

STEFAN DIETER JORDA

OS DIVERSOS MODOS DE ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE
ELETROMAGNETISMO E GRAVITAÇÃO : SUAS PROPRIEDADES GERAIS
E SUAS CONSEQUÊNCIAS PARA A PROPAGAÇÃO DA RADIAÇÃO
ELETROMAGNÉTICA

Tese de
Mestrado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 1988 (25 abr)

Und dies ist nun eine Lehre, über welche du lachen wirst : die Liebe, o Govinda, scheint mir vor allem die Hauptsache zu sein. Die Welt zu durchschauen, sie zu erklären, sie zu verachten, mag grosser Denker Sache sein. Mir aber liegt einzig daran, die Welt lieben zu können, sie nicht zu verachten, sie und mich nicht zu hassen, sie und mich und alle Wesen mit Liebe und Bewunderung und Ehrfurcht betrachten zu können.

Siddhartha

Hermann Hesse

E com isto te comunico uma doutrina que te fará rir, ó Govinda: tenho para mim que o amor é o que há de mais importante no mundo. Analisar o mundo, explicá-lo, menosprezá-lo, talvez caiba aos grandes pensadores. Mas a mim me interessa exclusivamente que eu seja capaz de amar o mundo, de não sentir desprezo por ele, de não odiar nem a ele nem a mim mesmo, de contemplar a ele, a mim, a todas as criaturas com amor, admiração e reverência.

Agradeço

a Mário, pela sugestão e orientação desta tese.

a E.Hilf e a T.Kodama. Sem o apoio e o incentivo deles eu jamais teria vindo para cá.

a todos alunos e pesquisadores com que eu convivi nestes dois anos.

a Myriam e ao Aroldo, pela paciência, boa vontade e pela seriedade com que se dedicam aos alunos de pós-graduação.

a todos que me ajudaram na batalha contra acentos e outras peculiaridades da língua portuguesa.

ao CNPq, pela bolsa recebida.

last, but not least, a meus pais.

CONVENÇÕES:

Adotamos unidades naturais com $c = 1$ e $\hbar = 1$

Índices gregos assumem os valores 0 a 3, índices latins 1 a 3

∂_μ , derivada parcial

∇_μ ; derivada covariante

Assinatura da métrica : (+, -, -, -)

$$R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} = \Gamma^\lambda_{\sigma\nu,\rho} - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho,\nu} + \Gamma^\eta_{\sigma\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\eta} - \Gamma^\eta_{\sigma\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}$$

$$R^\lambda{}_\nu = g^{\sigma\rho} R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho}$$

$$C_{(\mu\nu)} = C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu} \quad \nabla C_{\mu\nu}$$

$$C_{[\mu\nu]} = C_{\mu\nu} - C_{\nu\mu} \quad \nabla C_{\mu\nu}$$

$$\square C^{\dots}{}_{\dots} = C^{\dots}{}_{\dots ;\mu} \quad \nabla C^{\dots}{}_{\dots}$$

$$F_{\mu\nu} = A_{[\mu,\nu]}$$

$W_{\mu\nu\sigma\rho}$ é o tensor de Weyl

Resumo:

Este trabalho é dedicado ao estudo das teorias de interação não-mínima entre o eletromagnetismo e a gravitação. Formamos todas as Lagrangeanas independentes lineares na curvatura e quadráticas no campo eletromagnético, obtemos seus tensores momento-energia e seus vetores de Euler-Lagrange e estudamos suas propriedades gerais. Fazemos uma revisão do problema de Cauchy para as equações de Einstein e investigamos se este problema é bem posto para as teorias de interação não-mínima. Procuramos consequências destas teorias para a propagação da radiação eletromagnética e apresentamos uma solução para o problema do horizonte, um dos problemas fundamentais do modelo cosmológico padrão.

Abstract:

This thesis is dedicated to theories of nonminimal interaction between the electromagnetic and the gravitational field. We construct all possible independent Lagrangians which are linear functions of the curvature and quadratic ones of the electromagnetic field, obtain their energy-momentum tensors and Euler-Lagrange vectors and study their general properties. After a review of the Cauchy problem for the Einstein equations we investigate its formulation in the case of our nonminimal theories. Furthermore, we look for consequences of the nonminimal coupling on the propagation of electromagnetic radiation and show how nonminimal interaction may avoid the horizon problem, one of the fundamental problems in standard cosmology.

SUMÁRIO

Agradecimentos	1
Convenções	ii
Resumo - Abstract	iii
Sumário	iv
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	As teorias de interação não-mínima
	e suas propriedades gerais
	5
CAPÍTULO 2	O Problema de Cauchy
	21
CAPÍTULO 3	A Propagação da radiação
	eletromagnética
	36
CONCLUSÃO	56
APÊNDICE A	Os tensores momento-energia e os
	vetores de Euler-Lagrange
	59
APÊNDICE B	Os tensores de Ricci e de Einstein
	em coordenadas gaussianas
	65
APÊNDICE C	Dois lemas usados no problema de Cauchy
	70
APÊNDICE D	A conservação do tensor momento-energia
	73
REFERÊNCIAS	75

INTRODUÇÃO

Ao consultar um livro texto da teoria geral da relatividade [1,2,3] à procura de um método que permita passar a partir das leis físicas usuais, obtidas e experimentalmente verificadas no espaço-tempo de Minkowski, para aquelas que descrevem o mesmo sistema interagindo com o campo gravitacional, encontramos geralmente a seguinte receita: "Substitua a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e todas as derivadas parciais por derivadas covariantes." Desta maneira obtemos leis físicas covariantes que localmente se reduzem àquelas de que partimos. Este procedimento, que determina de maneira unívoca o efeito da gravitação sobre um sistema físico, é chamado de princípio de acoplamento mínimo. Entretanto, a mera suposição da existência deste método esconde o fato de que no fundo temos que procurar leis físicas novas, cuja forma não pode ser determinada a priori e às quais somente experiência e observação podem conduzir. O fato de não existir evidência experimental que esteja em desacordo com o princípio de acoplamento mínimo, certamente

contribuiu para a sua ampla aceitação entre os físicos.

Entretanto, este princípio foi abandonado para alguns poucos sistemas físicos, cujo exemplo mais conhecido é o do campo escalar^[4], onde a introdução do acoplamento não-mínimo permite obter uma equação dinâmica para este campo, que possui invariância conforme, o que não ocorre no acoplamento mínimo. Entendemos neste trabalho por acoplamento não-mínimo aquele que além da métrica e dos símbolos de Christoffel faz aparecer explicitamente a curvatura na equação de movimento do sistema acoplado. Tendo em vista que nunca conseguiu-se observar um campo escalar macroscópico, este exemplo entretanto não permite confrontar o acoplamento mínimo e não-mínimo através da observação.

O único campo macroscópico que é acessível experimentalmente é o campo eletromagnético, e é através de sua observação que obtemos cada vez maiores conhecimentos sobre o universo. O fato de termos um campo observável, cuja interação com o campo gravitacional é fundamental para todas observações cosmológicas, faz com que este campo seja o candidato natural para estudar sua interação não-mínima com a gravitação.

Em 1971 Prasanna^[5,6] sugeriu, aparentemente pela primeira vez, uma teoria não-mínima de eletromagnetismo e gravitação, sem entretanto se preocupar em procurar efeitos observacionais novos. (Isto só foi feito muito mais tarde por Lesche, Bedran e Souza^[7,8]). Novello e Salim^[9] iniciaram em 1979 uma série de trabalhos onde eles estudaram teorias que acoplam o campo vetorial A_μ à gravitação e desde então, junto com outros

colaboradores, conseguiram exibir várias soluções cosmológicas das equações resultantes, soluções estas isotrópicas ou anisotrópicas, porém eternas, isto é sem singularidade inicial. [10-15] Assim o acoplamento não-mínimo surgiu como possível mecanismo para gerar modelos cosmológicos alternativos ao modelo padrão; um mecanismo que tem a vantagem de não introduzir novos campos ou objetos geométricos.

Neste trabalho nos propomos a estudar teorias que acoplam tanto o potencial vetor A_μ como o campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ de maneira não-mínima à gravitação.

No primeiro capítulo mostraremos que existem somente sete Lagrangeanas independentes, lineares na curvatura e quadráticas no potencial vetor ou no campo eletromagnético, e que outras Lagrangeanas possíveis são combinações lineares destas sete. Obteremos os tensores momento-energia e os vetores de Euler-Lagrange correspondentes, e estudaremos seus limites quando a métrica tende à métrica de Minkowski. Ainda neste capítulo faremos alguns breves comentários sobre a formulação Hamiltoniana do campo eletromagnético nestas teorias.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo do problema de Cauchy, que representa a questão do determinismo clássico. Construiremos o sistema de coordenadas gaussianas e mostraremos que o problema de Cauchy é bem posto para as equações de Einstein no vácuo, para as equações de Einstein-Maxwell (isto é as equações que decorrem do acoplamento mínimo), para as equações que descrevem o campo escalar conforme e para a teoria originalmente estudada por Novello e Salim^[9]. Entretanto, para

a maioria das teorias não-mínimas encontraremos que o problema de Cauchy não é bem posto.

No terceiro e último capítulo procuraremos modificações das leis que descrevem a propagação da radiação eletromagnética devidas ao acoplamento não-mínimo. Mostraremos em primeiro lugar, através da aproximação da ótica geométrica e do método das características, como as equações de Maxwell usuais prevêem a propagação da radiação eletromagnética ao longo de geodésicas nulas. Posteriormente mostraremos como isto deixa de ser válido no caso das equações de Maxwell modificadas pelo acoplamento não-mínimo e como a nova lei de propagação da radiação pode evitar o problema do horizonte, um dos problemas fundamentais inerentes ao modelo cosmológico padrão.

No apêndice A faremos os cálculos que fornecem os tensores ~~de~~ momento-energia e os vetores de Euler-Lagrange.

No apêndice B explicitaremos a dependência dos tensores de Ricci e de Einstein da métrica e de suas primeiras e segundas derivadas num sistema gaussiano de coordenadas.

No apêndice C provaremos dois lemas, que usaremos no estudo do problema de Cauchy.

Finalmente no apêndice D mostraremos que a conservação do tensor momento-energia é uma consequência de sua própria definição.

CAPÍTULO I

→ AS TEORIAS DE INTERAÇÃO NÃO-MÍNIMA E SUAS PROPRIEDADES GERAIS ←

Uma vez abandonado o princípio de acoplamento mínimo, que de maneira unívoca determina a interação entre gravitação e eletromagnetismo, existem muitas possibilidades de fazê-los interagir de maneira não-mínima. Neste capítulo vamos formar sistematicamente as Lagrangeanas destas teorias não-mínimas e em seguida estudar suas propriedades gerais. Nos restringimos aqui a Lagrangeanas lineares na curvatura e quadráticas no campo vetorial A_μ ou no tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Mostraremos a seguir que, tendo a disposição os tensores de Riemann, de Weyl, de Ricci e o escalar de curvatura e respeitando suas simetrias, existem sete invariantes diferentes.

Destes, dois são formados com o potencial vetor, e portanto descrevem teorias que não possuem invariância de gauge. Estes são :

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 R A_\mu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

onde $\lambda_{1,2}$ é uma constante de acoplamento adimensional. De fato

$[R] = L^{-2}$ pois R envolve derivadas segundas da métrica. Usando a constante de estrutura fina, definida por $\alpha = e^2/\hbar c$, e que é adimensional, e lembrando ainda a nossa convenção $\hbar = 1$ e $c = 1$, concluímos que a carga também não tem dimensão. Portanto $[A_0] = [e/r] = L^{-1}$ e $[\mathcal{L}_{1,2}] = L^{-4}$; dimensão certa para uma densidade Lagrangeana.

As teorias descritas por $\mathcal{L}_{1,2}$ já foram exaustivamente estudadas [9-15] e uma de suas propriedades mais interessantes é que elas permitem soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas não-singulares.

Existem cinco possibilidades independentes que possuem invariância de gauge, a saber

$$\mathcal{L}_3 = \lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_4 = \lambda_4 R F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_5 = \lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}$$

$$\mathcal{L}_6 = \lambda_6 R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_7 = \lambda_7 R_{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$$

Nestas Lagrangeanas λ adquire uma dimensão. $F_{\mu\nu}$ é obtido através de A_μ por uma derivação e portanto temos $[R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = L^{-6}$, exigindo a introdução de uma constante de acoplamento com dimensão L^2 . Uma escolha natural desta constante é o quadrado do comprimento de Planck ($l_{pl} = (G\hbar/c^3)^{1/2} = \sqrt{G}$ em unidades naturais), sendo que este é o único comprimento que podemos formar com constantes fundamentais da gravitação e do eletromagnetismo. Não nos parece oportuno introduzir aqui a massa de uma partícula elementar, procedimento este que

forneceria o comprimento de de Broglie desta partícula como outra constante com dimensão de comprimento. ~~.....~~

Uma eletrodinâmica não-linear, gerada por \mathcal{L}_3 , foi estudada por Accioly e Pereira da Silva [16]. (Note entretanto que no artigo citado as equações dinâmicas foram incorretamente apresentadas). O acoplamento \mathcal{L}_6 foi proposto por Prasanna [5,6] e em dois trabalhos Souza, Bedran e Lesche [8,9] investigaram as consequências observacionais deste acoplamento para o campo magnético dipolar e a deflexão da luz numa geometria de Schwarzschild. \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_5 e \mathcal{L}_6 , segundo o trabalho de Drummond e Hathrell [17], surgem como parte de uma Lagrangeana efetiva que incorpora o efeito quântico da polarização do vácuo. Goenner [18], à procura de um princípio de acoplamento não-mínimo que fosse independente das propriedades específicas do campo acoplado, descartou todas as Lagrangeanas exceto \mathcal{L}_3 .

\mathcal{L}_4 e \mathcal{L}_7 envolvem a operação dual, definida por

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho}. \quad (I.1)$$

Uma vez que o tensor de Levi-Civita $\eta_{\mu\nu\sigma\rho}$ se transforma como pseudo-tensor sob transformações de paridade (isto é, ele troca de sinal), \mathcal{L}_4 e \mathcal{L}_7 descrevem teorias que não conservam a paridade. Não vemos necessidade de excluí-las a priori, uma vez que não temos nenhuma observação que confirme a conservação da paridade do campo eletromagnético quando este interage com um campo gravitacional.

No caso das Lagrangeanas \mathcal{L}_3 a \mathcal{L}_7 não podemos esperar encontrar soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas, uma vez que um campo eletromagnético não nulo automaticamente define uma direção espacial privilegiada. Isto não é o caso nas

Lagrangianas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , onde, com a escolha $A_\mu(x) = (A_0(t), \vec{0})$, temos o potencial vetor diferente de zero, mas o campo eletromagnético se anula. ←

Veremos agora que outros possíveis invariantes são combinações lineares destes cinco. Podemos formar ainda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_8 &= \lambda_8 R_{\mu\nu} \overset{*}{F}^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu \\ \mathcal{L}_9 &= \lambda_9 W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{10} &= \lambda_{10} W_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{*}{F}^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{11} &= \lambda_{11} R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{*}{F}^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

\mathcal{L}_8 é proporcional a \mathcal{L}_4 . De fato, temos

$$\begin{aligned}\overset{*}{F}^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha\rho\sigma} F_{\sigma\rho} F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha\rho\sigma} \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu\tau\lambda} \overset{*}{F}^{\tau\lambda} F_{\sigma\rho} \\ &= -\frac{1}{4} \delta^{\mu\sigma\rho\tau} \overset{*}{F}^{\tau\lambda} F_{\sigma\rho} = -\frac{1}{4} \overset{*}{F}^{\tau\lambda} F_{\sigma\rho} \left\{ \delta^\mu{}_\nu \delta^\sigma{}_\tau \delta^\rho{}_\lambda - \delta^\mu{}_\nu \delta^\rho{}_\tau \delta^\sigma{}_\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \delta^\mu{}_\tau \delta^\sigma{}_\nu \delta^\rho{}_\lambda + \delta^\mu{}_\tau \delta^\sigma{}_\lambda \delta^\rho{}_\nu + \delta^\mu{}_\lambda \delta^\sigma{}_\nu \delta^\rho{}_\tau - \delta^\mu{}_\lambda \delta^\sigma{}_\tau \delta^\rho{}_\nu \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \delta^\mu{}_\nu \overset{*}{F}^{\sigma\rho} F_{\sigma\rho} - \delta^\mu{}_\nu \overset{*}{F}^{\sigma\rho} F_{\rho\sigma} - \overset{*}{F}^{\mu\sigma} F_{\nu\sigma} + \overset{*}{F}^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + \right. \\ &\quad \left. + \overset{*}{F}^{\sigma\mu} F_{\nu\sigma} - \overset{*}{F}^{\sigma\mu} F_{\sigma\nu} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ 2 \delta^\mu{}_\nu F\overset{*}{F} + 4 \overset{*}{F}^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} \right\} \\ &\Rightarrow \overset{*}{F}^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} = -\frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F\overset{*}{F}\end{aligned}$$

Cabreviamos daqui para frente $F^2 = F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}$ e $F\overset{*}{F} = F_{\sigma\rho} \overset{*}{F}^{\sigma\rho}$

e portanto

$$R_{\mu\nu} \overset{*}{F}^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu = -\frac{1}{4} R F\overset{*}{F} \quad (I.2)$$

