{a} \frac{\dot{S}}{S} + \frac{1}{4} \dot{a}^2] g_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

onde, em vista da eq. (9), fizemos $e^a = \frac{1}{\Omega}$. Aqui, um pequeno reparo de ordem técnica se faz necessário: para uma definição adequada de $a(t) = -\ln \Omega(t)$, devemos ter $\Omega \geq 0$ ou $A^2(t) \geq -\frac{1}{\beta k}$; nessas condições, é válido escrevermos $\Omega = \exp(-a(t))$ como na expressão acima.

Substituindo agora os valores apropriados dos componentes de $\bar{G}_{\mu\nu}$ numa métrica FRW^[26], as equações de Einstein eq. (14) (para as componentes (0-0) e (1-1)) são

$$(0-0): \quad 3 \left(\frac{\dot{S}^2}{S^2} - \frac{o''}{S^2 \sigma} \right) = -\frac{3}{4} \dot{a}^2 + 3\dot{a} \frac{\dot{S}}{S} + k(\rho-3p) + 3e^a p, \quad (4.4.15a)$$

$$(1-1): \quad 2 \frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} - \frac{o''}{S^2 \sigma} = -e^a p + \ddot{a} + 2\dot{a} \frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}^2}{4} . \quad (4.4.15b)$$

A exemplo da eq. (2.24), temos $o''/\sigma = \text{const.} = -\epsilon = (0, +1, -1)$. Nesse caso, encontramos

$$\left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2} \right)^2 + \frac{\epsilon}{S^2} = \frac{k}{3} (\rho - 3p) + e^a p, \quad (4.4.16a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2}\right)^2 + \frac{\epsilon}{S^2} &= -2 \frac{\ddot{S}}{S} + \dot{a} \frac{\dot{S}}{S} + \ddot{a} - e^a p = \\ &= -2 \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2}\right) - 2 \frac{\dot{S}}{S} \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2}\right) - e^a p. \end{aligned} \quad (4.4.16b)$$

Definindo

$$Y(t) = \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln S^2 - a) = \frac{1}{2} (\ln(S^2 \Omega)), \quad (4.4.17)$$

obtemos por fim a relação

$$Y^2 + \frac{\epsilon}{S^2} - \frac{k}{6} (\rho - 3p) = -\dot{Y} - \frac{\dot{S}}{S} Y = \frac{k}{6} (\rho - 3p) + e^a p. \quad (4.4.18)$$

Estas equações, ao par das eqs. (6,10a), constituem a forma final de nossas relações dinâmicas. Naturalmente, das eqs. (18) decorre a eq. (11), $R = k (\rho - 3p)$, que aqui toma a expressão

$$\dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y + Y^2 + \frac{\epsilon}{S^2} = \frac{k}{6} (\rho - 3p). \quad (4.4.19)$$

Resta-nos então escolher uma equação de estado conveniente que correlacione a densidade ρ e a pressão p do fluido cosmológico. Habitualmente^[25], costuma-se adotar a forma linear de dependência funcional $\rho = \lambda p$, onde $\lambda = \text{const.}$, ($-1 \leq \lambda \leq 1$). Consideraremos, no que se segue, dois casos relevantes: o de radiação ($\rho = \frac{1}{3} p$) e o de poeira ($p=0$).

- Radiação: supondo um Cosmos preenchido, ademais de nosso gás de fótons não-mínimo, também por um campo de radiação eletromagnética minimalmente acoplado, temos a equação de estado

$$\rho = 3p. \quad (4.4.20)$$

Nesse caso, da eq. (11) temos $R=0$, e portando da eq.

(6) resulta que $J_{\text{ext}}^{\mu} = 0$, ou seja, correntes externas estão ausentes. A eq. (18) se torna

$$Y^2 + \frac{\epsilon}{S^2} = -\dot{Y} - \frac{\dot{S}}{S} Y = \frac{1}{3} e^a \rho. \quad (4.4.21)$$

Vamos tomar, por simplicidade, o caso em que $\epsilon=0$ (correspondendo à seção Euclidiana eq. (2.23a)). Temos então

$$\dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y + Y^2 = 0, \quad (4.4.22a)$$

$$Y^2 = \frac{e^a \rho}{3}. \quad (4.4.22b)$$

Ora, o caso trivial $Y = 0$ implica que $\rho = 0$ e corresponde, portanto, à seção Euclidiana dos Universos Marionete eq. (3.27) obtidos na seção anterior. Supondo assim que $Y \neq 0$, da eq. (22a) temos

$$\frac{\dot{Y}}{Y} + Y + \frac{\dot{S}}{S} = (\ln YS) \dot{} + Y = 0. \quad (4.4.23)$$

Seja

$$Z(t) = \frac{1}{2} (\ln S^2 - a) = \frac{1}{2} \ln(S^2 \Omega), \quad (4.4.24)$$

de modo que $Y = \dot{Z}$. Então

$$(\ln(\dot{Z}S) + Z) \dot{} = 0 \quad (4.4.25)$$

ou

$$\ln \dot{Z}S + Z = \text{const.} \quad (4.4.26)$$

Assim,

$$\dot{Z}S = \alpha e^{-Z}, \quad \alpha = \text{const.}, \quad (4.4.27)$$

logo

$$e^Z \dot{Z} = (e^Z)' = (S e^{-a/2})' = \frac{\alpha}{S}, \quad (4.4.28)$$

donde obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$(S^2)' - aS^2 - 2\alpha e^{a/2} = 0. \quad (4.4.29)$$

Integrando (vide eq. (3.31)), encontramos

$$\begin{aligned} S^2(t) &= e^a [2\alpha \int e^{-a/2} dt + \text{const.}] = \\ &= \frac{1}{\Omega(t)} [2\alpha \int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.}] = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{K} + \beta A^2(t)\right)} [2\alpha \int \left(\frac{1}{K} + \beta A^2(t)\right)^{1/2} dt + \text{const.}]. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Nesse caso,

$$Y = \frac{\alpha e^{-a/2}}{[2\alpha \int e^{-a/2} dt + \text{const.}]} = \frac{\alpha \sqrt{\Omega}}{[2\alpha \int \sqrt{\Omega} dt + \text{const.}]}, \quad (4.4.31)$$

e portanto, da eq. (22b),

$$\rho(t) = 3e^{-a} Y^2 = \frac{3\alpha^2 \Omega^2}{[2\alpha \int \sqrt{\Omega} dt + \text{const.}]^2} = \frac{3\alpha^2}{S^4(t)}. \quad (4.4.32)$$

Nossa solução final do sistema eqs (6,10a,18,20) compreende assim as eqs. (30) e (32):

$$\left\{ \begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} [2\alpha \int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.}]^{1/2}, & (4.4.33a) \\ \rho(t) &= \frac{3\alpha^2}{S^4(t)}. & (4.4.33b) \end{aligned} \right.$$

Concluimos desse modo que, mesmo com a inclusão de um campo minimalmente acoplado de radiação, o cenário não-mínimo oferecido pela Lagrangiana eq. (1) permanece manifestando o caráter de um modelo Marionete, pois tanto a função de evolução cósmica $S(t)$ quanto a densidade da radiação $\rho(t)$ são controladas pela função arbitrária $A(t)$, associada à estrutura Weyliana da variedade, e que descreve nosso gás de fóton longitudinais não-minimalmente acoplados. Por exemplo, a solução não-singular NSH eq. (2.27a), $S(t) = \sqrt{t^2 + \text{const.}}$, corresponde a

$$\Omega(t) = \frac{1}{S^2(t)} [-\alpha \ln(t+S(t)) + \text{const.}]^2, \quad (4.4.34)$$

donde a densidade $\rho(t) = 3\alpha^2 (t^2 + \text{const.})^{-2}$ permanece finita mesmo no momento de maior contração do Cosmos (quando $t=0$).

- Poeira: a equação de estado correspondente a um fluido perfeito de partículas pontuais incompressíveis ("poeira") é

$$p = 0. \quad (4.4.35)$$

Nesse caso, da eq. (11) temos $R = k\rho$, e da eq. (10a) temos então

$$J_{\text{ext}}^\mu = \beta R A^\mu = \beta k \rho A(t) \delta_0^\mu. \quad (4.4.36)$$

Por sua vez, as equações de Einstein eq. (18) se tornam

$$Y^2 + \frac{\epsilon}{S^2} - \frac{k}{6}\rho = -\dot{Y} - \frac{\dot{S}}{S} Y = \frac{k}{6}\rho, \quad (4.4.37)$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^2 + \frac{\epsilon}{S^2} = \frac{k}{3}\rho, \quad (4.4.38a) \\ \dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{\epsilon}{2S^2} = 0. \quad (4.4.38b) \end{array} \right.$$

No caso da seção Euclidiana ($r=0$) temos simplesmente

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^2 = \frac{k}{3} \rho \\ \dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y + \frac{Y^2}{2} = 0. \end{array} \right. \quad (4.4.39a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y + \frac{Y^2}{2} = 0. \end{array} \right. \quad (4.4.39b)$$

Reproduzindo para a eq. (39b) o raciocínio desenvolvido para a obtenção da eq. (28), encontramos

$$(e^{Z/2}) = (S^2 \Omega)^{1/4} = \frac{\alpha}{2S}. \quad (4.4.40)$$

Com o auxílio das variáveis $x \equiv S^{1/2}$, $y \equiv \Omega^{1/4}$ encontramos a equação diferencial de primeira ordem

$$x^3 + 3 \frac{\dot{y}}{y} x^3 - \frac{3\alpha}{2y} = 0, \quad (4.4.41)$$

cuja solução, por meio da eq. (3.31), nos conduz a

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \left[-\frac{3\alpha}{2} \int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.} \right]^{2/3}. \quad (4.4.42)$$

Nesse caso, temos

$$Y(t) = \dot{Z} = \frac{1}{2} (\ln S^2 \Omega) = \frac{2 \sqrt{\Omega(t)}}{3 \left[\int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.} \right]}, \quad (4.4.43)$$

e pela eq. (39a) a densidade do fluido é

$$\rho(t) = \frac{3}{k} Y^2(t) = \frac{2\Omega(t)}{k \left[\int \sqrt{\Omega(t)} dt + \text{const.} \right]^2} \quad (4.4.44)$$

Obtivemos assim, mais uma vez, o raio de curvatura $S(t)$ e a densidade $\rho(t)$ como funcionais do fator $\Omega(t)$. Recordemos, todavia, que ainda dispomos da eq. (36), que correlaciona a corrente externa $J_{\text{ext}}^{\text{II}}$ à densidade ρ . É costumeiro adotar, para a corrente

$J_{\text{ext}}^\mu(x)$, a forma

$$J_{\text{ext}}^\mu(x) = \gamma A^\mu(x) = \gamma A(t) \delta_0^\mu, \quad (4.4.45)$$

onde γ é uma constante conveniente [26]. Assim, da eq. (36) obtemos

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta k} = \text{const.} = \rho_0, \quad (4.4.46)$$

ou seja, a densidade do fluido resulta constante. Da eq. (39a) temos então

$$Y(t) = \pm \sqrt{\frac{k}{3} \rho_0} = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{3\beta}} = \text{const.}, \quad (4.4.47)$$

e da eq. (39b),

$$2 \frac{\dot{S}}{S} = (\ln S^2) \dot{} = -Y = \mp \sqrt{\frac{\gamma}{3\beta}}, \quad (4.4.48)$$

logo,

$$S^2(t) = \text{const.} e^{\mp \sqrt{\frac{\gamma}{3\beta}} t}. \quad (4.4.49)$$

Portanto, da eq. (40) resulta

$$\Omega(t) = \text{const.} e^{\pm \sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}} t} \quad (4.4.49')$$

Assim, sob a hipótese da eq. (45), obtemos uma solução do sistema eqs. (6,10a,10b) com a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0 = \frac{Y}{\beta k} , \\ \Omega(t) = \text{const.} \cdot e^{-\sqrt{3k\rho_0} t} , \\ S(t) = \text{const.} \cdot e^{+\sqrt{\frac{k\rho_0}{12}} t} . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.4.50a) \\ (4.4.50b) \\ (4.4.50c) \end{array}$$

Concluimos então que a inclusão de um fluido incompressível (poeira) minimalmente acoplado em nosso esquema não-mínimo nos conduz (na presença da corrente externa J_{ext}^{μ} dada pela eq. 45)) a uma solução cósmica tipo De Sitter (ou seja, $S(t) \sim e^{\text{const.}t}$) numa estrutura WIST. Assim, no presente caso a introdução de um fluido de poeira (cuja densidade é constante) equivale à presença de uma "constante cosmológica" definida em todo o Cosmos. Em virtude da hipótese eq. (45), o caráter Marionete está ausente nesse caso. Observemos por fim o comportamento exponencial inverso de $S(t)$ e $\Omega(t)$, representando um compromisso entre a estrutura WIST da variedade e a evolução cósmica, que assegura a manutenção de $\rho = \text{const.}$ ao longo de toda a história do Universo, tal como nos modelos inspirados no "Princípio Cosmológico Perfeito"^[17].

- Leis de Conservação num WIST: seria interessante complementarmos nossa discussão acerca da inclusão de termos de matéria no cenário não-mínimo da Lagrangiana eq. (1) pela consideração do problema do estabelecimento de leis de conservação para o fluido cosmológico (minimalmente acoplado) no caso de uma configuração WIST. É conveniente que a expressão dessas leis possa ser fundada em propriedades bem determinadas de alguns dos objetos tensoriais da teoria, de modo a tornar manifesta a covariância da relação esco

lhida. Na TRG^[9], a partir da equação de Einstein eq. (1.2.1) sem termo cosmológico,

$$\bar{G}_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}, \quad (4.4.51)$$

obtemos a expressão (eq.1.2.2) da conservação do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ do conteúdo material pela fórmula

$$T^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 0, \quad (4.4.52)$$

uma vez que $k = \text{const.}$ e $\bar{G}^{\mu\nu} \parallel_{\nu} \equiv 0$ é uma identidade.

Ora, no caso da teoria do acoplamento não-mínimo que estamos considerando, a equação de Einstein tem a forma da eq. (4.3),

$$\Omega G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta R A_{\mu} A_{\nu} - T_{\mu\nu}[\text{mat}] \equiv -T_{\mu\nu}^*. \quad (4.4.53)$$

Podemos reescrever, por meio da eq. (3.2.46), o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ de uma variedade WIST como

$$G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}, \quad (4.4.54)$$

onde

$$H_{\mu\nu} \equiv -\frac{3}{2} \omega_{\mu} \parallel_{\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\nu} \parallel_{\mu} - \frac{1}{2} \omega_{\mu} \omega_{\nu} + (\omega^{\gamma} \parallel_{\gamma} - \frac{1}{4} \omega_{\gamma} \omega^{\gamma}) g_{\mu\nu} \quad (4.4.55)$$

representa a contribuição da componente puramente Weyliana da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Assim, definindo (como na eq. (4.2.11))

$$k_{\text{ren}} \equiv \frac{1}{\bar{\Omega}(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k} + \beta A_{\mu} A^{\mu}\right)}, \quad (4.4.56)$$

temos

$$\bar{G}_{\mu\nu} = -k_{\text{ren}} T_{\mu\nu}^* - H_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}(\text{eff}). \quad (4.4.57)$$

Outrossim, da identidade $\bar{G}^{\mu\nu} \parallel_{\nu} \equiv 0$ obtemos a expressão covariante

$$T_{(\text{eff})}^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 0, \quad (4.4.58)$$

onde

$$T_{\mu\nu}(\text{eff}) = \frac{k_{\text{ren}}}{k} (E_{\mu\nu} + \beta R A_{\mu} A_{\nu} + T_{\mu\nu}[\text{mat}]) + \frac{1}{k} H_{\mu\nu}. \quad (4.4.59)$$

Seja, novamente, o elemento de linha FRW dado pela eq. (2.19). Se adotarmos também o ansatz temporal eq. (7), temos em consequência $F_{\mu\nu} = 0$ e logo $E_{\mu\nu} = 0$. Por outro lado, ω_{α} é dado pela eq. (8), e $T_{\mu\nu}[\text{mat}]$ pela eq. (4), onde fixamos $V_{\mu} = \delta_{\mu}^0$. Com estes ingredientes, a eq. (58) se torna

$$\begin{aligned} & [e^a (\rho + p + \beta R A^2) \delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} - p g^{\mu\nu}] - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\dot{a} \delta_{\alpha}^0)_{,\beta} - \\ & - \dot{a} \delta_0^0 (\dot{\sigma}_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \dot{a}^2 \delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} + ((\dot{a} \delta_0^{\alpha})_{,\alpha} + \dot{a} \delta_0^{\gamma} \{\alpha\}_{\gamma\alpha}) - \frac{\dot{a}^2}{4} g^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.60)$$

Ora, da eq. (11) temos $R = k(\rho - 3p)$, e da definição eq. (9) resulta formalmente

$$A^2(t) = \frac{1}{\beta} \left(\Omega - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{\beta} \left(e^{-a} - \frac{1}{k} \right). \quad (4.4.61)$$

Lançando mão das eqs. (3.22), temos então

$$\begin{aligned} & [(e^a [\rho + p + k(\rho - 3p) (e^{-a} - \frac{1}{k})] - \ddot{a} + \dot{a} \frac{\dot{S}}{S} - \frac{1}{2} \dot{a}^2) \delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} + \\ & + (\ddot{a} + 2\dot{a} \frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{a}^2}{4} - e^a p) g^{\mu\nu}] \parallel_{\nu} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.62)$$

Mas, como $g^{\mu\nu} \parallel_{\nu} \equiv 0$ (vide eq. (3.2.27)), temos genericamente que

$$\begin{aligned}
 (u(t) \delta_0^\mu \delta_0^\nu + v(t) g^{\mu\nu}) \parallel_{\nu} &= (\dot{u} + u \{_{0\alpha}^{\alpha}\} + \dot{v}) \delta_0^\mu = \\
 &= (\dot{u} + 3u \frac{\dot{S}}{S} + \dot{v}) \delta_0^\mu ;
 \end{aligned}
 \tag{4.4.63}$$

logo, a eq. (62) se reduz a

$$\begin{aligned}
 k(\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{S}}{S}) + 3(e^a - k)(\dot{p} + 3p \frac{\dot{S}}{S}) + 3e^a p \frac{\dot{S}}{S} + 3\dot{a} (\frac{\dot{S}}{S} - \frac{1}{2} \dot{a} \frac{\dot{S}}{S} - \frac{\ddot{a}}{2} + \\
 + e^a p) = 0 ,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.64}$$

ou ainda, usando a definição eq. (17),

$$\begin{aligned}
 k(\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{S}}{S}) + 3(e^a - k)(\dot{p} + 3p \frac{\dot{S}}{S}) + 3e^a p (\frac{\dot{S}}{S} + \dot{a}) + \\
 + 3\dot{a} [\dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.65}$$

Esta é a forma final que exprime a proposta de lei de conservação de energia-momentum num WIST dinamicamente gerado eq. (58). Uma vez que esta relação provém das equações de Einstein eq. (53) através de uma identidade de cunho geométrico, não devemos esperar que contenha qualquer informação suplementar à fornecida pela equação original, ou seja, a eq. (65) representa essencialmente um vínculo de consistência que as soluções cosmológicas obtidas no esquema dinâmico não-mínimo em tela, graças ao recurso a ansatze simplificadoros, devem satisfazer. Verifiquemos então a compatibilidade de nossas soluções não-mínimas no caso da presença de radiação eq. (33) e de poeira eq. (50), o que igualmente nos servirá para discutirmos o limite Riemanniano de cada caso.

Quando temos radiação como fluido material em nosso

Cosmos não-mínimo, a equação de estado $\rho = 3p$ eq. (20) implica

$$e^a (\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{S}}{S}) + e^a \rho (\frac{\dot{S}}{S} + \dot{a}) + 3\dot{a} [\dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y] = 0, \quad (4.4.66)$$

do que obtemos

$$e^a \rho (\dot{\ln} \rho + 4 \dot{\ln} S) + e^a \rho \dot{a} + 3\dot{a} [\dot{Y} + \frac{\dot{S}}{S} Y] = 0, \quad (4.4.67)$$

logo

$$e^a \rho (\dot{\ln} (\rho S^4)) + 3\dot{a} [\frac{e^a \rho}{3} + \dot{Y} + \dot{\ln} S Y] = 0. \quad (4.4.68)$$

Ora, a solução mais simples para essa relação consiste na anulação de seus termos. Do primeiro obtemos

$$\rho S^4 = \text{const.}, \quad (4.4.69)$$

coincidindo assim com a eq. (33b); do segundo, teremos seja

$$\frac{e^a \rho}{3} = -\dot{Y} - \dot{\ln} S Y, \quad (4.4.70)$$

o que reproduz parte da eq. (21) (a equação resmanescente provém, é claro, do vínculo $R = 0$), seja

$$a(t) = \text{const.}, \quad (4.4.71)$$

que corresponde ao que temos chamado de "limite Riemanniano" da teoria (vide eq. (3.11,3.38)), por implicar na anulação do vetor de Weyl ω_α . Nesse caso, da condição $R = \bar{R} = 0$ (espaço RST de curvatura nula) eq. (11) obtemos, para a seção Euclidiana ($\epsilon=0$),

$$\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} = (\frac{\dot{S}}{S})^2 + 2 \frac{\dot{S}^2}{S^2} = 0. \quad (4.4.72)$$

Tomando $\frac{\dot{S}}{S} = x$, resulta

$$\dot{x} + 2x^2 = 0. \quad (4.4.73)$$

A solução trivial $x = 0$ equivale a $S(t) = \text{const.}$, isto é, ao espaço-tempo de Minkowski; quando $x \neq 0$, podemos escrever

$$\ln \dot{x} + 2x = 0, \quad (4.4.74)$$

cuja solução é $x = (2t + t_0)^{-1}$, $t_0 = \text{const.}$ Integrando, obtemos então

$$S(t)_{\text{RST}} \sim (2t + t_0)^{1/2}. \quad (4.4.75)$$

e da eq. (69) temos por conseguinte $\rho(t)_{\text{RST}} \sim (2t + t_0)^{-2}$. Alcançamos assim uma solução FRW típica, numa variedade Riemanniana plana singular na origem (pois quando $t_0=0$, $S(0)=0$, $\rho(0)=\infty$) e que se expandirá indefinidamente enquanto a densidade da radiação progressivamente se esmaece.

No caso de incluirmos poeira minimalmente acoplada em nosso cenário cósmico, a correspondente equação de estado $p=0$ eq. (35) reduz a eq (65) à forma

$$k(\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{S}}{S}) + 3\dot{a} [Y + \frac{\dot{S}}{S} Y] = 0 \quad (4.4.76)$$

Sob a hipótese adicional da eq. (45), $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ e portanto

$$(k\rho_0 + \dot{a}Y) \frac{\dot{S}}{S} + \dot{a}Y = 0. \quad (4.4.77)$$

Supondo primeiramente que $\dot{a} \neq 0$ (a variedade é WIST), a anulação de ambos os termos dessa relação nos fornece $Y = Y_0 = \text{const.}$ e (além da solução trivial $S(t) = \text{const.}$) a equação

$$\dot{a} = \frac{-k\rho_0}{Y_0}, \quad (4.4.78)$$

de onde obtemos $\Omega(t) = e^{-a(t)} \sim e^{-\frac{k\rho_0}{Y_0} t}$. Da definição eq. (17) de \underline{Y} corre então que $Y_0 = \frac{\dot{S}}{S} + \frac{k\rho_0}{Y_0}$, donde

$$S(t) \sim e^{\frac{(2Y_0^2 - k\rho_0)}{2Y_0} t}. \quad (4.4.79)$$

Se agora lançarmos mão da condição $R = k\rho_0$ eq. (19), obtemos $Y_0^2 = \frac{k\rho_0}{-3}$, relação que nos assegura a coincidência das equações acima obtidas com a solução eq. (50), como queríamos. Entretanto, quando tomamos $a(t) = \text{const.}$ (restrição Riemanniana), temos $k\rho_0 \frac{\dot{S}}{S} = 0$ e alcançamos assim um resultado inviável, pois ou encontramos a solução trivial do vácuo de Minkowski ($S(t) = \text{const.}$) ou temos $\rho_0 = 0$, o que contradiz a hipótese eq. (45) e redundante, mais uma vez, num espaço vazio. Verificamos assim que a introdução da relação eq. (45) (entre o campo não-mínimo A_μ e uma forma presumível para a corrente J_{ext}^μ) num contexto que inclui poeira cósmica minimalmente acoplada permite, por um lado, eliminar a indeterminação das soluções puramente Marionete da seção prévia, numa estrutura WIST; e, por outro lado, impede que a teoria possua um limite Riemanniano compatível, à exceção da solução trivial.

Completamos assim a desejada verificação da consistência entre as soluções cósmicas num WIST contendo radiação eq. (33) e poeira eq. (50) anteriormente obtidas e a condição resultante eq. (65) da proposta de "lei de conservação" eq. (58). A introdução de radiação no esquema não-mínimo gerada pela Lagrangiana eq. (1) resulta num sistema dinâmico incompleto que permanece manifes

tando o caráter de indeterminação que apelidamos de "Marionete", e que possui como limite Riemanniano os universos de Friedman/Minkowski; a presença de poeira, por outro lado, conduz à obtenção de uma bem-determinada solução cósmica com densidade constante que, à maneira dos modelos "inflacionários", evolui como o cosmos de De Sitter (vide seção 1.3 e também o cap. 5 adiante). Num curioso mecanismo de intercâmbio, a componente Weyliana (i.e., o campo A_μ não-minimalmente acoplado) da estrutura geométrica da variedade parece compensar os efeitos da rápida expansão (ou contração) exponencial do modelo, de modo a permitir que a densidade do fluido cósmico se mantenha invariante. Esta solução não exhibe o aspecto Marionete - todavia, tampouco possui um limite Riemanniano bem-definido.

4.5. SOLUÇÕES ESTÁTICAS COM SIMETRIA ESFÉRICA NUM WIST

Um dos aspectos mais notáveis proporcionados pela consideração de cenários não-minimalmente acoplados em Cosmologia, como um contexto viável para a exploração de uma formulação mais compreensiva dos processos gravitacionais de interação, consiste sem dúvida no estabelecimento de uma peculiar conexão dinâmica entre a estrutura geométrica do espaço-tempo e o comportamento de certos campos físicos, como vimos nos exemplos desenvolvidos nas seções precedentes.

De fato, o esquema dinâmico obtido por meio da variação a Palatini da Lagrangiana não-mínima eq. (2.1) envolve uma complexa relação de interdependência entre a característica Weyliana da geometria da variedade, as propriedades do campo gravita-

cional (i.e., a estrutura métrica) e o regime funcional do campo conformalmente acoplado, tal como se evidencia no sistema eqs. (3.3,4,8). Como antecipamos na seção 3.4, essa interrelação entre os objetos básicos da teoria torna possível concebermos situações em que domínios espaciais demarcados, dotados de estruturas geométricas de natureza distinta (por exemplo, de Riemann e de Weyl), possam contactar-se ou mesmo coexistir. Uma vez que a Lagrangiana eq. (2.1) não é conformalmente invariante, a estrutura WIST resultante do procedimento de Palatini não é automaticamente redutível a um espaço de Riemann, via transformações conformes (vide seções 3 e 3.5); não obstante, de acordo com o domínio funcional de validade da condição $\omega_\alpha = 0$ (ou seja, $A_\mu A^\mu = \text{const.}$ - vide eq. (3.11)), e atendendo à consistência desta restrição com as demais equações dinâmicas, somos livres em princípio para especular acerca de possíveis soluções particulares abrangendo, por exemplo, domínios de Riemann assintoticamente conectados através de uma série de domínios de Weyl; e ainda sub-regiões Riemannianas embebidas num Cosmos de Weyl ou, inversamente, "bolhas" de Weyl imersas em um espaço-tempo globalmente Riemanniano [96,134].

Procuraremos, na presente seção, tornar mais verossímeis as cogitações acima discutidas através do exame, em casos concretos, das características de uma tal transição entre estruturas geométricas de Riemann e de Weyl, e das propriedades das regiões limitrofes, no âmbito do cenário não-mínimo da Lagrangiana eq. (2.1). Para esse objetivo, as geometrias FRW eq. (2.19) espacialmente homogêneas e dependentes somente de um parâmetro temporal não são apropriadas; interessa-nos, a exemplo da conhecida solução de Schwarzschild da TRG [9], investigar soluções que exibam

uma clara demarcação, ou fronteira, entre diferentes domínios es
paciais. Assim, somos conduzidos com naturalidade a considerar,
em analogia com o modelo de Schwarzschild, o caso de configurações
estáticas com simetria esférica numa variedade WIST.

