

LIGIA MARIA COELHO DE SDUZA RODRIGUES

UM ESTUDO DO ACOPLAMENTO GRAVITACIONAL DE NEUTRINOS
COM A VORTICIDADE DA MATÉRIA

Tese de Doutorado

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, agosto de 1987

A Leda⁺, minha mãe
e
a meu pai.

A Ary,
João Paulo,
Rogério,
Flávia e
Fernanda, minha "família
alternativa".

Ivano Damião Soares orientou esta tese. Agradecer ao orientador é um hábito tão sistemático que sempre pode parecer que o fazemos por obrigação. Não é o caso. Creio repetir o que muitos sabem : Ivano realiza seu trabalho de orientação com dedicação e seriedade pouco comuns. A competência com que responde a dúvidas, que não espanta quem com ele convive cientificamente, traz muita segurança a pobres doutorandos quando às voltas com suas ignorâncias. Tenho a sensação de que me faltarão recursos para expressar aqui meu agradecimento; espero somente que minha gratidão e fidelidade sejam para ele uma pequena recompensa por todo o trabalho que lhe dei.

Talvez tenhamos todos(as) um dia nossa travessia do deserto. Se pude enfrentar e superar a que me coube, devo ao apoio, compreensão, estímulo e amizade de Mario Novello, José Salim e Ivano Soares.

Em vários momentos, ao elaborar e redigir esta tese, procurei colegas do DRP. Pelas discussões, algumas vezes essenciais, sugestões e críticas, agradeço a Mario Novello, Isaias Costa, Jayme Tiomno, José Salim, Marcelo Rebouças e Luiz Alberto de Oliveira.

Tenho a sorte de trabalhar em um ambiente em que pessoas diferentes, com visões distintas do mundo e da física, conseguem conviver em harmonia suficiente para que o trabalho seja produtivo e o clima amigável. Sou grata a todos os que para isto contribuem, meus colegas Mario, Ivano, Tiomno, Alberto, Moacyr, João, Zé, Lu, Marcelo, Antonio, Adolfo, Elisa, Sergio, Isaias, Nelson, Renato, Bartô, Sasse, João, Renato, Carla, Henrique, Mauricio, Ademir, Mario, André e Felipe.

A Myriam Coutinho e Fátima Dantas, pela coragem e paciência em decifrar meus abomináveis garranchos, agradeço pela datilografia de parte desta tese.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	Pág. 1
CAPÍTULO I - ESPINORES EM ESPAÇOS CURVOS	7
I.a - O FORMALISMO DE TETRADAS	11
I.b - A ESTRUTURA ESPINORIAL LOCAL	15
I.c - DERIVADA COVARIANTE DE UM ESPINOR; COEFICIENTE DE FOCK-IVANENKO	18
I.d - EQUAÇÃO DE DIRAC NUM ESPAÇO CURVO	20
CAPÍTULO II - A GEOMETRIA DO UNIVERSO DE GÖDEL	27
II.a - A VARIEDADE H^3	28
II.b - A ÁLGEBRA DE H^3	30
II.c - CÁLCULO DOS CAMPOS VETORIAIS E DAS UNIFORMAS INVARIANTES DE H^3	31
II.d - A VARIEDADE $H^3 \times R$	35
II.e - A MÉTRICA DE GÖDEL	38
II.f - ESPINORES E ISOMETRIAS; MODOS GLOBAIS INVARIANTES DO CAMPO ESPINORIAL	41
CAPÍTULO III - NEUTRINOS EM INTERAÇÃO COM A VORTICIDADE: SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC	48
III.a - A EQUAÇÃO DE DIRAC PARA O NEUTRINO NO MODELO DE GÖDEL	49
III.b - MODOS GLOBAIS INVARIANTES HIPERBÓLICOS	50
III.c - EQUAÇÃO DE DIRAC NA FORMA HAMILTONIANA: OPERADOR HELICIDADE	52
III.d - SOLUÇÕES GERAIS DA EQUAÇÃO DE DIRAC	57
III.e - ESPINORES A DUAS COMPONENTES: SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES	62

III.f - OPERADORES DE MOMENTUM ANGULAR DO CAMPO DE NEUTRINOS; CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DE SOLUÇÕES	66
III.g - CONDIÇÕES DE CONTORNO E REGULARIDADE	70
III.h - NORMALIZAÇÃO	82
CAPÍTULO IV - NEUTRINOS EM INTERAÇÃO COM A VORTICIDADE:	
ESPAÇO DE MOMENTUM	92
IV.a - ESPAÇO DE FOURIER	92
IV.b - ESPAÇO DE MOMENTUM	98
CAPÍTULO V - ACOPLAMENTO DOS NEUTRINOS À GRAVITAÇÃO:	
ASSIMETRIAS MICROSCÓPICAS	101
V.a - A CORRENTE LOCAL	102
V.b - ESTADOS DE NEUTRINO E ANTI-NEUTRINO	104
V.c - ASSIMETRIA MICROSCÓPICA	109
V.d - ASSIMETRIA MICROSCÓPICA ENTRE NEUTRINOS E ANTI-NEUTRINOS E VIOLAÇÃO DE CP	112
CONCLUSÃO	118
APÊNDICE I	124

RESUMO

O acoplamento gravitacional dos neutrinos com a vorticidade da matéria é estudado, no contexto da teoria da relatividade geral de Einstein: os neutrinos em interação com a gravitação são descritos por campos espinoriais num espaço-tempo curvo e, por simplicidade técnica, o universo de Gödel é tomado como métrica de fundo, por ser a mais simples das soluções das equações de Einstein com vorticidade não nula. A equação de Dirac é resolvida por separação do campo de neutrinos nos modos invariantes hiperbólicos, globalmente definidos na variedade de Gödel, ou seja, em auto-vetores simultâneos de energia, momentum angular e momentum linear na direção determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$. Estas soluções constituem uma base completa para a descrição da física de neutrinos em interação com a vorticidade no universo de Gödel.

Amplitudes de neutrinos e de anti-neutrinos, relacionadas pela operação de conjugação de carga-paridade, são convenientemente definidas. A presença da vorticidade da matéria gera assimetrias microscópicas na física de neutrinos. As correntes de neutrinos e de anti-neutrinos apresentam uma assimetria microscópica ao longo da direção determinada por $\vec{\Omega}$; uma assimetria entre o número de neutrinos e de anti-neutrinos é possível, no caso de produção de pares neutrino-anti-neutrino por processos que violem CP.

NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES

Índices espaço-tempo são anotados por letras gregas, $\alpha=0,1,2,3$; índices de tetradas são anotados por letras latinas maiúsculas, $A=0,1,2,3$. Índices latinos minúsculos designam coordenadas espaciais, $i,j=1,2,3$. Índices repetidos contravariantes e covariantes indicam soma, ou seja, $Q_\alpha T^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 Q_\alpha T^\alpha$; $L_A M^A = \sum_{A=0}^3 L_A M^A$.

A métrica do espaço-tempo M_4 é $g_{\mu\nu}(x)$ e tem assinatura -2 ; $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

A derivada simples de uma quantidade F é designada $F_{,\mu}$ ou por $\partial F / \partial x^\alpha$ ou por $\partial_\alpha F$. Ponto e vírgula designam derivada covariante, $F_{;\mu}$.

\mathcal{L}_ξ é a derivada de Lie na direção do vetor ξ .

Por definição:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} = 1/2 g^{\alpha\rho} [g_{\beta\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\rho}];$$

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} = \Gamma_{\mu\rho\sigma,\nu} - \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} + g_{\alpha\beta} \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} \right];$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} g^{\rho\sigma}, \quad R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad \text{e } \Gamma_{\mu\rho\sigma} \text{ acima designa}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} g_{\alpha\mu}.$$

Dada uma matriz A :

A^* é a matriz complexo conjugada; A^+ é a matriz hermitiana conjugada; A^T é a matriz transposta.

Dado um espinor ψ , $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor conjugado. Componentes espinoriais são designadas por letras latinas minúsculas, a, b . Índices espinoriais contravariantes designam coluna, ψ^a ; índices espi-

norais covariantes designam fila, Ψ_a .

$[A, B]$ é o comutador dos operadores A e B. $|k|$ designa o módulo da quantidade k.

η_{ijk} é o tensor completamente anti-simétrico: $\eta_{ijk}=0$ para dois índices quaisquer repetidos; $\eta_{ijk}=1$ para $i=1, j=2, k=3$ e qualquer permutação par dos índices i, j, k ; $\eta_{ijk}=-1$ para qualquer permutação ímpar destes índices.

Sempre que for possível, designaremos:

$\Psi(\varepsilon, j, m, k, L)(x)$ por $\Psi(\varepsilon, j)$;

$K(\varepsilon, j, m, k; x)$ por $K(j; x)$;

$\Psi_F(\varepsilon, j, m, k, L)$ por $\Psi_F(\varepsilon, j)$;

$S(\varepsilon, j, m, k; \varepsilon', j', m', k')$ por $S(j; j')$.

INTRODUÇÃO

O interesse pelos efeitos da gravitação sobre os diferentes campos e partículas soma-se a muitas outras motivações⁽¹⁾ para as várias tentativas de construção de uma teoria quântica da gravitação. No entanto, entre os físicos que trabalham com problemas de gravitação quântica a opinião dominante é que nenhuma das teorias propostas pode ser considerada completamente satisfatória. Artigos de revisão recentes⁽²⁾ apontam uma série de dificuldades não resolvidas por nenhuma dessas tentativas. Dentro deste quadro⁽²⁾, a procura de soluções exatas das equações da teoria quântica em métricas de fundo clássicas continua a ser alternativa válida na busca de um melhor conhecimento da interação entre campos gravitacionais e campos de matéria. Neste trabalho, optaremos por este esquema, que chamaremos de método semi-clássico.

O interesse pelo estudo do comportamento dos neutrinos nos espaços curvos tem uma importância especial. No artigo de 1957 "Interaction of neutrinos and gravitational fields"⁽²³⁾, considerado uma referência básica por todos os autores que trabalham no assunto, Brill e Wheeler desenvolveram a seguinte argumentação para justificar tal importância. Nosso conhecimento dos neutrinos limita-se essencialmente a processos de absorção e emissão. Para termos sobre essas partículas informações semelhantes às que se obtém quando se submetem, por exemplo, elétrons a campos elétricos ou magnéticos, necessitamos conhecer o comportamento dos neutrinos sob a ação de campos externos. Mas, neutrinos somente interagem fracamente com a matéria, não respondendo a campos elétricos e magnéticos. Portanto, se quisermos alterar suas trajetórias por forças sujeitas a análise

simples, temos que usar campos gravitacionais. Ou seja, temos que considerar a física dos neutrinos em espaços curvos. Neutrinos em interação com a gravitação possuem também importância em problemas de astrofísica e cosmologia. Em particular, tem-se examinado a possibilidade⁽³⁾ de que a densidade de energia dos neutrinos cósmicos seja da ordem da densidade de energia crítica necessária para fechar o universo. Além disto, acredita-se⁽⁴⁾ que, juntamente com outras partículas que interagem fracamente, neutrinos (e anti-neutrinos) são candidatos a compor a matéria escura existente no espaço intergaláctico, cuja única manifestação é a gravidade. Neste caso, os neutrinos teriam massa entre 30 eV e 3 GeV e dominariam a densidade de massa-energia do universo⁽⁵⁾.

Na relatividade geral, no método semi-clássico, neutrinos em interação com a gravitação são descritos por campos espinoriais num espaço-tempo curvo; os espinores são, nesse caso, soluções da equação de Dirac no espaço-tempo em questão. Van der Waerden e Infeld⁽⁶⁾ apresentaram em 1933 uma análise espinorial que permitiu o uso de espinores em espaços curvos. Revisões importantes do desenvolvimento do formalismo desde então são encontradas em artigos de Bade e Jehle, e Parker e Jehle⁽⁷⁾.

Além do artigo já citado de Brill e Wheeler, onde é encontrada solução para um campo de neutrinos na métrica de fundo de Schwarzschild, permitindo o estudo do comportamento dessas partículas frente a vários processos físicos, outras soluções semi-clássicas das equações de Dirac tem sido encontradas e analisadas, tomando-se como métricas de fundo diferentes soluções das equações de Einstein^(24,25,26,27,28,29).

Em 1949, Gödel⁽⁸⁾ apresentou a primeira solução exata das equações de Einstein em que o conteúdo material tem rotação não nu-

la. Será essa solução um modelo adequado para descrever as propriedades atuais do nosso universo? Embora a existência de uma vorticidade no universo atual não tenha sido definitivamente descartada, as evidências mais recentes apontam no sentido de uma resposta negativa a esta pergunta. Em 1982, analisando propriedades de fontes extragalácticas, Birch⁽⁹⁾ apresentou evidências da existência de uma anisotropia de larga escala que indicava uma assimetria rotacional no universo observado. No entanto, esse resultado, que estimulou o interesse por modelos do universo com rotação, foi posteriormente posto em dúvida. Bietenholz e Kronberg⁽¹⁰⁾ repetiram a análise de Birch com um conjunto de 277 fontes de rádio extra-galácticas e não encontraram nenhuma evidência de anisotropia, e Phinney e Webster⁽¹¹⁾ afirmam que a significação dos resultados de Birch é muito diminuída quando se leva em consideração erros experimentais.

Se tais resultados forem confirmados, modelos com rotação não são adequados para o universo atual. No entanto, não há razão para que tais modelos sejam também eliminados enquanto possíveis modelos para as fases iniciais do universo. Ao contrário, há argumentos teóricos e observacionais que evidenciam a importância da rotação naquelas fases e que justificam, portanto, o interesse pelo modelo de Gödel e outros modelos que apresentam vorticidade da matéria. O próprio Gödel, em seu artigo original de 1949, sugere que a rotação das galáxias⁽¹²⁾, evidência observacional firmemente estabelecida, tenha sua origem em um fenômeno cosmológico. Além disto, foi sugerido que a anisotropia observada da radiação de fundo de microonda possa ser devida a uma vorticidade primordial do universo em larga escala⁽¹³⁾.

No presente trabalho, desenvolvemos o estudo do comportamento e de propriedades dos neutrinos em um universo cujo conteúdo

material apresenta rotação. O campo gravitacional é descrito pela teoria da relatividade geral e, por ser a mais simples das soluções das equações de Einstein com vorticidade não nula, tomamos a solução de Gödel como métrica de fundo⁽⁸⁾. O campo de neutrinos, considerado como um campo teste, sem influência sobre a geometria do espaço-tempo, é descrito por soluções das equações de Dirac generalizadas para um espaço curvo através do princípio do acoplamento mínimo.

Por serem os modos mais naturais para descrever os efeitos da rotação - apresentam a vantagem de permitir a definição de operadores de momentum angular que geram a álgebra de momentum angular total - escolhemos modos hiperbólicos dos campos de neutrinos. Encontramos soluções que são auto-vetores simultâneos de energia, momentum angular e helicidade.

No capítulo I, desenvolvemos brevemente uma revisão do formalismo de tetradas e da teoria dos quadri-espinores de Dirac sobre o espaço-tempo da relatividade geral e generalizamos a equação de Dirac para o espaço curvo.

No capítulo II, construímos o universo de Gödel como um grupo de Lie simplesmente conexo, sobre o qual introduzimos uma métrica invariante que satisfaz às equações de Einstein com constante cosmológica e um fluido perfeito com $p = 0$ como fonte. Mostramos como a imposição de determinadas simetrias sobre campos espinoriais pode ser útil na procura de bases de soluções para a equação de Dirac.

No capítulo III, separamos e resolvemos as equações de Dirac para neutrinos, nos modos globais invariantes hiperbólicos, obtendo um conjunto de soluções ortonormais, auto-vetores de energia, momentum angular e helicidade, sobre as quais impomos condições de

contorno e regularidade consistentes com o caráter de campo teste dos neutrinos. Introduzimos também a formulação Hamiltoniana da equação de Dirac no universo de Gödel.

No capítulo IV, construímos o espaço de momentum associado ao conjunto de soluções obtidas e obtemos a equação de Dirac nesse espaço.

Finalmente, no capítulo V, analisamos as soluções obtidas, definindo convenientemente estados de neutrino e anti-neutrino, e verificamos que a operação de conjugação de carga é uma simetria do espaço de soluções. Concluimos que as correntes de neutrinos e anti-neutrinos apresentam uma assimetria microscópica ao longo da direção determinada pela vorticidade e que, no caso de produção de pares neutrino-anti-neutrino por processos que violem CP, uma assimetria entre o número de neutrinos e anti-neutrinos é encontrada.

REFERÊNCIAS

1. D.R.Brill and R.H.Gowdy, Rep.Prog.Phys., 33(1970)413
2. Veja, por exemplo, C.J.Isham, Lecture Notes, 28th Scottish Universities Summer School in Physics, 1985.
3. R.Opher, Proceedings of the III School of Gravitation and Cosmology, pág. 299, ed. Mario Novello, 1983.
4. V.N.Lukash e I.D.Novikov, Found.Phys., 16(1986)209.
5. E.W.Kolb e M.S.Turner, Phys.Lett.B, 159(1985)102.
6. L.Infeld e B.L.van der Waerden, Sitaber.preuss.Akad.Wiss., Physik-Math.L. , 380(1933).
7. W.L.Bade e H.Jehle, Rev.Mod.Phys., 25(1953)714; W.C.Parker e H.Jehle, Lectures in Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1964.
8. K.Güdel, Rev.Mod.Phys., 21(1949)447.
9. P.Birch, Lett. to Nature, 298(1982)451; D.G.Kendall e A.G.Young, M.N.R.A.S., 207(1984)637.
10. M.F.Bietenholz e P.P.Kronberg, Ap.J., 287(1984)L1.
11. E.S.Phinney e R.I.Webster, Nature, 301(1983)735.
12. Ver, por exemplo, P.J.Peebles, "The large scale structure of the universe", Princeton University Series, New Jersey, 1980.
13. S.Hawking, M.N.R.A.S., 142(1969)129.

CAPÍTULO I

ESPINORES EM ESPAÇOS CURVOS

Na ausência de gravitação, os fermions são descritos por campos espinoriais $\Psi(x)$, que são soluções da equação de Dirac,

$$i\gamma^\mu \Psi_{,\mu} + m\Psi = 0 \quad (\text{I.1})$$

em coordenadas cartesianas. As γ^μ são as matrizes constantes de Dirac que satisfazem a álgebra de Clifford associada à métrica do espaço-tempo de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$,

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}.$$

Os espinores $\Psi(x)$ são vetores do espaço-base da representação irreduzível $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ do grupo de Lorentz restrito.

O grupo de Lorentz é o grupo de covariância geral da relatividade restrita. É da classificação de suas representações que se obtém a classificação das partículas elementares de acordo com seu spin, o que, em essência, define a natureza de cada campo⁽¹⁴⁾. As partículas elementares são descritas por funções (de onda) que constituem vetores de um espaço base de uma representação irreduzível⁽¹⁵⁾ de dimensão finita⁽¹⁶⁾ do grupo de Lorentz. A álgebra dos geradores do grupo de Lorentz restrito é equivalente a duas sub-álgebras disjuntas, isomorfas à álgebra dos geradores do grupo de rotações O_3 . Assim, as representações irreduzíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz⁽¹⁷⁾ podem ser obtidas a partir das representações irreduzíveis de O_3 e são caracterizadas por dois números inteiros ou semi-inteiros j e j' , $0 \leq j, j' < \infty$; a dimensão das representações é $(2j+1)(2j'+1)$.

As representações tipo $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ constituem as representações espinoriais do grupo de Lorentz e os vetores de

seus espaços base $V^{1/2,0}$ e $V^{0,1/2}$ são os espinores a duas componentes. Estas representações não são equivalentes, pois não existe uma transformação de similaridade que transforme uma na outra. Além do mais, a operação de inversão espacial I_S leva vetores que se transformam sob $(1/2,0)$ em vetores que se transformam sob $(0,1/2)$ e vice-versa. Portanto, elas atuam sobre espaços que não são invariantes sob as operações do grupo de Lorentz impróprio. Obtém-se um espaço invariante sob estas transformações tomando as representações soma direta $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$, de dimensão 4, que atuam sobre o espaço vetorial irredutível para o grupo de Lorentz impróprio $V^{1/2,0} \oplus V^{0,1/2}$. Espinores a quatro componentes são objetos do espaço $V^{1/2,0} \oplus V^{0,1/2}$.

Para o caso de fermions de massa nula, que vamos tratar neste trabalho, é um fato experimentalmente verificado^(18,19) que neutrinos só existem com spin anti-paralelo à direção do movimento e anti-neutrinos com spin paralelo à direção do movimento⁽²⁰⁾, ou seja, em um único estado de helicidade. Estas partículas podem assim ser equivalentemente descritas por espinores a duas componentes (de Weyl) das representações irredutíveis $(1/2,0)$ ou $(0,1/2)$ do grupo de Lorentz restrito, que não inclui as inversões espaciais, ou por quadri-espinores (de Dirac) da representação $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$, com a condição de que sejam auto-estados do operador helicidade^(21,22). Para neutrinos em auto-estados de energia, γ^5 é proporcional ao operador helicidade e portanto, esses quadri-espinores obedecem à

$$\gamma^5 \Psi = L \Psi, \quad L^2 = 1$$

e podem ser escritos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ L\phi \end{pmatrix},$$

onde ϕ são espinores a duas componentes.

