

André de Lemos Velloso

CÁLCULO DO POTENCIAL DE LANCZOS PARA  
CERTAS CLASSES DE GEOMETRIAS

Tese de

**MESTRADO**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Setembro de 1987

## AGRADECIMENTOS

A Mário Novello pela orientação, e pela sua experiência e dedicação à física.

Pelas discussões, camaradagem, etc., etc., a Nelson, Renato P., Renato P., Ívano, João, Jussara, Maurício, Isaiás, Lu, Lígia, Sasse, Felipe, Nami, Salim, Filipe, Henrique, Bartô, Stefan, e a qualquer um que se ache esquecido; e também a Myriam pela paciência e psicologia, etc.

Enfim, a todos os amigos; por estarem aí.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

São demonstrados três lemas, onde o potencial de Lanczos é relacionado algebricamente com as quantidades cinemáticas obtidas de um campo de observadores definido sobre uma variedade Riemanniana quadridimensional. As condições necessárias à validade dos lemas são exibidas. Também são apresentados exemplos dos casos expostos nos lemas, onde o potencial de Lanczos é calculado explicitamente para algumas geometrias.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	pag.	1
CAPÍTULO I - NOTAÇÃO E ALGUMAS RELAÇÕES ÚTEIS		4
CAPÍTULO II - O POTENCIAL DE LANCZOS		14
CAPÍTULO III - LEMA 1		26
CAPÍTULO IV - LEMA 2		36
CAPÍTULO V - LEMA 3		49
CONCLUSÃO		61
APÊNDICE A - LISTAGEM DO PROGRAMA DE REDUCE UTILIZADO NO CÁLCULO DOS EXEMPLOS DOS LEMAS		64

## INTRODUÇÃO

Em 1962 Lanczos<sup>[1]</sup> mostrou que em um espaço Riemanniano de quatro dimensões, o tensor de Weyl (obtido ao separar-se o tensor de curvatura em uma parte dependente do tensor de Ricci, o traço do tensor de Riemann, e outra, precisamente o tensor de Weyl, cujos traços são nulos), podia ser derivado de um outro tensor, de ordem 3, o chamado potencial de Lanczos. A existência deste potencial para uma geometria Riemanniana quadridimensional qualquer foi demonstrada formalmente por Bampi e Caviglia sómente em 1983<sup>[2]</sup>.

Uma das características do tensor de Lanczos é que, por ser um potencial para o tensor de Weyl, a sua relação com o tensor métrico do espaço-tempo é não local, devendo ser expressa em termos de integrais. A falta de relações envolvendo diretamente o potencial de Lanczos com outras quantidades geométricas, é um dos fatores que contribuiu para o pouco interesse despertado pelo seu estudo até o começo da década de 80.

Neste trabalho obtemos, para certas classes de métricas, relações algébricas entre o potencial e os parâmetros cinemáticos ligados a um campo de observadores arbitrário,

definido sobre a variedade, eliminando desta forma, a necessidade de se integrar equações diferenciais. Assim, além de permitir a obtenção da forma explícita para o tensor de Lanczos nesses casos, estes resultados dão ensejo a uma possível interpretação física para este potencial.

É conveniente ressaltar que as relações obtidas são de caráter geral, puramente geométricas, não nos restringindo a assumir como hipótese nenhuma equação dinâmica, ligada a uma particular teoria física satisfeita pela métrica. No entanto veremos a necessidade de impor certas condições, também puramente geométricas, para que aquelas relações sejam válidas. Ademais, o campo de observadores não tem, necessariamente, qualquer relação com um eventual conteúdo material, podendo mesmo ser definido em espaços vazios.

O trabalho procura ser auto-suficiente, apresentando de forma completa a notação utilizada, bem como algumas relações que tem sido pouco empregadas até aqui, e que no entanto, são essenciais em nosso trabalho (referir-se a [7] ou [8] para as demonstrações). Os resultados são enunciados como Lemas, e demonstrados.

No primeiro capítulo apresentamos as notações e convenções utilizadas na tese; é feita a separação do tensor métrico induzida pelo campo de observadores, são definidos os parâmetros cinemáticos, e exibidas as equações, dinâmicas e de

vínculo, que eles devem satisfazer<sup>[7]-[12]</sup>.

No capítulo II, o potencial e o formalismo utilizado por Lanczos para a sua dedução, suas propriedades, e a forma do potencial para a aproximação de campos fracos são resumidos<sup>[1]-[6]</sup>. Também neste capítulo são apresentadas as relações entre o tensor de Lanczos e os parâmetros cinemáticos, formalizadas nos Lemas que se seguem<sup>[5]</sup>, bem como algumas definições e esclarecimentos necessários às demonstrações.

Nos capítulos 3, 4, e 5 são enunciados e demonstrados os Lemas. Exibimos a seguir alguns exemplos de potenciais de Lanczos para soluções das equações de Einstein, dentre as métricas mais conhecidas e estudadas. Isto nos assegura que, embora nossos Lemas não sejam completamente gerais, as restrições impostas pelas hipóteses feitas não diminui o interesse dos resultados.

Finalmente, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras do trabalho.

## CAPÍTULO I

### NOTAÇÃO E ALGUMAS RELAÇÕES ÚTEIS

Nesta tese trabalharemos em espaços-tempo pseudo-Riemannianos, cuja métrica terá uma assinatura: ( + - - - ). Utilizaremos a representação de sistema de coordenadas, sendo que os índices gregos ( $\alpha, \beta, \text{etc.}$ ) variam de 0 a 3 e os latinos (i, j, etc.) de 1 a 3.

A antissimetrização de um tensor será representada por:

$$A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu} \quad (1.1)$$

Enquanto que a simetrização, é dada por:

$$A_{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} \quad (1.2)$$

A derivada covariante será denotada por um ponto-e-vírgula (;).

O tensor completamente antissimétrico é definido, em relação ao símbolo de Levi-Civita, da forma:



$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (1.3)$$

Sendo  $g$  o determinante da métrica.

Temos algumas propriedades satisfeitas por  $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ , a saber:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\sigma} \eta^{\mu\nu\rho\sigma} = -\delta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho} \quad (1.4a)$$

$$\eta_{\alpha\beta\lambda\sigma} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = -2\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \quad (1.4b)$$

$$\eta_{\alpha\rho\lambda\sigma} \eta^{\mu\rho\lambda\sigma} = -6\delta_{\alpha}^{\mu} \quad (1.4c)$$

$$\eta_{\epsilon\rho\lambda\sigma} \eta^{\epsilon\rho\lambda\sigma} = -24 \quad (1.4d)$$

O dual de um tensor, denotado por uma estrela: \*, é definido como:

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (1.5)$$

Quando o tensor tiver mais do que dois índices e os duais em relação a diferentes índices forem diferentes, indicaremos os índices concernentes colocando a estrela sobre eles.

O tensor de Riemann é escrito em função das conexões do seguinte modo:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma_{\beta\mu, \nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu, \mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \quad (1.6)$$

E o tensor de Ricci é a contração de  $\alpha$  e  $\mu$  acima:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda, \nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu, \lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \quad (1.7)$$

Neste espaço-tempo podemos definir um campo de observadores  $V_{\alpha}$ , normalizado, de modo que, em cada ponto da variedade, o tensor métrico pode ser separado em uma parte ortogonal e uma parte paralela a  $V_{\alpha}$ :

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + V_{\mu}V_{\nu} \quad (1.8)$$

Com:

$$h_{\mu\nu}V^{\mu} = 0 \quad (1.9)$$

O tensor  $h_{\mu\nu}$  é um tensor de projeção, que em cada ponto do espaço-tempo, projeta um vetor pertencente ao espaço tangente neste ponto no espaço vetorial ortogonal ao vetor  $V_{\alpha}$ . É fácil verificar que  $h^2 = h$ , isto é, a projeção do projetor é igual a ele próprio:

$$h_{\alpha\beta}h^{\beta\nu} = (g_{\alpha\beta} - V_{\alpha}V_{\beta})(g^{\beta\nu} - V^{\beta}V_{\nu}) = g_{\alpha\nu} - V_{\alpha}V_{\nu} = h_{\alpha\nu} \quad (1.10)$$

Este tensor é também a métrica da hipersuperfície tipo espacial tri-dimensional ortogonal ao campo  $V_\mu$ . Sendo o elemento de distância  $ds^2$  escrito como uma soma de uma distância espacial dada por  $dl^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  com o intervalo de tempo  $V_\mu dx^\mu$ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dl^2 + (V_\mu dx^\mu)^2 \quad (1.11)$$

Note-se que isto é válido apenas localmente, uma vez que em geral a hipersuperfície dada pelo campo  $V_\mu$  só pode ser definida em uma certa vizinhança da variedade.

Um ponto sobre um objeto geométrico representa a derivada na direção de  $V_\mu$ . Se  $G$  é um objeto geométrico qualquer, então:

$$\hat{G} \equiv G;_{\sigma} V^\sigma \quad (1.12)$$

O tensor de Weyl, obtido a partir do tensor de Riemann ao subtrairmos os traços, é definido por:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}\{R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}\} + \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (1.13)$$

Com:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\mu}\varepsilon_{\beta\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu}\varepsilon_{\beta\mu} \quad (1.14)$$

$W_{\alpha\beta\mu\nu}$  pode ser separado, pelo campo  $V_\mu$ , em suas partes "elétrica" ( $E_{\mu\nu}$ ) e "magnética" ( $H_{\mu\nu}$ ):

$$E_{\mu\nu} = -W_{\mu\alpha\nu\beta} V^{\alpha\nu\beta} \quad (1.15)$$

$$H_{\mu\nu} = -\overset{*}{W}_{\mu\alpha\nu\beta} V^{\alpha\nu\beta} \quad (1.16)$$

Note que para o tensor de Weyl, o dual em relação aos dois primeiros ou aos dois últimos índices é indiferente. Isto se deve às simetrias de  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  (as mesmas do tensor de Riemann) e ao fato de os seus traços serem nulos.

Os tensores  $E_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$  pertencem à hipersuperfície tipo espaço dada pelo projetor  $h_{\mu\nu}$ , obedecendo às propriedades:

$$E_{\mu\nu} V^\mu = 0 \quad (1.17a)$$

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu} \quad (1.17b)$$

$$E^\mu{}_\mu = 0 \quad (1.17c)$$

$$H_{\mu\nu} V^\mu = 0 \quad (1.18a)$$

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu} \quad (1.18b)$$

$$H^\mu{}_\mu = 0 \quad (1.18c)$$

Um tensor  $B_{\mu\nu}$  de ordem 2, arbitrário, pode ser projetado paralelamente e ortogonalmente a  $V^\mu$  de modo a ser escrito em termos de suas componentes irreduzíveis:

$$\rho = B_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (1.19a)$$

$$q_\alpha = B_{\mu\nu} h^\mu_\alpha V^\nu \quad (1.19b)$$

$$\bar{q}_\beta = B_{\mu\nu} V^\mu h^\nu_\beta \quad (1.19c)$$

$$p = B_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (1.19d)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = B_{\mu\nu} h^\mu_\alpha h^\nu_\beta - \frac{1}{3} p h_{\alpha\beta} \quad (1.19e)$$

Dependendo das propriedades de simetria ou ortogonalidade em relação a  $V^\mu$  que o tensor  $B_{\mu\nu}$  tenha, uma ou mais destas quantidades poderão ser nulas, ou dependentes umas das outras.