Consideremos ainda uma vez o cenário não-mínimo da
Lagrangiana eq. (2.1), agora na ausência, por simplicidade, de ma
têria ($L_{\text{mat}}=0$) e de correntes externas ($J_{\text{ext}}^\mu=0$). As equações de
movimento obtidas por uma variação à Palatini são, como sabemos,
as equações de Maxwell eq. (3.3),

$$F^{\mu\nu} \parallel_\nu = -\beta R A^\mu, \quad (4.5.1)$$

as equações de Einstein eq. (3.4),

$$\Omega G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \beta R A_\mu A_\nu, \quad (4.5.2)$$

onde $\Omega(x)$ é dado pela eq. (3.5), e a caracterização de uma estru
tura WIST eq. (3.8),

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu}{}^\omega{}_\alpha = g_{\mu\nu} (-\ln\Omega)_{,\alpha}. \quad (4.5.3)$$

Contraíndo a eq. (2), obtemos a condição de curvatura nula,

$$R = k E^\mu{}_\mu = 0. \quad (4.5.4)$$

Portanto, o sistema a ser resolvido reduz-se a

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{\mu\nu} \parallel_\nu = 0, \\ R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Omega} E_{\mu\nu} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{k} + \beta A_\mu A^\mu\right)} E_{\mu\nu}. \end{array} \right. \quad (4.5.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Omega} E_{\mu\nu} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{k} + \beta A_\mu A^\mu\right)} E_{\mu\nu}. \end{array} \right. \quad (4.5.5b)$$

O elemento de linha mais geral de uma métrica estática, esfericamente simétrica em coordenadas (t, r, θ, ϕ) é dado por^[94]

$$ds^2 = u^2(r) dt^2 - v^2(r) dr^2 - w^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.5.6)$$

No espírito das seções anteriores, vamos adotar para o potencial A_μ o ansatz "longitudinal"

$$A_\mu(x) = (\psi(r), 0, 0, 0) = \psi(r) \delta_\mu^0. \quad (4.5.7)$$

Com o auxílio da eq. (6), verificamos que

$$\Lambda^\mu(x) \equiv g^{\mu\nu} A_\nu(x) = \frac{\psi(r)}{u^2(r)} \delta_0^\mu. \quad (4.5.8)$$

Assim, para o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ eq. (2.2.11) encontramos

$$F_{\mu\nu} = \psi' (\delta_\mu^0 \delta_\nu^1 - \delta_\nu^0 \delta_\mu^1), \quad (4.5.9a)$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{-\psi'}{u^2 v^2} (\delta_0^\mu \delta_1^\nu - \delta_0^\nu \delta_1^\mu) \quad (4.5.9b)$$

(onde a plica denota diferenciação simples com respeito à coordenada radial r), e para o tensor energia-momentum $E_{\mu\nu}$ eq. (2.2.30),

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = \\ &= \frac{\psi'^2}{u^2 v^2} [u^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - v^2 \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Por outro lado, da eq. (3.5) temos

$$\Omega(r) \equiv \left(\frac{1}{k} + \beta A_\mu A^\mu \right) = \left(\frac{1}{k} + \beta \frac{\psi^2(r)}{u^2(r)} \right), \quad (4.5.11)$$

de modo que

$$\omega_\alpha = (-\ln \Omega(r))_{,\alpha} = a' \delta_\alpha^1, \quad (4.5.12)$$

onde, a exemplo da eq. (3.18) fizemos

$$a(r) \equiv -\ln \Omega(r). \quad (4.5.13)$$

Com estes ingredientes, podemos reescrever a equação de Maxwell, eq. (5a) da forma

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \parallel_{\nu} &= F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + F^{\mu\lambda} \{ \lambda\alpha \} = \left(\frac{-\psi'}{u^2 v^2} \right)' \delta_0^\mu + \\ &+ \left(\frac{-\psi'}{u^2 v^2} \right) \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + 2 \frac{w'}{w} \right) \delta_0^\mu = \\ &= \left(\frac{-\psi'}{u^2 v^2} \right) \left(\ln \left(\frac{-\psi' w^2}{uv} \right) \right)' \delta_0^\mu = 0; \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

e, fazendo uso da eq. (3.2.41), para a equação de Einstein eq. (5b) temos

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= (a'' + \frac{1}{2} a'^2) \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - a' \{ \mu\nu \}^1 + \frac{a'}{2v^2} [a' - (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))'] g_{\mu\nu} - \\ &- \frac{e^a \psi'^2}{u^2 v^2} [u^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - v^2 \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}] = \\ &= \frac{-e^a \psi'^2}{v^2} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + (a'' + \frac{1}{2} a'^2 + \frac{e^a \psi'^2}{u^2}) \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - a' \{ \mu\nu \}^1 + \\ &+ \frac{1}{2v^2} [a'^2 - a' (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))'] + \frac{e^a \psi'^2}{u^2} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

A condição $R = 0$ eq. (4), por fim, tem a expressão

$$\bar{R} = \frac{3a'}{v^2} \left[\frac{a'}{2} - (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))' \right]. \quad (4.5.16)$$

Observemos que a condição resultante das equações de Maxwell eq. (14) tem somente duas possíveis soluções; no primeiro caso, temos $\psi' = 0$ e, logo,

(Caso A) $\psi = \psi_0 = \text{const.};$ (4.5.17)

no segundo, temos $(\ln(-\frac{\psi'w^2}{uv}))' = 0$ e, assim,

(Caso B) $\psi' = \frac{\alpha uv}{w^2}, \alpha = \text{const.}$ (4.5.18)

As equações de Maxwell eq. (5a) redundam portanto na imposição de vínculos restritivos entre o comportamento da componente longitudinal $\psi(r)$ do campo A_μ e os elementos $u(r), v(r)$ e $w(r)$ da métrica estática esfericamente simétrica eq. (6). Para que a consistência como um todo do sistema dinâmico não-mínimo se ja mantida, as possíveis soluções das equações de Einstein eq. (15) devem ser compatíveis com esses vínculos dinâmicos, expressos pelas eqs. (17,18). Objetivando esboçar as propriedades associadas a modelos de transições estruturais Riemann/Weyl em nosso contexto não-mínimo, investigaremos nos casos A e B que se seguem as conseqüências resultantes da adoção de cada uma dessas condições alternativas.

- Caso A: $\psi = \psi_0 = \text{const.}$

Nesse caso, temos $E_{\mu\nu} = 0$ (eq. (10)) e $\Omega = (\frac{1}{k} + \frac{\psi_0^2}{u^2})$ (eq. (11)). A equação resultante $R_{\mu\nu} = 0$, segundo a eq. (15), tem a forma

$$\bar{R}_{\mu\nu} = (a'' + \frac{1}{2} a'^2) \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - a' \{ \begin{matrix} 1 \\ \mu\nu \end{matrix} \} + \frac{a'}{2v^2} (a' - (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))') g_{\mu\nu} .$$

(4.5.19)

As componentes do tensor de Ricci Riemanniano $\bar{R}_{\mu\nu}$ correspondentes à métrica eq. (6) foram obtidas com o auxílio de técnicas de computação algébrica [162]. Assim, as equações correspondentes às com

ponentes (0-0), (1-1) e (2-2) (reproduzida por (3-3)) são:

$$\frac{u''}{u} + 2 \frac{u'}{u} \frac{w'}{w} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} = a' \frac{u'}{u} - \frac{a'}{2} [a' - (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))'], \quad (4.5.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} + 2 \frac{w''}{w} - 2 \frac{w'}{w} \frac{v'}{v} &= a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' - \frac{v'}{v} \right) - \\ &- \frac{a'}{2} [a' - (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))'], \end{aligned} \quad (4.5.20b)$$

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u} \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w} + \frac{w'^2}{w^2} - \frac{w'}{w} \frac{v'}{v} - \frac{v^2}{w^2} &= a' \frac{w'}{w} - \frac{a'}{2} [a' - \\ &- (\ln(\frac{a'uw^2}{v}))']. \end{aligned} \quad (4.5.20c)$$

Então, reescrevendo, temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} + 2 \frac{u'}{u} \frac{w'}{w} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} - a' \frac{u'}{u} &= \frac{u''}{u} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} + 2 \frac{w''}{w} - 2 \frac{w'}{w} \frac{v'}{v} - \\ &- a' \left[\frac{a''}{a'} + \frac{a'}{2} - \frac{v'}{v} \right] = \frac{u'}{u} \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w} + \frac{w'^2}{w^2} - \frac{w'}{w} \frac{v'}{v} - \frac{v^2}{w^2} - \\ &- a' \frac{w'}{w} = \frac{a'}{2} \left[\frac{a''}{a'} + \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} + 2 \frac{w'}{w} - a' \right]. \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

- A1: Limite Riemanniano - examinaremos em primeiro lugar a restrição Riemanniana desta teoria. Quando temos $a = a_0 = \text{const.}$, a equação de Einstein se reduz à conhecida forma para o vazio, eq. (2.1.4):

$$\bar{R}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.5.22)$$

Mas $\Omega = e^{-a_0} = \text{const.}$ implica que $u^2 = u_0^2 = \text{const.}$, segundo a eq.

(11). Nesse caso, a eq. (22) resulta em

$$\left[\begin{array}{l} \frac{w''}{w} - \frac{w'}{w} \frac{v'}{v} = 0, \\ -\frac{ww''}{v^2} - \frac{w'^2}{v^2} + \frac{ww'v'}{v^3} + 1 = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.5.23a) \\ (4.5.23b) \end{array}$$

Da eq. (23a), resulta que

$$\frac{w'}{w} = 0 \quad \therefore \quad w = \text{const.}, \quad (4.5.24a)$$

ou

$$\left(\frac{w'}{v}\right)' = 0 \quad \therefore \quad w' = \text{const.} \cdot v = \gamma v, \quad (4.5.24b)$$

Ora, a eq. (23b) é incompatível com a condição $w = \text{const.}$, eq. (24a); a condição eq. (24b) redundante, nesse caso, em $\gamma^2 = 1$, de modo que temos

$$w' = \pm v. \quad (4.5.25)$$

Portanto, a solução geral obtida é

$$ds^2 [\psi_0, RST] = u_0^2 dt^2 - v^2(r) dr^2 - w^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.5.26)$$

sujeita à condição eq. (25). Todavia, esta condição é suficiente para obrigar que o tensor de Riemann da variedade se anule^[94],

$$\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (4.5.27)$$

Assim, essa solução é equivalente, a menos de uma transformação de

coordenadas, ao espaço vazio de Minkowski. O caso A, $\psi = \psi_0 = \text{const.}$, admite então como limite Riemanniano somente a solução trivial do vazio.

Consideremos a seguir a forma Weyliana ($a \neq \text{const.}$) da teoria, em dois casos: o de uma métrica conforme e o de uma métrica tipo Reissner-Nordstrom.

- A2: Métrica conforme - investigaremos o caso particular de uma métrica conforme do tipo

$$ds^2 [\psi_0, \text{WIST}] = u^2 (r) [dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)], \quad (4.5.28)$$

que representa uma transformação conforme da métrica de Minkowski [163]. Assim, teremos $u = v = \frac{w}{r}$, e a eq. (21) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} \left(a' - \frac{2}{r} \right) &= 3 \frac{u''}{u} - 3 \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} - a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' - \frac{u'}{u} \right) = \\ &= \frac{u''}{u} + \frac{u'}{u} \left(\frac{u'}{u} + \frac{4}{r} \right) - a' \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) = \frac{a'}{2} \left[\frac{a''}{a'} + 2 \frac{u'}{u} + \frac{2}{r} - a' \right]. \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

Comparando estas relações, obtemos equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} - 2 \frac{u'^2}{u^2} + \frac{u'}{u} a' &= \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} - \frac{a'}{2} \right) \left(2 \frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{u''}{u} + \frac{1}{r} \left(2 \frac{u'}{u} - \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right)^2 - 2a' \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) + \frac{3}{4} a'^2 = \\ &= \frac{a'}{2} \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' \right). \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Todavia, dessas igualdades resulta somente a relação

$$\frac{u'}{u} = \frac{a'}{2} \quad (4.5.31)$$

ou seja,

$$u^2 = c_0 \cdot e^a = \frac{c_0}{\Omega} \quad (4.5.32)$$

Mas segundo a eq. (11), temos

$$\frac{c_0}{\Omega} = c_0 \frac{ku^2}{(u^2 + k\beta\psi_0^2)} \quad ; \quad (4.5.33)$$

assim, obtemos finalmente que

$$u^2 = k(c_0 - \beta\psi_0^2) = \text{const.}, \quad (4.5.34)$$

o que representa não mais que a multiplicação por um fator conforme constante da métrica de Minkowski,

$$ds^2 (\text{Mink.}) = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.5.35)$$

Temos nesse caso $\Omega = \text{const.}$ e logo $a = \text{const.}$, de modo que recaímos na solução trivial do vazio Riemanniano discutida acima. Verificamos assim um caso em que a compatibilidade da solução métrica obtida com os vínculos dinâmicos é explicitamente negada.

- A3: Métrica tipo Reissner - Nordstrom - se escolhermos funções da métrica satisfazendo as relações $u = \frac{1}{v}$, $w = r$, encontramos

$$ds^2 [\psi_0, \text{WIST}] = u^2 dt^2 - \frac{1}{u^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.5.36)$$

que representa uma configuração estática, esfericamente simétrica da qual são casos particulares as soluções de Schwarzschild para o campo de uma massa M centrada na origem [9],

$$u_S^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (4.5.37)$$

e de Reissner-Nordstrom para uma partícula de carga α e massa M repousando na origem [60],

$$u_{RN}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\alpha^2}{2r^2}\right), \quad (4.5.38)$$

Quando $w = r$, as equações de Einstein eq. (21) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} - a' \frac{u'}{u} &= \frac{u''}{u} - \frac{u'}{u} \frac{v'}{v} - \frac{2}{r} \frac{v'}{v} - \\ &- a' \left[\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' - \frac{v'}{v} \right] = \frac{1}{r} \frac{u'}{u} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{v'}{v} - \frac{v^2}{r^2} - \frac{a'}{r} = \\ &= - \frac{a'}{2} \left[- \frac{a''}{a'} - \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - \frac{2}{r} + a' \right], \end{aligned} \quad (4.5.39)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) \left(a' - \frac{2}{r}\right) = a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a'\right), \quad (4.5.40a)$$

$$\frac{u''}{u} + \left(\frac{v'}{v} + \frac{1}{r}\right) \left(a' - \left(\frac{u'}{u} - \frac{1}{r}\right)\right) + \frac{v^2}{r^2} = a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{a'}{2}\right), \quad (4.5.40b)$$

$$\left(\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u}\right) \left(a' - \frac{2}{r}\right) + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} - 2a'\right) - \frac{2v^2}{r^2} = a' \left(\frac{a''}{a'} - a'\right). \quad (4.5.40c)$$

Se agora tomamos $u = v^{-1}$, temos que $\frac{u'}{u} = -\frac{v'}{v}$, resultando

$$a'' + \frac{a'^2}{2} = 0, \quad (4.5.41a)$$

$$\frac{u''}{u} + a' \left(\frac{1}{r} - \frac{u'}{u}\right) + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = 0, \quad (4.5.41b)$$

$$(a' - \frac{2}{r}) \frac{u'}{u} - \frac{1}{r^2} (1 - \frac{1}{u^2}) + 4 \frac{a'}{r} = \frac{3}{4} a'^2 . \quad (4.5.41c)$$

A eq. (41a) implica que

$$a(r) = 2 \ln(a_0 r + a_1) ; a_0, a_1 = \text{const.} , \quad (4.5.42)$$

e assim temos

$$\Omega(r) = (a_0 r + a_1)^{-2} . \quad (4.5.43)$$

Nesse caso, usando o vínculo eq. (11), encontramos

$$u^2(r) = \frac{k\beta\psi_0^2}{k\Omega(r)-1} = \frac{k\beta\psi_0^2 (a_0 r + a_1)^2}{k - (a_0 r + a_1)^2} . \quad (4.5.44)$$

Um cálculo simples, mas tedioso, nos mostra então que as eqs. (41b, c) redundam ambas em formas polinomiais do tipo

$$\sum c_n \Omega^n(r) = 0 \quad (4.5.45)$$

(ou equivalentemente para a , u ou r). Uma vez que as funções Ω^n são linearmente independentes, devemos ter

$$c_n = 0 , \forall n . \quad (4.5.46)$$

Uma inspeção sumária, entretanto, demonstra que tal condição é satisfeita somente se $a_0 = 0$, ou seja, se $a = \text{const.}$ e logo $\Omega = \text{const.}$, $u = \text{const.}$. Assim, mais uma vez, somente a solução trivial do vácuo é compatível com o sistema dinâmico obtido.

Esses resultados negativos, tomados em conjunto, parecem indicar que a condição (A), $\psi = \psi_0 = \text{const.}$, é demasiado restritiva para que possam ser obtidas soluções métricas consistentes, à exceção da trivial. Veremos que este não é o caso, toda-

via, quando admitimos para a componente ψ o comportamento dinâmico mais sofisticado prescrito pela condição (B), $\psi' = \frac{\alpha u v}{w^2}$.

- Caso B: $\psi' = \alpha u v w^{-2}$, $\alpha = \text{const.}$

Nesse caso, da eq. (10) temos

$$E_{\mu\nu} = \frac{\alpha^2}{w^4} [u^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - v^2 \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}] \quad , \quad (4.5.47)$$

e assim a equação de Einstein eq. (15) tem a forma

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} = & (a'' + \frac{1}{2} a'^2) \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 - a' \{^1_{\mu\nu}\} + \frac{a'}{2v^2} [a' - \frac{a''}{a'} - \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - 2\frac{w'}{w}] g_{\mu\nu} - \\ & - \frac{e^a \alpha^2}{w^4} [u^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - v^2 \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}] \quad . \end{aligned} \quad (4.5.48)$$

Investigaremos este cenário, bem como os respectivos limites Riemannianos, novamente no caso de métricas conforme e do tipo Reissner - Nordstrom.

- B1: Métrica conforme - adotando a métrica do tipo conforme eq. (28), temos

$$u = v = \frac{w}{r} \quad (4.5.49)$$

Nesse caso, as eqs. (48) tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} (a' - \frac{2}{r}) &= \frac{3u''}{u} - \frac{3u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} - a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' - \frac{u'}{u} \right) = \\ &= - \frac{a'}{2} \left(a' - \frac{a''}{a'} - 2 \frac{u'}{u} - \frac{2}{r} \right) + \frac{e^a \alpha^2}{2} \frac{1}{u^2 r^4} ; \end{aligned} \quad (4.5.50a)$$

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{4}{r} \frac{u'}{u} = -\frac{a'}{2} \left(a' - \frac{a''}{a'} - 2 \frac{u'}{u} - \frac{2}{r} \right) + a' \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) - \frac{e^{\alpha^2}}{2} \frac{1}{u^2 r^4} . \quad (4.5.50b)$$

Reescrevendo, obtemos as relações

$$\frac{u''}{u} - 2 \frac{u'^2}{u^2} + a' \frac{u'}{u} = \frac{1}{2} (a'' + \frac{1}{2} a'^2) , \quad (4.5.51a)$$

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} \left(a' - \frac{2}{r} \right) = \frac{1}{2} (a'' - a'^2) + a' \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) + \frac{e^{\alpha^2}}{2} \frac{1}{u^2 r^4} , \quad (4.5.51b)$$

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{4}{r} \frac{u'}{u} = \frac{1}{2} (a'' - a'^2) + 2a' \left(\frac{u'}{u} + \frac{1}{r} \right) - \frac{e^{\alpha^2}}{2} \frac{1}{u^2 r^4} \quad (4.5.51c)$$

Todavia, do vínculo (B) eq. (18), devido à eq. (49) temos

$$\psi' = \frac{\alpha u v}{w^2} = \frac{\alpha}{r^2} , \quad (4.5.52)$$

logo ψ assume a forma

$$\psi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \alpha_0 , \quad \alpha_0 = \text{const.} \quad (4.5.53)$$

Podemos então discriminar duas situações alternativas, de acordo com o valor da constante α_0 :

$$(\alpha_0 = 0): \quad \Omega(r) = \frac{1}{k} + \frac{\beta \alpha^2}{u^2 r^2} , \quad (4.5.54a)$$

$$(\alpha_0 \neq 0): \quad \Omega(r) = \frac{1}{k} + \frac{\beta (\alpha_0 r - \alpha)^2}{u^2 r^2} \quad (4.5.54b)$$

Examinemos as respectivas fases de Riemann e de Weyl apresentadas

por cada caso:

B1.1 [$\alpha_0 = 0$, Riemann] - o limite Riemanniano é obtido quando $a = a_0 = \text{const.}$. Da eq. (11) temos então

$$u^2(r) = \frac{k\beta\psi^2}{(k\Omega_0 - 1)} = \frac{k\beta\alpha^2}{(k\Omega_0 - 1)r^2} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{r^2} \quad (4.5.55)$$

onde $\tilde{\alpha} = \pm \left(\frac{k\beta\alpha^2}{(k\Omega_0 - 1)} \right)^{1/2} = \text{const.}$, e $\Omega_0 = e^{-a_0} = \text{const.}$ (eq. (13)).

Ora, no caso $a = a_0 = \text{const.}$, as eqs. (51) assumem a forma

$$\frac{u''}{u} - \frac{2u'^2}{u^2} = 0, \quad (4.5.56a)$$

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} = \frac{\alpha^2}{2\Omega_0} \frac{1}{u^2 r^4}, \quad (4.5.56b)$$

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{4}{r} = - \frac{\alpha^2}{2\Omega_0} \frac{1}{u^2 r^4}. \quad (4.5.56c)$$

É imediata então a verificação que o fator conforme $u^2(r) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{r^2}$ da do pela eq. (55) satisfaz o sistema eq. (56), desde que entre as constantes envolvidas valha a relação

$$\frac{\tilde{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{k\beta\alpha^2}{(k\Omega_0 - 1)} = \frac{\alpha^2}{2\Omega_0}, \quad (4.5.57)$$

de onde obtemos $\Omega_0 = \frac{1}{k(1-2\beta)}$, $a_0 = \ln k(1-2\beta)$.

Concluimos assim que a solução de Bertotti-Robinson [60, 164]

$$u(r) = \frac{\tilde{\alpha}}{r} = \frac{\text{const.}}{r}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{k(1-2\beta)/2} \alpha \quad (4.5.58)$$

é o limite Riemanniano da teoria quando $\alpha_0 = 0$ (ou seja, $\psi = \frac{-\alpha}{r}$).

B.1.2 [$\alpha_0 = 0$, WIST] - no caso $a \neq \text{const.}$ (i.e., a estrutura é WIST), comparando as eqs. (51b,c) obtemos

$$(a' - \frac{2u'}{u}) = \frac{e^a \alpha^2}{u^2 r^3} \quad (4.5.59)$$

Integrando, encontramos

$$\frac{u^2}{e^a} = u^2 \Omega = \frac{\alpha^2}{2r^2} + \alpha_1, \quad \alpha_1 = \text{const.} \quad (4.5.60)$$

Ora, usando o vínculo eq. (54a), obtemos

$$u^2 \Omega = \frac{u^2}{k} + \frac{\beta \alpha^2}{r^2} = \frac{\alpha^2}{2r^2} + \alpha_1, \quad (4.5.61)$$

e assim,

$$u^2(r) = \frac{k}{r^2} (\alpha_1 r^2 - \alpha^2 (\frac{1}{2} - \beta)), \quad (4.5.62)$$

o que representa a adição de um termo constante $k\alpha_1$ a uma métrica tipo Bertotti-Robinson eq. (58). Observemos que se $\alpha_1 = 0$, temos $a = \text{const.}$ e portanto recaímos no caso anterior. De fato, segundo as eqs. (54a,62),

$$a(r) = - \ln \Omega(r) = - \ln \left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha_1 r^2}{k\alpha^2 (1-2\beta) + 2k\alpha_1 r^2} \right) \quad (4.5.63)$$

de modo que se $\alpha_1 = 0$, então $\Omega = \Omega_0 = (k(1-2\beta))^{-1}$, como anteriormente.

Entretanto, quando verificamos a compatibilidade entre a eq. (60) (resultante das eqs. (51b,c)) e a eq. (51a), encontramos que tal só é possível se $\alpha_1 = 0$ - do que concluímos que o presente caso é compatível somente no seu limite Riemanniano, a

solução de Bertotti-Robinson eq. (58)

B.1.3 [$\alpha_0 \neq 0$, Riemann] - nesse caso, $\Omega(r)$ é dado pela eq. (54b).

O limite Riemanniano é dado por $a = a_0 = \text{const.}$, de onde obtemos $\Omega = \Omega_0 = e^{-a_0} = \text{const.}$ e a relação

$$u^2(r) = \frac{k\beta}{(k\Omega_0 - 1)} \frac{(\alpha_0 r - \alpha)^2}{r^2}, \quad (4.5.64)$$

de modo que

$$u(r) = u_0 \frac{(\alpha_0 r - \alpha)}{r}, \quad (4.5.65)$$

onde $u_0 \pm \left(\frac{k\beta}{k\Omega_0 - 1}\right)^{1/2}$.

As equações de Einstein eq. (50) reduzem-se a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} = 3 \frac{u''}{u} - 3 \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} = \frac{e^{a_0} \alpha^2}{2} \frac{1}{u^2 r^4}, \quad (4.5.66a) \\ \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{4}{r} \frac{u'}{u} = - \frac{e^{a_0} \alpha^2}{2} \frac{1}{u^2 r^4}. \quad (4.5.66b) \end{array} \right.$$

Substituindo a eq. (65) nesse sistema, verificamos que só há consistência se $u(r)$ for do tipo Bertotti-Robinson eq. (58), $u = \frac{\text{const.}}{r}$. Mas pela eq. (65) isso implica que $\alpha_0 = 0$ - o que é uma contradição com a hipótese eq. (54b). Assim, excluindo a solução trivial $u = \text{const.}$, o limite Riemanniano do presente caso é incompatível.

B.1.4 [$\alpha_0 \neq 0$, WIST] - temos $\psi(r) = \frac{(\alpha_0 r - \alpha)}{r}$, de modo que

$$\Omega(r) = \left(\frac{1}{k} + \frac{\beta(\alpha_0 r - \alpha)^2}{u^2 r^2} \right) = \frac{k\beta(\alpha_0 r - \alpha)^2 + u^2 r^2}{ku^2 r^2}. \quad (4.5.67)$$

Comparando novamente as eqs. (51b,c), encontramos a eq. (60),

$$u^2 \Omega = \frac{\alpha^2}{2r^2} + \alpha_1, \quad \alpha_1 = \text{const.}, \quad (4.5.68)$$

de onde obtemos

$$u^2(r) = \frac{k}{2r^2} (\alpha^2(1-2\beta) + 2(\alpha_1 - \beta\alpha_0^2)r^2 + 4\beta\alpha\alpha_0 r). \quad (4.5.69)$$

Mas, como vimos no caso (B.1.2), a condição eq. (68) é válida somente se $\alpha_1 = 0$ (o que, naquele caso, determinou a exclusiva compatibilidade do limite Riemanniano eq. (58)). Assim, temos

$$\begin{aligned} u^2(r) &= \frac{k}{2r^2} (\alpha^2(1-2\beta) - 2\beta\alpha_0^2 r^2 + 4\beta\alpha\alpha_0 r) = \\ &= \frac{k}{2r^2} (\alpha^2 - 2\beta(\alpha_0 r - \alpha)^2), \end{aligned} \quad (4.5.70)$$

e correspondentemente,

$$\Omega(r) = \left[\frac{k}{\alpha^2} (\alpha^2(1-2\beta) + 4\beta\alpha\alpha_0 r - 2\beta\alpha_0^2 r^2) \right]^{-1}. \quad (4.5.71)$$

Estes valores de $u(r)$ e $\Omega(r)$ satisfazem a eq. (68),

$$u^2 \Omega = \frac{\alpha^2}{2r^2}, \quad (4.5.72)$$

e são ademais consistentes com a eq. (51a). Substituindo agora essas equações nas restantes eqs. (51b,c), verificamos que o sistema eq. (51) é identicamente satisfeito. Portanto, a solução conforme eq. (70) satisfaz as equações de Einstein numa estrutura WIST eqs. (51) e é compatível com o vínculo eq. (54b).