Na teoria da relatividade geral, o espaço-tempo tem a estrutura de uma variedade riemanniana de dimensão 4, M_4 , localmente lorentziana. Tendo em vista o caráter localmente lorentziano, a teoria das representações do grupo de Lorentz no espaço-plano e, conseqüentemente, o formalismo espinorial (tanto a duas quanto a quatro componentes), podem ser transportados, independentemente, para cada ponto da variedade espaço-tempo.

Neutrinos em interação com a gravitação são descritos por campos espinoriais sobre o espaço-tempo curvo da relatividade geral. Esses campos são soluções da equação de Dirac generalizada para o espaço curvo. Campos espinoriais em relatividade geral têm sido tratados na literatura de diferentes pontos de vista⁽⁷⁾. Uma excelente revisão dos principais formalismos é dada por Brill e Wheeler⁽²³⁾, num artigo que constitui uma referência básica para o estudo das interações dos neutrinos com a gravitação.

No presente trabalho, optaremos por utilizar espinores a quatro componentes de Dirac, do ponto de vista do formalismo de tetradas. Este formalismo apresenta uma dupla vantagem. Por um lado, permite uma unificação com o cálculo das formas diferenciais, nos referenciais de Lorentz locais associados às tetradas, o que introduz uma grande simplificação nos cálculos. Ademais, as transformações sobre os espinores equivalem, de maneira natural, a representações das rotações de Lorentz locais dos referenciais de tetradas.

Além do referido trabalho de Brill e Wheeler, onde, a título de aplicação, o comportamento dos neutrinos numa métrica de fundo de Schwarzschild é estudado, outros trabalhos tratando a interação dos fermions com diferentes campos gravitacionais têm aparecido na literatura. Em particular, foram encontradas soluções da equação de Dirac e estudadas suas propriedades, nas métricas de Kerr^(24,25), de Sitter⁽²⁶⁾ e Gödel^(27,28,29). Unruh (1973) separou as equações de Dirac para o neutrino e obteve soluções aproximadas próximo ao horizonte da métrica de Kerr; Teukolsky (1972), independentemente, obteve uma equação de segunda ordem separável para o neutrino. Chandrasekhar (1976) conseguiu separar as equações de Dirac na métrica de Kerr para um fermion massivo, empregando o formalismo de Newman-Penrose. Soares (1981) e Soares e Rodrigues (1984) separaram as equações de Dirac para o neutrino na métrica de Gödel; Soares e Tiomno encontraram soluções para fermions massivos num universo de Gödel. Outro resultado interessante foi encontrado por Novello e Soares⁽³⁰⁾: uma classe de modelos cosmológicos homogênea e não estacionários, cuja fonte é unicamente neutrinos, de ambas helicidades.

Neste capítulo, revisaremos o formalismo de tetradas e a teoria dos espinores a quatro componentes sobre o espaço-tempo da relatividade geral. Considerando a questão da helicidade, nos restringiremos a quadri-espinores sujeitos à condição $\gamma^5 \Psi = L\Psi$. Usando o princípio do acoplamento mínimo, generalizaremos a equação de Dirac para o espaço curvo.

I.a - O FORMALISMO DE TETRADAS

O espaço-tempo da relatividade geral tem a estrutura de u ma variedade riemanniana quadri-dimensional, localmente lorentziana, que designaremos por M_4 . A estrutura de Minkowski local da variedade espaço-tempo pode ser rigorosamente construída empregando-se o conceito de espaço-tangente⁽³¹⁾ à variedade no ponto p e o formalismo de tetradas⁽³²⁾.

Consideremos, então, o espaço-tangente à M_4 no ponto p , T_p , e os vetores $\partial/\partial x^\alpha|_p \in T_p$, que constituem a base canônica de T_p . x^α é um sistema de coordenadas admissível em p e numa vizinhança de p ⁽³³⁾.

Na base $\partial/\partial x^\alpha$, os campos de vetores tangentes Y em M_4 podem ser expressos

$$Y = Y^\alpha(x) \partial/\partial x^\alpha.$$

Introduzimos sobre M_4 a métrica g como operador bilinear, e simétrico que a todo par de campos vetoriais X, Y associa um número real em cada ponto $p \in M_4$, i.é.,

$$g(Y, Z)(p) \in \mathbb{R}$$

$$g(Y, Z) = g(Z, Y).$$

Dados os pontos p e $p+dp$ em M_4 , infinitesimalmente próximos, conectados pelo vetor $X = dx^\alpha \partial/\partial x^\alpha|_p$, o elemento de distância de universo em M_4 é dado por

$$ds^2 = g(X, X)(p) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{I.a.1})$$

onde $g_{\alpha\beta}$ são as componentes de g na base $\partial/\partial x^\alpha$.

Variedades localmente lorentzianas são aquelas nas quais,

dado um ponto p que pertence à variedade, é sempre possível encontrar-se um sistema de coordenadas locais no qual $g_{\alpha\beta}$ assuma localmente os valores constantes da métrica de Minkowski,

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag } (+1, -1, -1, -1).$$

Isto equivale à existência de cones de luz locais, ou ainda, à validade das leis da relatividade restrita numa região infinitamente pequena do espaço-tempo.

Em cada ponto de M_4 , vamos então definir quatro vetores linearmente independentes, $e_{(A)}$. De acordo com os cones de luz locais, vamos escolher:

- a) $e_{(0)}$ do tipo tempo, ou seja, no interior do cone de luz local, $g(e_{(0)}, e_{(0)}) > 0$;
- b) $e_{(i)}$, $i=1,2,3$, do tipo espaço, ou seja, fora do cone de luz local, $g(e_{(i)}, e_{(i)}) < 0$;

e os $e_{(A)}$ mutualmente ortogonais, ou seja, $g(e_{(A)}, e_{(B)}) = 0$, se $A \neq B$. Normalizando nossos vetores segundo

$$g(e_{(0)}, e_{(0)}) = 1, \quad g(e_{(i)}, e_{(i)}) = -1,$$

temos que

$$g(e_{(A)}, e_{(B)}) = \eta_{AB}.$$

Devido à independência linear dos $e_{(A)}$, a matriz 4×4 , $e_{(A)}^\alpha$, construída com as componentes de $e_{(A)}$ na base canônica $\partial/\partial x^\alpha$, é inversível e sua inversa é $e_\alpha^{(A)}$, de modo que

$$e_{(A)}^\alpha e_\beta^{(A)} = \delta^\alpha_\beta \tag{I.a.2}$$

Em termos de componentes,

$$\eta_{AB} = g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta \tag{I.a.3}$$

Multiplicando (I.a.3) pela matriz inversa $e_\alpha^{(A)}$ e usando (I.a.2),

temos

$$e_{(B)\mu} = e_{\mu}^{(A)} \eta_{AB} \quad (I.a.4)$$

Definindo a inversa de η_{AB} , $\eta^{AB} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1)$, de (I.a.3)

obtemos também que

$$e_{\beta}^{(A)} = \eta^{AB} e_{(B)\beta} \quad (I.a.5)$$

Os vetores $e_{(A)}$ constituem uma tetrada⁽³¹⁾ e os índices (A) são de nominados índices de tetradas. De (I.a.4 e 5) acima, vê-se que relativamente aos índices de tetradas, as matrizes η_{AB} e η^{AB} possuem o caráter de métrica, abaixando e levantando estes índices.

Outra relação importante é obtida multiplicando (I.a.3) por $e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)}$ e usando (I.a.4), a saber,

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} \eta_{AB} \quad (I.a.6)$$

As relações (I.a.3) e (I.a.6) nos permitem dar uma interpretação geométrica às tetradas. Sob a transformação $x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x)$, a métrica $g_{\alpha\beta}$ transforma-se de acordo com

$$g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x)$$

e a transformada inversa é

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g'_{\mu\nu}(x')$$

Em um ponto qualquer $p \in M_4$, podemos identificar formalmente

$$e_{(A)\alpha}^p = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^A} \quad e \quad e_{\alpha}^{(B)p} = \frac{\partial \bar{x}^B}{\partial x^{\alpha}} \quad ; \quad (I.a.7)$$

\bar{x}^A podem ser interpretadas como coordenadas locais de um referencial de Lorentz local no qual a métrica assume, em p , os valores constantes da métrica de Minkowski. A estes referenciais estão li

gados observadores de Lorentz locais.

Uma rotação de Lorentz das tetradas, a saber,

$$e_{\alpha}^{(A)}(x) \rightarrow \bar{e}_{\alpha}^{(A)} = L^A_B(x) e_{\alpha}^{(B)}(x) ,$$

gera as transformações de Lorentz locais $L^A_B(x)$ definidas por

$$L^A_B(x) \eta_{AC} L^C_D(x) = \eta_{BD} . \quad (\text{I.a.8})$$

As relações (I.a.3) e (I.a.6) são invariantes sob estas transformações, pois

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} \eta_{AB} = \bar{e}_{\alpha}^{(C)} \bar{e}_{\beta}^{(D)} \eta_{CD}$$

e

$$\eta_{AB} = e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} g_{\alpha\beta} = \bar{e}_{(A)}^{\alpha} \bar{e}_{(B)}^{\beta} g_{\alpha\beta} .$$

O campo de tetradas é portanto definido a menos de uma transformação de Lorentz local e existe uma arbitrariedade em sua escolha. A cada tetrada está associado um observador de Lorentz local.

É importante observar que as expressões (I.a.7) somente são válidas no ponto p , ou seja, não podemos, em geral, encontrar as funções de transformação $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\bar{x}^A)$ e $\bar{x}^A = \bar{x}^A(x^{\alpha})$. Isto só ocorre quando o espaço-tempo for plano e, neste caso, a transformação acima corresponde a passar de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas.

Qualquer vetor Y , de componentes Y^{α} na base canônica $\partial/\partial x^{\alpha}$, tem componentes

$$Y^A = e^A_{\alpha} Y^{\alpha} ,$$

numa determinada base de tetradas e^A_{α} . Em particular, nesta mesma base, $X = dx^{\alpha} \partial/\partial x^{\alpha}$, tem componentes

$$\theta^A = e^A_{\alpha} dx^{\alpha}$$

e, inversamente,

$$dx^\alpha = e^\alpha_{(A)} \theta^A . \quad (\text{I.a.9})$$

Substituindo (I.a.9) no elemento de linha (I.a.1), temos

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} e^\alpha_{(A)} e^\beta_{(B)} \theta^A \theta^B ;$$

de (I.a.6) vemos que

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B . \quad (\text{I.a.10})$$

Dado, portanto, um ponto p qualquer pertencente à M_4 , pode-se sempre escolher uma base de tetradas em p tal que, localmente em p , a métrica assuma os valores constantes da métrica de Minkowski.

I.b - A ESTRUTURA ESPINORIAL LOCAL⁽³²⁾

A estrutura de Minkowski local (I.a.10) da variedade espaço-tempo da relatividade geral e a existência do grupo de Lorentz local (I.a.8) nos permitem transportar localmente para cada ponto da variedade a teoria das representações do grupo de Lorentz no espaço plano⁽¹⁷⁾.

Sejam então sobre M_4 as transformações de Lorentz locais, definidas por (I.a.8). Estas transformações constituem um grupo, o grupo de Lorentz local, que admite, em cada ponto de M_4 , as mesmas representações que no espaço plano, cujos parâmetros são agora dependentes de ponto.

Em M_4 , definimos espinores de Dirac $\Psi(x)$ como elementos do espaço base da representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ do grupo de Lorentz restrito local; sob as transformações locais (I.a.8), as funções $\Psi(x)$ se transformam de acordo com

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S(L(x)) \Psi(x) \quad (\text{I.b.1})$$

onde $S(L(x))$ é uma matriz da representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)(x)$, com a restrição $\det S = 1$.

No espaço plano de Minkowski, o grupo de transformações de coordenadas da variedade é o próprio grupo de Lorentz. Num espaço curvo, no entanto, embora (I.b.1) seja a mesma lei de transformação a que obedece um espinor na variedade de Minkowski, a estrutura lorentziana local existe independentemente em cada ponto e não há, em geral, nenhuma relação entre o grupo de Lorentz local e o grupo geral de transformações da variedade M_4 . Sob uma transformação geral de coordenadas, $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha(x)$, os espinores $\Psi(x)$ transformam-se como escalares, por definição. Portanto, um espinor definido sobre uma variedade M_4 determina duas estruturas em cada ponto dessa variedade: uma estrutura local, associada à representação espinorial do grupo de Lorentz e uma estrutura global, associada à representação escalar do grupo geral de transformações de coordenadas.

Construir uma estrutura espinorial local em M_4 equivale a definir em cada ponto da variedade um campo de matrizes $\gamma^\mu(x)$. Do ponto de vista do formalismo de tetradas e espinores a quatro componentes que estamos adotando, as matrizes $\gamma^\mu(x)$ são dadas por

$$\gamma^\mu(x) = e_{(A)}^\mu(x) \gamma^A, \quad (\text{I.b.2})$$

onde as γ^A são as matrizes constantes de Dirac que satisfazem a

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2 \eta^{AB} 1, \quad (\text{I.b.3})$$

onde η^{AB} é a inversa da métrica de Minkowski e 1 é a matriz identidade 4×4 . As γ^A constituem uma representação espinorial para a álgebra de Clifford⁽³⁴⁾ associada à métrica local η_{AB} .

DE (I.b.2) e (I.b.3), obtêm-se a relação de anti-comutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}(x) 1, \quad (\text{I.b.4})$$

onde $g_{\mu\nu}(x)$ é a métrica da variedade M_4 e as $\gamma^\mu(x)$ são ditas constituir uma representação espinorial para a álgebra de Clifford associada à métrica $g_{\mu\nu}(x)$ de M_4 .

Sob uma transformação geral de coordenadas, $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha(x)$, as $\gamma^\mu(x)$ transformam-se como vetores,

$$\gamma'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \gamma^\mu(x) .$$

Sob uma rotação de Lorentz local as matrizes $\gamma^\mu(x)$ transformam-se como

$$\gamma^\mu(x) \rightarrow \bar{\gamma}^\mu(x) = S(x) \gamma^\mu(x) S^{-1}(x) . \quad (\text{I.b.5})$$

Esta transformação é gerada por uma rotação de Lorentz local da base de tetradas, ou seja,

$$\bar{\gamma}^\alpha(x) = \bar{e}^\alpha_{(A)}(x) \gamma^A$$

com

$$\bar{e}^\alpha_{(A)}(x) = L_A^B(x) e^\alpha_{(B)}(x) .$$

Deste modo, de (I.b.5), tem-se que

$$\bar{e}^\alpha_{(A)}(x) \gamma^A = S(x) e^\alpha_{(A)}(x) \gamma^A S^{-1}(x) \quad (\text{I.b.6})$$

ou seja,

$$L_A^B \gamma^A = S(x) \gamma^B S^{-1}(x) . \quad (\text{I.b.7})$$

É importante notar que as matrizes constantes de Dirac γ^A não se alteram sob as transformações (I.b.7), como usualmente.

No presente formalismo de tetradas, o espinor conjugado de Dirac é, por definição, $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$, onde Ψ^+ é o espinor hermitiano conjugado e γ^0 é a matriz constante de Dirac. Com esta definição, $\bar{\Psi}\Psi$ é um escalar. Sob uma rotação de Lorentz local, notando-se que, de (I.b.7), $S^+ \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$, o espinor conjugado transforma-se de acordo com

$$\bar{\Psi}' = \Psi^+ S^+ \gamma^0 = \bar{\Psi} S^{-1} \quad (\text{I.b.8})$$

o que implica trivialmente

$$\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}\Psi .$$

Em termos das componentes espinoriais, as leis de transformação sob as transformações locais (I.a.1), para o espinor Ψ e o espinor conjugado $\bar{\Psi}$, respectivamente (I.b.1) e (I.b.8), são escritas:

$$\Psi^a(x) \rightarrow \Psi'^a(x) = S^a_b(x) \Psi^b(x) \quad (\text{I.b.9})$$

$$\Psi_a(x) \rightarrow \Psi'_a(x) = \Psi_b(x) S^{-1b}_a(x) . \quad (\text{I.b.10})$$

I.c - DERIVADA COVARIANTE DE UM ESPINOR; COEFICIENTE DE FOCK

IVANENKO

É de fundamental importância para a construção do formalismo espinorial num espaço curvo a definição de derivada covariante de um espinor, $\Psi_{;\mu}$. Embora seja um escalar para o grupo geral de transformações de coordenadas, Ψ possui uma estrutura intrínseca local definida por sua lei de transformação frente ao grupo de Lorentz local e, devido à dependência de ponto do grupo local, a derivada simples não se transforma como um espinor. Assim, definimos derivada covariante de um espinor como

$$\Psi_{;\mu} = \Psi_{,\mu} - \Gamma_{\mu}^{\Psi} \Psi ; \quad (\text{I.c.1})$$

em termos de componentes espinoriais,

$$\Psi^a(x)_{;\mu} = \Psi^a(x)_{,\mu} - \Gamma_{\mu}^a{}_b(x) \Psi^b(x) ,$$

onde as $\Gamma_{\mu}(x)$ são as afinidades espinoriais ou conexões internas, de forma que sob as transformações de Lorentz locais, $\Psi_{;\mu}$ se transforma como um espinor:

$$\Psi'_{;\mu} = S(x) \Psi_{;\mu} . \quad (\text{I.c.2})$$

De (I.c.1), obtém-se que sob uma transformação de Lorentz local as $\Gamma_{\mu}(x)$ se transformam de acordo com

$$\Gamma'_{\mu}{}^a{}_b = S(x) {}^a{}_c \Gamma_{\mu}{}^c{}_d S^{-1}(x) {}^d{}_b + S(x) {}^a{}_{c,\mu} S^{-1}(x) {}^d{}_b ,$$

ou seja,

$$\Gamma'_{\mu}{}^a{}_b = S(x) \Gamma_{\mu}{}^a{}_b S^{-1}(x) + S(x) {}^a{}_{c,\mu} S^{-1}(x) \quad (\text{I.c.3})$$

Objetos com índices espinoriais e tensoriais transformam-se sob leis de transformação bem definidas sob as transformações gerais de coordenadas sobre M_4 e sob as rotações de Lorentz locais. Para tais objetos, por exemplo, $(X^{\alpha}_{\beta})^a{}_b$, a derivada covariante é uma generalização da derivada covariante usual e é dada por

$$\begin{aligned} (X^{\alpha}_{\beta})^a{}_{b;\mu} &= (X^{\alpha}_{\beta})^a{}_{b,\mu} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} (X^{\rho}_{\beta})^a{}_b - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} (X^{\alpha}_{\rho})^a{}_b + \\ &\quad - \Gamma_{\mu}{}^a{}_d (X^{\alpha}_{\beta})^d{}_b + \Gamma_{\mu}{}^d{}_b (X^{\alpha}_{\beta})^a{}_d , \end{aligned}$$

onde os $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel da variedade espaço-tempo da relatividade geral, onde

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 ; \quad (\text{I.c.4})$$

Da relação de anti-comutação (I.b.4), vê-se que

$$\gamma_{\mu;\nu} = \gamma_{\mu,\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \gamma_{\nu} + \gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 0 \quad (\text{I.c.5})$$

é condição suficiente para que (I.c.4) seja satisfeita⁽³⁵⁾. Usando (I.b.2) e as propriedades da álgebra de Dirac gerada pelas matrizes γ^A , resolvemos (I.c.5) e obtemos

$$\Gamma_{\mu}(x) = -\frac{1}{8} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\mu,\nu} \gamma^{\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} (\gamma^{\nu} \gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma^{\nu}) + A_{\mu} 1 \quad ,$$

onde A_{μ} é um campo vetorial real qualquer, que pode ser interpretado como potencial eletromagnético externo, minimalmente acoplado com o campo espinorial $\Psi(x)$. No caso presente, tomamos $A_{\mu}=0$, pois neutrinos não têm carga elétrica. As $\Gamma_{\mu}(x)$ são chamadas coeficientes de Fock-Ivanenko⁽³⁶⁾ e se transformam como vetores sob uma transformação de coordenadas.

O campo de tetradas nos permite projetar $\Gamma_{\mu}(x)$ e $\Psi_{;\mu}$ na base local, ou seja,

$$e_{(A)}^{\mu} \Gamma_{\mu} = \Gamma_A \quad (\text{I.c.6})$$

e

$$e_{(A)}^{\mu} \Psi_{;\mu} = \Psi_{;A} \quad (\text{I.c.7})$$

onde

$$\Psi_{;A} = e_{(A)}^{\mu} \Psi_{,\mu} \quad (\text{I.c.8})$$

As Γ_A podem ser escritas

$$\Gamma_A = -\frac{1}{4} \gamma_{BCA} \gamma^B \gamma^C \quad (\text{I.c.9})$$

onde γ_{BCA} são os coeficientes de rotação de Ricci⁽³⁰⁾.