Para \mathcal{L}_9 e \mathcal{L}_{10} podemos usar a decomposição do tensor de Riemann [4]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + H_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{\sigma} R g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (I.3)$$

onde

$$H_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \right\} \quad (I.4)$$

$$e \quad g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} . \quad (I.5)$$

Segue então que

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left\{ R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - \right. \\ & \left. R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \right\} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sigma} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ &= R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left\{ R_{\alpha\mu} F^{\alpha\sigma} F^{\mu}_{\sigma} + R_{\beta\nu} F^{\sigma\beta} F^{\nu}_{\sigma} - R_{\alpha\nu} F^{\alpha\sigma} F^{\nu}_{\sigma} \right. \\ & \quad \left. - R_{\beta\mu} F^{\sigma\beta} F^{\mu}_{\sigma} \right\} + \frac{1}{\sigma} R (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta} F_{\beta\alpha}) \\ \rightarrow W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + 2 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{3} R F^2 . \quad (I.6) \end{aligned}$$

Da mesma maneira obtemos

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu}^* F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}^* F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + 2 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{3} R F F^* \\ \rightarrow W_{\alpha\beta\mu\nu}^* F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}^* F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{\sigma} R F F^* . \quad (I.7) \end{aligned}$$

Para \mathcal{L}_{11} usamos [4]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - 2 W_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{\sigma} R g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (I.8)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - 2 W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \\ & \quad - \frac{1}{\sigma} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ \rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= - R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - 4 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} - R F^2 . \quad (I.9) \end{aligned}$$

Das cinco Lagrangeanas independentes existe uma combinação que possui uma propriedade interessante: ela é invariante por

rotações duais locais. Lembramos que as equações de Maxwell (EMA) são invariantes por rotações duais globais. Estas são definidas por [19]:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cos\theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \sin\theta \quad (I.10)$$

onde θ é um ângulo constante. Fazendo esta transformação, a Lagrangeana de Maxwell se transforma em

$$-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} \cos\theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \sin\theta)(F^{\mu\nu} \cos\theta + \tilde{F}^{\mu\nu} \sin\theta)$$

$$= -\frac{1}{4} \left\{ (\cos^2\theta - \sin^2\theta) F^2 + 2 \cos\theta \sin\theta F \tilde{F} \right\}$$

(aqui usamos $F \tilde{F} = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} F_{\alpha\beta} = -F^2$)

Sendo θ constante, podemos transformar o segundo termo numa divergência

$$2 \cos\theta \sin\theta F \tilde{F} = 4 \cos\theta \sin\theta (\eta^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_{\rho} A_{\sigma}) (\partial_{\nu} A_{\mu}) =$$

$$= 4 \sin\theta \cos\theta \left\{ \partial_{\rho} \eta^{\mu\nu\sigma\rho} A_{\sigma} \partial_{\nu} A_{\mu} - \eta^{\mu\nu\sigma\rho} A_{\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\nu} A_{\mu} \right\}$$

$$= 4 \partial_{\sigma} \left\{ \sin\theta \cos\theta \eta^{\mu\nu\sigma\rho} A_{\sigma} \partial_{\nu} A_{\mu} \right\}$$

que não contribui à ação. Portanto F'^2 é proporcional a F^2 e as EMA são invariantes por estas transformações.

O significado físico desta invariância é o seguinte: Vamos supor que existem carga e corrente magnética e modificamos as EMA introduzindo-as como fonte de $\tilde{F}_{\mu\nu}$, escrevendo

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = j^{\mu}_e \quad (I.11)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = j^{\mu}_m \quad (I.12)$$

(o e se refere a quantidades elétricas, o m a magnéticas)

Fazendo a transformação dual (I.10) e transformando as correntes conforme

$$j'_{\bullet}{}^{\mu} = j_{\bullet}{}^{\mu} \cos\theta + j_m{}^{\mu} \sin\theta \quad (I.13)$$

$$j'_{\bullet}{}^{\mu} = j_m{}^{\mu} \cos\theta - j_{\bullet}{}^{\mu} \sin\theta \quad (I.14)$$

vemos que as EMA modificadas pela corrente magnética são invariantes. A questão importante é saber se a razão entre carga elétrica e magnética é igual para todas as partículas. Caso isto ocorra, torna-se mera convenção atribuir a uma partícula uma carga elétrica mas nenhuma carga magnética, pois podemos fazer uma RD escolhendo θ tal que $j'_{\bullet}{}^{\mu} = 0$ e reencontramos as EMA bem conhecidas.

Vamos estudar agora a transformação das Lagrangeanas não-mínimas sob as rotações duais. Temos :

$$RF'^2 = R \left\{ (\cos^2\theta - \sin^2\theta) F^2 + 2 \cos\theta \sin\theta FF^* \right\} =$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) RF^2 + 2 \cos\theta \sin\theta RFF^* \quad (I.15)$$

$$R_{\mu\nu} F'^{\mu\sigma} F'^{\nu}{}_{\sigma} = R_{\mu\nu} (F^{\mu\sigma} \cos\theta + F^{\mu\sigma*} \sin\theta) (F_{\sigma}{}^{\nu} \cos\theta + F_{\sigma}{}^{\nu*} \sin\theta)$$

$$= R_{\mu\nu} \left\{ \cos^2\theta F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} + \sin^2\theta F^{\mu\sigma*} F_{\sigma}{}^{\nu*} + \cos\theta \sin\theta \right.$$

$$\left. (F^{\mu\sigma*} F_{\sigma}{}^{\nu} + F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu*}) \right\} \quad (I.16)$$

Calculamos:

$$F^{\mu\sigma*} F_{\sigma}{}^{\nu} = \frac{1}{4} \eta_{\sigma\nu\tau\rho} F^{\tau\rho} \eta^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \delta^{\mu\alpha\beta}_{\nu\tau\rho} F_{\alpha\beta} F^{\tau\rho} =$$

$$= \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\tau\rho} \left\{ \delta^{\mu}_{\nu} \delta^{\alpha}_{\tau} \delta^{\beta}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\nu} \delta^{\alpha}_{\rho} \delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\mu}_{\tau} \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\tau} \delta^{\alpha}_{\rho} \delta^{\beta}_{\nu} \right.$$

$$\left. + \delta^{\mu}_{\rho} \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\mu}_{\rho} \delta^{\alpha}_{\tau} \delta^{\beta}_{\nu} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \delta^{\mu}_{\nu} F^2 - \delta^{\mu}_{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} - F_{\nu\sigma} F^{\sigma\mu} + F_{\sigma\nu} F^{\sigma\mu} - F_{\nu\sigma} F^{\sigma\mu} + F_{\sigma\nu} F^{\sigma\mu} \right\}$$

$$F^{\mu\sigma*} F_{\sigma}{}^{\nu} = \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} F^2 + F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} \quad (I.17)$$

e portanto

$$R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} = R_{\mu\nu} \left\{ \cos^2\theta F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} + \sin^2\theta \left(\frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} F^2 + F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} \right) + \cos\theta \sin\theta \left(-\frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} F\tilde{F} \right) \right\}$$

$$R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} = R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} + \frac{1}{2} \sin^2\theta R F^2 - \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta R F\tilde{F} \quad (I.18)$$

Juntando as equações (I.15) e (I.18) podemos concluir que

$$\mathcal{L}_{\Sigma} = \lambda_{\Sigma} \left(R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} + \frac{1}{4} R F^2 \right)$$

é invariante por RD e, sendo que nesta combinação não aparece mais o ângulo θ , este pode ser função das coordenadas.

Os outros invariantes se transformam do seguinte modo :

$$R F \tilde{F} = -2 \sin\theta \cos\theta R F^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) R F\tilde{F} \quad (I.19)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} - \sin^2\theta R F^2 + 2 \sin\theta \cos\theta R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\sigma\rho} - 4 \sin^2\theta R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} \quad (I.20)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\sigma\rho} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\sigma\rho} - 2 \sin\theta \cos\theta R F^2 - 4 \sin\theta \cos\theta R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} - 8 \sin\theta \cos\theta R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} \quad (I.21)$$

Vemos que não existem outras combinações invariantes. Apesar de termos encontrado \mathcal{L}_{Σ} não sabemos ainda dar uma interpretação física desta invariância por transformações duais locais.

A respeito da invariância por transformações conformes (isto é, transformações do tipo $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$) queremos fazer o seguinte comentário. Ao estudar o campo escalar, obtemos uma equação dinâmica para este campo que no caso do acoplamento mínimo não é invariante por transformações conformes. Entretanto, é possível obter uma equação que possui esta invariância, acoplando o campo escalar de maneira não-mínima com

a gravitação [4]. No caso das equações de Maxwell encontramos uma situação oposta: Enquanto as EMA usuais possuem a invariância conforme [22], todos os tipos de acoplamento não-mínimo fazem com que as equações de Maxwell modificadas percam esta invariância.

O próximo passo consiste em obter as equações dinâmicas que decorrem das Lagrangeanas \mathcal{L}_1 a \mathcal{L}_7 . Para este fim definimos o vetor de Euler-Lagrange E^μ e o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ por

$$\delta_{A_\mu} S = \int d^4x \sqrt{-g} E^\mu \delta A_\mu \quad (\text{I.22})$$

$$\delta_{g_{\mu\nu}} S = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{I.23})$$

O cálculo, utilizando o princípio variacional, está feito para \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_5 e \mathcal{L}_7 no apêndice A. Para as Lagrangeanas restantes o procedimento é absolutamente idêntico e daremos somente os resultados na tabela que segue.

\mathcal{L}	$T^{\mu\nu}$
$\lambda_1 R A_{\mu} A^{\mu}$	$\lambda_1 \left\{ A^2 G^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \square A^2 + A^2 ; \mu ; \nu + \right. \\ \left. + R A^{\mu} A^{\nu} \right\}$
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$	$\lambda_2 \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\sigma\rho} A^{\sigma} A^{\rho} + R^{(\mu\sigma} A_{\sigma} A^{\nu)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \square (A^{\mu} A^{\nu}) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (A^{\sigma} A^{\rho}) ; \sigma ; \rho + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A^{\sigma} A^{(\mu} ; \nu) ; \sigma \right\}$
$\lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = L_5$	$\lambda_3 \left\{ F^2 G^{\mu\nu} - 2 R F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} - g^{\mu\nu} \square F^2 \right. \\ \left. + F^2 ; \mu ; \nu \right\}$
$\lambda_4 R F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$	$\lambda_4 \left\{ F F^{*} R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \square F F^{*} + (F F^{*}) ; \mu ; \nu \right\}$
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} = L_6$	$\lambda_5 \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} - R_{\alpha\beta} F^{\alpha}{}_{\mu} F^{\beta}{}_{\nu} \right. \\ \left. + R_{(\mu\alpha} F^{\alpha\sigma} F_{\sigma\nu)} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta}) ; \beta ; \alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (F^{\rho\sigma} F_{\sigma}^{\nu}) ; \mu ; \rho - \frac{1}{2} \square (F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu}) \right\}$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} = L_7$	$\lambda_6 \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \right. \\ \left. - (F^{\rho(\mu} F^{\nu)\sigma}) ; \sigma ; \rho + \frac{3}{2} R^{(\mu\sigma\alpha\beta} F_{\sigma}^{\nu)} F_{\alpha\beta} \right\}$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{*\sigma\rho}$	$\lambda_7 \left\{ \frac{1}{2} R^{(\mu\sigma\rho\alpha} F_{\alpha}^{\nu)} F_{\sigma\rho} + (F^{\rho(\mu} F^{\nu)\sigma}) ; \sigma ; \rho \right\}$

Tabela 1 : Os tensores momento-energia

\mathcal{L}	T^μ_μ
$\lambda_1 R A_\mu A^\mu$	$\lambda_1 \left\{ -3 \square A^2 \right\}$
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$	$\lambda_2 \left\{ -\frac{1}{2} \square A^2 - (CA^\sigma A^\rho)_{;\sigma;\rho} \right\}$
$\lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$\lambda_3 \left\{ RF^2 - 3 \square F^2 \right\}$
$\lambda_4 R F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$	$\lambda_4 \left\{ RF\tilde{F} - 3 \square F\tilde{F} \right\}$
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu$	$\lambda_5 \left\{ R_{\sigma\rho} F^{\sigma\alpha} F_\alpha^\rho + \frac{1}{2} \square F^2 - (F^{\sigma\alpha} F_\alpha^\rho)_{;\sigma;\rho} \right\}$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$\lambda_6 \left\{ R_{\alpha\beta\sigma\rho} F^{\alpha\beta} F^{\sigma\rho} - (F^{\sigma\alpha} F_\alpha^\rho)_{;\sigma;\rho} \right\}$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\sigma\rho}$	$\lambda_7 \left\{ R_{\alpha\beta\sigma\rho} F^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \square F\tilde{F} \right\}$

Tabela 2 : Os traços dos tensores momento-energia

\mathcal{L}	E^μ
$\lambda_1 R A_\mu A^\mu$	$2\lambda_1 R A^\mu$
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$	$2\lambda_2 R^{\mu\nu} A_\nu$
$\lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$-4\lambda_3 (R F^{\mu\nu})_{;\nu}$
$\lambda_4 R F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$	$-4\lambda_4 (R \tilde{F}^{\mu\nu})_{;\nu}$
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu$	$-2\lambda_5 (R^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu - R^{\nu\sigma} F_\sigma^\mu)_{;\nu}$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$-4\lambda_6 (R^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho})_{;\nu}$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\sigma\rho}$	$-4\lambda_7 (R^{\mu\nu\sigma\rho} \tilde{F}_{\sigma\rho})_{;\nu}$

Tabela 3 : Os vetores de Euler-Lagrange

Observamos que, embora os vetores de Euler-Lagrange tendam a zero no limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, isto não ocorre para os tensores momento-energia. Entretanto, os termos que sobram são divergências que não contribuem a energia ou ao momento total quando integrado sobre todo o espaço. Porém, devido a estes termos podem surgir efeitos de fronteira quando os campos forem tratados quânticamente. Davies e Toms [20] fizeram este cálculo para as Lagrangeanas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 numa configuração de um semi-espaço limitado por um condutor e encontraram que a densidade de energia diverge ao se aproximar da fronteira. Surge então naturalmente a pergunta, se as Lagrangeanas invariantes de gauge poderiam dar uma contribuição ao efeito Casimir [21] (um efeito quântico devido a flutuações do campo eletromagnético no vácuo) e assim possivelmente serem detectadas no laboratório.

Adicionar a Noção { Entretanto, como dissemos acima, as Lagrangeanas \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_5 e \mathcal{L}_6 surgem, segundo o trabalho de Drummond e Hathrell [17], como Lagrangeana efetiva, que foi obtida quantizando o campo eletromagnético. Do ponto de vista deste trabalho não faria sentido quantizá-lo novamente. *Ver*

Sem nos propor de entrar em detalhe, queremos fazer ainda alguns comentários a respeito da estrutura canônica do campo eletromagnético quando este for acoplado de maneira não-mínima com o campo gravitacional. No caso do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski, pode-se mostrar que, embora partimos do campo vetorial A_μ com quatro componentes, a teoria possui somente dois graus de liberdade independentes. Esta redução é feita mediante dois vínculos, que surgem de maneira natural na teoria, para que ela tenha consistência interna [23].

O primeiro destes vínculos é encontrado ao calcular o momento canonicamente conjugado a A_μ , que é definido por

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial^0 A^\mu)} \left[-\frac{1}{2} (\partial^\nu A^\sigma - \partial^\sigma A^\nu) F_{\sigma\nu} \right] = F_{0\mu} \quad (I.24)$$

Pela antisimetria de $F_{\mu\nu}$ encontramos de imediato *Verdade? não c/(A₀, π₀)*

$$\pi_0(x) = F_{00}(x) \equiv 0 \quad (I.25)$$

como vínculo e portanto o par (A_0, π_0) não representa um grau de liberdade da teoria. Para que este vínculo seja mantido ao longo da evolução temporal do sistema, exigimos *Do qual?*

$$\dot{\pi}_0 = 0 \quad (I.26)$$

o que, usando a equação de movimento

$$\dot{\pi}_\mu = \left\{ \pi_\mu, H \right\}, \quad (I.27)$$

onde $\{ \}$ representa o colchete de Poisson e H é a Hamiltoniana canônica, definida por

$$H = \int (\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}) d^3x,$$

conduz ao segundo vínculo

$$\dot{\pi}_0 = \text{div } \vec{\pi} = \partial_i F^{0i} = \text{div } \vec{E} = 0. \quad (I.28)$$

Vemos assim que a lei de Gauss não é uma equação dinâmica, mas que ela surge naturalmente para consistência interna da teoria.