- B2: Métrica tipo Reissner-Nordstrom - no caso de uma métrica RN, da eq. (36) temos

$$u = \frac{1}{v}, \quad w = r. \quad (4.5.73)$$

Então, do vínculo eq. (54b), obtemos

$$\psi' = \frac{\alpha u w}{w^2} = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (4.5.74)$$

de modo que encontramos, à exemplo da eq. (52),

$$\psi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \alpha_0, \quad \alpha_0 = \text{const.} \quad (4.5.75)$$

As equações de Einstein eqs. (51) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} \left(a' - \frac{2}{r} \right) &= \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} \left(a' - \frac{2}{r} \right) - a' \left(\frac{a''}{a'} + \frac{1}{2} a' \right) = \\ &= -\frac{a'}{2} \left(a' - \frac{a''}{a'} - 2 \frac{u'}{u} - \frac{2}{r} \right) + e^a \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{u^2 r^4}, \end{aligned} \quad (4.5.76a)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) + \frac{1}{r} \left(2 \frac{u'}{u} - a' \right) = -\frac{a'}{2} \left(a' - \frac{a''}{a'} - \frac{2u'}{u} - \frac{2}{r} \right) - \frac{e^a \alpha^2}{2} \frac{1}{u^2 r^4}. \quad (4.5.76b)$$

Examinemos os casos Riemanniano e Weyliano dessa teoria:

B.2.1: Limite Riemanniano - temos nesse caso $a = a_0 = \text{const.}$, de modo que mais uma vez

$$u^2 = \frac{k\beta (\alpha_0 r - \alpha)^2}{r^2 (k\Omega_0 - 1)} = \gamma^2 \psi^2, \quad (4.5.77)$$

onde $\gamma^2 = \frac{k\beta}{(k\Omega_0 - 1)} = \text{const.}$. As eqs. (76) tomam assim a forma

$$\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{r} \frac{u'}{u} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) - \frac{2}{r} \frac{u'}{u} = \frac{e^{a_0} \alpha^2}{2u^2 r^4}. \quad (4.5.78)$$

Ora, estas são as equações de Einstein usuais para o campo estático, esfericamente simétrico de uma partícula carregada localizada na origem, cuja solução é dada pela métrica de Reissner-Nordstrom eq. (38) para uma carga renormalizada $\tilde{\alpha} = e^{a_0/2} \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\Omega_0}}$,

$$u(r) = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2r^2}\right)^{1/2}. \quad (4.5.79)$$

Todavia, o vínculo eq. (75), quando temos a condição de Riemannização eq. (77), acarreta que

$$u^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2r^2}\right) = \gamma^2 \psi^2 = \gamma^2 \left(\alpha_0^2 - 2 \frac{\alpha_0 \alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right). \quad (4.5.80)$$

Assim, a solução tipo RN eq. (79) será uma solução satisfatória para o limite Riemanniano da teoria se tivermos entre as constantes do problema as relações $\alpha_0 = \pm \sqrt{2\Omega_0}$, $m = \frac{\pm \alpha}{\sqrt{2\Omega_0}}$, $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{2\Omega_0}}$, $\Omega_0 = \frac{1}{k(1-2\beta)}$.

B.2.2: Solução WIST - da eq. (76a), comparando os dois primeiros termos obtemos

$$a'' + \frac{1}{2} a'^2 = 0. \quad (4.5.81)$$

Temos então ou a solução $a' = 0$ (que corresponde ao caso Riemanniano anterior) ou

$$a(r) = \ln(a_0 r + a_1)^2, \quad a_0, a_1 = \text{const.} \quad (4.5.82)$$

donde

$$\Omega(r) = (a_0 r + a_1)^{-2}. \quad (4.5.83)$$

Assim, das eqs. (54b, 75), vem

$$u^2(r) = \frac{k\beta\psi^2}{k\Omega-1} = \frac{k\beta(\alpha_0 r + \alpha_0)^2 (a_0 r + a_1)^2}{r^2 (k - (a_0 r + a_1)^2)} \quad (4.5.84)$$

Sob a condição eq. (81), as equações de Einstein eqs. (76) tornam-se

$$\left[\begin{array}{l} \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} \left(a' - \frac{2}{r} \right) = - \frac{a'}{2} \left(\frac{3}{2} a' - \frac{2u'}{u} - \frac{2}{r} \right) + \frac{e^{a\alpha^2}}{2} \frac{1}{u^2 r^4}, \\ \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2u'}{u} - a' \right) = - \frac{a'}{2} \left(\frac{3}{2} a' - \frac{2u'}{u} - \frac{2}{r} \right) - \\ - \frac{e^{a\alpha^2}}{2} \frac{1}{u^2 r^4}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.5.85a) \\ (4.5.85b) \end{array}$$

Um cálculo simples, mas muito extenso, que realizamos com o auxílio de técnicas de computação algébrica, nos demonstra que as soluções eqs. (82,84) são incompatíveis com o sistema eqs. (85), de modo que uma vez mais apenas a solução trivial é admissível.

É conveniente, para análise posterior, sumarmos os diversos resultados obtidos ao longo da presente investigação sobre soluções estáticas com simetria esférica do cenário não-mínimo eqs. (3,5) no quadro ilustrativo abaixo:

QUADRO I

SOLUÇÕES ESTÁTICAS COM SIMETRIA ESFÉRICA, CASOS RIEMANNIANO E WIST

$$ds^2 = u^2(r) dt^2 - v^2(r) dr^2 - w^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\text{Eqs. Maxwell eq. (14):} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_0 = \text{const. (Caso A)} \\ \psi' = \alpha \frac{uv}{w^2}, \quad \alpha = \text{const. (Caso B)} \end{array} \right.$$

I - Tipo RN : $u = \frac{1}{v}, w = r$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso A: } \psi = \psi_0 = \text{const.} \\ \\ \text{Caso B: } \psi' = \frac{\alpha}{r^2} \dots \psi = -\frac{\alpha}{r} + \alpha_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann} \rightarrow \text{Minkowski} \\ \text{WIST } [a' \neq 0] \rightarrow \text{Minkowski} \\ \\ \text{Riemann} \rightarrow u^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2r^2}\right) \\ \text{(solução de Reissner-Nordstrom} \\ \text{eq. (79))} \\ \\ \text{WIST} \rightarrow \text{não compatível} \end{array} \right.$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

II - Tipo Conforme: $u = v = \frac{w}{r}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso A: } \psi = \psi_0 = \text{const.} \\ \\ \text{Caso B: } \psi' = \frac{\alpha}{r^2} \dots \psi = -\frac{\alpha}{r} + \alpha_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann} \rightarrow \text{Minkowski } [u=\text{const}] \\ \text{WIST} \rightarrow \text{Minkowski} \\ \\ \text{B}_1: \alpha_0 = 0 \\ \text{B}_2: \alpha_0 \neq 0 \end{array} \right.$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$B_1: \alpha_0 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann} \rightarrow u^2 = \frac{\text{const.}}{r} \text{ (solução de Bertotti-Robinson eq. (58))} \\ \\ \text{WIST} \rightarrow \text{não compatível (Minkowski)} \end{array} \right.$
---------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$B_2: \alpha_0 \neq 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann} \rightarrow \text{não compatível} \\ \\ \text{WIST} \rightarrow u^2(r) = \frac{k}{2r^2} (\alpha^2 - 2\beta(\alpha - \alpha_0 r)^2) \end{array} \right.$
------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(solução conforme eq. (70))

estruturas, de Riemann e de Weyl — e consistente do sistema não-
-mínimo eqs. (1,2,3) venha a requerer a adoção de hipóteses menos
restritivas para o comportamento do campo A_μ .

CAPITULO V

ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE CAMPOS ESCALARES COM A GRAVITAÇÃO

5.1. INTRODUÇÃO

Desde sua primeira aparição, em 1917, a constante cosmológica Λ introduzida por Einstein^[42] para assegurar a viabilidade, no contexto da TRG, de um modelo cosmológico estático, sem expansão, rotação ou deformação (o chamado universo de Einstein^[165]) tem provocado uma série de controvérsias e especulações concernentes à sua possível origem física - que, ainda hoje, não foi definitivamente estabelecida. Com efeito, para acomodar sua concepção "Parmenídica" de um Cosmos finito, eterno e imutável às equações de campo prescritas pela TRG, Einstein teve de recorrer à inclusão, de maneira ad hoc, de uma nova constante cósmica fundamental que permitisse a alteração dos atributos do campo gravitacional em escala não-local, daí resultando as equações de Einstein modificadas

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} \quad , \quad (5.1.1)$$

onde $T_{\mu\nu}$ representa o conteúdo material do modelo (no caso do universo de Einstein, um fluido perfeito incoerente de densidade constante $\rho = 2\Lambda/k$). Num sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$),

Λ tem a dimensão [comprimento]⁻². No modelo de Einstein, a presença de uma constante cosmológica de valor positivo torna-se equivalente, segundo a equação de Raychaudhury (vide seção 1.2), à introdução de uma pressão negativa global (ou seja, de uma força cósmica repulsiva) que contrabalançaria, em larga escala, o caráter puramente atrativo da interação gravitacional entre os elementos do fluido, de modo a impedir o colapso gravitacional da matéria e permitir, assim, a obtenção de um Cosmos estático e invariável.

Não obstante a instabilidade intrínseca do modelo em relação a pequenas perturbações e a observação de Hubble de que o Universo se encontraria num processo evolutivo de expansão global logo determinassem o abandono da proposta original de Einstein, ao longo dos anos seguintes verificou-se que, do ponto de vista prático, a introdução da constante Λ acarreta muitos tipos de efeitos cosmológicos interessantes; para citar somente um exemplo importante, um valor suficientemente elevado de Λ pode ocasionar (através da geração de largas pressões negativas) a violação das condições dos teoremas da singularidade e, conseqüentemente, a consecução de modelos FRW não-singulares (solução de De Sitter^[29,35]).

A inclusão de um termo constante Λ multiplicando o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tal como na equação (1), de fato, é a alteração mais simples e imediata que se poderia introduzir nas equações de campo de Einstein (eq. 1.2.1) respeitando, simultaneamente, a lei da conservação do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ expressa pela equação (1.2.2) ou equação (4.4.52). Por outro lado, embora a exata proveniência física de uma tal constante permaneça

como um tema polêmico ainda em nossos dias, desde a utilização de métodos da Teoria Quântica de Campos em assuntos cosmológicos tornou-se patente que a presença de Λ não deveria causar incômodo, mas bem ao contrário - sua ausência é que seria de espantar^[156,166]. Com efeito, a despeito dos argumentos de alguns cosmólogos segundo os quais um valor muito pequeno ($\Lambda < 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$) deve ser esperado para Λ , a moderna Física das Partículas Elementares veio a oferecer uma tal variedade de processos favorecendo a ocorrência de uma constante cosmológica não-nula (e mesmo muito grande) que tornou-se forçosa a consideração da questão inversa: por que o valor de Λ deveria ser quase exatamente nulo? Nesta interrogação consiste, sucintamente, o chamado "problema da constante cosmológica" a que nos referimos na seção 1.3.

Em anos recentes, a consideração dos efeitos cosmológicos advindos da introdução da constante Λ no esquema convencional da TRG voltou a receber impulso a partir da entrada em voga, no princípio da atual década, dos chamados "cenários inflacionários" surgidos quer da aplicação da Teoria Quântica de Campos ao problema da singularização gravitacional (modelo de Starobinsky), quer no contexto das Teorias Grande-Unificadas da Física de Partículas (vide seção 1.3). Em alguns desses cenários, um mecanismo de quebra espontânea de simetria de um campo escalar primordial conformalmente acoplado à gravitação induz a existência de um estado metaestável do sistema campo escalar-gravitação correspondendo a um período de predomínio de um termo tipo "constante cosmológica" sobre as demais contribuições ao tensor energia-momento efetivo, ao longo do qual a energia latente disponível do campo é rapidamente convertida na geração de uma fase de expansão

exponencial das dimensões cósmicas, do tipo De Sitter^[56]. Este é exemplo, todavia, não é de modo algum a única abordagem contemporânea em que uma associação entre campos escalares não-minimalmente acoplados e a constante Λ configura situações de interesse.

Efetivamente, a adoção de acoplamento não - mínimos entre campos escalares e a gravitação conduz a importantes modificações das propriedades tradicionalmente atribuídas à interação gravitacional, tal como no caso anterior do acoplamento conforme de campos vetoriais. Assim, deparamo-nos de modo análogo com efeitos como a renormalização da constante gravitacional, a geração de um termo de constante cosmológica efetivo e, através do uso do método de Palatini, a obtenção de estruturas geométricas do tipo WIST.

Procuraremos explorar, no que se segue, alguns dos efeitos peculiares acima citados, em associação com diferentes aspectos relacionados à constante Λ . Para posterior aproveitamento, principiaremos nossas considerações pela apresentação de um caso concreto já conhecido em que um mecanismo de quebra de simetria, induzida pela constante Λ , de um campo escalar conformalmente acoplado num espaço de Riemann pode ocasionar a geração de gravitação repulsiva (antigravidade)^[167]; a seguir, lançando mão do princípio de Palatini elaboramos uma teoria em que a geração de uma constante cosmológica é associada a uma transição estrutural entre geometrias de Weyl e Riemann^[168]. Por fim, acompanhando os argumentos de Belinskii e Khalatnikov^[169] acerca da analogia entre teorias escalar-tensoriais da gravitação e modelos Riemannianos pentadimensionais, discutimos o caso de nosso cenário não - mínimo para um campo escalar num WIST e, paralelamente, derivamos uma solução não - singular um modelo pentadimensional em que

incluímos a constante Λ .

5.2. QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA E REPULSÃO CÔSMICA

Em nossos dias, a cogitação de concepções altamente ousadas e especulativas não é incomum em diversos domínios de investigação física, ocasionando perplexidades e resistências metafísicas em grau bem inferior que em tempos passados. Assim, contemporaneamente tornou-se admissível a discussão de processos envolvendo, digamos, efeitos de gravitação repulsiva implicados por algumas teorias sob corrente escrutínio; por exemplo, não há muito foi mostrado que a teoria da Supergravidade^[170] dotada de $(N = 2, 3, \dots, 8)$ geradores fermiônicos conduz à geração de antigravidade^[171]. Parece inquestionável, contudo, que a grande maioria dos físicos permanece adotando uma postura conservadora e admite tomar em consideração apenas fenômenos gravitacionais puramente atrativos.

Não obstante as prudentes razões que motivam esta atitude reservada, no entanto, seria indubitavelmente conveniente que se procedesse ao exame dos variados mecanismos possíveis de que a Natureza disporia para ter tornado a antigravidade num fenômeno real do mundo físico, uma vez que esse estudo nos permitiria compreender, concomitantemente, porquê certas condições ou propriedades são proibidas, ao passo que outras configurações são livres para existir (vide seção 6.4 adiante). Ainda mais interessante, desse ponto de vista, seria a consecução de esquemas teóricos em que nenhuma das leis físicas bem estabelecidas fosse violada e os efeitos antigravitacionais pudessem ser atribuídos a for-

mas costumeiras de matéria (tal como fótons, neutrinos, etc.). Um esquema com estas características foi recentemente desenvolvido no âmbito do acoplamento não-mínimo de campos escalares com a gravitação e, com vistas a nossas futuras aplicações, vale a pena de linear aqui um breve resumo das principais idéias e argumentos com preendidos em sua elaboração [167,168].

Vamos assim considerar a interação entre um campo escalar complexo $\phi(x)$ conformalmente acoplado e a gravitação descrita pela Lagrangiana não-mínima

$$L_\phi = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{6} R \phi^* \phi + \phi^*_{;\mu} \phi_{;\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^* \phi) + 2 \Lambda \right] \quad (5.2.1)$$

onde ϕ^* é o complexo conjugado de ϕ , $V(\phi^* \phi)$ é um potencial apropriado e Λ é a constante cosmológica que, como veremos, desempenhará um papel crucial nos desenvolvimentos que se seguem. Comparando a equação (1) com a Lagrangiana conformalmente invariante equação(2.3.5), observamos que a presença do termo de Einstein - Hilbert equação (2.1.3) viola a invariância conforme da teoria.

Supondo uma estrutura Riemanniana dada a priori, a variação convencional da ação associada à equação (1) fornece as seguintes equações de movimento:

$$\square \phi + \frac{1}{6} R \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad , \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} \phi^* \phi\right) G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}(\phi^*_{;\mu} \phi_{;\nu} + \phi^*_{;\nu} \phi_{;\mu}) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi^*_{;\sigma} \phi_{;\lambda} g^{\sigma\lambda} + V + 2\Lambda) - \\ & - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} (\phi^* \square \phi + \phi \square \phi^* + 2\phi^*_{;\sigma} \phi_{;\lambda} g^{\sigma\lambda}) + \\ & + \frac{1}{6} (\phi^*_{;\mu} \phi_{;\nu} + \phi^*_{;\nu} \phi_{;\mu}) . \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Escolheremos para o potencial V a forma quártica^[172]

$$V(\phi^* \phi) = -m^2 \phi^* \phi + \sigma (\phi^* \phi)^2 \quad , \quad (5.2.4)$$

onde m é a massa do campo e σ é a chamada "constante de auto-acoplamento" (vide seção 2.3). Nesse caso, tomando o traço da equação de Einstein eq. (3) obtemos

$$\frac{1}{k} R = m^2 \phi^* \phi - 4\Lambda \quad . \quad (5.2.5)$$

Consequentemente, a eq.(2) para o campo escalar assume a forma

$$\square \phi + (m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda) \phi + (\frac{1}{6} km^2 - 2\sigma) \phi^2 \phi = 0. \quad (5.2.6)$$

onde fizemos $\phi^2 \equiv \phi^* \phi$. Verificamos assim que os efeitos da interação gravitacional sobre o comportamento do campo ϕ compreendem a renormalização da massa m ,

$$m^2 \rightarrow m_{\text{eff}}^2 = m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \quad , \quad (5.2.7)$$

e da constante de auto-interação σ ,

$$\sigma \rightarrow \sigma_{\text{eff}} = \sigma - \frac{1}{12} km^2 \quad (5.2.8)$$

Reconhecemos na eq.(7) a possibilidade de indução, devido à presença da constante Λ (que supomos positiva), de um mecanismo de quebra espontânea de simetria (mecanismo de Higgs)^[48,90].

À guisa de ilustração, consideraremos de modo sucinto os pontos principais deste mecanismo no espaço-tempo plano da TRE. Nesse caso, temos uma Lagrangiana análoga à eq. (2.2.1),

$$L_{\text{Mink}} = \phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} \eta^{\mu\nu} + V(\phi^* \phi) \quad , \quad (5.2.9)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski e V é o poten

cial eq.(4). A equação para o campo ϕ tem então a forma (vide eq. 2.2.2).

$$\begin{matrix} (o) \\ \square \end{matrix} \phi + m^2 \phi - 2\sigma \phi^2 \phi = 0. \quad (5.2.10)$$

Se procuramos a solução não-trivial (i.é, não nula) mais simples dessa equação, $\phi = \phi_0 = \text{const.}$, obtemos

$$\phi_0^2 = \frac{m^2}{2\sigma}. \quad (5.2.11)$$

Ora, este valor corresponde a um mínimo da energia (no caso, do potencial V); assim, a eq.(11) representa uma solução fundamental do sistema (solução das equações de campo que extremiza a energia). Observemos que no estado fundamental ϕ_0 o sistema não exibe invariância sob uma transformação de fase do tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \alpha = \text{const.}, \quad (5.2.12)$$

que no entanto é manifestada pela Lagrangiana eq.(9). Em vista desse fato, dizemos que no estado ϕ_0 o sistema quebra espontaneamente a simetria fundamental de gauge da teoria. Observemos ainda que, se $\sigma < 0$, a solução eq.(11) só é possível se a massa do campo ϕ for imaginária^[83].

De acordo com este resumo, portanto, o próximo passo em nossa presente análise deve ser a busca de uma solução fundamental $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ que extremize a energia do campo ϕ . Aqui surge uma pequena dificuldade, concernente à definição apropriada da energia de um campo não-minimalmente acoplado à gravitação. Todavia, esta obstrução técnica é facilmente contornada se adotamos a moderna abordagem variacional eq.(2.2.9), ou seja, se tomamos a expressão do tensor momentum-energia dada pela relação^[157,172]

$$\delta \int \sqrt{-g} L_\phi d^4x = \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu}[\phi] \delta g^{\mu\nu}, \quad (5.2.13)$$

Nesse caso, obtemos

$$T_{\mu\nu}[\phi] = t_{\mu\nu}^{\min} + \frac{1}{6} (\square \phi^2 g_{\mu\nu} - \phi^2{}_{,\mu}{}_{||\nu}) - \frac{1}{6} \phi^2 G_{\mu\nu}, \quad (5.2.14)$$

onde $t_{\mu\nu}^{\min}$ é o tensor energia-momentum do acoplamento mínimo (vide eq. (2.2.8)),

$$t_{\mu\nu}^{\min} = \frac{1}{2} (\phi^*{}_{,\mu} \phi_{,\nu} + \phi^*{}_{,\nu} \phi_{,\mu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi^*{}_{,\sigma} \phi_{,\lambda} g^{\sigma\lambda} + V(\phi^2)). \quad (5.2.15)$$

Definindo o tensor auxiliar

$$t_{\mu\nu} \equiv t_{\mu\nu}^{\min} + \frac{1}{6} (\square \phi^2 g_{\mu\nu} - \phi^2{}_{,\mu}{}_{||\nu}), \quad (5.2.16)$$

e empregando a equação de Einstein eq. (3) (que inclui o termo cosmológico $\Lambda g_{\mu\nu}$), podemos formalmente reescrever a eq. (14) como

$$T_{\mu\nu}[\phi] = t_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \phi^2 G_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \phi^2 \left[\frac{t_{\mu\nu}}{(\frac{1}{k} - \frac{\phi^2}{6})} - \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{(\frac{1}{k} - \frac{\phi^2}{6})} \right], \quad (5.2.17)$$

do que resulta

$$T_{\mu\nu}[\phi] = \frac{t_{\mu\nu}}{(1 - \frac{k\phi^2}{6})} - \frac{k\Lambda\phi^2}{(6 - k\phi^2)} g_{\mu\nu}. \quad (5.2.18)$$

A energia $E(\phi)$ associada ao campo ϕ no estado $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ é então fornecida pela fórmula

$$E(\phi_0) \equiv T^0_0[\phi_0] = \frac{3m^2\phi_0^2 - 3\sigma\phi_0^4 - k\Lambda\phi_0^2}{6 - k\phi_0^2}. \quad (5.2.19)$$

Por conveniência, vamos acrescentar à eq. (19) um termo constante $E(0) = -\Lambda$ (que não influi no cálculo dos extremos da função $E(\phi)$,

é claro) para renormalizar a energia do ponto zero. Assim, temos finalmente a expressão

$$E_{\text{ren}}(\phi_0) = E(\phi_0) - \Lambda = \frac{3m^2\phi_0^2 - 3\sigma\phi_0^4 - 6\Lambda}{6 - k\phi_0^2}, \quad (5.2.20)$$

cujos extremos (no caso não-trivial $\phi_0 \neq 0$) são dados por uma equação algébrica de quarta ordem,

$$k\sigma\phi_0^4 - 12\sigma\phi_0^2 + 6m^2 - 2k\Lambda = 0 \quad (5.2.21)$$

Ora, de acordo com a equação de movimento do campo ϕ eq.(6), as soluções $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ admissíveis são

$$\left[\begin{array}{l} \phi_0 = 0 \quad (\text{solução trivial}) \quad (5.2.22a) \\ \phi_0^2 = 2 \frac{(2k\Lambda - 3m^2)}{(k\sigma - 12\sigma)} \quad (5.2.22b) \end{array} \right.$$

Um cálculo simples permite então mostrar que a solução não-trivial eq.(22b) não é imediatamente compatível com a condição de extremização da energia eq.(21); tal será o caso somente se entre a massa m , a constante de auto-interação σ e a constante cosmológica Λ vigorar a relação

$$m^4 = 8\sigma\Lambda. \quad (5.2.23)$$

Esse resultado indica que será possível a ocorrência de uma quebra espontânea de simetria (ou seja, a eq.(22b) poderá ser uma solução fundamental do sistema não-mínimo representado pela Lagrangiana eq.(1)) apenas nos casos em que a eq.(23) for válida. Esta é decerto uma condição peculiar e restritiva, mas não implausível; curiosamente, se vale a eq.(23) obtemos

$$\phi_0^2 = \frac{4\Lambda}{m^2} = \frac{m^2}{2\sigma} \quad , \quad (5.2.24)$$

ou seja, a solução não-trivial eq. (22b) coincide com o valor correspondente no espaço de Minkowski, eq. (11).

Observemos que a eq. (21) indica que a solução não-trivial eq. (22b) será um mínimo da energia, e portanto uma solução fundamental com simetria quebrada do sistema, quando tivermos $(km^2 - 12\sigma) > 0$, o que equivale, pela eq. (8), a $\sigma_{\text{eff}} < 0$. Ora, usando as eqs. (7,8), verificamos que podemos reescrever a solução eq. (22b) como

$$\phi_0^2 = \frac{m_{\text{eff}}^2}{2\sigma_{\text{eff}}} \quad . \quad (5.2.25)$$

Concluimos assim que, em analogia com o caso do espaço-plano, a existência da solução fundamental eq. (22b) implica que a massa efetiva m_{eff} é imaginária ($m_{\text{eff}}^2 < 0$). O papel da constante Λ no presente esquema, portanto, é o de permitir que a massa m do campo seja real ao passo que uma massa efetiva imaginária é gerada, o que torna possível a existência de um estado fundamental do sistema distinto do caso trivial $\phi_0 = 0$. Uma vez que a simetria de gauge da teoria é quebrada neste estado, podemos então associar a presença da constante Λ a um mecanismo de quebra induzida de simetria [168].

Quando o campo ϕ se encontra no estado fundamental $\phi_0 = + \frac{2\sqrt{\Lambda}}{m}$ (ou, equivalentemente, no estado complementar $\phi_0 = - \frac{2\sqrt{\Lambda}}{m}$), a eq. (10) nos diz que a energia associada ao campo ϕ é nula, $E_{\text{ren}}(\phi_0) = 0$. Isto implica que a equação de Einstein eq. (3) para a geometria reduz-se à forma $G_{\mu\nu} = 0$. Assim, no que con

cerne à gravitação, no caso da quebra induzida de simetria acima descrita o sistema comporta-se como se fosse livre de matéria. O que sucederia, entretanto, se outros tipos de matéria (minimalmente acoplada) estivessem presentes e o campo ϕ alcançasse um dos estados não-triviais $\phi_0 = \pm 2 \frac{\sqrt{\Lambda}}{m}$? Da eq. (3) podemos de antemão concluir que a constante gravitacional k seria renormalizada, $k_{ren} = (\frac{1}{k} - \frac{\phi_0^2}{6})^{-1}$; por outro lado, se o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}[\text{mat}]$ recém-incluído não tiver traço nulo ($T^\mu_\mu[\text{mat}] = 0$), pelas eqs. (5,6) é impossível a ocorrência da solução $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ Essa condição é satisfeita por formas de energia radiante, como um campo de fótons ou de neutrinos; isto posto, um cálculo rápido nos fornece a relação

$$G_{\mu\nu} = - k_{ren} T_{\mu\nu} [\text{rad}] = - \frac{3km^2}{(3m^2 - 2k\Lambda)} T_{\mu\nu} [\text{rad}] , \quad (5.2.26)$$

onde $T^\mu_\mu [\text{rad}] = 0$.

Quando a condição de mínimo $(2k\Lambda - 3m^2) > 0$ é válida, as soluções $\phi_0 = \pm \frac{2\sqrt{\Lambda}}{m}$ são estáveis e

$$k_{ren} = \frac{3km^2}{(3m^2 - 2k\Lambda)} > 0 , \quad (5.2.27)$$

como no caso costumeiro. Todavia, se a massa m é suficientemente minúscula ($m < 10^{-33} \text{ eV}$), de modo que $(3m^2 - 2k\Lambda) < 0$, então o sistema se encontra numa condição instável de máximo em que antigravidade (i.é., $k_{ren} < 0$) pode ser gerada. Como se acredita que, nos primórdios da evolução cósmica, a contribuição dominante para a energia provenha da radiação (fótons, neutrinos), é lícito conjecturar que o mecanismo de quebra de simetria induzida pela constante

A acima descrito poderia ser o responsável, devido à geração de gravitação repulsiva durante essa fase de dominância da radiação, pela presente era expansiva de nosso Universo [167, 173].

A forma livre de matéria $G_{\mu\nu} = 0$ das equações de Einstein provém da relação eq. (23) imposta sobre os parâmetros m , σ e Λ . Descartando esta condição, obtemos (no caso $\sigma = 0$, ausência de auto-acoplamento) que a solução eq. (22) se torna $\phi_0^2 = \frac{4k\Lambda - 6m^2}{\text{km}^2}$. Os estados de energia correspondentes são altamente instáveis e decaem assintoticamente para a solução de De Sitter; de fato, a equação de Einstein eq. (3) assume nesse caso a forma

$$G_{\mu\nu} = \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu} \quad , \quad (5.2.28)$$

onde $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{3}{2} m^2$. Esta análise demonstra que a presença da constante de auto-acoplamento σ ajuda a aumentar a estabilidade das soluções com quebra de simetria [168].

5.3 TRANSIÇÕES WIST - RIEMANN E A CONSTANTE COSMOLÓGICA

Como assinalamos na introdução do presente capítulo, ainda em nossos dias permanecem em aberto as questões acerca da proveniência e da precisa natureza física da constante cosmológica Λ . Embora a inclusão apriorística dessa nova constante cósmica no rigoroso esquema previsto pela TRG parecesse um tanto exdrúxula já ao próprio Einstein, subsequentemente esse tipo de agregação ad hoc de um objeto cósmico de origem inescrutável às equações da gravitação inspirou diversas outras propostas de modificação ou suplementação da teoria original de Einstein, de a-

cordo com variadas argumentações cosmológicas^[19]. Modernamente, atendendo à crescente tendência de contextualização dos fenômenos gravitacionais que apontamos no panorama conceitual desenvolvido no Cap.1, diversas abordagens têm buscado compreendê-los na companhia de outros processos ou campos físicos; assim, nas últimas décadas acentuou-se a investigação de teorias em que a ocorrência de um termo tipo constante cosmológica é associada à atividade dinâmica de campos físicos complementares ao campo gravitacional, admitidos como co-partícipes na descrição das propriedades físicas do espaço-tempo (como no exemplo da quebra espontânea de simetria de um campo escalar cósmico nos modelos inflacionários que citamos anteriormente).