I.d - EQUAÇÃO DE DIRAC NUM ESPAÇO CURVO⁽³⁷⁾

Empregando o princípio do acoplamento mínimo^(38,39), que consiste na prescrição de que no espaço curvo a derivação sim

ples é substituída pela derivação covariante, a equação de Dirac pode ser generalizada para a variedade riemanniana M_4 substituindo-se em (I.1) ∂_μ por $\partial_\mu - \Gamma_\mu$. Obtém-se assim

$$i \gamma^\mu \Psi_{;\mu} = m \Psi , \quad (\text{I.d.1})$$

onde γ^μ é o campo de matrizes (I.b.2) e Ψ é um espinor de Dirac definido por (I.b.1). Por construção, com as leis de transformação de Ψ e γ^μ sob o grupo de Lorentz local definidas respectivamente por (I.b.1) e (I.b.5), a equação acima é covariante sob este grupo. Sua covariância sob o grupo geral de transformações de coordenadas é evidente e imediata.

Na base local (I.a.4), usando-se (I.c.6,7,8), a derivada covariante de um espinor, dada por (I.c.1), é escrita

$$\Psi_{;A} = \Psi_{,A} - \Gamma_A \Psi .$$

Lembrando também (I.b.2), localmente a equação de Dirac assume a forma

$$i \gamma^A \Psi_{;A} = m \Psi . \quad (\text{I.d.2})$$

A equação de Dirac para o espinor conjugado é

$$i \bar{\Psi}_{;\mu} \gamma^\mu = -m \bar{\Psi} . \quad (\text{I.d.3})$$

A densidade de corrente local de fermions,

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi , \quad (\text{I.d.4})$$

num referencial de Lorentz local assume a forma

$$j^{(A)} = e^{(A)}_{\mu} j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^A \Psi . \quad (\text{I.d.5})$$

Mostra-se diretamente que

$$j^\mu_{;\mu} = 0 ,$$

usando-se a prescrição

$$\gamma^\mu{}_{;\nu} = 0 \quad .$$

Os neutrinos são fermions de massa nula; a equação de Dirac para os neutrinos reduz-se portanto a

$$\gamma^\mu \psi_{;\mu} = 0 \tag{I.d.6}$$

ou, na base local, a

$$\gamma^A \psi_{;A} = 0 \quad , \tag{I.d.7}$$

onde

$$\psi_{;A} = e(A)^\alpha \psi_{;\alpha} \quad .$$

Dada uma solução $\psi(x)$ da equação acima, pode-se mostrar que a função $\psi' = e^{1/2\beta\gamma^5} \psi$ é também solução da mesma equação⁽²³⁾, onde β é uma constante e $\gamma^5 = -i/4 \sqrt{-g} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu$. Se ψ representa um neutrino linearmente polarizado, a operação acima gira a direção de polarização de um ângulo β e é por isto chamada de rotação β . Vê-se facilmente que

$$\begin{aligned} \gamma^\mu (e^{1/2\beta\gamma^5} \psi)_{;\mu} &= \gamma^\mu \left[\cos \frac{\beta}{2} + \gamma^5 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] \psi_{;\mu} = \\ &= \left[\cos \frac{\beta}{2} - \gamma^5 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] \gamma^\mu \psi_{;\mu} \quad . \end{aligned}$$

Logo, se $\gamma^\mu \psi_{;\mu} = 0$, então também

$$\gamma^\mu \left[e^{1/2\beta\gamma^5} \psi \right]_{;\mu} = \gamma^\mu \psi'_{;\mu} = 0.$$

A degenerescência entre os estados ψ e ψ' que aparece na ausência de gravitação não pode ser "levantada" por nenhum campo gravitacional. É razoável impor-se que tal degenerescência não seja permitida na natureza e que portanto um estado de neutrino deva ser des -

crito por uma combinação linear dos estados Ψ e Ψ' acima. Com efeito, foi experimentalmente verificado que neutrinos só existem em estados circularmente polarizados (com helicidade $L = -1$), os quais são adequadamente descritos pela combinação linear

$$\psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) - \gamma^5 \Psi(\mathbf{x})$$

de estados com rotação $\beta=0$ e $\beta=\pi$, com uma diferença de fase de $3\pi/2$.

A solução acima é equivalente a uma solução à qual imponhamos a condição $\gamma^5 \psi = L\psi$, com $L=-1$, e, como já vimos na introdução a este capítulo, seria suficiente empregarmos espinores a duas componentes. Numa teoria a duas componentes, a violação da paridade (ou inexistência de neutrinos dextrógeros) está naturalmente contida. No presente trabalho, optaremos por descrever o campo de neutrinos empregando quadri-espinores de Dirac, soluções da equação (I.d.6) e auto-estados do operador γ^5 .

REFERÊNCIAS

14. Embora o grupo de covariância geral da relatividade restrita seja o grupo de Poincaré, para a classificação da natureza das diversas partículas elementares, é o grupo de Lorentz restrito que é relevante. O grupo de Poincaré somente inclui os quadri-momenta p_μ como geradores, o que em nada altera a natureza dos diversos campos.
15. Exige-se de um sistema (ou partícula) elementar que o espaço gerado pelas funções que o descrevem não admita sub-espacos invariantes sob uma transformação de Lorentz. Daí o caráter de irreducibilidade das representações do grupo de Lorentz associado a esses espacos.
16. Todas as representações irredutíveis do grupo de Lorentz restrito, inclusive as de dimensão infinita, podem ser encontradas em M. Naïmark, Am.Math. Soc.Translations, serie 2, vol. 6, seções 2b,2c, 1957.
17. S.Schweber, "An introduction to relativistic quantum field theory", Harper and Row Publishers, 1962.
18. T.D.Lee e C.N.Yang, Phys.Rev., 104(1956)254, sugeriram a violação da paridade nas interações fracas.
19. A verificação experimental da violação da paridade nas interações fracas foi realizada por Mme. C.S.Wu et al; o resultado está publicado em Phys.Rev. Lett., 105(1957)1413.
20. Diz-se que neutrinos são levógeros e anti-neutrinos, dextrógeros.
21. Pouco após o trabalho de Dirac, H.Weyl, Zeits.für Phys., 56(1929)330, havia proposto que fermions de massa nula fossem descritos por espinores a duas componentes . Sua teoria foi rejeitada por não ser invariante sob as reflexões espaciais, e só veio a ser aceita após a descoberta da violação da paridade nas interações fracas.
22. Na representação de Weyl, em que $\gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, o quadri-espinor Ψ que satisfaz à $\gamma^5\Psi=L\Psi$ é da forma $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix}$, onde ϕ é um espinor a duas componentes.
23. D.Brill e J.A.Wheeler, Rev.Mod.Phys., 29(1957)465.
24. W.Unruh, Phys.Rev.Lett., 31(1978)1265.

25. S.Chandrasekhar, Proc.R.Soc.London, 349(1976)571.
26. M.Castagnino, Ann.Inst.Henri Poincaré, 16(1972)293.
27. I.D.Soares, Phys.Rev.D, 23(1981)272.
28. I.D.Soares e Ligia M.C.S.Rodrigues, Phys.Rev.D, 31(1985)422.
29. I.D.Soares e J.Tiomno, Rev.Bras.Fís., supl.vol.14(1984)372
30. M.Novello e I.D.Soares, Phys.Lett.A, 56(1976)431.
31. Para a construção da estrutura Minkowskiana local da variedade espaço-tempo, ver H.Flanders, "Differential forms", Academic Press, New York, 1963.
32. I.D.Soares, Anais da II Escola de Cosmologia e Gravitação, vol. I, Ed. Mario Novello, 1983.
33. A.Lichnerowicz, "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme", Masson et Cie., 1955.
34. C.M.do Amaral, "Quaternions e espaços-tempos riemannianos e não riemannianos", Tese de doutorado, CBPF, 1971.
35. M.Novello, Phys.Rev.D, 8(1973)2398, mostrou que (I.c.5) não é necessária; a condição mais geral que satisfaz à (I.c.4) é

$$\gamma_{\mu;\nu}(x) = [\omega_{\mu}(x), \gamma_{\nu}(x)]$$

onde $\omega_{\mu}(x)$ é um elemento qualquer da álgebra de Clifford associada à $g_{\mu\nu}(x)$. A introdução de ω_{μ} em sua forma mais geral possível resulta no aparecimento de termos de interação eletromagnética na equação de Dirac para o espinor Ψ , que, no caso de massa nula, podem ser eliminados se considerarmos a simetria sob o operador γ^5 .

36. V.Fock e D.Ivanenko, Comp.Rend., 188(1929)1470.
37. D.R.Brill e J.M.Cohen, J.Math.Phys., 7(1965)238; ver também referência 32.
38. O acoplamento mínimo foi originalmente introduzido por Einstein em "Die grundlagen der allgemeine relativitäts theorie", Ann.der Phys., 1916. Posteriormente, tornou-se uma prescrição para a generalização em espaços curvos de teorias inicialmente construídas no espaço de Minkowski. O acoplamento mínimo pode ser visto como uma receita geral para acoplar campos físicos à gravitação. Na verdade, não há razões que impeçam a introdução de acoplamentos não mínimos, onde de alguma forma (conveniente) os campos acoplam-se diretamente à curvatura. Em particular, o princípio da equivalência é respei-

tado, pois ainda se pode anular localmente as afinidades. Embora a escolha do acoplamento mínimo tenha vantagens como o fato de introduzir um pequeno número de condições arbitrárias, esta é uma questão em aberto. Para uma discussão das consequências da introdução de um acoplamento não mínimo, ver , por exemplo, V.M.Canuto e I.Goldman, Nature, 304(1983)311.

39. Uma série de resultados interessantes foi obtida pelo grupo de cosmologia do CBPF usando acoplamentos não mínimos: M.Novello, I.D.Souares e J.M.Salim, GRG, 8(1977)95; M.Novello, Phys.Lett.A, 90(1982)347; M.Novello e H.Heitz - man, Phys.Lett.A, 98(1983)10; M.Novello e H.Heitzmann, GRG, 16(1984)535; M. Novello, J.M.Salim e E.Rückert, Lettere al Nuovo Cimento, 40(1984)232.

CAPÍTULO II

A GEOMETRIA DO UNIVERSO DE GÖDEL

As equações de Einstein com termo cosmológico⁽⁴⁰⁾ são:

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad ; \quad (\text{II.1})$$

$g_{\mu\nu}(x)$ é a métrica da variedade espaço-tempo riemanniana M_4 , identificada ao campo gravitacional, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $R=R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ é a curvatura escalar, $k=4\pi G/c$, onde G é a constante gravitacional e c a velocidade da luz no vácuo. $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum que descreve o conteúdo material⁽⁴¹⁾ do espaço-tempo e Λ é a constante cosmológica⁽⁴²⁾.

Em 1949, Kurt Gödel⁽⁸⁾ obteve a primeira solução cosmológica das equações de Einstein (com constante cosmológica) em que a matéria apresenta rotação não nula nos referenciais inerciais de seus observadores comoventes⁽⁴³⁾. A solução original de Gödel é a mais simples destas soluções; é por sua simplicidade operacional que, no presente trabalho, o universo de Gödel foi escolhido como métrica de fundo para o estudo da interação dos neutrinos com a vorticidade da matéria.

Neste capítulo, faremos uma revisão da estrutura e das propriedades globais do modelo de Gödel. Mostraremos que o universo de Gödel pode ser caracterizado como o grupo de Lie simplesmente conexo $H^3 \times R$, sobre o qual é introduzida uma métrica invariante que satisfaz às equações de Einstein (II.1), tendo como fonte um fluido perfeito com $p=0$. Os métodos aqui usados são análogos aos originalmente sugeridos por Gödel⁽⁸⁾ e desenvolvidos por Ozváth e Schücking^(44,45).

II.a - A VARIEDADE H^3

Seja o espaço euclidiano quadri-dimensional E^4 , e a base de vetores unitários e_A , ao longo dos eixos cartesianos. As coordenadas cartesianas dos pontos de E^4 são

$$a^B = (a^0, a^1, a^2, a^3).$$

Sobre E^4 definimos a lei de multiplicação

$$\begin{aligned} e_0 e_\mu &= e_\mu e_0 = e_\mu ; & e_1 e_1 &= -e_0 ; & e_i e_i &= e_0, \quad i \neq 1 ; \\ e_i e_j &= \eta_{ijk} e_k ; & A &= 0, 1, 2, 3 \text{ e } i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{II.a.1})$$

Munido desta lei de multiplicação o espaço vetorial E^4 constitui uma álgebra, a álgebra de quaternions hiperbólicos; a álgebra dos quaternions é não comutativa e satisfaz às propriedades de associatividade e distributividade. e_A são os quaternions de base hiperbólicos. Os vetores $a = a^B e_B$ são denominados quaternions e definimos como quaternions conjugados os vetores

$$a^* = -a^i e_i + a^0 e_0.$$

Da lei de multiplicação (II.a.1), vê-se que e_0 é a identidade da álgebra. Os quaternions $a = a^0 e_0$ são isomorfos ao corpo dos reais; podemos portanto identificar $a^0 e_0 \sim a^0$. Em consequência, a norma de um quaternion é

$$aa^* = (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2.$$

O conjunto dos quaternions hiperbólicos de norma unitária, ou seja, que satisfazem à $aa^* = 1$, define um 3-hiperbolóide imerso em E^4 , que designamos por H^3 . A cada quaternion pertencente a H^3 está associado um elemento inverso, definido por $a^{-1} = a^*$, que obviamente satisfaz à $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.

Qualquer vetor b de H^3 define a operação de multiplicação à esquerda, $a' = ba$, onde $a \in H^3$, dada por

$$\begin{aligned} ba = & (b^0 a^0 - b^1 a^1 + b^2 a^2 + b^3 a^3) e_0 + (b^1 a^0 + b^0 a^1 + b^2 a^3 + \\ & - b^3 a^2) e_1 + (a^1 b^3 - b^1 a^3 + b^0 a^2 + b^2 a^0) e_2 + (b^1 a^2 + \\ & - b^2 a^1 + b^0 a^3 + b^3 a^0) e_3 = (a'^0, a'^1, a'^2, a'^3) = a'. \end{aligned}$$

Mas a' é também um vetor de H^3 , pois

$$\begin{aligned} a' a'^* = & [(b^0)^2 + (b^1)^2 - (b^2)^2 - (b^3)^2] [(a^0)^2 + (a^1)^2 + \\ & - (a^2)^2 - (a^3)^2] e_0 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, se $a, b \in H^3$, $a' \in H^3$; e_0 é o elemento identidade e para cada quaternion existe um quaternion conjugado $a^* = a^{-1} \in H^3$ possui a estrutura de um grupo que atua sobre si mesmo por translações à esquerda.

De maneira idêntica, podemos definir multiplicação à direita: $ab = a''$, com $a'' a''^* = 1 \in H^3$ tem a estrutura de um grupo que atua sobre si mesmo por translações à direita.

Sobre a variedade H^3 está definido o grupo de movimentos próprios, produto direto das translações à esquerda pelas translações à direita, $a' = va$ e $a'' = aw$. As translações à esquerda e à direita são sub-grupos invariantes do grupo de movimentos próprios de H^3 .

A ação de H^3 sobre si mesmo para as translações à esquerda (à direita) é simplesmente transitiva, pois para qualquer vetor $a \in H^3$, existe somente uma translação à esquerda $ba = a'$ que leva a em a' . H^3 assim caracterizada constitui um grupo de Lie⁽⁴⁶⁾.

II.b - A ÁLGEBRA DE H^3

H^3 é um grupo de Lie simplesmente conexo⁽⁴⁷⁾ e pode ser univocamente caracterizado pela álgebra de Lie formada pelos geradores infinitesimais das translações à esquerda (à direita).

Na identidade de H^3 vamos considerar os quaternions e_i , ortogonais entre si, que geram o espaço tangente à H^3 em e_0 . Escolhemos os pontos $e_0 + \epsilon e_i$, ϵ infinitesimal, na vizinhança de e_0 . Por multiplicação à esquerda, transladamos $(e_0 + \epsilon e_i)$ para $a(e_0 + \epsilon e_i) = a + \epsilon w_i$, onde $w_i = a e_i$. Os quaternions w_i são vetores tangentes a H^3 em $a = a e_0$, constituindo uma base vetorial invariante à esquerda do espaço tangente sobre este grupo de Lie. Em termos de componentes,

$$w_i = a^A e_i e_A = e_i^A e_A.$$

Expressando este resultado em coordenadas a^B , temos

$$e_1^A = (-a^1, a^0, -a^3, a^2)$$

$$e_2^A = (a^2, a^3, a^0, -a^1)$$

$$e_3^A = (a^3, -a^2, a^1, a^0).$$

Os vetores w_i são os geradores do grupo de translações à esquerda e geram uma álgebra de Lie⁽⁴⁸⁾ que pode caracterizar H^3 univocamente, ou seja,

$$[\tilde{w}_1, \tilde{w}_2] = 2w_3 ; \quad [\tilde{w}_2, \tilde{w}_3] = -2w_1 ; \quad [\tilde{w}_3, \tilde{w}_1] = -2w_2 . \quad (\text{II.b.1})$$

Os campos vetoriais linearmente independentes, definidos em termos das coordenadas cartesianas a^b ,

$$X_i = e_i^B \partial / \partial a^B ,$$

constituem uma outra representação para a álgebra de H^3 . Em coordenadas, estes campos são escritos:

$$X_1 = -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$X_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} \quad (\text{II.b.2})$$

$$X_3 = a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

e satisfazem à álgebra de Lie de H^3 (45):

$$[X_1, X_2] = 2X_3 ; \quad [X_2, X_3] = -2X_1 ; \quad [X_3, X_1] = -2X_2 .$$

II.c - CÁLCULO DOS CAMPOS VETORIAIS E DAS UM-FORMAS INVARIANTES DE H^3

As coordenadas cartesianas a^B , $B = 0, 1, 2, 3$, de E^4 , satisfeita a condição $aa^* = 1$, onde $a = a^B e_B$ é um quaternion hiperbólico (de acordo com capítulo II.a), constituem uma carta sobre o grupo de Lie H^3 . Devido à existência do vínculo $aa^* = 1$, do ponto de vista prático é mais apropriado introduzir em H^3 novas cartas nas quais apareçam somente três coordenadas e para as quais o vínculo acima seja identicamente satisfeito.

Vamos então introduzir em H^3 o sistema de coordenadas (t, r, ϕ) , através da transformação

$$\begin{aligned} a^0 &= \text{ch } r \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t ; & a^1 &= \text{ch } r \text{ sen } \frac{\sqrt{2}}{2}t ; \\ a^2 &= -\text{sh } r \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \phi \right) ; & a^3 &= \text{sh } r \text{ sen} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \phi \right) \end{aligned} \quad (\text{II.c.1})$$

onde $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}t \leq 2\pi$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. É imediato verificar que $aa^*=1$ para (II.c.1).

Seria extremamente trabalhoso e pouco prático expressar os campos X_i nas coordenadas (t, r, ϕ) através da substituição direta de (II.c.1) em (II.b.2). Vamos empregar um método bastante mais sim

ples para obter em coordenadas (t, r, ϕ) tanto as um-formas invariantes à esquerda $\theta^i = e_B^i da^B$, onde e_B^i é a inversa de e^B_i e da^B é a base dual a $\partial/\partial a^B$, quanto os campos invariantes à esquerda X_i aos quais as σ^i estão associadas. Para realizar este cálculo, vamos usar o seguinte resultado⁽⁴⁹⁾: dada uma matriz A , representação de um quaternion hiperbólico a de norma unitária, $aa^* = 1$, vetor de H^3 , as um-formas $\sigma = A^{-1}dA$, onde A^{-1} é a inversa de A , são um-formas invariantes à esquerda.

Para construir a matriz A , tomaremos para os vetores de base hiperbólicos e_A , a representação:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(II.c.2)

Verifica-se facilmente que as matrizes acima obedecem à lei de multiplicação (II.a.1). Nesta representação, um quaternion $a = a^A e_A$ é

$$A = \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & a^1 - a^2 \\ -a^1 - a^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix},$$

(II.c.3)

e de $aa^* = 1$, vê-se que $\det A = 1$.

Dado outro quaternion de H^3 , $b = b^A e_A$, se B for a matriz

$$B = \begin{pmatrix} b^0 - b^3 & b^1 - b^2 \\ -b^1 - b^2 & b^0 + b^3 \end{pmatrix},$$

$\det B = 1$ e se $C = AB$, $\det C = 1$; e_0 é a identidade para este produto de matrizes e para cada A , $\exists A^{-1} = A^*$ - estas matrizes formam um grupo e a multiplicação de quaternions é substituída pela multiplicação matricial.



De (II.c.3), temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^0+a^3 & a^2-a^1 \\ a^1+a^2 & a^0-a^3 \end{pmatrix}, \quad dA = \begin{pmatrix} da^0-da^3 & da^1-da^2 \\ -da^1-da^2 & da^0+da^3 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{-1}dA = \tag{II.c.4}$$

$$\begin{pmatrix} (a^0+a^3)(da^0-da^3) - (a^2-a^1)(da^1+da^2) & (a^0+a^3)(da^1-da^2) + (a^2-a^1)(da^0+da^3) \\ (a^1+a^2)(da^0-da^3) - (a^0-a^3)(da^1+da^2) & (a^1+a^2)(da^1-da^2) + (a^0-a^3)(da^0+da^3) \end{pmatrix}$$

Na base de quaternions, as um-formas θ são escritas $\theta = \theta^A e_A$. H^3 é um grupo de Lie a três dimensões e teremos três θ^i linearmente independentes.