Os parâmetros cinemáticos que descrevem o comportamento do fluido composto pelos observadores com velocidade  $V_\mu$ , são as partes irreduzíveis da derivada covariante do campo de observadores ( $V_{\mu;\nu}$ ). A aceleração com relação ao estado de queda livre é:

$$A_\alpha = \hat{V}_\alpha \equiv V_{\alpha;\sigma} V^\sigma \quad (1.20)$$

Os parâmetros cinemáticos de cisalhamento, ou "shear" ( $\sigma_{\mu\nu}$ ), rotação ( $\omega_{\mu\nu}$ ), e expansão ( $\theta$ ) são obtidos por sua vez, ao

projetarmos  $V_{\mu;\nu}$  segundo  $h_{\mu\nu}$ :

$$Q_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}V_{\mu;\nu} = h_{\beta}^{\nu}V_{\mu;\nu} \quad (1.21)$$

$$\Theta \equiv Q^{\alpha}_{\alpha} \quad (1.22)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}Q_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \quad (1.23)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}Q_{[\alpha\beta]} \quad (1.24)$$

Podemos reobter  $V_{\alpha;\beta}$ :

$$V_{\mu;\nu} = A_{\mu}V_{\nu} + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{\Theta}{3}h_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

Estas quantidades obedecem às propriedades de ortogonalidade:

$$A_{\mu}V^{\mu} = 0 \quad (1.26)$$

$$\omega_{\mu\nu}V^{\mu} = 0 \quad (1.27)$$

$$\sigma_{\mu\nu}V^{\mu} = 0 \quad (1.28)$$

Podemos ainda definir um vetor de rotação:

$$\omega^{\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}V_{\mu} \quad (1.29)$$

Onde temos as relações:

$$\omega^{\mu\nu}{}_{\mu} = 0 \quad (1.30a)$$

$$\omega^{\mu}{}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.30b)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^{\rho\nu\sigma} \quad (1.30c)$$

Temos ainda:

$$\omega_{\mu}{}^{\epsilon}\omega_{\epsilon\nu} = -\frac{1}{2}\omega^2 h_{\mu\nu} - \omega_{\mu}\omega_{\nu} \quad (1.31)$$

Onde  $\omega^2$  é dado por:

$$\omega^2 = \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = -2\omega^{\mu}{}_{\mu} \quad (1.32)$$

Do mesmo modo, os quadrados da aceleração e do cisalhamento são definidos pelas expressões:

$$A^2 = A^{\mu}A_{\mu} \quad (1.33)$$

$$\sigma^2 = \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Os parâmetros cinemáticos acima obedecem a três equações dinâmicas e a três equações de vínculo. As equações dinâmicas são:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + \sigma^2 - \omega^2 - A^\mu{}_{;\mu} = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \quad (\text{equação de evolução de } \theta, \text{ ou equação de Raychaudhuri}) \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} & h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 - \sigma^2 + A^\lambda{}_{;\lambda} \right\} + A_\alpha A_\beta + \\ & - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu A_{\mu;\nu} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^\epsilon V^\nu + \\ & - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta} \quad (\text{equação de evolução de } \sigma) \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} & h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu A_{\mu;\nu} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta + \\ & - \sigma_{\beta\mu} \omega^\mu{}_\alpha = 0 \quad (\text{equação de evolução de } \omega) \end{aligned} \quad (1.37)$$

As equações de vínculo são:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \theta_{;\mu} h^\mu{}_\lambda - h^\beta{}_\lambda (\sigma^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta)_{;\alpha} - A^\alpha (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = \\ & = R_{\mu\alpha} V^\mu h^\alpha{}_\lambda \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\omega^\lambda{}_{;\lambda} + 2\omega^\alpha A_\alpha = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{2} h^\epsilon{}_\lambda (\lambda h^\alpha{}_\mu) \eta_\epsilon{}^{\beta\rho\nu} V_\nu (\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta})_{;\rho} - A(\lambda\omega_\mu) = -H_{\lambda\mu} \quad (1.40)$$

Nos capítulos 3, 4, e 5 é calculado explicitamente, como exemplo dos lemas que demonstraremos, o potencial de Lanczos para métricas que são soluções das equações de Einstein:



$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.41)$$

Onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica, e  $T_{\mu\nu}$  o tensor momento-energia, que também pode ser separado em suas partes irreduzíveis segundo (1.19). Note que, por ser simétrico, temos  $q_\alpha = \bar{q}_\alpha$ , o chamado fluxo de calor. Os outros termos são: a densidade de energia ( $\rho$ ), a pressão isotrópica ( $p$ ), e a pressão anisotrópica ( $\pi_{\mu\nu}$ ).

Usando as equações de Einstein e a separação de  $T_{\mu\nu}$ , as equações (1.36) e (1.38) são re-escritas como:

$$\begin{aligned} & h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 - \sigma^2 + A^\lambda{}_{;\lambda} \right\} + A_\alpha A_\beta + \\ & - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu A_{\mu;\nu} + \frac{2\theta}{3} \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^\epsilon V^\nu + \\ & - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta} = -E_{\mu\nu} - \pi_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\frac{2\theta}{3}{}_{,\mu} h^\mu{}_\lambda - h^\beta{}_\lambda (\sigma^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta)_{;\alpha} - A^\alpha (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = -q_\nu \quad (1.43)$$

## CAPÍTULO II

### O POTENCIAL DE LANCZOS

O potencial para o tensor de Weyl foi introduzido por Lanczos em um artigo de 1962<sup>[1]</sup> a partir de um princípio variacional em que este potencial surgia como um momento canonicamente conjugado ao duplo dual do tensor de Riemann ( $R_{\alpha\beta\mu\nu}^*$ ).

A idéia de Lanczos consistia em variar uma lagrangiana, que fosse função tanto da métrica quanto de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}^*$ , somada aos multiplicadores de Lagrange associados às variáveis canônicas (os momentos canonicamente conjugados) de modo a obter a lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \mathcal{L}(R_{\alpha\beta\mu\nu}^*, g_{\alpha\beta}) + L_{\alpha\beta\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}^*{}_{;\nu} + P_{\alpha}{}^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \{\alpha_{\mu\nu}\}) \\ & + \rho^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - F(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Onde  $L_{\alpha\beta\mu}$  obedece às seguintes relações de simetria:

$$L_{\alpha\beta\mu} = L_{\beta\alpha\mu} \quad (2.2a)$$

$$L_{\alpha\beta\mu} + L_{\beta\mu\alpha} + L_{\mu\alpha\beta} = 0 \quad (2.2b)$$

E  $F(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)$  é a expressão do tensor de Ricci em função da conexões:

$$F(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = \Gamma_{\mu\lambda, \nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu, \lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \equiv R_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

A variação de  $\mathcal{L}'$  em relação a  $R^{\alpha\beta\mu\nu}$  nos dá a equação:

$$\llbracket \partial\mathcal{L}'/\partial R^{\alpha\beta\mu\nu} \rrbracket = \llbracket L_{\alpha\beta\mu; \nu} + Q_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - q g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \rrbracket \quad (2.4)$$

Onde  $Q_{\alpha\mu}$  e  $q$  são dados por:

$$P_{\alpha\mu} = Q_{\alpha\mu} + q g_{\alpha\mu} \quad (2.5a)$$

$$Q^\mu{}_\mu = 0 \quad (2.5b)$$

E os colchetes  $\llbracket \rrbracket$  indicam a operação de simetrização:

$$\begin{aligned} \llbracket B_{\alpha\beta\mu\nu} \rrbracket = & \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta\mu\nu} + B_{\mu\nu\alpha\beta} + B_{\beta\alpha\nu\mu} + B_{\nu\mu\beta\alpha} - B_{\beta\alpha\mu\nu} + \\ & - B_{\mu\nu\beta\alpha} - B_{\alpha\beta\nu\mu} - B_{\nu\mu\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lanczos a seguir toma como a lagrangiana  $\mathcal{L}(R^{\alpha\beta\mu\nu}, g_{\alpha\beta})$  um dos invariantes topológicos da métrica, ou seja, um escalar, construído a partir do tensor de curvatura, cuja ação é uma

integral de superfície, de modo que a variação desta ação, mantendo fixos os extremos, se anula. As equações de Euler-Lagrange são, então, identidades. O invariante usado por Lanczos é:

$$\mathcal{L} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.7)$$

Realizando então a variação na equação (2.7) e substituindo em (2.4) temos:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \mathbb{I}L_{\alpha\beta\mu;\nu} + Q_{\alpha\mu}\xi_{\beta\nu} - q\xi_{\alpha\mu}\xi_{\beta\nu}\mathbb{I} \quad (2.8)$$

Contraíndo  $\alpha$  e  $\beta$  temos:

$$R_{\alpha\mu} = L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha} + 2Q_{\alpha\mu} - 6q\xi_{\alpha\mu} \quad (2.9)$$

Onde  $L_{\alpha\mu}$  é dado por:

$$L_{\alpha\mu} \equiv L_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu;\sigma} - L_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\lambda;\mu} \quad (2.10)$$

Tomando o traço obtemos:

$$R = 24q \quad (2.11)$$

Substituindo estas relações para  $q$  e  $Q_{\alpha\mu}$  na equação (2.8), obtemos finalmente:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = \llbracket L_{\alpha\beta\mu;\nu} - \frac{1}{2}(L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha})g_{\beta\nu} \rrbracket + \frac{2L^{\sigma\lambda}}{3}\sigma_{;\lambda}\xi_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.12)$$

Equação que nos dá o tensor de Weyl como uma simetrização da derivada do potencial de Lanczos ( $L_{\alpha\beta\mu}$ ).

Como Lanczos também frisou, o nº de equações dado por (2.12) (10 equações) não é suficiente para determinar completamente as 20 componentes de  $L_{\alpha\beta\mu}$ , que, visto como um potencial para o tensor de Weyl, tem 10 componentes a serem determinadas arbitrariamente. Pode-se mostrar facilmente que o traço do potencial de Lanczos não participa na determinação do tensor de Weyl segundo (2.12). Suponha a seguinte transformação do tensor de Lanczos:

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\mu} = L_{\alpha\beta\mu} + M_{\alpha}g_{\beta\mu} - M_{\beta}g_{\alpha\mu} \quad (2.13)$$

Tomando o traço desta equação:

$$\tilde{L}_{\alpha} = L_{\alpha} + 3M_{\alpha} \quad (2.14)$$

Onde:

$$L_\alpha = L_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu} \quad (2.15)$$

Logo:

$$M_\alpha = \frac{1}{3}(\tilde{L}_\alpha - L_\alpha) \quad (2.16)$$

De modo que a transformação (2.13) permite modificar arbitrariamente o traço do tensor de Lanczos. Basta então mostrar que o tensor de Weyl calculado a partir de  $\tilde{L}_{\alpha\beta\mu}$  é igual ao calculado de  $L_{\alpha\beta\mu}$ :

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\mu;\nu} = L_{\alpha\beta\mu;\nu} + M_{\alpha;\nu}\xi_{\beta\mu} - M_{\beta;\nu}\xi_{\alpha\mu} \quad (2.17a)$$

$$\tilde{L}_{\alpha\mu} = L_{\alpha\mu} - 2M_{\alpha;\mu} - M^\sigma{}_{;\sigma}\xi_{\alpha\mu} \quad (2.17b)$$

$$\tilde{L}^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda} = L^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda} - 6M^\sigma{}_{;\sigma} \quad (2.17c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + [M_{\alpha;\nu}\xi_{\beta\mu} - M_{\beta;\nu}\xi_{\alpha\mu} - (M_{(\nu;\alpha)} + \\ - M^\sigma{}_{;\sigma}\xi_{\alpha\nu})\xi_{\beta\mu}] - 4M^\sigma{}_{;\sigma}\xi_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.17d)$$

Temos então o que chamaremos de "Liberdades de Gauge" para o tensor  $L_{\alpha\beta\mu}$ .

As seis componentes restantes estão relacionadas com a divergência do potencial de Lanczos (constituindo a chamada "gauge da divergência"):

$$D_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{;\sigma} \quad (2.18)$$

Não é possível a determinação da transformação desta gauge localmente, uma vez que a equação (2.18) não é algébrica, mas diferencial. Para demonstrar que as quantidades  $D_{\alpha\beta}$  constituem realmente graus de liberdade extras, é preciso mostrar a compatibilidade das equações (2.18) e (2.12), para qualquer tensor antissimétrico  $D_{\alpha\beta}$ . Esta demonstração está feita na referência [2].

Para que o potencial ficasse completamente determinado, Lanczos escolheu condições de gauge que anulam o traço e a divergência de  $L_{\alpha\beta\mu}$  (a "gauge de Lanczos"):

$$L_{\alpha} = 0 = D_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Obtendo então 20 equações para as 20 componentes independentes de  $L_{\alpha\beta\mu}$ .