Nesse espírito, gostaríamos de discutir aqui um mecanismo alternativo de geração de um termo cosmológico efetivo, no qual a presença da constante Λ é associada a uma transição estrutural da geometria da variedade, decorrente da "Weylização" do espaço-tempo ocasionada pelo acoplamento não-mínimo de um campo escalar $\phi(x)$ com a gravitação^[174]. Para isso, consideremos mais uma vez a Lagrangiana não-mínima eq.(2.1),

$$L_\phi = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R - \frac{1}{6} R \phi^* \phi + \phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^* \phi) + 2\Lambda \right], \quad (5.3.1)$$

onde por generalidade mantivemos a constante cosmológica Λ "básica".

Numa variedade afim não determinada a priori, a variação à Palatini (ou seja, a variação independente de ϕ , $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$) da eq. (1) fornece as seguintes equações de movimento:

$$[\delta\phi^*]: \quad \square \phi + \frac{1}{6} R \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad ; \quad (5.3.2)$$

$$[\delta g^{\mu\nu}]: \quad \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} \phi^2\right) G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\phi_{;\mu}^* \phi_{;\nu} + \phi_{;\nu}^* \phi_{;\mu}) + \\ + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi_{;\sigma}^* \phi_{;\lambda} g^{\sigma\lambda} + V(\phi^2) + 2\Lambda) \quad , \quad (5.3.3)$$

$$[\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}]: \quad g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu} (-\ln \Omega)_{,\alpha} \quad , \quad (5.3.4)$$

onde $\phi^2 \equiv \phi^* \phi$ e, a exemplo da eq.(4.2.17), fizemos

$$\Omega(x) \equiv \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} \phi^2(x)\right). \quad (5.3.5)$$

A eq.(5) nos indica que a variedade é do tipo WIST, sendo caracterizada pelo vetor de gauge ω_α dado por

$$\omega_\alpha = (-\ln \Omega)_{,\alpha} \quad . \quad (5.3.6)$$

Assim, embora aparentemente estejam ausentes na equação de Einstein eq.(3) termos dependentes de derivadas do campo ϕ tais como na eq.(2.3), o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ num WIST conterà contribuições análogas devidas ao vetor ω_α (vide eq.(3.2.46)). A equação de movimento do campo ϕ eq.(2), do mesmo modo, resulta modificada em relação à eq.(2.2) em virtude da presença do escalar de curvatura R , aqui Weyliano (vide eq.(3.2.44)). No caso de um potencial quártico $V(\phi^2)$ semelhante à eq.(2.4),

$$V(\phi^2) = -m^2 \phi^2 + \sigma(\phi)^2 \quad , \quad (5.3.7)$$

a contração da equação de Einstein eq.(3) e o uso da equação de movimento eq.(2) implicam que

$$\frac{1}{k} R = m^2 \phi^2 - 4\Lambda - \frac{1}{2} \square \phi^2 \quad , \quad (5.3.8)$$

de modo que a equação para o campo ϕ eq.(2) se torna

$$\square \phi + \left[-\frac{1}{k} \square \phi^2 + (m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda) \right] \phi + \left(\frac{km^2}{6} - 2\sigma \right) \phi^2 \phi = 0 . \quad (5.3.9)$$

Procuramos elaborar uma solução homogênea e isotrópica do sistema eqs. (2,3,4), escolhendo um elemento de linha tipo FRW similar à eq. (4.2.19),

$$ds^2 = dt^2 - s^2(t) [dx^2 + \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] , \quad (5.3.10)$$

onde, de modo análogo à eq. (4.2.24), temos

$$\frac{\Sigma''}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma(\chi)} \frac{d^2 \Sigma(\chi)}{d\chi^2} = -\epsilon , \quad \epsilon = (0, +1, -1) . \quad (5.3.11)$$

Por simplicidade, vamos tomar $\phi^* = \phi$ (ou seja, o campo ϕ é real) e adotar o ansatz temporal

$$\phi = \phi(t) , \quad (5.3.12)$$

de sorte que as únicas variáveis a determinar no problema são a função $\phi(t)$ eq. (12) e o fator de expansão da métrica $S(t)$ da eq. (10). Nesse caso, temos que

$$\omega_\alpha = a(t) , \quad \dot{\omega}_\alpha = \dot{a} \delta^0_\alpha \quad (5.3.13)$$

onde a exemplo da eq. (4.3.17) fizemos

$$a(t) \equiv -\ln \Omega(t) = -\ln \left(\frac{1}{k} - \frac{\phi^2(t)}{6} \right) ; \quad (5.3.14)$$

inversamente, tendo em vista a observação que se segue à eq. (4.4.14), podemos escrever

$$\phi^2(t) = \frac{6}{k} (1 - k\Omega(t)) = \frac{6}{k} (1 - k e^{-a(t)}) . \quad (5.3.15)$$

As equações de movimento eqs. (2,3) no caso do ansatz eq. (12) se tornam

$$(1 - \frac{k\phi^2}{6}) (\ddot{\phi} + (\ln \sqrt{-g}) \dot{\phi}) - \frac{k}{6} \dot{\phi}^2 + (m^2 - \frac{2}{3}k\Lambda) + (\frac{km^2}{6} - 2\sigma)\phi^2 = 0, \quad (5.3.16)$$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{k} - \frac{\phi^2}{6}) G_{\mu\nu} &= (\frac{1}{k} - \frac{\phi^2}{6}) [\bar{G}_{\mu\nu} - (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - g_{\mu\nu}) \ddot{a} - \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}) \dot{a}^2 + \\ &+ \ddot{a} (\{^0_{\mu\nu}\} + \{^{\alpha}_{\alpha}\} g_{\mu\nu})] = -\dot{\phi}^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\dot{\phi}^2 + V + 2\Lambda), \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

onde fizemos uso da definição eq.(2.2.6) e da expressão eq. (3.2.46) para o tensor de Einstein Weyliano, quando ω_{α} é dado pela eq.(13).

Outrossim, empregando as eqs.(4.3.22) e a relação eq.(15), encontramos por fim o sistema

$$\frac{k(\ddot{a} + 3/2 \dot{a}\dot{b} - \dot{a}^2)}{2(e^a - k)} - \frac{k e^a \dot{a}^2}{4(e^a - k)^2} + \frac{e^a}{k} (\alpha + \frac{6\beta}{k}) - \frac{6\beta}{k} = 0, \quad (5.3.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} &= (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - g_{\mu\nu}) \ddot{a} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}) \dot{a}^2 - \frac{\dot{a}\dot{b}}{2} (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + 2g_{\mu\nu}) + \\ &+ e^a [\frac{-3ke^{-a} \dot{a}^2}{2(e^a - k)} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\frac{3ke^{-a} \dot{a}^2}{2(e^a - k)} + V(a) + 2\Lambda)], \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

sendo $V(a)$ o potencial eq.(7) expresso por meio da relação eq. (15) e onde introduzimos as seguintes definições:

$$b(t) \equiv \ln S^2(t) \quad , \quad (5.3.20a)$$

$$\alpha \equiv (m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda) \quad , \quad (5.3.20b)$$

$$\beta \equiv (\frac{km^2}{6} - 2\sigma) \quad . \quad (5.3.20c)$$

As componentes do tensor de Einstein Riemanniano $\bar{G}_{\mu\nu}$ (vide eq.

(4.4.15)) são dadas, em termos da função $b(t)$ eq. (20a), por^[21]

$$\bar{G}_{00} = -3 \left(\frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{\epsilon}{S^2} \right) = -3 \left(\frac{\dot{b}^2}{4} + \frac{\epsilon}{e^b} \right) . \quad (5.3.21a)$$

$$\bar{G}_{11} = S^2 \left(2 \frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{\epsilon}{S^2} \right) = e^b \left(\ddot{b} + \frac{3}{4} \dot{b}^2 + \frac{\epsilon}{e^b} \right) \quad (5.3.21b)$$

$$\bar{G}_{22} = \Sigma^2 \bar{G}_{11} , \quad (5.3.21c)$$

$$\bar{G}_{33} = \sin^2 \theta \bar{G}_{22} \quad (5.3.21d)$$

Assim, obtemos para as componentes relevantes (0-0) e (1-1) da equação de Einstein eq.(19) as relações

$$-3 \left(\frac{\dot{b}^2}{4} + \frac{\dot{a}^2}{4} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{2} + \frac{\epsilon}{e^b} \right) = \frac{e^a}{2} \left[\frac{-3k e^{-a} \dot{a}^2}{2(e^a - k)} + V(a) + 2V \right] , \quad (5.3.22)$$

$$e^b \left(\ddot{b} + \frac{3}{4} \dot{b}^2 - \dot{a}\dot{b} + \frac{1}{4} \dot{a}^2 - \ddot{a} + \frac{\epsilon}{e^b} \right) = -\frac{e^{a+b}}{2} \left[\frac{3k e^{-a} \dot{a}^2}{2(e^a - k)} + V(a) + 2\Lambda \right] . \quad (5.3.23)$$

Introduzindo os funcionais auxiliares

$$Q[a, \dot{a}] \equiv \frac{3k \dot{a}^2}{2(e^a - k)} , \quad (5.3.24)$$

$$P[a] \equiv e^a [V(a) + 2\Lambda] , \quad (5.3.25)$$

encontramos então o sistema equivalente

$$(\dot{a} - \dot{b})^2 + \frac{4\epsilon}{e^b} = \frac{2}{3} (Q - P) , \quad (5.3.26a)$$

$$(\ddot{a} - \ddot{b}) - \frac{1}{2} (\dot{a} - \dot{b})^2 + \frac{1}{4} (\dot{a}^2 - \dot{b}^2) - \frac{\epsilon}{e^b} = \frac{1}{2} (Q + P) . , \quad (5.3.26b)$$

No caso da seção Euclidiana ($\epsilon=0$), obtemos da eq.(26a) a relação

$$\dot{b} = \dot{a} \pm F . \quad (5.3.27)$$

onde o funcional auxiliar $F[a, \dot{a}]$ é dado por

$$F[a, \dot{a}] \equiv \left[\frac{2}{3} (Q - P) \right]^{1/2} . \quad (5.3.28)$$

Da eq. (26b) resulta então a equação

$$\dot{F} + \frac{\dot{a}}{2} F = \pm Q . \quad (5.3.29)$$

Integrando segundo a eq. (4.3.31), obtemos a identidade funcional

$$F[a, \dot{a}] = e^{-\frac{a}{2}} \left[\pm \int e^{\frac{a}{2}} Q[a, \dot{a}] dt + \text{const.} \right] . \quad (5.3.30)$$

Da equação homogênea para o funcional F , isto é, quando temos $Q = 0$ na eq. (29), resulta então

$$F = \text{const.} \cdot e^{-\frac{a}{2}} = \text{const.} \cdot \sqrt{\Omega} . \quad (5.3.31)$$

Mas $Q = 0$ implica, pela definição eq. (24), que $a = a_0 = \text{const.}$ (condição de Riemannização), de modo que $F = H_0 = \text{const.}$; assim, obtemos da eq. (27) a solução tipo De Sitter

$$s^2 = e^b = \text{const.} \cdot e^{\pm H_0 t} \quad (5.3.32)$$

A equação para o campo escalar eq. (18) fixa então os valores das constantes a_0 e H_0 em termos das quantidades básicas do campo:

$$a_0 = \ln \left(\frac{6k\beta}{k\alpha + 6\beta} \right) . \quad (5.3.33a)$$

$$H_0 = \text{const.} \cdot e^{-\frac{a_0}{2}} = \text{const.} \cdot \left(\frac{k\alpha + 6\beta}{6k\beta} \right)^{1/2} \quad (5.3.33b)$$

Ora, recorrendo à relação eq. (15), obtemos para o campo $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ a solução

$$\phi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{6(m^2 - 2/3k\Lambda)}{(12\sigma - km^2)} = \frac{m^2 \text{eff}}{2\sigma \text{eff}} , \quad (5.3.34)$$

onde m^2_{eff} e σ_{eff} são dados pelas eqs.(2.7,8), exatamente como no caso anterior da solução não-trivial eq.(2.25) (como seria de esperar em vista da igualdade entre as eqs.(2.6) e (9) quando $\phi = \text{const.}$). As equações de Einstein eq.(3), se o campo ϕ está no estado ϕ_0 dado pela eq.(34), resultam

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu}, \quad (5.3.35)$$

onde a constante cosmológica efetiva Λ_{eff} é dada por

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{k}{4} \frac{\gamma}{\beta} = \frac{3k}{2} \frac{(m^4 - 8\sigma\Lambda)}{(km^2 - 12\sigma)}, \quad (5.3.36)$$

sendo

$$\gamma \equiv (m^4 - 8\sigma\Lambda). \quad (5.3.37)$$

Observemos que mesmo estando ausente a constante "básica" Λ , existe ainda assim a geração de uma constante efetiva Λ_{eff} dependente dos parâmetros do campo ϕ .

Consideremos em conjunto os resultados acima obtidos. No caso da solução homogênea da equação de movimento eq.(29), verificamos que $a = a_0 = \text{const.}$ e portanto $\omega_\alpha = 0$; assim, encontramos para a seção Euclidiana da métrica a solução de De Sitter eq.(32), associada à equação de Einstein com termo cosmológico efetivo eq.(35), numa estrutura Riemanniana. A solução constante $\phi = \phi_0$ eq.(34) coincide adquadamente com a solução não-trivial anteriormente derivada eq.(2.25). Impondo a condição de extremização da energia $\gamma = 0$ (vide eq.(2.23)), necessária para que a solução eq.(34) seja de fato uma solução fundamental com simetria quebrada do sistema eqs.(2,3,4), obtemos $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ e por conseguinte a equação de Einstein livre de matéria $\bar{G}_{\mu\nu} = 0$.

Quando descartamos a condição $\gamma = 0$, na ausência de auto-acoplamento ($\sigma = 0$) encontramos de maneira similar à eq. (2.28) uma equação tipo De Sitter com $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{3}{2} m^2$. Por outro lado, se promovemos a introdução de matéria radiante (fótons, neutrinos) minimalmente acoplada e o sistema se encontra no estado ϕ_0 dado pela eq. (34), obtemos para a equação de Einstein eq. (3) a forma

$$\bar{G}_{\mu\nu} = -k_{\text{ren}} T_{\mu\nu}[\text{mat}] + \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu}, \quad (5.3.41)$$

onde a constante efetiva Λ_{eff} tem a expressão eq. (36) e

$$k_{\text{ren}} = \frac{1}{\Omega_0} = \frac{6k\beta}{(k\alpha + 6\beta)} = \frac{k(km^2 - 12\sigma)}{2(km^2 - \frac{1}{3}k^2\Lambda - 6\sigma)} \quad (5.3.42)$$

é a constante gravitacional renormalizada. Assim, a influência recíproca entre a gravitação e o campo, no limite Riemanniano do presente esquema, acarreta a renormalização tanto dos parâmetros (m, σ) do campo escalar quanto das constantes (k, Λ) envolvidas nos fenômenos gravitacionais^[134].

Como vimos na seção anterior, um mecanismo de quebra espontânea de simetria de um campo escalar cósmico não-minimalmente acoplado à gravitação pode dar lugar à aparição de um termo cosmológico nas equações de Einstein, induzindo desse modo a ocorrência de modelos tipo De Sitter. A presente teoria, contudo, sugere que a existência de uma constante cosmológica possa estar associada à Riemannização da geometria do espaço-tempo decorrente da incidência da solução não-trivial $\phi = \phi_0 = \text{const.}$. Desse tarte, a interrelação dinâmica entre a gravitação e campos escalares, devido ao acoplamento não-mínimo, permite uma interessan-

te interpretação: a presença de uma constante cosmológica em nosso Universo como consequência de uma redução estrutural de uma variedade WIST para uma configuração Riemanniana.

5.4 ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO E MODELOS PENTADIMENSIONAIS

Ao cabo dos anos 60, Lifshitz, Belinskii e Khalatnikov dedicaram-se à consideração das propriedades assintóticas das equações de Einstein nas proximidades de uma singularidade cosmológica^[176], constatando que o caráter assintótico de uma solução genérica das equações da gravitação na vizinhança da singularidade é determinado já pelas equações de Einstein para o vazio. A introdução de matéria (no caso, um fluido perfeito ultarelativístico representando energia radiante com a equação de estado $\rho = 3p$, tal como na seção 4.4) resulta apenas em pequenas correções a essa primeira aproximação^[177]. Todavia, subsequentemente Belinskii e Khalatnikov verificaram que a introdução de campos escalares (ou vetoriais) produz significativas alterações no comportamento anteriormente previsto da gravitação em torno da singularidade^[178]. Estes campos, de maneira ambígua, podem ser tomados tanto como campos cósmicos no sentido das teorias escalar-tensoriais da gravitação^[64], quanto como campos físicos extrínsecos que servem de fontes para um campo gravitacional ordinário.

Para proceder a uma análise mais profunda das consequências da inclusão de campos escalares ou vetoriais sobre as características do processo de singularização, Belinskii e Khalatnikov propõem a adoção de um formalismo geométrico a cinco di

mensões, à maneira da antiga teoria de Kaluza^[99,179], mas aqui não como uma proposta de unificação entre a gravitação e o eletromagnetismo, e sim como um domínio apropriado de representação da interação entre esses campos (sendo prescindível a especificação precisa de seu estatuto) e o campo gravitacional. Segundo esses autores, um formalismo pentadimensional do tipo Kaluza pode, alternativamente, ser compreendido como uma teoria escalar-vetorial-tensorial da gravitação, no espírito das idéias de Brans e Dicke^[127]; assim, demonstram elegantemente que uma larga classe de teorias escalar-tensoriais, bem como descrições convencionais de fontes, são casos particulares subsumidos pela forma geral das equações de Einstein para o vácuo numa geometria Riemanniana de cinco dimensões^[178].

Ora, a teoria do acoplamento não-mínimo entre campos escalares e a gravitação que temos examinado apresenta claras analogias com teorias escalar-tensoriais como a de Brans-Dicke (vide seção 4.3); por outro lado, a geração dinâmica de uma estrutura Weyliana para a variedade, quando empregamos o princípio de Palatini, importa numa série de modificações dos atributos convencionalmente admitidos para os processos gravitacionais de interação, como temos visto ao longo do presente trabalho. Somos estimulados, assim, a comparar os resultados de nosso cenário dinâmico não-mínimo num espaço WIST com uma teoria Riemanniana pentadimensional do tipo Kaluza, de modo a explicitar as eventuais similaridades ou dissemelhanças entre ambas as abordagens a fim de aferir a validade da assertiva de Belinskii e Khalatnikov no presente contexto.

Principiemos por construir a teoria de Einstein

numa variedade Riemanniana a cinco dimensões segundo o modelo de Kaluza. Para isto, consideremos num sistema de coordenadas cartesiano 5-dimensional $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ uma métrica simétrica e homogênea j_{ab} de assinatura $(+ - - - -)$ tal que

$$j_{ab}^{(5)} = \left[\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & -\psi^2 \end{array} \right] \quad (5.4.1)$$

onde

$$g_{\mu\nu}^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & -S^2 & \\ 0 & & -S^2 \end{array} \right] \quad (5.4.2)$$

é uma métrica quadridimensional homogênea, sendo $S(x^a)$ o fator de expansão habitual e $\psi^2(x^a)$ uma função escalar das coordenadas. Os índices latinos e gregos são convencionados como abrangendo, respectivamente, os domínios

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, \text{ etc.} = (0, 1, 2, 3, 4) \\ \mu, \nu, \text{ etc.} = (0, 1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (5.4.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu, \nu, \text{ etc.} = (0, 1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (5.4.3b)$$

Temos então

$$j_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad j_{4\mu} = 0, \quad j_{44} = -\psi^2 \quad (5.4.4)$$

Assim, o elemento de linha 5-dimensional $ds^2_{(5)}$ é dado por

$$ds^2_{(5)} = dt^2 - S^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \psi^2 dx_4^2 \quad (5.4.5)$$

onde fizemos a identificação $x_0 = t$.

Os símbolos de Christoffel 5-dimensionais $\{^a_{bc}\}$ têm a expressão

$$\{^a_{bc}\}_{(5)} = \frac{1}{2} j^{am} (j_{bm,c} + j_{cm,b} - j_{bc,m}) \quad (5.4.6)$$

No caso do elemento de linha eq. (5), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \{^{\alpha}_{\mu\nu}\}_{(5)} = \{^{\alpha}_{\mu\nu}\}_{(4)} \quad ; \quad \{^4_{\mu\nu}\}_{(5)} = \frac{g_{\mu\nu,4}}{2\psi^2} \quad ; \\ \{^{\alpha}_{4\nu}\}_{(5)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\nu,4} \quad ; \quad \{^{\alpha}_{44}\}_{(5)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \psi^2_{,\gamma} \quad ; \\ \{^4_{4\nu}\}_{(5)} = \frac{\psi^2_{,\nu}}{2\psi^2} \quad ; \quad \{^4_{44}\}_{(5)} = \frac{\psi^2_{,4}}{2\psi^2} \quad . \end{array} \right. \quad (5.4.7)$$

O tensor de Ricci 5-dimensional R_{ab} é

$$R_{ab}^{(5)} = \{^m_{ab},m\}_{(5)} - \{^m_{am},b\}_{(5)} - \{^m_{qb}\}_{(5)} \{^q_{am}\}_{(5)} + \{^m_{qm}\}_{(5)} \{^q_{ab}\}_{(5)} \quad (5.4.8)$$

Assim, temos

$$R_{\mu\nu}^{(5)} = R_{\mu\nu}^{(4)} - \left(\frac{\psi^2_{,\mu}}{2\psi^2}\right)_{|\nu} - \frac{\psi^2_{,\mu} \psi^2_{,\nu}}{4\psi^2} + \left(\frac{g_{\mu\nu,4}}{2\psi^2}\right)_{,4} + \frac{g_{\mu\nu,4} \psi^2_{,4}}{4\psi^4} - \frac{g^{\sigma\gamma}}{4\psi^2} (g_{\gamma\nu,4} g_{\sigma\mu,4} - g_{\sigma\gamma,4} g_{\mu\nu,4}) \quad ; \quad (5.4.9)$$

$$R_{4\mu}^{(5)} = \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\mu,4}\right)_{,\gamma} - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\mu,4}\right) \frac{\psi^2_{,\gamma}}{2\psi^2} + \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\mu,4}\right) \{^{\sigma}_{\gamma\sigma}\}_{(4)} - \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} g_{\sigma\gamma,4}\right)_{,\mu} + \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} g_{\sigma\gamma,4}\right) \frac{\psi^2_{,\mu}}{2\psi^2} - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\sigma\gamma,4}\right) \{^{\sigma}_{\alpha\mu}\}_{(4)} \quad ; \quad (5.4.10)$$

$$R_{44}^{(5)} = \psi^2 \left(\frac{\psi^2, \alpha g^{\alpha\beta}}{2\psi^2} \right) \parallel \beta + \frac{\psi^2, \alpha \psi^2, \beta g^{\alpha\beta}}{4\psi^2} - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma, 4} \right), 4 -$$

$$- \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma, 4} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma, 4} \right) \frac{\psi^2, 4}{2\psi^2} ; \quad (5.4.11)$$

e ainda

$$R^{(5)} = j^{ab} R_{ab}^{(5)} = R^{(4)} - 2 \left(\frac{\psi^2, \alpha g^{\alpha\beta}}{2\psi^2} \right) \parallel \beta - \frac{\psi^2, \alpha \psi^2, \beta g^{\alpha\beta}}{2\psi^4} +$$

$$+ g^{\alpha\beta} \left[\left(\frac{g_{\alpha\beta, 4}}{2\psi^2} \right), 4 + \frac{g_{\alpha\beta, 4} \psi^2, 4}{4\psi^4} - \frac{g^{\sigma\gamma}}{4\psi^2} (g_{\gamma\beta, 4} g_{\sigma\alpha, 4} - g_{\sigma\gamma, 4} g_{\alpha\beta, 4}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\psi^2} \left[\left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} g_{\sigma\gamma, 4} \right), 4 + \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} g_{\sigma\gamma, 4} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} g_{\sigma\gamma, 4} \right) \frac{\psi^2, 4}{2\psi^2} \right] . \quad (5.4.12)$$

Vamos agora supor que $g_{\mu\nu}^{(4)}$ é independente da coordenada adicional x_4 , isto é, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$. Então, temos

$$R_{\alpha\beta}^{(5)} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \left(\frac{\psi^2, \alpha}{2\psi^2} \right) \parallel \beta - \frac{\psi^2, \alpha \psi^2, \beta}{4\psi^4} , \quad (5.4.13)$$

$$R_{4\beta}^{(5)} = 0 , \quad (5.4.14)$$

$$R_{44}^{(5)} = \psi^2 \left(\frac{\psi^2, \alpha g^{\alpha\beta}}{2\psi^2} \right) \parallel \beta + \frac{\psi^2, \alpha \psi^2, \beta g^{\alpha\beta}}{4\psi^2} \quad (5.4.15)$$

$$R^{(5)} = \bar{R} - \left(\frac{\psi^2, \alpha g^{\alpha\beta}}{\psi^2} \right) \parallel \beta - \frac{\psi^2, \alpha \psi^2, \beta g^{\alpha\beta}}{2\psi^4} , \quad (5.4.16)$$

onde fizemos $R_{\alpha\beta}^{(4)} = \bar{R}_{\alpha\beta}$, $R^{(4)} = \bar{R}$, conforme a convenção anterior.

Observemos que derivadas da função ψ^2 com respeito a x_4 não aparecem nas equações acima; assim, podemos supor que ψ é independente da coordenada x_4 , ou seja, $\psi = \psi(x^\alpha)$. O tensor de Einstein 5-dimensional

$$G_{ab}^{(5)} = R_{ab}^{(5)} - \frac{1}{2} R^{(5)} j_{ab} \quad (5.4.17)$$

tem as componentes

$$G_{\alpha\beta}^{(5)} = \bar{G}_{\alpha\beta} - \left(\frac{\psi^2}{2\psi^2} \right) \parallel_{\beta}^{\alpha} - \frac{\psi^2}{4\psi^4} \parallel_{\beta}^{\alpha} \psi^2 + g_{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\psi^2}{2\psi^2} \right) \parallel_{\nu}^{\mu} g^{\mu\nu} + \frac{\psi^2}{4\psi^4} \parallel_{\nu}^{\mu} \psi^2 g^{\mu\nu} \right] \quad (5.4.18)$$

$$G_{4\beta}^{(5)} = 0 \quad , \quad (5.4.19)$$

$$G_{44}^{(5)} = \frac{1}{2} \bar{R} \psi^2 \quad . \quad (5.4.20)$$

Definindo

$$\omega_{\alpha} = - \frac{\psi}{\psi} \parallel_{\alpha} = (-\ln\psi)_{,\alpha} \quad , \quad (5.4.21)$$

obtemos para a eq. (18) a expressão

$$G_{\alpha\beta}^{(5)} = \bar{G}_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha} \parallel_{\beta} - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} - g_{\alpha\beta} [\omega^{\mu} \parallel_{\mu} - \omega_{\mu} \omega^{\mu}] \quad . \quad (5.4.22)$$

Ora, cotejando a eq. (22) com a expressão do tensor de Einstein numa variedade WIST eq. (3.2.46),

$$G_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha} \parallel_{\beta} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + g_{\alpha\beta} (\omega^{\mu} \parallel_{\mu} - \frac{1}{4} \omega_{\mu} \omega^{\mu}) \quad (5.4.23)$$

(caracterizada por um vetor de gauge $\omega_{\alpha} = (-\ln\Omega)_{,\alpha}$ tal como na eq. (4.3.9)), é transparente a notória similaridade entre essas relações, que se distinguem tão-somente pelo valor dos coeficientes numéricos. Essa similitude pode ser melhor compreendida se recorremos ao formalismo elaborado por Belinskii e Khalatnikov, como veremos em seguida.

Seguindo esses autores, escolhemos para as compo-

mentos da métrica eq. (5) valores independentes da coordenada x_4 dados por

$$j_{\mu\nu} = B^2 g_{\mu\nu}(x^\alpha), \quad j_{4\beta} = 0, \quad j_{44} = -A^2 \quad (5.4.24)$$

onde as quantidades A e B são funcionais de uma certa função escalar $\phi(x^\alpha)$,

$$A = A[\phi] \quad , \quad B = B[\phi]. \quad (5.4.25)$$

O elemento de linha eq. (5) assume então a forma

$$ds^2_{(5)} = B^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - A^2 dx_4 dx_4. \quad (5.4.26)$$

Escrevendo as equações de Einstein 5-dimensionais para o vazio, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu}^{(5)} = \bar{R}_{\mu\nu} + f_1 \phi_{||\mu||\nu} + f_2 \phi_{||\mu}\phi_{||\nu} + g_{\mu\nu} [f_3 \phi_{||\gamma}^{\gamma} + f_4 \phi_{||\gamma}^{\gamma}] = 0 \\ R_{\mu\nu}^{(5)} = 0 \quad , \\ R_{44}^{(5)} = f_5 \phi_{||\mu}^{\mu} + f_6 \phi_{||\mu}^{\mu} = 0, \end{array} \right. \quad (5.4.27)$$

$$(5.4.27)$$

$$(5.4.28)$$

$$(5.4.29)$$

onde os coeficientes f_i são funcionais de A e B e de suas derivadas em relação a ϕ e todas as operações quadritensoriais são realizadas com o concurso da 4-métrica $g_{\mu\nu}$.