Por outro lado, a Lagrangeana de Maxwell é invariante de gauge, isto é, temos a liberdade de fazer uma transformação do tipo

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (I.29)$$

onde Λ é uma função arbitrária das coordenadas. Partindo de um potencial vetor arbitrário, sempre podemos, através desta

liberdade de gauge, alcançar o gauge de radiação, que é caracterizado pelas condições [23]

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad \text{div } \vec{A} = 0 \quad . \quad (\text{I.30})$$

Desta maneira, embora tenhamos partido com quatro componentes independentes de A_μ e π_μ , restringimo-las por duas condições e concluímos que o campo eletromagnético possui somente dois graus de liberdade, que são associados as partes transversais de \vec{A} e $\vec{\pi}$ (isto é as partes que tem divergência zero). Em termos da teoria quântica de campos, reencontramos este resultado no fato de que o fóton só possui dois graus de liberdade internos, que correspondem aos estados de polarização transversal.

Já no caso do acoplamento mínimo entre eletromagnetismo e gravitação a situação é diferente.

Neste caso temos como equação dinâmica

$$g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu;\sigma} = 0 \quad , \quad (\text{I.31})$$

que, para $\mu = 0$, conduz à lei de Gauss modificada

$$\pi^i{}_{;i} = 0 \quad . \quad (\text{I.32})$$

(esta equação vale num sistema gaussiano de coordenadas, isto é um sistema com $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$. π^μ continua sendo dado por (I.24)).

Entretanto, embora a estrutura dos vínculos continue muito parecida à do caso mínimo, o fato de não podermos mais comutar derivadas faz com que em geral o gauge de radiação não possa ser alcançado. Assim, apesar de continuarmos com uma teoria que possui dois vínculos, e portanto dois graus de liberdade, não podemos mais necessariamente associá-los aos estados de

polarização transversal.

No caso do acoplamento não-mínimo a situação é parecida.

Consideramos o campo eletromagnético como campo teste numa geometria dada a priori, isto é, desprezamos sua influência sobre o campo gravitacional. Partindo, por exemplo, da Lagrangeana \mathcal{L}_5 , temos como momento canonicamente conjugado

$$\pi^\mu = \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\mu)} \left[\lambda_5 R^{\sigma\rho} (\partial_\alpha A_\sigma - \partial_\sigma A_\alpha) (\partial_\rho A_\beta - \partial_\beta A_\rho) g^{\alpha\beta} \right]$$

$$\pi^\mu = 2\lambda_5 (R^{\sigma\sigma} F_\sigma^\mu - R^{\mu\sigma} F_\sigma^0) \quad (\text{I.33})$$

e reencontramos $\pi^0 = 0$.

A equação de movimento correspondente é

$$(R^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu - R^{\nu\sigma} F_\sigma^\mu)_{;\nu} = 0 \quad (\text{I.34})$$

e observamos que esta, para $\mu = 0$, e num sistema gaussiano de coordenadas, se reduz a

$$\pi^i_{;i} = 0 \quad (\text{I.35})$$

Esta equação também pode ser obtida de maneira formal calculando π^0 e exigindo que este se anule. Concluindo, encontramos novamente dois vínculos e sabemos que continuamos com uma teoria que possui dois graus de liberdade. Entretanto, devido a estrutura da equação (I.35), que vincula o campo eletromagnético à geometria, não podemos interpretá-los numa maneira fácil e intuitiva.

Por inspeção das outras Lagrangeanas e das equações de movimento correspondentes notamos que sempre encontramos a mesma estrutura, que é caracterizada pelos vínculos $\pi^0 = 0$ e $\pi^i_{;i} = 0$. Somente a definição do momento π^μ depende da teoria particular.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE CAUCHY

Geralmente encontramos, e de fato esperamos encontrar, leis físicas que a partir do conhecimento do estado de um sistema físico num instante inicial determinem a evolução futura deste. No caso das equações não-lineares porém, seremos raramente capazes de explicitar esta evolução para tempos arbitrários, pois isto equivaleria a dar uma solução geral das equações de movimento (EM). Para as equações de Einstein (EE), por exemplo, não há nenhuma expectativa de encontrar uma solução geral. Porém, o que podemos fazer é tentar encontrar uma solução pelo menos para um futuro próximo do instante inicial, expandindo-a numa série de Taylor em torno deste. Assumimos, que neste instante inicial temos todo conhecimento possível do sistema. Este é o problema de Cauchy (PC).

Como exemplo consideramos um campo escalar clássico φ descrito pela EM

$$\square \varphi - m^2 \varphi = 0 \quad (\text{II.1})$$

onde \square significa $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

Embora neste caso a solução geral seja bem conhecida

tentaremos encontrar uma solução aproximada expandindo-a em torno do instante inicial t_0 da forma

$$\varphi(t, x) = \varphi(t_0, x) + \dot{\varphi}(t_0, x)(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}(t_0, x)(t-t_0)^2 + \dots \text{(II.2)}$$

(O ponto significa derivada com respeito ao tempo)

Para que possamos fazer isto temos que ter conhecimento completo, isto é para todos os valores de x^i , dos valores de φ e de suas derivadas temporais no instante inicial para poder usá-los como coeficientes de expansão.

Escrevemos a EM da forma

$$\dot{\varphi} = \Delta\varphi + m^2\varphi \text{ (II.3)}$$

Portanto, conhecendo $\varphi(t_0, x)$ podemos calcular $\Delta\varphi(t_0, x)$ e a EM nos fornece $\dot{\varphi}(t_0, x)$. Derivando (II.3) encontramos

$$\ddot{\varphi} = \Delta\dot{\varphi} + m^2\dot{\varphi} \text{ (II.4)}$$

que, a partir do conhecimento de $\varphi(t_0, x)$ nos fornece $\dot{\varphi}(t_0, x)$. Agora podemos derivar sucessivamente as equações (II.3) e (II.4), substituindo os valores das derivadas de ordem inferior já encontrados e desta maneira obtemos todas as derivadas temporais em função de $\varphi(t_0, x)$ e $\dot{\varphi}(t_0, x)$. Estes últimos, que constituem as condições iniciais, são denominados de dados de Cauchy (DC).

Para resumir: Supomos que temos uma EM de n-ésima ordem nas derivadas temporais dos campos φ_A . Se, a partir do conhecimento de $\varphi_A(t_0, x)$ até $\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\varphi_A(t_0, x)$ as EM nos fornecem de forma unívoca e contínua todas as derivadas superiores, podemos usá-las como coeficientes de expansão numa solução aproximada das EM e diremos que o problema de Cauchy é bem posto.

Quando estudamos uma teoria relativística de campo num

espaço-tempo (ET) curvo temos, em primeiro lugar, que construir um sistema de coordenadas que nos permita definir um instante inicial. Para este fim podemos usar o sistema Gaussiano de coordenadas (SGC), que é caracterizado pelas condições $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$. Para que possamos cobrir todo o espaço-tempo com o SGC, este deve permitir a construção de uma hipersuperfície tridimensional global do tipo espaço (a superfície de Cauchy SC).

Assumimos então que o ET admite uma SC e construímos as geodésicas normais à SC, utilizando-as como linhas de tempo e denotando tempo o comprimento s delas, medido a partir da SC. Além disso escolhemos coordenadas arbitrárias na SC como coordenadas espaciais. Sendo que as linhas de tempo são ortogonais à SC, temos:

$$g_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = 0 \quad \text{e} \quad \vec{e}_0 = \frac{d}{ds} \quad \vec{e}_i = (\partial_i, x, y, z)$$

$$g_{i0}(t_0, x) = 0 \quad \vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0) \quad \text{(II.9)}$$

Por outro lado o vetor tangente às linhas de tempo, a saber $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, que nestas coordenadas tem componentes $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, satisfaz à equação da geodésica.

$$u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0 \quad \text{(II.10)}$$

$$\Rightarrow (u^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} u^\sigma) u^\nu = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{00} = 0$$

$$\Rightarrow g^{\mu\sigma} (2g_{0\sigma,0} - g_{00,\sigma}) = 0 \quad \text{(II.11)}$$

Medindo o intervalo ds^2 ao longo das linhas de tempo encontramos pela própria construção

$$ds^2 = g_{00} dt^2 = dt^2$$

e portanto

$$g_{00} = 1 \quad (\text{II.12})$$

Usando isto em (II.11) obtemos $g_{0\sigma,0}(t,x) = 0$ e junto com (II.9) concluímos que $g_{0i} = 0$ em todo ET.

Até o final deste capítulo usaremos o SGC.

Passamos então ao estudo do PC das equações que descrevem a interação do campo gravitacional com o campo eletromagnético. Para obtermos uma idéia da estrutura das equações dinâmicas da gravitação vamos tratar, em primeiro lugar, do caso das EE no vácuo, prosseguindo depois ao estudo das equações que decorrem do acoplamento mínimo e não-mínimo do campo eletromagnético e gravitacional.

Partimos das equações

$$G^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{II.13})$$

que são dez equações de segunda ordem em $g_{\mu\nu}$, aparentemente o número certo para determinar os dez $g_{\mu\nu,00}$ a partir do conhecimento dos $g_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu,0}$ dentro da SC. Vimos porém, que, independentemente das equações dinâmicas, podemos fazer a escolha do SGC, definindo assim os $g_{\mu 0}$ a priori em todo ET. Portanto as EE não podem determinar a evolução dinâmica dos $g_{\mu 0}$ e de fato, escrevendo-as em termos dos DC e dos $g_{\mu\nu,00}$ (Apêndice B) encontramos que os $g_{\mu 0,00}$ não aparecem nas EE. Desta forma, além de termos a liberdade de escolher os $g_{\mu 0}$, somos ao mesmo tempo obrigados a defini-los em todo ET.

Por outro lado, lembrando a identidade de Bianchi

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (\text{II.14})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} = - \frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} G^{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\nu} G^{\mu\sigma} \quad (\text{II.15})$$

e observando que a parte direita desta equação envolve no máximo segundas derivadas temporais dos $g_{\mu\nu}$ concluímos que $G^{\mu 0}$ só pode envolver primeiras derivadas temporais dos $g_{\mu\nu}$. Portanto as quatro equações

$$G^{\mu 0} = 0 \quad (\text{II.16})$$

são vínculos para os DC. Somente para DC que satisfazem a (II.16) podemos ter esperança de determinar os $g_{ij,00}$ pelas seis equações restantes, que são as verdadeiras equações dinâmicas.

Adotando o procedimento de Synge [25] e usando resultados obtidos nos apêndices B ($R_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$ no SGC) e C (Lema) vamos investigar com maior detalhe se as equações $G_{ij} = 0$ realmente fornecem os $g_{ij,00}$.

Pelo lema do apêndice C podemos substituir as EE (II.13) pelas seguintes equações:

$$G_{ij}^+ = 0 \quad \text{no ET} \quad (\text{II.17})$$

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \text{no ET} \quad (\text{II.18})$$

$$G_{\mu 0} = 0 \quad \text{na SC} \quad (\text{II.19})$$

(devido ao SGC temos $G_{\mu}^0 = G_{\mu 0}$)

Aqui a operação $^+$, denominada de conjugado, é definida por

$$G_{\mu\nu}^+ = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G^{\sigma}{}_{\sigma}$$

Notamos que (II.18) é automaticamente satisfeita, já que nada mais é do que a identidade de Bianchi e portanto consequência da própria definição do tensor de Riemann.

Pela definição do tensor de Einstein temos

$$G_{\mu\nu}^+ = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-R) = R_{\mu\nu} .$$

Portanto a equação (II.17) pode ser reescrita como

$$R_{ij} = 0$$

ou, pela fórmula (B.14) do apêndice B

$$\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} = - \tilde{R}_{ij} + \frac{1}{2} g^{km} g_{ik,0} g_{jm,0} + \frac{1}{4} g_{ij,0} g^{kl} g_{kl,0} \quad (\text{II.20})$$

(o \sim se refere a quantidades calculadas na SC)

fornecendo assim os seis $g_{ij,00}$ e por derivação sucessiva também as derivadas superiores em função dos DC. Ressaltamos que isto só é possível devido a $g^{00} \neq 0$. Encontraremos um resultado análogo no estudo das EMA, onde esclareceremos a importância física desta observação.

Podemos ainda explicitar os vínculos (II.19) em função dos DC.

$$G_{00} = 0: - \frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{8} (g^{ij} g_{ij,0})^2 + \frac{1}{8} g^{ij} g^{kl} g_{ik,0} g_{jl,0} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$G_{i0} = 0: \frac{1}{2} (g^{kl} g_{kl,0})_{,i} - \frac{1}{2} D^k g_{ik,0} = 0 \quad (\text{II.22})$$

(aqui D^k é a derivada covariante na SC)

Chegamos assim à conclusão de que as EE numa variedade que permita a construção de uma superfície de Cauchy, para dados iniciais que satisfazem a $G_{\mu 0} = 0$, permitem a expansão da solução das equações dinâmicas $G_{ij} = 0$ numa série de potência no tempo da forma

$$g_{ij}(t, x) = g_{ij}(t_0, x) + g_{ij,0}(t_0, x)(t-t_0) + \\ + \frac{1}{2} g_{ij,00}(t_0, x)(t-t_0)^2 + \dots$$

tendo como coeficientes de expansão os próprios DC ou funções destes.

Considerando as equações de Einstein-Maxwell, isto é, as equações que decorrem do acoplamento mínimo entre eletromagnetismo e gravitação, temos :

$$G_{\mu\nu} = - E_{\mu\nu} \quad (II.23)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (II.24)$$

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0 \quad (II.25)$$

Aqui $E_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do campo eletromagnético :

$$E_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \quad (II.26)$$

Sendo que o traço deste é zero e usando o lema podemos substituir (II.23) por

$$R_{ij} = - E_{ij} \quad (II.27)$$

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = - E^{\mu\nu}{}_{;\nu} \quad (II.28)$$

$$G_{\mu 0} = - E_{\mu 0} \quad (II.29)$$

A equação (II.28), cujo lado esquerdo é identicamente zero devido à identidade de Bianchi, significa a conservação do tensor momento-energia. Como mostramos no apêndice D esta é consequência da própria definição de $T_{\mu\nu}$ e independe da validade das EE. Portanto, daqui para frente não precisamos mais nos preocupar com as equações do tipo (II.28).

A equação (II.27), já que $E_{\mu\nu}$ envolve somente os DC e devido ao acoplamento mínimo que em (II.24) e (II.25) só faz aparecer a conexão, determina os $g_{ij,00}$

$$\frac{1}{2} g_{ij,00} = - \tilde{R}_{ij} + \frac{1}{2} g^{km} g_{ik,0} g_{jm,0} + \frac{1}{4} g_{ij,0} g^{kl} g_{kl,0} -$$

200 50

$$- F_{i\sigma} F^{\sigma j} - \frac{1}{4} g_{ij} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \quad (\text{II.30})$$

(assumimos agora $g_{00} = 1$)

Os vínculos (II.21) e (II.22) serão alterados para

$$-\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{8} (g^{ij} g_{ij,0})^2 + \frac{1}{8} g^{ij} g^{kl} g_{ik,0} g_{jk,0} = - F_{oi} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{1}{2} (g^{kl} g_{kl,0})_{,i} - \frac{1}{2} D^k g_{ik,0} = - F_{oj} F^j_i \quad (\text{II.32})$$

A evolução de $F_{\mu\nu}$ por sua vez, pode ser determinada através de (II.24) e (II.25). Esta última, para os três índices diferentes de zero, constitui uma equação de vínculo :

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \quad (\text{II.33})$$

Lembramos que (II.25) é consequência da definição de $F_{\mu\nu}$ em termos de um potencial vetor A_μ . A equação (II.33) garante que nossos DC realmente podem ser escritos da forma

$$F_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i}$$

Quando um dos índices for zero, (II.25) nos fornece os três $F_{ij,0}$ em função dos DC. Neste caso temos:

$$F_{ij,0} = F_{jo,i} - F_{oi,j} \quad (\text{II.34})$$

A equação (II.24) pode ser reescrita como :

$$g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu;\sigma} = g^{\nu\sigma} (F_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} F_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} F_{\mu\rho}) = 0 \quad \text{ou}$$

$$g^{00} F_{\mu 0,0} = g^{00} \Gamma_{\mu 0}^{\rho} F_{\rho 0} - g^{ij} F_{\mu i,j} + g^{ij} (\Gamma_{\mu i}^{\rho} F_{\rho j} + \Gamma_{ji}^{\rho} F_{\mu\rho}) \quad (\text{II.35})$$

Esta equação, para $\mu = 0$ não envolve nenhuma derivada temporal de $F_{\mu\nu}$ e consiste portanto numa outra equação de vínculo :

$$g^{ij} F_{oi,j} = g^{ij} (\Gamma_{\alpha kj}^k F_{\alpha i} + \Gamma_{ij}^k F_{ok}) \quad (\text{II.36})$$

Esta é a generalização da lei de Gauss $\text{div } \vec{E} = 0$, que, como vimos no capítulo I surge naturalmente dentro do formalismo hamiltoniano.

Para $\mu = i$ encontramos os $F_{oi,0}$ em função dos DC :

$$g^{oo}F_{oi,0} = g^{oo}\Gamma_{io}^j F_{jo} - g^{jk}F_{ij,k} + g^{jk}(\Gamma_{ij}^\rho F_{\rho k} + \Gamma_{kj}^\rho F_{i\rho}) \quad (\text{II.37})$$

Novamente isto só é possível quando g^{oo} for diferente de zero.

Qual é o conteúdo físico desta observação ?

Supomos que num sistema de coordenadas no qual a equação da superfície inicial assume a forma $x^0 = 0$ encontramos $g^{oo} = 0$.