Uma prova mais rigorosa da existência de um potencial  $L_{\alpha\beta\mu}$  para um tensor qualquer, possuindo as mesmas simetrias do tensor de Weyl (incluindo a ausência de traço) foi apresentada por Bampi e Caviglia<sup>[2]</sup>. Neste mesmo artigo, os autores demonstram que também o tensor de Riemann, em certos casos particulares, pode ser derivado de um tensor de 3ª ordem (usando, obviamente, uma outra expressão). Como, no momento estamos

interessados apenas no resultado de Lanczos, não nos preocuparemos com este outro potencial.

### APROXIMAÇÃO DE CAMPOS FRACOS

No mesmo artigo, já mencionado<sup>[1]</sup>, Lanczos calculou explicitamente  $L_{\alpha\beta\mu}$  para a aproximação de campos gravitacionais fracos, obtendo o resultado:

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{4} \{ \varphi_{\alpha\mu, \beta} - \varphi_{\beta\mu, \alpha} - \frac{1}{6} (\varphi_{, \beta} \delta_{\alpha\mu} + \varphi_{, \alpha} \delta_{\beta\mu}) \} \quad (2.20)$$

Onde o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

Com a condição de gauge sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ :

$$\varphi_{\alpha^{\mu}, \mu} - \frac{1}{2} \varphi_{, \alpha} = 0 \quad (2.22)$$

E  $\varphi$  dado por:

$$\varphi = \varphi^{\mu}_{\mu} \quad (2.23)$$



Observe que o potencial de Lanczos dado por (2.20) já está na gauge algébrica de Lanczos:

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu} &= \frac{1}{4}\{\varphi_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\mu} - \varphi_{,\alpha} - \frac{1}{6}(\varphi_{,\alpha} - 4\varphi_{,\alpha})\} = \\
 &= \frac{1}{2}\{\varphi_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\mu} - \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

### O POTENCIAL DE LANCZOS RELACIONADO COM UM CAMPO DE OBSERVADORES

Os Lemas que serão demonstrados nos três próximos capítulos fornecem um procedimento para a obtenção do tensor de Lanczos em certas classes de espaços-tempo.

Ao contrário do método direto para a obtenção do potencial, no qual é necessário resolver um sistema de equações diferenciais dado por (2.12), este nosso procedimento relaciona  $L_{\alpha\beta\mu}$  algebricamente com as quantidades obtidas ao derivarmos um campo  $V_{\mu}$ , unitário, definidas no capítulo I.

Na relação que demonstramos existir entre o potencial de Lanczos e os parâmetros cinemáticos definidos em (1.20), (1.22), (1.23) e (1.24), devemos levar em conta que  $L_{\alpha\beta\mu}$  é um objeto geométrico de dimensão do inverso do comprimento, uma vez

que a sua derivada tem que ter a mesma dimensão do tensor de Weyl. Esta consideração elimina termos quadráticos nos parâmetros cinemáticos, na expressão de  $L_{\alpha\beta\mu}$ , uma vez que tratando-se de uma questão puramente geométrica, não temos constantes dimensionais disponíveis.

Assim, levando-se em conta as simetrias do potencial, e limitando-nos aos tensores:  $A_\mu$ ,  $\sigma_{\mu\nu}$ ,  $\omega_{\mu\nu}$ , e ainda  $V_\mu$  e  $h_{\mu\nu}$ , segue-se que a expressão geral mais simples deve ser dada por:

$$L_{\alpha\beta\mu} = k_1\{A_\alpha V_\beta V_\mu - A_\beta V_\alpha V_\mu\} + k_2\{\sigma_{\alpha\mu} V_\beta - \sigma_{\beta\mu} V_\alpha\} + k_3\{\omega_{\alpha\beta} V_\mu + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\mu} V_\beta - \omega_{\beta\mu} V_\alpha)\} \quad (2.25)$$

Poderíamos acrescentar ainda os termos:

$$A_{\alpha\beta\mu} = k_4\{A_\alpha h_{\beta\mu} - A_\beta h_{\alpha\mu}\} \quad (2.26)$$

e

$$B_{\alpha\beta\mu} = k_5\theta\{V_\alpha h_{\beta\mu} - V_\beta h_{\alpha\mu}\} \quad (2.27)$$

Onde  $k_1$ ,  $k_2$ , etc. são constantes.

No entanto uma simples transformação de gauge dada pela equação (2.13), pode eliminar estes termos, apenas alterando o valor da constante  $k_1$ , no caso (2.26). Como a forma (2.25) é a

mais simples, trabalharemos com ela.

Examinaremos a validade da equação (2.25) nos casos em que apenas uma das constantes é não nula, estabelecendo as hipóteses em que cada Lema é aplicável. Uma das hipóteses é comum a todos eles: o tensor de Ricci do espaço-tempo em questão deve satisfazer a:

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.28)$$

Esta condição, apesar de puramente geométrica, pode ser traduzida, no contexto das equações de Einstein, como a imposição de que a pressão anisotrópica se anule, não excluindo portanto, a maioria dos casos mais conhecidos e estudados.

A importância da hipótese (2.28) provém do fato de que o tensor de Weyl, quando expresso em função dos parâmetros cinemáticos, depende explicitamente de  $\pi_{\mu\nu}$  (ou antes, de  $h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} R_{\mu\nu} - (1/3)R_{\mu\nu} h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta}$ ). Por outro lado, se quisermos que o tensor de Lanczos seja função apenas destes parâmetros,  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  não pode exibir esta dependência, implicando em (2.28).

A equação (1.42) que expressa a parte elétrica do tensor de Weyl como uma combinação dos parâmetros cinemáticos toma a forma:

$$\begin{aligned}
& h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 - \sigma^2 + A^{\lambda}{}_{;\lambda} \right\} + A_{\alpha} A_{\beta} + \\
- \frac{1}{2} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} A_{\mu;\nu} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}{}_{\beta} - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = -E_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Já a equação que fornece a parte magnética não é alterada pela hipótese (2.28).

Assim, de agora em diante, quando estivermos tratando de um espaço-tempo, estará implícito que se trata de uma variedade Riemanniana onde a equação (2.29) deve ser satisfeita.

Nas demonstrações dos Lemas iremos diferenciar as quantidades, como o tensor de Weyl e suas projeções, calculadas pela fórmula (2.12) das obtidas diretamente da curvatura do espaço-tempo por uma barra: Os tensores barrados serão os calculados utilizando-se o potencial de Lanczos.

A equação de Lanczos (2.12), será dividida em partes para facilitar o cálculo de  $\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ , a saber:

$$\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = S_{\alpha\beta\mu\nu} + T_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{3} L^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda} g_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2.30}$$

Onde:

$$S_{\alpha\beta\mu\nu} = L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} + L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta\mu\nu} = & \frac{1}{2} \{ (L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha}) g_{\beta\mu} + (L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta}) g_{\alpha\nu} + \\
- (L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha}) g_{\beta\nu} - (L_{\beta\nu} + L_{\nu\beta}) g_{\alpha\mu} \}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Os potenciais de Lanczos que exibimos como exemplos dos Lemas foram calculados em computador, utilizando a linguagem algébrica REDUCE. O programa, cuja listagem está no apêndice A, não está otimizado, tendo como objetivo calcular  $L_{\alpha\beta\mu}$ , e mostrar que ele é realmente um potencial para o tensor de Weyl.

As dados do programa são as componentes do tensor métrico e o campo de velocidades escolhido, enquanto ele fornece, como resultado do cálculo, a expressão algébrica para os parâmetros cinemáticos, o tensor de Lanczos, seu traço e sua divergência, e  $\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ . A expressão utilizada para calcular o potencial de Lanczos é a fórmula geral (2.25), incluindo os termos de gauge (2.26) e (2.27).

## CAPÍTULO III

### LEMA 1

Examinaremos em primeiro lugar o caso de um espaço-tempo que, obedecendo à equação (2.28), permite que sobre ele se defina um campo de observadores  $V^\mu$  cujos cisalhamento e rotação se anulam. Para a sua demonstração, consideremos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO: Seja um espaço-tempo onde a equação (2.28) é válida, e onde é possível definir um campo de observadores  $V^\mu$  tal que:

$$V_{\mu;\nu} = A_\mu V_\nu + \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Então a parte magnética do tensor de Weyl para este espaço-tempo é nula.

A demonstração é trivial. Basta notar que, sob esta hipótese o membro esquerdo da equação (1.40) se anula:

$$-H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\epsilon} (\lambda h^{\alpha}_{\mu}) \eta_{\epsilon}^{\beta\rho\nu} V_{\nu} (\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}); \rho - A(\lambda\omega_{\mu}) = 0 \quad (3.2)$$

Enunciemos, então, o lema:

LEMA 1: Seja um espaço-tempo cujo tensor de Ricci , satisfaz a equação (2.28), e onde está definido um campo de observadores tal que:

$$V_{\mu}; \nu = A_{\mu} V_{\nu} + \frac{\Theta h_{\mu\nu}}{3} \quad (3.3)$$

Então, a menos de uma transformação de gauge, o seu potencial de Lanczos é dado por:

$$L_{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha} V_{\beta} V_{\mu} - A_{\beta} V_{\alpha} V_{\mu} \quad (3.4)$$

A demonstração é direta: calculamos as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl usando a fórmula acima para o tensor de Lanczos, comparando a seguir com a expressão dada pela equação de evolução do cisalhamento (para  $E_{\mu\nu}$ ), e com o resultado da proposição. Nas hipóteses do lema, a equação (2.29) fornece  $E_{\mu\nu}$  como:

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} h_{\mu\nu} A^{\lambda}; \lambda - A_{\mu} A_{\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} A(\alpha; \beta) \quad (3.5)$$

Nas contas a seguir são utilizadas duas identidades relacionando as projeções da derivada covariante de  $A_\mu$  na direção de  $V^\mu$  com o próprio vetor aceleração, válidas se for considerada a hipótese (3.1). Derivando a equação  $A_\beta V^\beta = 0$  :

$$0 = A_{\beta;\nu} V^\beta + A_\beta V^\beta{}_{;\nu} = A_{\beta;\nu} V^\beta + A_\beta A^\beta V_\nu + \frac{\Theta h^\beta{}_\nu A_\beta}{3} \quad (3.6)$$

Logo:

$$A_{\beta;\nu} V^\beta = -A^2 V_\nu - \frac{\Theta A_\nu}{3} \quad (3.7)$$

Contraíndo novamente com  $V^\nu$ :

$$A_{\beta;\nu} V^\beta V^\nu \equiv \dot{A}_\beta V^\beta = -A^2 \quad (3.8)$$

Derivando agora o tensor de Lanczos em (3.2), temos:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\mu;\nu} &= (A_{\alpha;\nu} V_\beta - A_{\beta;\nu} V_\alpha) V_\mu + \frac{\Theta}{3} (A_\alpha h_{\beta\nu} - A_\beta h_{\alpha\nu}) V_\mu + \\ &+ (A_\alpha V_\beta - A_\beta V_\alpha) A_{\mu\nu} + \frac{\Theta}{3} (A_\alpha V_\beta - A_\beta V_\alpha) h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.9)$$

O tensor de ordem 2  $L_{\alpha\mu}$  é dado pela expressão:



$$L_{\alpha\mu} = L_{\alpha}^{\sigma}{}_{\mu;\sigma} - L_{\alpha}^{\lambda}{}_{\lambda;\mu} = \dot{A}_{\alpha}V_{\mu} + \frac{2\theta A_{\alpha}V_{\mu}}{3} + A_{\alpha}A_{\mu} +$$

$$- A^{\sigma}{}_{;\sigma}V_{\alpha}V_{\mu} - \frac{\theta V_{\alpha}A_{\mu}}{3} - A_{\alpha;\mu} \quad (3.10)$$

Cuja simetrização resulta:

$$L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha} = \dot{A}_{\alpha}V_{\mu} + \dot{A}_{\mu}V_{\alpha} + \frac{\theta(A_{\alpha}V_{\mu} + A_{\mu}V_{\alpha})}{3} + 2A_{\alpha}A_{\mu} +$$

$$- 2A^{\sigma}{}_{;\sigma}V_{\alpha}V_{\mu} - A_{\alpha;\mu} - A_{\mu;\alpha} \quad (3.11)$$

