

Marco Antonio dos Santos

CONSTRUÇÃO DA MATRIZ  $U$  PARA Q.C.D.

ATRAVÉS DOS PARÊNTESES DE DIRAC

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1987 -

## AGRADECIMENTOS

À F.R.A.Simão, pela forma humana como conduziu a orientação deste trabalho ;

À Jorge C.Mello, cuja cumplicidade já vem de longa data, persistiu neste trabalho, e ameaça varar milênios além ;

À K.Rothe e Jorge E.S.Ruiz, por colaborações e estímulos inestimáveis ;

À Humberto Teixeira, por um curto e feliz período de datilografia, onde prevaleceram competência e boa vontade ;

À os colegas, que são colegas, e isto basta ;

À poesia, que está nos corpos, e nos anima ;

À os que me pariram, e são meus pais ;

À Deus, por não existir ...

## RESUMO

Um procedimento para obtenção da matriz  $U$ , através de parênteses de Dirac, desenvolvido recentemente por Kiefer e Rothe, é aplicado à Q.C.D. .

A hamiltoniana de interação correspondente é aquela já obtida, por outros métodos independentes, por Schwinger, e, posteriormente, por Christ e Lee.

## S U M Á R I O

. AGRADECIMENTOS .....	ii
. RESUMO .....	iii
. INTRODUÇÃO .....	01
. CAPÍTULO 1 - MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO CANÔNICA EM TEORIAS DE CALIBRE .....	03
1.1 - Extensão de $\Gamma_p(N+R \text{ dim})$ para $\Gamma(2N \text{ dim})$ .....	06
1.2 - Parênteses de Dirac .....	08
1.3 - Escolha de Calibre .....	13
1.4 - O Espaço de Fase Reduzido, $\Gamma_r$ .....	20
1.5 - O Problema da Quantização .....	22
. CAPÍTULO 2 - OBTENÇÃO DA MATRIZ U PARA SISTEMAS SINGULARES .....	28
. CAPÍTULO 3 - MATRIZ U PARA QCD .....	47
. CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES .....	58

. APÊNDICE A - CÁLCULO DO COMUTADOR $[H_I^{(2)}(t), (z)]$ , eq. (3.40) .....	60
A-1 - Contribuição do 1º termo em (A.1) ..	61
A-2 - Contribuição do 2º termo em (A.1) ..	69
A-3 - Contribuição do 3º termo em (A.1) ..	73
A-4 - Contribuição do 4º termo em (A.1) ..	76
. APÊNDICE B - OBTENÇÃO DAS RELAÇÕES (A.43) e (A.44)..	82
. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	86

## INTRODUÇÃO

A física das partículas elementares e dos seus campos teve um desenvolvimento muito acentuado nas últimas décadas, e a crescente compreensão das interações fundamentais devida a esse desenvolvimento está intimamente ligada ao uso das chamadas teorias de calibre na descrição destas interações. Realmente, a teoria de Weinberg-Salam, que unificou as interações fracas e eletromagnéticas, e a teoria da cromodinâmica quântica para a descrição das interações fortes são, ambas, teorias de calibre. A crescente constatação experimental destas teorias demonstra o papel indispensável das teorias de calibre no estágio atual do conhecimento que possuímos da natureza.

Um fato crucial que caracteriza as teorias de calibre é que estas pertencem à categoria geral de teorias que possuem lagrangeanas singulares, ou seja, cuja matriz hessiana possui determinante nulo [ $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j) = 0$ ]. Enquanto que a nível lagrangeano o estudo destas teorias já pode ser considerado como complexo em geral, a passagem à formulação hamiltoniana oferece ainda maiores dificuldades. De fato, desde os anos 30 que o estudo de tais teorias vem sendo realizado, sem que se possa ainda considerar o assunto como de todo acabado. O problema final, que é a quantização destas teorias, esbarra em novas dificuldades. No primeiro capítulo trataremos resumidamente destes pontos gerais, acerca das teorias com lagrangeanas singulares.

Um dos procedimentos utilizados na quantização destas

teorias, e certamente o que mais se aproxima do procedimento usual de quantização canônica, baseia-se fundamentalmente na utilização dos parênteses de Poisson generalizados introduzidos por Dirac, e é por isso chamado de Procedimento de Quantização através de Parênteses de Dirac (PQPD). Como veremos ainda no primeiro capítulo, uma questão fundamental relacionada a este procedimento é a da fixação de calibre. Dentro deste contexto teremos oportunidade de analisar o significado das ambigüidades de Gribov de maneira bastante simples.

Posteriormente, no segundo capítulo, apresentaremos de forma bastante detalhada um procedimento desenvolvido recentemente para a obtenção da matriz  $U$  em teorias de calibre baseado no PQPD. Faremos o caso da eletrodinâmica quântica no calibre de Coulomb.

Finalmente, no terceiro capítulo, aplicaremos este procedimento para a obtenção da matriz  $U$  no caso interessante da cromodinâmica quântica (QCD).

## CAPÍTULO 1

### MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO CANÔNICA EM TEORIAS DE CALIBRE

Consideremos um sistema com um número finito de graus de liberdade descrito por uma lagrangeana

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.1)$$

onde  $i = 1, \dots, N$ .

A fim de construir uma dinâmica hamiltoniana definimos os momentos canônicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \quad (1.2)$$

Suporemos, e isto caracteriza a natureza singular da teoria, que a matriz quadrada, a hessiana,

$$\omega_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (1.3)$$

possui posto  $R < N$ .

Neste caso, temos, em consequência, que apenas  $R$  das  $N$  velocidades  $\dot{q}_a$ , com  $a = 1, \dots, R$ , podem ser tiradas de (1.2) como funções independentes dos  $q$ 's,  $p$ 's e as  $N-R$  velocidades restantes;

$$\dot{q}_a = f_a(q_i, p_i, \dot{q}_r) \quad (1.4)$$



onde  $r = R+1, \dots, N$ .

Temos, ainda, de (1.2),  $N-R$  relações envolvendo os  $p$ 's e os  $q$ 's, chamadas de vínculos primários;

$$\varphi_m(q, p) = 0 \quad (1.5)$$

com  $m = R+1, \dots, N$ .

Apesar de nosso conjunto de coordenadas possuir estas características, podemos ainda manter-nos no caminho de uma teoria hamiltoniana definindo a função

$$H(q, p) = p_i \dot{q}_i - L \quad (1.6)$$

Embora a princípio esta pareça ser uma função das velocidades, demonstra-se facilmente não ser este o caso (esta é, na realidade, uma propriedade da transformação de Legendre): seja a variação de  $H$  devida a variações de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $p$ ,

$$\delta H = \delta p_N \dot{q}_N + p_N \delta \dot{q}_N - \left( \frac{\partial L}{\partial q_N} \right) \delta q_N - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right) \delta \dot{q}_N = \dot{q}_N \delta p_N - \left( \frac{\partial L}{\partial q_N} \right) \delta q_N$$

onde utilizamos a equação (1.2).

Assim construída chamamos a esta função de hamiltoniana. É interessante notar que esta hamiltoniana depende de  $N+R$  coordenadas:  $N$   $q$ 's e  $R$   $p$ 's, uma vez que os  $N-R$  vínculos primários podem ser usados para expressar  $N-R$   $p$ 's em função dos  $q$ 's e dos outros  $R$   $p$ 's restantes. Para explicitar isto usaremos a letra  $i$  para designar os  $q$ 's, com  $i = 1, \dots, N$ , e a letra  $\alpha$  para designar

os  $p$ 's ,  $\alpha = 1, \dots, R$  . Assim, tendo em vista a eq.(1.6), podemos escrever, sem perda de generalidade,

$$H = p_\alpha \dot{q}_\alpha + g_r \dot{q}_r - L(q, \dot{q}) \quad (1.7)$$

onde

$$\alpha = 1, \dots, R$$

$$r = R+1, \dots, N$$

$$\dot{q}_\alpha = f_\alpha(q, p_\alpha, \dot{q}_r)$$

$$g_r = g_r(q, p_\alpha) \quad .$$

Assim,

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha + \frac{\partial g_r}{\partial p_\alpha} \dot{q}_r \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial g_r}{\partial q_i} \dot{q}_r$$

ou seja,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g_r}{\partial p_\alpha} \dot{q}_r \quad (1.9)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial g_r}{\partial q_i} \dot{q}_r$$

As equações (1.9) apresentam 3 diferenças fundamentais com relação às equações de Hamilton usuais: temos  $N+R$  equações em vez das  $2N$  equações usuais, temos termos extras, e estes termos extras representam arbitrariedades no sentido de que contêm as velocidades indeterminadas,  $\dot{q}_r$  .

### 1.1 - Extensão de $\Gamma_p$ (N+R dim) para $\Gamma$ (2N dim) :

Do que foi visto até aqui fica claro que não estamos num espaço de fases onde um formalismo canônico possa ser construído. Podemos entender esta situação da seguinte maneira: dado um espaço de fase  $\Gamma$ , de 2N dimensão, os vínculos primários obrigam a que o movimento do sistema se realize numa hipersuperfície  $\Gamma_p$ , de dimensão  $N+R < 2N$ . Na tentativa de construir um formalismo canônico, utilizaremos um artifício elaborado por Dirac [1], que nos permita reescrever nossas equações de maneira a utilizar todo o espaço.

Seja uma função  $F(q,p)$  definida sobre todo o espaço de fase. O valor de  $F$  sobre  $\Gamma_p$  é obtido trivialmente impondo os vínculos primários em seu argumento.

$$F(q,p) \Big|_{\Gamma_p} = F(q, p_\alpha, g_r(q, p_\alpha)) \quad (1.10)$$

Se  $F$  se anula sobre  $\Gamma_p$  dizemos que  $F$  é fracamente nula:

$$F \approx 0 \Rightarrow F \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (1.11)$$

Também se

$$F \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (1.12)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial q_i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \Big|_{\Gamma_p} = 0$$

ou seja, se  $F$  e seu gradiente se anulam sobre  $\Gamma_p$ , dizemos que  $F$  é fortemente nula.

Obviamente,  $\Gamma_p$  é definido por equações fracas

$$G_r(q,p) = p_r - g_r(q,p_\alpha) \approx 0 \quad (1.13)$$

Mostra-se [1]-[3] que as equações (1.9), que só valem sobre  $\Gamma_p$ , podem ser substituídas por equações que valem em todo o espaço  $\Gamma$ , desde que se utilizem as igualdades fracas. Nosso conjunto de equações de movimento se escreve, então:

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H + \dot{q}_r G_r\} \quad (1.14)$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H + \dot{q}_r G_r\}$$

e temos como condições extras

$$G_r \approx 0 \quad (1.15)$$

Aqui, só depois de calculados os parênteses de Poisson, como se os  $q$ 's e  $p$ 's fossem independentes, é que se utilizam os vínculos.

Se quisermos utilizar os vínculos na forma em que surgem, teremos

$$H_p = H + \mu_r \varphi_r \quad (1.16)$$

e

$$\dot{A} = \frac{dA}{dr} \approx \{A, H_p\} = \{A, H\} + \mu_r \{A, \varphi_r\} \quad (1.17)$$

## 1.2 - Parênteses de Dirac :

Dos defeitos que identificamos em (1.9) resta apenas a presença das arbitrariedades nas soluções, o que vai exigir para o seu tratamento a introdução de um novo objeto, que são os parênteses de Poisson generalizados, ou parênteses de Dirac.

Os  $\mu$ 's que aparecem em (1.17) serão determinados, em parte, pelas condições de consistência que devemos impor sobre os vínculos. A cada vínculo primário,  $\varphi_n$ , p.ex., devemos impor que sua derivada temporal se anule; isto nos assegura que, conforme o sistema evolua no tempo, as condições de vínculo permaneçam sendo satisfeitas. Isto significa que teremos equações como

$$\{\varphi_n, H\} + \{\varphi_n, \varphi_s\} \mu_s \approx 0 \quad (1.18)$$

Se o termo em  $\mu$  se anula identicamente e o primeiro, não, estaremos na presença de mais um vínculo,  $\chi_e$ , que chamamos de vínculo secundário. Para cada vínculo secundário que surja, a condição (1.18) deve ser, obviamente, também aplicada. Caso o termo em  $\mu$  não se anule, esta equação serve para a determinação dos  $\mu$ 's. No final teremos como resultado das condições impostas sobre todos os vínculos (primários e secundários), um novo conjunto de vínculos além dos primários,  $\chi$ 's, e um conjunto de equações onde aparecem os  $\mu$ 's :

$$\begin{aligned} \{\varphi_r, H\} + \{\varphi_r, \varphi_s\} \mu_s &\approx 0 \\ \{\chi_p, H\} + \{\chi_p, \varphi_s\} \mu_s &\approx 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Para tratar de (1.19) introduziremos o conceito de vínculos de primeira e de segunda classe. Se um dado vínculo possui parênteses de Poisson nulo (fracamente ao menos) com todo e qualquer outro vínculo, este é um vínculo de 1ª classe. Caso contrário, o vínculo é de 2ª classe.

Podemos então separar os vínculos primários e secundários em um conjunto de vínculos de 1ª classe e outro conjunto de vínculos de 2ª classe. Usaremos índices em maiúsculas para os de 1ª classe e em minúsculas para os de 2ª classe.

Assim teremos:

$$\{\varphi_r\} = \{\varphi^J\} \cup \{\varphi^j\}$$

$$\{\chi_\rho\} = \{\chi_\rho^A\} \cup \{\chi_\rho^a\}$$

e reescreveremos

$$\varphi_s u_s = \varphi^J v_J + \varphi^i u_i$$

Desta maneira, (1.19) fica:

$$\{\varphi^J, H\} \approx 0 \quad (1.20a)$$

$$\{\chi^A, H\} \approx 0 \quad (1.20b)$$

$$\{\varphi^i, H\} + \{\varphi^i, \varphi^j\} u_j \approx 0 \quad (1.20c)$$

$$\{\chi^a, H\} + \{\chi^a, \varphi^j\} u_j \approx 0 \quad (1.20d)$$

Como não temos a presença dos  $v_J$ , e como mostraremos a

seguir, que estas relações determinam os valores dos  $u_j$ , concluímos daqui que existem tantos parâmetros indeterminados quanto vínculos primários de 1ª classe.