Neste caso é impossível ter todos os $g_{i0} = 0$. Voltando a (II.24)

e reescrevendo-a respeitando este fato encontramos :

$$g^{oi}F_{\mu i,0} = -g^{oi}F_{\mu o,i} - g^{ij}F_{\mu i,j} + g^{\nu\sigma}(\Gamma_{\mu\sigma}^\rho F_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho F_{\mu\rho}) \quad (\text{II.38})$$

Sendo que os $F_{oi,0}$ só aparecem na combinação $g^{oi}F_{oi,0}$, é impossível determiná-los um por um de forma contínua e unívoca em função dos DC, permitindo portanto que os $F_{oi,0}$ apresentem discontinuidades através desta superfície, também chamada de característica. Quando isto ocorrer para uma solução a chamaremos de onda de choque, usando a linguagem da hidrodinâmica. Passando para coordenadas arbitrárias, fazendo a transformação $x^0 = f(x^H)$ encontramos :

$$g^{oo} = g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu,H}} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu,H}} = 0 \quad (\text{II.39})$$

mostrando assim que o vetor normal à nossa superfície (agora definida por $f(x^H) = 0$) é um vetor nulo, e portanto a característica é uma superfície nula.

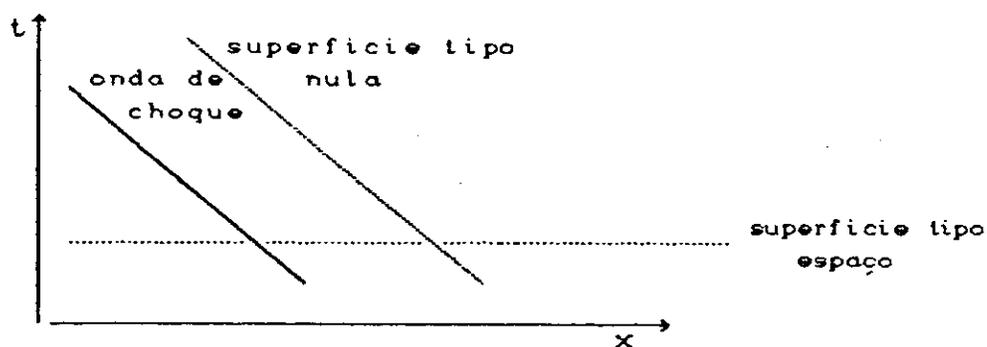
Resumindo, podemos enunciar os seguintes resultados:

1. As equações de Maxwell (e também as EE, veja (II.20)) permitem soluções do tipo onda de choque com discontinuidades em

superfícies nulas.

2. Ter conhecimento dos dados iniciais numa superfície nula não é suficiente para determinar a evolução do campo eletromagnético (gravitacional).

Podemos visualizar estes resultados num diagrama x-t.



Sendo que uma superfície tipo espaço intercepta uma frente de onda, um observador nesta superfície tem conhecimento da existência da onda de choque e pode determinar a evolução futura desta. Uma superfície inicial nula porém é "paralela" à frente de onda e tendo nenhum ponto em comum, um observador nesta superfície ignora a existência da onda de choque. Esta se propaga sem que a sua chegada na superfície nula possa ser prevista.

Encontraremos estes resultados dentro do estudo da ótica geométrica que, embora seja uma aproximação para frequências altas da solução das equações, fornece de maneira exata as características.]

Prosseguindo o estudo da interação entre gravitação e eletromagnetismo, e passando ao acoplamento não-minimo, encontramos uma situação bastante diferente. Como vemos de imediato, as equações de Maxwell modificadas (EMAM) envolvem explicitamente a curvatura (e portanto os $g_{ij,00}$), como também o

tensor momento-energia, e portanto as equações de Einstein modificadas (EEM), envolve derivadas temporais do campo acoplado de ordem superior àquelas que conhecemos pelos DC.

Tratamos em primeiro lugar da teoria não-mínima que tem sido a mais estudada: a do campo escalar descrito pelas seguintes equações dinâmicas [4]

$$(1 + \zeta\phi^2)G_{\mu\nu} = -\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma} - m^2\phi^2) + \zeta(g_{\mu\nu}\square\phi^2 - \zeta\phi^2_{,\mu;\nu}) \quad (\text{II.40})$$

$$\square\phi + (m^2 - \zeta R)\phi = 0 \quad (\text{II.41})$$

que decorrem da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 + \zeta R\phi^2 \quad (\text{II.42})$$

A escolha particular de $\zeta = -\frac{1}{\sigma}$ corresponde a uma EM para ϕ que, se $m = 0$, é invariante por transformações conformes, isto é, por transformações do tipo $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$ e $\tilde{\phi} = \Omega^{-1}(x)\phi$ [4]. Usando a equação do traço de (II.40)

$$(1 + \zeta\phi^2)(-R) = \phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma} - 2m^2\phi^2 + 3\zeta\square\phi^2 \quad (\text{II.43})$$

e

$$\square\phi^2 = 2\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma} + 2\phi\square\phi \quad (\text{II.44})$$

e substituindo ainda (II.41) em (II.44) e esta em (II.43) obtemos para $\zeta = -\frac{1}{\sigma}$

$$R = m^2\phi^2 \quad (\text{II.45})$$

podendo assim eliminar a curvatura da equação de ϕ (II.41), que se reduz a

$$\square\phi + m^2\phi(1 + \frac{1}{\sigma}\phi^2) = 0 \quad (\text{II.46})$$

permitindo portanto expressar $\phi_{,00}$ em função dos DC:

$$\begin{aligned} \phi_{,00} &= -\phi_{,i}^{\prime,i} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\mu}\phi^{\prime,\sigma} - m^2\phi\left(1 + \frac{1}{\sigma}\phi^2\right) \\ &= -g^{ij}\phi_{,i,j} - \frac{1}{2}g^{jk}g_{jk,0}\phi^{\prime,0} - \tilde{\Gamma}_{ji}^j\phi^{\prime,i} - m^2\phi\left(1 + \frac{1}{\sigma}\phi^2\right) \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Tomando o conjugado de (II.40), usando novamente (II.44) e (II.46), encontramos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2\right)R_{ij} &= -\phi_{,i}\phi_{,j} + \frac{1}{\sigma}\phi^2_{,i;j} + \\ &+ \frac{1}{\sigma}g_{ij}(\phi_{,0}\phi^{\prime,\sigma} + 2m^2\phi^2 - \frac{1}{\sigma}m^2\phi^4) \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

equação que, para $1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2 \neq 0$ determina os $g_{ij,00}$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2\right)g_{ij,00} &= -\left(1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2\right)\left\{\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2}g^{km}g_{ik,0}g_{jm,0} + \right. \\ &+ \left.\frac{1}{4}g_{ij,0}g^{kl}g_{kl,0}\right\} - \phi_{,i}\phi_{,j} + \frac{1}{\sigma}\phi^2_{,i;j} - \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_{ij}^k\phi^2_{,k} + \frac{1}{2}g_{ij,0}\phi^{2,0} \\ &+ \frac{1}{\sigma}g_{ij}\left\{\phi_{,0}\phi^{\prime,\sigma} + 2m^2\phi^2 - \frac{1}{\sigma}m^2\phi^4\right\} \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Podemos ainda explicitar os vínculos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2\right)\left\{-\frac{1}{2}\tilde{R} - \frac{1}{8}(g^{ij}g_{ij,0})^2 + \frac{1}{8}g^{ij}g^{kl}g_{ik,0}g_{jk,0}\right\} = \\ -\phi_{,0}\phi_{,0} + \frac{1}{2}(\phi_{,0}\phi^{\prime,\sigma} - m^2\phi^2) - \frac{1}{\sigma}\phi^2_{,i}^{\prime,i} - \frac{1}{12}g^{jk}g_{jk,0}\phi^{2,0} \\ - \frac{1}{\sigma}\tilde{\Gamma}_{ji}^i\phi^{2,j} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

e

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\phi^2\right)\left\{\frac{1}{2}(g^{kl}g_{kl,0})_{,i} - \frac{1}{2}D^k g_{ik,0}\right\} = \\ -\phi_{,0}\phi_{,i} + \frac{1}{2}\phi^2_{,0,i} - \frac{1}{2}g^{jk}g_{ki,0}\phi^2_{,j} \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

e concluímos que o PC para o campo escalar conforme é bem posto.

Passamos então ao PC de uma teoria que acopla não-minimalmente um campo vetorial e a gravitação. Partimos das EM que decorrem da seguinte Lagrangeana total

$$\mathcal{L} = R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda R A_{\mu} A^{\mu} \quad (\text{II.52})$$

Estas são [9]

$$(1 + \lambda A^2) G_{\mu\nu} = - E_{\mu\nu} + \lambda (g_{\mu\nu} \square A^2 - A^2_{,\mu;\nu} - R A_{\mu} A_{\nu}) \quad (\text{II.53})$$

$$g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu;\sigma} = - \lambda R A_{\mu} \quad (\text{II.54})$$

Substituindo o traço de (II.53)

$$R = - 3\lambda \square A^2 \quad (\text{II.55})$$

em (II.54) obtemos uma equação não-linear de segunda ordem para A_{μ} :

$$g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu;\sigma} = 3\lambda^2 A_{\mu} \square A^2 \quad (\text{II.56})$$

Desta, para $\mu = 0$ e supondo $A_0 \neq 0$ encontramos $\square A^2$ em função dos DC $A_{\mu,0}(t_0)$ e $A_{\mu,0}(t_0)$.

$$\square A^2 = g^{ij} (A_{0,i;j} - A_{i,0;j}) / 3\lambda^2 A_0 \quad (\text{II.57})$$

podendo substituí-lo em (II.53) para calcular o seu conjugado

$$(1 + \lambda A^2) R_{ij} = - E_{ij} - \lambda \left\{ - \frac{1}{2} g_{ij} \square A^2 - A^2_{,i;j} + 3\lambda A_i A_j \square A^2 - \frac{3}{2} \lambda g_{ij} A^2 \square A^2 \right\} \quad (\text{II.58})$$

$$(1 + \lambda A^2) R_{ij} = - E_{ij} - \lambda \left[A^2_{,i;j} + \left\{ \frac{1}{2} g_{ij} / 3\lambda^2 A_0 + (A^2 g_{ij} - A_i A_j) / \lambda A_0 \right\} g^{kl} (A_{0,k;l} - A_{k,0;l}) \right] \quad (\text{II.59})$$

e determinar desta maneira, para $1 + \lambda A^2 \neq 0$, os $g_{ij,00}$.

Os vínculos são

$$(1 + \lambda A^2) G_{i0} = - E_{i0} - \lambda A^2_{,i;0} + A_i (A_{0,k;l} - A_{k,0;l}) \quad (\text{II.60})$$

e

$$(1 + \lambda A^2) G_{00} = - E_{00} + \lambda A^2_{,i;i} + A_0 g^{kl} (A_{0,k;l} - A_{k,0;l}) \quad (\text{II.61})$$

Para calcular os $A_{\mu,00}$ partimos de (II.56) para $\mu = i$

$$(A_{i,\nu;\sigma} - A_{\nu,i;\sigma})g^{\nu\sigma} = 3\lambda^2 A_i \square A^2 \quad (\text{II.62})$$

$$\begin{aligned} & \underline{(A_{i,0;0} - A_{0,i;0})} + (A_{i,j;k} - A_{j,i;k})g^{jk} = \\ & (A_i/A_0)g^{jk}(A_{0,j;k} - A_{j,0;k}) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Estas são três equações que determinam os $A_{i,0,0}$. Finalmente, usando

$$\square A^2 = 2(\partial_\sigma A_\mu)(\partial^\sigma A^\mu) + 2A_\mu \square A^\mu \quad (\text{II.64})$$

ou

$$\begin{aligned} & 2(\partial_\sigma A_\mu)(\partial^\sigma A^\mu) + 2\left[A^0 \underline{A_{0,0;0}} + A^0 A_0^{,i}{}_{;i} + A_i A^i{}_{,0;0} + A_i A^{i,j}{}_{;j} \right] = \\ & g^{jk}(A_{0,j;k} - A_{j,0;k})/3\lambda^2 A_0 \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

e substituindo os $A_{i,0,0}$ acima encontrados, obtemos $A_{0,0,0}$. Neste caso podemos concluir que, para $A_0 \neq 0$, o PC também é bem posto. Isto se deve basicamente ao fato de podermos usar o traço da EEM para eliminar a curvatura da EMAM, cuja ordem por sua vez não é aumentada pelo acoplamento não-mínimo.

Já no caso das Lagrangeanas invariantes de gauge isto não ocorre. No caso de \mathcal{L}_3 por exemplo, obtemos pelo traço

$$F^2 R = 3 \square F^2$$

que substituído na EMAM conduz a uma equação que envolve terceiras derivadas do $F_{\mu\nu}$, que por sua vez só aparecem como derivadas de F^2 . Isto significa que, mesmo conhecendo até as segundas derivadas de $F_{\mu\nu}$ como condições iniciais, não podemos determinar as terceiras separadamente. Portanto, no sentido em que ele foi definido acima, o PC desta teoria não é bem posto. As outras Lagrangeanas nem permitem a eliminação da curvatura das EMAM (veja a tabela 3 do capítulo I), nos levando a conclusão de que elas tampouco apresentam um PC bem posto.

Quais as consequências deste resultado ?

Poderíamos descartar uma teoria por não apresentar um PC bem posto ?

Para responder esta questão voltamos ao nosso exemplo inicial, o campo escalar, porém com a diferença de tratá-lo como campo quântico. Neste caso, o momento canonicamente conjugado a φ é $\dot{\varphi}$ e pela regra de comutação $[\varphi(t,x),\pi(t,x')] = i\hbar\delta(x-x')$ torna-se impossível determinar φ e $\dot{\varphi}$ simultaneamente. Salientamos esta diferença entre campo clássico e quântico pela sua importância no nosso estudo do PC do campo eletromagnético. Como vimos no estudo do PC das EMA, estas requerem o conhecimento de $F_{\mu\nu}$ na SC. Devido ao fato de as componentes do campo eletromagnético quântico não comutarem entre si, este conhecimento se torna impossível. Na verdade, enquadrar uma teoria de campo no contexto do PC somente faz sentido para campos clássicos, sendo que o PC representa a própria questão do determinismo clássico. Segundo o trabalho de Drummond e Hathrell [17], as Lagrangeanas \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_5 e \mathcal{L}_6 surgem como parte de uma Lagrangeana efetiva que incorpora efeitos quânticos (obtida a partir das equações de Einstein-Maxwell que, como vimos, apresentam um PC bem posto), e portanto deste ponto de vista, não precisamos nos preocupar em descobrir que o PC destas Lagrangeanas não é bem posto.

CAPÍTULO III

A PROPAGAÇÃO DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Com a exceção de raios cósmicos de alta energia, todo o conhecimento que temos sobre o universo é resultado da observação de radiação eletromagnética. Isto vale tanto para a radiação de fundo como para a observação de fontes localizadas, que emitem um amplo espectro de frequências de rádio até raios-X. Lembramos também que um dos grandes sucessos da teoria geral da relatividade foi a predição correta do ângulo de deflexão de um raio de luz que passa na vizinhança do sol.¹ Devido à importância da radiação eletromagnética queremos estudar neste capítulo as leis que determinam a sua propagação no espaço-tempo curvo. Faremos este estudo em primeiro lugar dentro do esquema do acoplamento mínimo e, numa segunda etapa, procuraremos modificações destas leis, que possivelmente decorrem do acoplamento não-mínimo e que poderiam viabilizar o confronto das teorias de acoplamento não-mínimo com a

1 Recomendamos a leitura do livro de Eddington [24] a respeito das primeiras expedições realizadas em 1919 para medir esta deflexão. É curioso anotar que as primeiras medidas feitas em Sobral indicaram a metade do valor previsto por Einstein, isto é o valor newtoniano.

observação.

Sabemos que estes diversos tipos de radiação, como fenômenos eletromagnéticos, são descritos pelas equações de Maxwell (EMA). Não possuímos, entretanto, soluções exatas das EMA no ET curvo, para poder estudar as propriedades da propagação das ondas eletromagnéticas. Apesar disto, existem dois métodos que podemos utilizar a procura destas propriedades. São estes a ótica geométrica, que aproxima a solução das EMA para frequências altas, e o estudo das superfícies de discontinuidade, (as características), que fornece de maneira exata as frentes de onda.

No que se segue, consideraremos o campo eletromagnético como campo teste, isto significa que desprezaremos sua influência sobre o campo gravitacional, considerando o último como background fixo, que é dado a priori.

Começamos com o estudo das características no caso das EMA :

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu}{}_{;\sigma} + F_{\nu\sigma}{}_{;\mu} + F_{\sigma\mu}{}_{;\nu} = 0 \quad , \quad (\text{III.1})$$

procurando as hipersuperfícies através das quais $F_{\mu\nu}$ é contínuo e $F_{\mu\nu}{}_{;\sigma}$ apresenta discontinuidades. Seja esta superfície S dada por $f(x) = 0$ e definimos

$$k_{\mu} = f_{,\mu}(x) \quad , \quad (\text{III.2})$$

o vetor gradiente a S .