As equações de Einstein, no caso do vazio, derivam do princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-j} R^{(5)} d^5x = 0 \quad . \quad (5.4.30)$$

onde $R^{(5)}$ é o escalar de curvatura 5-dimensional e j o determi-

nante de j_{ab} . Contudo, como a métrica eq.(26) é independente da coordenada x_4 , essa variação se reduz a

$$\delta \int \sqrt{-j} R^{(5)} d^4x = 0 . \quad (5.4.31)$$

Assim, obtemos

$$\sqrt{-j} R^{(5)} = [\bar{R} + f_7 \phi \parallel_{\mu}^{\nu} + f_8 \phi \parallel_{\nu}^{\mu}] AB^2 \sqrt{-g} . \quad (5.4.32)$$

Verificamos assim que qualquer mudança na forma dos funcionais $A(\phi)$ e $B(\phi)$ é equivalente a uma transformação conforme da 4-métrica $g_{\mu\nu}$ acompanhada por uma transformação da função escalar ϕ ,

$$\phi = \phi(\phi') , \quad g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} f(\phi') . \quad (5.4.33)$$

Em outras palavras, é suficiente fazer uma única escolha concreta dos funcionais A e B , e todas as demais possibilidades podem ser diretamente obtidas por meio de uma transformação combinada como na eq.(33) (a menos de termos de divergência total, que não afetam as variações). As teorias escalar-tensoriais de Brans-Dicke e de Chernikov-Tagirov^[157], dentre outras, são casos particulares da eq.(32), cujas equações de movimento provêm das eqs.(27,29) quando selecionamos valores apropriados para A e B .

As eqs.(18,20) anteriormente desenvolvidas correspondem à escolha $A = \phi$, $B = 1$ (ou seja, $j_{\mu\nu}$ coincide com $g_{\mu\nu}^{(4)}$, e apenas a componente j_{44} está ligada ao campo ϕ , tal como nas eqs.(1,2)). As eqs.(27,28) nesse caso fornecem

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \phi_{,\mu} \parallel_{\nu} = - \omega_{\mu} \parallel_{\nu} + \omega_{\mu} \omega_{\nu} , \quad (5.4.34a)$$

$$\frac{1}{\phi} \phi^{,\mu} \parallel_{\mu} = - \omega^{\mu} \parallel_{\mu} + \omega_{\mu} \omega^{\mu} = 0 , \quad (5.4.34b)$$

que se identificam com as eqs. (13,15,21) no caso do vazio quando tomamos $\phi = \psi$. Belinskii e Khalatnikov concluem então que o sistema 5-dimensional eqs. (13,15), no caso do vazio, corresponde às equações de movimento obtidas a partir da variação convencional, num espaço Riemanniano a quatro dimensões, da Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} R\phi \quad (5.4.35)$$

na qual reconhecemos, sem surpresa, a Lagrangiana eq. (2.3.10) do acoplamento conforme de um campo escalar com a gravitação. Assim, a similaridade entre os tensores de Einstein num espaço pentadimensional eq. (22) e num espaço de Weyl eq. (23) exprime com naturalidade o fato de ambas as relações provirem de uma Lagrangiana não-mínima do tipo da eq. (35), apenas sendo distintos os procedimentos variacionais (à Lagrange e à Palatini) adotados em cada caso.

Observemos, todavia, que a analogia entre as teorias de Kaluza e do acoplamento não-mínimo não é completa e limita-se ao caso do espaço vazio. De fato, comparando o tensor de Ricci 5-dimensional eq. (13),

$$R_{\alpha\beta}^{(5)} = \bar{R}_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha} \parallel \beta - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \quad (5.4.36)$$

(onde usamos a definição eq. (21)) com o tensor de Ricci no espaço de Weyl eq. (3.2.41),

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha} \parallel \beta - \frac{1}{2} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega^{\gamma} \parallel \gamma - \omega_{\gamma} \omega^{\gamma}) \quad (5.4.37)$$

(onde usamos a definição eq. (4.3.9)) verificamos que o emprego da variação à Palatini, do que decorre a geração dinâmica de uma

estrutura tipo WIST, implica na aparição explícita da 4-métrica $g_{\mu\nu}$ como constituinte do tensor de Ricci Weyliano eq.(37) - o que não ocorre no caso do tensor 5-dimensional eq.(36). Isto significa que, apesar da similitude notável dos tensores de Einstein eqs.(22,23) de ambas as teorias, a variação à Palatini introduz um elemento - a saber, o tensor métrico 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ - que não comparece diretamente no modelo 5-dimensional correspondente à variação convencional da mesma Lagrangiana não-mínima eq.(35).

Por outro lado, a inclusão de novos objetos (matéria ou outros campos) minimalmente acoplados espolia a coincidência entre as teorias de Kaluza e do acoplamento não-mínimo (variando à Lagrange). Demonstraremos essa asserção considerando as consequências da introdução de um termo cosmológico no modelo de Kaluza eq.(17) e na Lagrangiana não-mínima eq.(35).

A variação convencional da Lagrangiana eq.(35) acrescida de um termo cosmológico,

$$L = \sqrt{-g}[\phi\bar{R} + 2\Lambda], \quad (5.4.38)$$

proporciona as seguintes equações de movimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\delta g^{\mu\nu}]: \quad \phi\bar{G}_{\mu\nu} - \phi_{,\mu||\nu} + g_{\mu\nu}\square\phi - \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \\ [\delta\phi]: \quad \bar{R} = 0. \end{array} \right. \quad (5.4.39a)$$

$$(5.4.39b)$$

Contraindo a eq.(39a), obtemos

$$\square\phi = \frac{4}{3}\Lambda \quad (5.4.40)$$

de modo que tomando $\omega_\alpha = (-\ln\phi)_{,\alpha}$ encontramos o sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\phi} \phi_{,\alpha} \parallel_{\beta} - \frac{1}{4\phi} \square \phi g_{\alpha\beta} = \\ &= -\omega_{\alpha} \parallel_{\beta} + \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (\omega^{\gamma} \parallel_{\gamma} - \omega_{\gamma} \omega^{\gamma}) \end{aligned} \right. \quad (5.4.41a)$$

$$\square \phi = \frac{4}{3} \Lambda . \quad (5.4.41b)$$

Por sua vez, o acréscimo ad hoc de uma constante cosmológica Λ na teoria de Kaluza eq.(17) resulta na equação de Einstein a cinco dimensões

$$G_{ab}^{(5)} = \Lambda j_{ab} , \quad (5.4.42)$$

de onde obtemos, segundo as eqs (18-22),

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{G}_{\alpha\beta} &= \Lambda g_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha} \parallel_{\beta} + \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + g_{\alpha\beta} [\omega^{\mu} \parallel_{\mu} - \omega_{\mu} \omega^{\mu}] , \end{aligned} \right. \quad (5.4.43a)$$

$$G_{4\beta}^{(5)} = 0 , \quad (5.4.43b)$$

$$G_{44}^{(5)} = \frac{1}{2} \bar{R} \psi^2 = -\Lambda \psi^2 , \quad (5.4.43c)$$

onde $\omega_{\alpha} = (-\ell \ln \psi)_{,\alpha}$. Da eq. (43c) obtemos de imediato

$$\bar{R} = -2\Lambda , \quad (5.4.44)$$

e da contração da eq.(43a) vem

$$\bar{R} = -3\omega^{\alpha} \parallel_{\alpha} + 3\omega_{\alpha} \omega^{\alpha} - 4\Lambda . \quad (5.4.45)$$

Assim, obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{l} \bar{R}_{\alpha\beta} = - \omega_{\alpha} ||_{\beta} + \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + g_{\alpha\beta} [\omega^{\mu} ||_{\mu} - \omega_{\mu} \omega^{\mu}] , \\ \omega^{\alpha} ||_{\alpha} - \omega_{\alpha} \omega^{\alpha} + \frac{2}{3} \Lambda = 0 . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.4.46a) \\ (5.4.46b) \end{array}$$

Ora, fazendo a identificação $\phi = \psi$ e comparando os sistemas resultantes eqs.(41) e eqs.(46), verificamos que são equivalentes exclusivamente se $\Lambda = 0$, com o que recaímos na coincidência entre as teorias no espaço vazio, apontada por Belinskii e Khalatnikov. Com efeito, as eqs.(39b,44) mostram com clareza a distinção entre os esquemas quando $\Lambda \neq 0$.

- Solução Pentadimensional: procuremos uma solução da equação de Kaluza com termo cosmológico eq.(52) adotando os ansatze

$$S = S(t) , \quad \psi = \psi(t) . \quad (5.4.47)$$

de modo que obtemos, da eq.(2), uma métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$ tipo FRW em coordenadas cartesianas (vide seção 4.2), e também

$$\omega_{\alpha} = a(t) ,_{\alpha} = \dot{a} \delta_{\alpha}^0 , \quad (5.4.48)$$

onde $a(t) \equiv - \ln \psi(t)$. Nesse caso, as componentes (0-0) e (1-1) da eq.(46a) fornecem

$$\left[\begin{array}{l} \dot{b} + \frac{1}{2} b^2 = \frac{4}{9} \Lambda + \frac{2}{3} (\dot{a} - a^2) \\ \dot{b} + \frac{3}{2} b^2 = \frac{4}{3} \Lambda + ab \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.4.49a) \\ (5.4.49b) \end{array}$$

onde fizemos $b(t) \equiv 2 \frac{\dot{S}}{S} = (\ln S^2(t)) \dot{}$; e a equação de movimento eq.(46b) nos dá

$$\dot{a} - a^2 + \frac{3}{2} ab = -\frac{2}{3} \Lambda \quad (5.4.50)$$

Cotejando as eqs. (49a,50) obtemos

$$ab = -\left(\dot{b} + \frac{1}{2} b^2\right) \quad (5.4.51)$$

e, substituindo na eq. (49b),

$$\dot{b} + b^2 - \frac{2}{3} \Lambda = 0 \quad (5.4.52)$$

Assim, integrando, encontramos

$$\int \frac{db}{b^2 - \frac{2}{3} \Lambda} = - \int dt \quad (5.4.53)$$

Ora, sabemos que [180]

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2 + \beta} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha x}{\sqrt{\Delta}}, & \Delta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \left(\frac{2\alpha x - \sqrt{-\Delta}}{2\alpha x + \sqrt{-\Delta}} \right), & \Delta < 0 \end{cases} \quad (5.4.54a)$$

$$(5.4.54b)$$

onde $\Delta = 4\alpha\beta = -\frac{8}{3} \Lambda$.

Assim, de acordo com o valor da constante Λ , temos dois casos:

Caso 1: $\Lambda > 0$. Temos então $\Delta = -\frac{8}{3} \Lambda < 0$. Seja $c \equiv \sqrt{-\Delta} = \sqrt{8\Lambda/3}$;

assim,

$$\frac{1}{c} \ln \left(\frac{2b - c}{2b + c} \right) \Bigg|_{b_0}^b = -t \Bigg|_{t_0}^t, \quad (5.4.55)$$

de onde resulta

$$\frac{2b - c}{2b + c} = \left(\frac{2b_0 - c}{2b_0 + c} \right) \exp[-c(t - t_0)] \quad (5.4.56)$$

Tomando, por simplicidade, $t_0 = 0$, $b_0 = 0$, obtemos

$$b(t) = 2 \frac{\dot{S}}{S} = \frac{c}{2} \left(\frac{e^{ct} - 1}{e^{ct} + 1} \right) = \frac{c}{2} \operatorname{tgh} \frac{ct}{2} \quad (5.4.57)$$

e logo

$$S^2(t) = S_0^2 \cosh \frac{ct}{2} \quad (5.4.58)$$

Nesse caso, da eq. (51) temos

$$\ln \psi = \frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{2} \dot{b} = \frac{c}{4} \left[4 \operatorname{cosech} ct + \frac{\sinh ct}{\cosh ct + 1} \right] \quad (5.4.59)$$

e assim

$$\psi^2(t) = \exp \left[\frac{c}{2} \left(\frac{4 (\cosh ct + 1) + \sinh^2 ct}{\sinh ct (\cosh ct + 1)} \right) \right] \quad (5.4.60)$$

Obtemos desse modo, no caso $\Lambda > 0$, uma solução em que o fator de expansão $S(t)$ da métrica 4-dimensional tipo FRW é não-singular ao longo de toda a história cósmica; todavia, a componente $j_{44} = -\psi^2(t)$ da métrica 5-dimensional é divergente na origem ($t=0$).

Caso 2: $\Lambda < 0$. Temos então $\Lambda = -\frac{8}{3} \Lambda > 0$. Seja $c \equiv \sqrt{\Lambda} = \sqrt{-8\Lambda/3}$;

assim,

$$\frac{2}{c} \operatorname{arctg} \frac{2b}{c} \Big|_{b_0}^b = -t \Big|_{t_0}^t, \quad (5.4.61)$$

logo

$$\operatorname{arctg} \frac{2b}{c} - \operatorname{arctg} \frac{2b_0}{c} = -\frac{c}{2}(t - t_0). \quad (5.4.62)$$

Fixando $t_0 = 0$, $b_0 = 0$, obtemos

$$b(t) = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \left(-\frac{c}{2} t \right) = \frac{-c}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{ct}{2} \right). \quad (5.4.63)$$

Portanto, encontramos

$$S^2(t) = S_0^2 \cos\left(\frac{ct}{2}\right), \quad (5.4.64)$$

e também

$$\psi^2(t) = \exp\left[-c, \operatorname{tg}\left(\frac{ct}{2}\right) + \cos\left(\frac{ct}{2}\right)\right]. \quad (5.4.65)$$

No caso $\Lambda < 0$, resulta então uma solução oscilatória não-singular na origem para o fator de expansão $S(t)$ da 4-métrica tipo FRW, e uma componente $j_{44} = -\psi^2(t)$ da 5-métrica j_{ab} igualmente finita em $t=0$. Todavia, nos pontos $t = \pm \frac{\pi}{c}$, o fator $S(t)$ se aniquila e a componente $\psi^2(t)$ é divergente.

Calculando nos dois exemplos acima, por meio de técnicas de computação algébrica, o valor escalar de curvatura $R^{(5)}$ eq. (16) - que é um invariante da teoria - verificamos em ambos os casos que, como $R^{(5)}(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, as divergências surgidas são essenciais, ou seja, não podem ser removidas por transformações de coordenadas.

CAPITULO VI

ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DE MAIS DE UM CAMPO ESCALAR

6.1. INTRODUÇÃO

O extraordinário feito de Einstein ao conjugar, através da TRG, aspectos da Natureza aparentemente tão díspares quanto a atração gravitacional e as propriedades geométricas do espaço-tempo impressionou indelevelmente o pensamento da modernidade e, em especial, a Cosmologia contemporânea. De fato, esta fusão bem-sucedida de categorias anteriormente distintas conduziu o próprio Einstein, no decurso final de sua vida, a tomar como objetivo prioritário de pesquisa a busca de um domínio abrangente, de uma base comum, que permitisse a descrição unificada de todas as interações fundamentais da Natureza, interpretando-as como diferentes manifestações de uma mesma entidade física primária [121].

A partir de exemplo tão ilustre, as abordagens unificacionistas incorporaram-se ao espírito (Geist) de nossa época, como uma das vertentes condutoras do desenvolvimento do novo paradigma pós-Newtoniano. Assim, embora o anseio por uma linguagem unificada do mundo natural tenha acometido pensadores de múltiplos matizes ao longo dos séculos, não seria impróprio reunir os esforços atuais em prol da unificação das forças fundamentais

e das classes de partículas a elas associadas sob a denominação de programa de unificação de Einstein^[19].

Ao longo dos últimos anos, este programa de obtenção de uma "teoria de tudo" experimentou um impulso notável, graças principalmente ao sucesso das teorias de "gauge" em lograr a descrição integrada das interações fraca e eletromagnética e, com a introdução do conceito de quarks, também da interação forte, relacionando-as a fenômenos de quebra de simetria interna do grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ^[181]. Um tanto paradoxalmente, contudo, a gravitação mesmo hoje permanece distintamente à parte das demais forças. Esta situação pouco satisfatória parece provir do caráter extremamente peculiar adquirido pela interação gravitacional ao ser associada, através da TRG, à própria base ou fundamento onde se desempenham todos os processos interativos, ou seja, à estrutura geométrica global do espaço-tempo; e não é improvável que perdure ainda por algum tempo, pelo menos enquanto as propriedades métricas do Cosmos forem dependentes tão-somente da gravitação ela mesma.^[182] Encontram-se ainda insuficientemente desenvolvidas as iniciativas muito recentes de superunificação que possibilitariam a inclusão da força gravitacional num esquema mais abrangente de simetrias de gauge, através da substituição da antiga noção fundamental de ponto geométrico por um novo objeto básico, as supercordas^[183].

Este "estado-de-arte" justifica assim as variadas abordagens alternativas contemporâneas de investigação de possíveis efeitos de reciprocidade nos processos de interação entre a gravitação e as demais interações elementares. Com efeito, in-

tercâmbios ou mesmo algum tipo de estimulação mútua parecem previsíveis quando a análise de um dado fenômeno compreende aspectos de domínios distintos da Física, e a investigação desses domínios híbridos ou fronteirigos costuma resultar em modificações e limitações impostas aos resultados dos tratamentos empregados em cada domínio individualmente. Exemplos notáveis de uma tal interassociação podem ser encontrados, em nossos dias, dentre as consequências da aproximação entre a Cosmologia e a Física de Partículas Elementares a que nos referimos no Cap.1, e que sem dúvida beneficiou o desenvolvimento de ambas as disciplinas. Conquanto não seja unânime a apreciação dada às inferências derivadas de tal conjugação de áreas de Micro - e da Microfísica (em virtude da disparidade entre a pletora de evidências experimentais microscópicas e a escassez de nossos atuais conhecimentos observacionais sobre o Universo), alguns cosmólogos têm produzido relações quantitativas valiosas para a compreensão dos fenômenos microfísicos, mesmo lidando com um modelo tão excessivamente simplificado e, como vimos, ainda tão problemático, quanto o MP; por exemplo, a partir do exame das abundâncias relativas primordiais dos elementos, foi possível estabelecer-se um limite superior para o número de tipos admissíveis de neutrinos sem massa^[62].

No plano conceitual, essa convergência redundou no progressivo abandono da postura clássica de tratar-se os problemas cosmológicos (e, em especial, os que concernem a formação primordial do Cosmos) exclusivamente em termos gravitacionais, como atesta, por exemplo, o sem-número de abordagens correntes que temos visto em que campos escalares são introduzidos para

permitir uma descrição mais complexa e aperfeiçoada dos fenômenos primordiais. Os mecanismos de quebra espontânea ou induzida de simetria de campos escalares no estado fundamental que discutimos no capítulo anterior constituem evidências eloquentes dessa intermediação entre o comportamento do campo e as características geométricas da variedade. Por outro lado, isso nos sugere a possibilidade de investigar modificações sofridas por processos de interação de uma dada classe de objetos - e.g., diversos campos escalares - quando descritos num espaço curvo, isto é, na presença do campo gravitacional.

De fato, o interesse pela consideração de acoplamentos de mais de um campo escalar com a gravitação pode provir de variadas motivações. Por exemplo, na chamada "abordagem auto-consistente" em que a criação do Universo se dá por flutuações quânticas do vácuo num espaço de Minkowski, desenvolvida por Gunzig e colaboradores [50,92,184], a Lagrangiana de um campo escalar conformalmente acoplado num espaço curvo é reduzida, por meio de uma transformação conforme, a uma teoria envolvendo dois campos escalares no espaço de Minkowski (um deles sendo o campo quantizado primordial e o outro associado ao fator da transformação conforme), o que facilita sobremaneira o tratamento matemático do problema.

No presente capítulo, consideraremos a questão de uma possível indução mútua, entre dois ou mais campos escalares não-minimalmente acoplados à gravitação, de processos de quebra de simetria sucessivos, configurando uma "cadeia" ou "cascata" de fenômenos semelhantes aos discutidos no Cap.5 (seção 5.2 e 5.3), primeiramente no caso já conhecido do espaço de Riemann, e a se-

guir no caso complementar de uma estrutura WIST dinamicamente gerada compreendendo campos mínimos e não-mínimos, mercê da aplicação do método de Palatini. Outro tema a que nos dedicaremos, por fim, concerne a elaboração de um esquema que permita a exploração de possíveis efeitos recíprocos entre o campo gravitacional e outras formas de interação da Natureza. Veremos que uma relação numérica muito curiosa, envolvendo o número de Eddington 10^{39} (!), surge ao longo desta indagação.

6.2 ACOPLAMENTO DE VÁRIOS CAMPOS E QUEBRA DE SIMETRIA

Consideremos o caso de dois campos escalares complexos $\phi(x)$ e $\psi(x)$ conformalmente acoplados à gravitação. Generalizando de maneira natural a Lagrangiana de um campo eq. (5.2.1), podemos escrever

$$L_{\phi, \psi} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R + \phi_{, \mu}^* \phi_{, \nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^* \phi) - \frac{1}{6} R \phi^* \phi + \right. \\ \left. + \psi_{, \mu}^* \psi_{, \nu} g^{\mu\nu} + W(\psi^* \psi) - \frac{1}{6} R \psi^* \psi + \lambda (\phi^* \phi)(\psi^* \psi) + 2\Lambda + L_{\text{mat}} \right], \quad (6.2.1)$$

onde L_{mat} corresponde à matéria minimalmente acoplada eventualmente presente e onde introduzimos o termo quadrático (conformalmente invariante) de interação direta entre os campos $\lambda \phi^2 \psi^2$, $\lambda = \text{const.}$, sendo $\phi^2 \equiv \phi^* \phi$, $\psi^2 \equiv \psi^* \psi$.

De modo similar à eq. (5.2.4), fixamos potenciais $V(\phi^2)$ e $W(\psi^2)$ com a forma

$$\left[\begin{array}{l} V(\phi^2) = -m^2 \phi^2 + \sigma (\phi^2)^2, \\ W(\psi^2) = -M^2 \psi^2 + \Sigma (\psi^2)^2. \end{array} \right. \quad (6.2.2a)$$

$$\left[\begin{array}{l} V(\phi^2) = -m^2 \phi^2 + \sigma (\phi^2)^2, \\ W(\psi^2) = -M^2 \psi^2 + \Sigma (\psi^2)^2. \end{array} \right. \quad (6.2.2b)$$

Variando de modo convencional numa estrutura Riemanniana a priori estabelecida, obtemos as seguintes equações de movimento (vide seção 5.2):

$$\square \phi + (m^2 + \frac{1}{6} R - \lambda \psi^2) \phi - 2\sigma(\phi^2) \phi = 0 . \quad (6.2.3)$$

$$\square \psi + (M^2 + \frac{1}{6} R - \lambda \phi^2) \psi - 2\Sigma(\psi^2) \psi = 0 \quad (6.2.4)$$

$$(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} (\phi^2 + \psi^2)) G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}[\phi] - T_{\mu\nu}[\psi] - T_{\mu\nu}[\text{int}] + \Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}[\text{mat}] \quad (6.2.5)$$

onde, a exemplo da eq. (5.2.16), o tensor energia-momentum do campo ϕ é dado por

$$T_{\mu\nu}[\phi] = \frac{1}{2} (\phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} + \phi^*_{,\nu} \phi_{,\mu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi^*_{,\sigma} \phi_{,\lambda} g^{\sigma\lambda} + V(\phi^2)) + \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \phi^2_{,\mu} \parallel_{\nu}), \quad (6.2.6)$$

e analogamente para $T_{\mu\nu}[\psi]$, e onde $T_{\mu\nu}[\text{int}]$ corresponde ao termo de interação direta entre os campos,

$$T_{\mu\nu}[\text{int}] = - \frac{1}{2} \lambda \phi^2 \psi^2 g_{\mu\nu} . \quad (6.2.7)$$

Observemos que a energia do sistema como um todo não consiste simplesmente na soma das energias individuais de cada campo, mesmo estando ausente a interação direta entre eles (i. é., quando $\lambda = 0$). Isto se deve ao papel mediador indiretamente representado pelo campo gravitacional, ao qual ambos os campos estão não-minimalmente acoplados. De fato, recordando a eq. (5.2.14) podemos escrever o tensor energia-momentum total para

os dois campos como

$$E_{\mu\nu}[\phi, \psi] = T_{\mu\nu}[\phi] + T_{\mu\nu}[\psi] + T_{\mu\nu}[\text{int}] - \frac{1}{6} (\phi^2 + \psi^2) G_{\mu\nu}, \quad (6.2.8)$$

ou, segundo a eq.(5.2.18), de modo equivalente como

$$E_{\mu\nu}[\phi, \psi] = \frac{T_{\mu\nu}[\phi] + T_{\mu\nu}[\psi] + T_{\mu\nu}[\text{int}]}{(1 - \frac{k}{6}(\phi^2 + \psi^2))} - \frac{k\Lambda(\phi^2 + \psi^2)}{(6 - k(\phi^2 + \psi^2))} \quad (6.2.9)$$

onde tomamos $L_{\text{mat}} = 0$.

Assim, verificamos que mesmo na ausência de uma interação direta entre os campos ($\lambda = 0$ e portanto $T_{\mu\nu}[\text{int}] = 0$), a intermediação protagonizada pelo acoplamento não-mínimo com a gravitação ocasiona a aparição de um termo suplementar associado à constante cosmológica Λ [185].

Tomando o traço da equação de Einstein eq.(5), obtemos

$$\frac{1}{k} R = m^2\phi^2 + M^2\psi^2 - 4\Lambda \quad (6.2.10)$$

Notemos que o escalar de curvatura R é independente do valor das constantes de auto-acoplamento σ e Σ , e está associado aos campos escalares exclusivamente através dos termos de massa. Substituindo nas equações de movimento eqs.(3,4) encontramos então

$$\square \phi + ((m^2 - \frac{2}{3}k\Lambda) + (\frac{k}{6}M^2 - \lambda)\psi^2)\phi + (\frac{k m^2}{6} - 2\sigma)\phi^2\phi = 0, \quad (6.2.11)$$

$$\square \psi + ((M^2 - \frac{2}{3}k\Lambda) + (\frac{k m^2}{6} - \lambda)\psi^2)\psi + (\frac{k M^2}{6} - 2\Sigma)\psi^2\psi = 0. \quad (6.3.12)$$

Concluimos dessas equações que o acoplamento não-mínimo, neste caso, não apenas induz a renormalização das constantes características de cada campo (como na eq. (5.2.6)) como também introduz uma dependência funcional recíproca e simétrica entre eles, de sorte que qualquer um dos campos só poderá alcançar um estado fundamental não-trivial (digamos, $\phi = \phi_0 = \text{const.}$) se concomitantemente o outro campo estiver num estado análogo (no caso, $\psi = \psi_0 = \text{const.}$). Assim, um fenômeno de quebra espontânea de simetria terá de ocorrer simultaneamente para os dois campos, ou de outro modo não se realizará (vide seção 4 adiante).

Esta situação pode ser melhor esclarecida se considerarmos o curioso exemplo de um sistema em que não há interação direta ($\lambda = 0$) e um dos campos, digamos $\phi(x)$, não tem massa ($m = 0$). Neste caso, encontraremos

$$\square \phi + \left(\frac{kM^2}{6}\psi^2 - \frac{2}{3}k\Lambda\right)\phi - 2\sigma\phi^2\phi = 0, \quad (6.2.13)$$

$$\square \psi + (M^2 - \frac{2}{3}k\Lambda)\psi + \left(\frac{kM^2}{6} - 2\Sigma\right)\psi^2\psi = 0. \quad (6.2.14)$$

Observemos que neste caso particular a simetria do problema é espoliada, pois a equação para o campo ϕ eq. (13) contém uma dependência explícita com relação ao campo ψ , ao passo que a eq. (14) coincide com a eq. (5.2.6) e manifesta tão-somente os efeitos da curvatura sobre as constantes constitutivas do campo ψ . Assim, uma solução fundamental $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ pode ocorrer independentemente do valor do campo ϕ , bastando que sejam satisfeitas as condições discutidas na seção 5.2; todavia, a possibilidade da ocorrência de um estado fundamental $\phi = \phi_0 = \text{const.}$

depende da existência prévia do campo ψ em seu estado fundamental.