Comparando (II.c.4) com $\theta = \theta^A e_A$, com os e_A dados por (II.c.2), obtemos as um-formas invariantes à esquerda θ^i :

$$\theta^3 = a^0 da^1 - a^3 da^2 + a^1 da^0 - a^2 da^3$$

$$\theta^1 = -a^0 da^3 + a^3 da^1 - a^2 da^1 + a^1 da^2$$

$$\theta^2 = a^0 da^2 - a^3 da^1 - a^2 da^0 + a^1 da^3$$

No sistema de coordenadas $(x^1=r, x^2=\phi, x^3=t)$, dado pela transformação (II.c.1),

$$da^0 = \text{sh } r \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \, dr - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } \frac{\sqrt{2}}{2}t \, \text{ch } r \, dt$$

$$da^1 = \text{sh } r \text{sen } \frac{\sqrt{2}}{2}t \, dr + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \, \text{ch } r \, dt$$

$$da^2 = -\text{ch } r \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi) \, dr + \text{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi) \, \text{sh } r \, (\frac{\sqrt{2}}{2}dt-d\phi)$$

$$da^3 = \text{ch } r \text{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi) \, dr - \text{sh } r \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi) \, (\frac{\sqrt{2}}{2}dt-d\phi),$$

e

$$\theta^1 = -\text{sen}(\sqrt{2}t-\phi) \, dr + \cos(\sqrt{2}t-\phi) \, \text{sh } r \, \text{ch } r \, d\phi$$

$$\theta^2 = \cos(\sqrt{2}t-\phi) \, dr + \text{sen}(\sqrt{2}t-\phi) \, \text{sh } r \, \text{ch } r \, d\phi \tag{II.c.5}$$

$$\theta^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \, dt + \text{sh}^2 r \, d\phi$$

onde $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Comparando as expressões (I.c.5) para as um formas invariantes à esquerda θ^i com $\theta^i = e^{(i)}_{\alpha} dx^{\alpha}$, onde $\alpha=1,2,3$ é um índice espaço-tempo, determinamos:

$$e^{(1)}_1 = -\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right), \quad e^{(1)}_2 = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \text{ch } r \text{ sh } r, \quad e^{(1)}_3 = 0,$$

$$e^{(2)}_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right), \quad e^{(2)}_2 = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \text{sh } r \text{ ch } r, \quad e^{(2)}_3 = 0,$$

$$e^{(3)}_1 = 0, \quad e^{(3)}_2 = \text{sh}^2 r, \quad e^{(3)}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{II.c.6})$$

De $e^{(i)}_{\alpha} e^{(j)\alpha} = \delta_i^j$, temos

$$e^1_{(1)} = -\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right), \quad e^1_{(2)} = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right), \quad e^1_{(3)} = 0,$$

$$e^2_{(1)} = \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right)}{\text{ch } r \text{ sh } r}, \quad e^2_{(2)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right)}{\text{ch } r \text{ sh } r}, \quad e^2_{(3)} = 0,$$

$$e^3_{(1)} = -\sqrt{2} \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right), \quad e^3_{(2)} = -\sqrt{2} \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right),$$

$$e^3_{(3)} = \sqrt{2}.$$

Determinados os $e_{(A)}^{\alpha}$, temos de imediato os campos vetoriais invariantes à esquerda $X_i = e_{(i)}^{\alpha} \partial/\partial x^{\alpha}$, a saber,

$$X_1 = -\sqrt{2} \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \frac{\partial}{\partial t} - \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right)}{\text{ch } r \text{ sh } r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$X_2 = -\sqrt{2} \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \frac{\partial}{\partial t} + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\phi\right)}{\text{ch } r \text{ sh } r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$X_3 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{II.c.7})$$

duais às um-formas (III.c.5):

$$\langle \theta^i, X_j \rangle = \delta^i_j. \quad (\text{II.c.8})$$

Verifica-se por um cálculo direto que X_1, X_2, X_3 satisfazem à álgebra de H^3 dada por (II.b.1).

De maneira semelhante, calculamos as um-formas invariantes à direita sobre H^3 ,

$$\chi^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r) dt - \text{sh}^2 r d\phi \quad (\text{II.c.9})$$

$$\chi^2 = -\cos\phi dr - \sqrt{2} \text{sh} r \text{ch} r \text{sen}\phi dt + \text{sh} r \text{ch} r \text{sen}\phi d\phi$$

$$\chi^3 = -\text{sen}\phi dr + \sqrt{2} \text{sh} r \text{ch} r dt - \text{sh} r \text{ch} r \cos\phi d\phi,$$

e os campos vetoriais invariantes à direita correspondentes,

$$W_1 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{II.c.10})$$

$$W_2 = \sqrt{2} \text{sen}\phi \frac{\text{sh} r}{\text{ch} r} \frac{\partial}{\partial t} - \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \text{sen}\phi \frac{\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r}{\text{sh} r \text{ch} r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$W_3 = -\sqrt{2} \cos\phi \frac{\text{sh} r}{\text{ch} r} \frac{\partial}{\partial t} - \text{sen}\phi \frac{\partial}{\partial r} - \cos\phi \frac{\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r}{\text{sh} r \text{ch} r} \frac{\partial}{\partial \phi};$$

χ^i e W_i satisfazem também à relação de dualidade:

$$\langle \chi^i, W_j \rangle = \delta^i_j. \quad (\text{II.c.11})$$

Os campos (II.c.10) também constituem uma representação da álgebra de H^3 e satisfazem portanto à:

$$[W_1, W_2] = -2W_3; \quad [W_1, W_3] = 2W_2; \quad [W_2, W_3] = 2W_1.$$

II.d - A VARIEDADE $H^3 \times R$

Para construir a variedade produto direto $H^3 \times R$, sobre a variedade uni-dimensional R tomamos o sistema de coordenadas z , $-\infty < z < \infty$, e o campo vetorial $\partial/\partial z$, gerador do movimento próprio

em R , e sua um-forma dual dz .

O grupo $H^3 \times R$ é então univocamente determinado pela álgebra de Lie definida pelos vetores de base $X_i, \partial/\partial z$. Chamando $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2$, $X_3 = Z_0$ e $\partial/\partial z = Z_3$, onde X_1, X_2 e X_3 são dados por (II.c.7), a álgebra de Lie de $H^3 \times R$ é definida por

$$\begin{aligned} [Z_0, Z_1] &= -2Z_2, & [Z_0, Z_2] &= 2Z_1, & [Z_1, Z_2] &= 2Z_0, \\ [Z_a, Z_3] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.d.1})$$

onde $a=0,1,2$ e $Z_A = (Z_a, Z_3)$, com $A=0,1,2,3$. Chamamos também $\sigma^0 = \theta^3$, $\sigma^1 = \theta^1$, $\sigma^2 = \theta^2$, onde as um-formas invariantes à esquerda θ^1, θ^2 e θ^3 são dadas por (I.c.5) e $\sigma^3 = dz$.

As matrizes $e^{(A)}_{\alpha}$, definidas por

$$\sigma^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha}, \quad (\text{II.d.2})$$

$\alpha=0,1,2,3$ e $A=0,1,2,3$, constituem um campo de tetradas em $H^3 \times R$; são dadas por:

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & e^{(0)}_1 &= 0, & e^{(0)}_2 &= \text{sh}^2 r, & e^{(1)}_0 &= 0, \\ e^{(1)}_1 &= -\text{sen}(\sqrt{2}t-\phi), & e^{(1)}_2 &= \text{sh} r \text{ ch} r \cos(\sqrt{2}t-\phi), \\ e^{(2)}_0 &= 0, & e^{(2)}_1 &= \cos(\sqrt{2}t-\phi), & e^{(2)}_2 &= \text{sh} r \text{ ch} r \text{ sen}(\sqrt{2}t-\phi), \\ e^{(3)}_0 &= e^{(3)}_1 = e^{(3)}_2 = e^{(0)}_3 = e^{(1)}_3 = e^{(2)}_3 = 0, & e^{(3)}_3 &= 1 \end{aligned}$$

Em termos de componentes na base canônica $\partial/\partial x^{\alpha}$, os campos vetoriais invariantes à esquerda Z_A são escritos:

$$Z_A = e_{(A)}^{\alpha}(x) \partial/\partial x^{\alpha}; \quad (\text{II.d.3})$$

$e_{(A)}^{\alpha}(x)$ são as matrizes inversas.

A variedade $H^3 \times R$ possui a estrutura de um grupo de Lie que atua sobre si mesmo por multiplicação à esquerda, ao qual está associada a álgebra definida por (II.d.1). A mesma estrutura vale para a multiplicação à direita, onde a álgebra correspondente é construída de forma semelhante com os campos $Y_0 = W_3$, $Y_1 = W_1$, $Y_2 = W_2$, com Y_i dados por (II.c.10) e $Y_3 = \partial/\partial z$, e com as um-formas invariáveis à direita

$$\rho^A = \bar{e}_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha} ; \quad (II.d.4)$$

$\rho^0 = \chi^3$, $\rho^1 = \chi^1$, $\rho^2 = \chi^2$, onde as um-formas χ^i são dadas por (II.c.9) e $\rho^3 = dz$. Pode-se escrever

$$Y_A = \bar{e}_{(A)}^{\alpha} \partial/\partial x^{\alpha} . \quad (II.d.5)$$

Sobre $H^3 \times R$, de (II.c.8) e (II.c.11), e de

$$\langle \sigma^a, Z_3 \rangle = \langle \sigma^3, Z_a \rangle = 0 ,$$

onde $a=0,1,2$, podemos escrever

$$\langle \sigma^A, Z_B \rangle = \delta^A_B . \quad (II.d.6)$$

Da mesma forma,

$$\langle \rho^A, Y_B \rangle = \delta^A_B . \quad (II.d.7)$$

Examinando a estrutura topológica de $H^3 \times R$, pode-se mostrar, pelo método desenvolvido em detalhe por Sasse⁽⁵⁰⁾, que podemos modificar a topologia da seção $t-\phi = \text{cte.}$, abrindo o dois-hiperbolóide de uma folha através da desidentificação dos pontos $t + 2n\pi$. Deste modo, a linha coordenada que é a curva integral de $\partial/\partial t$ - que é tipo tempo fechada sobre o dois-hiperbolóide de uma folha - torna-se aberta, $-\infty < t < \infty$.

II.e - A MÉTRICA DE GÖDEL

Sobre $H^3 \times R$, construímos campos vetoriais invariantes à esquerda, Z_A , e à direita, Y_A , e suas um-formas duais, respectivamente, σ^A e ρ^A , e pode-se agora definir as métricas lorentzianas

$$g_E = g_{AB} \sigma^A \sigma^B \quad (\text{II.e.1a})$$

e

$$g_D = g_{AB} \rho^A \rho^B, \quad (\text{II.e.1b})$$

onde g_{AB} é uma matriz constante sobre a variedade. Pode-se mostrar que:

- a) g_E admite como vetores de Killing os campos vetoriais invariantes à direita Y_A , sobre $H^3 \times R$, ou seja, da definição de vetor de Killing⁽⁵¹⁾, que

$$\mathcal{L}_{Y_A} g_E = 0; \quad (\text{II.e.2a})$$

- b) do mesmo modo,

$$\mathcal{L}_{Z_A} g_D = 0, \quad (\text{II.e.2b})$$

onde Z_A são os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre $H^3 \times R$.

Para demonstrar (II.e.2a), desenvolvemos

$$\mathcal{L}_{Y_A} g_E = \bar{e}_{(A)}^\alpha g_{CB, \alpha} \sigma^C \sigma^B + 2g_{CB} (\mathcal{L}_{Y_A} \sigma^C) \sigma^B,$$

usando (II.e.1a) e (II.d.5). Mas, $g_{CB, \alpha} = 0$, logo

$$\mathcal{L}_{Y_A} g_E = 2g_{CB} (\mathcal{L}_{Y_A} \sigma^C) \sigma^B.$$

Em termos de componentes na base canônica $\partial/\partial x^\alpha$, a equação acima toma a forma:

$$(\mathcal{L}_{Y_A} g_E)_{\alpha\beta} = 2g_{CB} e^{(B)}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_{Y_A} \sigma^C, \frac{\partial}{\partial x^B} \right\rangle$$

Invertendo (II.d.2), temos

$$\partial/\partial x^\alpha = e^{(D)}_{\alpha} Z_D$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{Y_A} g_E)_{\alpha\beta} &= 2g_{CB} e^{(D)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} \langle \mathcal{L}_{Y_A} \sigma^C, Z_D \rangle = \\ &= -2g_{CB} e^{(D)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} \langle \sigma^C, \mathcal{L}_{Y_A} Z_D \rangle, \end{aligned}$$

pois, de (II.d.6), temos que

$$\mathcal{L}_{Y_A} \langle \sigma^C, Z_D \rangle = 0 .$$

Os campos Z_D são os geradores do grupo de translações à esquerda em $H^3 \times R$. São, portanto, invariantes à esquerda⁽⁵¹⁾, ou seja,

$$\mathcal{L}_{Y_A} Z_D = 0 .$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{Y_A} g_E = 0 .$$

Da mesma forma, mostra-se que g_D admite os campos vetoriais invariantes à esquerda, Z_A , como vetores de Killing.

As métricas (II.e.1a e b) serão chamadas, respectivamente, métricas invariantes à esquerda e à direita.

Construiremos o universo de Gödel introduzindo na variedade $H^3 \times R$ a métrica lorentziana invariante à esquerda g_E , com o elemento de linha dado por

$$ds^2 = -\frac{4}{w^2} [(\sqrt{2}\sigma^0)^2 - (\sigma^1)^2 - (\sigma^2)^2 - (\sigma^3)^2] , \quad (\text{II.e.3})$$

onde w é uma constante positiva e σ^A são um-formas invariantes à esquerda. No sistema de coordenadas (t, r, ϕ, z) , $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$, são dadas por:

$$\sigma^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} dt + \text{sh}^2 r d\phi$$

$$\sigma^1 = -\text{sen}(\sqrt{2}t-\phi) dr + \cos(\sqrt{2}t-\phi) \text{sh} r \text{ch} r d\phi$$

$$\sigma^2 = \cos(\sqrt{2}t-\phi) dr + \text{sen}(\sqrt{2}t-\phi) \text{sh} r \text{ch} r d\phi$$

$$\sigma^3 = dz$$

e a métrica (II.e.3) assume a forma

$$ds^2 = \frac{4}{w^2} \left[dt^2 - dr^2 + \text{sh}^2 r (2 \text{sh}^2 r - \text{ch}^2 r) d\phi^2 - dz^2 + 2\sqrt{2} \text{sh}^2 r dt d\phi \right] \quad (\text{II.e.4})$$

A métrica (II.e.4) é solução das equações de Einstein (II.1), com a condição de que $k\rho/2 = w^2 = -2\Lambda$, tendo como fonte um fluido perfeito descrito pela equação de estado $p=0$ e admite, por construção, como vetores de Killing os campos vetoriais invariantes à direita Y_A dados por

$$Y_0 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$Y_1 = \sqrt{2} \text{sen} \phi \frac{\text{sh} r}{\text{ch} r} \frac{\partial}{\partial t} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \text{sen} \phi \frac{\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r}{\text{sh} r \text{ch} r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$Y_2 = -\sqrt{2} \cos \phi \frac{\text{sh} r}{\text{ch} r} \frac{\partial}{\partial t} - \text{sen} \phi \frac{\partial}{\partial r} - \cos \phi \frac{\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r}{\text{sh} r \text{ch} r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II.e.5})$$

Da expressão (II.e.4) segue diretamente que também $\partial/\partial t$ é vetor de Killing. Conseqüentemente, de (II.e.3) e (II.e.5), tem-se que a métrica de Gödel admite 5 vetores de Killing linearmente independentes, globalmente definidos sobre a variedade⁽⁵²⁾.

O campo de quadri-velocidade de observadores comoventes com a matéria é dado por $u = \partial/\partial t$, e no sistema de coordenadas utilizado tem componentes $u^\alpha = \delta^\alpha_0 = (1, 0, 0, 0)$. O vetor vorticidade tem componentes $\Omega^\alpha = (0, 0, 0, w/\sqrt{2})$.

A variedade $H^3 \times R$ é simplesmente transitiva, pois H^3 é simplesmente transitiva e o gerador das translações em R , $\partial/\partial z$, comuta com os geradores das translações em H^3 . Consequentemente, o universo de Gödel é homogêneo, no sentido de que dois pontos quaisquer de $H^3 \times R$ são equivalentes por uma operação do grupo de isometrias⁽⁵³⁾. Além disto, $\partial/\partial t$ é um vetor de Killing globalmente definido em $H^3 \times R$ e a solução (II.e.4) é estacionária.

II.f - ESPINORES E ISOMETRIAS; MODOS GLOBAIS INVARIANTES DO CAMPO ESPINORIAL

O conceito de simetria é de grande utilidade na resolução de equações da teoria quântica em métricas de fundo curvas. A imposição de que um determinado campo espinorial Ψ , solução da equação de Dirac (I.d.1), tenha as mesmas simetrias que uma dada métrica⁽⁵⁴⁾, implica em restringir essas soluções àqueles campos que satisfizerem à

$$\mathcal{L}_{X_A} \Psi = \alpha_A \Psi \quad , \quad (\text{II.f.1})$$

onde X_A são os vetores de Killing associados às simetrias em questão e α_A são constantes. A definição da derivada de Lie de um espinor relativamente a um vetor ξ é dada por Henneaux⁽⁵⁵⁾:

$$\mathcal{L}_\xi \Psi = \xi^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{16} \left[\mathcal{L}_\xi (e_{(A)\mu}) e_{(B)}^\mu - \mathcal{L}_\xi (e_{(B)\mu}) e_{(A)}^\mu \right] \left[\gamma^{AB} - \gamma^{BA} \right] \Psi \quad (\text{II.f.2})$$

Consideremos então a métrica g ,

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad ,$$

onde $\theta^A = e^{(A)}_\alpha dx^\alpha$; g admite um grupo de isometrias G_n , cujos geradores são os vetores de Killing X_A , dados por

$$X_A = X_A^\alpha \partial / \partial x^\alpha ,$$

$A=1,2,\dots,n$. Por definição, a derivada de Lie de g com relação aos vetores X_A se anula,

$$\mathcal{L}_{X_A} g = 0 .$$

Consideremos também um campo espinorial Ψ , solução de

$$i\gamma^\mu \Psi_{;\mu} = m\Psi . \quad (\text{II.f.3})$$

A equação (II.f.1) é consistente com a equação de Dirac (II.f.3) , como demonstraremos a seguir.

Aplicando a derivação de Lie ao lado esquerdo de (II.f.3), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_B} (\gamma^\mu \Psi_{;\mu}) &= \mathcal{L}_{X_B} (e_{(A)}^\mu \gamma^A \Psi_{;\mu}) = \\ &\gamma^A [\mathcal{L}_{X_B} (e_{(A)}^\mu \Psi_{;\mu}) + e_{(A)}^\mu \mathcal{L}_{X_B} (\Psi_{;\mu})] \quad (\text{II.f.4}) \end{aligned}$$

A derivada de Lie de um campo de tetradas é, por definição⁽⁵⁵⁾:

$$\mathcal{L}_{X_B} e_{(A)\alpha} = X_B^\beta e_{(A)\alpha,\beta} + e_{(A)\beta} X_{B,\alpha}^\beta .$$

Mas, $e_{(A)\alpha}$ é um referencial ortogonal adaptado ao grupo de isometrias da métrica g ⁽⁵⁶⁾ e, portanto,

$$\mathcal{L}_{X_B} e_{(A)\alpha} = 0 . \quad (\text{II.f.5})$$

Substituindo (II.f.5) em (II.f.4), temos

$$\mathcal{L}_{X_A} (\gamma^\mu \Psi_{;\mu}) = \gamma^\mu (\mathcal{L}_{X_A} \Psi)_{;\mu} \quad (\text{II.f.6})$$

pois Henneaux⁽⁵⁵⁾ mostrou que a derivada de Lie de um espinor relativamente a um vetor de Killing comuta com a derivação covariante.

A igualdade (II.f.6) nos permite concluir que $\mathcal{L}_{X_A} \Psi$ tam-

bém é solução da equação de Dirac (II.f.3), ou seja,

$$i\gamma^\mu (\mathcal{L}_{X_A} \Psi)_{;\mu} = m(\mathcal{L}_{X_A} \Psi) \quad .$$

Portanto, a equação (II.f.1) é consistente com a equação de Dirac, e os campos espinoriais que satisfazem à

$$\mathcal{L}_{X_A} \Psi = \alpha_A \Psi \tag{II.f.1}$$

são as soluções da equação de Dirac invariantes sob as transformações de simetria da métrica g . Henneaux⁽⁵⁵⁾ tratou o problema de encontrar a forma mais geral de um campo espinorial que tenha as mesmas simetrias que uma dada métrica, buscando soluções de (II.f.1) para o caso particular em que $\alpha_A = 0$.