Seja  $\Delta_{ab}(x,y)$  o elemento da matriz formada pelos parênteses de Poisson de todos os vínculos de 2ª classe  $\xi = (\varphi, \chi)$  :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\xi_1, \xi_1\} & \{\xi_1, \xi_2\} & \{\xi_1, \xi_3\} & \dots\dots\dots \\ \{\xi_2, \xi_1\} & \{\xi_2, \xi_2\} & \{\xi_2, \xi_3\} & \dots\dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

É fácil mostrar [1]-[3] que esta matriz é não-singular, ou seja,

$$\det \Delta \neq 0 \tag{1.21}$$

Podemos escrever as equações (1.20c) e (1.20d) como

$$\{\xi^\mu, H\} + \{\xi^\mu, \varphi^j\} u_j \approx 0$$

ou ainda,

$$\{\xi^\mu, \xi^\nu\} u_\nu \approx -\{\xi^\mu, H\} \tag{1.22}$$

Nestas passagens adotamos a convenção de que os índices  $i, j$  se referem aos vínculos primários de 2ª classe, os índices  $a, b$  se referem aos vínculos secundários de 2ª classe, e  $\mu, \nu, \lambda$  aos vínculos de 2ª classe, indistintamente.

Assim, de (1.22) segue que

$$\Delta_{\lambda\mu}^{-1} \{\xi^\mu, \xi^\nu\} u_\nu \approx -\Delta_{\lambda\mu}^{-1} \{\xi^\mu, H\}$$

ou seja,

$$u_\lambda \approx -\Delta_{\lambda\mu}^{-1} \{\xi^\mu, H\}$$

ou ainda

$$u_j \approx -\Delta_{j\mu}^{-1} \{\xi^\mu, H\} \quad (1.23a)$$

$$0 \approx \Delta_{a\mu}^{-1} \{\xi^\mu, H\} \quad (1.23b)$$

A equação de movimento

$$\dot{A} \approx \{A, H\} + v_J \{A, \varphi^J\} + u_j \{A, \varphi^j\}$$

fica, devido a (1.23a)

$$\dot{A} \approx \{A, H\} + v_J \{A, \varphi^J\} - \{A, \varphi^j\} \Delta_{j\mu}^{-1} \{\xi_\mu, H\} \quad (1.24)$$

ou, ainda, usando (1.23b)

$$\dot{A} \approx \{A, H\} + v_J \{A, \varphi^J\} - \{A, \xi_\mu\} \Delta_{\nu\mu}^{-1} \{\xi_\mu, H\} \quad (1.25)$$

Na forma em que se encontra a equação (1.25) a verificação das condições de consistência é imediata.

Vamos definir agora o parênteses de Dirac para duas funções de espaço de fase,  $A(q,p)$  e  $B(q,p)$ :



$$\{A, B\}_{D(\Delta)} = \{A, B\} - \{A, \xi_\nu\} \Delta_{\nu\mu}^{-1} \{\xi_\mu, H\} \quad (1.26)$$

O subscripto  $D(A)$  chama a atenção para o fato de que o parênteses de Dirac depende dos vínculos com os quais estamos trabalhando (a través da matriz  $\Delta$ ). Mais adiante veremos que para uma mesma teoria diversos parênteses de Dirac podem ser definidos. Com esta definição a equação de movimento (1.25) se escreve

$$\dot{A} \approx \{A, H\}_{D(\Delta)} + v_J \{A, \phi^J\} \quad (1.27)$$

Pode-se demonstrar que os parênteses de Dirac possuem as seguintes propriedades:

I. Antissimetria:  $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$

II. Linearidade: se  $c_1$  e  $c_2$  são constantes,

$$\{c_1 A + c_2 B, C\}_D = c_1 \{A, C\}_D + c_2 \{B, C\}_D$$

III. Existência de elementos nulos: se  $c$  é constante,

$$\{c, A\}_D = 0$$

IV. Identidade de Jacob:

$$\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D = 0$$

V. Regra do produto:  $\{AB, C\}_D = A\{B, C\}_D + \{A, C\}_D B$

Daí a denominação de parênteses de Poisson generalizadas para os parênteses de Dirac.

Note ainda, em relação a (1.27), que não temos a presença dos vínculos secundários de 1ª classe,  $\chi^A$ . Segundo uma conjectura devida à Dirac, estes podem ser introduzidos como termos extras na equação de movimento, que ficaria

$$\dot{A} \approx \{A, H\}_D + v_J \{A, \varphi^J\} + v_{J'} \{A, \varphi^{J'}\} \quad (1.28)$$

A validade desta conjectura está demonstrada [4] para teorias que possuem apenas vínculos de 1ª classe.

### 1.3 - Escolha de Calibre :

Vamos considerar, por simplicidade, que temos uma teoria em que existem  $m$  vínculos, todos de 1ª classe. Como veremos, não há perda de generalidade com esta restrição. Neste caso, a equação de movimento (1.25) fica

$$\dot{A} \approx \{A, H\} + v_J \{A, \varphi^J\} \quad J = 1, \dots, m \quad (1.29)$$

A descrição que temos da dinâmica apresenta as características mostradas na figura 1.1 .

Vemos que, partindo de um ponto inicial  $(q_0, p_0)$  em  $\Gamma_C$ , o sistema pode evoluir segundo uma infinidade de trajetórias equivalentes, uma para cada valor arbitrário do conjunto  $V^J$ . Assim, num dado instante  $t_1$  temos uma infinidade de pontos  $(q_1, p_1)$ ,

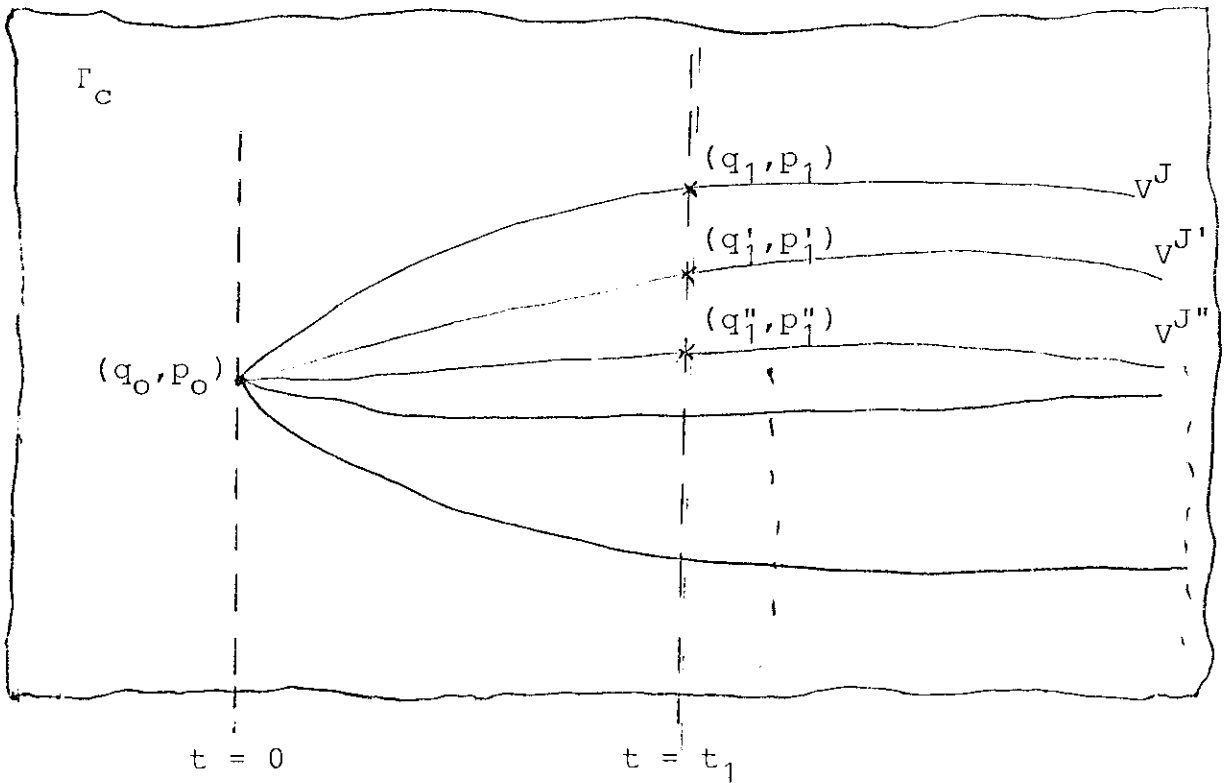


Fig. 1.1

$(q'_1, p'_1)$ ,  $(q''_1, p''_1)$ , ..., que representam de forma equivalente o estado em que o sistema se encontra. Equivalentes no sentido de que todos estes pontos foram obtidos através de (1.29), cada qual correspondendo a uma escolha das funções  $V^J$ . Estes pontos formam uma classe de equivalência em  $\Gamma_C$ , já que um ponto de uma classe de equivalência pode ser obtido a partir de outro ponto da mesma classe através de uma transformação canônica, a qual tem, como geradores, os vínculos de 1ª classe. A estas transformações chamamos de transformações de calibre e à simetria correspondente chamamos simetria interna ou simetria de calibre. Para ver isto, considere - mos uma variável dinâmica  $g$  num instante  $t$  e o valor que esta variável assume num instante  $\delta t$  depois de  $t$  :

$$g(\delta t) = g(t) + \dot{g}\delta t \approx g(t) + \{g, H\}\delta t + v_J \delta t \{g, \varphi^J\} \quad (1.30)$$

Agora, se usamos da arbitrariedade nos  $V^J$  e calculamos  $g(\delta t)$  utilizando um conjunto diferente,  $V_J^1$ , obtemos

$$g'(\delta t) \approx g(t) + \delta t\{g, H\} + V_J^1 \delta t\{g, \varphi^J\} \quad (1.31)$$

Temos então

$$\Delta g(\delta t) \approx (V_J - v_J^1) \delta t\{g, \varphi^J\} \quad (1.32)$$

Chamando de  $\varepsilon$  o coeficiente infinitesimal e arbitrário  $(V_J - v_J^1) \delta t$  em (1.32), temos

$$\Delta g(\delta t) \approx \{g, \varepsilon \varphi^J\} \quad (1.33)$$

e fica demonstrado o papel dos vínculos de 1ª classe como geradores de transformações de calibre.

É interessante compararmos o que se chama usualmente de simetria de calibre com o significado que damos a elas aqui. Tomemos como exemplo a Q.E.D..

Chama-se simetria de calibre (no sentido usual), às transformações observadas no espaço das configurações

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \varepsilon(x) \quad (i) \quad ,$$

e que mantém inalterada a densidade lagrangeana. Por outro lado, chamamos de simetria de calibre aqui, às transformações geradas pelos vínculos de 1ª classe no espaço de fase, e que mantém inal-

terada a hamiltoniana do sistema. Estas são

$$\delta_1 A_\mu(x) = \delta_\mu^0 \varepsilon_1(x)$$

$$\delta_1 \Pi^\mu(x) = 0$$

(ii),

$$\delta_2 A_\mu(x) = -\delta_\mu^i \partial_i \varepsilon_2(x)$$

$$\delta_2 \Pi^\mu(x) = 0$$

geradas pelos 2 únicos vínculos de 1ª classe que o sistema possui:

$$\varphi_1 = \Pi^0 \approx 0$$

$$\varphi_2 = \partial_i \Pi_i \approx 0$$

Como se vê, as transformações em (ii) são mais gerais que aquelas em (i). Por isso, sempre que estivermos ocupados com a fixação de calibre, estaremos nos referindo às transformações do tipo (ii).

Nosso problema agora é quebrar esta indeterminação verificada na representação dos estados físicos, o que na realidade se resume em escolher um entre os infinitos valores arbitrários das funções  $V_J$ . Lembramos que os coeficientes  $u_j$ , dos vínculos de 2ª classe, foram determinados a partir das condições de consistência que foram impostas sobre os vínculos de 2ª classe, e que neste processo de determinação foi fundamental o fato de a matriz  $\Delta$

não ser singular. Podemos determinar os  $V_{,T}$ 's de maneira análoga , desde que estendamos a hamiltoniana de maneira conveniente. Primeiro, reescrevemos (1.29) como

$$\dot{A} \approx \{A, H_T\} \quad (1.34)$$

onde  $H_T$  , a hamiltoniana total, é

$$H_T = H + V_J \varphi^J \quad J = 1, \dots, m \quad (1.35)$$

Vamos agora adicionar à  $H_T$  m vínculos extras, ou condições de calibre,

$$\varphi^k \approx 0 \quad k = 1, \dots, m \quad (1.36)$$

(Afinal, estaremos somando zeros!)

Teremos então  $H_E$  , a hamiltoniana estendida,

$$H_E = H + V_i \varphi^i \quad i = 1, \dots, 2m \quad (1.37)$$

e a equação de movimento é agora

$$\dot{A} \approx \{A, H_E\} \approx \{A, H\} + V_i \{A, \varphi^i\} \quad (1.38)$$

A única restrição que vamos impor sobre os novos vínculos (ou condições de calibre) é que estes sejam tais que o determinante da matriz  $2m \times 2m$

$$K_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\} \quad (1.39)$$

seja diferente de zero, ou seja,

$$|K| \neq 0 \quad (1.40)$$

(A condição (1.40) nos assegura que os  $2m$  vínculos são de 2ª classe [3], e, por conseguinte, esta é condição necessária e suficiente para que a indeterminação que estamos tratando esteja completamente quebrada. Em outras palavras, o calibre está fixado.)

Agora, a condição de consistência sobre este novo conjunto de vínculos

$$\dot{\varphi}_k \approx 0 \quad (1.41)$$

implica que

$$\{\varphi_k, H\} + V_i \{\varphi_k, \varphi_i\} \approx 0 \quad (1.42)$$

ou

$$V_i \approx -K_{ij}^{-1} \{\varphi_j, H\} \quad (1.43)$$

Assim,

$$\dot{A} \approx \{A, H\} - \{A, \varphi_i\} K_{ij}^{-1} \{\varphi_j, H\} \quad (1.44)$$

ou seja,

$$\dot{A} \approx \{A, H\}_{D(K)} \quad (1.45)$$

Anteriormente havíamos introduzido o conceito de igualdade fraca, que, no que diz respeito a parênteses de Poisson, significa ter que calcular primeiro o parênteses e só então impor a condição de vínculo: só assim o PP de uma quantidade com um vínculo poderia ser diferente de zero. Entretanto,

$$\{A, \varphi_\lambda\}_D = \{A, \varphi_\lambda\} - \{A, \varphi_\nu\} K_{\nu\mu}^{-1} \{\varphi_\mu, \varphi_\lambda\} \equiv 0 \quad (1.46)$$

já que

$$K_{\nu\mu}^{-1} \{\varphi_\mu, \varphi_\lambda\} = \delta_{\nu\lambda}$$

Assim, (1.45) pode ser escrita como igualdade forte

$$\dot{A} = \{A, H\}_{D(K)} \quad (1.47)$$

Assim, uma vez introduzidos os parênteses de Dirac, podemos abandonar o uso de igualdade fraca em todas as expressões, inclusive nos próprios vínculos, que agora são igualdades fortes

$$\varphi_k(q, p) = 0 \quad (1.48)$$

Desta maneira eliminamos todas as ambiguidades que havia na descrição da dinâmica, ou seja, as equações de movimento não mais possuem termos arbitrários. Lembramos que a existência destes termos arbitrários é que davam lugar às classes de equivalência na hipersuperfície dos vínculos. Determinados de maneira



unívoca estes termos, para o que a condição necessária e suficiente é a de que  $\det K \neq 0$ , temos assegurada a escolha de um, e apenas um, ponto em cada classe de equivalência. As transformações de calibre, que eram transformações canônicas, que levavam pontos de uma classe de equivalência em pontos dentro da mesma classe, deixam agora de existir. Isto é óbvio, visto que tais transformações eram geradas pelos vínculos de 1ª classe, que agora já não mais existem. Alguns autores impõem condições adicionais a uma escolha de calibre, tais como, que as condições sejam atingíveis por transformações de calibre, e que sejam únicas. A nosso ver tudo isto já está assegurado na condição  $\det K \neq 0$ . Todos os problemas que possam surgir com a escolha de calibre como o aparecimento de fantasmas ou a existência de ambiguidades tipo Gribou estão diretamente relacionados com o não cumprimento desta condição.