Também temos:

$$L^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda} = -A^{\sigma}{}_{;\sigma} \quad (3.12)$$

Simetrizando a equação (3.9) de modo a obter a parte  $S_{\alpha\beta\mu\nu}$  de  $\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$  (segundo (2.30)), e contraindo com  $V^{\beta}V^{\nu}$ :

$$(L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} + L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha})V^{\beta}V^{\nu} = \dot{A}_{\alpha}V_{\mu} + \dot{A}_{\mu}V_{\alpha} +$$

$$+ 2A_{\alpha}A_{\mu} - A_{\alpha;\mu} - A_{\mu;\alpha} - \frac{\theta(A_{\mu}V_{\alpha} + A_{\alpha}V_{\mu})}{3} \quad (3.13)$$

Contraindo agora a parte  $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ :

$$(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})g_{\beta\mu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{2\theta A_{\alpha}V_{\mu}}{3} - 2A^{\sigma}{}_{;\sigma}V_{\alpha}V_{\mu} \quad (3.14a)$$

$$(L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{2\theta A_{\mu}V_{\alpha}}{3} - 2A^{\sigma}{}_{;\sigma}V_{\mu}V_{\alpha} \quad (3.14b)$$

$$(L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha})g_{\beta\nu}V^\beta V^\nu = \dot{A}_\alpha V_\mu + \dot{A}_\mu V_\alpha + \frac{\theta}{3}(A_\alpha V_\mu + A_\mu V_\alpha) +$$

$$+ 2A_\alpha A_\mu + 2A^\sigma{}_{;\sigma} V_\alpha V_\mu - A_{\alpha;\mu} - A_{\mu;\alpha} \quad (3.14c)$$

$$(L_{\beta\nu} + L_{\nu\beta})g_{\alpha\mu}V^\beta V^\nu = 2A^\sigma{}_{;\sigma} g_{\alpha\mu} \quad (3.14d)$$

E o último termo de (2.30) fornece:

$$L^{\sigma\lambda}{}_{;\sigma;\lambda} g_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu = -\frac{2A^\sigma{}_{;\sigma}}{3} (g_{\alpha\mu} - V_\alpha V_\mu) =$$

$$= -\frac{2A^\sigma{}_{;\sigma}}{3} h_{\alpha\mu} \quad (3.15)$$

Juntando agora os termos (3.13), (3.14) e (3.15), temos, segundo as equações (2.30) e (1.15):

$$-\bar{E}_{\alpha\mu} \equiv \bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu = \frac{1}{2}(\dot{A}_\alpha V_\mu + \dot{A}_\mu V_\alpha) + A_\alpha A_\mu +$$

$$- \frac{1}{2}(A_{\alpha;\mu} - A_{\mu;\alpha}) - \frac{\theta}{6}(A_\alpha V_\mu + A_\mu V_\alpha) + \frac{1}{3}A^\sigma{}_{;\sigma} h_{\alpha\mu} \quad (3.16)$$

O último termo da equação (3.5) pode ser desmembrado em:

$$\frac{1}{2}h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta (A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2}(g_\mu{}^\alpha - V_\mu V^\alpha)(g_\nu{}^\beta - V_\nu V^\beta)(A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2}\{A_{\alpha;\mu} + A_{\mu;\alpha} - \dot{A}_\alpha V_\mu - A_{\nu;\alpha} V^\nu V_\mu - A_{\beta;\mu} V^\beta V_\alpha - \dot{A}_\mu V_\alpha - 2A^2 V_\alpha V_\mu\} =$$

$$= \frac{1}{2}(A_{\alpha;\mu} + A_{\mu;\alpha}) - \frac{1}{2}(\dot{A}_{\alpha}V_{\mu} + \dot{A}_{\mu}V_{\alpha}) + \frac{\Theta}{6}(A_{\alpha}V_{\mu} + A_{\mu}V_{\alpha}) \quad (3.17)$$

Resultando, para a eq. (3.5):

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\dot{A}_{\alpha}V_{\mu} + \dot{A}_{\mu}V_{\alpha}) - A_{\mu}A_{\nu} + \frac{1}{2}(A_{\alpha;\mu} + A_{\mu;\alpha}) + \frac{\Theta}{6}(A_{\alpha}V_{\mu} + A_{\mu}V_{\alpha}) - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}A^{\lambda}_{;\lambda} \quad (3.18)$$

Comparando então as equações (3.16) e (3.18), vemos que a parte elétrica do tensor de Weyl é obtida da expressão (3.4) através da equação de Lanczos. Temos agora que calcular  $\bar{H}_{\mu\nu}$  a partir das expressões (3.9), (3.11) e (3.12).

O procedimento é análogo. Apenas que agora devemos contrair as expressões com  $1/2\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon}V^{\nu}$  para obter  $\bar{H}_{\rho\mu}$ . Contraindo então, em primeiro lugar, o termo  $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon}V^{\nu}(L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} + L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha}) = \\ & = -\frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon}A_{\alpha}h_{\beta\mu} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A parte  $T_{\alpha\beta\mu\nu}$  fornece:

$$\frac{1}{2}(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})\varepsilon_{\beta\mu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} = \frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\mu\nu\epsilon}V^{\epsilon}A_{\alpha} \quad (3.20a)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta})\varepsilon_{\alpha\nu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} = 0 \quad (3.20b)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha})\varepsilon_{\beta\nu}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha\beta}V^\nu = 0 \quad (3.20c)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\beta\nu} + L_{\nu\beta})\varepsilon_{\alpha\mu}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha\beta}V^\nu = \frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\varepsilon\mu}{}^{\beta}V^\varepsilon A_\beta \quad (3.20d)$$

Enquanto que o último termo se anula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha\beta}V^\varepsilon V^\nu &= -\frac{1}{2}A^\lambda{}_{;\lambda}(\eta_{\rho\varepsilon\mu\nu}V^\varepsilon V^\nu + \\ + \eta_{\rho\varepsilon\nu\mu}V^\varepsilon V^\nu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Temos finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\rho\mu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha\beta}V^\varepsilon V^\nu W_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha\beta}V^\varepsilon A_\alpha(\varepsilon_{\beta\mu} - V_\beta V_\mu) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\mu}V^\varepsilon A_\alpha + \frac{\Theta}{3}\eta_{\rho\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\mu}V^\varepsilon A_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Resultado que concorda com o da proposição, e juntamente com (3.16), prova que (3.4) é realmente o potencial de Lanczos, estando o Lema demonstrado.

A expressão (3.4) não está na gauge de Lanczos, sendo no entanto trivial, segundo a equação (2.13) realizar a transformação, o que obviamente não interferirá com o resultado do Lema. Tomando então o traço:

$$L_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu} = A_\alpha \quad (3.23)$$



O vetor  $M_\alpha$  em (2.16) fica dado por:

$$M_\alpha = -\frac{1}{3}A_\alpha \quad (3.24)$$

E o novo potencial:

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\mu} = A_\alpha V_\beta V_\mu - A_\beta V_\alpha V_\mu - \frac{1}{3}(A_\alpha g_{\beta\mu} - A_\beta g_{\alpha\mu}) \quad (3.25)$$

EXEMPLO:

Consideremos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = (1-2m/r)dt^2 - \frac{dr^2}{(1-2m/r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta) \quad (3.26)$$

Cujo tensor de Weyl tem as componentes dadas por:

$$W_{0101} = \frac{-2m}{r^3} \quad (3.27a)$$

$$W_{0202} = \frac{m(1-2m/r)}{r} \quad (3.27b)$$

$$W_{0303} = \frac{m \sin^2\theta (1-2m/r)}{r} \quad (3.27c)$$

$$W_{1212} = \frac{m}{r(1-2m/r)} \quad (3.27d)$$

$$W_{1313} = \frac{m \operatorname{sen}^2 \theta}{r(1-2m/r)} \quad (3.27e)$$

$$W_{2323} = 2mr \operatorname{sen}^2 \theta \quad (3.27f)$$

As outras componentes não nulas são obtidas destas por simetria. Como esta métrica é uma solução das equações de Einstein para o vazio, o tensor de Ricci é nulo e a condição (2.28) é automaticamente satisfeita.

Definindo sobre este espaço-tempo o campo:

$$V^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{\sqrt{g_{00}}} = \delta^\mu_0 (1-2m/r)^{-1/2} \quad (3.28)$$

A única componente irredutível não nula da derivada covariante deste campo é:

$$A_1 = \frac{-m}{r^2(1-2m/r)} \quad (3.29)$$

Segundo o lema, o potencial de Lanczos é:

$$L_{010} = \frac{m}{r^2} \quad (3.30)$$

As outras componentes independentes são nulas.

O cálculo de  $\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$  pela fórmula de Lanczos concorda inteiramente com (3.27).

Podemos também exibir o potencial na gauge de Lanczos:

$$\tilde{L}_{010} = \frac{2m}{3r^2} \quad (3.31a)$$

$$\tilde{L}_{122} = \frac{-m}{3(1-2m/r)} \quad (3.31b)$$

$$\tilde{L}_{133} = \frac{-m \sin^2 \theta}{3(1-2m/r)} \quad (3.31c)$$

O potencial (3.31), em particular, também se encontra na gauge diferencial de Lanczos.

## CAPÍTULO IV

### LEMA 2

O segundo Lema tratado neste trabalho refere-se a um espaço-tempo onde pode ser definido um campo de velocidades geodésico, cujo tensor de rotação se anula.

Distinguiremos 2 casos: no 1º a parte magnética de  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  pode ser diferente de zero, enquanto que no segundo ela se anula necessariamente. Faremos ainda a hipótese de que o tensor de cisalhamento satisfaz a uma determinada condição, que será diferente para cada um dos casos. Temos então o:

LEMA 2: Dado um espaço-tempo onde a equação (2.28) é válida, e onde podemos definir um campo de observadores  $V^\mu$  tal que:

$$V_{\mu;\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

E que uma das duas seguintes condições é satisfeita:

$$a) \sigma_{\mu}{}^{\epsilon}\sigma_{\epsilon\nu} - \frac{1}{3}\sigma^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2)$$



ou:

$$b) H_{\mu\nu} = 0 \quad e \quad \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \Theta\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (4.3)$$

Então o potencial de Lanczos é dado, respectivamente,  
por:

$$a) L_{\alpha\beta\mu} = \sigma_{\mu\alpha}V_{\beta} - \sigma_{\mu\beta}V_{\alpha} \quad (4.4)$$

ou

$$b) L_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3}(\sigma_{\mu\alpha}V_{\beta} - \sigma_{\mu\beta}V_{\alpha}) \quad (4.5)$$

A menos de uma gauge.

A demonstração segue o mesmo procedimento adotado no  
Lema anterior.

Novamente, temos algumas identidades úteis, envolvendo  
o tensor de cisalhamento, a saber:

$$\sigma_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta} = -\sigma_{\beta\mu}\sigma^{\beta}_{\nu} - \frac{\Theta}{3}\sigma_{\mu\nu} \quad (4.6a)$$

$$\sigma_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta}V^{\mu} = 0 \quad (4.6b)$$

$$\sigma_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta}V^{\nu} \equiv \dot{\sigma}_{\beta\mu}V^{\beta} = 0 \quad (4.6c)$$

$$\sigma_{\beta}{}^{\mu};_{\mu}V^{\beta} = -\sigma^2 \quad (4.6d)$$

As expressões acima só são válidas quando é válida a hipótese (4.1).