Como apontado por Gibbons⁽⁵⁴⁾, se $T_{\mu\nu}(\Psi)$ é o tensor energia-momentum do campo $\Psi(x)$ sobre o qual estamos impondo as simetrias geradas pelos vetores de Killing $X_A = X_A^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ e se os campos $\Psi(x)$ se anulam no infinito, a cada um dos vetores X_A corresponde uma quantidade que se conserva, o momentum generalizado P_A , definido por

$$P_A = \int_\sigma T_{\mu\nu}(\Psi) X_A^\mu n^\nu d^3x \quad , \tag{II.f.7}$$

onde n^ν é uma normal à hipersuperfície de Cauchy parcial σ ⁽⁵⁷⁾, de modo que $P_A \sim \alpha_A$. A integral de conservação (II.f.7) decorre da lei de conservação de corrente

$$(J_A^\mu)_{;\mu} = (T_{\nu A}^\mu k_A^\nu)_{;\mu} = 0 \quad . \tag{II.f.8}$$

No caso do universo de Gödel, a existência de cinco vetores de Killing linearmente independentes para a métrica (II.e.4) nos permite selecionar as simetrias que nos interessam, através da

escolha dos vetores X_A . Escolhendo-se os X_A convenientemente em função do problema tratado, a solução das equações (II.f.1) nos permite:

- a) determinar a dependência do campo em certas variáveis;
- b) simplificar a resolução da equação de Dirac por separação de variáveis;
- c) obter uma base de soluções apropriadas ao problema em questão.

No capítulo seguinte, escolheremos os vetores de Killing $\partial/\partial t$, $\partial/\partial \phi$, $\partial/\partial z$, e obteremos modos globais invariantes hiperbólicos do campo espinorial Ψ , com os quais será conveniente trabalhar no estudo da interação do momentum angular dos neutrinos com a vorticidade do universo de Gödel.

40. A.Einstein, "Sur le problème cosmologique", Gauthier-Villars, Paris, 1951

41. Em sua forma mais geral, $T_{\mu\nu}$ pode ser escrito:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu} + p h_{\mu\nu} + 1/2 q_{(\mu} u_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}$$

onde ρ é a densidade da matéria, medida por um observador que se move com velocidade u_{α} ; p é a pressão isotrópica do fluido, q_{μ} é o fluxo de energia com relação a u_{μ} e $\Pi_{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica. Conforme, por exemplo, G.F. R.Ellis, "Relativistic cosmology", em "General relativity and gravitation", Academic Press, New York, 1971.

42. Originalmente, Ann.der Phys., 49(1916)769, Einstein propôs que os fenômenos gravitacionais fossem descritos pelas equações

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} .$$

Ainda hoje discute-se qual das equações de Einstein, com ou sem termo cosmológico, descreve com maior correção os fenômenos gravitacionais. Na realidade, o significado e as origens da constante cosmológica ainda são bastante mal compreendidos e constituem uma questão em aberto. As estimativas mais recentes colocam limites superiores no valor de Λ da ordem de $10^{-120} m_p$, onde m_p é a massa do próton. Ver, por exemplo, J.Ellis, "A brilliant past in front of us", First ESO-CERN Symposium on the large-scale structure of the universe, cosmology and particle physics, 1983. Este valor é no sistema de unidades em que $\hbar=c=1$.

43. Posteriormente, I.Ozváth, J.Math.Phys., 6(1965)590, provou que "existem somente duas soluções homogêneas das equações de Einstein nas quais a matéria apresenta rotação rígida, com expansão e deformação de cisalhamento nulos: a solução de Gödel ($\Omega \neq 0$) e a solução estática de Einstein ($\Omega=0$)".

44. I.Ozváth e E.Schücking, Ann.of Phys., 55(1969)166, apresentaram um universo com rotação, caracterizado como o grupo de Lie $S^3 \times R$ sobre o qual é construída uma métrica invariante que satisfaz às equações de Einstein (II.1) para um fluido perfeito com pressão $p=0$. A solução por eles obtida, não apresenta curvas tipo tempo fechadas; é, no entanto, uma métrica extremamente complicada e, em consequência, pouco prática do ponto de vista operacional.

45. A partir dos artigos de Ozváth e Schücking acima citados, várias tentativas foram feitas de encontrar novas soluções cosmológicas das equações de Einstein com rotação. M.Novello e M.J.Rebouças, Ap.J., 225(1978)719, encontraram uma solução exata com expansão, cisalhamento e rotação, tendo como fonte um fluido que apresenta fluxo de calor, e que tende assintoticamente para o uni

verso original de Gödel. M.J.Rebouças e J.A.S. de Lima, J.Math.Phys., 11 (1981)2699, generalizaram o resultado acima para a deformação de cisalhamento e rotação dependentes do tempo e M.J.Rebouças, Il Nuovo Cimento, 67B (1982)120, para rotação dependente do tempo. M.J.Rebouças e J.Tiomno, Phys. Rev.D, 28(1983)1251, fazem uma breve revisão das tentativas de encontrar novas soluções exatas das equações de Einstein tipo-Gödel e apresentam a primeira solução tipo-Gödel completamente causal. Posteriormente, uma família de soluções sem regiões acausais foi obtida por J.F.Oliveira, A.F.da F. Teixeira e J.Tiomno, Phys.Rev.D, 34(1986) 3661. A fonte da geometria é um fluido com spin e é empregada a formulação de Einstein-Cartan da relatividade geral. Todos esses trabalhos são soluções homogêneas das equações de Einstein. Recentemente, soluções tipo-Gödel inhomogêneas têm sido estudadas: J.M.Bradley e S.Sviestins, GRG, 16(1984)1119 e M.J.Rebouças e J. Tiomno, Phys.Lett.B, 90(1985)204.

46. P.M.Cohn, "Lie groups", Cambridge at the University Press, 1957.
47. H^3 é simplesmente conexo por construção, pois E^4 é simplesmente conexo e H^3 é um tri-hiperbolóide imerso em E^4 .
48. A álgebra de Lie dada por (II.b.1) caracteriza H^3 como uma variedade tipo VII na classificação de Bianchi. Ver, por exemplo, M.P.Ryan e L.C.Shepley, "Homogeneous cosmologies", Princeton University Press, 1975.
49. H.Flanders, "Differential forms", Academic Press, New York, 1963.
50. Para maiores detalhes, ver, Fernando D.Sasse, "Simetrias, problemas de causalidade e campos de neutrinos em universos antípodos", Tese de Mestrado, CBPF, 1986.
51. Ver, por exemplo, B.F.Schutz, "Geometrical methods of mathematical physics", Cambridge University Press, 1980.
52. A existência de 5 vetores de Killing linearmente independentes para a métrica de Gödel já havia sido mostrada por M.J.Rebouças e J.Tiomno, Phys. Rev.D, 28(1983)1251. Mais recentemente, A.F.da F.Teixeira, M.J.Rebouças e J.E.Aman, Phys.Rev.D, 32(1985)3309 e I.D.Soares e J.Tiomno, em fase de redação, estenderam esse resultado com a inclusão de isometrias dependentes do tempo, obtendo então 7 vetores de Killing linearmente independentes.
53. A variedade $H^3 \times R$ não possui homogeneidade espacial, pois G_5 não inclui um sub-grupo de transformações de isometrias que atue simplesmente transitivamente sobre uma superfície espacial.

54. G.Gibbons, Comm.Math.Phys., 44(1975)245, trata o caso de um campo escalar.
55. M.Henneaux, GRG, 12(1980)137.
56. E.Cartan, "Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann", Gauthiers-Villars, 1951.
57. S.W.Hawking e G.F.R.Ellis, "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press, 1973.

CAPÍTULO III

NEUTRINOS EM INTERAÇÃO COM A VORTICIDADE:

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Com o objetivo de estudar a interação dos neutrinos com a vorticidade da matéria, consideraremos os neutrinos como um campo teste sobre o universo de Gödel, com métrica

$$ds^2 = \frac{4}{w^2} (dt^2 - dr^2 - dz^2 + \text{sh}^2 r (2\text{sh}^2 r - \text{ch}^2 r) d\phi^2 + 2\sqrt{2} \text{sh}^2 r dt d\phi) , \quad (\text{III.1})$$

onde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$. O campo de neutrinos será descrito por quadri-espinores de Dirac $\psi(x)$, que obedecem à equação de Dirac generalizada para espaços curvos,

$$\gamma^\mu(x) \psi(x)_{;\mu} = 0.$$

No formalismo de tetradas, com o qual trabalharemos, as matrizes γ^μ são dadas por

$$\gamma^\mu(x) = e_{(A)}^\mu \gamma^A,$$

γ^A as matrizes constantes de Dirac.

No presente capítulo, empregando referenciais locais e o cálculo com formas diferenciais⁽³²⁾, encontraremos a forma explícita da equação de Dirac no universo de Gödel (III.1). Escolhendo convenientemente três vetores de Killing associados à métrica acima, determinaremos modos globais invariantes hiperbólicos do campo espinorial $\psi(x)$, e encontraremos um conjunto completo de soluções ortogonais que são auto-vetores de energia, momentum angular e helicidade. Introduzimos a formulação hamiltoniana para nossa equação de Dirac. Através da definição de operadores de momentum angular J^+ e J^- , construiremos uma sequência de soluções. Imporemos condições de

contorno consistentes com o caráter de campo teste dos neutrinos.

III.a - A EQUAÇÃO DE DIRAC PARA O NEUTRINO NO MODELO DE GÖDEL

A equação de Dirac para neutrinos acoplados à gravitação, escrita no referencial local $\sigma^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$, é

$$\gamma^A \Psi_{;A} = 0 \quad ; \quad (\text{III.a.1})$$

γ^A são as matrizes constantes de Dirac e $\Psi_{;A} = e_{(A)}^{\alpha} \Psi_{,\alpha} + \Gamma_A \Psi$, os Γ_A sendo dados por (I.c.9).

Consideremos o universo de Gödel construído no capítulo anterior, ou seja, a variedade $H^3 \times R$ dotada da métrica invariante à esquerda, dada por

$$ds^2 = \eta_{AB} \sigma^A \sigma^B . \quad (\text{III.a.2})$$

Tomemos o referencial de Lorentz local em que as σ^A são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \frac{2}{w} (dt + \sqrt{2} \operatorname{sh}^2 r d\phi) \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{2}{w} \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r d\phi \quad ; \\ \sigma^1 &= \frac{2}{w} dr \quad ; \quad \sigma^3 = \frac{2}{w} dz \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.a.3})$$

onde w é uma constante positiva; substituindo (III.a.3) em (III.a.2), obtemos a métrica de Gödel em coordenadas (t, r, ϕ, z) , $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$, a saber,

$$\begin{aligned} ds^2 &= [dt^2 - dr^2 - dz^2 + \operatorname{sh}^2 r (2 \operatorname{sh}^2 r - \operatorname{ch}^2 r) d\phi^2 + \\ &\quad + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}^2 r dt d\phi] \frac{4}{w^2} . \end{aligned} \quad (\text{III.a.4})$$

De (III.a.3), podemos ler diretamente as componentes não nulas do campo de tetradas $e_{\mu}^{(A)}$, associado ao referencial de Lorentz local escolhido:

$$e_{\ 0}^{(0)} = \frac{2}{w} \quad ; \quad e_{\ 2}^{(0)} = 2 \frac{\sqrt{2}}{w} \operatorname{sh}^2 r \quad ; \quad e_{\ 1}^{(1)} = \frac{2}{w} \quad ;$$

$$e^{(2)}_2 = \frac{2}{w} \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r ; \quad e^{(3)}_3 = \frac{2}{w} ; \quad (\text{III.a.5})$$

de $e^{(A)}_\alpha(x) e^{(B)\alpha}(x) = \delta^A_B$, obtemos suas inversas:

$$e^0_{(0)} = \frac{w}{2} ; \quad e^0_{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} w \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} r} ; \quad e^1_{(1)} = \frac{w}{2} ;$$

$$e^2_{(2)} = \frac{w}{2} ; \quad e^3_{(3)} = \frac{w}{2} . \quad (\text{III.a.6})$$

Com a escolha (III.a.3), os coeficientes de Fock-Ivanenko são calculados:

$$\Gamma_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} w \gamma^1 \gamma^2 ; \quad \Gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} w \gamma^0 \gamma^2 ,$$

$$\Gamma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} w \gamma^0 \gamma^1 + \frac{w}{4} \frac{\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r}{\operatorname{ch} r \operatorname{sh} r} \gamma^2 \gamma^1 , \quad \Gamma_3 = 0 \quad (\text{III.a.7})$$

Desenvolvendo a equação (III.a.1) e usando (III.a.5 e 6), temos:

$$\gamma^0 \Psi_{,t} + \gamma^1 \Psi_{,r} + \frac{1}{\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r} \gamma^2 \Psi_{,\phi} - \sqrt{2} \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} r} \gamma^2 \Psi_{,t} + \gamma^3 \Psi_{,z} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \Psi + \frac{\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r}{2(\operatorname{ch} r \operatorname{sh} r)} \gamma^1 \Psi = 0 . \quad (\text{III.a.8})$$

III.b - MODOS GLOBAIS INVARIANTES HIPERBÓLICOS

Vamos procurar soluções Ψ que tenham algumas das simetrias da métrica de Gödel. Estaremos, portanto, como vimos no capítulo II.f, restringindo os quadri-espinores às soluções das equações

$$\mathcal{L}_{\xi_A} \Psi = \alpha_A \Psi \quad (\text{II.f.1})$$

onde \mathcal{L}_{ξ_A} é a derivada de Lie na direção dos vetores de Killing ξ_A associados a esta métrica e as α_A são constantes, para ξ_A convenientemente escolhidos. A derivada de Lie de um espinor ao longo de um vetor ξ é, por definição⁽⁵⁵⁾:

$$\mathcal{L}_{\xi} \Psi = \xi^{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{16} \left[\mathcal{L}_{\xi} (e_{(A)\mu}) e_{(B)}^{\mu} - \mathcal{L}_{\xi} (e_{(B)\mu}) e_{(A)}^{\mu} \right] \left[\gamma_{\gamma}^{A B} - \gamma_{\gamma}^{B A} \right] \Psi \quad (\text{III.b.1})$$

Entre os cinco vetores de Killing da métrica de Gödel construídos no capítulo II.d, escolhemos $\partial/\partial t$, $\partial/\partial \Phi$ e $\partial/\partial z$. Empregando o método de separação de variáveis, a função $\Psi(t, r, \Phi, z)$ é escrita

$$\Psi(t, r, \Phi, z) = \Psi_0(t) \Psi_1(r) \Psi_2(\Phi) \Psi_3(z) \quad . \quad (\text{III.b.2})$$

Substituindo (III.b.2) nas equações (III.b.1) para cada um dos ξ_A escolhidos, temos:

$$\mathcal{L}_{\partial/\partial t} \Psi_0 = -i\varepsilon \Psi_0 \quad (\text{III.b.3i})$$

$$\mathcal{L}_{\partial/\partial \Phi} \Psi_2 = -im \Psi_2 \quad (\text{III.b.3ii})$$

$$\mathcal{L}_{\partial/\partial z} \Psi_3 = -ik \Psi_3 \quad (\text{III.b.3iii})$$

As soluções Ψ que procuramos são as soluções de (III.a.8) nos modos invariantes globais definidos pelas equações (III.b.3).

Como o campo de tetradas (III.a.5), com o qual estamos trabalhando constitui um referencial ortogonal adaptado ao grupo de isometrias da métrica (III.a.4), obtemos

$$\mathcal{L}_{\partial/\partial t} e_{(A)\alpha} = \mathcal{L}_{\partial/\partial \Phi} e_{(A)\alpha} = \mathcal{L}_{\partial/\partial z} e_{(A)\alpha} = 0$$

e as equações (III.b.3) se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_0 = -i\varepsilon \Psi_0$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \Psi_2 = -im \Psi_2 \quad (\text{III.b.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi_3 = -ik \Psi_3$$

As equações acima definem modos globais invariantes hiperbólicos e

as soluções que buscamos são do tipo "onda plana", a saber,

$$\Psi(t, r, \phi, z) = \Psi(r) e^{-i\epsilon t} e^{-im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{III.b.5})$$

$\partial/\partial t$ é um vetor tipo tempo definido globalmente em $H^3 \times R$, que gera as translações temporais. O fato de o modelo de Gödel admiti-lo como vetor de Killing permite a construção de modos de energia invariantes para o campo de neutrinos, ou seja, ϵ é o auto-valor de energia; m e k são constantes que serão interpretadas como associadas aos momenta, respectivamente angular e linear, dos neutrinos na direção de $\vec{\Omega}$.

III.c- EQUAÇÃO DE DIRAC NA FORMA HAMILTONIANA; OPERADOR HELICIDADE

Para um campo de neutrinos $\Psi(x)$ nos modos de energia invariantes definidos por (III.b.3i) e auto-estado de γ^5 ,

$$\gamma^5 \Psi(x) = L \Psi(x) \quad , \quad L^2 = 1. \quad (\text{III.c.1})$$

Da equação (III.a.8), obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon L \Psi = & -i \Sigma^1 \Psi_{,r} - \frac{i}{\text{sh } r \text{ ch } r} \Sigma^2 \Psi_{,\phi} - i \Sigma^3 \Psi_{,z} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \Sigma^2 \Psi_{,t} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \Sigma^3 \gamma^5 \Psi - \frac{i(\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r)}{2 \text{ sh } r \text{ ch } r} \Sigma^1 \Psi \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.c.2})$$

onde

$$\Sigma^j = \gamma^5 \gamma^0 \gamma^j \quad \text{e} \quad \Sigma^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} ; \quad (\text{III.c.3})$$

Σ^j é a matriz de spin, $j=1,2,3$. Definindo o produto escalar dos vetores A^i e B^j como $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A^i B^i$, a equação (III.c.2) pode ser escrita de forma mais compacta, ou seja,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \epsilon \Psi = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{L} \Psi \quad (\text{III.c.4})$$

$\vec{P} = (p^1, p^2, p^3)$ é o operador de momentum cujas componentes na base local são (64)

$$p^j = i\bar{e}^{(j)\alpha} \partial/\partial x^\alpha - in^{(j)} + \sqrt{2}/2 \gamma^5 \Omega^{(j)} / |\Omega| ; \text{ (III.c.5a)}$$

$\bar{e}^{(1)1} = \bar{e}^{(3)3} = -1$, $\bar{e}^{(2)2} = -1/\text{shr chr}$, e $\bar{e}^{(2)0} = \sqrt{2} \text{shr}/2 \text{chr}$, $n^{(j)} = (\frac{\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r}{2 \text{chr shr}}, 0, 0)$ e $\Omega^{(j)} = (0, 0, \sqrt{2}w/2)$. As componentes de p^j são:

$$p^1 = -i \partial/\partial r - i(\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r)/(2 \text{chr shr})$$

$$p^2 = -i/\text{shr chr} \partial/\partial \Phi + \sqrt{2}i \text{shr}/2 \text{chr} \partial/\partial t \quad \text{(III.c.5b)}$$

$$p^3 = -i \partial/\partial z + \sqrt{2}\gamma^5/2 .$$

Da equação (III.c.4), vemos que $\frac{\Sigma^j p^j}{L}$ é o operador hamiltoniano do sistema. Decorre daí imediatamente que $[\Sigma^j p^j, H] = 0$ e a projeção do spin Σ^j na direção do momentum local p^j é uma constante de movimento. Por outro lado, o operador $\frac{\Sigma^j p^j}{\epsilon}$, de auto-valor constante L , é o operador helicidade nos modos invariantes de energia associados ao vetor de Killing tipo tempo global $\partial/\partial t$. É importante observar que esses operadores estão definidos no referencial local (III.a.3).

Se escrevemos a equação de Dirac (III.a.1) na forma

$$\gamma^A (e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha - \Gamma_A) \Psi = \gamma^A \Gamma_A \Psi = 0 \quad \text{(III.c.6)}$$

e comparamos com (III.a.8), vemos que os momenta locais para os neutrinos são escritos $p_j = e_{(j)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha - \Gamma_j$, onde $\partial/\partial x^\alpha$ são os momenta canônicos. Ao momentum local $\partial/\partial z$ está associada a quantidade que se conserva k , que pode assim ser interpretada como auto-valor do momentum linear na direção da vorticidade e que se conserva de acordo com (II.f.7 e 8). Lembrando que o coeficiente de Fock-Ivanenko $\Gamma_3 = 0$, verifica-se de imediato que as componentes 2 e 3 do momentum linear diferem em (III.c.5b) e (III.c.6), pois

$$p_3 = e_{(3)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha - \Gamma_3 = i \partial/\partial z.$$

Da equação (III.c.4), no entanto, vê-se que o termo $\sqrt{2}\gamma^5/2$ que apa

rece na componente 3 em (III.c.5b) corresponde a $\gamma^2\Gamma_2$ em (III.c.6), pois

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \Sigma^3 \gamma^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Sigma^2 (-i\gamma^0 \gamma^1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma^5 \gamma^0 (-i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma^5 \gamma^0 (i\gamma^2 \Gamma_2).$$

Na realidade, $\Sigma^j p^j$ é invariante sob rotações espaciais de Lorentz locais, o que implica numa arbitrariedade na escolha dos p_j em (III.c.4); a possibilidade de termos $\sqrt{2}\Sigma^2\gamma^0\gamma^1/2$ em p_2 ou $\sqrt{2}\Sigma^3\gamma^5$ em p_3 é apenas um exemplo dessa arbitrariedade. Como veremos no capítulo V, a existência deste termo resulta numa assimetria na corrente de neutrino e anti-neutrinos; a forma que ele assume em p^3 , a saber, $\sqrt{2}\gamma^5/2$, é mais conveniente e possibilita maior transparência na análise dessas assimetrias.