Denotamos de $[\psi]_S$ a discontinuidade de uma quantidade arbitrária ψ através de S . A condição de Hadamard [28] garante a existência

de um $\varphi_{\mu\nu}$ de maneira que possamos expressar $[F_{\mu\nu,\sigma}]$ como :

$$[F_{\mu\nu,\sigma}] = \varphi_{\mu\nu} k_{\sigma} \quad \text{onde?}$$

Por outro lado, a geometria é contínua através de S e portanto

$$[F_{\mu\nu,\sigma}] = [F_{\mu\nu,\sigma}] = \varphi_{\mu\nu} k_{\sigma} \quad \text{(III.3)}$$

Substituindo isto em (III.1) obtemos :

$$\varphi^{\mu\nu} k_{\nu} = 0 \quad \text{(III.4)}$$

$$\varphi_{\mu\nu} k_{\sigma} + \varphi_{\nu\sigma} k_{\mu} + \varphi_{\sigma\mu} k_{\nu} = 0 \quad \text{(III.5)}$$

Multiplicando (III.5) por k^{σ} e usando (III.4) concluímos

$$k_{\sigma} k^{\sigma} \varphi_{\mu\nu} = 0$$

ou, já que $\varphi_{\mu\nu}$ é diferente de zero (assumimos que realmente existem discontinuidades)

$$k^2 \equiv k^{\sigma} k_{\sigma} = 0 \quad \text{(III.6)}$$

Isto significa que o vetor gradiente a S é um vetor nulo e portanto a própria superfície é nula. Derivando (III.6),

lembrando o fato que k_{μ} é um gradiente, encontramos

$$\frac{Dk^{\mu}}{Ds} \equiv k^{\mu;\nu} k_{\nu} = 0 \quad \text{(III.7)}$$

o que significa que as trajetórias, cujos vetores tangentes são os k_{μ} 's, são geodésicas tipo nulo. Identificando S com uma frente de onda e as trajetórias com os raios de luz chegamos a conclusão que estes são geodésicas tipo nulo.

Como próximo passo vamos obter este mesmo resultado dentro da ótica geométrica. Sua validade depende da razão entre três comprimentos fundamentais da teoria. Estes são [2,28]:

(1) um comprimento de onda reduzido típico $\kappa = \lambda/2\pi$,

(2) um comprimento típico \mathcal{L} ao longo do qual as quantidades que descrevem a onda, como amplitude, comprimento de onda, polarização, variam e

(3) um raio típico de curvatura \mathcal{R} do ET no qual a onda se propaga.

A ótica geométrica é válida quando λ for muito pequeno comparado com \mathcal{L} e \mathcal{R} .

$$\lambda \ll \mathcal{R} \quad \text{e} \quad \lambda \ll \mathcal{L} \quad (\text{III.8})$$

Neste caso separamos o potencial vetor numa amplitude complexa, que varia lentamente com as coordenadas e numa fase real, que varia rapidamente, de maneira que o potencial vetor descreve localmente uma onda plana. A amplitude por sua vez se compõe de uma parte dominante a_μ , independente do comprimento de onda, e termos de correção b_μ , c_μ etc., devidos ao comprimento de onda finito. Expandimos a amplitude em potências de λ/L , onde L é o mínimo de \mathcal{L} e \mathcal{R} , fazendo o ansatz:

$$A_\mu = \text{Re} \left\{ (a_\mu + \varepsilon b_\mu + \varepsilon^2 c_\mu + \dots) e^{i\theta/\varepsilon} \right\} \quad (\text{III.9})$$

onde o parâmetro de expansão ε indica quão rapidamente um termo se aproxima a zero quando λ/L tende a zero, isto é $b_\mu \propto \lambda/L$ neste limite etc. Substituindo este ansatz na definição do tensor eletromagnético e retendo somente termos até ordem zero em ε , obtemos

$$F_{\mu\nu} = A_{[\mu;\nu]} = \text{Re} \left\{ \left[a_{[\mu;\nu]} + \frac{i}{\varepsilon} k_{[\nu} a_{\mu]} + \varepsilon b_{\mu]} \right] e^{i\theta/\varepsilon} \right\}, \quad (\text{III.10})$$

onde $k_\mu = \theta_{,\mu}$.

Para as EMA encontramos, considerando somente termos da ordem ε^{-2} e ε^{-1} :

$$\text{Re} \left\{ \left[\frac{i}{\epsilon} (k_{\nu} a^{[\mu; \nu]} + k^{[\nu} a^{\mu]}) + k^{[\nu} a^{\mu]} ;_{\nu} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon^2} k_{\nu} k^{[\nu} (a^{\mu]} + \epsilon b^{\mu])} \right] e^{i\theta/\epsilon} \} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Igualando os termos proporcionais a ϵ^{-2} e ϵ^{-1} a zero, obtemos

$$k_{\nu} k^{\nu} a^{\mu} - k_{\nu} a^{\nu} k^{\mu} = 0 \quad (\text{III.12})$$

$$k_{\nu} a^{[\mu; \nu]} + k^{[\nu} a^{\mu]} ;_{\nu} + k^{[\nu} a^{\mu]} ;_{\nu} + i k_{\nu} k^{[\nu} b^{\mu]} = 0 \quad (\text{III.13})$$

Para que $F_{\mu\nu}$ não se anule na ordem ϵ^{-1} , descartamos a solução $a_{\mu} \propto k_{\mu}$ da equação (III.12) e exigimos que os dois coeficientes se anulam separadamente, encontrando

$$k^2 = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$a_{\mu} k^{\mu} = 0 \quad (\text{III.15})$$

Reencontramos o resultado que os raios de luz (aqui definidos como as curvas normais às superfícies de fase constante) são geodésicas tipo nulo. Portanto, embora a ótica geométrica seja uma aproximação da verdadeira solução das EMA, ela fornece de maneira exata as equações que definem os raios de luz.

A partir da equação (III.14) podemos calcular a velocidade de propagação da luz. Temos como relação de dispersão

$$k_0^2 = k^2 \quad (\text{III.16})$$

($k^2 = |k_i k^i|$), que implica numa propagação não-dispersiva, onde a velocidade de fase $v_f \equiv k_0/k$ é igual a velocidade de grupo $v_g \equiv dk_0/dk$.

$$v_f = v_g = 1 \quad (\text{III.17})$$

A condição $a_{\mu} k^{\mu} = 0$ significa que a parte dominante da

polarização da onda é perpendicular ao vetor de onda k^μ .

Podemos ir além deste resultado, utilizando a equação em ϵ^{-1} , que, usando (III.15), pode ser reescrita como

$$2a^{\mu;\nu}k_\nu + a^\mu k^\nu{}_{;\nu} - (a^\nu{}_{;\nu} + ib_\nu k^\nu)k^\mu = 0 \quad \text{(III.18)}$$

const.

Separamos a amplitude a_μ em seu módulo $a = (-\bar{a}_\mu a^\mu)^{1/2}$ (\bar{a}_μ é o complexo conjugado de a_μ) e no vetor polarização e_μ , um vetor complexo normalizado por $\bar{e}_\mu e^\mu = -1$.

$$a_\mu = a e_\mu \quad \text{(III.19)}$$

Substituindo isto em (III.18), encontramos

$$2a^{\nu}{}_{;\nu}k^\nu e^\mu + 2ae^{\mu;\nu}k_\nu + ak^\nu{}_{;\nu}e^\mu - (a^\nu{}_{;\nu} + ik_\nu b^\nu)k^\mu = 0 \quad \text{(III.20)}$$

Por outro lado temos

$$a^2{}_{;\nu}k^\nu = 2aa^{\nu}{}_{;\nu}k^\nu = - (a^\mu \bar{a}_\mu)_{;\nu}k^\nu = - \bar{a}_\mu a^{\mu;\nu}k_\nu + cc$$

e usando novamente (III.18) $(\bar{a}^\mu{}_{;\nu} + \bar{a}^\nu{}_{;\mu})k^\nu = -(\bar{a}^\mu{}_{;\nu}k^\nu + \bar{a}^\nu{}_{;\mu}k^\mu)$

$$a^2{}_{;\nu}k^\nu = -\frac{\bar{a}_\mu}{2} \left\{ (a^\nu{}_{;\nu} + ik_\nu b^\nu)k^\mu - a^\mu k^\nu{}_{;\nu} \right\} + cc = -a^2 k^\nu{}_{;\nu}$$

$$\text{ou} \quad a^{\nu}{}_{;\nu}k^\nu = -\frac{1}{2} ak^\nu{}_{;\nu} \quad \text{(III.21)}$$

Com este resultado a equação (III.20) se reduz a

$$e^{\mu;\nu}k_\nu = -\frac{1}{2a} (a^\nu{}_{;\nu} + ik_\nu b^\nu) k^\mu \quad \text{(III.22)}$$

Este resultado significa que o vetor polarização recebe uma contribuição proporcional a k^μ ao longo do raio. Esta contribuição entretanto não corresponde a uma quantidade observável. Sabemos que podemos submeter o potencial vetor a uma transformação de gauge, sem que quantidades observáveis se alterem. Escolhemos o gauge de Lorentz

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad \text{(III.23)}$$

ou, substituindo (III.9)

$$\text{Re} \left\{ \left[a^\mu_{;\mu} + \frac{i}{\varepsilon} (a^\mu + \varepsilon b^\mu) k_\mu \right] e^{i\theta/\varepsilon} \right\} = 0 .$$

que conduz a :

$$a^\mu_{;\mu} + i k_\mu b^\mu = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$a^\mu k_\mu = 0 .$$

Devido a equação (III.24) a contribuição ao vetor polarização se anula. Uma outra maneira de ver, que (III.22) não corresponde a uma contribuição observável, é definir

$$f_{\mu\nu} = k_{[\nu} e_{\mu]} , \quad (\text{III.25})$$

que representa as direções de polarização e propagação da parte dominante do campo eletromagnético. Este tensor por sua vez é propagado paralelamente ao longo do raio, independentemente da escolha de gauge

$$\frac{Df}{Ds}{}^{\mu\nu} \equiv f_{\mu\nu;\sigma} k^\sigma = 0 . \quad (\text{III.26})$$

Finalmente podemos escrever a equação (III.21) como

$$(n\nu H)_{;K} = (a^2 k^\nu)_{;\nu} = 0 \quad (\text{III.27})$$

e interpretá-la em termos clássicos como a conservação do "número de raios de luz" ou melhor, em termos quânticos, como a conservação do número de fótons.

Vamos aplicar estes dois métodos às equações de Maxwell modificadas (EMAMD). Faremos isto sistematicamente para todas as Lagrangeanas que apresentamos no primeiro capítulo, utilizando tanto a ótica geométrica como o método das características. Sabemos através da observação do red-shift e da deflexão da luz no sol, que as equações de Maxwell usuais descrevem bem a

propagação de radiação eletromagnética num campo gravitacional fraco. Portanto esperamos do acoplamento não-mínimo somente correções às EMA, e partimos de uma Lagrangeana que é a soma da de Maxwell com uma ou várias das Lagrangeanas não-mínimas. Com isto obtemos como equações de Maxwell modificadas (EMAM)

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -E^{\mu}{}_{;i}, \quad (\text{III.28})$$

onde os vetores de Euler-Lagrange são dados pela tabela 3 do capítulo I.

Antes de iniciar os cálculos, já podemos classificar as Lagrangeanas em três grupos segundo os seus vetores de Euler-Lagrange. No caso de \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 este somente envolve A_{μ} , que, dentro do esquema da ótica geométrica, não contribui as equações da ordem ε^{-2} e ε^{-1} , e portanto não esperamos modificações nos resultados acima encontrados. \mathcal{L}_4 envolve $F_{\mu\nu}$, que é de ordem ε^{-1} . Isto nos leva a esperar reencontrar $k^2 = 0$, mas a priori não sabemos nada sobre a propagação da polarização. Os vetores de Euler-Lagrange das Lagrangeanas restantes envolvem derivadas de $F_{\mu\nu}$ e contém termos de ordem ε^{-2} . Neste caso, os raios de luz poderão deixar de ser geodésicas tipo nulo.

Iniciamos o nosso estudo pela ótica geométrica. Para simplificar as expressões, adotamos o gauge de Lorentz para as Lagrangeanas invariantes de gauge. Substituindo o ansatz (III.9) nas respectivas EMAM, obtemos as seguintes correções para as equações (III.12) e (III.13), que apresentamos nas tabelas 4 e 5.

Nas tabelas 4, 5 e 6, os termos apresentados a direita das respectivas Lagrangeanas correspondem ao lado direito da equação (III.28), enquanto o termo da primeira linha provém do lado

esquerdo desta equação.

\mathcal{L}	$k^2 a^\mu =$
$\lambda_1 R_{\mu} A^\mu$	0
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$	0
$\lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$4\lambda_3 R k^2 a^\mu$
$\lambda_4 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	0
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^\nu_\sigma$	$2\lambda_5 (R^{\mu\sigma} a_\sigma k^2 - R^{\nu\sigma} k_\nu k^\sigma a^\mu)$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$	$8\lambda_6 R^{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu k_\rho a_\sigma$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$	$4\lambda_7 R^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\sigma\rho\alpha\beta} k_\nu k^\beta a^\alpha$

Tabela 4: As correções da equação em ε^{-2}

Encontramos nesta tabela o fato já previsto de que os raios de luz continuam a ser geodésicas nulas para os acoplamentos \mathcal{L}_1 a \mathcal{L}_4 . Embora poderíamos perfeitamente obter as equações que definem os raios de luz no caso das Lagrangeanas \mathcal{L}_5 e \mathcal{L}_6 a partir das correções apresentadas na tabela 4, faremos isto demonstrando a aplicação do método das características.

\mathcal{L}	$2a^{\mu;\nu}k_\nu + a^{\mu\nu}{}_{;\nu} + ik^2 b^\mu =$
$\lambda_1 R_{\mu} A^{\mu}$	$-(\ln R)_{,\nu} a^{\nu\mu} \quad *$
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$	$(a^{\nu}{}_{;\nu} + ik_{\nu} b^{\nu})k^{\mu}$
$\lambda_3 R_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$4\lambda_3 \left\{ R \left[2a^{\mu;\nu}k_\nu + a^{\mu\nu}{}_{;\nu} + ik^2 b^\mu \right] + R_{,\nu} k^{[\nu a^{\mu}]}\right\}$
$\lambda_4 R_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$4\lambda_4 \eta^{\mu\nu\sigma\rho} R_{,\nu} k_{\rho} a_{\sigma}$
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}$	$2\lambda_5 \left\{ R^{\mu}{}_{\sigma;\nu} k^{[\nu a^{\sigma}]}\right. + R^{\mu}{}_{\sigma} \left[2a^{\sigma;\nu}k_\nu + a^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + ik^2 b^{\sigma} \right] - R^{\nu}{}_{\sigma;\nu} k^{[\mu a^{\sigma}]}$ $\left. - R^{\nu}{}_{\sigma} \left[k_{\nu} a^{[\sigma;\mu]} + k^{[\mu}{}_{;\nu} a^{\sigma]} + k^{[\mu a^{\sigma]}{}_{;\nu}} + i k_{\nu} k^{[\mu b^{\sigma}]}\right] \right\}$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$8\lambda_6 \left\{ R^{[\rho;\sigma]} k_{\rho} a_{\sigma} + R^{\mu\nu\sigma\rho} \left[k_{\nu} a_{\sigma;\rho} + k_{\rho;\nu} a_{\sigma} + k_{\rho\sigma;\nu} + i k_{\nu} k_{\rho} a_{\sigma} \right] \right\}$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$4\lambda_7 \left\{ 2R^{\mu\rho;\sigma} \eta_{\sigma\rho\alpha\beta} k^{\beta} a^{\alpha} + R^{\mu\nu\sigma\rho} \eta_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} \left(k_{\nu} a_{\alpha} k_{\beta} + k_{\beta;\nu} a_{\alpha} + k_{\beta\alpha;\nu} + i k_{\nu} k_{\beta} a_{\alpha} \right) \right\}$

Tabela 5: As correções da equação em ε^{-1} .

(*) Para chegar a esta equação usamos $(RA^{\mu})_{;\mu} = 0$, que é uma consequência da EMAM.