De acordo com a eq. (14), a solução não-trivial $\psi = \psi_0 = \text{const.} \neq 0$ é dada por

$$\psi_0^2 = \frac{2(2k\Lambda - 3M^2)}{(kM^2 - 12\Sigma)} \quad (6.2.15)$$

Nesse caso, inspecionando a eq. (13) verificamos que uma massa efetiva é gerada para o campo ϕ ,

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{k(M^4 - 8\Sigma\Lambda)}{(kM^2 - 12\Sigma)} \quad (6.2.16)$$

de modo que uma solução não-trivial $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ pode ser obtida:

$$\phi_0^2 = \frac{m_{\text{eff}}^2}{2\sigma} \quad (6.2.17)$$

Assim, a existência de uma solução não-trivial para o campo massivo $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ pode induzir a existência de uma solução $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ para o campo sem massa. Este resultado pode ser naturalmente ampliado para uma série de campos escalares, configurando assim um processo de cascata de quebras sucessivas de simetria [185].

6.3 ACOPLAMENTOS MISTOS E WIST

Consideremos agora a situação complementar em que temos um campo escalar $\phi(x)$ acoplado não-minimalmente e um campo $\psi(x)$ acoplado minimalmente à gravitação. Nesse caso, a Lagran-

giana do sistema é dada por

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k} R + \phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^2) - \frac{1}{6} R \phi^2 + \psi_{,\mu}^* \psi_{,\nu} g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + W(\psi^2) + \lambda \phi^2 \psi^2 + 2\Lambda + L_{\text{mat}} \right]. \quad (6.3.1)$$

Numa variedade afim não especificada a priori, a variação à Palatini da Lagrangiana eq.(1) fornece as seguintes e-
quações de movimento:

$$\delta\phi]: \quad \square \phi + \frac{1}{6} R \phi - \lambda \psi^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (6.3.2)$$

$$\delta\psi]: \quad \square \psi - \lambda \phi^2 \psi - \frac{\partial W}{\partial \psi^*} = 0 \quad (6.3.3)$$

$$\delta g^{\mu\nu}]: \quad \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} \phi^2 \right) G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} + \phi_{,\nu}^* \phi_{,\mu}) - \\ - \frac{1}{2} (\psi_{,\mu}^* \psi_{,\nu} + \psi_{,\nu}^* \psi_{,\mu}) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^2) + \\ + \psi_{,\mu}^* \psi_{,\nu} g^{\mu\nu} + W(\phi^2) + \lambda \phi^2 \psi^2 + 2\Lambda] - T_{\mu\nu}[\text{mat}]. \quad (6.3.4)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha]: \quad g_{\mu\nu};\alpha = g_{\mu\nu} (-\ln \Omega)_{,\alpha}, \quad (6.3.5)$$

onde

$$\Omega(x) = \left(\frac{1}{k} - \frac{\phi^2}{6} \right) (x) \quad (6.3.6)$$

A eq.(5) caracteriza uma estrutura geométrica do ti-
po WIST, com um vetor de gauge $\omega_\alpha = (-\ln \Omega)_{,\alpha}$. Na ausência de
matéria ($T_{\mu\nu}[\text{mat}] = 0$) e escolhendo potenciais $V(\phi^2)$ e $W(\psi^2)$
tais como nas eqs.(2.2), obtemos para o traço da equação de
Einstein eq.(4) a expressão

$$\frac{1}{k} R = m^2 \phi^2 + M^2 \psi^2 - 4\Lambda - \frac{1}{2} \square \phi^2 - \frac{1}{2} \square \psi^2 , \quad (6.3.7)$$

e assim as equações de movimento dos campos tomam a forma

$$\begin{aligned} \square \phi + \left[-\frac{k}{12} \square \psi^2 + \left(\frac{k}{6} M^2 - \lambda \right) \psi^2 - \frac{k}{12} \square \phi^2 + \left(m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \right) \right] \phi + \\ + \left(\frac{k}{6} m^2 - 2\sigma \right) \phi^2 \phi = 0 , \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

$$\square \psi + (M^2 - \lambda \phi^2) \psi - 2\Sigma \psi^2 \psi = 0 . \quad (6.3.9)$$

Encontramos assim uma teoria em que os campos ϕ e ψ , através da mediação do campo gravitacional, influenciam-se mutuamente de forma complexa. Procuremos estudar os efeitos recíprocos da ocorrência de estados não-triviais para ambos os campos.

Caso 1: $\phi = \phi_0 = \text{const.}$

Nesse caso, $\omega_\alpha = 0$ e obtemos uma estrutura geométrica Riemanniana. As equações de Einstein e de movimento eqs(4,8,9) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{\text{ren}}} \bar{G}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\psi^*_{,\mu} \psi_{,\nu} + \psi^*_{,\nu} \psi_{,\mu}) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\psi^*_{,\sigma} \psi_{,\lambda} g^{\sigma\lambda} - \\ - (M^2 - \lambda \phi_0^2) \psi^2 + \Sigma \psi^4 + V(\phi_0^2) + 2\Lambda] , \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

onde $k_{\text{ren}} \equiv \left(\frac{1}{k} - \frac{\phi_0^2}{6} \right)^{-1} = \Omega^{-1}$;

$$\square \psi + (M^2 - \lambda \phi_0^2) \psi - 2\Sigma \psi^2 \psi = 0 , \quad (6.3.11)$$

$$\left[-\frac{k}{12} \square \psi^2 + \left(\frac{k}{6} M^2 - \lambda \right) \psi^2 + \left(m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \right) \right] \phi_0 + \left(\frac{k}{6} m^2 - 2\sigma \right) \phi_0^2 \phi_0 = 0 . \quad (6.3.12)$$

A equação de Einstein eq.(10) reduz-se assim ao caso do acoplamento mínimo do campo ψ à gravitação eq.(2.2.8), sendo renormalizadas a constante gravitacional k , a massa M do campo e a constante cosmológica Λ . Da eq.(12), por outro lado, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = 0 , \\ \phi_0^2 = \frac{6}{(km^2 - 12\sigma)} \left[\frac{k}{12} \square \psi^2 - \left(\frac{k}{6} M^2 - \lambda \right) \psi^2 - \left(m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \right) \right] . \end{array} \right. \quad (6.3.13a)$$

Quando vale a solução trivial $\phi_0 = 0$, as eqs.(10,11) coincidem com o caso do acoplamento mínimo. Se ademais tivermos $\psi = \psi_0 = \text{const.}$, a eq.(11) nos dá correspondentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = 0 , \\ \psi_0^2 = \frac{M^2}{2\Sigma} \end{array} \right. \quad (6.3.14a)$$

$$(6.3.14b)$$

como seria de esperar. Se $\Sigma = 0$, não pode ocorrer quebra de simetria do campo ψ . A eq.(10) reduz-se à forma tipo De Sitter, como a eq.(5.3.35), se é válida a eq.(14b).

Por outro lado, no caso não-trivial $\phi_0 = \text{const.}$, eq.(13b), temos da eq.(11)

$$\square \psi + \left[M^2 - \frac{6\lambda}{(km^2 - 12\sigma)} \left(\frac{k}{12} \square \psi^2 - \left(\frac{k}{6} M^2 - \lambda \right) \psi^2 + \left(m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \right) \right) \right] \psi - 2\Sigma \psi^2 \psi = 0 . \quad (6.3.15)$$

Assim, o campo ψ pode se encontrar num estado $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = 0, \\ \psi_0^2 = \frac{-[\lambda(6m^2 - 4k\Lambda) + M^2(km^2 - 12\sigma)]}{[\lambda(kM^2 - 6\lambda) - 2\Sigma(km^2 - 12\sigma)]} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.3.16a) \\ (6.3.16b) \end{array}$$

A eq. (13b) nos diz então que

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^2 = \frac{(4k\Lambda - 6m^2)}{(km^2 - 12\sigma)} = \frac{m^2_{\text{eff}}}{2\sigma_{\text{eff}}} \quad (\psi_0 = 0) \\ \phi_0^2 = \frac{[(kM^2 - 6\lambda)M^2 + 2\Sigma(km^2 - 12\sigma)]}{[\lambda(kM^2 - 6\lambda) - 2\Sigma(km^2 - 12\sigma)]} \quad (\psi_0 = \text{const.}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.3.17a) \\ (6.3.17b) \end{array}$$

Desse modo, mesmo que a constante de autoacoplamento Σ seja nula, é possível a ocorrência de um estado não-trivial para o campo ψ , pois da eq. (16b) teremos então

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^2 = \frac{-[\lambda(6m^2 - 4k\Lambda) + M^2(km^2 - 12\sigma)]}{\lambda(kM^2 - 6\lambda)}, \\ \phi_0^2 = \frac{M^2}{\lambda}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.3.18a) \\ (6.3.18b) \end{array}$$

Se, por acaso, temos $\Sigma \neq 0$ e anulamos a interação direta entre os campos ($\lambda = 0$), ainda assim recuperamos a solução do caso mínimo $\psi_0^2 = \frac{M^2}{2\Sigma}$, como na eq. (14b).

Vemos assim que a Riemannização (equivalente a $\phi = \phi_0 = \text{const.}$) do sistema misto eqs. (4,8,9) pode resultar na indução de um mecanismo de quebra de simetria para o campo mínimo ψ , mesmo na ausência da constante de auto-interação Σ .

Caso 2: $\psi = \psi_0 = \text{const.}$

Nesse caso, da eq. (9) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = 0 \quad , \quad (6.3.19a) \\ \psi_0^2 = \frac{M^2 - \lambda \phi^2}{2\Sigma} \quad . \quad (6-3-19b) \end{array} \right.$$

Da solução trivial eq. (18a) resulta um sistema coincidente com as eqs. (5.3.2-5) para o campo não-mínimo ϕ , e portanto todos os resultados desenvolvidos na seção 5.3 são válidos aqui. Por outro lado, a existência da solução não-trivial eq. (18b) para o campo ψ implica que

$$\phi^2 = \phi_0^2 = \frac{M^2 - 2\Sigma\psi_0^2}{\lambda} = \text{const.} \quad (6.3.20)$$

ou seja, um eventual processo de quebra espontânea de simetria para o campo mínimo acarretará uma solução constante para o campo não-mínimo, e conseqüentemente a Riemannização da variedade. Da equação de movimento eq. (8) temos então

$$\left[\left(\frac{k}{6} M^2 - \lambda \right) \left(\frac{M^2 - \lambda \phi_0^2}{2\Sigma} \right) + \left(m^2 - \frac{2}{3} k\Lambda \right) \right] \phi_0 + \left(\frac{k}{6} m^2 - 2\sigma \right) \phi_0^2 \phi_0 = 0 \quad , \quad (6.3.21)$$

logo

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = 0 \quad , \quad (6.3.22a) \\ \phi_0^2 = - \frac{[2\Sigma(6m^2 - 4k\Lambda) + M^2(kM^2 - 6\lambda)]}{[2\Sigma(km^2 - 12\sigma) - \lambda(kM^2 - 6\lambda)]} \quad , \quad (6.3.22b) \end{array} \right.$$

No primeiro caso ($\phi_0 = 0$), temos para o campo ψ o valor convencional $\psi_0^2 = \frac{M^2}{2\Sigma}$; no segundo ($\phi_0 \neq 0$), a eq. (19b) nos fornece

$$\psi_0^2 = \frac{-[\lambda(6m^2 - 4k\Lambda) + M^2(km^2 - 12\sigma)]}{[2\Sigma(km^2 - 12\sigma) - \lambda(kM^2 - 6\lambda)]} \quad , \quad (6.3.23)$$

determinando assim o valor de ψ_0 . A equação de Einstein eq. (4) assume a forma $\bar{G}_{\mu\nu} = \Lambda_{\text{eff}}g_{\mu\nu}$, onde

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{3k}{(6 - k\phi_0^2)} [V(\phi_0^2) + W(\psi_0^2) + \lambda\phi_0^2\psi_0^2 + 2\Lambda]. \quad (6.3.24)$$

Em resumo, verificamos que no caso $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ o sistema misto (mínimo e não-mínimo) dado pela eq. (1), além dos casos triviais (envolvendo $\psi_0 = 0$ ou $\phi_0 = 0$) nos quais recaímos em situações anteriormente discutidas, admite também uma solução (dada pelas eqs. (22b,23) em que ambos os campos se encontram em estados não-triviais (ϕ_0, ψ_0) que podem ser associados, em princípio, a fenômenos de quebra de simetria correlatos à Riemannização da variedade. Esta solução não-trivial combinada pode subsistir mesmo na ausência de autoacoplamentos ($\sigma = \Sigma = 0$), ou então na ausência de interação direta ($\lambda = 0$).

Investiguemos a possibilidade das soluções não-triviais eqs. (22b,23) constituírem soluções fundamentais, isto é, estados que extremizem a energia do sistema misto em questão. Construindo, de modo análogo à eq. (5.2.20), a função energia do sistema (ϕ, ψ) , no caso (ϕ_0, ψ_0) obtemos

$$E[\phi_0, \psi_0] = \frac{-3[V(\phi_0^2) + W(\psi_0^2) + \lambda\phi_0^2\psi_0^2 + 2\Lambda]}{(6 - k\phi_0^2)} \quad (6.3.25)$$

As soluções $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ que extremizam a função eq. (25) são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}_0 = 0 \\ \tilde{\phi}_0 = \frac{(M^2 - \lambda\tilde{\phi}_0^2)}{2\Sigma} \end{array} \right. \quad , \quad (6.3.26a)$$

$$(6.3.26b)$$

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{\phi}_0 = 0 \quad , \\ k\sigma\tilde{\phi}_0^4 - 12\sigma\tilde{\phi}_0^2 - k\Sigma\tilde{\psi}_0^4 + (kM^2 - 6\lambda)\tilde{\psi}_0^2 + (6m^2 - 2k\Lambda) = 0. \end{array} \right. \quad (6.3.27a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (6.3.27b)$$

Estas soluções de extremo devem ser compatíveis com as eqs. (19,22) provenientes das equações de movimento. Os casos envolvendo $\phi = \tilde{\phi}_0 = 0$ são imediatamente compatíveis; comparando a eq. (21) com a eq. (27b), verificamos que as soluções (ϕ_0, ψ_0) dadas pelas eqs. (18,22b) são extremos se é satisfeita a condição adicional

$$\Sigma\psi_0^4 = \sigma\phi_0^4 - m^2\phi_0^2 + 2\Lambda \quad . \quad (6.3.28)$$

No caso eq. (19a), $\psi_0 = \tilde{\psi}_0 = 0$, a condição eq. (28) fornece

$$(m^4 - 8\sigma\Lambda) \left(km^2 - \frac{k^2\Lambda}{3} - 6\sigma \right) = 0 \quad , \quad (6.3.29)$$

de onde extraímos duas possibilidades:

$$\left[\begin{array}{l} \underline{a.} \quad m^4 = 8\sigma\Lambda, \quad \text{logo} \quad \phi_0^2 = \frac{-(6m^2 - 4k\Lambda)}{(km^2 - 12\sigma)} = \frac{m^2}{2\sigma} \quad . \quad (6.3.30a) \\ \underline{b.} \quad (m^2 - \frac{k}{3}\Lambda) = \frac{6}{k}\sigma, \quad \text{logo} \quad \phi_0^2 = \frac{6}{k} \quad . \quad (6.3.30b) \end{array} \right.$$

No primeiro caso, recuperamos a solução fundamental eq. (5.2.24). No segundo, $\Omega = 0$ e o sistema é indeterminado.

Quando o sistema (ϕ, ψ) se encontra no estado não-trivial (ϕ_0, ψ_0) dado pelas eqs. (22b,23), substituindo essas relações na condição de extremização eq. (28) encontramos o vínculo

$$\begin{aligned}
 & k^2 \left[\frac{M^4}{36} (2\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4 - \lambda m^2 M^2 + 2\lambda^2 \Lambda) - \frac{4}{9} \Sigma \Lambda^2 (\lambda^2 - 4\Sigma\sigma) \right] + \\
 & + \frac{k}{3} \left[(2\Sigma m^2 - \lambda M^2) (\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4 - \lambda m^2 M^2 + 2\lambda^2 \Lambda) \right] + \\
 & + [(\lambda^2 - 4\Sigma\sigma) (\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4 - \lambda m^2 M^2 + 2\lambda^2 \Lambda)] = 0. \quad (6.3.31)
 \end{aligned}$$

Uma vez que o valor da constante gravitacional k é independente dos restantes parâmetros, os coeficientes das potências de k na eq.(31) devem se anular, o que implica restrições suplementares a serem satisfeitas por esses parâmetros.

Consideremos, a título de ilustração, o caso em que não há interação direta entre os campos ($\lambda = 0$), Temos então

$$\begin{aligned}
 & k^2 \left[\frac{M^4}{36} (2\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4) + \frac{16}{9} \sigma \Sigma^2 \Lambda^2 \right] + \\
 & + \frac{k}{3} [2\Sigma m^2 (\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4)] + \\
 & + (-4\Sigma\sigma) (\Sigma(m^4 - 8\sigma\Lambda) + \sigma M^4) = 0 \quad (6.3.32)
 \end{aligned}$$

Os coeficientes das potências de k se anulam se temos, simultaneamente, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma m^4 + \sigma M^4 = 8\Sigma\sigma\Lambda \quad (6.3.33a) \\ M^4 = \pm 8\Sigma\Lambda \quad (6.3.33b) \end{array} \right.$$

do que resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 0 \quad (+) \quad (6.3.34a) \\ m^4 = 16\sigma\Lambda \quad (-) \quad (6.3.34b) \end{array} \right.$$

Das eqs. (22b,23) obtemos então

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^2 = \frac{M^2}{2\Sigma} = \pm \frac{4\Lambda}{M^2} \\ \phi_0^2 = \frac{k(M^4 - 8\Sigma\Lambda) + 12\Sigma m^2}{2\Sigma(km^2 - 12\sigma)} \end{array} \right. \quad (6.3.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^2 = \frac{M^2}{2\Sigma} = \pm \frac{4\Lambda}{M^2} \\ \phi_0^2 = \frac{k(M^4 - 8\Sigma\Lambda) + 12\Sigma m^2}{2\Sigma(km^2 - 12\sigma)} \end{array} \right. \quad (6.3.36b)$$

e de acordo com as eqs. (34),

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = 0 \quad (+) \\ \phi_0^2 = -\frac{m^2}{2\sigma} \quad (-) \end{array} \right. \quad (6.3.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = 0 \quad (+) \\ \phi_0^2 = -\frac{m^2}{2\sigma} \quad (-) \end{array} \right. \quad (6.3.36b)$$

Portanto, concluímos que na ausência de interação direta ($\lambda = 0$), a quebra expontânea de simetria do campo mínimo ψ (dada pela solução fundamental eq. (35a)) induz a Riemannização do espaço - tempo ($\phi = \phi_0 = \text{const.}$) e também a quebra de simetria do campo não-mínimo ϕ , expressa pela solução fundamental eq. (36b). Reencontramos aqui a possibilidade de um processo em cadeia de quebras de simetria, disparado pela solução fundamental eq. (35a), análogo ao discutido ao cabo da seção anterior.

6.4 CAMPOS ESCALARES EM ESPAÇOS CURVOS E O NÚMERO DE EDDINGTON

Como comentamos na seção 3.5, temos decorrido já mais de meio século desde o primeiro reconhecimento, por Eddington, de que é possível construir números adimensionais muito grandes tomando-se razões de constantes pertencentes aos domínios macro- e microscópico do mundo físico - e que, coincidentemen

te, esses grandes números parecem todos relacionados a alguma potência do número de Eddington 10^{39} .

Devemos no entanto admitir que desde as tentativas de Dirac^[124,129] de elucidar as origens dessas coincidências assimilando-as a um programa cosmológico (a Hipótese dos Grandes Números), passando pela abordagem modificada sugerida por Dicke^[186] nos anos 60 (da qual derivam as variadas expressões do moderno Princípio Antrópico^[123]), até chegar a nossos dias, houve pouco progresso real na compreensão desta questão. Ainda hoje, temos dificuldades até mesmo para apresentar argumentos sólidos e consensualmente consentidos que possam fundamentar a opinião de que há, de fato, um problema físico real oculto sob o véu dessas coincidências só aparentemente inocentes.

Apesar do longo curso desse enigma, e sem aspirar a qualquer pretensão de tê-lo solvido, gostaríamos de registrar aqui a aparição do número de Eddington 10^{39} num contexto que, presumivelmente, era ainda insuspeito: o do acoplamento não-mínimo de dois campos escalares com a gravitação^[187]. Nossa investigação principiou pela constatação de que o acoplamento não-mínimo de campos físicos com a gravitação propicia diversos tipos de efeitos de intercâmbio entre o comportamento desses campos e as características da gravitação, como frisamos reiteradas vezes ao longo do presente trabalho. Seria desejável outrossim a elaboração de um esquema em que as consequências dessa interrelação pudessem ser aferidas, ou de algum modo comparadas, com resultados concretos de processos interativos bem-conhecidos. Somos então induzidos a considerar o cenário não-mínimo de interação entre

dois campos escalares $\phi(x)$, $\psi(x)$ e a gravitação representado pela Lagrangiana quasi-conforme eq.(2.1),

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{K} R + \phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi^* \phi) - \frac{1}{6} R \phi^* \phi + \psi^*_{,\mu} \psi_{,\nu} g^{\mu\nu} + W(\psi^* \psi) - \frac{1}{6} R \psi^* \psi + \lambda (\phi^* \phi) (\psi^* \psi) + 2\Lambda + L_{\text{mat}} \right] . \quad (6.4.1)$$

Podemos interpretar a Lagrangiana eq.(1) como sendo a generalização, para espaços curvos, de um dado processo interativo entre campos escalares no espaço plano. Ora, o termo conformalmente invariante de interação direta $\lambda \phi^2 \psi^2$ (onde $\phi^2 = \phi^* \phi$, $\psi^2 = \psi^* \psi$) apresenta uma analogia natural com a Lagrangiana de um processo elástico de interação forte entre dois campos escalares mesônicos (representando, digamos, pions e kaons), que tem a forma [188].

$$L_{\pi\kappa} = g_s (\phi^* \phi)_{\pi} (\psi^* \psi)_{\kappa} . \quad (6.4.2)$$

Sem dúvida, a consideração genérica de processos de interação forte num espaço curvo é deveras temerária, mesmo porque uma teoria de campos em forma completa para a interação forte permanece por ser obtida. Todavia, podemos compreender a eq. (2) como sendo a expressão fenomenológica de um processo forte que de fato possui representação formal, qual seja, o espalhamento elástico entre pions e kaons. Se desejamos introduzir valores realísticos, a constante de acoplamento g_s deve ser identificada à constante de Fermi da interação forte, $g_{SF}^2 \sim 15\hbar c$.

Assim, admitindo que a teoria quasi-conforme dada pela eq. (1) constitui uma generalização adequada do processo de

interação forte (ϕ, ψ) no espaço plano acima delineado para uma configuração $(\phi, \psi, g_{\mu\nu})$ num espaço curvo, podemos empreender a investigação dos efeitos recíprocos entre este processo e a gravitação. Dois pontos devem ser esclarecidos de imediato: primeiramente, a generalização do processo eq.(2) no espaço plano para a configuração num espaço curvo dada pela eq.(1) não é, de modo algum, unívoca ou esgotante. Em segundo lugar, a ordem de magnitude das possíveis perturbações sofridas pelo sistema (ϕ, ψ) devido ao espaço curvo de fundo é presumivelmente tão diminuta que poder-se-ia, em princípio, descartar qualquer efeito gravitacional sobre o referido processo de interação como fisicamente insignificante. Embora esta argumentação à primeira vista pareça ser verídica e até incontornável, veremos no que se segue que ela não é correta em todos os sentidos [189].

Para este fim, preservaremos em aberto o valor do parâmetro λ de interação "forte" na eq.(1), sem identificá-lo de pronto com o valor experimental g_{SF} , para que assim possamos descobrir se a presença do campo gravitacional impõe alguma restrição sobre o espectro de valores admissíveis desse parâmetro. Variando de modo convencional a eq.(1), numa estrutura Riemanniana dada a priori, obtemos as equações de movimento eqs.(6.2.3-5),

$$\square \phi + \frac{1}{6} R\phi - \lambda\psi^2\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad , \quad (6.4.3)$$

$$\square \psi + \frac{1}{6} R\psi - \lambda\phi^2\psi - \frac{\partial W}{\partial \psi^*} = 0 \quad , \quad (6.4.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6}(\phi^2 + \psi^2)\right)G_{\mu\nu} = & -T_{\mu\nu}[\phi] - T_{\mu\nu}[\psi] - T_{\mu\nu}[\text{int}] + \\ & + \Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}[\text{mat}] \quad , \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

onde os diferentes tensores energia-momentum são os especificados na seção 2; mais uma vez, adotamos potenciais $V(\phi^2)$, $W(\psi^2)$ com a forma quártica das eqs.(2.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\phi^2) = -m^2\phi^2 + \sigma\phi^4 \\ W(\psi^2) = -M^2\psi^2 + \Sigma\psi^4 \end{array} \right. \quad (6.4.6a)$$

$$(6.4.6b)$$

Se supomos que $T^\mu_\mu[\text{mat}] = 0$ (radiação, por exemplo), contraindo a equação de Einstein eq.(5) e usando as eqs.(3,4) encontramos

$$\frac{1}{k} R = m^2\phi^2 + M^2\psi^2 - 4\Lambda . \quad (6.4.7)$$

Como já observamos, a expressão do escalar de curvatura R não depende das constantes de auto-acoplamento σ e Σ dos campos; assim, doravante nos restringimos ao caso em que essas constantes são nulas ($\sigma = \Sigma = 0$). Se agora nos indagarmos se existem soluções não-triviais $\phi = \phi_0 = \text{const.}$, $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ para o sistema $(\phi, \psi, g_{\mu\nu})$ em questão, a resposta é positiva. Com efeito, das eqs.(3,4) temos nesse caso

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^2 = \frac{6m^2 + R}{6\lambda} \\ \psi_0^2 = \frac{6M^2 + R}{6\lambda} \end{array} \right. \quad (6.4.8a)$$

$$(6.4.8b)$$

de modo que substituindo a expressão eq.(7) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^2 = \frac{kM^2(m^2 - M^2) - 2\lambda(2k\Lambda - 3M^2)}{\lambda(6\lambda - k(M^2 + m^2))} \\ \psi_0^2 = \frac{km^2(M^2 - m^2) - 2\lambda(2k\Lambda - 3m^2)}{\lambda(6\lambda - k(M^2 + m^2))} \end{array} \right. \quad (6.4.9a)$$

$$(6.4.9b)$$

Assim, quando o sistema não-mínimo $(\phi, \psi, g_{\mu\nu})$ se encontra no estado não-trivial $(\phi_0, \psi_0, g_{\mu\nu})$, a equação de Einstein eq. (5) para a geometria se reduz a

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6} (\phi_0^2 + \psi_0^2)\right) G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [-m^2 \phi_0^2 - M^2 \psi_0^2 + \lambda \phi_0^2 \psi_0^2 + 2\Lambda] - T_{\mu\nu} [\text{mat}], \quad (6.4.10)$$

e por conseguinte podemos escrever, em geral,

$$G_{\mu\nu} = \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu} - k_{\text{ren}} T_{\mu\nu} [\text{mat}] \quad . \quad (6.4.11)$$

Dois aspectos significativos merecem comentário: a constante gravitacional k é renormalizada,

$$k_{\text{ren}} = \frac{\lambda (6\lambda - k(M^2 + m^2))}{6(\lambda - \lambda_{(+)})(\lambda - \lambda_{(-)})} k \quad , \quad (6.4.12)$$

onde

$$\lambda(\pm) \equiv \frac{k}{6} (M \pm m)^2 \quad ; \quad (6.4.13)$$

e uma constante cosmológica efetiva é gerada (mesmo, como supomos doravante, que a constante Λ "básica" se anule, $\Lambda = 0$), tal que

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{-3km^2M^2}{6\lambda - k(M^2 + m^2)} \quad . \quad (6.4.14)$$

As figuras (6.1) e (6.2) a seguir expõem o comportamento de k_{ren} e de Λ_{eff} como funções do parâmetro forte λ .

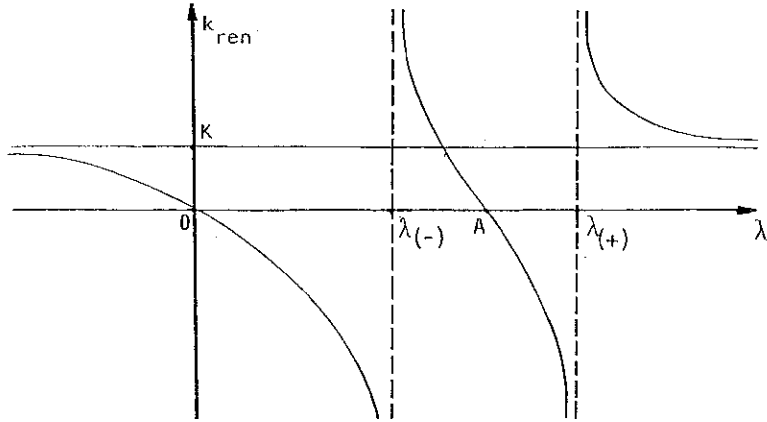


Fig. 6.4.1 - Gráfico da constante gravitacional renormalizada k_{ren} eq. (12) em função do parâmetro forte λ no estado $(\phi_0, \psi_0, g_{\mu\nu})$. O ponto A corresponde a $\lambda = \frac{k}{6} (M^2 + m^2)$.