Da expressão de p^3 em (III.c.5b), vemos também que, por analogia com o acoplamento eletromagnético, podemos pensar em L como a constante do acoplamento da estrutura espinorial à vorticidade, se lembrarmos que $\gamma^5\Psi=L\Psi$.

A dinâmica do momentum local p^j pode ser calculada por:

$$\dot{p}^j = [p^j, H] = i[p^j, L\Sigma^i p^i] \quad . \quad (III.c.6)$$

Como Σ^j comuta com γ^5 ,

$$\begin{aligned} \dot{p}^j &= iL \Sigma^i [p^j, p^i] = \\ &= iL \Sigma^i (\bar{e}^{(i)\alpha} e^{(j)\beta}_{,\alpha} - \bar{e}^{(j)\alpha} e^{(i)\beta}_{,\alpha}) \partial/\partial x^\beta \quad . \end{aligned}$$

Mas, $\bar{e}^{(j)\beta}_{,\alpha} e^{(i)\alpha} = -\gamma^{jMi} e^{(M)\beta}$, onde γ_{ABC} são os coeficientes de

rotação de Ricci e os índices maiúsculos variam de 1 a 4. Então,

$$\dot{p}^j = \epsilon_L \Sigma^i \left[\gamma^{jMi} \bar{e}_{(M)}^\beta - \gamma^{iMj} \bar{e}_{(M)}^\beta \right] \frac{\partial}{\partial x^\beta} .$$

O índice M acima só pode ser zero e, agindo sobre auto-estados de energia, \dot{p}^j se reduz a

$$\dot{p}^j = \epsilon_L \Sigma^i \eta^{ijk} \Omega^k$$

ou, em notação vetorial,

$$\dot{\vec{p}} = \epsilon_L \vec{\Sigma} \times \vec{\Omega} . \quad (\text{III.c.7})$$

onde $\eta^{jkl}=1$, quando $j \neq k \neq l$, $\eta^{jkl} = -\eta^{kjl} = -\eta^{jlk}$, $\eta^{jkl}=0$ para dois índices iguais quaisquer e $\Omega = \frac{w}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z}$.

Da expressão (III.c.7) acima, vê-se que $\dot{p}^3=0$: a componente na direção da vorticidade $\vec{\Omega}$ do momentum local também é uma constante do movimento. No parágrafo III.g, veremos que as soluções (III.f.16) são também auto-funções da componente do momentum na direção determinada pela vorticidade.

Como já vimos acima, o operador $L \Sigma^i p^i$, atuando sobre o espaço das soluções (III.b.5), é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}(L \Sigma^i p^i) = 0$. Portanto, se escrevermos $\vec{p} = |\vec{p}| \hat{m}$, onde \hat{m} é um vetor unitário em uma direção qualquer, teremos

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{\Sigma}) \cdot |\vec{p}| \hat{m} + \vec{\Sigma} \cdot \frac{d}{dt}(|\vec{p}| \hat{m}) .$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Sigma}) \cdot \hat{m} = - \frac{\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} \cdot \frac{d}{dt}(|\vec{p}| \hat{m}) .$$

Se, sem perda de generalidade, colocamos \hat{m} na direção 1, podemos escrever que

$$\frac{d}{dt} \Sigma^1 = - \frac{\Sigma^1}{|\vec{p}|} \frac{d}{dt} p^1.$$

Na expressão acima, o índice repetido não significa soma. De $L(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = \text{cte.}$, temos

$$\frac{\Sigma^1}{|\vec{p}|} = \frac{\text{cte.}}{L|\vec{p}|^2}.$$

Usando a relação acima e a expressão (III.c.7), temos

$$\frac{d}{dt} \Sigma^1 = - \frac{\text{cte}}{|\vec{p}|} \epsilon_{\eta}^{1jk} \Sigma^j \Omega^k.$$

É evidente que esta relação vale para as direções 2 e 3 e portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \vec{\Sigma} = - \frac{\text{cte}}{|\vec{p}|^2} \epsilon (\vec{\Sigma} \times \vec{\Omega}).$$

Conclui-se assim que $\vec{\Sigma}$ precessiona em torno da direção de $\vec{\Omega}$ com velocidade angular proporcional a $\epsilon \vec{\Omega}$ e independentemente da helicidade de L.

Pode-se também mostrar que neutrinos num universo de Gödel viajam ao longo do cone de luz local. Com efeito, de (III.c.2 e 3), vê-se que

$$\epsilon L \phi = \sigma^j p^j L \phi,$$

onde usamos que $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ L \phi \end{pmatrix}$ e, como era de se esperar para partículas de massa nula, $(\epsilon^2 - p^j p^j) \phi = 0$: as únicas soluções de neutrinos não nulas são aquelas para as quais $\epsilon = \pm |\vec{p}|$.

III.d - SOLUÇÕES GERAIS DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Como vimos no capítulo I, para neutrinos em auto-estados de energia e do operador γ^5 , os quadri-espinores $\Psi(x)$ podem ser escritos

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ L\phi(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III.d.1})$$

onde as funções $\phi(x)$ são espinores a duas componentes, e $L = \pm 1$ são os auto-valores do operador γ^5 :

$$\gamma^5 \Psi = L\Psi, \quad L^2 = 1.$$

Usaremos a representação em que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad e$$

$$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.d.2})$$

onde as matrizes de Pauli são

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{III.d.3})$$

I é a matriz identidade 2×2 .

Nos modos globais invariantes hiperbólicos que escolhemos, os espinores a duas componentes ϕ são escritos

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha(r) \\ \beta(r) \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t} e^{-im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{III.d.4})$$

Substituindo (III.d.1, 2, 3 e 4) em (III.a.8), obtemos as equações para as funções radiais $\alpha(r)$ e $\beta(r)$:

$$\frac{d\alpha}{dr} - \frac{m}{\text{sh } r \text{ ch } r} \alpha + \sqrt{2}\epsilon \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \alpha + \frac{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r}{2\text{ch } r \text{ sh } r} \alpha = iL(\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{2} - kL)\beta \quad (\text{III.d.5i})$$

$$\frac{d\beta}{dr} + \frac{m}{\text{sh } r \text{ ch } r} \beta - \sqrt{2}\epsilon \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \beta + \frac{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r}{2\text{ch } r \text{ sh } r} \beta = iL(\epsilon - \frac{\sqrt{2}}{2} + kL)\alpha \quad (\text{III.d.5ii})$$

O sistema de equações desacopladas para α e β é de segunda ordem:

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r}{\text{ch } r \text{ sh } r} \frac{d\alpha}{dr} + \left[\frac{m + \sqrt{2}\epsilon(2m+1)}{\text{ch}^2 r} + \frac{m}{\text{sh}^2 r} - 2\epsilon^2 \frac{\text{sh}^2 r}{\text{ch}^2 r} - \frac{(m^2+1/4)}{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r} + 1 + \epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 \right] \alpha = 0 \quad (\text{III.d.5i})$$

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} + \frac{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r}{\text{ch } r \text{ sh } r} \frac{d\beta}{dr} + \left[\frac{-m + \sqrt{2}\epsilon(2m-1)}{\text{ch}^2 r} - \frac{m}{\text{sh}^2 r} - 2\epsilon^2 \frac{\text{sh}^2 r}{\text{ch}^2 r} - \frac{(m^2+1/4)}{\text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r} + 1 + \epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 \right] \beta = 0 \quad (\text{III.d.5ii})$$

Realizando a mudança de variável definida por $x = \text{ch } 2r$, as equações acima são escritas:

$$(x^2-1) \frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2x \frac{d\alpha}{dx} + \left[\frac{1}{4}(1-\epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + \frac{m-m^2-1/4}{x^2-1} + \frac{\epsilon^2+m+(\sqrt{2}\epsilon/2)(2m+1)}{x+1} \right] \alpha = 0$$

e

$$(x^2-1) \frac{d^2\beta}{dx^2} + 2x \frac{d\beta}{dx} + \left[\frac{1}{4}(1-\epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) - \frac{m^2+m+1/4}{x^2-1} + \frac{\epsilon^2+m+(\sqrt{2}\epsilon/2)(2m-1)}{x+1} \right] \beta = 0.$$

As equações acima são satisfeitas por funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ da forma

$$\alpha(x) = (x^2-1)^{(m-1/2)/2} f_1(x)$$

ou

$$\alpha(x) = (x^2-1)^{-(m-1/2)/2} f_2(x)$$

e

$$\beta(x) = (x^2-1)^{(m+1/2)/2} g_1(x)$$

ou

$$\beta(x) = (x^2-1)^{-(m+1/2)/2} g_2(x) ,$$

com f_1, f_2, g_1 e g_2 , satisfazendo respectivamente ã

$$\begin{aligned} (x^2-1) \frac{d^2 f_1}{dx^2} + (2m+1)x \frac{df_1}{dx} + \left[\frac{1}{4}(4m^2-\epsilon^2 - (k-\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2 + m + (\sqrt{2}\epsilon/2)(2m+1)}{x+1} \right] f_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.d.7i})$$

$$\begin{aligned} (x^2-1) \frac{d^2 f_2}{dx^2} + (3-2m)x \frac{df_2}{dx} + \left[\frac{1}{4}(4m^2-8m+4-\epsilon^2 - (k-\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2 + m + (\sqrt{2}\epsilon/2)(2m+1)}{x+1} \right] f_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.d.7ii})$$

$$\begin{aligned} (x^2-1) \frac{d^2 g_1}{dx^2} + (2m+3)x \frac{dg_1}{dx} + \left[\frac{1}{4}(1-\epsilon^2 - (k-\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 + (m+1/2)^2 + m + 1/2) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2 - m + (\sqrt{2}\epsilon/2)(2m+1)}{x+1} \right] g_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.d.7iii})$$

$$\begin{aligned} (x^2-1) \frac{d^2 g_2}{dx^2} + (1-2m)x \frac{dg_2}{dx} + \left[\frac{1}{4}(4m^2-\epsilon^2 - (k-\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2 - m + (\sqrt{2}\epsilon/2)(2m-1)}{x+1} \right] g_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.d.7iv})$$

As quatro equações (III.d.7) são solucionadas de forma semelhante. Vamos desenvolver em detalhe os cálculos relativos ã solução de (III.d.7i) e apenas escrever as soluções das outras três equações.

Suponhamos então que a equação (III.d.7i) possua uma solução da forma

$$f_1(x) = (x+1)^A h_1(x) , \quad (\text{III.d.8})$$

onde A é uma constante a ser determinada. Substituindo (III.d.8) em (III.d.7i), obtemos a seguinte equação para $h_1(x)$:

$$(x^2-1) \frac{d^2 h_1}{dx^2} + \left[2A(x-1) + (2m+1)x \right] \frac{dh_1}{dx} + \left[\frac{1}{4}(4m^2 - \epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + \epsilon^2 + m + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}(2m+1) + A(A-1) \frac{x-1}{x+1} + 2(m+1)A \frac{x}{x+1} \right] h_1(x) = 0 \quad (\text{III.d.9})$$

Definindo uma nova constante B, através de

$$\epsilon^2 + m + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}(2m+1) + A(A+1)(x-1) + (2m+1)Ax = B(x+1) \quad ,$$

a equação (III.d.9) assume a forma

$$(x^2-1) \frac{d^2 h_1}{dx^2} + \left[2A(x-1) + (2m+1)x \right] \frac{dh_1}{dx} + \left[\frac{1}{4}(4m^2 - \epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) + B \right] h_1 = 0 \quad (\text{III.d.10})$$

Comparando (III.d.9 e 10), temos duas soluções possíveis para A:

$$A_1 = -m - \sqrt{2}\epsilon/2$$

$$A_2 = 1 + \sqrt{2}\epsilon/2 \quad .$$

Para $A = A_1$, introduzindo a mudança de variável $x=1-2y$, h_1 satisfaz à seguinte equação:

$$(y-y^2) \frac{d^2 h_1}{dy^2} + \left[-y(1-2\epsilon) + m + \frac{1}{2} \right] \frac{dh_1}{dy} - \frac{1}{4}(\epsilon^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2) h_1 = 0.$$

A equação acima é a equação hipergeométrica ⁽⁵⁸⁾. Tomaremos a solução

$$h_1(x) = F(a, b; c; y)$$

com

$$a + b + 1 = 1 - \sqrt{2}\epsilon, \quad ab = \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{1}{4}(k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 \quad e$$

$$c = m + \frac{1}{2} ;$$

assim,

$$a = -\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} - \frac{n}{2} \quad (III.d.11a)$$

$$b = -\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} + \frac{n}{2} ,$$

onde $n^2 = \varepsilon^2 + (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2$.

Da mesma forma, para $A=A_2$, a equação (III.d.10) é a equação hipergeométrica, para a qual tomaremos a solução

$$h_1(x) = F(a', b'; c; \frac{1-x}{2})$$

com

$$a' = m + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} , \quad (III.d.11b)$$

$$b' = m + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \text{ e}$$

$$c = m + \frac{1}{2} .$$

Obtemos assim duas soluções $\alpha(x)$ diferentes, a saber:

$$\alpha_1(x) = (x^2-1)^{(m-1/2)/2} (x+1)^{-m-\sqrt{2}\varepsilon/2} F(a, b; c; \frac{1-x}{2}), (III.d.12a)$$

a, b e c dados por (III.d.11a) e

$$\alpha_2(x) = (x-1)^{(m-1/2)/2} (x+1)^{(\sqrt{2}\varepsilon+1)/2} F(a', b'; c; \frac{1-x}{2}), (III.d.12b)$$

com a', b' e c dados por (III.d.11b).

Da relação de recorrência (58),

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) ,$$

vê-se imediatamente que α_1 e α_2 são duas soluções linearmente dependentes e escolhemos $\alpha(x) = \alpha_1(x)$.

De forma semelhante, obtemos para $\alpha(x) = (x-1)^{-(m-1/2)/2} f_2(x)$,

duas soluções linearmente dependentes. Tomamos

$$\alpha_3(x) = (x^2 - 1)^{-(m-1/2)/2} (x+1)^{m+\sqrt{2}\epsilon/2} F(a, b; c+1; \frac{1-x}{2}),$$

(III.d.12c)

onde $a = \sqrt{2}\epsilon/2 + 1 \mp n/2$, $b = \sqrt{2}\epsilon/2 + 1 \pm n/2$, $c = m + 1/2$. As soluções α_1 e α_3 são linearmente independentes.

De maneira semelhantes, encontramos duas soluções linearmente independentes para as equações (III.d.7iii e iv), a saber,

$$\beta_1(x) = (x^2 - 1)^{(m+1/2)/2} (x+1)^{-m-\sqrt{2}\epsilon/2} F(a, b; c; \frac{1-x}{2})$$

(III.d.13a)

e

$$\beta_2(x) = (x^2 - 1)^{(-m+1/2)/2} (x+1)^{m+\sqrt{2}\epsilon/2} F(1-b, 1-a; -c+2; \frac{1-x}{2})$$

(III.d.13b)

onde $a = 1 - \sqrt{2}\epsilon/2 \mp n/2$, $b = 1 - \sqrt{2}\epsilon/2 \pm n/2$, $c = m + 3/2$.

III.e - ESPINORES A DUAS COMPONENTES: SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES

No parágrafo anterior, obtivemos duas soluções linearmente independentes para as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, componentes do espinor (III.d.4). Por consistência, ou seja, resolvendo a equação de primeira ordem para uma destas funções, dada a forma explícita da outra, vamos agora construir esses espinores a duas componentes, isto é, as soluções linearmente independentes da equação de Dirac (III.a.8), lembrando que

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ L\phi(x) \end{pmatrix} .$$

Retomamos então as equações (III.d.5) e as reescrevemos na variável $x = \text{ch } 2r$; temos assim:

$$2(x^2-1)^{1/2} \frac{d\alpha}{dx} + \left[\frac{-2m}{(x^2-1)^{1/2}} + \sqrt{2}\epsilon \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} + \frac{x}{(x^2-1)^{1/2}} \right] \alpha =$$

$$= i L \left(\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{2} - kL \right) \beta. \quad (\text{III.e.1})$$

$$2(x^2-1)^{1/2} \frac{d\beta}{dx} + \left[\frac{2m}{(x^2-1)^{1/2}} - \sqrt{2}\epsilon \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} + \frac{x}{(x^2-1)^{1/2}} \right] \beta =$$

$$= i L \left(\epsilon - \frac{\sqrt{2}}{2} + kL \right) \alpha. \quad (\text{III.e.2})$$

Usando a relação de recorrência (58)

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z), \quad (\text{III.e.3})$$

temos que

$$\frac{d\alpha_1}{dx} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{x}{x^2-1} \alpha_1 - \left(m + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}\right) \frac{\alpha_1}{x+1} - \frac{1}{2} (x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{-m-\frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{m+1/2}\right) \left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{n^2}{4}\right) F\left(-\frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + 1, \frac{n}{2}, \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + 1 \pm \frac{n}{2}; m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{III.e.4})$$

onde $\alpha_1(x)$ é dado por (III.d.12a).

Substituindo (III.d.12.a) e (III.e.4) em (III.e.1), obtemos

$$\beta(x) = \frac{i L (\epsilon + kL - \sqrt{2}/2)}{2(2m+1)} (x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{-m-\frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}} F\left(a+1, b+1; m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{i L (\epsilon + kL - \sqrt{2}/2)}{2(2m+1)} \beta_2(x),$$

onde β_2 é a solução (III.d.13.a) da equação de 2ª ordem para $\beta(x)$,
é a, b são dados por (III.d.11a). Portanto, o espinor

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ L\phi_1 \end{pmatrix}$$

com

$$\phi_1(x) = \left(\begin{array}{c} (x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-m-\sqrt{2}\epsilon}{2}} F(a_1, b_1; m+1/2; \frac{1-x}{2}) \\ \frac{iL(\epsilon-KL-\sqrt{2}/2)}{2(2m+1)} (x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-m-\sqrt{2}\epsilon}{2}} F(a_1+1, b_1+1; m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) e^{-im\phi} e^{-i\epsilon t} e^{-ikz} \quad (\text{III.e.5a})$$

onde $a_1 = -\frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} \mp \frac{n}{2}$, $b_1 = -\frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} \pm \frac{n}{2}$,

é solução da equação de Dirac (III.a.8), nos modos invariantes definidos por (III.b.3).

De maneira semelhante, substituindo a solução (III.d.12c) em (III.e.1) e as duas soluções (III.d.13a) e (III.d.13b) em (III.e.2), obtemos sempre uma função $\alpha(x)$ ou $\beta(x)$, solução da equação de 2ª ordem respectiva. Desta maneira, construímos mais três espinores $\phi(x)$. Os quatro espinores obtidos são linearmente dependentes dois a dois, constituindo dois conjuntos linearmente independentes entre si; dos três espinores restantes obtidos, a solução

$$\phi_2(x) = \left(\begin{array}{c} (x^2-1)^{\frac{-m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{m+\sqrt{2}\epsilon}{2}} F(a_2, b_2; -m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ \frac{2iL(-2m+1)}{kL-\frac{\sqrt{2}}{2}-\epsilon} (x^2-1)^{\frac{-m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{m+\sqrt{2}\epsilon}{2}} F(a_2-1, b_2-1; -m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) e^{-i\epsilon t} e^{-im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{III.e.5b})$$

onde $a_2 = \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + 1 \mp \frac{n}{2}$ e $b_2 = \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + 1 \pm \frac{n}{2}$,

é linearmente independente de ϕ_1 . Uma solução geral de nosso problema seria, portanto,

$$\phi = \alpha_1 \phi_1 + \beta \phi_2,$$

onde α e β são constantes. No entanto, quando se impõe sobre ϕ_1 e ϕ_2 condições de contorno e regularidade convenientes, como será feito no parágrafo g, verifica-se que essas condições obrigam os argumentos das funções hipergeométricas em ϕ_1 e ϕ_2 a assu-

mir valores inteiros negativos ou zero, tornando ϕ_1 e ϕ_2 linearmente dependentes. Neste caso, Nörlund⁽⁵⁹⁾ mostrou que a solução geral da equação hipergeométrica é uma combinação linear da função hipergeométrica e de uma função logarítmica. Como a função logarítmica não satisfaz às condições de contorno e regularidade, podemos desde já tomar como solução da equação (III.a.8) o conjunto de soluções

$$\Psi(x)_{(\epsilon, m, k, L)} = \begin{pmatrix} \phi(x)_{(\epsilon, m, k, L)} \\ L\phi(x)_{(\epsilon, m, k, L)} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(x)_{(\epsilon, m, k, L)} &= \begin{pmatrix} (2m+1)\alpha_{(\epsilon, m, k, L)}(x) \\ iL(\epsilon+kL - \frac{\sqrt{2}}{2})\beta_{(\epsilon, m, k, L)}(x) \end{pmatrix} e^{-im\phi} e^{-i\epsilon t} e^{-ikz} = \\ &= \begin{pmatrix} (2m+1)(x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}}(x+1)^{\frac{\sqrt{2}\epsilon+1}{2}} F(a, b; m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ iL(\epsilon+kL - \frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}}(x+1)^{\frac{\sqrt{2}\epsilon-1}{2}} F(a, b; m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{pmatrix} e^{-im\phi} e^{-i\epsilon t} e^{-ikz} \end{aligned}$$

(III.e.6)

com

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = m + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \frac{n}{2}$$

que, como veremos no parágrafo g, é regular em $m = -1/2$. A solução acima é obtida de (III.e.5a), usando-se que $F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$. Chamando as soluções (III.e.6) de ϕ_3 e (III.e.5) de ϕ_1 , vê-se por um cálculo imediato que

$$\phi_3 = (2m + 1) 2^{m + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\epsilon} \phi_1$$

Portanto, a equação (III.a.8) tem como solução nos modos invariantes hiperbólicos escolhidos, o quadri - espinor (III.d.1), com $\phi(x)$ dado por (III.e.6).