#### 1.4 - O Espaço de Fase Reduzido, $\Gamma_r$ :

Podemos resumir a nossa descrição da dinâmica dos sistemas singulares como segue: a presença dos vínculos na teoria implica em que o movimento se realiza numa hipersuperfície do espaço de fase total; a dimensão desta hipersuperfície pode ser contada da seguinte maneira: cada vínculo de 2ª classe diminui a dimensão do espaço de fase de uma unidade, mas, no caso de vínculos de 1ª classe esta dimensão é reduzida de duas unidades para cada vínculo, pois, como vimos, a existência de um vínculo de 1ª classe implica na necessidade de se impor uma condição de calibre a fim de quebrar a simetria gerada por esse vínculo. Assim, no caso de ter

mos  $m$  vínculos de 1ª classe (somados a estes, conseqüentemente,  $m$  condições de calibre) e  $2m'$  vínculos de 2ª classe (o número de vínculos de 2ª classe é sempre par [3]), a dimensão da hipersuperfície onde se realiza a dinâmica será

$$\dim \Gamma_r = 2N - 2m - 2m' = 2(N - m - m')$$

Entretanto, apesar de saber que o movimento se dá apenas nesta hipersuperfície, nossa formulação foi construída sobre todo o espaço de fase. O preço que pagamos para utilizar todo o espaço é que temos que utilizar parênteses de Poisson modificados, os parênteses de Dirac, e manter equações de vínculo além das equações de movimento.

Uma outra possibilidade de descrever a dinâmica, sem ter que introduzir novos objetos e trabalhar com equações extras, surge caso consigamos uma transformação de coordenadas, de  $q, p$  para  $q^*, p^*$ , tal que em termos destas novas coordenadas os vínculos se escrevam

$$\varphi^a(q(q^*), p(q^*)) \equiv q_i^* = 0 \quad (1.49a)$$

ou

$$\varphi^a(q(q^*), p(q^*)) \equiv p_i^* = 0 \quad (1.49b)$$

onde

$$a = 1, \dots, 2m + 2m'$$

$$i = 2(N - m - m'), \dots, 2N$$

Teremos então  $N-m-m'$  pares canônicos formando um espaço de fase de dimensão  $2(N-m-m')$ . Em termos destas coordenadas os parênteses de Dirac são parênteses de Poisson "amputados":

$$\left. \{A(q,p), B(q,p)\}_D \right|_{\substack{q=q(q^*, p^*) \\ p=p(q^*, p^*)}} \quad \because \quad \sum_{a=1}^{N-m-m'} \left( \frac{\partial A}{\partial q_a}(q^*, p^*) \frac{\partial B}{\partial p_a}(q^*, p^*) - \frac{\partial A}{\partial p_a}(q^*, p^*) \frac{\partial B}{\partial q_a}(q^*, p^*) \right) \quad (1.50)$$

Este processo é conhecido na literatura como redução de espaço de fase. Desta maneira, a descrição dinâmica de um sistema singular é feita da maneira usual. Infelizmente, só podemos assegurar que tal mudança de coordenadas é possível localmente [15] - [16], e ainda, em casos práticos, não é trivial encontrá-la, mesmo quando possível. Em nossa opinião, a liberdade que temos em escolher as condições de calibre pode ser ainda explorada para que possamos realizar tal processo. Explicando melhor, além de escolher condições de calibre tais que o determinante de Fadeev não se anule, podemos impor que também sejam tais que a citada transformação de coordenadas se realize globalmente.

### 1.5 - O Problema da Quantização :

O problema da quantização dos sistemas com lagrangeanos singulares tem sido resolvido de diversas formas, tanto no formalismo canônico quanto no de integrais de caminho. A situação é tal que nenhum destes processos é suficientemente geral a ponto

de se poder considerá-lo como definitivo, sendo por vezes, misturas e/ou modificações de tais processos, aplicados na prática, dependendo da situação ou teoria particular que se esteja estudando. Vamos aqui apenas comentar brevemente o carácter destes métodos, que se podem considerar mais gerais, e deter mais atenção naquele que utiliza os parênteses de Dirac como base, que é o que será utilizado neste trabalho.

A maneira mais trivial de se proceder à quantização de uma teoria de calibre é aquela em que se faz a redução de espaço de fase inicial para o espaço de fase físico, ou reduzido, e daí se utiliza o processo de quantização canónica habitual. Como vimos anteriormente, a redução de espaço de fase não pode ser feita numa situação geral, o que limita drasticamente a aplicação deste método.

Uma outra maneira de se quantizar sistemas com vínculos é a seguinte: a hamiltoniana extendida com os parâmetros arbitrários determinados via, p.ex., a imposição de condições de calibre, é utilizada para fornecer a evolução dinâmica dos estados quânticos via equação de Schrödinger; os operadores quânticos obedecem a regras de comutação que são obtidas dos parênteses de Poisson clássicos através da prescrição usual

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad ; \quad (1.51)$$

os vínculos, que agora são operadores, limitam os estados que podem representar o sistema àqueles que obedeçam a condição

$$\hat{\phi}_R |\psi\rangle = 0 \quad (1.52)$$

Para que as condições (1.52) sejam consistentes é necessário que também se verifique

$$[\hat{\phi}_R, \hat{\phi}_S] |\psi\rangle = 0 \quad (1.53)$$

Ocorre que  $[\phi_R, \phi_S]$  deve ser extraído, via (1.51), dos correspondentes parênteses de Poisson, que como sabemos, para vínculos de 1ª classe (este procedimento só se aplica a teorias em que todos os vínculos sejam de 1ª classe) obedecem a

$$\{\phi_R, \phi_S\} = f_T^{RS} \phi_T \quad (1.54)$$

Como, em geral, os coeficientes em (1.54) serão também operadores, dependerá da ordem em que escrevemos os vínculos, se estes coeficientes estarão ou não sempre à esquerda. Estes problemas fazem com que somente em raras ocasiões tal procedimento seja aplicável.

Um outro procedimento, bastante semelhante ao anterior, surge de, ao invés de impor (1.52), impor que

$$\langle \psi' | \hat{\phi}_R | \psi \rangle = 0 \quad (1.55)$$

ou seja, que os elementos de matriz dos vínculos se anulem. Dificuldades parecidas com as citadas no procedimento anterior igualmente retiram a generalidade deste método.

O nosso interesse aqui é num procedimento que comumente é chamado de Procedimento de Quantização via Parênteses de Dirac (PQPD)[5]. Realmente, a forma dada por nós na descrição da dinâmica a nível clássico foi escolhida de maneira a que este procedimento fosse utilizado no momento de passar à descrição quântica. Podemos resumir o PQPD nos seguintes passos:

- i) o estado do sistema será descrito por um vetor normalizado  $|\psi\rangle$  (na notação bra-ket de Dirac), elemento de um espaço de Hilbert, com produto escalar  $\langle\psi|\psi'\rangle$  ;
- ii) as funções de espaço de fase tornam-se operadores. Quantidades mensuráveis, as observáveis quânticas, tornam-se operadores lineares hermitianos.
- iii) as regras de comutação a tempos iguais entre os operadores serão extraídas dos correspondentes parênteses de Dirac segundo a prescrição

$$\{A,B\}_D \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A},\hat{B}] \quad (1.56)$$

- iv) a evolução temporal dos operadores (no quadro de Heisenberg) é obtida das equações clássicas (1.47) da maneira usual, usando agora (1.56), e ficam

$$\dot{\hat{A}} = [\hat{A},\hat{H}] \quad (1.57)$$

- v) as relações de vínculo tornam-se relações entre operadores. Também aqui o problema de ordenamento discutido em relação ao procedimento anterior tem que ser tomado em conta.

Além do problema de ordenamento, uma outra dificuldade, em geral citada na literatura [3], está em que os parênteses de Dirac fundamentais, que envolvem coordenadas e momenta, não são, em geral, simples funções delta. Lembramos, entretanto, que estamos trabalhando com um conjunto de coordenadas e momenta que não são independentes entre si. Se a transição para o espaço de fase físico,  $\Gamma_r$ , fosse possível globalmente, e só então, poderíamos exigir que em termos deste conjunto reduzido de coordenadas e momenta ( $q^*, p^*$ ) as relações de comutação fundamentais fossem canônicas. Uma vez que este não seja o caso, o relaxamento desta condição é automático.

Por último, lembramos que a condição (1.40) é fundamental para a aplicação deste procedimento. Que para sistemas singulares arbitrários é sempre possível encontrar um conjunto de condições de calibre que satisfaça (1.40) não está a princípio assegurado. Realmente, para, p.ex., QCD compactada, existe mesmo um teorema (Singer [6]) que assegura não existir um conjunto de condições de calibre que satisfaça (1.40). Esta é uma situação séria, entre aspas, pois que, também a princípio, não existem razões muito rígidas para que se insista que a teoria seja compactada. Neste trabalho aplicaremos o PQPD à QCD no calibre de Coulomb. Com estas condições de calibre o determinante de Fadeev-Popov é diferente de zero com exceção de algumas regiões onde ele se anula. Isto significa que, se posto de  $K_{ij}$  é  $m' < 2m$  ( $m$  é o número de vínculos de 1ª classe), apenas  $m'$  dos  $2m$   $V_i$ 's em (1.42) são fixados. Desta forma, a descrição dos estados nestas regiões permanece ambígua. Este tipo de problema com a escolha do calibre é conhecido

como ambiguidades de Gribov, e vemos aqui como estas estão intimamente relacionadas com a não fixação correta do calibre.

De qualquer forma, o fato de que a condição (1.40) não se verifica com determinadas condições de calibre proíbe qualquer tentativa de aplicação rigorosa do PQPD neste calibre. Por esta razão, a aplicação deste procedimento como será feita neste trabalho tem uma conotação, a princípio, meramente formal. Dizemos a princípio porque seria necessária uma investigação mais detalhada dos resultados que obtivemos para que uma palavra final a respeito de sua validade, se houver, possa ser dada. Enfim, nossos resultados são equivalentes aos já obtidos por outras formulações [11],[12],[13],[14].



## CAPÍTULO 2

### OBTENÇÃO DA MATRIZ U PARA SISTEMAS SINGULARES

No que diz respeito a sistemas físicos discretos, o problema dos sistemas vinculados está completamente resolvido no capítulo anterior. Para teorias de campo, entretanto, teremos que ir um pouco adiante. Realmente, a informação fundamental que uma teoria de campo deve fornecer é a matriz U, ou os elementos de matriz desta. Com isto, se temos um campo, ou um conjunto de campos em interação, e sabemos que num dado instante este campo se encontra num certo estado, interessa saber, num instante posterior, a probabilidade de que este estado tenha evoluído para outro determinado estado. Estas amplitudes de probabilidade são exatamente os elementos de matriz da matriz U. A questão que se coloca então é como obter a matriz U para sistemas com vínculos. Num trabalho recente [7], intitulado "On the Construction of the U-matrix from Dirac Brackets", Kieffer e Rothe apresentaram um procedimento que resolve esta questão. Neste trabalho, como ilustração, a equação para a obtenção da matriz U foi obtida para a Q.E.D. em dois calibres diferentes, o de Coulomb e o axial. Nosso objetivo neste trabalho é obter o mesmo resultado para o caso da QCD, o que faremos no próximo capítulo. Neste capítulo faremos a quantização da QED no calibre de Coulomb, a título de ilustrar, além da teoria desenvolvida no capítulo anterior, também o procedimento de Kieffer e Rothe.

Partimos da densidade lagrangeana de campo eletromagnético em interação com o campo de Dirac:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

e  $A_\mu$ ,  $\psi$  são as coordenadas dos campos eletromagnéticos e de Dirac respectivamente.

A partir das equações de definição dos momenta obtemos

$$\Pi^0(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A^0(x)} = 0 \quad (2.3a)$$

$$\Pi_i(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A^i(x)} = F_{i0}(x) \quad (2.3b)$$

$$\Pi_\psi(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \psi(x)} = i\psi^+(x) \quad (2.3c)$$

onde

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(x) \quad (2.3d)$$

Temos portanto (2.3a) como único vínculo primário da teoria.