Como mostraremos a seguir \mathcal{L}_7 não permite uma solução da equação em ε^{-2} não trivial para um background de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), razão por qual descartamos este acoplamento. Este espaço-tempo tem como elemento de linha [28]

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) (dx^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (\text{III.29})$$

e é conformalmente plano (isto é $W^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$), o que permite substituir $R^{\mu\nu\rho\sigma}$ por \rightarrow no espaço-tempo.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ R_{\mu[\sigma} g_{\nu\rho]} - R_{\nu[\sigma} g_{\mu\rho]} \right\} - \frac{R}{\sigma} g_{\mu[\sigma} g_{\nu\rho]} \quad (\text{III.30})$$

(veja equação (I.3))

O tensor de Ricci por sua vez pode ser expresso por [28]

$$R_{\mu\nu} = - (1+\alpha)\rho v_{\mu} v_{\nu} + \frac{1}{2} (1-\alpha)\rho g_{\mu\nu} \quad (\text{III.31})$$

(aqui v_{μ} é o campo de observadores comovente com o fluido, cuja densidade de energia e pressão são ρ e p e onde assumimos uma equação de estado $p = \alpha\rho$ com $0 \leq \alpha \leq 1$)

Substituindo o tensor de Riemann na equação em ϵ^{-2} deste acoplamento, obtemos

$$k^2 a^{\mu} = - 4\lambda_7 (1+\alpha)\rho k_{\sigma} \eta^{\mu\sigma\alpha\beta} v_{\sigma} k_{\beta} a_{\alpha} \quad (\text{III.32})$$

$$(k_{\sigma} \equiv k_{\mu} v^{\mu})$$

que, quando multiplicado por a_{μ} e v_{μ} respectivamente, se reduz a

$$k^2 a^2 = 0 \quad \text{e} \quad k^2 a_{\sigma} = 0 \quad (a_{\sigma} \equiv a_{\mu} v^{\mu})$$

Estas duas equações só são conciliáveis para $k^2 = 0$, o que reduz a equação (III.32) a

$$\eta^{\mu\sigma\alpha\beta} v_{\sigma} k_{\beta} a_{\alpha} = 0$$

$$\text{ou} \quad \tilde{F}^{\mu\sigma} v_{\sigma} = 0 \quad (\text{III.33})$$

Devido a interpretação física das componentes de $\tilde{F}^{\mu\nu}$ em termos do campo elétrico e magnético, a equação (III.33) significa que o campo magnético que o observador comovente observa necessariamente se anula. Como este raciocínio continua válido quando além de \mathcal{L}_7 temos uma combinação das outras Lagrangeanas,

somos levados a conclusão que o acoplamento \mathcal{L}_7 , não permite uma solução não trivial da ótica geométrica num background de FRW, e portanto descartamos este acoplamento.

Para \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_3 e \mathcal{L}_4 podemos explicitar a equação de evolução da polarização. \mathcal{L}_1 conduz a

$$\frac{De^\mu}{Ds} = -\frac{1}{2} (\ln R)_{,\nu} e^\nu k^\mu. \quad (\text{III.34})$$

Neste caso o campo A^μ é físico e a polarização longitudinal (isto é proporcional ao vetor de onda) deve ser observável.

Para \mathcal{L}_3 temos

$$\frac{De^\mu}{Ds} = - (1 - 4\lambda_3 R)^{-1} 2\lambda_3 R_{,\nu} e^\nu k^\mu. \quad (\text{III.35})$$

que entretanto não altera o resultado

$$\frac{Df_{\mu\nu}}{Ds} = 0.$$

Este acoplamento também provoca uma modificação da lei da conservação de fótons, que neste caso é

$$\left\{ (1 - 4\lambda_3 R) a^2 k^\nu \right\}_{;\nu} = 0, \quad (\text{III.36})$$

e significa que o campo gravitacional age como fonte de fótons.

\mathcal{L}_4 conduz à seguinte equação para a propagação da polarização :

$$\frac{De^\mu}{Ds} = 4\lambda_4 \eta^{\mu\nu\sigma\rho} k_\rho e_\sigma R_{,\nu} \quad (\text{III.37})$$

que implica numa variação da polarização do campo eletromagnético

$$\frac{Df^{\mu\nu}}{Ds} = 4\lambda_4 k^{[\nu} \eta^{\mu]\sigma\rho} k_\rho e_\sigma R_{,\alpha}. \quad (\text{III.38})$$

Este é um efeito, que em princípio deveria ser observável. Salientamos porém, que, além desta contribuição à polarização da parte dominante do campo eletromagnético, pode haver outras

contribuições à polarização decorrentes de correções pós-ótica geométricas, que levam em consideração a propagação dos vetores b_μ , c_μ etc. [2]. Para fins experimentais é importante distinguir estas correções, que já aparecem com o acoplamento mínimo, da contribuição (III.38), que se deve exclusivamente ao acoplamento não-mínimo. O fato que pode permitir distinguir estas duas contribuições é que aquela devida ao acoplamento não-mínimo é função do gradiente da curvatura e não tem razão física para que este gradiente apareça nas equações de propagação de b_μ etc.

Para as outras Lagrangeanas não conseguimos exibir a propagação da polarização.

Usando o método das características obtemos as equações que apresentamos na tabela 6.

\mathcal{L}	$\rho^{\mu\nu} k_\nu =$
$\lambda_1 R_{\mu} A^\mu$	0
$\lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$	0
$\lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$4\lambda_3 R \rho^{\mu\nu} k_\nu$
$\lambda_4 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	0
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu$	$2\lambda_5 (R^{\mu\sigma} \rho_\sigma^\nu - R^{\nu\sigma} \rho_\sigma^\mu) k_\nu$
$\lambda_6 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$4\lambda_6 R^{\mu\nu\sigma\rho} \rho_{\sigma\rho} k_\nu$
$\lambda_7 R_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}$	$4\lambda_7 R^{\mu\nu\sigma\rho*} \rho_{\sigma\rho} k_\nu$

Tabela 6: As equações que definem as características.

Para poder ir além destas equações, escolhemos como background de particular interesse físico o espaço-tempo de (FRW). Substituindo a equação (III.30) em $R^{\mu\nu\sigma\rho} \varphi_{\sigma\rho} k_\nu$ obtemos

$$R^{\mu\nu\sigma\rho} \varphi_{\sigma\rho} k_\nu = R^\mu{}_\sigma \varphi^{\sigma\rho} k_\rho - R^\rho{}_\sigma \varphi^{\sigma\mu} k_\rho - \frac{1}{3} R \varphi^{\mu\sigma} k_\sigma, \quad (\text{III.38})$$

o que reduz o acoplamento \mathcal{L}_6 a uma combinação de \mathcal{L}_3 e \mathcal{L}_5 . Portanto consideramos daqui para frente somente estes dois acoplamentos.

Drummond e Hathrell [17] estudaram os efeitos de \mathcal{L}_6 sobre a velocidade da luz na geometria de Schwarzschild e encontraram que ela depende tanto da direção de propagação como da polarização. Devido a isto, um raio de luz que passa na vizinhança do sol deve se separar em dois raios com polarizações ortogonais, cuja separação angular entretanto está muito além da precisão experimental.

Substituindo $R_{\mu\nu}$ dado por (III.31) na equação de \mathcal{L}_5 obtemos

$$\left\{ 1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho \right\} \varphi^{\mu\nu} k_\nu = 2\lambda_5(1+\alpha)\rho \left\{ -v^\mu \varphi^{\sigma\nu} v_\sigma k_\nu - \varphi^{\mu\nu} v_\nu k_0 \right\}$$

($k_0 \equiv k^\sigma v_\sigma$) (III.39)

Multiplicando esta equação por v_μ vemos que $\varphi^{\sigma\nu} v_\sigma k_\nu = 0$ e portanto (III.39) se reduz a

$$\left\{ 1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho \right\} \varphi^{\mu\nu} k_\nu = -2\lambda_5(1+\alpha)\rho \varphi^{\mu\nu} v_\nu k_0 \quad (\text{III.40})$$

Lembrando a equação (III.5), que apesar de termos acoplamento não-mínimo continua válida e multiplicando-a por $[1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho]k^\sigma$ obtemos

$$\left\{ 1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho \right\} \varphi^{\mu\nu} k^2 + 2\lambda_5(1+\alpha)\rho k_0 v_\sigma \left(\varphi^{\mu\sigma} k^\nu - \varphi^{\nu\sigma} k^\mu \right) = 0$$

ou, usando novamente (III.5)

$$\left\{ 1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho \right\} k^2 + 2\lambda_5(1+\alpha)\rho k_0^2 = 0. \quad (\text{III.41})$$

O mesmo procedimento para \mathcal{L}_3 ou para uma combinação das duas conduz às seguintes expressões para a velocidade de propagação:

\mathcal{L}	$v^2 =$
$\lambda_3 RF^2$	1
$\lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}$	$\left \frac{1 - 2\lambda_5(1-\alpha)\rho}{1 + 4\lambda_5\alpha\rho} \right $
$\lambda_3 RF^2 + \lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}$	$\left \frac{1 - [4\lambda_3(1-3\alpha) + 2\lambda_5(1-\alpha)]\rho}{1 - [4\lambda_3(1-3\alpha) - 4\lambda_5\alpha]\rho} \right $

Tabela 7: As velocidades de propagação em FRW

Observamos aqui que, apesar de o acoplamento \mathcal{L}_3 sózinho não alterar a velocidade de propagação, esta depende de λ_3 quando temos uma combinação dos acoplamentos. Isto só não ocorre para $\alpha = \frac{1}{3}$, que corresponde à equação de estado de radiação e que substituído em (III.31) conduz a $R = 0$, eliminando este acoplamento.

Para chegar a uma interpretação física dos resultados acima encontrados, temos que escolher uma equação de estado para o fluido que gera a curvatura. Como pode ser visto nestes resultados, a velocidade de propagação tende a um no limite de baixa densidade. Portanto esperamos modificações das leis de propagação usuais somente em regiões com densidade muito alta, o que, em termos cosmológicos, corresponde a uma época muito remota, próxima da singularidade existente neste modelo. Para saber que tipo de matéria se torna predominante nesta fase do

universo, usamos a solução de $\rho(t)$ em função do fator escala $A(t)$, que é dada por [28]

$$\rho(t) = \rho_0 A(t)^{-3(1+\alpha)} \quad (\text{III.42})$$

Esta equação indica que a densidade diverge com A^{-3} para poeira (isto é matéria com pressão zero) e com A^{-4} para radiação. Concluímos que a matéria dominante nesta fase do universo é a radiação e portanto optamos para $\alpha = \frac{1}{3}$. Para podermos determinar $\rho(t)$ falta ainda escolhermos a curvatura da seção espacial, isto é escolher a função $\alpha(\chi)$ em (III.29). Existem três possibilidades, a saber $\alpha(\chi) = \chi$, $\alpha(\chi) = \text{sen}\chi$ ou $\alpha(\chi) = \text{senh}\chi$ [28]. Entretanto, estas funções tem um limite comum para χ muito pequeno, que coincide com a primeira das três funções. Como toda a interpretação do nosso resultado se aplicará à época próxima da singularidade, podemos fazer a escolha $\alpha(\chi) = \chi$, que corresponde ao tri-espaço plano, sem que isto restrinja a validade das nossas conclusões.

Substituindo a solução para $\rho(t)$ correspondendo a estas escolhas, que é dada por [28] $\rho(t) = \frac{3}{4} t^{-2}$, obtemos

$$v^2 = \left| \frac{t^2 - \lambda}{t^2 + \lambda} \right| \quad (\text{III.43})$$

Mostraremos no que se segue como este resultado pode resolver um dos problemas fundamentais inerentes ao modelo cosmológico padrão. Estamos falando do problema do horizonte. Daremos em primeiro lugar uma breve revisão de como este problema surge devido ao fato de o modelo convencional prever uma velocidade de propagação constante e finita para um sinal arbitrário.

Num dado instante t_0 , um observador situado em $\chi = 0$ pode

receber ou ter recebido sinais emitidos num tempo $t_1 < t_0$ somente de coordenadas radiais $\chi \leq \chi_1$, onde χ_1 é a coordenada para qual o sinal chega no observador exatamente no tempo t_0 . Para sinais que se propagam ao longo de geodésicas nulas, e para simplificar em direção radial, temos $ds^2 = 0$ e a equação (III.29) se reduz a

$$dt^2 = A^2(t) d\chi^2 \quad (\text{III.44})$$

Portanto χ_1 é relacionado com t_0 e t_1 segundo

$$\left| \int_{\chi_1}^0 d\chi \right| = \left| \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{A(t)} \right|$$

ou
raio do universo
no tempo t_0
é dado por

$$\chi_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{A(t)} \quad (\text{III.45})$$

Dependendo da função $A(t)$ esta integral pode ou não convergir para $t_1 \rightarrow 0$. Quando ela converge, o universo visível do observador é limitado por, como definiu Rindler [29], um horizonte de partículas (HP). Até t_0 este observador somente pode ter recebido sinais de partículas ou galáxias comovetes que se situam numa coordenada radial inferior a $\chi_{HP}(t_0)$, onde $\chi_{HP}(t)$ é dado por

$$\chi_{HP}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{A(t')} \quad (\text{III.46})$$

Consideramos agora a radiação de fundo de aproximadamente 3°K , e supomos que ela foi emitida num tempo t_R , que coincide com o tempo quando o universo, em consequência do desacoplamento

entre matéria e radiação, se tornou transparente para a radiação eletromagnética. Podemos estimar t_R assumindo que o desacoplamento ocorreu para uma temperatura $T(t_R)$ do universo de aproximadamente $3000 \text{ }^\circ\text{K}$ [30], isto é mil vezes superior à temperatura atual $T(t_0)$. Comparando a lei de Stefan-Boltzmann $\rho \propto T^4$ com (III.42), vemos que $A(t) \propto T^{-1}(t)$, e portanto obtemos t_R através de $A(t_0)/A(t_R) \cong 1000$. Se a homogeneidade do universo é alcançada através de transporte de energia ou momento com velocidade igual ou inferior a da luz, é de se esperar que em t_R o universo é inhomogêneo em escalas superiores a $\chi_{HP}(t_R)$, pois desde a criação do universo não houve interação que pudesse homogeneizá-lo além destas escalas. Por outro lado consideramos o horizonte visível (HV) do observador, que inclui todos os eventos que aconteceram desde t_R e foram observados até t_0 . A distância máxima entre dois eventos, que se encontram dentro do horizonte visível, se dá em termos da coordenada χ por

$$\chi(t_R) = \int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{A(t)}$$

Para obter as distâncias atuais temos que multiplicar por $A(t_0)$, chegando assim a

$$d_{HV}(t_0) = A(t_0) \int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{A(t)} \quad \text{(III.47)}$$

$$d_{HP}(t_0) = A(t_0) \int_0^{t_R} \frac{dt}{A(t)} \quad \text{(III.48)}$$

Assumindo que o universo foi dominado por radiação até t_R , quando então passou a ser dominado por matéria, podemos

substituir as funções $A(t)$ correspondentes para integrar as equações (III.47) e (III.48), chegando ao resultado (30) Ver

$$d_{HP}(t_0) \cong 1/60 d_{HV}(t_0) . \quad (III.49)$$

Portanto a região correspondente àquela que em t_R foi causalmente conexa é muito menor que a parte do universo atualmente visível. Assim, apesar de não existir nenhum processo causal que pudesse explicar a homogeneidade do universo na escala do horizonte visível, a isotropia observada da radiação de fundo indica que o universo de fato é homogêneo nestas escalas. Este é o problema do horizonte.

Voltemos ao nosso resultado (III.43) para mostrar como o acoplamento não-mínimo pode evitar este problema do horizonte. Assumimos $\lambda < 0$ e de acordo com a nossa argumentação do capítulo I fazemos $\lambda = -\xi^2 t_{Pl}^2$, onde ξ é um número da ordem de um e t_{Pl} é o tempo de Planck, que corresponde ao comprimento de Planck, definido no capítulo I. Com isto a equação (III.43) assume a forma

$$v^2 = \left| \frac{t^2 + \xi^2 t_{Pl}^2}{t^2 - \xi^2 t_{Pl}^2} \right| . \quad (III.50)$$

Voltando atrás na história do universo, os fótons deixam de se propagar ao longo de geodésicas nulas, até que a sua velocidade diverge em $t = \xi t_{Pl}$, gerando assim um imenso clarão que se propaga instantaneamente pelo universo inteiro. Este clarão faz com que regiões, que dentro do modelo padrão são causalmente desconexas devido à presença de horizontes, possam entrar em contato causal. Este contato, por sua vez, é condição necessária para que fenômenos de termalização possam ocorrer,

cujo resultado é a atual isotropia do universo. Concluimos então que a nossa teoria, independentemente da fase do universo anterior a t_{pl} (sobre a qual nada precisamos saber e à qual não devemos aplicar esta teoria clássica), permite explicar a isotropia observada da radiação de fundo. Salientamos o caráter geral deste resultado, sendo que ele não é fruto de uma combinação particular das Lagrangeanas não-mínimas. Por outro lado, a escolha de $\alpha = \frac{1}{3}$ e da seção espacial plana se justifica, como já dissemos acima, pelo fato de estarmos interessados numa época do universo próxima à singularidade existente no modelo de Friedmann-Robertson-Walker.

CONCLUSÃO

Nesta tese estudamos teorias que acoplam não-minimalmente o campo eletromagnético com o campo gravitacional.

Construímos todas as Lagrangeanas possíveis, lineares no tensor de Riemann, de Weyl, de Ricci ou no escalar de curvatura, e quadráticas no potencial vetor ou no campo eletromagnético. Mostramos que existem somente sete possibilidades independentes. Argumentamos a favor da escolha do quadrado do comprimento de Planck para a constante de acoplamento que as teorias invariantes de gauge requerem.

Mostramos ainda que uma combinação particular destas Lagrangeanas possui invariância por rotações duais locais.

Obtivemos os tensores momento-energia e os vetores de Euler-Lagrange e discutimos os seus comportamentos no limite do espaço-tempo de Minkowski.

Fizemos alguns breves comentários a respeito da formulação canônica do campo eletromagnético interagindo de maneira não-mínima com a gravitação, e mostramos que, apesar de continuarmos com uma teoria que possui dois graus de liberdade,

não podemos mais associá-los aos estados de polarização transversal.