III.f - OPERADORES DE MOMENTUM ANGULAR DO CAMPO DE NEUTRINOS: CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DE SOLUÇÕES

Sobre o espaço das soluções (III.c.6), obtidas no parágrafo anterior, vamos construir operadores de momentum angular J^+ e J^- , de maneira que, dada uma solução $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$, seja possível gerar uma sequência de soluções num intervalo de valores de m .

Definimos o operador J^+ por:

$$J^+ \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \lambda^+ \phi_{(\epsilon, m+1, k, L)} \quad (III.f.1)$$

Empregando a relação de recorrência (III.e.3), obtemos que

$$J^+ \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = [L^+ I + \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}} \sigma^3] \phi_{(\epsilon, m, k, L)} \quad (III.f.2)$$

onde

$$L^+ = (x^2-1)^{1/2} e^{-i\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ix}{x^2-1} \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\sqrt{2}}{2(x+1)} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad ; \quad (III.f.3)$$

I é a identidade 2×2 , $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

e

$$\lambda^+ = \frac{(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon + \frac{1}{2})^2 - \frac{n^2}{4}}{(2m + 3)} \quad (III.f.4)$$

O operador J^- é definido por:

$$J^- \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \lambda^- \phi_{(\epsilon, m-1, k, L)} \quad (III.f.5)$$

Como acima, determinamos que

$$J^- = L^- I - \frac{e^{i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}} \sigma^3, \quad (\text{III.f.6})$$

onde

$$L^- = (x^2-1)^{1/2} e^{i\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ix}{x^2-1} \frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{\sqrt{2}}{2(x+1)} \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad (\text{III.f.7})$$

e também que

$$\lambda^- = 2m + 1. \quad (\text{III.f.8})$$

O operador J^3 é definido a partir da relação de comutação

$$[J^+, J^-] = 2J^3 \quad (\text{III.f.9.a})$$

e tem a forma

$$J^3 = i \left[\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right]. \quad (\text{III.f.10})$$

Calculando diretamente, obtemos

$$J^3 \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = (m + \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon) \phi_{(\epsilon, m, k, L)}. \quad (\text{III.f.11})$$

O operador J^3 obedece às seguintes relações de comutação com J^+ e J^- :

$$[J^+, J^3] = -J^+ \quad (\text{III.f.9.b})$$

$$[J^-, J^3] = J^- \quad (\text{III.f.9.c})$$

A partir de J^+ e J^- , podemos definir os operadores J^1 e J^2 , que atuam sobre o espaço das funções $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$, a saber:

$$J^1 = \frac{1}{2} (J^+ + J^-). \quad (\text{III.f.12.a})$$

$$J^2 = \frac{1}{2i} (J^+ - J^-). \quad (\text{III.f.12.b})$$

Explicitamente,

$$J^1 = -W_2 I - \frac{i}{2} \text{sen } \phi \sigma^3 \quad (\text{III.f.13.a})$$

e

$$J^2 = W_3 I - \frac{i}{2} \text{cos } \phi \sigma^3, \quad (\text{III.f.13.b})$$

onde W_2 e W_3 são dois vetores de Killing, (II.c.10), da métrica de Gödel (III.a.4), que nas variáveis $(x=ch r, \phi, z)$ são es-

critos:

$$W_2 = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \left[-\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2-1} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin \phi}{x+1} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (\text{III.f.14.a})$$

e

$$W_3 = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \left[-\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} - \cos \phi \frac{x}{x^2-1} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos \phi}{x+1} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (\text{III.f.14.b})$$

Os operadores J^1 , J^2 e J^3 obedecem a relações de comutação que de forma compacta escrevem-se

$$[J^i, J^j] = i \epsilon^{ijk} J^k, \quad (\text{III.f.15})$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$. Da definição de J^3 e das relações de comutação (III.f.9) ou (III.f.15), vemos que os operadores \vec{J} geram a álgebra de momentum angular do campo de neutrinos acoplado à vorticidade da matéria.

Mostra-se diretamente, empregando as relações de comutação (III.f.9.b e c), que se $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$ é uma solução, auto-estado de J^3 com auto-valor $(m + \sqrt{2}\epsilon/2)$, então $J^+\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$ e $J^-\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$ também o são, com, respectivamente, auto-valores $(m + \sqrt{2}\epsilon/2 + 1)$ e $(m + \sqrt{2}\epsilon/2 - 1)$. Assim, dada uma solução $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$, pela aplicação sucessiva dos operadores de momentum angular J^+ e J^- , construímos uma sequência de soluções em valores de m , estendendo-se em ambas as direções, $-\infty$ e $+\infty$, e terminando somente se existirem valores $m = m'$ e $m = m''$ para os quais

$$J^+\phi_{(\epsilon, m', k, L)} = 0$$

$$J^-\phi_{(\epsilon, m'', k, L)} = 0.$$

Definimos o operador J^2 , quadrado do momentum angular, como $(J^2)\phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \left[\sum_i J^i J^i \right] \phi_{(\epsilon, m, k, L)}$. (III.f.16)

Calculando diretamente, obtemos

$$\begin{aligned} (J)^2 \phi_{(\epsilon, m, k, L)} &= \frac{n^2 - 1}{4} \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \frac{(n+1)}{2} \frac{(n-1)}{2} \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \\ &= \frac{\epsilon^2 + (k - \sqrt{2}L/2)^2}{4} \phi_{(\epsilon, m, k, L)} \end{aligned} \quad \text{(III.f.17)}$$

No parágrafo (III.g), definiremos produto escalar no espaço das soluções $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$, dadas por (III.e.6). Relativa - mente a esse produto escalar, o operador J^3 será hermitiano, mas os operadores J^1 e J^2 , definidos por (III.f.12), serão anti-hermitianos (conforme apêndice I). Podemos proceder de forma a que as projeções de \vec{J} nas 3 direções sejam operadores hermitianos, fazendo $K^3 = J^3$, $K^1 = iJ^1$ e $K^2 = iJ^2$. Neste caso, usando a definição usual de produto escalar, teríamos

$$\begin{aligned} K^2 &= \sum_i K^i K^i = (J^3)^2 - 1/2 (J^+ J^- + J^- J^+) \\ &= \left[2(m + \sqrt{2}\epsilon/2)^2 - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad \text{(III.f.18)}$$

No entanto, a álgebra dos operadores K^i não é a álgebra de momentum angular; eles obedecem à

$$\left[K^1, K^2 \right] = -iK^3, \quad \left[K^1, K^3 \right] = -iK^2, \quad \left[K^2, K^3 \right] = iK^1,$$

ou seja, reproduzem a álgebra da variedade de Lie H^3 , conforme (II.b.1). Por esta razão, manteremos a definição (III.f.16) ou equivalentemente, definiremos

$$(K)^2 \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = \sum_i K^i K^{i*} \phi_{(\epsilon, m, k, L)} = (J)^2 \phi_{(\epsilon, m, k, L)}.$$

A anti-hermiticidade de J^1 e J^2 e a hermiticidade de J^3 são consequências da existência do vetor vorticidade $\Omega^p = (0, 0, 0, \sqrt{2}w/2)$ e refletem a existência de uma direção privilegiada no espaço de momentum angular, a direção determinada por Ω^p .

Características semelhantes foram posteriormente encontradas por Soares e Tiomno⁽²⁹⁾ para campos escalares e fermiônicos massivos acoplados à vorticidade da matéria.

Na ausência de gravitação, ou seja, quando o espaço-tempo é a variedade de Minkowski, a hermiticidade dos operadores J^1 e J^2 é usada para determinar o intervalo de valores de m . No presente caso, estes operadores não são hermitianos com relação a nenhum produto escalar convenientemente definido sobre o conjunto de soluções $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$. No próximo parágrafo, obtaremos o intervalo de valores de m usando condições de contorno compatíveis com o caráter de campo teste dos neutrinos.

III.g - CONDIÇÕES DE CONTORNO E REGULARIDADE

A resolução da equação de Dirac numa métrica de fundo já dada - o universo de Gödel - contém implicitamente a suposição de que os neutrinos são campos teste que não influem na curvatura do espaço-tempo: os campos de neutrinos devem ser finitos em qualquer ponto da variedade. Sobre o espaço das soluções $\phi_{(\epsilon, m, k, L)}$, dadas por (III.e.6) vamos impor condições de contorno que garantam este caráter de campo teste. Impomos, portanto, que nossa solução seja regular na origem $x = 1$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Psi^+(x)}{(\epsilon, m, k, L)} \frac{\Psi(x)}{(\epsilon, m, k, L)} = \text{finito} \quad (\text{III.g.1})$$

e que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-g} \frac{\Psi^+(x)}{(\epsilon, m, k, L)} \frac{\Psi(x)}{(\epsilon, m, k, L)} = 0. \quad (\text{III.g.2})$$

Na condição (III.g.2), o fator $\sqrt{-g}$ é necessário para garantir a anti-hermiticidade dos operadores J^1 e J^2 , demonstrada no apêndice I, com relação ao produto escalar que será definido no

parágrafo seguinte. ψ^+ é a matriz hermitiana conjugada e $g = \det g_{\alpha\beta}$. Para a métrica (III.a.1), $\sqrt{-g} = \frac{16}{\omega^4} \text{sh } r \text{ ch } r$.

Desenvolvendo (III.g.1) para a solução (III.e.6), temos

$$\psi^+ \psi = 2 \left[(2m+1)^2 \alpha_{(\epsilon, m, k, L)}^2 + (\epsilon + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \beta_{(\epsilon, m, k, L)}^2 \right]$$

A condição (III.g.2) implica portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)^{1/2} \alpha_{(\epsilon, m, k, L)}^2 = 0 \quad (\text{III.g.3})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)^{1/2} \beta_{(\epsilon, m, k, L)}^2 = 0 \quad (\text{III.g.4})$$

As funções hipergeométricas podem ser escritas numa forma mais conveniente à análise assintótica ($x \rightarrow \infty$) (58):

$$F(a, b; c; z) = A_1 (-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}) + A_2 (-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1+a-b; \frac{1}{z}),$$

onde

$$A_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)}$$

Temos, então

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(a, b; c; z) = A_1 (-1)^{-a} (-z)^{-a} + A_2 (-1)^{-b} (-z)^{-b} \quad (\text{III.g.5})$$

Usando (III.g.5) em (III.g.3), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)^{1/2} \alpha_{(\epsilon, m, k, L)}^2 = x^{2m + \sqrt{2}\epsilon + 2} (A_1 x^{-a} + A_2 x^{-b})^2$$

Para que $\alpha(x)$ seja nula assintoticamente, devemos ter $A_1 = 0$ (ou $A_2 = 0$, devido à simetria entre os argumentos a e b na função hipergeométrica) e $2m + \sqrt{2}\epsilon + 2 - 2k \geq 0$ (e $2m + \sqrt{2}\epsilon + 2 - 2a \geq 0$), ou seja, $\pm n \geq 0$. Fazemos $A_2 = 0$, determinando assim o sinal de n em a e b como

$$a = m + \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon + \frac{1}{2} - \frac{|n|}{2}$$

$$b = m + \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon + \frac{1}{2} + \frac{|n|}{2}$$

Para que $A_1=0$ (ou $A_2=0$), b ou $c-a$ (ou a ou $c-b$) devem ser um inteiro negativo ou zero.

Realizando análise semelhante para $\beta(x)$, chegamos às mesmas condições. Temos assim duas possibilidades distintas para que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam finitas assintoticamente.

Vamos analisar o caso em que b é um inteiro negativo ou zero:

$$i) \quad b = m + \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon + \frac{1}{2} + \frac{|n|}{2} = m-j$$

$$a = m + \sqrt{2}\epsilon + 1 + j$$

onde m e j são semi-inteiros, $j \geq -1/2$ e $m \leq j$.

Das expressões (III.f.4) e (III.f.8), vemos que

$$J^+ \phi(x) \Big|_{(\epsilon, m = j, k, L)} = 0.$$

e

$$J^- \phi(x) \Big|_{(\epsilon, m = -\frac{1}{2}, k, L)} = 0.$$

As equações acima determinam o intervalo de valores de m , a saber, $-\frac{1}{2} \leq m \leq j$. Mas, $j = -\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon - \frac{|n|+1}{2}$ e isto implica que

$$\epsilon = -\sqrt{2} (2j+1) \pm \sqrt{(2j+1)^2 + (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2}. \quad (\text{III.g.6a})$$

Mas, somente o sinal $-$ na expressão acima garante que $\epsilon < 0$ e consequentemente que $j = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-|\epsilon|) - \frac{|n|+1}{2} \geq 0$.

Portanto, as soluções para as quais b é um inteiro negativo ou zero são soluções de energias negativas, $\psi(x) \Big|_{(-|\epsilon|, j, m, k, L)}$, que chamaremos soluções de tipo I, nas quais

$$j = \frac{\sqrt{2}|\epsilon|}{2} - \frac{|n|+1}{2}. \quad (\text{III.g.6b})$$

Quando $c-a$ é um inteiro negativo ou zero

$$\text{ii) } c^{-1}a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon + \frac{|n|}{2} = -(j + \frac{1}{2}),$$

$$a = m + j + 1, \quad b = m + \sqrt{2}\epsilon - j$$

com $m \geq -\frac{1}{2}$ e $j \geq -\frac{1}{2}$, pois

$$J^{-}\phi_{(\epsilon, m=-\frac{1}{2}, k, L)} = 0.$$

Mas, $j = \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon - \frac{|n|}{2} - \frac{1}{2}$, e isto implica que

$$\epsilon = \sqrt{2} (2j + 1) + \sqrt{(2j + 1)^2 + (k - \frac{\sqrt{2}}{2} L)^2}; \quad (\text{III.g.7a})$$

estas soluções correspondem a soluções de energia positiva e são chamadas soluções do tipo II, nas quais

$$j = \frac{\sqrt{2}|\epsilon|}{2} - \frac{|n| + 1}{2}. \quad (\text{III.g.7b})$$

É importante observar que enquanto para soluções de tipo I, $-\frac{1}{2} \leq m \leq j$, para as soluções do tipo II, $m \geq -\frac{1}{2}$, ou seja, m é independente de j .

As correspondentes soluções de energia positiva $\psi_{(+|\epsilon|, j, m, k, L)}$ são obtidas de

$$\psi_{(+|\epsilon|, j, m, k, L)} = -iL\gamma^5\gamma^2\psi_{(-|\epsilon|, j, m, -k, -L)}^* \quad (\text{III.g.8})$$

A operação $iL\gamma^5\gamma^2$ é uma simetria da equação de Dirac (III.a.1) e * significa conjugação complexa. Assim, as soluções de energia negativa

$$\psi_{I(-|\epsilon|, j, m, k, L)} = \begin{pmatrix} \phi_{I(-|\epsilon|, j, m, k, L)} \\ L\phi_{I(-|\epsilon|, j, m, k, L)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.g.9})$$

onde

onde

$$\phi_I(x) = \begin{pmatrix} (2m+1) \alpha_I(x) \\ iL(-|\epsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) \beta_I(x) \end{pmatrix} e^{i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}$$

e

$$\alpha_I(x) = (x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2}} F(a,b;c;\frac{1-x}{2}), \quad (\text{III.g.9a})$$

$$\beta_I(x) = (x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2}} F(a,b;c+1;\frac{1-x}{2}) \quad (\text{III.g.9b})$$

com $a = m - \sqrt{2}|\epsilon| + j+1$, $b = m-j$, $c = m + \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq m \leq j$ e $-|\epsilon| =$

$-\sqrt{2}(2j+1) - \sqrt{(2j+1)^2 - (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2}$, estão associados as soluções de energia positiva

$$\psi_{I(+|\epsilon|,j,m,k,L)} = \begin{pmatrix} \phi_{I(+|\epsilon|,j,m,k,L)} \\ L\phi_{I(+|\epsilon|,j,m,k,L)} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.g.10})$$

com

$$\phi_I = \begin{pmatrix} -i(-|\epsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) \beta_I(x) \\ L(2m+1) \alpha_I(x) \end{pmatrix} e^{-i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}.$$

Do mesmo modo, às soluções de energia positiva

$$\psi_{II(+|\epsilon|,j,m,k,L)} = \begin{pmatrix} \phi_{II(+|\epsilon|,j,m,k,L)} \\ L\phi_{II(+|\epsilon|,j,m,k,L)} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.g.11})$$

onde

$$\phi_{II}(|\epsilon|, j, m, k, L) = \begin{pmatrix} (2m+1)\alpha_{II}(x) \\ iL(|\epsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})\beta_{II}(x) \end{pmatrix} e^{-i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{III.g.11a})$$

e

$$\alpha_{II}(x) = (x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2}} F(a, b; c; \frac{1-x}{2}), \quad (\text{III.g.11b})$$

$$\beta_{II}(x) = (x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2}} F(a, b; c+1; \frac{1-x}{2}) \quad (\text{III.g.11c})$$

com $a = m + j + 1$, $b = m + \sqrt{2}|\epsilon| - j$, $c = m + \frac{1}{2}$, $m \geq -\frac{1}{2}$ e $|\epsilon| = \sqrt{2}(2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (k - \frac{\sqrt{2}}{2}L)^2}$, estão associadas as soluções de energia negativa

$$\psi_{II}(-|\epsilon|, j, m, k, L) = \begin{pmatrix} \phi_{II}(-|\epsilon|, j, m, k, L) \\ L\phi_{II}(-|\epsilon|, j, m, k, L) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.g.12})$$

onde

$$\phi_{II}(-|\epsilon|, j, m, k, L) = \begin{pmatrix} i(|\epsilon| - kL + \frac{\sqrt{2}}{2})\beta_{II}(x) \\ L(2m+1)\alpha_{II}(x) \end{pmatrix} e^{i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}.$$

A imposição da condição (III.g.1) não implica em nenhuma nova condição sobre nossas soluções; dela resulta somente que o valor mínimo de m é $-\frac{1}{2}$, condição já obtida a partir de (III.g.2). Com efeito, para as ψ_I , (III.g.1) implica que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2m+1)^2 (x^2-1)^{m-1/2} (x+1)^{-\sqrt{2}|\epsilon|-1} F^2(a, b; c; \frac{1-x}{2}) = \text{finito} \quad (\text{III.g.13a})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)^{m+1/2} (x+1)^{-\sqrt{2}} |\varepsilon|^{-1} F^2(a, b; c+1; \frac{1-x}{2}) = \text{finito}, \quad (\text{III.g.13b})$$

ou seja, que os expoentes de (x^2-1) sejam sempre positivos. De (III.g.13b), temos imediatamente que $m \geq -1/2$.

A condição (III.g.13a) deve ser examinada com cuidado; para $m \neq -1/2$, esta condição implica que $m \geq 1/2$. No entanto, lembrando que (58)

$$\lim_{m \rightarrow -1/2} (m+1/2) F(a, b; m+1/2; \frac{1-x}{2}) = ab \left(\frac{1-x}{2}\right) F(a+1, b+1; 2; \frac{1-x}{2}),$$

vemos que a condição (III.g.13a) é satisfeita para $m \geq -1/2$, pois

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ m \rightarrow -1/2}} (2m+1) (x^2-1)^{m-1/2} (x+1)^{-\sqrt{2}} |\varepsilon|^{-1} F^2(a, b; c; \frac{1-x}{2}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{ab}{2}\right)^2 (x-1) (x+1)^{-\sqrt{2}} |\varepsilon|^{-2} F^2(a+1, b+1; 2; \frac{1-x}{2}) = 0.$$

As condições (III.g.13a e b) são simultaneamente satisfeitas com $m \geq -1/2$.

O fator $(m+1/2)$ em (III.g.9) é imprescindível para sua regularidade em $m=-1/2$, razão pela qual no parágrafo (III.e) escolhemos a solução (III.e.6) como solução de nosso problema.

Obtém-se condição idêntica para as soluções de tipo II.