Para obter a densidade hamiltoniana de nossa teoria partimos da definição usual

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} \quad (2.4)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi_i \partial^0 A^i + \Pi_\psi \partial_0 \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = \\
&= -\Pi_i \partial_0 A_i + \Pi_\psi \partial_0 \psi + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} - i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \\
&\quad - i\bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi - e \bar{\psi} \gamma^0 A_0 \psi - e \bar{\psi} \gamma^i A_i \psi + m\bar{\psi} \psi = \\
&= -\Pi_i \partial_i A_0 + \Pi_i \Pi_i + \Pi_\psi \partial_0 \psi + \frac{1}{2} B_i B_i - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i - i\psi^+ \partial_0 \psi - \\
&\quad - i\psi^+ \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi - e\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi + m\psi^+ \gamma^0 \psi = \\
&= \frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{2} B_i^2 + A_0 \partial_i \Pi_i - \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + ie \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^i A_0 \psi + \\
&\quad + ie \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^i A_i \psi - im \Pi_\psi \gamma^0 \psi = \\
&= \frac{1}{2} (\Pi_i^2 + B_i^2) + \Pi_\psi \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - ie \vec{\gamma} \cdot \vec{A} - im)\psi + A_0 (\partial_i \Pi_i + ie \Pi_\psi \psi)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Note que a equação de vínculo (2.3a) ainda está sendo usada como igualdade forte. Se usarmos a hamiltoniana correspondente a esta densidade hamiltoniana, para impor que o vínculo (2.3a) se preserve no tempo, temos

$$\dot{\Pi}_0 \approx \{\Pi_0, H\} \approx 0 \tag{2.6}$$

que nos fornece o vínculo secundário

$$\partial_i \Pi_i + ie \Pi_\psi \psi \approx 0 \quad (2.7)$$

Ao impor que (2.7), que é a lei de Gauss, se preserve no tempo, verificamos que isto se satisfaz automaticamente; temos então apenas dois vínculos na teoria. É imediato verificar que ambos os vínculos são de 1ª classe, de forma que, para completar a descrição dinâmica resta apenas impor as condições de calibre. Chamando

$$\chi_1 = \Pi_0 \approx 0 \quad (2.8a)$$

$$\chi_2 = \partial_i \Pi_i + ie \Pi_\psi \psi \approx 0 \quad (2.8b)$$

e escolhendo o calibre de Coulomb, com

$$\chi_3 = \hat{A}_0 \approx 0 \quad (2.8c)$$

$$\chi_4 = \partial_i A_i \approx 0 \quad (2.8d)$$

onde  $\hat{A}_0$  é a coordenada canonicamente conjugada a  $\Pi_0$  [5], temos formado o "vetor"  $\vec{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ , e desse vetor, a matriz cujos elementos são

$$K_{\ell\ell'} = \{\chi_\ell, \chi_{\ell'}\} \quad (2.9)$$

Verifica-se facilmente que a matriz (2.9) é inversível, sua inversa sendo dada por (2.17) adiante. Conforme discutido no capítulo anterior, isto nos garante que as condições (2.8c) e (2.8d) são suficientes para a quebra das simetrias geradas pelos vínculos (2.8a) e (2.8b), ou seja, a fixação do calibre está efetuada.

Assim, com a hamiltoniana

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\Pi_i^2 + B_i^2) + \Pi_\psi \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - ie\vec{\gamma} \cdot \vec{A} - im)\psi \right\} , \quad (2.10)$$

os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \sum_{\ell, \ell'} \int d^3x d^3y [\{A, \chi_\ell(x)\} K_{\ell\ell'}^{-1}(x, y) \{X_{\ell'}(x), B\}] \quad (2.11)$$

as equações de movimento na forma

$$\dot{A} = \{A, H\}_D \quad (2.12)$$

e as equações (2.8) como equações fortes, temos completada a descrição clássica da Q.E.D. .

Como vimos no capítulo anterior, em nosso processo de quantização os comutadores são extraídos dos parênteses de Dirac correspondentes. Vamos mostrar como este processo é levado a cabo neste exemplo, sem realizar todos os cálculos, o que tornaria muito cansativa esta descrição. Antes disso, entretanto, é necessário que se faça uma observação para levar em conta o fato de estarmos trabalhando com férmions. Neste caso é necessário utilizar

uma álgebra mais geral, conhecida na literatura como álgebra de Grassmann e redefinir algumas operações que vinhamos utilizando [8]. Assim, os parênteses de Poisson de dois quaisquer funcionais, arbitrários mas regulares, das coordenadas e momenta, é definido como

$$\begin{aligned} \{A, B\} = & \int d^3z \left[ \frac{\delta A}{\delta A^\mu(z)} \frac{\delta B}{\delta \Pi_\mu(z)} - \exp(i\Pi N_A N_B) \frac{\delta B}{\delta A^\mu(z)} \frac{\delta A}{\delta \Pi_\mu(z)} \right] + \\ & + \int d^3z \left[ \frac{A\vec{\delta}}{\delta\psi(z)} \frac{\vec{\delta}B}{\delta\Pi_\varphi(z)} - \exp(i\Pi N_A N_B) \frac{B\vec{\delta}}{\lambda\psi(z)} \frac{\vec{\delta}A}{\delta\Pi_\varphi(z)} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aqui,  $N_A$  é igual a 0 ou 1 dependendo de A ser bóson ou férmion, respectivamente.

A partir da definição (2.13) as seguintes propriedades podem ser derivadas:

$$\{A, B\} = \exp[i\Pi(N_A N_B - 1)] \{B, A\} \quad (2.14a)$$

$$\{A, \alpha B + \beta C\} = \alpha \{A, B\} + \beta \{A, C\} \quad (2.14b)$$

$$\{A, BC\} = \exp(i\Pi N_A N_B) B \{A, C\} + \{A, B\} C \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}\} + \exp[i\Pi N_A (N_D - N_C)] \{B, \{C, A\}\} + \\ + \exp[i\Pi N_C (N_A - N_B)] \{C, \{A, B\}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.14d)$$

Tendo em conta estes pontos, vamos calcular um comutador fundamental como exemplo. Antes de tudo, é necessário conhecer a matriz  $K_{\ell\ell}, (\vec{x}, \vec{y})$ . Esta é

$$K_{\ell\ell}, (\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_x^2 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla_x^2 \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Como exemplo, o elemento  $K_{24}(x, y)$  é obtido :

$$\begin{aligned} K_{24}(\vec{x}, \vec{y}) &= \{ \partial_i \Pi_i(\vec{x}), \partial_j A_j(\vec{y}) \} = \\ &= \int d^3 z \left[ \frac{\partial \partial_i \Pi_i(\vec{x})}{\partial A_\mu(\vec{z})} \frac{\partial \partial_j A_j(\vec{y})}{\partial \Pi_\mu(\vec{z})} - \frac{\partial \partial_i \Pi_i(\vec{x})}{\partial \Pi_\mu(\vec{z})} \frac{\partial \partial_j A_j(\vec{y})}{\partial A_\mu(\vec{z})} \right] = \\ &= - \int d^3 z \left[ \frac{\partial \partial_i \Pi_i(\vec{x})}{\partial \Pi_\mu(\vec{z})} \frac{\partial \partial_j A_j(\vec{y})}{\partial A_\mu(\vec{z})} \right] = \\ &= - \int d^3 z \left[ \partial_i^x (\delta_\mu^i \delta(\vec{x}-\vec{z})) \cdot \partial_j^y (\delta_\mu^j \delta(\vec{z}-\vec{y})) \right] = \\ &= - \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \int d^3 z \delta(\vec{x}-\vec{z}) \delta(\vec{z}-\vec{y}) = \\ &= \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(\vec{x}-\vec{y}) = \nabla_x^2 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

A inversa se encontra facilmente e é:

$$K_{\ell, \ell'}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ -\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Com (2.16), o parênteses de Dirac entre duas quaisquer funções

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \sum_{\ell, \ell'} \int d^3x \, d^3y \{A, \chi_{\ell}(\vec{x})\} K_{\ell\ell'}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \{\chi_{\ell'}(\vec{y}), B\} \quad (2.18)$$

se calcula diretamente. Como um exemplo calculamos o seguinte parênteses de Dirac:

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)\}_D &= \delta_i^j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \int d^3x' \, d^3y' \{A^i(\vec{x}, t), \Pi_0(\vec{x}', t) \\ &\quad \cdot \delta^3(\vec{x}'-\vec{y}')\{\hat{A}_0(\vec{y}', t), \Pi_j(\vec{y}, t)\} - \\ &\quad - \int d^3x' \, d^3y' \{A^i(\vec{x}, t), \partial_k \Pi_k(\vec{x}', t)\} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{4\pi|\vec{x}'-\vec{y}'|} \{\partial_{\ell} A_{\ell}(\vec{y}', t), \Pi_j(\vec{y}, t)\} \end{aligned}$$



O 2º termo da direita é obviamente nulo. Agora,

$$\begin{aligned}
 \{A^i(\vec{x}, t), \partial_k \Pi_k(\vec{y}', t)\} &= \int d^3z \frac{\partial A^i(\vec{x}, t)}{\partial A_\mu(\vec{z})} \frac{\partial \partial_k \Pi_k(\vec{x}', t)}{\partial \Pi_\mu(\vec{z})} = \\
 &= \int d^3z \delta(\vec{x}-\vec{z}) \partial_{x'k} \frac{\partial \Pi_k(\vec{x}', t)}{\partial \Pi_i(\vec{z})} = \\
 &= \partial_{x'i} \int d^3z \delta(\vec{x}-\vec{z}) \delta(\vec{z}-\vec{x}') = \\
 &= \partial_i \delta(\vec{x}-\vec{x}')
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\{\partial_\ell A_\ell(\vec{y}', t), \Pi_j(\vec{y}, t)\} = \partial_j \delta(\vec{y}-\vec{y}')$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \{A^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)\}_D &= \delta_j^i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \int d^3x' d^3y' \frac{1}{\Delta} \partial_i \delta(\vec{x}-\vec{x}') \cdot \\
 &\quad \cdot \partial_j \delta(\vec{y}-\vec{y}')
 \end{aligned}$$

Primeiro,

$$\begin{aligned}
 \int d^3x' \frac{1}{4\pi|\vec{x}'-\vec{y}'|} \partial_i^{x'} \delta(\vec{x}-\vec{x}') &= - \partial_i^{x'} \frac{1}{4\pi|\vec{x}'-\vec{y}'|} \Big|_{\vec{x}'=\vec{x}} = \\
 &= - \partial_i^x \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}'|}
 \end{aligned}$$

Depois,

$$\begin{aligned} + \int d^3 y' \partial_i^x \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} \partial_j^y \delta(\vec{y} - \vec{y}') &= - \partial_j^y \partial_i^x \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} = \\ &= \partial_j^y \partial_i^y \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} \end{aligned}$$

Mas,

$$\Delta \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}') \quad \therefore \quad \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} = -\Delta^{-1} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}')$$

Temos então,

$$\{A^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)\}_D = \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

ou

$$\{A^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)\}_D = \left( \delta^{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.19)$$

No caso de calcular parênteses de Dirac com variáveis fermiônicas, lembramos que os parênteses de Poisson presentes na definição dos parênteses de Dirac devem ser aqueles definidos em (2.13). Como conseqüência as propriedades fundamentais dos parênteses de Dirac agora ficam:

$$\{A, B\}_D = \exp[i\pi(N_A N_B - 1)] \{B, A\}_D \quad (2.20a)$$

$$\{A, \alpha B + \beta C\}_D = \alpha \{A, B\}_D + \beta \{A, C\}_D \quad (2.20b)$$

$$\{A, BC\}_D = \exp(i\pi N_A N_B) B \{A, C\}_D + \{A, B\}_D C \quad (2.20c)$$

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}_D\}_D + \exp[i\pi N_A |N_B - N_C|] \{B, \{C, A\}_D\}_D + \\ + \exp[i\pi N_C |N_A - N_B|] \{C, \{A, B\}_D\}_D = 0 \end{aligned} \quad (2.20d)$$

Finalmente, também a passagem para a teoria quântica deve ser feita sob as seguintes regras (onde B é bóson, F é férmion):

$$i\{B_1(\vec{x}), B_2(\vec{y})\}_D \rightarrow [\hat{B}_1(\vec{x}), \hat{B}_2(\vec{y})] \quad (2.21a)$$

$$i\{B(\vec{x}), F(\vec{y})\}_D \rightarrow [\hat{B}(\vec{x}), \hat{F}(\vec{y})] \quad (2.21b)$$

$$i\{F_1(\vec{x}), F_2(\vec{y})\}_D \rightarrow \{\hat{F}_1(\vec{x}), \hat{F}_2(\vec{y})\} \quad (2.21c)$$

Desta maneira, chegamos à teoria quantizada, com a hamiltoniana quântica

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) + \Pi_\psi \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - ie\vec{\gamma} \cdot \vec{A} - im)\psi \right\} \quad (2.22)$$

onde as coordenadas e funções destas são operadores num espaço de Hilbert, e as relações de comutação fundamentais são:

$$[A^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)] = i \left( \delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\Delta} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.23a)$$

$$[A^i(\vec{x}, t), \psi_\alpha(\vec{y}, t)] = [A^i(\vec{x}, t), \Pi_{\psi_\alpha}(\vec{y}, t)] = 0 \quad (2.23b)$$

$$\{\psi(\vec{x}, t), \Pi_\psi(\vec{y}, t)\} = i \delta^3(\vec{x}, \vec{y}) \quad (2.23c)$$

$$[\Pi_j(\vec{x}, t), \psi_\alpha(\vec{y}, t)] = e \partial_j^x \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \psi_\alpha(\vec{y}, t) \quad (2.23d)$$

$$[\Pi_j(\vec{x}, t), \Pi_{\psi_\alpha}(\vec{y}, t)] = -e \partial_j^x \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \Pi_{\psi_\alpha}(\vec{y}, t) \quad (2.23e)$$

Isto completa o processo de quantização canônica. Para ir adiante, em busca da matriz  $U$ , consideremos uma transformação unitária que leve os campos independentes do conjunto de campos em questão,  $A_\mu$ ,  $\Pi_\mu$ ,  $\psi_\alpha$ ,  $\Pi_{\psi_\alpha}$ , em campos livres "IN":

$$O_{IN}(\vec{x}, t) = U(t) O(\vec{x}, t) U^{-1}(t) \quad (2.24)$$

O fato de que apenas os campos independentes são transformados por (2.24) em campos "IN" livres justifica-se, por um lado, pelo fato de que, conforme discutido no capítulo anterior, estamos trabalhando em um espaço de fase com dimensão maior que a dimensão do implícito espaço de fase físico. Desta maneira, apesar de não explicitarmos quais campos são independentes, sabemos que fazer exigências de ordem física sobre todas as coordenadas significa uma hiper-restrição ao sistema.

Por outro lado, as próprias regras de comutação que tra

zem a constante de acoplamento, no caso (2.23d,e), se tornariam inconsistentes se nelas víssemos todos os campos como "IN", o que justifica ainda mais a restrição de se transformar em "IN" os campos independentes.