Para o estudo do problema de Cauchy mostramos como se pode construir um sistema gaussiano de coordenadas. Em seguida verificamos que o problema de Cauchy, no sentido em que ele foi anteriormente definido, é bem posto para as equações de Einstein no vácuo, para as equações de Einstein-Maxwell, para as equações que descrevem o campo escalar conforme e para aquelas que decorrem do acoplamento \mathcal{L}_1 .

No último capítulo mostramos como, a partir do acoplamento mínimo, a aproximação da ótica geométrica e o método das características conduzem aos seguintes resultados à respeito da propagação da radiação eletromagnética num espaço-tempo curvo :

- (i) os raios de luz são geodésicas nulas,
- (ii) o vetor polarização é propagado paralelamente ao longo do raio e
- (iii) o número de fótons é conservado.

Vimos como cada um destes três resultados pode deixar de ser válido quando o campo eletromagnético interage de maneira não-mínima com a gravitação. Como caso de particular interesse físico escolhemos o background de Friedmann-Robertson-Walker e uma equação de estado para o fluido que gera a curvatura que corresponde a uma época do universo próxima à singularidade existente neste modelo. Vimos que neste caso o efeito do acoplamento não-mínimo sobre a propagação da radiação é unívoco. Após ter visto a origem do problema do horizonte, um dos problemas fundamentais inerentes ao modelo cosmológico padrão,

mostramos que este efeito sobre a propagação da radiação faz com que o problema do horizonte não existe quando acoplamos o campo eletromagnético de maneira não-mínima à gravitação.

APÊNDICE A

OS TENSORES MOMENTO-ENERGIA E OS VETORES DE EULER-LAGRANGE

Neste apêndice vamos, através do princípio variacional, obter os tensores momento-energia e os vetores de Euler-Lagrange para três das sete Lagrangeanas independentes. Para as outras quatro o procedimento é absolutamente idêntico.

Assumimos o ponto de vista de que o espaço-tempo é riemanniano a priori, e portanto usaremos os símbolos de Christoffel como conexão.

Definimos o vetor de Euler-Lagrange E^μ e o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ por

$$\delta_{A_\mu} S = \int d^4x \sqrt{-g} E^\mu \delta A_\mu \quad (A1)$$

$$\delta_{g_{\mu\nu}} S = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (A2)$$

Começamos com

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu .$$
$$\delta_{A_\mu} S_2 = 2\lambda_2 \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} A_\nu \delta A_\mu \quad (A3)$$

e portanto

$$\| E^\mu_2 = 2\lambda_2 R^{\mu\nu} A_\nu . \quad (A4)$$

Para calcular o tensor momento-energia fazemos

$$\begin{aligned} \delta_{g_{\mu\nu}} S_2 &= \lambda_2 \delta_{g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} A^\sigma A_\rho g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \\ &= \lambda_2 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ A^\mu A^\nu \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} A^\mu A_\rho \delta g^{\nu\rho} + R_{\mu\nu} A^\nu A_\sigma \delta g^{\mu\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{-g}} R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \delta \sqrt{-g} \right\} \\ &= \lambda_2 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ A^\mu A^\nu \delta R_{\mu\nu} + 2R_{\mu\sigma} A^\sigma A_\nu \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\sigma\rho} A^\sigma A^\rho g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\} \quad (A5) \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$.

Para calcular a variação do tensor de Ricci usamos a identidade de Palatini ^[1]: $\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\lambda;\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\nu;\lambda}^\lambda$.

Portanto

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} A^\mu A^\nu \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} A^\mu A^\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda;\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\nu;\lambda}^\lambda) = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda} \right\} \\ &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (A^\mu A^\nu)_{;\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - (A^\mu A^\nu)_{;\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right\} \quad (A6) \end{aligned}$$

Sendo que a variação do símbolo de Christoffel é um tensor, as quantidades $A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$ e $A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são vetores, permitindo assim utilizar a seguinte relação para a divergência de um vetor arbitrário: $A^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\mu)_{,\mu}$

Usando esta identidade, podemos transformar a primeira integral numa integral de superfície. Esta, assumindo que no infinito as variações dos campos são nulas, não contribui à variação da ação.

$$\begin{aligned} &\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda} \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \right\} \\ &= \int d\Sigma_\nu \sqrt{-g} A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \int d\Sigma_\lambda \sqrt{-g} A^\mu A^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \end{aligned}$$

Na segunda integral expressamos $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ em função da variação da métrica como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\delta g_{\rho\mu;\nu} + \delta g_{\rho\nu;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\rho}) \quad (A7)$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\lambda;\mu} \quad (A8)$$

Assim, podemos escrever a segunda integral como

$$- \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (A^{\mu}A^{\nu})_{;\nu} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\lambda;\mu} - (A^{\mu}A^{\nu})_{;\lambda} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\delta g_{\rho\mu;\nu} + \delta g_{\rho\nu;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\rho}) \right\} \quad (A9)$$

que, integrando por partes, é equivalente a

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (A^{\mu}A^{\nu})_{;\nu;\mu} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\lambda} - (A^{\mu}A^{\nu})_{;\lambda;\nu} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\mu} - (A^{\mu}A^{\nu})_{;\lambda;\mu} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\nu} + (A^{\mu}A^{\nu})_{;\lambda;\rho} g^{\lambda\rho} \delta g_{\nu\mu} \right\}.$$

Usando ainda $g_{\mu\sigma} \delta g^{\sigma\nu} = -g^{\sigma\nu} \delta g_{\mu\sigma}$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} A^{\mu}A^{\nu} \delta R_{\mu\nu} &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g_{\mu\nu} (A^{\sigma}A^{\rho})_{;\sigma;\rho} - (A_{\nu}A^{\sigma})_{;\mu;\sigma} - (A^{\sigma}A_{\nu})_{;\mu;\sigma} + \square (A_{\mu}A_{\nu}) \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g_{\mu\nu} (A^{\sigma}A^{\rho})_{;\sigma;\rho} - (A^{\sigma}A_{(\mu})_{;\nu);\sigma} + \square (A_{\mu}A_{\nu}) \right\} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (A10)$$

Juntando os termos de (A5) e (A10) obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2 &= \lambda_2 \left\{ R_{(\mu\sigma} A^{\sigma} A_{\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho} A^{\sigma} A^{\rho} - \frac{1}{2} \square (A_{\mu}A_{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (A^{\sigma}A^{\rho})_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} (A^{\sigma}A_{(\mu})_{;\nu);\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (A11)$$

Passamos para o segundo exemplo que é o caso de

$$S_5 = \lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}.$$

$$\delta_{A_{\mu}} S_5 = \lambda_5 \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (F^{\mu\sigma} \delta F_{\sigma}{}^{\nu} + F_{\sigma}{}^{\nu} \delta F^{\mu\sigma}).$$

Usando a definição de $F_{\mu\nu}$ em termos de A_{μ} passamos a

$$\delta_{A_\mu} S_5 = \lambda_5 \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \left\{ F^{\mu\sigma} (\delta A_\sigma{}^{;\nu} - \delta A^\nu{}_{;\sigma}) + F_\sigma{}^\nu (\delta A^\mu{}_{;\sigma} - \delta A^\sigma{}_{;\mu}) \right\} \quad (A12)$$

e integrando novamente por partes, ficamos com

$$\delta_{A_\mu} S_5 = -\lambda_5 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma}){}^{;\nu} \delta A_\sigma - (R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma}){}_{;\sigma} \delta A^\nu + (R_{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu){}^{;\sigma} \delta A^\mu - (R_{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu){}^{;\mu} \delta A_\sigma \right\} \quad (A13)$$

$$= -2\lambda_5 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (R^{\sigma\rho} F_\sigma{}^\mu)_{;\rho} - (R^{\mu\sigma} F_{\sigma\rho})_{;\rho} \right\} \delta A_\mu.$$

$$\parallel \quad E_5^\mu = -2\lambda_5 \left\{ (R^{\sigma\rho} F_\sigma{}^\mu)_{;\rho} - (R^{\mu\sigma} F_{\sigma\rho})_{;\rho} \right\} \quad (A14)$$

Fazendo a variação da métrica obtemos

$$\begin{aligned} \delta_{g_{\mu\nu}} S_5 &= \lambda_5 \delta_{g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} F_{\alpha\sigma} F_{\rho\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\rho} \\ &= \lambda_5 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\rho \delta\sqrt{-g} + F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu \delta R_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + (2R_{\mu\sigma} F_\nu{}^\rho F_\rho{}^\sigma + R_{\sigma\rho} F^\sigma{}_\mu F^\rho{}_\nu) \delta g^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (A15)$$

Usando novamente a identidade de Palatini para o segundo termo chegamos a :

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda{}_{;\nu} - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda{}_{;\lambda}) \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right\} \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\nu} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\lambda}{}_{;\mu} - \right. \\ &\quad \left. - (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\lambda} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\delta g_{\rho\mu}{}_{;\nu} + \delta g_{\rho\nu}{}_{;\mu} - \delta g_{\mu\nu}{}_{;\rho}) \right\} \quad (A16) \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\nu}{}_{;\mu} g_{\rho\lambda} \delta g^{\lambda\rho} - (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\lambda}{}_{;\nu} g_{\rho\mu} \delta g^{\lambda\rho} \right. \\ &\quad \left. - (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\lambda}{}_{;\mu} g_{\rho\nu} \delta g^{\lambda\rho} - (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)_{;\lambda}{}_{;\rho} g^{\lambda\rho} \delta g_{\nu\mu} \right\} \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g_{\mu\nu} (F^{\alpha\sigma} F_\sigma{}^\beta)_{;\beta}{}_{;\alpha} - (F_\nu{}^\sigma F_\sigma{}^\rho)_{;\mu}{}_{;\rho} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (F^{\sigma\rho} F_{\rho\nu})_{;\mu;\sigma} + \square (F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}) \} \delta g^{\mu\nu} \\
= & - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g_{\mu\nu} (F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta})_{;\beta;\alpha} - (F_{(\nu} F_{\sigma}^{\rho)})_{;\mu);\rho} + \right. \\
& \left. + \square (F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}) \right\} \delta g^{\mu\nu} . \tag{A17}
\end{aligned}$$

Juntando os termos de (A15) e (A17) obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^3 = & \lambda_5 \left\{ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} + R_{(\mu\sigma} F_{\nu)\rho} F^{\rho\sigma} + R_{\sigma\rho} F_{\mu}^{\sigma} F_{\nu}^{\rho} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta})_{;\beta;\alpha} + \frac{1}{2} (F_{(\nu} F_{\sigma}^{\rho)})_{;\mu);\rho} - \frac{1}{2} \square (F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}) \right\} \tag{A18}
\end{aligned}$$

Como último exemplo, faremos ainda o cálculo para uma Lagrangeana que envolve a operação dual, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_7 & = \lambda_7 R^{*\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} . \\
\delta_{A_{\mu}} S_7 & = \lambda_7 \int d^4x \sqrt{-g} R^{*\alpha\beta\mu\nu} (F_{\alpha\beta} \delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F_{\alpha\beta}) \\
& = 2 \lambda_7 \int d^4x \sqrt{-g} R^{*\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} (\delta A_{\mu,\nu} - \delta A_{\nu,\mu}) \\
& = -4 \lambda_7 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} R^{*\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta})_{;\nu} \delta A_{\mu}
\end{aligned}$$

Daí segue

$$E_7^{\mu} = -4 \lambda_7 (R^{*\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta})_{;\nu} \tag{A19}$$

Para calcular $T_{\mu\nu}$ usamos a definição do dual

$$\begin{aligned}
S_7 & = \lambda_7 \int d^4x \sqrt{-g} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\sigma\rho} F_{\alpha\tau} g^{\beta\tau} = \\
& = \frac{1}{2} \lambda_7 \int d^4x R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\sigma\rho} F_{\alpha\tau} g^{\beta\tau} . \tag{A20}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\delta_{g_{\mu\nu}} S_7 & = \frac{1}{2} \lambda_7 \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\sigma\rho} F_{\alpha\tau} g^{\beta\tau} \delta R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \right. \\
& \left. + R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\sigma\rho} F_{\alpha\tau} \delta g^{\beta\tau} \right\} \tag{A21} \\
& = \lambda_7 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta} \delta R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\rho} F^{\sigma\rho} F_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\}
\end{aligned}$$

Sendo a variação do tensor de Riemann dada por

$$\delta R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu;\mu} \quad (A22)$$

calculamos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta} \delta R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} \check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta} \left\{ \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu;\mu} \right\} \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\mu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \right\} \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\nu} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\sigma\beta;\mu} + \delta g_{\sigma\mu;\beta} - \delta g_{\beta\mu;\sigma}) \right. \\ &\quad \left. - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\mu} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\sigma\beta;\nu} + \delta g_{\sigma\nu;\beta} - \delta g_{\beta\nu;\sigma}) \right\} \quad (A23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\nu;\mu} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\beta} + (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\nu;\beta} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\mu} \right. \\ &\quad \left. - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\nu;\sigma} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\beta\mu} - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\mu;\nu} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\beta} - \right. \\ &\quad \left. - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\mu;\beta} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\nu} - (\check{F}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta})_{;\mu;\sigma} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\nu\beta} \right\} \quad (A24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (\check{F}^{\sigma\rho} F_{\mu\nu})_{;\sigma;\rho} + (\check{F}^{\sigma}_{\nu} F_{\mu}^{\rho})_{;\sigma;\rho} - (\check{F}^{\sigma}_{\nu} F^{\rho}_{\mu})_{;\sigma;\rho} \right. \\ &\quad \left. - (\check{F}^{\sigma\rho} F_{\mu\nu})_{;\sigma;\rho} - (\check{F}^{\sigma}_{\nu} F_{\mu}^{\rho})_{;\sigma;\rho} - (\check{F}^{\sigma}_{\nu} F^{\rho}_{\mu})_{;\sigma;\rho} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (A25) \end{aligned}$$

O primeiro e o quarto termo são nulos por envolverem a contração de $F_{\mu\nu}$ com $\delta g^{\mu\nu}$.

Juntando os outros termos concluímos que

$$\left\| T^{\rho}_{\mu\nu} = \lambda_7 \left\{ (\check{F}^{\sigma}_{\nu} F_{\mu}^{\rho})_{;\sigma;\rho} - \frac{1}{2} R^{\alpha}_{(\mu\sigma\rho} \check{F}^{\sigma\rho} F_{\alpha\nu)} \right\} \right. \quad (A26)$$

APÊNDICE B

OS TENSORES DE RICCI E DE EINSTEIN EM COORDENADAS GAUSSIANAS

Mostraremos neste apêndice que as derivadas $g_{\mu\sigma,00}$ não aparecem nos tensores de Ricci e de Einstein. Em seguida explicitaremos a dependência destes tensores dos dados de Cauchy e das derivadas $g_{ij,00}$ num sistema gaussiano de coordenadas.

Partimos da definição do tensor de Riemann ,

$$R_{\mu\sigma\nu\rho} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} = g_{\mu\lambda} \left\{ \Gamma_{\sigma\nu,\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\rho,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\eta} \Gamma_{\rho\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right\} \quad (B1)$$

e substituímos a definição dos símbolos de Christoffel nos primeiros dois termos:

$$\begin{aligned} R_{\mu\sigma\nu\rho} &= \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left\{ g^{\lambda\tau} (g_{\tau\sigma,\nu} + g_{\tau\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\tau}) \right\} \\ &\quad - g_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ g^{\lambda\tau} (g_{\tau\sigma,\rho} + g_{\tau\rho,\sigma} - g_{\sigma\rho,\tau}) \right\} \\ &\quad + g_{\mu\lambda} \left\{ \Gamma_{\sigma\nu}^{\eta} \Gamma_{\rho\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right\} . \end{aligned} \quad (B2)$$

Usando $g_{\mu\lambda;\rho} = 0$ obtemos

$$g_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g^{\lambda\tau} = - g^{\lambda\tau} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\lambda} = - g^{\lambda\tau} (\Gamma_{\mu\rho}^{\eta} g_{\eta\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\eta} g_{\mu\eta}) \quad (B3)$$

e

$$R_{\mu\sigma\nu\rho} = \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} g^{\lambda\tau} (g_{\tau\sigma,\nu\rho} + g_{\tau\nu,\sigma\rho} - g_{\sigma\nu,\tau\rho})$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} g^{\lambda\tau} (g_{\tau\sigma,\rho\nu} + g_{\tau\rho,\sigma\nu} - g_{\sigma\rho,\tau\nu}) \\
& - (\Gamma_{\mu\rho}^{\eta} g_{\eta\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\eta} g_{\mu\eta}) \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} + (\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} g_{\eta\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\eta} g_{\mu\eta}) \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \\
& g_{\mu\lambda} \left\{ \Gamma_{\sigma\nu}^{\eta} \Gamma_{\rho\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right\}. \tag{B4}
\end{aligned}$$

Vários termos se cancelam e o que sobra é

$$\begin{aligned}
R_{\mu\sigma\nu\rho} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\sigma\rho} - g_{\sigma\nu,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\sigma\nu} + g_{\sigma\rho,\mu\nu}) \\
& g_{\eta\lambda} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\eta} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \right\}. \tag{B5}
\end{aligned}$$

Contraindo σ e ρ obtemos

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\mu\nu,\sigma\rho} - g_{\sigma\nu,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\sigma\nu} + g_{\sigma\rho,\mu\nu}) \\
& + g^{\sigma\rho} g_{\eta\lambda} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\eta} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \right\}. \tag{B6}
\end{aligned}$$

Explicitamos nesta expressão as segundas derivadas temporais

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} + \text{outros termos} \\
R_{oi} &= \frac{1}{2} (g^{00} g_{oi,00} - g^{00} g_{oi,00} - g^{j0} g_{ji,00}) + \text{o.t.} \\
&= - \frac{1}{2} g^{j0} g_{ji,00} + \text{o.t.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2} (g^{00} g_{00,00} - 2 g^{00} g_{00,00} - 2 g^{oi} g_{oi,00} + g^{00} g_{00,00} \\
& + 2 g^{oi} g_{oi,00} + g^{ij} g_{ij,00}) + \text{o.t.} \\
&= \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij,00} + \text{o.t.}
\end{aligned}$$

e encontramos que as derivadas $g_{\mu 0,00}$ não aparecem no tensor de Ricci e portanto, tampouco no tensor de Einstein.