Das equações (2.29) e (1.40), e considerando a hipótese (4.1), as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl ficam expressas como:

$$E_{\alpha\mu} = -h_{\alpha}^{\beta} h_{\mu}^{\nu} \dot{\sigma}_{\beta\nu} + \frac{1}{3} \sigma^2 h_{\alpha\mu} - \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\mu} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\beta}_{\mu} \quad (4.7)$$

$$H_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\epsilon} h_{\mu)}^{\rho} \eta_{\epsilon}^{\beta\lambda\nu} V_{\nu} \sigma_{\rho\beta}; \lambda \quad (4.8)$$

O 1º termo do 2º membro de (4.7) pode ser expandido:

$$\begin{aligned} -h_{\alpha}^{\beta} h_{\mu}^{\nu} \dot{\sigma}_{\beta\nu} &= -(g_{\alpha}^{\beta} - V_{\alpha} V^{\beta})(g_{\mu}^{\nu} - V_{\mu} V^{\nu}) \dot{\sigma}_{\beta\nu} = -\dot{\sigma}_{\alpha\mu} + \\ &+ V_{\mu} V^{\nu} \dot{\sigma}_{\alpha\nu} + V_{\alpha} V^{\beta} \dot{\sigma}_{\beta\mu} - V_{\alpha} V^{\beta} V_{\mu} V^{\nu} \dot{\sigma}_{\beta\nu} = \dot{\sigma}_{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Resultando então em:

$$E_{\alpha\mu} = \dot{\sigma}_{\alpha\mu} + \frac{1}{3} \sigma^2 h_{\alpha\mu} - \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\mu} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\beta}_{\mu} \quad (4.10)$$

Já a equação (4.8), ao explicitarmos  $h_{\mu}^{\nu}$ , toma a forma:

$$H_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2} \{ (g_{\alpha}^{\epsilon} - V_{\alpha} V^{\epsilon})(g_{\mu}^{\rho} - V_{\mu} V^{\rho}) \eta_{\epsilon}^{\beta\lambda\nu} V_{\nu} \sigma_{\rho\beta}; \lambda +$$

$$\begin{aligned}
& + (g_{\mu}^e - V_{\mu}V^e)(g_{\alpha}^{\rho} - V_{\alpha}V^{\rho})\eta_{\epsilon}^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\rho\beta};\lambda\} = \frac{1}{2}\{\eta_{\alpha}^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\mu\beta};\lambda + \\
& + \eta_{\mu}^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\alpha\beta};\lambda + \eta_{\alpha}^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\rho\beta};\lambda V_{\mu}V^{\rho} + \eta_{\mu}^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\rho\beta};\lambda V_{\alpha}V^{\rho} = \\
& = \frac{1}{2}\eta(\alpha^{\beta\lambda\nu}V_{\nu}\sigma)_{\mu\beta};\lambda
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Como as equações (4.4) e (4.5) diferem apenas por uma constante multiplicativa, ao calcular o tensor de Weyl por (2.12), iremos utilizar a fórmula unificada:

$$L_{\alpha\beta\mu} = k(\sigma_{\mu\alpha}V_{\beta} - \sigma_{\mu\beta}V_{\alpha}) \tag{4.12}$$

Onde  $k=1$  no caso a) e  $k=1/3$  no caso b). Então, a derivada covariante do tensor de Lanczos fica:

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\mu};\nu & = k\{-(\sigma_{\alpha\nu} + \frac{\Theta h_{\alpha\nu}}{3})\sigma_{\beta\mu} - V_{\alpha}\sigma_{\beta\mu};\nu + \\
& + (\sigma_{\beta\nu} + \frac{\Theta h_{\beta\nu}}{3})\sigma_{\alpha\mu} + V_{\beta}\sigma_{\alpha\mu};\nu\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

O tensor contraído  $L_{\alpha\mu}$  é:

$$L_{\alpha\mu} = k\{-\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\beta}_{\mu} + \frac{2\Theta}{3}\sigma_{\alpha\mu} - V_{\alpha}\sigma_{\mu}^{\beta};\beta - V_{\mu}\sigma_{\alpha}^{\beta};\beta + \dot{\sigma}_{\alpha\mu}\} \tag{4.14}$$

Simetrizando:

$$L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha} = k\{-2\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\beta}_{\mu} + \frac{4}{3}\theta\sigma_{\alpha\mu} - V_{\alpha}\sigma_{\mu}^{\beta};\beta +$$

$$- V_{\mu}\sigma_{\alpha}^{\beta};\beta + 2\dot{\sigma}_{\alpha\mu}\} \quad (4.15)$$

E, finalmente:

$$L^{\sigma\lambda}_{\sigma;\lambda} = 0 \quad (4.16)$$

Vamos primeiro obter a parte elétrica de  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ . O primeiro termo,  $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ , é obtido simetrizando (4.13) e contraindo com  $V^{\beta}V^{\nu}$ :

$$S_{\alpha\beta\mu\nu} = (L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} - L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha})V^{\beta}V^{\nu} =$$

$$= k\{2\dot{\sigma}_{\alpha\mu} + 2\sigma_{\beta\alpha}\sigma^{\beta}_{\mu} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\mu}\} \quad (4.17)$$

Para a parte contendo os traços:

$$(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})\xi_{\beta\mu}V^{\beta}V^{\nu} = k\{V_{\alpha}V_{\mu}\sigma^2 - \sigma_{\alpha}^{\beta};\beta V_{\mu}\} \quad (4.18a)$$

$$(L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta})\xi_{\alpha\nu}V^{\beta}V^{\nu} = k\{V_{\alpha}V_{\mu}\sigma^2 - \sigma_{\mu}^{\beta};\beta V_{\alpha}\} \quad (4.18b)$$

$$(L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha})\xi_{\beta\nu}V^{\beta}V^{\nu} = k\{-2\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\beta}_{\mu} + \frac{4}{3}\theta\sigma_{\alpha\mu} -$$

$$\sigma_{\mu}^{\beta};\beta - \sigma_{\alpha}^{\beta};\beta V_{\mu} + 2\dot{\sigma}_{\alpha\mu}\} \quad (4.18c)$$

$$(L_{\beta\nu} + L_{\nu\beta})\xi_{\alpha\mu}V^{\beta}V^{\nu} = 2k\sigma^2\xi_{\alpha\mu} \quad (4.18d)$$

Agrupando os termos (4.17) e (4.18):

$$-\bar{E}_{\alpha\mu} = \bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu = k \{ \dot{\sigma}_{\alpha\mu} + 3\sigma_{\beta\alpha} \sigma^\beta{}_\mu - \sigma^2 h_{\alpha\mu} \} \quad (4.19)$$

Para o caso a) temos então:

$$\bar{E}_{\alpha\mu} = -\dot{\sigma}_{\alpha\mu} - 3\sigma_{\alpha\beta} \sigma^\beta{}_\mu + \sigma^2 h_{\alpha\mu} \quad (4.20)$$

Subtraindo (4.20) de (4.10):

$$E_{\alpha\mu} - \bar{E}_{\alpha\mu} = -\frac{2}{3}\sigma^2 h_{\alpha\mu} - \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\mu} - 2\sigma_{\alpha\beta} \sigma^\beta{}_\mu \quad (4.21)$$

Esta expressão se anula segundo a hipótese (4.2).

No caso b):

$$\bar{E}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{3}\dot{\sigma}_{\alpha\mu} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma^\beta{}_\mu + \frac{1}{3}\sigma^2 h_{\alpha\mu} \quad (4.22)$$

E:

$$E_{\alpha\mu} - \bar{E}_{\alpha\mu} = -\frac{2}{3}\dot{\sigma}_{\alpha\mu} - \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\mu} \quad (4.23)$$

Utilizando desta vez (4.3), verificamos que o Lema realmente fornece a parte elétrica do tensor de Weyl.

Fazendo agora o cálculo do tensor  $H_{\mu\nu}$  para o potencial (4.12):

$$\frac{1}{2} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu (L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} + L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha}) =$$

$$= k \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta} \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{2} (L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha}) g_{\beta\mu} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu = -\frac{1}{2} k \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} \quad (4.25a)$$

$$\frac{1}{2} (L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta}) g_{\alpha\nu} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu = 0 \quad (4.25b)$$

$$\frac{1}{2} (L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha}) g_{\beta\mu} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu = 0 \quad (4.25c)$$

$$\frac{1}{2} (L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha}) g_{\beta\mu} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu = -\frac{1}{2} k \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} \quad (4.25d)$$

Resultando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} V^\nu V^\omega \alpha_{\beta\mu\nu} &= k \{ \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta} + \\ &- \frac{1}{2} k \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} \} \end{aligned} \quad (4.26)$$

É fácil mostrar que o último termo de (4.26) é a parte antissimétrica de  $\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta}$ . Para tanto, notemos que aplicando o operador dual duas vezes em um tensor antissimétrico, reobtemos este tensor (a menos de um sinal). Seja  $F_{\mu\nu}$  um tensor antissimétrico qualquer:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -\frac{2}{4} \delta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}) = -F_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Calculando então o dual de:

$${}^*F_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\{\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\sigma_{\mu\alpha;\beta} \eta_{\mu\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\sigma_{\rho\alpha;\beta}\} \quad (4.28)$$

Temos:

$$\begin{aligned} {}^{**}F_{\lambda\nu} &= \frac{1}{4}\{\eta_{\lambda\nu}{}^{\rho\mu}\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\sigma_{\mu\alpha;\beta} - \eta_{\lambda\nu}{}^{\rho\mu}\eta_{\mu\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\sigma_{\rho\alpha;\beta}\} = \\ &= \frac{1}{4}\{\eta_{\lambda\nu\rho\mu}\eta^{\epsilon\alpha\beta\rho\nu\epsilon}\sigma_{\mu\alpha;\beta} + \eta_{\lambda\nu\rho\mu}\eta^{\epsilon\alpha\beta\mu\nu\epsilon}\sigma_{\rho\alpha;\beta}\} = \\ &= -\frac{1}{2}\delta_{\lambda\nu}^{\epsilon\alpha\beta}V_{\epsilon}\sigma_{\mu\alpha;\beta} = -1\{V_{\lambda}\sigma_{\nu;\mu}^{\mu} + V_{\mu}\sigma_{\lambda;\nu}^{\mu} + V_{\nu}\sigma_{\mu;\lambda}^{\mu} + \\ &- V_{\mu}\sigma_{\nu;\lambda}^{\mu} - V_{\nu}\sigma_{\lambda;\mu}^{\mu} - V_{\lambda}\sigma_{\mu;\nu}^{\mu}\} = \frac{1}{2}\{V_{\nu}\sigma_{\lambda;\mu}^{\mu} - V_{\nu}\sigma_{\lambda;\mu}^{\mu}\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Realizando mais uma vez a operação de dualidade:

$$\begin{aligned} -F_{\rho\mu} &= F_{\rho\mu} = \frac{1}{4}\eta_{\rho\mu}{}^{\lambda\nu}(V_{\nu}\sigma_{\lambda}^{\beta;\beta} - V_{\lambda}\sigma_{\nu}^{\beta;\beta}) = \\ &= \frac{1}{2}\eta_{\rho\mu}{}^{\lambda\nu}V_{\nu}\sigma_{\lambda}^{\beta;\beta} = -\frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\mu\nu\epsilon}\sigma_{\alpha}^{\lambda;\lambda} \end{aligned} \quad (4.30)$$

De modo que a equação (4.26) é re-escrita como:

$$-\bar{H}_{\rho\mu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}V^{\nu}W_{\alpha\beta\mu\nu} = k\{\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\sigma_{\mu\alpha;\beta} +$$

$$+ \eta_{\mu\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\rho\alpha;\beta} \} \quad (4.31)$$

No caso a):

$$\bar{H}_{\rho\mu} = \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta} + \eta_{\mu\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\rho\alpha;\beta} \quad (4.32)$$

Equação que confere com (4.11), de modo que  $H_{\rho\mu}$  e  $\bar{H}_{\rho\mu}$  são iguais.

No caso b):

$$\bar{H}_{\rho\mu} = \frac{1}{3} \{ \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta} + \eta_{\mu\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\rho\alpha;\beta} \} \quad (4.33)$$

Mas:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\mu\alpha;\beta} + \eta_{\mu\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon} \sigma_{\rho\alpha;\beta} = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \bar{H}_{\rho\mu} = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

E o Lema está demonstrado.