Em continuação ao nosso processo de construção da matriz  $U$ , consideremos a expressão da hamiltoniana "IN", com  $e = 0$ :

$$H_{IN}^{(0)}(t) = U(t) H U^{-1}(t) \Big|_{e=0} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\Pi}_{IN}^2 + \vec{B}_{IN}^2) + \Pi_{\psi}^{IN} \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN} \right\} \quad (2.25)$$

Vamos agora calcular o comutador

$$[H_{IN}^{(0)}(t), \psi_{IN}(x)] \quad (2.26)$$

Fossem canônicas as nossas regras de comutação fundamentais, poderíamos esperar de (2.26) simplesmente  $\dot{\psi}_{IN}$ . Entretanto, em nosso caso, temos:

$$\begin{aligned} [H_{IN}^{(0)}(t), \psi_{IN}(\vec{x}, t)] &= \frac{1}{2} \int d^3y [ \vec{\Pi}_{IN}^2(\vec{y}), \psi_{IN}(\vec{x}) ] + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3y [ \vec{B}_{IN}^2(\vec{y}), \psi_{IN}(\vec{x}) ] + \\ &+ \int d^3y [ \Pi_{\psi}^{IN}(\vec{y}) \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN}(\vec{y}), \psi_{IN}(\vec{x}) ] \end{aligned} \quad (2.27)$$

O segundo termo do lado direito se anula em vista de

(2.23b). O terceiro termo, lembrando que

$$[F_1, F_2, F_3] = F_1\{F_2, F_3\} - \{F_1, F_3\}F_2 \quad (2.28)$$

e utilizando (2.23c), fica

$$\begin{aligned} \int d^3Y [\Pi_{\psi}^{IN}(\vec{Y}) \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN}(\vec{Y}), \psi_{IN}(\vec{x})] &= \\ &= - \int d^3Y i \delta^3(\vec{x} - \vec{Y}) \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN}(\vec{Y}) = \\ &= - i \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Da equação de Dirac para  $\psi_{IN}$

$$(i\gamma \cdot \partial - m) \psi_{IN} = 0 \quad (2.30)$$

temos

$$-i\gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - im) \psi_{IN}(x) = -i\partial_0 \psi_{IN}(x) \quad (2.31)$$

Com estes resultados temos

$$[H_{IN}^{(0)}(t), \psi_{IN}(x)] - \frac{1}{2} \int d^3Y [\vec{\Pi}_{IN}^2(Y), \psi_{IN}(x)] = -i\partial_0 \psi_{IN}(x) \quad (2.32)$$

Vemos claramente que  $H_{IN}^{(0)}$  não é o gerador da evolução temporal do campo fermiônico livre,  $\psi_{IN}$ , mas apenas parte deste.

Para encontrar a outra parte precisamos desenvolver o

segundo termo do lado esquerdo em (2.32). Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3Y [\dot{\Pi}_{IN}^2(Y), \psi_{IN}(x)] &= \frac{1}{2} \int d^3Y (\Pi_j(Y) [\Pi_j(Y), \psi(x)] + \\ &+ [\Pi_j(Y), \psi(x)] \Pi_j(Y)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando (2.23d) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3Y [\dot{\Pi}_{IN}^2(Y), \psi_{IN}(x)] &= \frac{1}{2} e \int d^3Y \left[ \left( \partial_j^Y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{Y}|} \right) \Pi_j(Y) \psi(x) + \right. \\ &+ \left. \left( \partial_j^Y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{Y}|} \right) \psi(x) \Pi_j(Y) \right] = \\ &= -\frac{e}{2} \int \frac{d^3Y}{4\pi|\vec{x}-\vec{Y}|} (\partial_j \Pi_j(Y) \psi(x) + \psi(x) \partial_j \Pi_j(Y)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente, fazendo uso da lei de Gauss

$$\partial_j \Pi_j = -ie \Pi_\psi \psi \quad (2.35)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3Y [\dot{\Pi}_{IN}^2(Y), \psi_{IN}(x)] &= \frac{ie^2}{2} \int \frac{d^3Y}{4\pi|\vec{x}-\vec{Y}|} (\Pi_\psi^{IN}(Y) \psi_{IN}(Y) \psi_{IN}(x) + \\ &+ \psi_{IN}(x) \Pi_\psi^{IN}(Y) \psi_{IN}(Y)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

É necessário que se comente a questão do ordenamento nas expressões quânticas. Embora esta não seja, para nossos objetivos aqui, uma questão fundamental, é preciso, em geral, decidir, em

expressões do tipo (2.35), em que ordem se escrevem produtos de operadores. Restrições de ordem física, como p.ex., que a carga se anule no vácuo, além de condições de consistência, ditam o ordenamento a ser escolhido no caso geral. Aqui, estamos ordenando nossas expressões da maneira usualmente utilizada.

Seja agora a hamiltoniana de interação coulombiana:

$$H_I^{(2)}(t) = -\frac{e^2}{8\pi} \int d^3z d^3y \frac{\Pi_\psi^{IN}(y)\psi_{IN}(y)\Pi_\psi^{IN}(z)\psi_{IN}(z)}{|\vec{z} - \vec{y}|} \quad (2.37)$$

e calculemos o comutador

$$[H_I^{(2)}(t), \psi_{IN}(x)] \quad (2.38)$$

(a ordem em que aparecem as variáveis em (2.36) foi escolhido de forma a que nosso resultado seja consistente com a ordem que escolhemos para escrever a lei de Gauss, equação (2.35), como veremos).

Temos

$$[H_I^{(2)}(t), \psi_{IN}(x)] = -\frac{e}{8\pi} \int \frac{d^3z d^3y}{|\vec{z} - \vec{y}|} [\Pi_\psi(y)\psi(y)\Pi_\psi(z)\psi(z), \psi(x)] =$$

(utilizando (2.28))

$$= -\frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3z d^3y}{|\vec{z} - \vec{y}|} (\Pi_\psi(y)\psi(y)\Pi_\psi(z)\{\psi(z), \psi(x)\} - \{\Pi_\psi(y)\psi(y)\Pi_\psi(z), \psi(x)\} \psi(z)) =$$



(lembrando-se que  $\{BF_1, F_2\} = B\{F_1, F_2\} - [B, F_2]F_1$  e que, obviamente,  $\{\psi(z), \psi(x)\} = 0$ )

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3z \, d^3y}{|\vec{z} - \vec{y}|} (\Pi_\psi(y)\psi(y)\{\Pi_\psi(z), \psi(x)\} - \\
 &\quad - [\Pi_\psi(y)\psi(y), \psi(x)]\Pi_\psi(z)\psi(z)) = \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3z \, d^3y}{|\vec{z} - \vec{y}|} (i\delta^3(z-x)\Pi_\psi(y)\psi(y)\psi(z) - \Pi_\psi(y)\{\psi(x), \psi(x)\}\Pi_\psi(z) \cdot \\
 &\quad \cdot \psi(z) + \{\Pi_\psi(y), \psi(x)\} \psi(y)\Pi_\psi(z)\psi(z)) = \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3z \, d^3y}{|\vec{z} - \vec{y}|} (i\delta^3(z-x)\Pi_\psi(y)\psi(y)\psi(z) + i\delta^3(y-x)\psi(y)\Pi_\psi(z)\psi(z)) = \\
 &= \frac{ie^2}{8\pi} \int \frac{d^3z}{|\vec{z} - \vec{x}|} \psi(x)\Pi_\psi(z)\psi(z) + \frac{ie^2}{8\pi} \int \frac{d^3y}{|\vec{y} - \vec{x}|} \Pi_\psi(y)\psi(y)\psi(x)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

que, tendo em vista (2.36), significa

$$[H_I^{(2)}(T), \psi_{IN}(x)] = \frac{1}{2} \int d^3y [\vec{\Pi}_{IN}^2(y), \psi_{IN}(x)] \tag{2.40}$$

Levando este resultado em (2.32), temos finalmente:

$$\partial_0 \psi_{IN}(x) = i[H_{IN}^{(0)} - H_I^{(2)}, \psi_{IN}(x)] \tag{2.41}$$

Esta equação nos mostra que  $H_{IN}^{(0)} - H_I^{(2)}$  é o gerador da evolução temporal dos campos independentes "IN". A obtenção da matriz  $U$  agora é feita segundo o procedimento padrão. Denotando por  $\Phi$  um campo independente genérico, temos:

$$\partial_0 \phi = i[H, \phi] \quad (2.42a)$$

$$\partial_0 \phi_{IN} = i[H_{IN}^{(0)} - H_I^{(2)}, \phi_{IN}] \quad (2.42b)$$

$$\phi_{IN} = U \phi U^{-1} \quad (2.42c)$$

Assim, de (2.42c)

$$\dot{\phi}_{IN} \equiv \partial_0 \phi_{IN} = \dot{U} \phi U^{-1} + U \dot{\phi} U^{-1} + U \phi \dot{U}^{-1} \quad (2.43)$$

Mas, usando (2.42a),

$$\begin{aligned} U \dot{\phi} U^{-1} &= U i[H, \phi] U^{-1} = \\ &= iUH\phi U^{-1} - iU\phi H U^{-1} = \\ &= iUHU^{-1}U\phi U^{-1} - iU\phi U^{-1}UH U^{-1} = \\ &= i(H_{IN}\phi_{IN} - \phi_{IN}H_{IN}) = \\ &= i[H_{IN}, \phi_{IN}] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Também

$$U\dot{\phi}U^{-1} = \dot{U}U^{-1}U\phi U^{-1} = \dot{U}U^{-1}\phi_{IN} \quad (2.45)$$

e

$$U\phi\dot{U}^{-1} = U\phi U^{-1}U\dot{U}^{-1} = \phi_{IN}U\dot{U}^{-1} = -\phi_{IN}\dot{U}U^{-1} \quad (2.46)$$

Assim,

$$\dot{U}\Phi U^{-1} + U\dot{\Phi}U^{-1} = \dot{U}U^{-1}\Phi_{IN} - \Phi_{IN}\dot{U}U^{-1} = [\dot{U}U^{-1}, \Phi_{IN}] \quad (2.47)$$

Logo,

$$\partial_0 \Phi_{IN} = [\dot{U}U^{-1}, \Phi_{IN}] + i[H_{IN}, \Phi_{IN}] \quad (2.48)$$

Este resultado, com (2.41b), implica que

$$[iH_{IN}^{(0)} - iH_I^{(2)}, \Phi_{IN}] = [\dot{U}U^{-1} + iH_{IN}, \Phi_{IN}] \quad (2.49)$$

ou seja,

$$[\dot{U}U^{-1} + i(H_{IN} - H_{IN}^{(0)} + H_I^{(2)}), \Phi_{IN}] = 0 \quad (2.50)$$

Mas  $H_{IN} - H_{IN}^{(0)}$  é justamente  $H_I^{(1)}$ , onde

$$H_I^{(1)} = -ie \int d^3y \Pi_{\psi}^{IN}(y) \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{A}^{IN}(y) \psi_{IN}(y) \quad (2.51)$$

Temos então, finalmente

$$\frac{dU}{dT} = -iH_I U \quad (2.52)$$

com

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)} \quad (2.53)$$

## CAPÍTULO 3

### MATRIZ U PARA QCD

Nosso objetivo aqui será desenvolver o procedimento do capítulo anterior para obtenção da matriz U no caso de um campo de Yang-Mills  $SU_2$  acoplado a um campo fermiônico de Dirac. Vamos partir da lagrangeana deste sistema, passar à formulação hamiltoniana, quantizá-lo segundo o programa do primeiro capítulo, e, finalmente, obter a equação da matriz U.

Temos então a seguinte expressão para a densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (3.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.2)$$

$$D_{ab}^\mu = \delta_{ab} \partial^\mu - g\epsilon_{abc} A_c^\mu \quad (3.3)$$

Definimos

$$E_a^i = F_a^{i0} \quad (3.4a)$$

$$B_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_a^{jk} \quad (3.4b)$$

onde

$$a = 1, 2, 3$$

$$i = 1, 2, 3$$

De (3.1) obtemos:

$$\Pi_{\mu}^a = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_{\mu}^a} = F_{\mu 0}^a \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\Pi_0^a = 0 \quad (3.6)$$

$$\Pi_i^a = - E_a^i \quad (3.7)$$

e ainda

$$\Pi_{\psi_{\alpha}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_{\alpha}} = i \psi_{\alpha}^+ \quad , \quad (3.8)$$

onde  $L = \int d^3x \mathcal{L}$  .

A equação (3.6) representa o único vínculo primário de nossa teoria. A hamiltoniana correspondente a (3.1) é

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}(x) = \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a + \frac{1}{2} \vec{B}_a \cdot \vec{B}_a + \Pi_{\psi} \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{D} - im) \psi + A_a^0 G_a \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$G_a = - \vec{D}_{ab} \cdot \vec{\Pi}_b + ig \Pi_{\psi} \frac{\sigma_a}{2} \psi \quad (3.10)$$

A condição de consistência imposta ao vínculo (3.6) fornece o vínculo secundário

$$G_a(x) = 0 \quad (3.11)$$

Isto esgota os vínculos de nossa teoria. Como se verifica facilmente, ambos, (3.6) e (3.11), são vínculos de 1ª classe.

Assim, a descrição da evolução temporal de qualquer variável de campo  $\chi(x)$  será dada pela equação de movimento

$$\partial_0 \chi(x) = \{\chi(x), H\}_D \quad (3.12)$$

onde

$$H = \int d^3z \left\{ \frac{1}{2} \Pi_i^a(z) \Pi_i^a(z) + \frac{1}{2} B_i^a(z) B_i^a(z) + \Pi_\psi(z) \gamma^0 \gamma^k \partial^k \psi(z) - \right. \\ \left. - im \Pi_\psi(z) \gamma^0 \psi(z) - \frac{ig}{2} \Pi_\psi(z) \gamma^0 \gamma^k \sigma^a \psi(z) A^{k,a}(z) \right\} \quad (3.13)$$

e os parênteses de Dirac devem ser calculados tendo em conta os dois vínculos da teoria

$$\varphi^{1,a} = \Pi_0^a = 0 \quad (3.14)$$

$$\varphi^{2,a} = D_{ab}^i \Pi_i^b - \frac{ig}{2} \Pi_\psi \sigma^a \psi = 0 \quad (3.15)$$

e as condições de calibre  $\varphi^3, \varphi^4$  que escolhemos como

$$\varphi^{3,a} = \Lambda^{0,a} = 0 \quad (3.16)$$

$$\varphi^{4,a} = \vartheta^i \Lambda^i{}^a = 0 \quad (3.17)$$

de maneira a implementar o calibre de Coulomb.