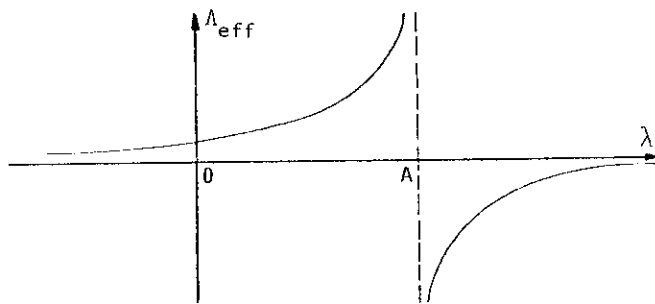


Fig. 6.4.2 - Gráfico da constante cosmológica efetiva Λ_{eff} eq. (14) em função do parâmetro forte λ , no estado $(\phi_0, \psi_0, g_{\mu\nu})$. O ponto A corresponde a $\lambda = \frac{k}{6} (M^2 + m^2)$.

Observemos que os sinais tanto de k_{ren} quanto de Λ_{eff} variam de acordo com o valor do parâmetro λ . De fato, da figura (6.3) abaixo verificamos que há regiões de valores de λ em que o fator k_{ren} é negativo, e portanto ocorre a geração de gravitação repulsiva (antigravidade). Assim, se quisermos que a força gravitacional tenha caráter estritamente atrativo, somos conduzidos a impor um limite inferior para o parâmetro λ , de modo a garantir que k_{ren} permaneça sempre positivo. É certamente um fato notável que, no presente contexto não-mínimo, esta propriedade tão simples e costumeira (a atratividade da força gravitacional) termine por implicar em restrições sobre a intensidade da interação entre os campos escalares.

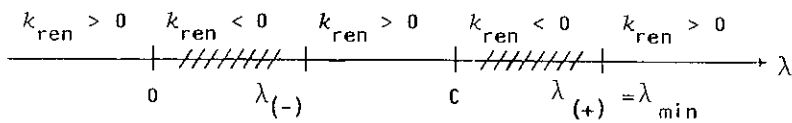


Fig. 6.4.3 - Análise do comportamento do sinal do fator k_{ren} com relação ao parâmetro forte λ . Seções hachuradas correspondem a valores negativos de k_{ren} e portanto à antigravidade. O ponto C corresponde a $\lambda = \frac{k}{6} (M^2 + m^2)$.

Inspeccionando a Fig.(3), notamos que k_{ren} é monotamente positivo a partir do valor $\lambda_{min} = \lambda_{(+)} = \frac{k}{6}(M^2 + m^2)$. Qual será a razão entre o valor mínimo admissível λ_{min} e a constante de acoplamento g_{SF} extraída da observação experimental? Levando em conta que as massas m_{π} e M_{K} de pions e kaons têm a mesma ordem de grandeza, uma rápida consulta às tabelas de propriedades das partículas elementares [190] nos proporciona a razão

$$\frac{g_{SF}}{\lambda_{min}} = 10^{39} . \quad (6.4.15)$$

Embora devêssemos seguramente esperar que a Natureza houvesse selecionado um valor muito elevado para a constante forte real, bem acima do limite mínimo admissível para que seja evitada a geração de gravitação repulsiva, é de fato surpreendentemente que a razão eq.(15) reproduza precisamente o antigo e misterioso número de Eddington!

Comprovamos assim nossa asserção de que as consequências da introdução de um campo gravitacional de fundo na descrição do processo elástico de interação forte eq.(2) não são obrigatoriamente irrelevantes ou sem significação física, pois a exigência de que seja preservada uma propriedade simples e básica da interação gravitacional (sua atratividade) no presente contexto não-mínimo é suficiente para que sejam impostos limites sobre o possível domínio de variabilidade da constante de acoplamento forte. Por outro lado, a precisa natureza da relação entre o número de Eddington e razões dimensionais construídas com constantes físicas fundamentais tem perturbado os físicos desde

muito; embora a nova "coincidência" (?) que apontamos acima, surgida num contexto até aqui imprevisto, pouco acrescenta de fato a uma maior compreensão desse difícil problema, sua ocorrência certamente aprofunda o caráter enigmático que cerca esta aparente conexão entre os mundos macro- e microscópico.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO

A glória de Deus é ocultar algo.

A glória dos Reis é indagar algo.

Provérbios, XXV

Ao longo do presente trabalho, examinamos uma variedade de aspectos concernentes ao uso de acoplamentos não-mínimos entre campos escalares e vetoriais com a gravitação como eixo diretor para a investigação de problemas correntes em Cosmologia. Essa abordagem nos ensejou a elaboração de um quadro alternativo de descrição dos processos gravitacionais de interação do qual emergiram diversos cenários cosmológicos originais, manifestando vários tipos de efeitos físicos interessantes. Para proceder a uma avaliação crítica desses resultados, principiemos por sumarizã-los de maneira rápida e sucinta:

O acoplamento conforme de campos vetoriais com a gravitação, que havia anteriormente proporcionado a geração de universos não-singulares numa variedade Riemanniana, em nosso caso permite, mercê do emprego do método variacional de Palatini e da escolha de um ansatz temporal simples ("fótons longitudinais"), a

obtenção de uma solução cósmica numa variedade do tipo WIST exibindo uma peculiar separação dinâmica de um "campo escalar" (a saber, a componente temporal do potencial vetorial A_μ) que resulta ser inteiramente indeterminado, não obstante lhe poder ser atribuída a origem da curvatura do espaço-tempo (solução "Marionete", seção 4.3). Ainda que este aspecto um tanto inusitado não constitui, decerto, uma propriedade geral dos sistemas gravitacionais, o surgimento de uma tal indeterminação em escala cósmica, assegurada pela consistência do esquema dinâmico em questão, é indicativa da grande riqueza e originalidade conceituais manifesta pelos cenários cosmológicos não-mínimos.

Quando consideramos em seguida (seção 4.4) a inclusão de matéria minimalmente acoplada neste cenário, representada por um fluido perfeito caracterizado por uma densidade de energia e uma pressão isotrópica, obtivemos no caso de radiação uma solução em que é mantido o aspecto de indeterminação que denominamos "caráter Marionete", ou seja, a densidade de energia do fluido e o fator de expansão da métrica tipo FRW são ambos determinados pela componente temporal do potencial vetorial não-mínimo, que não é, ela mesma, fixada pelas equações dinâmicas; no caso de poeira, por outro lado, a adição de um termo de corrente externa proporcional ao potencial A_μ redundava numa solução cósmica numa variedade WIST com densidade constante e um fator de expansão exponencial do tipo De Sitter, em que o referido caráter Marionete de indeterminação é eliminado. Esta aparente contradição (qual seja, uma solução tipo De Sitter com densidade de energia constante) é resolvida pelo reconhecimento do papel compensatório desempenhado pelo potencial não-mínimo A_μ , associado à natureza Weyliana do espaço tempo, o que permite vincular esta solução ao "Princípio Cosmológico

Perfeito"^[17]. O estabelecimento de uma expressão covariante de uma "lei de conservação" numa geometria WIST nos permitiu testar a consistência das soluções acima mencionadas e obter o "limite Riemanniano" de cada caso (respectivamente, soluções tipo Friedman e a solução trivial do vazio Minkowskiano).

Outrossim, a tentativa de se elaborar uma solução estática com simetria esférica para nosso sistema não-mínimo numa variedade WIST dinamicamente gerada (seção 4.5) foi apenas parcialmente bem sucedida. Em virtude da excessiva simplicidade do ansatz escolhido e da existência de vínculos dinâmicos de compatibilidade, a investigação de métricas tipo Reissner-Nordstrom colheu apenas resultados intuitivos; por outro lado, uma métrica do tipo conforme nos proporcionou uma solução tipo Bertotti-Robinson para a restrição Riemanniana da teoria, e uma solução conforme no caso WIST — mas não nos permitiu elaborar um modelo de embebimento de um domínio cerrado do tipo Riemann em uma variedade globalmente Weyliana (ou vice-versa), nem tampouco a investigação das propriedades de uma orla ou fronteira entre esses domínios. Seria necessário, acreditamos, a adoção de hipóteses menos restritivas (ou seja, um ansatz mais elaborado) para poder-se dar conta da grande complexidade do cenário não-mínimo em questão.

Passando agora ao caso de campos escalares conformalmente acoplados à gravitação, depois de considerarmos as propriedades desse esquema no espaço Riemanniano (como a geração de gravitação repulsiva por mecanismos de quebra de simetria) desenvolvemos um modelo (seção 5.3) em que uma "constante cosmológica" surge como um resmanescente de uma "fase Weyliana" da evolução cósmica, o que permite a interpretação da presença de uma tal cons

tante como resultado de uma transição estrutural da geometria da variedade. Decerto, esta interpretação não elimina a antiga e intrigante questão acerca da exata proveniência (e do valor quase nulo) da constante cosmológica em nosso Universo real, mas permite atribuir-lhe um novo sentido físico, de caráter geométrico, como um subproduto dinâmico de uma redução de uma estrutura WIST a uma variedade Riemanniana. Consideramos a seguir (seção 5.4) a analogia entre o acoplamento conforme de um campo escalar num espaço de Riemann e modelos pentadimensionais do tipo Kaluza, sugerida pelos trabalhos de Belinskii, Lifshitz e Khalatnikov. Verificamos que tal analogia é válida também no caso de uma variedade WIST dinamicamente gerada (o que seria de se esperar, visto que somente o procedimento variacional adotado, à Lagrange e à Palatini, é distinto nos dois casos, sendo a Lagrangiana não-mínima a mesma); todavia, a introdução de componentes materiais espolia essa similaridade, ou seja, a referida analogia restringe-se ao caso do vazio. Obtivemos ainda, como resultado colateral dessa investigação, duas soluções do modelo de Kaluza com a inclusão de uma constante cosmológica em que o fator de expansão da 4-métrica tipo FRW é não-singular na origem $t=0$, embora a métrica completa a cinco dimensões exiba uma singularidade essencial nesse ponto.

No cap. 6, por fim, após expormos um mecanismo de quebras sucessivas de simetria de vários campos escalares conformalmente acoplados numa variedade Riemanniana, estendemos essa investigação para o caso de uma estrutura WIST dinamicamente gerada compreendendo um campo escalar mínimo e um não-mínimo, verificando que a Riemannização da estrutura geométrica da variedade pode resultar na indução de uma quebra de simetria para o campo escalar

mínimo, mesmo na ausência de um termo de auto-acoplamento; e que, por sua vez, a quebra da simetria do campo mínimo redundava automaticamente numa Riemannização do espaço-tempo, concomitante à ocorrência de um estado não-trivial do campo escalar não-mínimo, o que pode, em princípio, ser associado também a um mecanismo em cadeia de quebras sucessivas de simetria. Como derradeira investigação, consideramos (seção 6.4) um caso em que dois campos escalares conformalmente acoplados num espaço curvo podem ser associados à representação fenomenológica de um processo de interação forte, de modo a permitir a avaliação dos efeitos da curvatura do espaço sobre tal processo. A demanda de que a gravitação tenha sempre um caráter atrativo resulta numa correlação entre o possível valor, nesse contexto, do parâmetro de acoplamento forte, e o valor real, observado (a constante de Fermi) que, curiosamente, reproduz o antigo (e misterioso) número de Eddington, que surge assim num cenário até aqui ainda insuspeitado.

Dado o sumário expositivo acima delineado, poderemos então apreciar os resultados aqui desenvolvidos desde os pontos-de-vista conceitual e observacional. A adoção de acoplamentos não-mínimos entre a gravitação e outros campos físicos, numa perspectiva histórica, vem corresponder à crescente necessidade de integração e contextualização do conjunto dos fenômenos gravitacionais num esquema conceitual que possa abranger com naturalidade o amplo espectro de processos interativos que os diferentes domínios da Física nos apresentam hoje em dia. Com efeito, o papel exclusivo e totalizante que o campo gravitacional assumiu na Cosmologia até meados do nosso século, como o único agente organizador do Cosmos em larga escala, tem conduzido a dificuldades e im

passes aparentemente insuperáveis - como, por exemplo, no caso das tentativas de unificação das interações fundamentais, até aqui não alcançada. Para muitos autores modernos conviria, destarte, que o escopo de representação da estrutura global do Cosmos fôsse ampliado para que uma nova compreensão do panorama cósmico pudesse ser elaborada, em particular no que concerne à superação dos problemas da singularidade e da especificidade das condições iniciais que assolam o atual paradigma padrão, incarnado no MP explosivo [19].

A nosso ver, o emprego de acoplamento não-mínimos representa uma alternativa fisicamente viável a esse paradigma de terminista e totalizador que desde a obra gigantesca de Einstein vem impregnando o espírito de pesquisa de nossa época. Poderíamos talvez traçar aqui uma analogia com o programa cosmológico heterodoxo de Okum,^[35] cujo objetivo é a complexificação da estrutura global do Universo através da suposição de outras forças fundamentais de larguíssimo alcance que compareceriam, ademais da interação gravitacional, na organização do Cosmos em larga escala; pois, como vimos, os acoplamentos não-mínimos redundam na interdependência entre as características do campo gravitacional e o comportamento de outros campos físicos, de modo que a própria estrutura geométrica do espaço-tempo torna-se um participante do jogo dinâmico das interações. O questionamento do programa cosmológico de Einstein e seu correspondente modelo de uma ordem justa e determinada para o mundo físico (ao contrário, por exemplo, do que poderíamos denominar de programa de Boltzmann, em que as ordenações dos sistemas físicos são oriundas de um estado primordial de "caos") é empreendimento demasiado vasto e complexo para que possamos esgotá-lo aqui.

Por outro lado, no que se refere ao status observacional de cenário não-mínimos – em particular, de estruturas geométricas do tipo WIST – a situação é bem menos definida. Com efeito, não há evidências empíricas ou observacionais diretas que impliquem o abandono do quadro cosmológico proporcionado pelo MP, e o princípio de acoplamento mínimo, tomado enquanto expressão da forma forte do Princípio de Equivalência da TRG, parece para muitos autores ser indiretamente corroborado pela clássica experiência de Eötvös, pelas leis do eletromagnetismo e pela invariância de certas constantes microfísicas, como mencionamos no Cap. 2. Ademais, o resultado negativo concernente à teoria covariante de escala de Canuto e colaboradores parece ter colocado em suspenso abordagens cosmológicas à la Dirac e, especificamente, as geometrias conformalmente invariantes do tipo WIST (vide Cap. 3).

Ora, como argumentamos anteriormente, muitos outros autores consideram que somente a forma fraca do Princípio de Equivalência (igualmente sancionada pela experiência de Eötvös) é que pode ser extrapolada para dimensões cósmicas, do mesmo modo que as leis do eletromagnetismo não foram testadas senão nas condições amenas de nosso Sistema Solar, desconhecendo-se qual seria o comportamento de campos eletromagnéticos em situações gravitacionais extremas. Assim, ainda que padecendo da insuficiência atual de evidências observacionais definidoras (ou por causa dela), os esquemas não-mínimos aqui explorados merecem ser considerados como fisicamente legítimos (ou seja, não foram descartados pela experiência), representando cogitações válidas acerca de possíveis regimes intensos, presumivelmente vigentes em outras épocas ou domínios cósmicos. É possível, todavia, conceber-se experimentos

(envolvendo a propagação de radiação polarizada) que discrimina-
riam os efeitos de um acoplamento não-mínimo dos resultados da ele-
trodinâmica convencional; a elaboração de um tal experimento está
em curso (ainda em forma gedanken)^[191], sendo lícito presumir que
num futuro não muito distante o estatuto observacional das aborda-
gens não-mínimas possa vir a se estabelecer em bases mais sólidas.

Especificamente no que toca às estruturas geométri-
cas do tipo WIST dinamicamente geradas de que se trata aqui, a a-
parente invalidação das teorias conformalmente invariantes de Di-
rac e Canuto não implica automaticamente a exclusão de modelos
cosmológicos em espaços WIST, pois como observamos ao cabo do
Cap. 3 no presente caso a invariância conforme da teoria pode ser
dinamicamente violada, o que além disso resulta por obstar a redu-
ção apriorística dessas estruturas ao regime Riemanniano. Por ou-
tro lado, tentativas modernas de axiomatização dos princípios da
TRG por meios de elementos primitivos como régua e relógios re-
dundam não em variedades de Riemann, mas em estruturas do tipo
WIST^[192]; assim, diversos trabalhos recentes procuram abordar a ques-
tão da construção de relógios em espaços WIST, bem como elaborar
mecanismos suplementares que possam fundamentar a restrição dinâ-
mica dessas estruturas a uma configuração Riemanniana^[193].

O argumento mais ponderável em prol da consideração
de acoplamentos não-mínimos (e, por conseguinte, das estruturas
WIST deles resultantes pelo método de Palatini), entretanto, pare-
ce-nos ser de ordem pragmática. De fato, a crescente generalização
do uso de acoplamentos conformes com a gravitação, notadamente no
caso de campos escalares primordiais, pela maioria das abordagens
teóricas em Física de Partículas e em Cosmologia nos dias atuais
indica a preminência correntemente atribuída às abordagens não-mínimas.

Analogamente, diferentes argumentações recentes tem vindicado o emprego de campos vetoriais não-mínimos. Na Teoria da Supergravidade [170], por exemplo, a construção de Lagrangianas efetivas de interação resulta naturalmente na aparição de tais acoplamentos; no domínio da Eletrodinâmica Quântica foi sugerido que a presença de termos não-mínimos é uma consequência inequívoca da ocorrência de "loops" virtuais do elétron [194]. Reiteremos, todavia, que apenas a voz da observação poderá pronunciar-se de maneira decisiva a respeito da real eficácia dessas concepções contemporâneas.

No que respeita, por fim, às perspectivas futuras de desenvolvimento dos temas aqui abraçados, a primeira providência parece-nos ser a de considerar ansätze menos simplistas, de modo a que se possa estender os procedimentos previamente elaborados para situações mais gerais ou realísticas. O exemplo mais notável dessa necessidade, sem dúvida, concerne a elaboração de uma solução cosmológica estática e esfericamente simétrica (digamos, do tipo Schwarzschild ou Reissner-Nordstrom) que nos permita a consideração de domínios estruturais localizados de geometria distinta daquela da variedade global, como procuramos empreender, com relativo sucesso, na seção 4.5. De fato, a obtenção de uma solução com essas características poderia contribuir para elevar o esquema não-mínimo aqui desenvolvido a um status conceitual análogo, senão comparável, ao (ainda) desfrutado pelo MP, constituindo desse modo um importante reforço para a implementação de nosso programa pre-suntivo de uma cosmologia WIST fisicamente eficaz. Esta parece-nos ser, portanto, a questão mais aguda a demandar por uma exploração para o futuro próximo. Seria também conveniente que pudéssemos empregar de uma maneira sistemática técnicas da análise de sistemas dinâmicos a nossos resultados, de modo a clarificar e uniformizar

nosso tratamento dos modelos deles decorrentes.

Outra perspectiva possível concerne a consideração de acoplamentos não mínimos mais gerais, como por exemplo termos de acoplamento "tensoriais" do tipo

$$L = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (7.1.1)$$

entre campos vetoriais e a gravitação que, tal como no caso do acoplamento conforme exposto na seção 2.3, são de primeira ordem na curvatura, de segunda ordem nos campos e não requerem o acréscimo de novas constantes físicas dimensionais. A investigação desse tipo de acoplamento, ao que sabemos, foi apenas esboçada e encontra-se ainda nos estágios iniciais; os modelos resultantes, porém, são fortemente não-lineares e sugerem uma grande complexidade de matemática [195].

A cogitação mais desabrida que nos aventuraríamos a mencionar concerne, finalmente, a peculiar aproximação entre certas características da Teoria Quântica e as estruturas geométricas de Weyl que apontamos na seção 3.4^[119, 120]. Como indicam os variados argumentos que aí colecionamos, os espaços de Weyl poderiam vir a constituir-se uma base fundamental apropriada para um tratamento de caráter geométrico de alguns fenômenos em escala microscópica; por outro lado, a equivalência formal entre modelos quânticos e processos estocásticos, apontada principalmente por Nelson^[196], nos sugere a possibilidade de processos em que a componente Weyliana da geometria da variedade tivesse uma natureza estocástica. Não nos atrevemos a detalhar as características de um tal modelo, que habita ainda o plano rarefeito das inspirações não concretizadas.

Gostaríamos, como derradeira palavra, de expressar

nossa convicção de que os fascinantes problemas da Cosmologia moderna mereceriam uma consideração muito mais minuciosa e atilada do a que a que pudemos lhes dar aqui; que não nos seja censurado, todavia, se tomamos de empréstimo uma voz mais sábia, e autorizada por dois milênios, para sintetizar nosso sentimento ao cabo da presente obra:

A morada do homem é o Extraordinário

Heráclito

(tradução M. Heidegger)

REFERÊNCIAS E NOTAS

- [1] Por exemplo, a previsão e descoberta de novos planetas do Sistema Solar, graças à Mecânica Celeste de Newton e Laplace; a compreensão unificada do Eletromagnetismo e da Ótica proporcionada pela Eletrodinâmica de Faraday e Maxwell e pelos experimentos de Hertz; a descrição quantitativa das propriedades térmicas e das mudanças de estado físico dos corpos pela Termodinâmica e Mecânica Estatística; avanços no tratamento matemático de fluidos e feixes de partículas, pela Mecânica dos Meios Contínuos de Cauchy, dentre muitas outras conquistas. Ver, por exemplo, F.Durham e R.D. Purrington, "Frame of the Universe" (Columbia University Press, N.Y., 1983), cap.12.
- [2] É bem conhecida a perplexidade que assolou os físicos quando se verificou a chamada "catástrofe ultravioleta" na descrição do espectro de energia de um corpo negro a altas temperaturas. Por outro lado, experimentos compreendendo corpos em rápido movimento relativo resultaram discrepantes das expectativas clássicas, tanto no caso de corpos celestes - e a experiência de Michelson e Morley visando a medição da velocidade da Terra em relação a um suposto éter absoluto é o exemplo mais famoso - quanto no de feixes de partículas, como na experiência de Beckerer para a medição da massa do elétron em função de sua velocidade. Ver, por exemplo, Max Born, "Natural Philosophy of Cause and Chance" (Dover, U.K., 1964), cap.4.
- [3] Ver, por exemplo, os capítulos iniciais de A.Messiah, "Quantum Mechanics" (North-Holland, Amsterdam, 1961).
- [4] Como é bem sabido, o princípio da constância da velocidade da luz para quaisquer observadores inerciais proposto por Einstein na TRE impõe um limite para a velocidade de propagação das interações, o que implica o abandono da noção

clássica de simultaneidade entre eventos. Einstein demonstrou que nesse caso a compatibilização das medidas realizadas por observadores inerciais em rápido movimento relativo equivale à substituição da estrutura geométrica Euclidiana subjacente ao espaço de Newton por um contínuo espaço-temporal de quatro dimensões, o chamado espaço pseudo-Euclidiano de Minkowski. Ver A.Einstein, "The Meaning of Relativity", Princeton University Press (1974), cap.2.

- [5] Um paradigma científico, segundo Thomas S.Kuhn, consiste num conjunto de noções básicas e de técnicas de elaboração e solução de problemas que instrumentaliza, durante certo período, as investigações realizadas num setor da ciência. Quando um paradigma se revela inadequado para tratar fenômenos recém-observados, configura-se uma revolução científica, um regime crítico de busca de alternativas que perdura até que abordagens apropriadas delineiem um novo paradigma, restabelecendo-se então o regime "normal" de produção científica. Esta transição seria exemplarmente representada pela passagem do quadro clássico Newtoniano ao novo panorama quântico-relativístico referido aqui. Ver T.S. Kuhn, "A Estrutura das Revoluções Científicas" Ed. Perspectiva, S.P., 1975).
- [6] Esta constatação espantosa representaria, para muitos pensadores, o golpe definitivo contra o geocentrismo e o antropocentrismo, tão arraigados em nossa cultura, do ataque principiado pela Revolução Copernicana e que talvez esteja ainda por ser assimilado completamente. Sobre as motivações astronômicas e o impacto filosófico dessa conclusão, ver Durhan-Purrrington, op.cit. (Ref.1), cap.13.
- [7] A rigor, a única evidência experimental que Einstein levou em conta na elaboração da TRG foi a da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional verificada pelos famosos experimentos de Eötvös, que demonstraram que a aceleração sofrida pelos corpos em queda livre é independente das substâncias específicas que os compõem. A similaridade des

te efeito de origem gravitacional com os efeitos devidos ao movimento não-uniforme de observadores acelerados induziu o gênio de Einstein a propor que, para todos fins observacionais, a ação de um campo gravitacional seria indistinguível das "distorções" ocasionadas pela escolha de observadores não-inerciais - o chamado "Princípio de Equivalência". (Uma discussão um pouco mais profunda deste postulado será realizada no próximo capítulo). Ver A.Einstein, "Considerações Cosmológicas na Teoria Geral da Relatividade", reproduzido em H.A. Lorentz, A.Einstein, M.Minkowski e H.Weyl, "O Princípio da Relatividade" (Fundação Calouste Gulbenkian, Porto, 1983), pag. 225-242.

- [8] Born, op. cit. (Ref. 2).
- [9] Ver, por exemplo, R.Adler, M.Bazin e M.Schiffer, "Introduction to General Relativity" (McGraw-Hill, U.S.A., 1965), cap.6.
- [10] A primeira verificação in labo das consequências previstas pelo TRG consistiu na medição, por Pound e Rebka, do "peso" efetivo de um feixe de fótons. Ver R.V. Pound e G.A. Rebka, "Apparent Weight of Photons", Phys. Rev. Lett. 4(1960), 337.
- [11] E.P. Hubble, "A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extragalactic Nebulae", Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 15, 169. Contagens e mapas de distribuição de galáxias e quasares confirmam contemporaneamente suas conclusões.
- [12] G. Lemaitre, "The Primeval Atom", Van Nostrand (1950).
- [13] A noção de singularidade inicial será discutida com maior profundidade na seção 1.2, a seguir.
- [14] Ver por exemplo Ya.B. Zeldovich, "The theory of the Expanding Universe as originated by A.A. Friedman", Sov. Phys. Uspekhi 6, (1964), 475.
- [15] G. Gamow, "The Evolution of the Universe", Nature 168 (1948), 680.

- [16] Penzias e Wilson detectaram, casualmente, uma das mais fortes evidências em favor dos modelos singulares quentes: a existência de uma radiação eletromagnética de fundo, de origem cósmica, no comprimento de microondas, correspondendo a um banho térmico tipo radiação de corpo negro com temperatura de 3°K . Ver A. Penzias e R. Wilson. "A measurement of excess antenna at 408° Mc/s ", *Astrophys. J.*, 142, (1965), 419.
- [17] Bondi, Hoyle e Gold procuraram, ao propor um Universo incrito num estado "estacionário", obter uma solução com densidade constante na qual a expansão seria compensada pela criação espontânea de matéria, satisfazendo assim o "Princípio Cosmológico Perfeito" ("O Universo é homogêneo não apenas espacialmente, mas também no tempo"), de inegável simplicidade filosófica. Ver H. Bondi, "Cosmology", (Cambridge, U.K., 1960).
- [18] Os desenvolvimentos históricos da Física de Partículas Elementares conduziram à elaboração de diversos modelos de unificação das famílias de partículas elementares e das interações não-gravitacionais num único esquema formal - como, por exemplo, as atuais teorias da Grande Unificação (GUTs) e da Superunificação. Todavia, uma vez que devido às altíssimas energias envolvidas se tornaram cada vez menos factíveis os experimentos terrestres visando a verificação das predições geradas pelas diversas propostas de modelos unificados, a compatibilização ao desenrolar da história cósmica constituiu-se no laboratório gedanken mais apropriado para a seleção dentre as variadas versões sugeridas. Ver, por exemplo, S. Weinberg, "The First Three Minutes" (Fontana/Collins, G.B., 1977) ou J.D. Barrow, "Cosmology and Elementary Particles", *Fund. Cosm. Phys.*, 8 (1983), 83-200.
- [19] O "Programa Cosmológico de Einstein" é discutido em profundidade em M. Novello, "Cosmos et Contexte" (Masson, Paris, 1987), Introdução.