Adicionalmente, podemos ver que a expressão (4.12) ( e portanto (4.4) e (4.5)) encontra-se na gauge algébrica de Lanczos:

$$L_{\alpha}^{\mu}{}_{\mu} = k(\sigma_{\mu\alpha} V^{\mu} - \sigma_{\mu}{}^{\mu} V_{\alpha}) = 0 \quad (4.35)$$



### EXEMPLOS:

Foram calculados dois exemplos para o caso b) do Lema 2:

1º) A mesma métrica utilizada no exemplo do capítulo 3 (Schwarzschild) também pode se encaixar no caso b) deste Lema, bastando escolher um campo de observadores diferente, por exemplo:

$$V_{\mu} = ( 1 , \frac{1}{(1-2m/r)(2m/r)^{1/2}} , 0 , 0 ) \quad (4.36)$$

A aceleração e a rotação deste campo são nulas, enquanto que as componentes do cisalhamento não nulas são:

$$\sigma_{11} = \frac{-(2m/r)^{1/2}}{r} \quad (4.37a)$$

$$\sigma_{01} = \frac{-2m}{r^2(1-2m/r)} \quad (4.37b)$$

$$\sigma_{11} = \frac{-(2m/r)^{1/2}}{(1-2m/r)^2} \quad (4.37c)$$

$$\sigma_{22} = (mr/2)^{1/2} \quad (4.37d)$$

$$\sigma_{33} = (mr/2)^{1/2} \text{sen}^2\theta \quad (4.37e)$$

O Lema então nos fornece como componentes não nulas do potencial de Lanczos:

$$L_{010} = \frac{2m}{3r^2} \quad (4.38a)$$

$$L_{011} = \frac{(2m/r)^{1/2}(1-2m/r)}{3r} \quad (4.38b)$$

$$L_{022} = -\frac{1}{6}(2mr)^{1/2} \quad (4.38c)$$

$$L_{033} = -\frac{1}{6}(2mr)^{1/2}\text{sen}^2\theta \quad (4.38d)$$

$$L_{122} = \frac{-m}{3(1-2m/r)} \quad (4.38e)$$

$$L_{133} = \frac{-m\text{sen}^2\theta}{3(1-2m/r)} \quad (4.38f)$$

Como a geometria é a mesma que a considerada no Lema 1, o tensor de Weyl também é dado por (3.23). A diferença entre este resultado e (3.27), cujo traço também é nulo, está na escolha de uma outra gauge diferencial, uma vez que a divergência de (4.38) não é zero.

2o) O Lema também se aplica à geometria de Kasner, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - t^{2\alpha}dx^2 - t^{2\beta}dy^2 - t^{2\gamma}dz^2 \quad (4.39)$$

Onde as constantes  $\alpha, \beta$ , e  $\gamma$  obedecem a:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (4.40a)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (4.40b)$$

Esta métrica é uma solução das equações de Einstein para o vazio, de modo que  $R_{\mu\nu}$  e o seu tensor de Weyl tem como componentes independentes não nulas:

$$W_{0101} = R_{0101} = -\alpha(\alpha - 1)t^{2\alpha-2} \quad (4.41a)$$

$$W_{0202} = R_{0202} = -\beta(\beta - 1)t^{2\beta-2} \quad (4.41b)$$

$$W_{0303} = R_{0303} = -\gamma(\gamma - 1)t^{2\gamma-2} \quad (4.41c)$$

$$W_{1212} = R_{1212} = \alpha\beta t^{2\alpha+2\beta-2} \quad (4.41a)$$

$$W_{1313} = R_{1313} = \alpha\gamma t^{2\alpha+2\gamma-2} \quad (4.41b)$$

$$W_{2323} = R_{2323} = \beta\gamma t^{2\beta+2\gamma-2} \quad (4.41c)$$

Se escolhermos como campo de observadores  $V_\mu = \delta_{\mu}^0 A_\alpha$  e  $\omega_{\mu\nu}$  se anulam, e o cisalhamento é dado por:

$$\sigma_{11} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)t^{2\alpha-1} \quad (4.42a)$$

$$\sigma_{22} = \left(\frac{1}{3} - \beta\right)t^{2\beta-1} \quad (4.42b)$$

$$\sigma_{33} = \left(\frac{1}{3} - \gamma\right)t^{2\gamma-1} \quad (4.42c)$$

A fórmula (4.3) implica que o tensor de Lanczos é dado por:

$$L_{011} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \alpha \right) t^{2\alpha-1} \quad (4.43a)$$

$$L_{022} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \beta \right) t^{2\beta-1} \quad (4.43b)$$

$$L_{033} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \gamma \right) t^{2\gamma-1} \quad (4.43c)$$

Resultado que além de se encontrar na gauge algébrica de Lanczos por força da equação (4.35), também tem a sua divergência nula.

## CAPÍTULO V

### LEMA 3

Finalmente, consideramos o caso de um campo de observadores definido em um espaço-tempo tal que os únicos parâmetros cinemáticos não nulos são a rotação e a expansão.

Temos novamente dois casos distintos, dependendo de o tensor  $H_{\mu\nu}$  se anular ou não. Caso ele não se anule, será necessário impor uma equação extra a ser satisfeita por  $\omega_{\mu\nu}$ .

LEMA 3: Dados um espaço-tempo e um campo de observadores sobre ele definido, cuja derivada covariante é dada por:

$$V_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

E tal que uma das condições seguintes é verdadeira:

$$a) H_{\mu\nu} = 0 \quad (5.2)$$

ou

$$b) \omega_{\mu}\omega_{\nu} + \frac{1}{6}\omega^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (5.3)$$

Então o potencial de Lanczos é dado, a menos de uma gauge, por:

$$a) L_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{2}{9}\{\omega_{\alpha\beta}V_{\mu} + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\mu}V_{\beta} - \omega_{\beta\mu}V_{\alpha})\} \quad (5.4)$$

ou

$$b) L_{\alpha\beta\mu} = \frac{2}{3}\{\omega_{\alpha\beta}V_{\mu} + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\mu}V_{\beta} - \omega_{\beta\mu}V_{\alpha})\} \quad (5.5)$$

Respectivamente.

Como no capítulo anterior, podemos substituir as constantes multiplicativas em a) e b) por k ao derivarmos  $\bar{E}_{\mu\nu}$  e  $\bar{H}_{\mu\nu}$ :

$$L_{\alpha\beta\mu} = k\{\omega_{\alpha\beta}V_{\mu} + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\mu}V_{\beta} - \omega_{\beta\mu}V_{\alpha})\} \quad (5.6)$$

Serão também usadas várias identidades envolvendo tanto  $\omega_{\mu\nu}$  quanto  $\omega^{\mu}$ , o vetor de rotação obtido do tensor pela relação (1.29), e  $\theta$ . Assim, se  $\sigma_{\mu\nu} = A_{\mu} = 0$ , temos:

$$\omega_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta} = \omega_{\mu\beta}\omega^{\beta}_{\nu} + \frac{1}{3}\theta\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\omega^2 h_{\mu\nu} +$$

$$- \omega_{\mu}\omega_{\nu} \quad (5.7a)$$

$$\omega_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta}V^{\mu} = 0 \quad (5.7b)$$

$$\omega_{\beta\mu};_{\nu}V^{\beta}V^{\nu} \equiv \dot{\omega}_{\beta\mu}V^{\beta} = 0 \quad (5.7c)$$

$$\omega_{\beta}^{\lambda};_{\lambda}V^{\beta} = -\omega^2 \quad (5.7d)$$

$$\omega_{\beta};_{\nu}V^{\beta} = \frac{-\theta\omega_{\nu}}{3} \quad (5.7e)$$

$$\omega_{\beta};_{\nu}V^{\beta}V^{\nu} = \dot{\omega}_{\beta}V^{\beta} = 0 \quad (5.7f)$$

Estas relações são obtidas derivando-se a identidade:

$$\omega_{\beta\mu}V^{\beta} = 0, \text{ e utilizando a equação (5.1).}$$

Da equação de vínculo (1.39) temos ainda que:

$$\omega^{\alpha};_{\alpha} = 0 \quad (5.8)$$

E da equação de evolução da rotação:

$$(g_{\alpha}^{\mu} - V_{\alpha}V^{\mu})(g_{\beta}^{\nu} - V_{\beta}V^{\nu})\dot{\omega}_{\mu\nu} = \dot{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{-2\theta\omega_{\alpha\beta}}{3} \quad (5.9)$$

A eq. (5.8) por sua vez implica em:

$$\dot{\omega}^{\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}V_{\mu});_{\lambda}V^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\dot{\omega}_{\alpha\beta}V_{\mu} = \frac{2\theta\omega^{\nu}}{3} \quad (5.10)$$

Derivando o potencial de Lanczos:

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\beta\mu;\nu} = & k\{\omega_{\alpha\beta;\nu}V_{\mu} + \omega_{\alpha\beta}\omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Theta\omega_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} + \\
 & + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\mu;\nu}V_{\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\mu}\omega_{\beta\nu} + \frac{1}{6}\Theta\omega_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\beta\mu;\nu} + \\
 & - \frac{1}{2}\omega_{\beta\mu}\omega_{\alpha\nu} - \frac{1}{6}\Theta\omega_{\beta\mu}h_{\alpha\nu}\} \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

É fácil ver que a expressão (5.6) está na gauge algébrica de Lanczos:

$$L_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu} = k\{\omega_{\alpha}{}^{\mu}V_{\mu} + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\mu}V^{\mu} - \omega^{\mu}{}_{\mu}V_{\alpha})\} = 0 \quad (5.12)$$

De modo que o tensor contraído  $L_{\alpha\mu}$  se escreve:

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\mu} = L_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu;\sigma} = & k\{\omega_{\alpha}{}^{\sigma};_{\sigma}V_{\mu} - \frac{3}{2}\omega_{\alpha}{}^{\beta}\omega_{\beta\mu} - \frac{1}{6}\Theta\omega_{\alpha\mu} + \\
 & + \frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{\beta};_{\beta}V_{\alpha}\} \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Simetrizando:

$$L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha} = \frac{3k}{2}\{\omega_{\alpha}{}^{\sigma};_{\sigma}V_{\mu} - \omega_{\mu}{}^{\sigma};_{\sigma}V_{\alpha} - 2\omega_{\alpha}{}^{\beta}\omega_{\beta\mu}\} \quad (5.14)$$

A primeira parte de  $\bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ , resulta:



$$(L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} - L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha})V^{\beta}V^{\nu} = 3k\omega_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{\mu} \quad (5.15)$$

Enquanto que a parte  $T_{\alpha\beta\mu\nu}$  é dada por:

$$(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})g_{\beta\mu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{3k}{2}\{\omega_{\alpha}^{\sigma};_{\sigma}V_{\mu} - \omega^2V_{\alpha}V_{\mu}\} \quad (5.16a)$$

$$(L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{3k}{2}\{\omega_{\mu}^{\sigma};_{\sigma}V_{\alpha} - \omega^2V_{\mu}V_{\alpha}\} \quad (5.16b)$$

$$(L_{\alpha\mu} + L_{\mu\alpha})g_{\beta\nu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{3k}{2}\{\omega_{\alpha}^{\sigma};_{\sigma}V_{\mu} - \omega_{\mu}^{\sigma};_{\sigma}V_{\alpha} + 2\omega_{\alpha}^{\beta}\omega_{\beta\mu}\} \quad (5.16c)$$

$$(L_{\beta\nu} + L_{\nu\beta})g_{\alpha\mu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{3k}{2}g_{\alpha\mu}\{-\omega^2 - \omega^2\} = -3k\omega^2(h_{\alpha\mu} + V_{\alpha}V_{\mu}) \quad (5.16d)$$

O último termo, devido a (5.12), se anula:

$$L^{\sigma\lambda}_{\sigma;\lambda} = -L^{\lambda\sigma}_{\sigma;\lambda} = 0 \quad (5.17)$$

Agrupando todos os termos:

$$-\bar{E}_{\alpha\mu} \equiv \bar{W}_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\beta}V^{\nu} = \frac{3k}{2}\{3\omega_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{\mu} + \omega^2h_{\alpha\mu}\} \quad (5.18)$$

Dando para o caso a) (utilizando (1.31)):

$$\bar{E}_{\alpha\mu} = \frac{1}{6}\omega^2 h_{\alpha\mu} + \omega_\alpha \omega_\mu \quad (5.19)$$

Enquanto a equação de evolução do cisalhamento implica em:

$$E_{\alpha\mu} = \frac{1}{6}\omega^2 h_{\alpha\mu} + \omega_\alpha \omega_\mu \quad (5.20)$$

Que é idêntico à expressão (5.19).