Os únicos elementos não nulos da matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos deste conjunto são facilmente calculados:

$$Q_{13}^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') = -Q_{31}^{ba}(\vec{z}', \vec{z}) = \delta_{ab} \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \quad (3.18)$$

$$Q_{24}^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') = -Q_{42}^{ba}(\vec{z}', \vec{z}) = \vartheta^i_z D_{ab}^i(z) \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \quad (3.19)$$

O cálculo dos elementos de matriz de  $Q^{-1} = R$  é também facilmente realizado e resulta em

$$R_{13}^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') = -R_{31}^{ba}(\vec{z}', \vec{z}) = \delta_{ab} \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \quad (3.20)$$

$$R_{24}^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') = -R_{42}^{ba}(\vec{z}', \vec{z}) = K^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') \quad (3.21)$$

onde  $K^{ab}(\vec{z}, \vec{z}')$  satisfaz

$$\vartheta^i_z D_{ca}^i(z) K^{ab}(\vec{z}, \vec{z}') = \delta_{cb} \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \quad (3.22)$$

Aqui começam a se manifestar os problemas que já citamos anteriormente e que se relacionam com o fato de as condições

(3.16) e (3.17) não fixarem corretamente o calibre. Ocorre que o operador  $\vec{\partial} \cdot \vec{D}$  não possui uma inversa bem definida. De fato, a equação (3.22) possui "modos zeros"[17], ou seja, existem funcionais  $h^b(\vec{z}, \vec{A})$  não-triviais, tais que

$$\partial_z^i D_{ab}^i(z) h^b(z, \vec{A}) = 0 \quad (3.23)$$

Isto se relaciona ao fato, apontado por Gribov[9], de , em algumas regiões do espaço de configurações, existirem várias configurações  $\vec{A}_a$  correspondendo a um mesmo estado do campo. Por este motivo, não é possível obter uma expressão analítica fechada para o operador  $K^{ab}(\vec{z}, \vec{z}')$ . Apesar disto, continuaremos formalmente a desenvolver nosso procedimento, tendo em conta as seguintes propriedades deste operador:

- i) sendo definido por (3.22), resulta a ser um funcional de  $A^{i,a}$ ;
- ii) a seguinte relação resulta diretamente de (3.22):

$$\frac{\delta K^{ab}(\vec{x}, \vec{y})}{\delta A^{i,c}(\vec{z})} = g \epsilon_{cde} K^{ad}(\vec{x}, \vec{z}) \partial_z^i K^{eb}(\vec{z}, \vec{y}) \quad ; \quad (3.24)$$

- iii) a seguinte expansão perturbativa pode ser obtida [10], tendo em vista (3.22):

$$K^{ab}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{A}) = \frac{\delta_{ab}}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} + g \int d^3z \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{z}|} \epsilon_{acb} A_k^c(\vec{z}) \partial_k \frac{1}{4\pi |\vec{y} - \vec{z}|} + \dots \quad (3.25)$$

- iv) de (3.25) extraímos a seguinte relação de simetria:

$$K^{ab}(\vec{x}, \vec{y}) = K^{ba}(\vec{y}, \vec{x}) \quad (3.26)$$



Desta forma, os parênteses de Dirac fundamentais podem ser calculados da maneira usual [11]:

$$\{A^{j,a}(\vec{x}), A^{k,b}(\vec{y})\}_D = 0 \quad (3.27a)$$

$$\{A^{j,a}(\vec{x}), \Pi_k^b(\vec{y})\}_D = \delta_k^j \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + D_{ac}^j \partial_Y^k K^{cb}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.27b)$$

$$\{A^{j,a}(\vec{x}), \psi(\vec{y})\}_D = \{A^{j,a}(\vec{x}), \Pi_\psi(\vec{y})\}_D = 0 \quad (3.27c)$$

$$\{\Pi_j^a(\vec{x}), \psi(\vec{y})\}_D = -i \frac{g}{2} \partial_X^j K^{ab}(\vec{x}, \vec{y}) \sigma^b \psi(\vec{y}) \quad (3.27d)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi_j^a(\vec{x}), \Pi_k^b(\vec{y})\}_D &= g \epsilon_{cdb} \partial_X^j K^{ac}(\vec{x}, \vec{y}) \Pi_k^d(\vec{y}) + \\ &+ g \epsilon_{adc} \partial_Y^k K^{cb}(\vec{x}, \vec{y}) \Pi_j^d(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.27e)$$

$$\{\Pi_j^a(\vec{x}), \Pi_\psi(\vec{y})\}_D = i \frac{g}{2} \Pi_\psi(\vec{y}) \sigma^b \partial_X^j K^{ba}(\vec{y}, \vec{x}) \quad (3.27f)$$

$$\{\psi(\vec{x}), \Pi_\psi(\vec{y})\}_D = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad (3.27g)$$

$$\{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\}_D = \{\Pi_\psi(\vec{x}), \Pi_\psi(\vec{y})\}_D = 0 \quad (3.27h)$$

Esta é toda a história em termos clássicos. A quantização é feita diretamente pelas substituições em (2.21) do capítulo anterior, as variáveis dinâmicas sendo agora operadores que atuam sobre um espaço de Hilbert.

Mais uma vez, fica a questão da ordem em que escrever os operadores quânticos em expressões que classicamente envolvem

produtos destes. Adotaremos aqui a prescrição de ordenamento usualmente utilizada [11,12,13,14,17]. Isto permitirá a comparação dos resultados obtidos aqui com os destas referências.

Estamos agora em condições de aplicar o desenvolvimento do capítulo anterior para obter a matriz  $U$ . De novo consideramos os campos independentes transformados em campos livres "IN" pelo operador  $U$ , e agora, temos para  $H_{IN}^{(0)}$ :

$$H_{IN}^{(0)}(t) = \int d^3z \left\{ \frac{1}{2} \Pi_{IN}^{i,a} \Pi_{IN}^{i,a} + \frac{1}{4} F_{IN}^{ij,a} F_{IN}^{ij,a} + \Pi_{\psi}^{IN} \gamma^0 \gamma^k \partial^k \psi_{IN} - \right. \\ \left. - \text{im} \Pi_{\psi}^{IN} \gamma^0 \psi_{IN} \right\} \quad (3.28)$$

Assim,

$$[H_{IN}^{(0)}(t), \psi_{IN}(x)] = \frac{1}{2} \int d^3z [\Pi_{IN}^{i,a}(z), \psi_{IN}(x)] + \\ + \frac{1}{4} \int d^3z [F_{IN}^{ij,a}(z), \psi_{IN}(x)] + \\ + \int d^3z \{ \Pi_{\psi}^{IN}(z), \psi_{IN}(x) \} \gamma^0 \gamma^k \partial^k \psi_{IN}(z) - \\ - \text{im} \int d^3z \{ \Pi_{\psi}^{IN}(z), \psi_{IN}(x) \} \gamma^0 \psi_{IN}(z) \quad (3.29)$$

onde utilizamos (3.27h). O 2º termo à direita se anula identicamente devido a (3.27c). O 3º e 4º termos resultam, após alguma álgebra, em  $-i\partial_0 \psi_{IN}(x)$ . Temos assim, o resultado análogo a (2.31) do 2º capítulo:

$$[H_{IN}^{(0)}(t), \psi_{IN}(x)] - \frac{1}{2} \int d^3z [\Pi_{IN}^{i,a}(z), \psi_{IN}(x)] = -i\partial_0 \psi_{IN}(x) \quad (3.30)$$

Desenvolvendo agora o 2º termo da esquerda temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3z [(\Pi_{IN}^{i,a}(z))^2, \psi_{IN}(x)] &= \frac{1}{2} \int d^3z \left( \Pi_{IN}^{i,a}(z) [\Pi_{IN}^{i,a}(z), \psi_{IN}(x)] + \right. \\ &+ \left. [\Pi_{IN}^{i,a}(z), \psi_{IN}(x)] \Pi_{IN}^{i,a}(z) \right) = \\ &= \frac{g}{4} \int d^3z \left( \Pi_{IN}^{i,a}(z) \partial_z^i K_{IN}^{ab}(z,x) \sigma^b \psi_{IN}(x) + \right. \\ &+ \left. \partial_z^i K_{IN}^{ab}(z,x) \sigma^b \psi_{IN}(x) \Pi_{IN}^{i,a}(z) \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde usamos (3.27d). Fazendo agora uma integração por partes temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3z [(\Pi_{IN}^{i,a}(z))^2, \psi_{IN}(x)] &= -\frac{g}{4} \int d^3z \left( \partial_z^i \Pi_{IN}^{i,a}(z) K_{IN}^{ab}(z,x) \right. \\ &\cdot \left. \sigma^b \psi_{IN}(x) + K_{IN}^{ab}(z,x) \sigma^b \psi_{IN}(x) \partial_z^i \Pi_{IN}^{i,a}(z) \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se usarmos agora a lei de Gauss

$$\partial^i \Pi^{i,a} = -\frac{ig}{2} \Pi_\psi \sigma^a \psi + g \epsilon_{abc} A^{i,c} \Pi^{i,b} \quad (3.33)$$

vemos que

$$\partial^i \Pi_{IN}^{i,a}(z) = g D_{IN}^{0,a}(z) \quad (3.34)$$

onde

$$D_{IN}^{0,a}(z) = -\frac{i}{2} \Pi_{\psi}^{IN}(z) \sigma^a \psi_{IN}(z) + \epsilon_{abc} A_{IN}^{i,c}(z) \Pi_{IN}^{i,b}(z) \quad (3.35)$$

é a densidade de carga, e (3.32) fica

$$\frac{1}{2} \int d^3z \left[ \left( \Pi_{IN}^{i,a}(z) \right)^2, \psi_{IN}(x) \right] = -\frac{g^2}{2} \int d^3z \left\{ D_{IN}^{0,a}(z), K_{IN}^{ab}(z,x) \sigma^b \psi_{IN}(x) \right\}_+ \quad (3.36)$$

$$\text{onde } \{A,B\}_+ \equiv \frac{AB + BA}{2} \quad (3.37)$$

é o produto simetrizado.

Vamos agora considerar a seguinte expressão

$$\begin{aligned} H_I^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y D_{IN}^{0,a}(x) G_{IN}^{ab}(x,y) D_{IN}^{0,b}(y) + \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} A_{IN}^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi_{IN}^{k,\gamma}(v) \cdot \\ &\cdot G_{IN}^{ab}(x,y) D_{IN}^{0,b}(y) + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w D_{IN}^{0,a}(x) \cdot \\ &\cdot G_{IN}^{ab}(x,y) \epsilon_{bef} A_{IN}^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^l \Pi_{IN}^{l,f}(w) + \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} A_{IN}^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \cdot \\ &\cdot \Pi_{IN}^{k,\gamma}(v) G_{IN}^{ab}(x,y) \epsilon_{bef} A_{IN}^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^l \Pi_{IN}^{l,f}(w) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$G^{ab}(x,y) = \int d^3u K^{ad}(x,u) \nabla_u^2 K^{db}(u,y) \quad (3.39)$$

Se agora calcularmos o comutador de  $H_I^{(2)}(t)$  com  $\psi_{IN}(x)$ , obtemos (ver Apêndice A):

$$[H_I^{(2)}(t), \psi_{IN}(x)] = -\frac{g^2}{2} \int d^3z \{D_{IN}^{0,a}(z), K_{IN}^{ab}(z,x) \sigma^b \psi_{IN}(x)\}_+ , \quad (3.40)$$

que, tendo em vista (3.36), significa

$$[H_I^{(2)}(t), \psi_{IN}(x)] = \frac{1}{2} \int d^3z [(\Pi_{IN}^{i,a}(z))^2, \psi_{IN}(x)] \quad (3.41)$$

Levando este resultado em (3.30), temos finalmente:

$$\partial_0 \psi_{IN}(x) = i[H_{IN}^{(0)} - H_I^{(2)}, \psi_{IN}(x)] \quad (3.42)$$

Para obter a matriz  $U$ , seguimos os mesmos passos do capítulo anterior, da eq.(2.42) à eq.(2.50). Desta forma, temos

$$i \frac{dU}{dt} = H_I U \quad (3.43)$$

onde

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)} \quad (3.44)$$

com  $H_I^{(2)}$  dado por (3.38) e

$$H_I^{(1)} = -\frac{ig}{2} \int d^3z \Pi_{\psi_{IN}}(z) \gamma^0 \gamma^k A_{IN}^{k,a}(z) \sigma^a \psi_{IN}(z) \quad (3.45)$$

Concluimos, portanto, que o procedimento de Kieffer e Rothe pode ser aplicado à Q.C.D. .

## CAPÍTULO 4

### CONCLUSÕES

A necessidade de utilização de teorias de calibre para tratar dos processos tidos como fundamentais na natureza, parece, a nosso ver, definitivamente reconhecida. Que tais teorias sejam necessariamente oriundas de lagrangeanas singulares [3] é um fato. E a dificuldade em se passar à forma hamiltoniana, a fim de se implementar um procedimento canônico de quantização, é, de resto, bem conhecida. Por tudo isto, consideramos que o procedimento apresentado aqui pode vir a ser um instrumento muito útil na solução de problemas atuais em teorias de campo.

No que tange à aplicação na Q.C.D. apresentada aqui, alguns comentários parecem oportunos. Realmente, a hamiltoniana de interação neste caso já é conhecida de longa data [13,14]. Entretanto, até hoje procura-se justificar a sua validade, visto que, por outros métodos, outra forma para esta hamiltoniana deduzida [18] e estas formas não parecem ser equivalentes [19]. Por isto, o fato de, através de um procedimento inteiramente independente (ou alternativo) termos obtido a hamiltoniana de [13,14] dá a este trabalho um caráter mais abrangente que o de simplesmente ser uma aplicação a mais de procedimento à Q.C.D. .

Um outro ponto digno de nota diz respeito à necessidade de utilização de um "Anzatz" em certa altura do desenvolvimento do procedimento (vide  $H_I^{(2)}$  na Q.E.D., tanto quanto na Q.C.D.).

Algumas tentativas foram feitas no sentido de se deri -

var estas hamiltonianas de uma maneira mais natural dentro do desenvolvimento e que, porventura, pudesse ser aplicável em uma situação geral. Embora não tenhamos logrado êxito neste aspecto, esperamos que aplicações futuras possam fornecer elementos que tornem possível tal derivação.

Por fim, no que diz respeito à questão do confinamento, notamos que em nenhum momento foi necessária a utilização de aproximações. Na única situação em que se fez uso de uma série de potências na constante de acoplamento (Apêndice B), esta série foi utilizada por inteiro, sem a necessidade de cortes, que certamente, limitariam a validade de nosso resultado.



APÊNDICE A

CÁLCULO DO COMUTADOR  $[H_I^{(2)}(t), \psi(z)]$ , eq. (3.40)

$$\begin{aligned}
 H_I^{(2)}(t) = & \frac{1}{2} \int d^3x d^3y D^{0,a}(x) G^{ab}(x,y) D^{0,b}(y) + \\
 & + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
 & . G^{ab}(x,y) D^{0,b}(y) + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w D^{0,a}(x) . \\
 & . G^{ab}(x,y) \epsilon_{bef} A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^l \Pi^{l,f}(w) + \\
 & + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k . \\
 & . \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) \epsilon_{bef} A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^l \Pi^{l,f}(w)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aqui, e no que segue, omitiremos, por comodidade, o índice "IN" nas expressões. Para calcular o comutador

$$[H_I^{(2)}(t), \psi(z)] \tag{A.2}$$

consideraremos separadamente a contribuição de cada termo em(A.1).