- [20] As dificuldades e alternativas sugeridas ao MP serão discutidas na seção 1.2, a seguir.
- [21] Ver Novello, op cit. (Ref. 19), cap. 1.
- [22] Ernesto Sábato, "Nós e o Universo" (Francisco Alves, RJ, 1985), pág. 35 ("O dogmatismo").
- [23] Novello, op.cit. (Ref. 19), cap. 3.
- [24] Ver G.F.R. Ellis, "Standard Cosmology", in "Proceedings of the V School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, Ed. (World Scientific, Singapore, 1987), 245.
- [25] G.F.R. Ellis, "Relativistic Cosmology", Rendiconti Scuola Enrico Fermi, XLVII Corso (Academic Press, N.Y. 1971); M. S. Longair, "The Universe: present, past and future", The Observatory 105, nº 1068 (1985), 325, seção 2.
- [26] M. Novello, "Cosmologia Relativística", in "Proceedings of the II School of Cosmology and Gravitation" (M. Novello, Ed. CBPF, RJ, 1980), vol. 1, seção 1.4.
- [27] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis, "The Large Scale Structure of Spacetime" (Cambridge University Press, UK., 1973).
- [28] Na literatura, encontramos diversas maneiras de se caracterizar a ocorrência de uma singularidade. Em geral, admite-se que um dado espaço-tempo exibe uma verdadeira singularidade (i.é., independente do particular sistema de coordenadas empregado) do campo gravitacional se alguma das condições abaixo é violada:
- i) as linhas de universo dos observadores fundamentais, ortogonais à superfície de homogeneidade em $(t=0)$, são completas (ou seja, podem ser indefinidamente acompanhadas) no passado e no futuro;
 - ii) os invariantes de curvatura e/ou as grandezas representativas do fluido material não se tornam ilimitados em qualquer época;
 - iii) é finito o comprimento do parâmetro afim de uma geodésica nula qualquer orientada ao passado ou ao futuro.

Ver Hawking e Ellis, op.cit. (Ref. 27), e Refs. 29 e 30 a seguir.

- [29] G.F.R. Ellis, "Alternatives to the Big-Bang", *Ann. Astron. Astrophys.*, 22, (1984), 157-184, seção 2.
- [30] F. Tipler, "The Structure of the Classical Cosmological Singularity", in "Origin and Early History of the Universe", J. Demaret, Ed. (Univ. de Liège, Belgique, 1986), 339.
- [31] Ver Novello, op.cit. (Ref. 19), cap. 5.
- [32] Ver. J.V. Narlikar, "Non-Standard Cosmologies", in Novello, Ed. op.cit. (Ref. 24), 152.
- [33] P.A.M. Dirac, "A New Basis for Cosmology", *Proc. Roy. Soc. London* A165 (1958), 199. Ver também o cap. 3.
- [34] Ver P.C.W. Davies, "The Accidental Universe" (Cambridge University Press, UK, 1982), cap. 5 e referências aí contidas.
- [35] M. Novello, "The Program of an Eternal Universe", in Novello, Ed., op.cit. (Ref. 24).
- [36] Ver, e.g., Ellis, op.cit. (Ref. 29), seção 2, e também Novello, op.cit. (Ref. 35).
- [37] Ver Ellis, op.cit. (Ref. 29), seção 3 e referências.
- [38] Ver Novello, op.cit. (Ref. 26), seção 1.4.
- [39] M.A.H. MacCallum, "Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies" in "General Relativity: an Einstein Centenary Survey", S.W. Hawking e W. Israel, Eds. (Cambridge, U.K., 1979), 533.
- [40] Ya. B. Zeldovich, "Creation of Particles by Gravitational Fields", in "Physics of the Expanding Universe", M. Demianski, Ed., *Lecture Notes in Physics* 109 (1979), 60.
- [41] Ellis, op.cit. (Ref. 29), seção 5.
- [42] A. Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, (1917), 142 reproduzido na Ref. 7.

- [43] A.A. Starobinsky, "Isotropization of Arbitrary Cosmological Expansion given an Effective Cosmological Constant", JETP Lett. 37 (1983), 67.
- [44] Sobre os universos de De Sitter, ver por exemplo Adler et al, op.cit. (Ref. 9), cap. 12.
- [45] H.P. de Oliveira e J.M. Salim, "Non-Equilibrium Friedman Cosmologies", a ser publicado em Acta Phys. Pol
- [46] N. Rosen, "General Relativity Cosmological Models without the Big-Bang", Ap. Jour. 297 (1985), 347.
- [47] M.J. Rees, "Origin of Pregalactic Microwave Background", Nature 275 (1978), 35.
- [48] G.S.Abers e B.W. Lee, "Gauge Theories", Phys. Re. 9C (1973), 1-141.
- [49] A.D. Linde, "Phase Transitions in Gauge Theories and Cosmology", Rep. Prog. Phys. 42 (1979), 389.
- [50] E. Gunzig e P. Nardonne, "Self-consistent Cosmology, the Inflationary Universe, and all that...", Fund. Cosm. Phys. 11 (1987), 311.
- [51] Y. Hosotani, "Scalar Field Theory in Curved Space", Phys. Rev. D32 (1985), 1949.
- [52] J.D. Bekenstein, "Non-singular general-relativistic cosmologies", Phys. Rev. D11 (1975), 2072.
- [53] V.N. Melnikov, "On Quantum Effects in Cosmology", Sov. Phys. Dokl. 24 (1979), 471; L. Parker e S.A. Fulling, "Quantized Matter Fields and the Avoidance of Singularities in General Relativity", Phys. Rev. D7 (1973), 2357; e Ellis, op.cit. (Ref. 29), conclusão.
- [54] A.A. Starobinsky, "A New Type of Isotropic Cosmological Model without Singularity", Phys. Lett. 91B (1980), 99; A. Vilenkin, "Classical and Quantum Cosmology of the Starobinsky Inflationary Model", Phys. Rev. D32 (1985), 2511.

- [55] A.H. Guth, "Inflationary Universe: A Possible Solution to Flatness, Horizon and Monopole Problems", *Phys. Rev.* D23 (1981), 347; A.D. Linde, "The Inflationary Universe", *Rep. Prog. Phys.* 47 (1984), 925.
- [56] R.H. Brandenberger, "Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universes", *Rev. Mod. Phys.* 57 (1985), 1-60.
- [57] T. Rothman e G.F.R. Ellis, "Metaflation", Preprint 85/18, Univ. Capetown (1985); G.F. Mazenko, W.G. Unruh e R.M. Wald, "Does a Phase Transition in the Early Universe Produce the Conditions Needed for Inflation?", *Phys. Rev.* D31 (1985), 273.
- [58] B.S. DeWitt, "Quantum Theories of Gravity", *GRG* 1 (1970), 181; "Quantum Gravity", in "Proceedings of the III School of Cosmology and Gravitation", J.A. Pacheco, Ed. (CBPF, RJ, 1982); "Quantum Gravity: the New Synthesis", in Hawking e Israel, Eds., op.cit. (Ref. 39).
- [59] J.B. Hartle, "Quantum Cosmology", Yale University Preprint TH-71 (1985); "Initial Conditions and Quantum Cosmology", in Demaret, Ed., op.cit. (Ref. 30), 1-18.
- [60] Ver por exemplo C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, "Gravitation" (Freeman, US, 1971), cap. 40 e referências.
- [61] G.F.R. Ellis, "Existence (or Avoidance) and Nature of the Classical Singularity", in Demaret, Ed. op.cit. (Ref. 30), 319.
- [62] E.W. Kolb, "Five Lectures on Particle Physics and Cosmology" in "Proceedings of the IV School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, J.M. Salim e L.M.C.S. Rodrigues, Eds. (CNPq, DF, 1986), 342.
- [63] K.S. Thorne, "Gravitational Wave Searches: Present Status and Future Plans", Cargèse Summer Courses, 1986, não publicado.

- [64] T. Singh e L.N. Rai, "Scalar-tensor Theories of Gravitation: Foundations and Prospects", GRG 15 (1983), 875; T. Singh e Tarkeshwar Singh, "General Class of Scalar-tensor Theories: A Review", Int. Jour. Mod. Phys. A2 (1987), 645.
- [65] J.V. Narlikar, "Cosmologies with Variable Gravitational Constant", Found. Phys. 13 (1983), 311.
- [66] V. Canuto, P.J. Adams, S.H. Hsieh e E. Tsiang, "Scale Covariant Theory of Gravitation", Phys. Rev. D16 (1977), 1643 e referências.
- [67] J.V. Narlikar e T. Padmanabhan, "Creation-field Cosmology: a Possible Solution to Singularity, Horizon and Flatness Problems", Phys. Rev. D32 (1985), 1928.
- [68] N. Rosen, "Bimetric General Relativity and Cosmology", GRG 12 (1980), 493; "The Bimetric Weyl-Dirac Theory and the Gravitational Constant", Found. Phys. 13 (1983), 363.
- [69] Ver Misner et al, op.cit. (Ref. 60), cap. 12.
- [70] Em muitos casos, as equações de campo assumem a forma

$$G_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} = f[\phi] T_{\mu\nu} [\text{mat}]$$

onde o tensor $K_{\mu\nu}$ e o fator f serão definidos em termos dos parâmetros auxiliares $\{\phi\}$ introduzidos por cada teoria; e es ses novos elementos devem satisfazer equações de movimento adicionais. Reescrevendo, obtemos $G_{\mu\nu} = kT'_{\mu\nu}$ e a equação de conservação $T'^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$, correspondente a adotarmos as equações de Einstein para uma nova forma de matéria. Ver Ellis, op.cit. (Ref. 29), e Cap. 4 adiante.

- [71] M. Gasperini, "Inflation and Broken Lorentz Symmetry in the Very Early Universe", Phys. Lett. B163 (1986), 84.
- [72] G. Magnano, M. Ferraris e M. Francaviglia, "Non-Linear Gravitational Lagrangians", GRG 19 (1987), 465.
- [73] M. Novello, "Stochastic Methods in Cosmology", in Novello et al, Eds., op.cit., (Ref. 59); M. Novello e L.A.R. Oliveira, "Stochastic Behaviour of De Sitter Universes", Phys. Lett. 109A (1985), 454.

- [74] Ver Cap. 2 e referências.
- [75] Ver Cap. 3 e referências.
- [76] Ver L. Landau e E. Lifchitz, "Teoria do Campo" (Hemus, SP, s.d.), 93.
- [77] D. Hilbert, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Goettingen 395 (1915).
- [78] Para a definição dos objetos geométricos e a caracterização matemática da geometria do espaço-tempo, ver cap. 3.
- [79] A. Einstein, "Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral", Ann. D. Phys. 49 (1916), e "O Princípio de Hamilton e a Teoria da Relatividade Geral", Sitz. Press. Akad. Wiss., 1916, reproduzidos na Ref. 7.
- [80] Ver Misner et. al., op.cit. (Ref. 60), cap. 16; I.M. Anderson, "The Principle of Minimal Gravitational Coupling", Arch. Rat. Mech. Anal. 75 (1981), 349 e referências aí citadas.
- [81] Novello, op.cit. (Ref. 26), seção 2.6.
- [82] Ellis, op.cit. (Ref. 24), seção 1.
- [83] M. Novello e J.M. Salim, "Non-Equilibrium Relativistic Cosmology", Fund. Cosm. Phys. 8 (1983), seção 5.2.
- [84] J.D. Jackson, "Classical Eletrodynamics" (Wiley, N.Y., 1975) cap. 1.
- [85] Novello, op.cit. (Ref. 26), seção 2.7.
- [86] Ver Adler et.al., op.cit. (Ref. 9), cap. 2.
- [87] Misner et.al., op.cit. (Ref. 60), cap. 38.
- [88] R.M. Dicke, citado em Misner et al (Ref. 60), cap. 38.
- [89] Ver M. Novello e L.A.R. Oliveira, "Non-Minimal Interaction of Gravity with other Physical Fields: an Overview", Rev. Bras. Fís. 17 (1987), 432 e referências aí contidas.
- [90] A.Zee, "Broken-Symmetric Theory of Gravity", Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 417; "Spontaneously Generated Gravity" Phys. Rev. D23 (1981), 858.

- [91] Ya. B. Zeldovich, "Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem in cosmology", *Sov. Phys. Usp.* 24 (1981), 216.
- [92] R. Brout, F. Englert e E. Gunzig, "The Creation of the Universe as a Quantum Phenomenon", *Ann. Phys.* 115 (1978), 78.
- [93] V.N. Melnikov, N.M. Nikolaenko e S.V. Orlov, "Spontaneously Broken Symmetries in Gravitational Fields", *GRG* 17 (1985), 63.
- [94] Ver J.L. Anderson, "Principles of Relativity Physics", (Acad. Press, N.Y., 1980).
- [95] Em M. Ferraris, M. Francaviglia e C. Reina, "Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925, *GRG* 14 (1982), 243, argumenta-se que o "método de Palatini" foi empregado pela primeira vez pelo próprio Einstein.
- [96] M. Novello e H. Heintzmann, "Weyl-Integrable Space-time: A Model of Cosmos?", *Phys. Lett.* 98A (1983), 10.
- [97] M. Novello, notas de aula.
- [98] Ver por exemplo P.H. Lim, "Modification of the Palatini variational principle in general relativity", *Phys. Rev. D* 27 (1985), 719. Uma opinião em contrário é encontrada em I.M. Anderson, op.cit. (Ref. 94). Ver também o cap. 4.
- [99] Ver por exemplo W. Meckleburg, "The Kaluza-Klein Idea: Status and Prospects", *Fort. d. Phys.* 32 (1984), 207. Ver também o cap. 5.
- [100] H. Weyl, "Space, Time and Matter" (Dover, N.Y., 1962), cap. 4.
- [101] Einstein, op.cit. (Ref. 4), cap. 1.
- [102] Adler et.al., op.cit. (Ref. 9), cap. 2.
- [103] C.G. Oliveira, "Introdução à formulação de algumas teorias do campo unitário", in "Proceedings of the II School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, Ed.; CBPF, RJ, (1980) vol. 1, 361-477, seção 1.

- [104] H. Weyl, "Gravitação e Eletricidade", Sitz. Preuss. Akad. d. Wiss. (1918), reproduzido na Ref. 7.
- [105] A.S. Eddington, "The Mathematical Theory of Relativity" (Cambridge, UK, 1923), cap. 7.
- [106] L.P. Eisenhart, "Riemannian Geometry" (Princeton, US, 1949).
- [107] T. Fulton, F. Rohrlich e L. Witten, "Conformal Invariance in Physics", Rev. Mod. Phys. 34 (1962), 442; C.G. Oliveira, op.cit. (Ref. 103), seção 4.
- [108] C.G. Oliveira, op.cit. (Ref. 103), seção 5.
- [109] Adler et.al., op.cit. (Ref. 9), cap. 13.
- [110] H. Weyl, "The theory of Groups and Quantum Mechanics". (Dover, N.Y., 1950).
- [111] R. Utiyama, "On Weyl's Gauge Field", I: Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 2080; II: Prog. Theor. Phys. 53 (1975), 565.
- [112] W. Marciano e H. Pagels, "Quantum Chromodynamics", Phys. Rep. 3 (1978) 173.
- [113] N. Nishioka, "Weyl's Gauge Field and its Equation with Meron Solution", Nuovo Cim. A78 (1983), 427; "Researches on Solutions of Equations of the Gradient Weyl's Gauge Field", Nuovo Cim. A80 (1984), 241.
- [114] N. Rosen, "Weyl's Geometry and Physics", Found. Phys. 12 (1982), 213.
- [115] J. Pullin and O. Bressan, "New Weyl Theory: Geometrization of Electromagnetism and Gravitation: Motivations and Classical Results", GRG 19 (1987), 601.
- [116] F. London, Z. Physik 42 (1927), 375; Adler et.al., op.cit. (Ref. 9), cap. 13.
- [117] Ver por exemplo Messiah, op.cit. (Ref. 3), cap. II.
- [118] J. Godfrey, "Quantum Mechanics in the Formalism of London and Weyl", Phys. Rev. 6H, 52 (1984), 1365.

- [119] E. Santamato, "Geometric derivation of the Schrödinger equation from classical mechanics in curved Weyl space", Phys. Rev. D29 (1984), 216.
- [120] J. Audretsch, "Riemannian structure of space-time as a consequence of quantum mechanics". Phys. Rev. D27 (1983) 2872.
- [121] A. Pais, "Subtle is the Lord: the Science and Life of Albert Einstein" (Oxford, N.Y., 1982).
- [122] A.S. Eddington, "Preliminary Note on the Masses of the Electron, The Proton, and the Universe", Proc. Camb. Phil. Soc. 27 (1931), 15.
- [123] J.D. Barrow e F.J. Tipler, "The Anthropic Principle", (Oxford, U.K., 1982 e referências aí contidas).
- [124] P.A.M. Dirac, "Cosmological Models and the Large Number Hypothesis", Proc. Roy. Soc. London A338 (1974), 433; V. Canuto, "Dirac Cosmology", Preprint (Institute for Space Studies, NASA, 1979).
- [125] M. Fierz, Helv. Phys. Acta XII (1938), 297; M. Novello e N.P. Neto, "Einstein's Theory of Gravitation in Fierz Variables", a ser publicado.
- [126] P. Jordan, Z. Phys. 157 (1959), 112.
- [127] C. Brans e R.H. Dicke, "Mach's Principle and a relativistic theory of gravitation", Phys. Rev. 124 (1961), 925.
- [128] F. Hoyle e J.V. Narlikar, "Action at a distance in Physics and Cosmology" (Freeman, US, 1974); Narlikar, op.cit. (Ref. 35).
- [129] R. Gautreau, "Dirac's Large Numbers Hypothesis in Einstein's Theory of Gravitation". Int. J. Theor. Phys. 24 (1985), 877; A. Alfonso - Faus, "Cosmology with Time-Varying G", Int. J. Theor. Phys. 25 (1986), 293.
- [130] P.A.M. Dirac, "Long range forces and broken symmetries", Proc. Roy. Soc. London A333 (1973), 403.

- [131] N. Rosen, "The Bimetric Weyl-Dirac Theory and the Gravitational Constant", *Found. Phys.* 13 (1983), 363.
- [132] V. Canuto, "Present Status of Dirac's Cosmology", Seminário DRP/CBPF (1985), não publicado.
- [133] Vide respectivamente Refs. 111, 130 e 114 acima.
- [134] L.A.R. Oliveira, "Weyl-Integrable spacetimes as a model for our Cosmos", in "Relativity, Supersymmetry and Cosmology", O. Bressan, M. Castagnino e V. Hamity, Eds., Proceedings of the V SILARG (World Scientific, Singapore, 1986).
- [135] Novello, op.cit. (Ref. 19), cap. 9.
- [136] Professor Erast Gliner, conversa o privada.
- [137] M.A. Markov, "Elementary Particles of Maximally Large Masses (Quarks and Maximons)", *JEPT* 24 (1967), 584.
- [138] Ver por exemplo S.H. Hawking, I.G. Moss e J.M. Stewart, "Bubble colisions in the very early universe", *Phys. Rev.* D26 (1982), 2681; A. Vilenkin, "Creation of Universes from Nothing", *Phys. Lett.* 117B (1982), 75.
- [139] A.S. Eddington, "Space, Time and Gravitation" (Cambridge, U.K., 1920), cap. 2.
- [140] J. Plebanski, "Electromagnetic Waves in Gravitational Fields", *Phys. Rev.* 118 (1960), 1396.
- [141] J.A. Wheeler, "Geometrodynamics" (Wiley, N.Y., 1968).
- [142] M. Born e L. Infeld, "Foundations of the New Field Theory", *Proc. Roy. Soc. London* A144 (1934), 425; M. Born, "Modified Field Equations with a Finite Radius of the Electron", *Nature* 132 (1933), 282.
- [143] A. Akhiezer e E. Berestetsky, "Quantum Eletrodynamics", (Interscience, N.Y., 1965).
- [144] J.C. Peckev, A.P. Roberts and J.P. Vigier, "Non-Velocity Redshifts and Photon-Photon Interactions", *Nature*, 237, (1972), 227. Alfred S. Golhaber e M.M. Nieto, "Terrestrial and Extraterrestrial Limits on the Photon Mass", *Rev. Mod. Phys.* 43 (1971), 277.

- [145] M. Novello e J.M. Salim, "Non-Linear Photons in the Universe", Phys. Rev. D20 (1979), 377.
- [146] Novello e Salim, op.cit. (Ref. 83), seção 5.7.
- [147] R.A. Lyttleton e H. Bondi, "On the Physical Consequences of a General Excess of Charge", Proc. Roy. Soc. London A252 (1959), 313.
- [148] F. Hoyle, "On the possible consequences of a variability of the elementary charge", Proc. Roy. Soc. London A757 (1959), 431.
- [149] G. De Rham, "Variétés Differentiables", (Herman, Paris, 1955).
- [150] M. Novello e H. Heintzmann, "An Eternal Universe", GRG 16 (1984), 535.
- [151] Novello e Oliveira, op.cit. (Ref. 89), seção 5.
- [152] V.N. Melnikov e S.V. Orlov, "Non-Singular Cosmology as a Quantum Vacuum Effect", Phys. Lett. 70A (1979), 263.
- [153] Ya. B. Zeldovich, "Hidrodynamics of the Universe", Ann. Rev. Fluid, Mech. 5 (1977), 215.
- [154] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon e A.G. Maier, "Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems", (Wiley, N.Y., 1973).
- [155] M. Novello e C. Romero, "Non-minimal Coupling with Gravitation: the Spectrum of Cosmic Solutions", GRG 19 (1987), 1003.
- [156] M. Novello e L.A.R. Oliveira, "A Marionette Universe". Int. Jour. Mod. Phys. A1 (1986), 943.
- [157] N.A. Chernikov e E.A. Tagirov, "Quantum theory of scalar field in De Sitter Spacetime", Ann. Inst. Henri Poincaré, 9 (1968), 109.
- [158] P.A.M. Dirac, "A New Classical Theory of the Electron", Proc. Roy. Soc. London A209 (1951), 291; "Is there an Aether?", Nature, 168 (1951), 906.

- [159] Y. Nambu, "Quantum Electrodynamics in Nonlinear Gauge", Supp. Prog. Theor. Phys. Extra (1968), 190.
- [160] P.M. Morse e H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics" (McGraw-Hill, N.Y., 1953), cap. 5.
- [161] Novello e Salim, op.cit. (Ref. 83), seção 1.
- [162] Agradeço a Renato Pires e André Veloso a ajuda nestes cálculos.
- [163] Misner et.al., op.cit. (Ref. 60), cap. 3.
- [164] B. Bertotti, "Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity", Phys. Rev. 116 (1959), 1331.
- [165] Novello, op.cit. (Ref. 26), seção 3.1.
- [166] Novello, op.cit. (Ref. 19), Cap. 8.
- [167] M. Novello, "Cosmic Repulsion", Phys. Letts. 90A (1982), 347; Novello e Salim, op.cit. (Ref. 83), cap. 6.
- [168] Novello e Oliveira, op.cit. (Ref. 89), seção 3.
- [169] Ver seção 5.4 a seguir.
- [170] P.P. Srivastava, "Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction" (Adam Milger, U.K., 1986).
- [171] P. Fayet e S. Ferrara, "Supersymmetry", Phys. Rep. 32C (1977), 249, e referências aí contidas.
- [172] C.G. Callan Jr., S. Coleman e R. Jackiw, "A New Improved Energy-Momentum Tensor", Ann. Phys. 59 (1970), 42.
- [173] M. Novello, "Uncommunicated Vacua Generated by Spontaneous Breaking of Symmetry in a Curved Spacetime", não publicado; B.S. Sathyaprakash, E.A. Lord e K.P. Sinha, "Phase Transitions and Gravity", Phys. Letts. 1054 (1984), 407.
- [174] Novello e Oliveira, op.cit. (Ref. 89), seção 4.
- [175] Novello, op.cit. (Ref. 26), seção 4.
- [176] E.M. Lifshitz e I.M. Khalatnikov, "Problems of relativistic cosmologies", Sov. Phys. Uspekhi 6, (1964), 495; "Investigations in relativistic cosmologies". Adv. in Phys. 12, (1963),

- 185; V.A. Belinski, E.M. Lifshitz e I. M. Khalatnikov, "Oscillatory approach to the singular point in relativistic cosmology", *Sov. Phys. Uspekhi* 13, (1971); "Oscillatory approach to a singular point in relativistic cosmology", *Adv. in Phys.* 19 (1970), 525.
- [177] V.A. Belinski, E.M. Lifshitz e I.M. Khalatnikov, "Construction of a General Cosmological Solution of the Einstein Equation with a Time Singularity", *Sov. Phys. JETP* 35 (1972), 838.
- [178] V.A. Belinski e I.M. Khalatnikov, "Effect of Scalar and Vector Fields on the Nature of the Cosmological Singularity", *Sov. Phys. JETP* 36 (1973), 591.
- [179] T. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* (1921), 966.
- [180] Gradshteyn-Ryzkin, "Tables of Integrals, Series and Products" (Academic Press, N.Y., 1982).
- [181] J. Leite Lopes, "Gauge Field Theories: an Introduction" (Pergamon, U.K., 1981).
- [182] Novello e Oliveira, op.cit. (Ref. 89), seção 1.
- [183] M. Green e D. Gross, Eds., "Unified String Theories" (World Scientific, Singapore, 1986); J.H. Schwarz, "Superstrings" (World Scientific, Singapore, 1985).
- [184] E. Gunzig, "Self-consistent cosmology: an inflationary alternative to the Minkowskian quantum vacuum", in "Proceedings of the IV School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, Ed. (CNPq, DF, 1986).
- [185] Novello e Salim, op.cit. (Ref. 83), seção 5.5.
- [186] R.M. Dicke, "Dirac's Cosmology and Mach's Principle", *Nature* 192 (1961), 440.
- [187] M. Novello e L.A.R. Oliveira, "Gravitation, Strong Interaction and the Eddington Number", in Demaret, Ed. op.cit. (Ref. 30), 165.

- [188] P. Roman, "Elementary Particle Theory" (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [189] Novello e Oliveira, op.cit. (Ref. 89), seção 6.
- [190] Particle Data Group, "Review of particle properties", Rev. Mod. Phys. 56 (1984), Part II.
- [191] S.D. Jorda, "Os diversos modos de acoplamento não-mínimo entre Eletromagnetismo e Gravitação: suas propriedades gerais e suas conseqüências para a propagação da radiação eletromagnética", Tese de Mestrado, CBPF (1988); neste trabalho, demonstra-se que o problema de Cauchy (ou seja, o problema da propagação bem-definida de uma superfície de dados iniciais), no caso do acoplamento conforme de que se trata aqui, é bem posto.
- [192] R. Chanda, "Clocks in Weyl Space-time", GRG 16 (1984), 1023; V. Perlick, "Characterization of Standard Clocks by means of Light Rays and Freely Falling Particles", GRG 19 (1987), 1059.
- [193] J. Audretsch, "The Role of Quantum Mechanics in the Specification of the Structure of Space-time", in Novello, Ed., op.cit. (ref. 24), 419, e referências aí citadas.
- [194] I.T. Drummond e S.J. Hathrell, "QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons", Phys. Rev. D22 (1980), 343; sobre as limitações conceituais desta formulação, ver M. Novello e S. D. Jorda, "Does there exist a cosmological horizon problem?", CBPF preprint NF-014/88.
- [195] L.A.R. Oliveira, em preparo.
- [196] E. Nelson, "Dynamical Theory of the Brownian Motion" (Princeton, N.J., 1967); F. Guerra, "Structural Aspects of Stochastic Mechanics and Stochastic Field Theory", Phys. Rep. 77 (1981), 263.

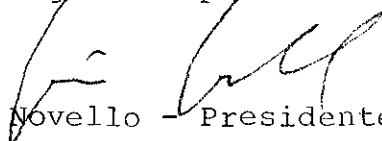
ERRATA

<u>Pg.</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
vii	21	WIST como...	WISTs como...
111	eq. (4.3.21.)	... $g_{\mu\nu}=0$... $g_{\mu\nu}$
149	8	$u_0 \pm (\dots)$	$u_0 = \pm (\dots)$
161	25	estabelecieas	estabelecidas
171	eq. (5.3.7)	...+ $(\phi)^2$...+ $(\phi^2)^2$
172	eq. (5.3.9)	... $[-\frac{1}{k} \square \phi^2 + \dots$... $[-\frac{k}{12} \phi^2 + \dots$
206	5	eq. (18a)	eq. (19a)
206	9	eq. (18b)	eq. (19b)
208	7	eqs. (18, 22b)	eqs. (19, 22b)
218	2	$\lambda_{(+)} = \frac{k}{6}(M^2 + m^2)$	$\lambda_{(+)} = \frac{k}{6}(M+m)^2$
227	29	preminência	preeminência
230	3	do a que a...	do que a...

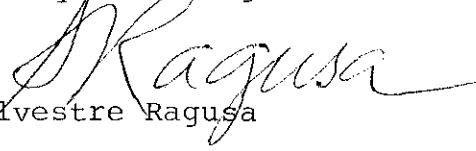
"ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO COM A GRAVITAÇÃO E
ESPAÇOS DE WEYL INTEGRÁVEIS"

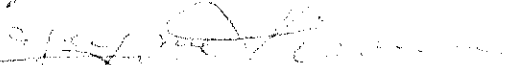
LUIZ ALBERTO REZENDE DE OLIVEIRA

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Mário Novello - Presidente

Henrique Fleming


Silvestre Ragusa


Jayme Tiomno


Takeshi Kodama


José Martins Salim - Suplente

Rio de Janeiro, 07 de julho de 1988