Já no caso b):

$$\bar{E}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}\omega^2 h_{\alpha\mu} + 3\omega_\alpha \omega_\mu \quad (5.21)$$

Subtraindo (5.21) de (5.20):

$$E_{\alpha\mu} - \bar{E}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{3}\omega^2 h_{\alpha\mu} - 2\omega_\alpha \omega_\mu = 0 \quad (5.22)$$

Onde a última igualdade resulta da hipótese (5.3).

Falta apenas verificar a compatibilidade da parte magnética do tensor de Weyl com as expressões (5.4) e (5.5). Calculando a 1ª parte temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}V^\nu(L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} - L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha}) = \\ & = \frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\{\omega_{\mu\alpha;\beta} - \omega_{\alpha\beta;\mu} - \Theta\omega_{\alpha\beta}V_{\mu}\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$T_{\alpha\beta\mu\nu}$  resulta:

$$\frac{1}{2}(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})g_{\beta\mu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon\nu\nu} = \frac{3}{4}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\mu\nu\epsilon}\omega_{\alpha}^{\sigma};\sigma \quad (5.24a)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\beta\mu} + L_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon\nu\nu} = 0 \quad (5.24b)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})g_{\beta\mu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon\nu\nu} = 0 \quad (5.24c)$$

$$\frac{1}{2}(L_{\alpha\nu} + L_{\nu\alpha})g_{\beta\mu}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon\nu\nu} = \frac{3}{4}\eta_{\rho\epsilon}^{\beta\nu\epsilon}\omega_{\beta}^{\sigma};\sigma \quad (5.24d)$$

Resultando finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\rho\mu} &= -\frac{1}{2}\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu}\omega_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\epsilon\nu\nu} = -\frac{1}{2}k\eta_{\rho\epsilon}^{\alpha\beta\nu\epsilon}\{\omega_{\mu\alpha};\beta + \\ &- \omega_{\alpha\beta};\mu - \Theta\omega_{\alpha\beta}V_{\mu}\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Desenvolvendo os termos do 2º membro desta equação e expressando-os em função do vetor  $\omega^{\alpha}$ , temos: Para o 1º termo:

$$\begin{aligned} \eta^{\rho\epsilon\alpha\beta\nu\epsilon}\omega_{\mu\alpha};\beta &= \eta^{\rho\alpha\beta\epsilon}(\eta_{\mu\alpha\lambda\nu}\omega^{\lambda\nu\nu});\beta = \\ &= \eta^{\rho\epsilon\beta\epsilon}\eta_{\mu\alpha\lambda\nu}(\omega^{\lambda\nu\nu});\beta = \delta_{\mu\lambda}^{\rho\beta\epsilon}V_{\epsilon}(\omega^{\lambda\nu\nu});\beta = -\{\delta_{\mu}^{\rho}V_{\epsilon}(\omega^{\lambda\nu\epsilon});\lambda + \\ &+ V_{\mu}(\omega^{\rho\nu\lambda});\lambda + V_{\lambda}(\omega^{\lambda\nu\rho});\mu - V_{\mu}(\omega^{\lambda\nu\rho});\lambda - V_{\epsilon}(\omega^{\rho\nu\epsilon});\mu + \\ &- \delta_{\mu}^{\rho}V_{\lambda}(\omega^{\lambda\nu\nu});\nu\} = -\{\Theta V_{\mu}\omega^{\rho} + V_{\mu}\dot{\omega}^{\alpha} + V_{\lambda}\omega^{\lambda};\mu V^{\alpha} - V_{\mu}\omega^{\lambda\nu\rho};\lambda - \omega^{\rho};\mu\} = \\ &= \omega^{\rho};\mu + \frac{\Theta}{3}\omega_{\mu}V^{\rho} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para o 2º termo:

$$\begin{aligned}
 \eta^{\rho\epsilon\alpha\beta} V_{\epsilon} \omega_{\alpha\beta}; \mu &= \eta^{\rho\epsilon\alpha\beta} (\eta_{\alpha\beta\lambda\nu} \omega^{\lambda\nu}); \mu V_{\epsilon} = \\
 &= -2\delta_{\lambda\nu}^{\rho\epsilon} (\omega^{\lambda\nu}); \mu V_{\epsilon} = 2(\delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\lambda}^{\epsilon} - \delta_{\lambda}^{\rho} \delta_{\nu}^{\epsilon}) (\omega^{\lambda}; \mu V^{\nu} + \omega^{\lambda} \omega^{\nu}_{\mu} + \\
 &+ \frac{\theta \omega^{\lambda} h^{\nu}_{\mu}) V_{\epsilon} = 2\{\omega^{\lambda}; \mu V^{\rho} V_{\lambda} - \omega^{\rho}; \mu\} = \frac{-2\theta \omega_{\mu} V^{\rho}}{3} - 2\omega^{\rho}; \mu
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Para o 3º:

$$\eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha\beta} V^{\epsilon} \theta \omega_{\alpha\beta} V_{\mu} = -\theta V_{\mu} \eta_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\rho} V^{\epsilon} \omega_{\alpha\beta} = -2\theta \omega_{\rho} V_{\mu} \tag{5.28}$$

E finalmente, para o quarto termo, temos primeiro que:

$$\begin{aligned}
 \omega_{\alpha}{}^{\sigma}; \sigma &= (\eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}); \sigma = \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu}; \sigma V^{\nu} + \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}; \sigma = \\
 &= \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu}; \sigma V^{\nu} + \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu} \omega^{\nu}_{\sigma} + \frac{\theta \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu} h^{\nu}_{\sigma}}{3} = \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu}; \sigma V^{\nu} + \\
 &+ \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu} \omega^{\nu}_{\sigma}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \omega^{\mu} \omega^{\nu}_{\sigma} &= \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\nu\sigma\lambda\rho} \omega^{\mu} \omega_{\lambda} V_{\rho} = \\
 &= 2(\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\mu}^{\lambda} - \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\mu}^{\rho}) \omega^{\mu} \omega_{\lambda} V_{\rho} = 2\omega^{\lambda} \omega_{\lambda} V_{\alpha} = -2\omega^2 V_{\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

De modo que:

$$\begin{aligned}
& \eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\mu} V^{\epsilon} \omega_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{;\sigma} = \eta_{\rho\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\mu} V^{\epsilon} \eta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\lambda\nu} \omega^{\lambda}{}_{;\sigma} V_{\nu} = \\
& = \eta_{\rho\epsilon\mu\alpha} \eta^{\sigma\lambda\nu\alpha} V^{\epsilon} \omega_{\lambda}{}_{;\sigma} V_{\nu} = -\delta_{\rho\epsilon}^{\sigma\lambda\nu} V^{\epsilon} \omega_{\lambda}{}_{;\sigma} V_{\nu} = \\
& = -\{V^{\epsilon} \omega_{\epsilon}{}_{;\rho} V_{\mu} + \dot{\omega}_{\mu} V_{\rho} + \omega_{\rho}{}_{;\mu} - V^{\epsilon} \omega_{\epsilon}{}_{;\mu} V_{\rho} - \dot{\omega}_{\rho} V_{\mu} - \omega_{\mu}{}_{;\rho}\} = \\
& = \frac{\theta\omega_{\rho} V_{\mu}}{3} - \dot{\omega}_{\mu} V_{\rho} - \omega_{\rho}{}_{;\mu} - \frac{\theta\omega_{\mu} V_{\rho}}{3} + \dot{\omega}_{\rho} V_{\mu} + \omega_{\mu}{}_{;\rho} = \\
& = \frac{\theta\omega_{\mu} V_{\rho}}{3} - \frac{\theta\omega_{\rho} V_{\mu}}{3} + \omega_{\mu}{}_{;\rho} - \omega_{\rho}{}_{;\mu} \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Assim a expressão (5.25) para  $\bar{H}_{\rho\mu}$  se escreve:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{\rho\mu} &= \frac{-1}{2} \{ \omega_{\rho}{}_{;\mu} + \frac{\theta\omega_{\mu} V_{\rho}}{3} + \frac{2\theta\omega_{\mu} V_{\rho}}{3} + 2\omega_{\rho}{}_{;\mu} + \\
& + 2\theta\omega_{\rho} V_{\mu} \} - \frac{3k}{4} \{ \frac{\theta\omega_{\mu} V_{\rho}}{3} - \frac{\theta\omega_{\rho} V_{\mu}}{3} + \omega_{\mu}{}_{;\rho} - \omega_{\rho}{}_{;\mu} \} = \\
& = \frac{-3k}{4} \{ \omega_{\rho}{}_{;\mu} + \omega_{\mu}{}_{;\rho} + \theta\omega_{\mu} V_{\rho} + \theta\omega_{\rho} V_{\mu} \} \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Da equação de vínculo (1.40) e usando o resultado (5.26), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha\mu} &= \frac{-1}{2} \{ (g_{\alpha}{}^{\epsilon} - V_{\alpha} V^{\epsilon})(g_{\mu}{}^{\rho} - V_{\mu} V^{\rho})(\omega_{\epsilon}{}_{;\rho} + \frac{\theta\omega_{\rho} V_{\epsilon}}{3}) + \\
& + (g_{\mu}{}^{\epsilon} - V_{\mu} V^{\epsilon})(g_{\alpha}{}^{\rho} - V_{\alpha} V^{\rho})(\omega_{\epsilon}{}_{;\rho} + \frac{\theta\omega_{\rho} V_{\epsilon}}{3}) \} = \\
& = \frac{-1}{2} \{ \omega_{\alpha}{}_{;\mu} - \dot{\omega}_{\alpha} V_{\mu} + \frac{\theta\omega_{\mu} V_{\alpha}}{3} + \omega_{\mu}{}_{;\alpha} - \dot{\omega}_{\mu} V_{\alpha} + \frac{\theta\omega_{\alpha} V_{\mu}}{3} \} = \\
& = \frac{-1}{2} \{ \omega_{\alpha}{}_{;\mu} + \omega_{\mu}{}_{;\alpha} + \theta\omega_{\alpha} V_{\mu} + \theta\omega_{\mu} V_{\alpha} \} \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Expressando  $\bar{H}_{\mu\nu}$  em termos de  $H_{\alpha\mu}$ :

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \frac{3k}{2} H_{\mu\nu} \quad (5.34)$$

De modo que no caso a):

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \frac{1}{3} H_{\mu\nu} = 0 \quad (5.35)$$

Para o caso b),  $k = 2/3$ , e (5.34) resulta:

$$\bar{H}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \quad (5.36)$$

E o Lema está demonstrado.

Note que ambos os casos estão na gauge algébrica de Lanczos. Tomando o traço da equação (5.6):

$$L_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu} = k \left\{ \omega_{\alpha}{}^{\mu\nu} V_{\mu} + \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\mu} V^{\mu} - \omega^{\mu}{}_{\mu} V_{\alpha}) \right\} = 0 \quad (5.37)$$

#### EXEMPLO:

A métrica de Gödel, juntamente com o campo de observadores comóvel com o fluido que origina a curvatura, é um dos exemplos mais conhecidos a se encaixar nas hipóteses deste

Lema, no caso a). Utilizando o sistema de coordenadas cartesiano, o seu elemento de linha é expresso como:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + 2e^{cx} dt dy + \frac{1}{2} e^{2cx} dy^2 - dz^2 \quad (5.38)$$

As componentes de  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  que são diferentes de zero são:

$$W_{0101} = \frac{c^2}{6} \quad (5.39a)$$

$$W_{0202} = \frac{e^{2cx} c^2}{12} \quad (5.39b)$$

$$W_{0303} = \frac{-c^2}{3} \quad (5.39c)$$

$$W_{0112} = \frac{-e^{cx} c^2}{6} \quad (5.39d)$$

$$W_{0323} = \frac{-e^{cx} c^2}{3} \quad (5.39e)$$

$$W_{1212} = \frac{e^{2cx} c^2}{6} \quad (5.39f)$$

$$W_{1313} = \frac{-c^2}{6} \quad (5.39g)$$

$$W_{2323} = \frac{-e^{2cx} c^2}{12} \quad (5.39h)$$

A menos de simetrias.