**A-1 - Contribuição do 1º termo em (A.1) :**

Vamos escrever este termo explicitamente como função das coordenadas de campo. Temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y D^{0,a}(x) G^{ab}(x,y) D^{0,b}(y) = \\
 & = \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y (\epsilon_{a\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) + \\
 & + \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x)) G^{ab}(x,y) (\epsilon_{bef} A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \\
 & + \frac{i}{2} \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y)) = \\
 & = \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
 & + \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) - \\
 & - \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
 & + \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \cdot \\
 & \cdot \Pi_i^e(y) \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Calcularemos o comutador de (A.3) com  $\psi(z)$  por partes , calculando o comutador de cada parte do lado direito de (A.3) separadamente. A primeira parte será

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) \psi(z) - \\ & - \psi(z) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y)) \quad (A.4) \end{aligned}$$

Nosso procedimento agora consiste em passar  $\psi(z)$  do extremo direito do 1º termo para o extremo esquerdo. Para isto utilizaremos sempre as regras de comutação já calculadas em (3.27) do terceiro capítulo. Trabalhando então o primeiro termo em (A.4) teremos:

$$\begin{aligned} & - \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \psi(z) \sigma^b \psi(y) = \\ & = \frac{g^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \delta(z-y) \sigma^b \psi(y) + \\ & + \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \psi(z) \Pi_\psi(y) \sigma^b \cdot \\ & \cdot \psi(y) = \frac{g^2}{4} \int d^3x \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + \\ & + \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \psi(z) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\ & + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) \sigma^c \psi(z) G^{ab}(x,y) \cdot \\ & \cdot \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) \quad (A.5) \end{aligned}$$

(utilizamos o fato de  $\psi(z)$  comutar com  $A^{i,c}(x)$ , e, conseqüentemente, com  $G^{ab}(x,y)$ , que como  $K^{ab}(x,y)$  é um funcional de  $A^{i,c}(x)$ ).

No lado direito de (A.5), o termo do meio se anula com o 2º termo em (A.4), de forma que, como contribuição da primeira parte de (A.3), temos

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{4} \int d^3x \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + \\ & + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) \sigma^c \psi(z) G^{ab}(x,y) . \\ & \cdot \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) \end{aligned} \quad (A.6)$$

A segunda parte será:

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y (\epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) \psi(z) - \\ & - \psi(z) \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y)) \end{aligned} \quad (A.7)$$

Trabalhando o primeiro termo em (A.7) teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \psi(z) \Pi_i^e(y) + \\ & + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \partial_y^i K^{ec}(y,z) . \\ & \cdot \psi(z) = - \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \psi(z) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) . \\ & \cdot A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) A^{i,f}(y) . \\ & \cdot G^{ab}(x,y) \partial_y^i K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) = \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y \psi(z) \Pi_\psi(x) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x, Y) A^{i, f}(Y) \Pi_i^e(Y) + \\
& + \frac{g^2}{4} \int d^3x d^3Y \delta^3(x-z) \epsilon_{bef} \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x, Y) A^{i, f}(Y) \Pi_i^e(Y) + \\
& + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3Y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) A^{i, f}(Y) G^{ab}(x, Y) \partial_Y^i \cdot \\
& \cdot K^{ec}(Y, z) \sigma^c \psi(z) \tag{A.8}
\end{aligned}$$

O 1º termo em (A.8) cancela o 2º termo em (A.7). Após integrar o 2º termo em (A.8) obtemos finalmente a contribuição da 2ª parte de (A.3):

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{4} \int d^3Y \epsilon_{bef} \sigma^a \psi(z) G^{ab}(z, Y) A^{i, f}(Y) \Pi_i^e(Y) + \\
& + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3Y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) A^{i, f}(Y) G^{ab}(x, Y) \partial_Y^i \cdot \\
& \cdot K^{ec}(Y, z) \sigma^c \psi(z) \tag{A.9}
\end{aligned}$$

A terceira parte será:

$$\begin{aligned}
& - \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3Y (\Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x, Y) \Pi_\psi(Y) \sigma^b \psi(Y) \psi(z) - \\
& - \psi(z) \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x, Y) \Pi_\psi(Y) \sigma^b \psi(Y)) \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.10) teremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \psi(z) \sigma^b \psi(y) = \\
& = - \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \psi(z) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \sigma^b \psi(y) \delta^3(z-y) = \\
& = \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3y \Pi_\psi(x) \psi(z) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) = \\
& = - \frac{g^2}{8} \int d^3x d^3y \psi(z) \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x d^3y \delta^3(x-z) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) \quad (A.11)
\end{aligned}$$

O 1º termo em (A.11) cancela o 2º termo em (A.10). Após integrar o 2º termo em (A.11) temos a contribuição da 3ª parte:

$$\begin{aligned}
& \frac{ig^2}{8} \int d^3y \sigma^a \psi(z) G^{ab}(z,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) \quad (A.12)
\end{aligned}$$

A quarta parte será:

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} (A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) \cdot \\
& \cdot \psi(z) - \psi(z) A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y)) \quad (A.13)
\end{aligned}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.13) teremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \psi(z) \Pi_i^e(y) + \\
& + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \partial_y^i . \\
& \cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) = \\
& = \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \psi(z) \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) . \\
& \cdot A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) . \\
& \cdot \sigma^c \psi(z) A^{j,\gamma}(x) G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \\
& + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \partial_y^i . \\
& \cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{i,f}(y) \tag{A.14}
\end{aligned}$$

O 1º termo em (A.14) cancela o 2º termo em (A.13), de forma que ficamos com a seguinte contribuição da quarta parte:

$$\begin{aligned}
& \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) \sigma^c \psi(z) A^{j,\gamma}(x) G^{ab}(x,y) . \\
& \cdot A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) \partial_y^i K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{i,f}(y) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Reunindo os resultados (A.6), (A.9), (A.12) e (A.15) temos finalmente a contribuição do 1º termo em (A.1) :

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{4} \int d^3x \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + \\
& + \frac{g^2}{4} \int d^3y \epsilon_{bef} \sigma^a \psi(z) G^{ab}(z,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \\
& + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) G^{ab}(x,y) \sigma^c \psi(z) . \\
& \cdot \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \frac{ig^3}{8} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) . \\
& \cdot \partial_y^i K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{i,f}(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3y \sigma^a \psi(z) G^{ab}(z,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{ig^2}{8} \int d^3x \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + \\
& + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{bef} \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) \sigma^c \psi(z) A^{j,\gamma}(x) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{i,f}(y) \Pi_i^e(y) + \\
& + \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{j,\gamma}(x) \Pi_j^\beta(x) G^{ab}(x,y) \partial_y^i . \\
& \cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{i,f}(y) \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Nesta expressão, somando, par a par, o 1º com o 6º e o 2º com o 3º termos, podemos reescrevê-la como



$$\begin{aligned}
& - \frac{g^2}{4} \int d^3x D^{0,a}(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) - \frac{g^2}{4} \int d^3x \sigma^a \psi(z) G^{ab}(z,x) . \\
& \cdot D^{0,b}(x) + O(g^3) = \\
& = - \frac{g^2}{4} \int d^3x (D^{0,a}(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + \sigma^b \psi(z) G^{ba}(z,x)) . \\
& \cdot D^{0,a}(x) + O(g^3) = \\
& = - \frac{g^2}{4} \int d^3x (D^{0,a}(x) G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z) + G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)) . \\
& \cdot D^{0,a}(x) + O(g^3) = \\
& = - \frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ + O(g^3) \quad (A.17)
\end{aligned}$$

onde  $O(g^3)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
O(g^3) & = - \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{j,\gamma}(x) \partial_x^j K^{\beta c}(x,z) G^{ab}(x,y) \sigma^c . \\
& \cdot \psi(z) D^{0,b}(y) - \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y D^{0,a}(x) \epsilon_{bef} G^{ab}(x,y) \partial_y^j . \\
& \cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{j,f}(y) = \\
& = - \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} A^{j,f}(y) \partial_y^j K^{ec}(y,z) G^{ba}(y,x) \sigma^c \psi(z) . \\
& \cdot D^{0,a}(x) - \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y D^{0,a}(x) \epsilon_{bef} G^{ab}(x,y) \partial_y^j . \\
& \cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z) A^{j,f}(y) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g^3}{2} \int d^3x \, d^3y \{D^{0,a}(x), \epsilon_{bef} A^{j,f}(y) G^{ab}(x,y) \partial_y^j \cdot \\
&\cdot K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z)\}_+ \quad (A.18)
\end{aligned}$$

Temos, então, levando esse resultado em (A.17), a forma final para a contribuição do primeiro termo em (A.1) para o comutador (A.2):

$$\begin{aligned}
&-\frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ - \frac{g^3}{2} \int d^3x \, d^3y \{D^{0,a}(x), \\
&\epsilon_{bef} A^{j,f}(y) G^{ab}(x,y) \partial_y^j K^{ec}(y,z) \sigma^c \psi(z)\}_+ \quad (A.19)
\end{aligned}$$

## A-2 - Contribuição do 2º termo em (A.1) :

Escrevendo o 2º termo em (A.1) como função explícita das coordenadas de campo, temos:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} g^2 \int d^3x \, d^3y \, d^3v \, \epsilon_{a\beta\gamma} \, \epsilon_{bef} \, A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \cdot \\
&\cdot G^{ab}(x,y) \, A^{j,f}(y) \, \Pi_j^e(y) - \frac{ig^2}{4} \int d^3x \, d^3y \, d^3v \, \epsilon_{a\beta\gamma} \cdot \\
&\cdot A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \, G^{ab}(x,y) \, \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) \quad (A.20)
\end{aligned}$$

O comutador da primeira parte de (A.20) com  $\psi(z)$  será

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} (A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v)) \cdot \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) \psi(z) - \\
& - \psi(z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) \\
& \hspace{15em} (A.21)
\end{aligned}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.21):

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \psi(z) \cdot \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \cdot \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \partial_y^j K^{eh}(y,z) \sigma^h \psi(z) = \\
& = - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} \psi(z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \cdot \\
& \cdot \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) + \\
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \partial_v^k \cdot \\
& \cdot K^{\gamma h}(v,z) \sigma^h \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \cdot \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \partial_y^j K^{eh}(y,z) \sigma^h \psi(z) \hspace{10em} (A.22)
\end{aligned}$$

O 1º termo da direita de (A.22) cancela o 2º termo em (A.21). Notando que, no 2º termo à direita em (A.22)

$$\nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \partial_v^k = \delta^3(x-v) \quad (\text{A.23})$$

e integrando sobre  $v$  temos para o comutador em questão

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y \varepsilon_{a\beta\gamma} \varepsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i K^{\gamma h}(x,z) \sigma^h \psi(z) G^{ab}(x,y) . \\ & \cdot A^{j,f}(y) \Pi_j^e(y) - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \varepsilon_{a\beta\gamma} \varepsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) . \\ & \cdot \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,f}(y) \partial_y^j K^{eh}(y,z) \sigma^h \psi(z) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

O comutador da 2ª parte de (A.20) com  $\psi(z)$  será

$$\begin{aligned} & - \frac{ig^2}{4} \int d^3x d^3y d^3v \varepsilon_{a\beta\gamma} (A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) . \\ & \cdot \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) \psi(z) - \psi(z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\ & \cdot G^{ab}(x,y) \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y)) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Trabalhando o 1º termo em (A.25):

$$\begin{aligned} & - \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y d^3v \varepsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) \psi(z) . \\ & \cdot G^{ab}(x,y) \frac{i}{2} \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) \frac{1}{2} \delta^3(z-y) \sigma^b \psi(y) = \\
& = - \frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi(z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) \frac{i}{2} \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) + \\
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \partial_v^k K^{\gamma\bar{d}}(v,z) . \\
& \cdot \sigma^{\bar{d}} \psi(z) G^{ab}(x,y) \frac{i}{2} \Pi_\psi(y) \sigma^b \psi(y) - \\
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,z) \frac{1}{2} \sigma^b \psi(z) \tag{A.26}
\end{aligned}$$

O 1º termo à direita de (A.26) cancela o 2º termo em (A.25). Usando (A.23) no 2º termo à direita de (A.26) e integrando temos para o comutador em questão:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i K^{\gamma\bar{d}}(x,z) \sigma^{\bar{d}} \psi(z) G^{ab}(x,y) \frac{i}{2} \Pi_\psi(y) . \\
& \cdot \sigma^b \psi(y) - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3v \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,z) \frac{1}{2} \sigma^b \psi(z) \tag{A.27}
\end{aligned}$$

**A-3 - Contribuição do 3º termo em (A.1) :**

Escrevendo o 3º termo em (A.1) como função explícita das coordenadas de campo, temos:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) G^{ab}(x,y) \quad . \\
 & \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \cdot \\
 & \cdot \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

O comutador da primeira parte de (A.28) com  $\psi(z)$  será:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) G^{ab}(x,y) \quad . \\
 & \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) \psi(z) + \\
 & + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \psi(z) \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) \quad . \\
 & \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w)
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.29):

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) \psi(z) G^{ab}(x,y) \quad . \\
 & \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) G^{ab}(x,y) . \\
& \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \partial_w^\ell K^{fd}(w,z) \sigma^d \psi(z) = \\
& = - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \psi(z) \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,F}(w) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \partial_x^i K^{\beta d}(x,z) \sigma^d \psi(z) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) \Lambda^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,F}(w) + \\
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) G^{ab}(x,y) . \\
& \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^i \delta^3(y-w) K^{fd}(w,z) \sigma^d \psi(z) \tag{A.30}
\end{aligned}$$

O 1º termo em (A.30) cancela o 2º termo em (A.29). Após usar (A.23) no 3º termo em (A.30) e integrar obtemos para o comutador em questão

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \partial_x^i K^{\beta d}(x,z) \sigma^d \psi(z) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,F}(w) + \\
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\gamma}(x) \Pi_i^\beta(x) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) . \\
& \cdot \partial_Y^j K^{fd}(y,z) \sigma^d \psi(z) \tag{A.31}
\end{aligned}$$

O comutador da 2ª parte de (A.28) com  $\psi(z)$  será:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \cdot \\
& \cdot \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) \psi(z) + \\
& + \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \psi(z) \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \cdot \\
& \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) \quad (A.32)
\end{aligned}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.32):

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \cdot \\
& \cdot \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) + \\
& + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \cdot \\
& \cdot \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \partial_w^\ell K^{fd}(w,z) \sigma^d \psi(z) = \\
& = - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3w \psi(z) \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) \cdot \\
& \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) - \\
& - \frac{1}{2} g^2 \int d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{1}{2} \sigma^a \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \cdot \\
& \cdot \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi(x) \sigma^a \psi(x) \cdot \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \delta^3(y-w) K^{fd}(w,z) \sigma^d \psi(z) \quad (A.33)
\end{aligned}$$



O 1º termo em (A.33) cancela o 2º termo em (A.32). Temos para o comutador em questão

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} g^2 \int d^3y d^3w \epsilon_{bef} \frac{1}{2} \sigma^a \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell . \\
 & \cdot \Pi^{\ell,f}(w) + \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} \frac{i}{2} \Pi_\psi^i(x) \sigma^a \psi(x) G^{ab}(x,y) . \\
 & \cdot A^{j,e}(y) \partial_Y^j K^{fd}(y,z) \sigma^d \psi(z) \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