Passamos então a um sistema gaussiano de coordenadas, isto é um sistema onde vale $g_{00} = 1$ e $g_{oi} = 0$ e explicitamos a dependência dos tensores de Ricci e de Einstein dos dados de Cauchy g_{ij} , $g_{ij,\sigma}$ e $g_{ij,\sigma k}$ e das incógnitas $g_{ij,00}$.

Partimos dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (B7)$$

e obtemos

$$\Gamma_{00}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{0\rho,0} - g_{00,\rho}) = 0$$

$$\Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\alpha,0} + g_{0\rho,\alpha} - g_{\alpha 0,\rho}) = \frac{1}{2} g^{\sigma i} g_{i\alpha,0}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\alpha 0}^0 = 0 \quad \Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2} g^{ik} g_{kj,0}$$

$$\Gamma_{\alpha 0}^{\alpha} = \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} g^{jk} g_{jk,0}$$

$$\Gamma_{ij}^c = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (g_{\sigma i,j} + g_{\sigma j,i} - g_{ij,\sigma}) = -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,0}$$

(Deixamos aqui explicitamente g^{00} por razões que ficarão claras no capítulo II).

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\sigma} (g_{\sigma j,k} + g_{\sigma k,j} - g_{jk,\sigma}) = \tilde{\Gamma}_{jk}^i$$

onde \sim se refere a grandezas calculadas dentro da superfície $x^0 = \text{cte}$.

Substituímos estas expressões na definição do tensor de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (B8)$$

Para $\mu = \nu = 0$ obtemos

$$R_{00} = \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma 0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} = \frac{1}{2} (g^{jk} g_{jk,0})_{,0} + \frac{1}{4} g^{ik} g_{kj,0} g^{jl} g_{li,0}$$

mas

$$g^{jk}_{,0} = (g^{jl} g^{km} g_{lm})_{,0} = 2 g^{jk}_{,0} + g^{jl} g^{km} g_{lm,0} \quad (B9)$$

e portanto

$$R_{00} = \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij,0} - \frac{1}{4} g^{ij} g^{kl} g_{ik,0} g_{jl,0} \equiv \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} B \quad (B10)$$

Para $\mu = 0$ e $\nu = i$ temos

$$R_{0i} = \Gamma_{0\alpha,i}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha,i}^j + \Gamma_{k0}^j \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{jk}^j \Gamma_{\alpha i}^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (g^{jk} g_{jk,o})_{,i} - \frac{1}{2} (g^{jk} g_{ki,o})_{,j} + \frac{1}{2} g^{jm} g_{mk,o} \Gamma_{ji}^k \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{km} g_{mi,o} \Gamma_{jk}^j \\
&= \frac{1}{2} \left\{ g^{jk}_{,i} g_{jk,o} + g^{jk} g_{jk,o,i} - g^{jk}_{,j} g_{ki,o} - g^{jk} g_{ki,o,j} + \right. \\
&\quad \left. + g^{jm} g_{mk,o} \Gamma_{ij}^k - g^{km} g_{mi,o} \Gamma_{jk}^j \right\}. \tag{B11}
\end{aligned}$$

Agora podemos usar

$$g^{jk}_{;i} = g^{jk}_{,i} + \Gamma_{\rho i}^j g^{\rho k} + \Gamma_{\rho i}^k g^{\rho j} = 0 \tag{B12}$$

para substituir $g^{jk}_{,i}$ e $g^{jk}_{,j}$ na equação acima, encontrando assim

$$\begin{aligned}
R_{oi} &= \frac{1}{2} \left\{ g^{jk} (g_{jk,o,i} - \Gamma_{ji}^m g_{mk,o} - \Gamma_{ji}^m g_{km,o}) \right. \\
&\quad \left. - g^{jk} (g_{ki,o,j} + \Gamma_{jk}^m g_{mi,o} + \Gamma_{ij}^m g_{km,o}) \right\} \\
R_{oi} &= \frac{1}{2} g^{jk} (D_i g_{jk,o} - D_j g_{ki,o})
\end{aligned}$$

onde D_i é a derivada covariante no subespaço $x^0 = \text{cte.}$, formado com a conexão $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$. Podemos escrever ainda

$$R_{oi} = \frac{1}{2} A_{,i} - \frac{1}{2} D^k g_{ki,o} \tag{B13}$$

onde $A = g^{jk} g_{jk,o}$.

Finalmente, para $\mu = i$ e $\nu = j$ encontramos

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma_{i\sigma,j}^\sigma - \Gamma_{ij,\sigma}^\sigma + \Gamma_{i\sigma}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\sigma - \Gamma_{ij}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \\
&= \Gamma_{ik,j}^k - \Gamma_{ij,o}^o - \Gamma_{ij,k}^k + \Gamma_{ik}^o \Gamma_{jo}^k + \Gamma_{io}^k \Gamma_{jk}^o \\
&\quad + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k - \Gamma_{ij}^o \Gamma_{\sigma k}^k - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k \\
&= \Gamma_{ik,j}^k - \Gamma_{ij,k}^k + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k + \frac{1}{2} g^{oo} g_{ij,oo} \\
&\quad - \frac{1}{4} g_{ik,o} g^{km} g_{mj,o} - \frac{1}{4} g_{jk,o} g^{km} g_{mi,o} + \frac{1}{4} g_{ij,o} g^{mn} g_{mn,o}
\end{aligned}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} - \frac{1}{2} g^{km} g_{ik,0} g_{jm,0} + \frac{1}{4} g_{ij,0} A . \quad (B14)$$

O escalar de curvatura R é dado por

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{00} g^{00} + R_{ij} g^{ij} \\ &= \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} B + \tilde{R} + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} B + \frac{1}{4} A^2 \\ R &= \tilde{R} + \frac{1}{4} A^2 - \frac{3}{4} B + C . \end{aligned} \quad (B15)$$

Para o tensor de Einstein segue:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ G_{00} &= -\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{8} C \end{aligned} \quad (B16)$$

$$G_{oi} = R_{oi} \quad (B17)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \tilde{G}_{ij} + \frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} - \frac{1}{2} g^{km} g_{ik,0} g_{jm,0} + \frac{1}{4} g_{ij,0} A \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{ij} \left(\frac{1}{4} A^2 - \frac{3}{4} B + C \right) \end{aligned} \quad (B18)$$

APÊNDICE C

DOIS LEMAS USADOS NO PROBLEMA DE CAUCHY

Seja $W_{\mu\nu}$ um campo tensorial simétrico num espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}$.

Definimos o campo tensorial conjugado por

$$W_{\mu\nu}^+ = W_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} W^\sigma{}_\sigma. \quad (C1)$$

Com esta definição temos $W^{+\sigma}{}_\sigma = -W^\sigma{}_\sigma$ e portanto

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^+ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} W^{+\sigma}{}_\sigma. \quad (C2)$$

1. LEMA

Supondo $g^{00} \neq 0$ podemos expressar as componentes mistas $W^\mu{}_\nu$ em função dos W_{ij}^+ e dos $W^\mu{}_\mu$ numa forma linear com coeficientes que são funções de $g_{\mu\nu}$.

$$W^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\nu{}^{ij} W_{ij}^+ + B^\mu{}_\nu{}^\sigma W^\sigma{}_\sigma \quad (C3)$$

Prova: Partimos de (C2), que pode ser reescrito como

$$W^\mu{}_\nu = (g^{\mu\sigma} \delta^\rho{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu g^{\sigma\rho}) W_{\sigma\rho}^+. \quad (C4)$$

Para $\mu = 0$ temos

$$W^0{}_\nu = (g^{0\sigma} \delta^\rho{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^0{}_\nu g^{\sigma\rho}) W_{\sigma\rho}^+ \quad (C5)$$

e para $\nu = i$

$$W^0_i = g^{00}W^+_{0i} = g^{0j}W^+_{ji} + g^{00}W^+_{0i} \quad (C6)$$

Daí obtemos

$$W^+_{0i} = - (g^{0j}W^+_{ji} - W^0_i) / g^{00} . \quad (C7)$$

Para $\mu = \nu = 0$ temos

$$W^0_0 = g^{00}W^+_{00} - \frac{1}{2} g^{0\rho}W^+_{\rho\rho} = \frac{1}{2} g^{00}W^+_{00} - \frac{1}{2} g^{ij}W^+_{ij} \quad (C8)$$

e portanto

$$W^+_{00} = (g^{ij}W^+_{ij} + 2W^0_0) / g^{00} . \quad (C9)$$

Agora podemos reescrever (C5) como

$$W^{\mu}_{\nu} = C^{\mu}_{\nu}{}^{ij}W^+_{ij} + C^{\mu}_{\nu}{}^i W^+_{0i} + C^{\mu}_{\nu} W^+_{00} \quad (C10)$$

e substituindo (C8) e (C10) nesta equação obtemos

$$W^{\mu}_{\nu} = C^{\mu}_{\nu}{}^{ij}W^+_{ij} + C^{\mu}_{\nu}{}^i \left\{ - (g^{0j}W^+_{ji} - W^0_i) / g^{00} \right\} + C^{\mu}_{\nu} (g^{ij}W^+_{ij} + 2W^0_0) / g^{00} \quad (C11)$$

que é da forma (C3).

2. LEMA

Seja S^4 uma região no espaço-tempo onde $g^{00} \neq 0$ e S^3 uma hipersuperfície definida por $x^0 = 0$. Então as três seguintes afirmações são equivalentes.

- (A) $W_{\mu\nu} = 0$ em S^4
 (B) $W^+_{ij} = 0$ e $W^0_{\mu} = 0$ em S^4
 (C) $W^+_{ij} = 0$ e $W^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ em S^4 e $W^0_{\mu} = 0$ em S^3

Prova:

(A) \rightarrow (B) trivial

(B) \rightarrow (A) pelo lema 1, portanto (A) e (B) são equivalentes.

(A) \rightarrow (C) trivial

Falta mostrarmos agora (C) \rightarrow (A) ou (C) \rightarrow (B):

Assumimos (C): Então, usando o lema 1, junto com a primeira condição de (C) segue

$$W^\mu_{\nu} = B^\mu_{\nu}{}^\sigma W^\sigma \quad (C12)$$

Pela segunda condição de (C) temos

$$W^\mu_{\nu;\mu} = W^\sigma_{\nu,0} + W^i_{\nu,i} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} W^\sigma_{\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} W^\mu_{\sigma} = 0 \quad (C13)$$

substituindo (C12) na equação acima chegamos à:

$$W^\sigma_{\nu,0} = E^\mu_{\nu}{}^i W^\sigma_{\mu,i} + F^\mu_{\nu}{}^\sigma W^\sigma_{\mu} \quad (C14)$$

Pela última condição de (C) W^σ_{μ} e, portanto também $W^\sigma_{\mu,i}$ se anulam.

Encontramos assim $W^\sigma_{\mu} = 0$ e $W^\sigma_{\mu,0} = 0$ em S^3 e utilizando um teorema fundamental das equações diferenciais parciais concluímos que $W^\sigma_{\mu} = 0$ em todo o espaço-tempo. (QED)

APÊNDICE D

A CONSERVAÇÃO DO TENSOR MOMENTO-ENERGIA

Mostraremos neste apêndice que a conservação do tensor momento-energia é consequência da própria definição deste e independe da validade das equações de Einstein. Embora somente faremos isto para o caso do campo vetorial, o procedimento é absolutamente idêntico no caso do campo escalar.

$T_{\mu\nu}$ é definido como a derivada funcional da ação de matéria em relação ao $g_{\mu\nu}$.

$$\delta I_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{D1})$$

Sendo a ação um escalar, é invariante sob uma transformação de coordenadas conduzindo às mudanças :

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu \\ d^4x &\longrightarrow d^4x' \\ \partial/\partial x^\mu &\longrightarrow \partial/\partial x'^\mu \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x') = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \\ g_{\mu\nu}(x) &\longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = g_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

Porém, x'^μ é uma mera variável de integração, e podemos

ressubstituí-la por x^μ . Concluímos que a ação é invariante pelas seguintes substituições :

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - \left[A'_\mu(x') - A'_\mu(x) \right]$$

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x) = g_{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} - \left[g'_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x) \right] \quad (D3)$$

Fazendo uma transformação infinitesimal $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ encontramos como variações das variáveis dinâmicas

$$\delta A_\mu(x) = - A_\nu(x) \frac{\partial \epsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu(x)$$

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = - g_{\mu\lambda}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} \epsilon^\lambda(x) \quad (D4)$$

Assumimos que a equação de movimento de A_μ é satisfeita. Portanto a ação é estacionária frente à pequenas variações de A_μ e conseqüentemente a variação da ação δI_{mat} é determinada exclusivamente por $\delta g_{\mu\nu}$:

$$\delta I_{\text{mat}} = - \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \left\{ g_{\mu\lambda} \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\nu} + g_{\lambda\nu} \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \epsilon^\lambda \right\} = 0 \quad (D5)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int d^4x \epsilon^\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T^\nu_\lambda) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \right] \quad (D6)$$

e já que os ϵ^λ são arbitrários concluímos

$$T^\nu_{\lambda,\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g}) T^\nu_\lambda - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} T^{\mu\nu} = 0 \quad (D7)$$

$$\rightarrow T^\nu_{\lambda,\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\nu_\lambda - \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\nu,\lambda}) T^{\mu\nu} = 0 \quad (D8)$$

$$\rightarrow T^\nu_{\lambda;\nu} = 0 \quad (\text{QED}) \quad (D9)$$

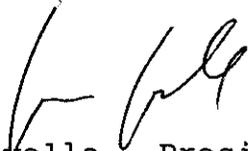
REFERÊNCIAS

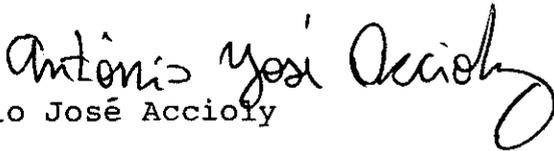
- | | | | |
|-----|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| (1) | S. Weinberg | Gravitation and Cosmology | John Wiley |
| (2) | C. W. Misner
K. S. Thorne
J. A. Wheeler | Gravitation | Freeman & Comp |
| (3) | H. Stephani | Allgemeine
Relativitätstheorie | Deut. Verlag d.
Wissenschaften |
| (4) | M. Novello
J. Salim | Non-equilibrium relativistic
cosmology | Fund. Cos. Phys.
8, 201 (1983) |
| (5) | A. R. Prasanna | A new invariant for
electromagnetic fields in
curved space-time | Phys Lett <u>37A</u>
331 (1971) |
| (6) | A. R. Prasanna | Electromagnetism and
gravitation | Lett. Nuo. Cim.
6, 420 (1973) |
| (7) | J. G. Souza
M. L. Bedran
B. Lesche | Magnetic dipole field in a
Schwarzschild metric with
nonminimal coupling | RBF <u>14</u> , 488
(1984) |
| (8) | B. Lesche
M. L. Bedran | A test of the equivalence
principle with polarized
light | RBF <u>17</u> , 100
(1987) |
| (9) | M. Novello
J. M. Salim | Nonlinear photons in
the universe | Phys Rev <u>D20</u>
377 (1979) |

"OS DIVERSOS MODOS DE ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE
ELETROMAGNETISMO E GRAVITAÇÃO: SUAS PROPRIE-
DADES GERAIS E SUAS CONSEQUÊNCIAS PARA A
PROPAGAÇÃO DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA"

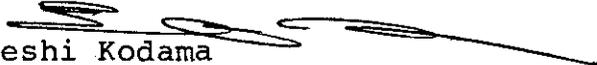
Stefan Dieter Jorda

Tese de Mestrado apresentada no Centro
Brasileiro de Pesquisas Físicas do Con-
selho Nacional de Desenvolvimento Cien-
tífico e Tecnológico, fazendo parte da
Banca Examinadora os seguintes profes-
sores:


Mario Novello - Presidente


Antonio José Acciofy


Carlos Augusto Pinto Galvão


Takeshi Kodama