O campo  $V^\mu$  comóvel é  $V^\mu = \delta^\mu_0$ , cujos cisalhamento, expansão e aceleração se anulam, e a rotação é dada pela expressão:

$$\omega_{12} = \frac{-ce^{cx}}{2} \quad (5.40)$$

Ou pelo vetor:

$$\omega^\mu = (0, 0, 0, c\sqrt{-2}) \quad (5.41)$$

E as componentes não nulas de  $L_{\alpha\beta\mu}$  são:

$$L_{012} = \frac{ce^{cx}}{18} \quad (5.42a)$$

$$L_{021} = \frac{-ce^{cx}}{18} \quad (5.42b)$$

$$L_{120} = \frac{-ce^{cx}}{9} \quad (5.42c)$$

$$L_{122} = \frac{-ce^{cx}}{9} \quad (5.42d)$$



## CONCLUSÃO

Foi apresentada, sob a forma de Lemas, uma série de relações que permitem obter o potencial de Lanczos, algebricamente, a partir dos parâmetros cinemáticos associados a um campo de observadores, quando estes parâmetros, assim como o tensor de Ricci, satisfaçam a certas hipóteses (a equação (2.28), e, em cada um dos Lemas, as equações que são exibidas nos seus enunciados). Como consequência e exemplificação dos Lemas, o potencial foi calculado explicitamente, nas geometrias de Kasner, Gödel e Schwarzschild (utilizando aqui dois campos vetoriais distintos).

O primeiro Lema fornece a expressão geral de  $L_{\alpha\beta\mu}$  para o caso em que o campo de observadores apresenta como únicos parâmetros não nulos a aceleração e a expansão, enquanto que os dois Lemas seguintes consideram campos com apenas o cisalhamento ou a rotação, além da expansão, diferentes de zero.

O resultado deste trabalho permite que seja encontrada a forma explícita do potencial de Lanczos para alguns dos espaços-tempo mais estudados na teoria da relatividade geral. Também são exibidos os limites do método, contrariamente ao que ocorria anteriormente, quando era necessário resolver o sistema de equações diferenciais dado por (2.12), examinando caso a caso

na base da tentativa e erro. Deste modo, as teorias que sugerem uma aplicação física para  $L_{\alpha\beta\mu}$ , como os trabalhos de Novello-Rodrigues<sup>[ 1 ]</sup> e Novello-Heintzman<sup>[ 2 ]</sup>, dispõem de exemplos concretos com os quais trabalhar. Além disto, o estabelecimento de relações entre este potencial e quantidades conhecidas e estudadas em física, pode levar a outras aplicações e interpretações para  $L_{\alpha\beta\mu}$ , como, por exemplo, a possibilidade de relacionar o tensor de Lanczos com a curvatura extrínseca do formalismo 3+1, através do Lema 2.

As possibilidades para extensão deste trabalho, que constitui uma primeira aproximação do problema, incluem o enfraquecimento das hipóteses assumidas pelos Lemas, permitindo que casos com campos de observadores mais gerais (quando  $A_\mu$  e  $\sigma_{\mu\nu}$  são diferentes de zero conjuntamente, por exemplo) sejam tratados. Também é importante considerar uma modificação da equação (2.25), incluindo termos mais complexos, como os duais dos já apresentados, e ainda, termos envolvendo o tensor de Ricci. Isto porque, apesar de o potencial de Lanczos estar ligado apenas ao tensor de Weyl, a expressão deste último em função dos parâmetros cinemáticos (como podemos ver das equações (1.42) e (1.40)) contém explicitamente quantidades que dependem da contração do tensor de curvatura. Isto implica que, para eliminarmos a hipótese (2.28), seria preciso, muito possivelmente, incluir termos na expressão de  $L_{\alpha\beta\mu}$  que façam

aparecer no tensor  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  aqueles termos que exibem a dependência em  $R_{\mu\nu}$ .

## APÊNDICE A

### LISTAGEM DO PROGRAMA DE REDUCE UTILIZADO NO CÁLCULO DOS EXEMPLOS DOS LEMAS

```
ARRAY      X(3), ME(3,3), MEI(3,3), H(3,3,3), DH(3,3,3,3), GAMA(3,3,3),
W(3,3,3,3), HC(3,3), HG(3,3), AGA(3,3), V(3), SIG(3,3), OME(3,3), AC(3),
DV(3,3), QUE(3,3), VI(3), AGAM(3,3), AGAI(3,3), DK(3,3), HT(3);

DK(0,0):=DK(1,1):=DK(2,2):=DK(3,3):=1;

MATRIX TETRA(4,4), TETRAINV(4,4);

IN PROCEDURES;

PAUSE;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1+1:3 DO ME(B1,A1):=ME(A1,B1);

ON GCD;

ON NERO;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1:3 DO <<AGA(A1,B1):=ME(A1,B1)-
V(A1)*V(B1)$AGA(B1,A1):=AGA(A1,B1) >>;

forall x let cos(x)**2=1-sin(x)**2;

forall x let cosh(x)**2=1+sinh(x)**2;

FOR A1=1:4 DO FOR B1=1:4 DO TETRA(A1,B1):=ME(A1-1,B1-1);

TETRAINV:=1/TETRA$

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO MEI(A1,B1):=TETRAINV(A1+1,B1+1);

FOR A1=0:3 DO VI(A1):=FOR B1=0:3 SUM MEI(A1,B1)*V(B1);

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO AGAM(A1,B1):=DK(A1,B1)-V(A1)*VI(B1);
```

```

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO FOR C1=B1:3 DO
<<GAMA(A1, B1, C1):=1/2*(FOR D1=0:3 SUM
MEI(A1, D1)*(DF(ME(D1, B1), X(C1))+DF(ME(D1, C1), X(B1)))-
DF(ME(B1, C1), X(D1))) ) )$GAMA(A1, C1, B1):= GAMA(A1, B1, C1) >> ;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO DV(A1, B1):= DF(V(A1), X(B1)) -
FOR E1=0:3 SUM GAMA(E1, A1, B1)*V(E1) ;

TETA:=FOR A1=0:3 SUM FOR B1=0:3 SUM DV(A1, B1)*MEI(A1, B1);

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO QUE(A1, B1):= FOR C1=0:3 SUM FOR
D1=0:3 SUM AGAM(A1, C1)*AGAM(B1, D1)*DV(C1, D1) ;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1+1:3 DO << WRITE OME(A1, B1):=
1/2*(QUE(A1, B1)-QUE(B1, A1)) $ OME(B1, A1):=-OME(A1, B1) >>;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1:3 DO << WRITE
SIG(A1, B1):=-1/2*(QUE(A1, B1)+QUE(B1, A1))-1/3*TETA*AGA(A1, B1) $
SIG(B1, A1):=SIG(A1, B1) >>;

FOR A1=0:3 DO WRITE AC(A1):=FOR B1=0:3 SUM DV(A1, B1)*VI(B1);

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1+1:3 DO FOR C1=0:3 DO <<WRITE
H(A1, B1, C1):=-K1*(V(A1)*SIG(B1, C1)-V(B1)*SIG(A1, C1))+
K2*(OME(A1, B1)*V(C1)+1/2*(OME(A1, C1)*V(B1)-OME(B1, C1)*V(A1)))+
K3*(AC(A1)*V(B1)*V(C1)-AC(B1)*V(A1)*V(C1))+K4*(AC(A1)*AGA(B1, C1)-
AC(B1)*AGA(A1, C1))+K5*TETA/3*(V(A1)*AGA(B1, C1)-V(B1)*AGA(A1, C1))$
H(B1, A1, C1):=-H(A1, B1, C1) >>;

FOR A1=0:3 DO FOR B1=A1+1:3 DO FOR C1=0:3 DO FOR D1=0:3 DO
<<DH(A1, B1, C1, D1):= DF(H(A1, B1, C1), X(D1)) - FOR E1=0:3 SUM
GAMA(E1, A1, D1)*H(E1, B1, C1) + GAMA(E1, B1, D1)*H(A1, E1, C1) +
GAMA(E1, C1, D1)*H(A1, B1, E1);DH(B1, A1, C1, D1):= -DH(A1, B1, C1, D1) >>
;

HSC:= FOR A1=0:3 SUM FOR B1=0:3 SUM FOR C1=0:3 SUM FOR D1=0:3 SUM
MEI(A1, B1)*MEI(C1, D1)*DH(A1, C1, B1, D1);

FOR A1=0:2 DO FOR B1=A1+1:3 DO FOR C1=A1:2 DO FOR
D1=MAX(B1, C1+1):3DO WRITE W(A1, B1, C1, D1):= DH(A1, B1, C1, D1) -
DH(A1, B1, D1, C1) + DH(C1, D1, A1, B1) - DH(C1, D1, B1, A1) +
1/2*((HC(D1, A1)+HC(A1, D1))*ME(B1, C1)+(HC(B1, C1)+
HC(C1, B1))*ME(A1, D1)-(HC(A1, C1)+HC(C1, A1))*ME(B1, D1)-(HC(B1, D1)+
HC(D1, B1))*ME(A1, C1)) +2/3*HSC*(ME(A1, C1)*ME(B1, D1)-
ME(A1, D1)*ME(B1, C1));

FOR A1=0:3 DO FOR B1=0:3 DO WRITE HG(A1, B1):= FOR C1=0:3 SUM FOR

```

```
D1=0:3 SUM MEI(C1, D1)*DH(A1, B1, C1, D1) ;
```

```
FOR A1=0:3 DO WRITE HT(A1):=FOR B1=0:3 SUM FOR C1=0:3 SUM  
H(A1, B1, C1)*MEI(B1, C1);
```

```
END;
```

## REFERÊNCIAS

- [1] - C. Lanczos - Rev. Mod. Phys. 34, (379), 1962.
- [2] - E. Bampi - G. Caviglia - GRG Journal 15, (375), 1983.
- [3] - M. Novello - H. Heintzmann - Proceedings of the fourth Marcel Grossmann Meeting On General Relativity, 1986.
- [4] - M. Novello - L. M. C. S. Rodrigues - Lett. al Nuovo Cimento 43, (292), 1985.
- [5] - M. Novello - A. Velloso - Aceito para publicação em GRG Journal, 1987.
- [6] - C. Lanczos - The Variational Principles of Mechanics, fourth edition, University of Toronto Press, 1977.
- [7] - M. Novello - II Escola de Cosmologia e Gravitação, vol. 1.
- [8] - J. M. Salim - Tese de Doutorado, C.B.P.F., 1982.
- [9] - M. Novello - J. M. Salim - Fundamentals of Cosmic Physics 8, (201), 1983.
- [10] - R. Portugal - Tese de Mestrado, C.B.P.F., 1984.
- [11] - R. M. Wald - General Relativity, The University of Chicago Press, 1984.
- [12] - J. L. Anderson - Principles of Relativity Physics, Academic Press, 1967.

"CÁLCULO DO POTENCIAL DE LANZOS PARA  
CERTAS CLASSES DE GEOMETRIAS"

ANDRÉ DE LEMOS VELLOSO

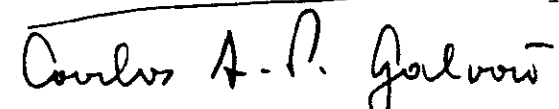
Tese de Mestrado apresentada no Centro Bra-  
sileiro de Pesquisas Físicas do Conselho  
Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico, fazendo parte da Banca Exami-  
nadora os seguintes professores:



Mario Novello - Presidente



Patricio Anibal Letelier Sotomayor



Carlos Augusto Pinto Galvão

Ívano Damião Soares - Suplente

Rio de Janeiro, 14 de setembro de 1987