#### A-4 - Contribuição do 4º termo em (A.1) :

Esta contribuição será dada pelo comutador

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
 & \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) \psi(z) - \\
 & - \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \psi(z) \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} . \\
 & \cdot \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) \tag{A.35}
 \end{aligned}$$

Trabalhando o 1º termo em (A.35):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} g^2 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
 & \cdot \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_Y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k . \\
& \cdot \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \partial_w^\ell K^{fd}(w,z) \sigma^d \psi(z) = \\
& = \frac{1}{2} g^3 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \psi(z) \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} . \\
& \cdot \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \partial_v^k . \\
& \cdot K^{\gamma d}(v,z) \sigma^d \psi(z) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j K^{fd}(y,z) \sigma^d \psi(z) \tag{A.36}
\end{aligned}$$

O 1º termo em (A.36) cancela o 2º termo em (A.35) e temos para este comutador

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3w \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i K^{\gamma d}(x,z) \sigma^d \psi(z) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j \nabla_{yw}^{-2} \partial_w^\ell \Pi^{\ell,f}(w) - \\
& - \frac{1}{4} g^3 \int d^3x d^3y d^3v \epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{bef} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v) . \\
& \cdot G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j K^{fd}(y,z) \sigma^d \psi(z) \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Vamos reunir os resultados parciais das equações (A.19), (A.24), (A.27), (A.31), (A.34) e (A.37) para expressar o comutador (A.2) numa forma concisa. Notamos que:

- i) a 1ª parte de (A.31) cancela a 1ª parte de (A.37) ;
- ii) a 2ª parte de (A.24) cancela a 2ª parte de (A.37) ;
- iii) podemos reunir a 2ª parte de (A.31) com a 2ª parte de (A.34) numa só expressão:

$$- \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{bef} D^{0,a}(x) G^{ab}(x,y) A^{j,e}(y) \partial_y^j K^{fd}(y,z) \sigma^d \psi(z) \quad (A.38)$$

- iv) podemos reunir a 1ª parte de (A.24) com a 1ª parte de (A.27) numa só expressão:

$$- \frac{g^3}{4} \int d^3x d^3y \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i K^{\gamma h}(x,z) \sigma^h \psi(z) G^{ab}(x,y) D^{0,b}(y) \quad (A.39)$$

- v) podemos reunir a 2ª parte de (A.27) com a 1ª parte de (A.34) numa só expressão:

$$- g^2 \int d^3x d^3v \{ \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i v_{xv}^{-2} \partial_v^k \Pi^{k,\gamma}(v), G^{ab}(x,z) \frac{1}{2} \sigma^b \cdot \psi(z) \}_+ \quad (A.40)$$

- vi) reunimos (A.38) com (A.39):

$$- \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3v \{ \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i K^{\gamma h}(x,z) \sigma^h \psi(z) G^{ab}(x,y), D^{0,b}(y) \}_+ \quad (A.41)$$

vii) finalmente, a 2ª parte de (A.19) cancela-se com (A.41).

Desta forma, o resultado do comutador (A.2) fica resumido à 1ª parte de (A.19) e (A.40), ou seja,

$$\begin{aligned}
 [H_J^{(2)}(t), \psi(z)] = & - \frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ - \\
 & - g^2 \int d^3x d^3y \{ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xy}^{-2} \partial_y^k \Pi^{k,\gamma}(y), G^{ab}(x,z) \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{2} \sigma^b \psi(z) \}_+ \quad (A.42)
 \end{aligned}$$

Para dar a forma final à expressão (A.42), notamos, em primeiro lugar, que, conforme se encontra demonstrado no Apêndice B, são válidas as seguintes relações:

$$G^{ab}(x,z) = K^{ab}(x,z) + \left( \int d^3u A^{i,c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i,c}(u)} \right) K^{ab}(x,z) \quad (A.43)$$

e,

$$\begin{aligned}
 \left( \int d^3u A^{i,c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i,c}(u)} \right) K^{ab}(x,z) = & g \int d^3y G^{ae}(x,y) \epsilon_{ebd} \cdot \\
 & \cdot A^{i,d}(y) \partial_y^i \nabla_{yz}^{-2} \quad (A.44)
 \end{aligned}$$

Desta forma, utilizando (A.43) e a lei de Gauss, equação (3.34) do capítulo 3, reescrevemos (A.42):

$$\begin{aligned}
[H_I^{(2)}(t), \psi(z)] = & - \frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), K^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ - \\
& - \frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), \left( \int d^3u A^{i,c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i,c}(u)} \right) K^{ba}(z,x) \cdot \\
& \cdot \sigma^b \psi(z)\}_+ - \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3y \{ \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xy}^{-2} D^{0,\gamma}(y) , \\
& G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ \tag{A.45}
\end{aligned}$$

Vamos reescrever o 2º termo do lado direito em (A.45) utilizando (A.44):

$$\begin{aligned}
& - \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3y \{D^{0,a}(x), \epsilon_{ead} G^{be}(z,y) A^{i,d}(y) \partial_y^i \nabla_{yx}^{-2} \sigma^b \psi(z)\}_+ = \\
& = \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3y \{D^{0,\gamma}(y) \epsilon_{a\beta\gamma} G^{ab}(x,z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xy}^{-2} \sigma^b \cdot \\
& \cdot \psi(z)\}_+ \tag{A.46}
\end{aligned}$$

O terceiro termo em (A.45) também pode ser reescrito:

$$- \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3y \{ \epsilon_{a\beta\gamma} A^{i,\beta}(x) D^{0,\gamma}(y) \partial_x^i \nabla_{xy}^{-2} , G^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ \tag{A.47}$$

Conforme se verifica através das regras de comutação estabelecidas no capítulo 3, a presença do tensor antissimétrico  $\epsilon_{a\beta\gamma}$  em (A.47) permite que se comute  $A^{i,\beta}(x)$  com  $D^{0,\gamma}(y)$  nesta expressão. Estas mesmas regras de comutação permitem que se escreva (A.47) na seguinte ordem:

$$- \frac{g^3}{2} \int d^3x d^3y \{D^{0,\gamma}(y), \epsilon_{\alpha\beta\gamma} G^{ab}(x,z) A^{i,\beta}(x) \partial_x^i \nabla_{xy}^{-2} \sigma^b \psi(z)\}_+ \quad (\text{A.48})$$

Como (A.46) e (A.48) são, respectivamente, o 2º e o 3º termos de (A.45), vemos que estes se anulam identicamente. Temos, então, o resultado desejado, equação (3.40) do capítulo 3:

$$[H_I^{(2)}(t), \psi(z)] = - \frac{g^2}{2} \int d^3x \{D^{0,a}(x), K^{ab}(x,z) \sigma^b \psi(z)\}_+ \quad (\text{A.49})$$

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DAS RELAÇÕES (A.43) e (A.44)

Temos, por definição,

$$G^{ab}(x, z) = \int d^3u K^{ac}(x, u) \nabla_u^2 K^{cb}(u, z) \quad (B.1)$$

Também,

$$\delta^{ca} \nabla_z^2 + g \epsilon_{acd} A^{i,d}(z) \partial_z^i K^{ab}(z, x) = \delta^{cb} \delta^3(z-x) \quad (B.2)$$

De (B.2) temos

$$\nabla_u^2 K^{cb}(u, z) = \delta^{cb} \delta^3(u-z) + g \epsilon_{ced} A^{i,d}(u) \partial_u^i K^{eb}(u, z) \quad (B.3)$$

Levando (B.3) em (B.1) temos:

$$\begin{aligned} G^{ab}(x, z) = & \int d^3u K^{ac}(x, u) \delta^{cb} \delta^3(u-z) + \\ & + \int d^3u g \epsilon_{ced} A^{i,d}(u) K^{ac}(x, u) \partial_u^i K^{eb}(u, z) \end{aligned} \quad (B.4)$$

Utilizando em (B.4) a relação (3.24) do capítulo III, temos:

Assim, temos para  $K^{ab}(z, x)$  até a 2ª ordem em  $g$ :

$$\begin{aligned}
 K^{ab}(z, x) = & \delta^{ab} \nabla_{zx}^{-2} + g \int d^3 y \nabla_{zy}^{-2} \epsilon_{abd} A^{i, d}(y) \partial_y^i \nabla_{yx}^{-2} + \\
 & + g^2 \int d^3 y d^3 w \nabla_{zw}^{-2} \epsilon_{aed} A^{i, d}(w) \partial_w^i \nabla_{wy}^{-2} \epsilon_{ebf} A^{j, f}(y) \partial_y^j \nabla_{yx}^{-2}
 \end{aligned}
 \tag{B.12}$$

A fim de simplificar a notação, faremos a convenção de substituir todos os termos do tipo  $\epsilon_{abd} A^{i, d}(y) \partial_y^i$  por  $\lambda_{ab}(y)$ , e fica subentendido que onde aparece  $\lambda_{ab}(y)$  todo o termo em questão se encontra integrado em  $y$ . Assim, a eq.(B.12) toma a forma reduzida:

$$K^{ab}(z, x) = \delta^{ab} \nabla_{zx}^{-2} + g \nabla_{zy}^{-2} \lambda_{ab}(y) \nabla_{yx}^{-2} + g^2 \nabla_{zw}^{-2} \lambda_{ae}(w) \nabla_{wy}^{-2} \lambda_{eb}(y) \nabla_{yx}^{-2}
 \tag{B.13}$$

Com esta forma para  $K^{ab}(z, x)$  em (B.1), temos para  $G^{ca}(z, y)$ :

$$G^{ca}(z, y) = \delta^{ca} \nabla_{zy}^{-2} + 2g \nabla_{zu}^{-2} \lambda_{ca}(u) \nabla_{uy}^{-2} + 3g^2 \nabla_{zw}^{-2} \lambda_{cf}(w) \nabla_{wu}^{-2} \lambda_{fa}(u) \nabla_{uy}^{-2}$$

Temos então,

(B.14)

$$\begin{aligned}
 \left( \int d^3 u A^{i, c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i, c}(u)} \right) K^{ab}(z, x) = \\
 = \left( \int d^3 u A^{i, c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i, c}(u)} \right) \left( \delta^{ab} \nabla_{zx}^{-2} + g \nabla_{zy}^{-2} \lambda_{ab}(y) \nabla_{yx}^{-2} + \right. \\
 \left. + g^2 \nabla_{zw}^{-2} \lambda_{ae}(w) \nabla_{wy}^{-2} \lambda_{eb}(y) \nabla_{yx}^{-2} \right) =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (0 + g \nabla_{zy}^{-2} \lambda_{ab}(y) \nabla_{yx}^{-2} + 2g^2 \nabla_{zw}^{-2} \lambda_{ae}(w) \nabla_{wy}^{-2} \lambda_{eb}(y) \nabla_{yx}^{-2}) = \\
&= g (\nabla_{zy}^{-2} \delta^{ae} + 2g \nabla_{zw}^{-2} \lambda_{ae}(w) \nabla_{wy}^{-2} + \dots) \lambda_{eb}(y) \nabla_{yx}^{-2} = \\
&= g G^{ae}(z, y) \lambda_{eb}(y) \nabla_{yx}^{-2} \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Temos assim demonstrada a relação

$$\left( \int d^3u A^{i,c}(u) \frac{\delta}{\delta A^{i,c}(u)} \right) K^{ab}(z, x) = g \int d^3y G^{ae}(z, y) \epsilon_{ebd} A^{i,d}(y) \cdot \partial_y^i \nabla_{yx}^{-2} \tag{B.16}$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

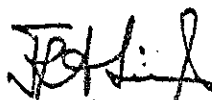
- [1] - DIRAC, P.A.M. - "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).
- [2] - SUDARSHAV, E.C.G. e MUKUNDA, N. - "Classical Dynamics: A Modern Perspective", Wiley, New York (1974).
- [3] - SUNDERMEYER, K. - "Constrained Dynamics", on Lectures Notes on Physics, 169, Springer-Verlag (1982).
- [4] - COSTA, M.E.V., GIROTTI, H.O. e SIMÕES, T.J.M. - Phys.Rev.D, 32, p.405 (1985).
- [5] - ROTHE, K.D. - Introduction to Gauge Theories, Lectures held at the "I Escola de Verão de Partículas e Campos Jorge André Swieca" - São Paulo (1981).
- [6] - SINGER, I.M. - Comm.Math.Phys., 60, 7 (1978).  
ver também, CHODOS, A. e MONCRIEF, V. - J.Math.Phys., 21, 364 (1980).
- [7] - KIEFER, C. e ROTHE, K.D. - Nuovo Cim., 83A, 140 (1984).
- [8] - CASALBUONI, R. - Nuovo Cim., 33A, 389 (1976).
- [9] - GRIBOV, V.N. - SLAC Preprints SLAC-TRANS-176.
- [10]- ABERS, E.S. e LEE, B.W. - Phys.REP. 9C, 1 (1973).
- [11]- GIROTTI, H.O. e ROTHE, K.D. - Nuovo Cim., 72A, 265 (1982).
- [12]- SCHWINGER, J. - Phys.Rev., 125, 1943 (1962).
- [13]- SCHWINGER, J. - Phys.Rev., 127, 324 (1962).
- [14]- CHRIST, N.H., LEE, T.D. - Phys.Rev.D, 22, 939 (1980).

- [15] - SCHOUTEN, J.A. e Van der Kulk (1949) - "Pfaffs Problem and its Generalizations", Claredow, Oxford.
- [16] - EISENHART, L.P. (1969) - "Continuous Groups of Transformations", Dover, New York.
- [17] - PECCEI, R.D. (1978) - Phys.Rev. D17, 1097.
- [18] - L.S. Faddeev and U.N. Popov - Phys. Lett. 25B, 29 (1967)  
E.S. Abers and B.W. Lee, Phys. Report. 9C, 5 (1973).
- [19] - R.N. Mahapatra, Phys. Rev. D4, 378 (1971); D4, 1007 (1971);  
D4, 2215 (1971).

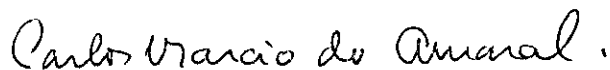
"CONSTRUÇÃO DA MATRIZ U PARA Q.C.D. ATRAVÉS  
DOS PARÊNTESES DE DIRAC"

MARCO ANTONIO DOS SANTOS

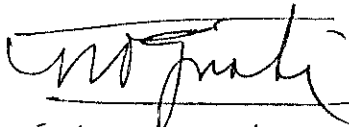
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Fernando Raimundo Aranha Simão - Presidente



Carlos Marcio do Amaral



Horácio Girotti



Carlos Augusto Pinto Galvão

Rio de Janeiro, 29 de setembro de 1987