As soluções de tipo II podem ser escritas de forma mais conveniente:

$$\phi_{II} = \left(\begin{array}{c} \frac{-m-1/2}{2} \frac{\sqrt{2}|\varepsilon|+1}{2} F(a, b; -m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ (1-2m) (x^2-1) (x+1) \\ iL(|\varepsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2}) (x^2-1) \frac{-m+1/2}{2} \frac{\sqrt{2}|\varepsilon|-1}{2} F(a, b; -m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ (x+1) \end{array} \right) e^{-i|\varepsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{III.g.14a})$$

para energias positivas

$$\begin{aligned} \phi_{II}(-|\epsilon|, j, m, k, L) &= \\ &= \begin{pmatrix} i(|\epsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})(x^2 - 1) \frac{-m+1/2}{2} (x+1) \frac{\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(a, b; -m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ L(1-2m)(x^2 - 1) \frac{-m-1/2}{2} (x+1) \frac{\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2} F(a, b; -m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{pmatrix} \\ &\cdot e^{i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \end{aligned} \quad (III.g.14b)$$

para as soluções de energia negativa, com $a = -m + j + \frac{1}{2}$, $b = -m + \sqrt{2}|\epsilon| - j$ e $-\frac{3}{2} \leq m < -\infty$.

Note-se que as soluções de tipo I são válidas para $-\frac{1}{2} \leq m \leq j$ e as de tipo II para $-\infty < m \leq \frac{1}{2}$. Os intervalos de valores de m se superpõem em $m = \pm \frac{1}{2}$ e as soluções $\phi_I(\pm \frac{1}{2})$ e $\phi_{II}(\pm \frac{1}{2})$ são linearmente dependentes, como pode facilmente ser demonstrado. Vamos desenvolver esta demonstração em detalhe para as soluções de energia positiva. Em $m = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \phi_I(+|\epsilon|, j, -\frac{1}{2}, k, L) &= \\ &= \begin{pmatrix} i(|\epsilon| - kL + \frac{\sqrt{2}}{2})(x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(j+\frac{1}{2}-\sqrt{2}|\epsilon|, -j-\frac{1}{2}; 1; \frac{1-x}{2}) \\ \frac{L}{2}(j+\frac{1}{2}-\sqrt{2}|\epsilon|)(-j-\frac{1}{2})(x^2-1) \frac{-1}{2} (x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2} F(j+\frac{3}{2}-\sqrt{2}|\epsilon|, -j+\frac{1}{2}; 2; \frac{1-x}{2}) \end{pmatrix} \\ &\cdot e^{-i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \end{aligned}$$

onde usamos que

$$\lim_{c \rightarrow 0} c F(a, b; c; z) = abz F(a+1, b+1; 2; z)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{II} (+|\epsilon|, j, m, k, L) &= \\ &= \left(\begin{array}{l} 2(x+1) \frac{\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2} F(j+\frac{3}{2}, \sqrt{2}|\epsilon|+\frac{1}{2}, -j; 1; \frac{1-x}{2}) \\ iL(|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x+1) \frac{\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(j+\frac{3}{2}, \sqrt{2}|\epsilon|+\frac{1}{2}, -j; 2; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \\ &\cdot e^{-i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{ikz} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \phi_{I} (+|\epsilon|, j; -\frac{1}{2}, k, L) &= \\ &= \left(\begin{array}{l} -i(-|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(j+\frac{1}{2}, -\sqrt{2}|\epsilon|, -j, -\frac{1}{2}; 1; \frac{1-x}{2}) \\ -\frac{L}{4}(-|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2} F(j+\frac{3}{2}, -\sqrt{2}|\epsilon|, -j+\frac{1}{2}; 2; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \\ &\cdot e^{-i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \quad \text{(III.g.15a)} \end{aligned}$$

Lembrando que

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$$

podemos reescrever ϕ_{II} na forma:

$$\begin{aligned} \phi_{II} (+|\epsilon|, j, -\frac{1}{2}, k, L) &= \\ &= \left(\begin{array}{l} 4(x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}|\epsilon|+j, -j-\frac{1}{2}; 1; \frac{1-x}{2}) \\ 2iL(|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x+1) \frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2} F(j-\sqrt{2}|\epsilon|+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -j; 2; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \\ &\cdot e^{-i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \quad \text{(III.g.15b)} \end{aligned}$$

Comparando (III.g.15a) e (III.g.15b), temos

$$\phi_{\text{I}}(+|\varepsilon|, j, -\frac{1}{2}, k, L) = -i(-|\varepsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \sqrt{2}|\varepsilon|^{-2} \phi_{\text{II}}(+|\varepsilon|, j, -\frac{1}{2}, k, L)$$

Relação semelhante é obtida para $m = \frac{1}{2}$.

A superposição das soluções de tipo I e II em $m = \pm \frac{1}{2}$ é eliminada se consideramos que as soluções de tipo I são válidas em $-\frac{1}{2} \leq m \leq j$ e as de tipo II em $-\infty < m \leq -\frac{3}{2}$. Portanto, nas soluções de energia positiva podem ser escritas:

$$\phi_{\text{I}}(+|\varepsilon|, j, m, k, L) = \left(\begin{array}{l} i(|\varepsilon| - kL + \frac{\sqrt{2}}{2})(x^2 - 1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\varepsilon| - 1}{2}} F(m - \sqrt{2}|\varepsilon| + j + 1, m - j; m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ L(2m+1)(x^2 - 1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\varepsilon| + 1}{2}} F(m - \sqrt{2}|\varepsilon| + j + 1, m - j; m + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \cdot e^{-i|\varepsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}, \quad (\text{III.g.16a})$$

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq j, \quad j \geq -\frac{1}{2};$$

$$\phi_{\text{II}}(+|\varepsilon|, j, m, k, L) = \left(\begin{array}{l} (1-2m)(x^2 - 1)^{\frac{-m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\varepsilon| + 1}{2}} F(j - m + 1, \sqrt{2}|\varepsilon| - m - j; -m + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ i(-|\varepsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})(x^2 - 1)^{\frac{-m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\varepsilon| - 1}{2}} F(j - m + 1, \sqrt{2}|\varepsilon| - m - j; -m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \cdot e^{-i|\varepsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}, \quad (\text{III.g.17a})$$

$$-\infty < m \leq -\frac{3}{2}, \quad j \geq -\frac{1}{2};$$

as soluções de energia negativa são:

$$\begin{aligned} & \phi(-|\epsilon|, j, m, k, L) = \\ & \left(\begin{array}{l} (2m+1)(x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}}(x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2}} F(m-\sqrt{2}|\epsilon|+j+1, m-j; m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ iL(-|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}}(x+1)^{\frac{-\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2}} F(m-\sqrt{2}|\epsilon|+1+j, m-j; m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \cdot \\ & \cdot e^{i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}, \\ & -\frac{1}{2} \leq m \leq j; \quad j \geq \frac{1}{2}; \end{aligned} \quad \text{(III.g.16b)}$$

$$\begin{aligned} & \phi(-|\epsilon|, j; m, k, L) = \\ & \left(\begin{array}{l} i(|\epsilon|+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{-m+1/2}{2}}(x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\epsilon|-1}{2}} F(-m+j+1, -m+\sqrt{2}|\epsilon|-j; -m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \\ L(1-2m)(x^2-1)^{\frac{-m-1/2}{2}}(x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\epsilon|+1}{2}} F(-m+j+1, -m+\sqrt{2}|\epsilon|-j; -m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \cdot \\ & \cdot e^{i|\epsilon|t} e^{-im\phi} e^{-ikz}, \\ & -\infty < m \leq -\frac{3}{2}, \quad j \geq -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

com

$$\psi(+|\epsilon|, j, m, k, L) = \begin{pmatrix} \phi(+|\epsilon|, j, m, k, L) \\ L\phi(+|\epsilon|, j, m, k, L) \end{pmatrix}$$

e

$$\psi(-|\epsilon|, j, m, k, L) = \begin{pmatrix} \phi(-|\epsilon|, j, m, k, L) \\ L\phi(-|\epsilon|, j, m, k, L) \end{pmatrix}.$$

As soluções (III.g.16) e (III.g.17) são linearmente independentes entre si, pois, com exceção de $m = \pm \frac{1}{2}$, único valor em que esses intervalos se superpõem, os intervalos de valores de m

são distintos; nosso conjunto completo de soluções, cobrindo o intervalo $-\infty < m \leq j$, é a união das soluções (III.g.16), válidas para $-\infty < m \leq -3/2$, com as soluções (III.g.17), para $-1/2 \leq m \leq j$, com $j \geq -1/2$, que constitui assim uma base completa para uma representação espinorial de dimensão infinita para a álgebra dos operadores de momentum angular (III.f.1,5 e 11) associados ao campo de neutrinos no universo de Gödel de métrica (III.a.4).

A partir de (III.f.9) e (III.g.6b) e (III.g.7b), temos

$$\begin{aligned} (J)^2 \phi_{(\pm|\varepsilon|, m, k, L)} &= \\ &= \frac{(n-1)}{2} \frac{(n+1)}{2} \phi_{(\pm|\varepsilon|, m, k, L)} = (j_{\pm} \frac{\sqrt{2}|\varepsilon|}{2}) (j_{\pm} \frac{\sqrt{2}|\varepsilon|}{2} + 1) \phi_{(\pm|\varepsilon|, m, k, L)}; \end{aligned}$$

em termos de j ,

$$\begin{aligned} (J)^2 \phi_{(\pm|\varepsilon|, m, k, L)} &= \{ j_{\pm} ((2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (k - \sqrt{2}L/2)^2}) \} . \\ \{ j+1_{\pm} ((2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (k - \sqrt{2}L/2)^2}) \} &\phi_{(\pm|\varepsilon|, m, k, L)} \end{aligned}$$

Analogamente ao que acontece a férmions em interação com campos externos no espaço de Minkowski, neutrinos sobre uma métrica de fundo de Gödel, ou seja, na presença do campo de vorticidade da matéria, apresentam auto-valores de energia, momentum angular e momentum linear dependentes entre si. Com efeito, da expressão (III.g.7a), vê-se que a cada j e k dados corresponde um valor distinto de energia.

Se examinarmos os limites em que o momentum $k \rightarrow 0$, veremos que os modos $j=m=-1/2$ apresentam uma característica peculiar. Para estes modos, $|\varepsilon| = \sqrt{2}/2$ e

$$J^+ J^- \phi_{(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, L)} = J^- J^+ \phi_{(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, L)} = 0 \quad .$$

Portanto,

$$(J)^2 \phi \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, L \right) =$$

$$J_3 (J_3 + 1) \phi \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, L \right) = 0 ;$$

o operador J^3 tem auto-valores 0 e -1, respectivamente para energias positivas e negativas. O acoplamento dos neutrinos com a vorticidade de matéria, os converte em bosons polarizados ao longo da direção determinada por $\vec{\Omega}$.

Podemos mostrar que a positividade do operador J^2 definido por (III.f.16) e (III.f.17) só não é garantida para $j = -\frac{1}{2}$. De (III.g.6a) e (III.g.7a), vemos que para $j \geq \frac{1}{2}$, $n^2 = |\epsilon|^2 + (k - \frac{\sqrt{2}}{2L})^2$ é sempre maior que 1. Para $j = -\frac{1}{2}$, $n^2 = 2(k - \frac{\sqrt{2}}{2L})^2$ e não se pode eliminar a possibilidade do operador possuir auto-valores negativos. Isto nos leva a excluir do espaço-base de soluções, as soluções (III.g.16 a e b) para $j = -\frac{1}{2}$. Desta maneira, temos um operador de momentum angular total bem definido para a base completa de soluções.

É interessante observar que a possibilidade de auto-valores de momentum angular imaginários é um efeito devido à interação do spin da partícula com a vorticidade, pois o mesmo não acontece para o caso de um campo escalar num universo de Gödel descrito pela métrica (III.a.4). Como mostraram Soares e Tiomno⁽²⁹⁾, nesse caso o operador de momentum angular total é sempre positivo definido.

III.h.a - NORMALIZAÇÃO

Discutiremos neste parágrafo a normalização do conjunto de soluções $\phi(x)$, dadas por (III.g.16 e 17), com $j \geq 1/2$.
 $(\pm |\epsilon|, j, m, k, L)$

A densidade de corrente local de fermions é

$$j^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi .$$

Num referencial de Lorentz local associado às tetradas $e^{(A)}_\alpha(x)$, define-se a corrente local $j^{(A)} = e^{(A)}_\alpha(x) j^\alpha(x)$ e tem-se

$$j^{(A)} = \bar{\psi} \gamma^A \psi ,$$

onde γ^A são as matrizes constantes de Dirac (I.b.3). $j^{(A)}$ transforma-se como um vetor frente às transformações de Lorentz locais.

Da definição de espinor conjugado de Dirac, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, temos que, para $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ L\phi \end{pmatrix}$, $j^{(A)} = 2(\phi^\dagger \phi, L\phi^\dagger \sigma^i \phi)$. A componente $j^{(0)}$ da corrente local,

$$j^{(0)} = \psi^\dagger \psi = 2\phi^\dagger \phi , \tag{III.h.1}$$

transforma-se como um escalar para as transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo e como a componente zero de um vetor de Lorentz, com relação às transformações de Lorentz locais. $j^{(0)}$ representa a densidade local de número de fermions.

Se integramos $j^{(0)}$ num volume V da variedade espaço-tempo, teremos

$$\int_V \sqrt{-g} j^{(0)} d^4x = N^2 . \tag{III.h.2}$$

N^2 é um número invariante para as transformações gerais de coordenadas. Além do mais, a integral (III.h.1) é positiva definida pois vê-se de imediato que $\sqrt{-g} j^{(0)}$ é positivo definido para as soluções (III.g.16 e 17).

A integral acima, tomada para todo o volume de variedade, será usada para normalizar nossas soluções para neutrinos num universo de Gödel. Para tal, definimos no espaço das solu-

ções (III.g.16 e 17), o produto escalar

$$\langle \psi(\epsilon, j, m, k, L) | \psi(\epsilon', j', m', k', L') \rangle = \int_V \sqrt{-g} \psi(\epsilon, j, m, k, L) \gamma^0 \psi(\epsilon', j', m', k', L') d^4x, \quad (\text{III.h.3})$$

definido no intervalo $-\infty < m \leq j$. A expressão (III.h.3) é um escalar para as transformações gerais de coordenadas e transforma-se como a componente zero de um vetor de Lorentz para as transformações de Lorentz locais.

A normalização, (III.h.3), escolhida merece dois comentários. Devido à inexistência de hipersuperfície tipo espaço global no universo de Gödel, (III.h.3) é uma alternativa à normalização sobre uma hipersuperfície $t = \text{cte}$, usualmente tomada. A escolha justifica-se pelo fato de que (III.h.3) é equivalente à normalização usual quando $t = \text{cte}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço global, para soluções que são auto-estados do hamiltoniano do sistema. Por outro lado, poder-se-ia argumentar que nossa normalização é definida a menos de uma transformação de Lorentz local, pois depende da orientação do campo de tetradas $e^{(A)}_{\alpha}(x)$. No entanto, a orientação do campo de tetradas (III.a.5 e 6), para o qual vamos calcular (III.h.2 e 3), é uma orientação privilegiada: o vetor zero do referencial de tetrada é definido pelo campo de velocidade da matéria, $e^{\alpha}_{(0)} = \delta^{\alpha}_0$ e $j^{(0)}$ e, conseqüentemente, (III.h.2 e 3) são invariantes sob as transformações de Lorentz que preservam esta condição, ou seja, $L_A^0 = \delta_A^0$.

Desenvolvendo em detalhe os cálculos para as soluções de energia positiva no intervalo $-1/2 \leq m \leq j$, (III.g.16a), vamos então calcular

$$\int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi} (|\varepsilon|, j, m, k, L) \gamma^0 \Psi (|\varepsilon'|, j', m', k', L) \quad , \quad (\text{III.h.3})$$

onde $\sqrt{-g} d^4x = 2/w^4 dx dt d\phi dz$ e $1 \leq x < \infty$, $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Desenvolvendo o espinor a duas componentes ϕ , usando para as matrizes γ^A a representação (III.d.2 e 3), e realizando a integração em t, ϕ e z , temos

$$\int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi =$$

$$\frac{4(2\pi)^3}{w^4} \int dx \left[(x^2-1)^{\frac{m+m'}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}|\varepsilon| - \sqrt{2}|\varepsilon'|}{2}} \left\{ (-|\varepsilon| + kL \frac{\sqrt{2}}{2}) (x+1)^{-1} (x^2-1)^{1/2} \right. \right.$$

$$\cdot F(a, b; m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) + (2m+1)^2 (x^2-1)^{-1/2} (x+1) F^2(a, b; m + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \left. \right]$$

$$\cdot \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) \delta(k - k') \delta_{mm'} \delta_{jj'} \quad (\text{III.h.4})$$

onde $a = m - \sqrt{2}|\varepsilon| + j + 1$ e $b = m - j$; $\delta_{jj'}$ é uma consequência das integrações em t e z , pois pode-se ver de $j = -\sqrt{2}|\varepsilon| - 1/2 - \sqrt{|\varepsilon|^2 - (k - \sqrt{2}L/2)^2}$, que $\delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) \delta(k - k')$ implica em $\delta_{jj'}$. Na realidade, devido às relações (III.g.6a e 7a) entre os parâmetros ε , j e k , em (III.h.4), somente duas funções entre $\delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|)$, $\delta(k - k')$ e $\delta_{jj'}$ são independentes. Então

$$\int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi = N^2 =$$

$$\int_1^\infty \frac{2(2\pi)^3}{w^4} dx (x^2-1)^m (x+1)^{-\sqrt{2}|\varepsilon|} \left[(-|\varepsilon| + kL \frac{\sqrt{2}}{2}) (x^2-1)^{\frac{1}{2}} (x+1)^{-1} F^2(a, b; m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) + \right.$$

$$\left. + (2m+1) (x^2-1)^{\frac{1}{2}} (x+1) F^2(a, b; m + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \right] \quad (\text{III.h.5})$$

Temos portanto duas integrações a realizar, a saber,

$$\alpha = \int_1^{\infty} \alpha^2 dx = \int_1^{\infty} (x^2-1)^{m+1/2} (x+1)^{-\sqrt{2}|\epsilon|-1} F^2(a, b; m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) dx \quad (\text{III.h.6a})$$

e

$$\beta = \int_1^{\infty} \beta^2 dx = \int_1^{\infty} (x^2-1)^{m-1/2} (x+1)^{-\sqrt{2}|\epsilon|+1} F^2(a, b; m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) dx \quad (\text{III.h.6b})$$

Para resolver estas duas integrações, vamos usar os operadores de momentum angular J^+ e J^- , definidos no parágrafo III.f, a saber,

$$J^+ \phi(|\epsilon|, j, m, k, L) = \lambda^+ \phi(|\epsilon|, j, m+1, k, L) \quad ,$$

$$J^- \phi(|\epsilon|, j, m, k, L) = \lambda^- \phi(|\epsilon|, j, m-1, k, L) \quad ,$$

onde

$$\lambda^+ = \frac{-(m-\sqrt{2}|\epsilon|+j+1)(m-j)}{2m+1} \quad ;$$

$$\lambda^- = 2m+1 \quad .$$

Em particular, faremos uso da propriedade de anti-hermiticidade dos operadores J^1 e J^2 , relativamente ao produto escalar definido por (III.h.3), demonstrada no apêndice I.

Os integrandos de (III.h.6a e b) assumem formas particularmente simples para $b=0$, ou seja, $m=j$, pois da expressão da função hipergeométrica ⁽⁵⁸⁾,

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) \Gamma(a) \Gamma(b)} \frac{z^n}{n!} \quad ,$$

válida para $b \leq 0$, vemos que $F(a, 0; c; z)=1$. Assim, os integrandos de (III.h.6a e b) se reduzem a:

$$\int_1^{\infty} (x-1)^{j+1/2} (x+1)^{j-\sqrt{2}|\epsilon|-1/2} dx = 2^{2j-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{\Gamma(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1) \Gamma(j+3/2)}{\Gamma(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)} \quad (\text{III.h.7a})$$

e

$$\int_1^{\infty} (x-1)^{j-1/2} (x+1)^{j-\sqrt{2}|\epsilon|+1/2} dx = 2^{2j-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{\Gamma(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1) \Gamma(j+1/2)}{\Gamma(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)} . \quad (\text{III.h.7b})$$

Como mostraremos no apêndice I,

$$\int_1^{\infty} (J^+ f_{(m)}(x)) f_{(m+1)}(x) dx = - \int_1^{\infty} f_{(m)}(x) (J^- f_{(m+1)}(x)) dx , \quad (\text{III.h.8})$$

onde $f_{(m)}(x)$ designa qualquer das funções $\alpha_{(\epsilon, m, k, L)}(x)$ ou $\beta_{(\epsilon, m, k, L)}(x)$, componentes do espinor $\phi(x)$ em (III.g.16 e 17). Usando as definições de J^+ e J^- , e chamando

$$\int_1^{\infty} f_{(m)} f_{(m)} dx = N^2(m) ,$$

de (III.h.8), temos a relação

$$N^2(m) = \frac{-\lambda^+(m)}{\lambda^-(m+1)} N^2(m+1) . \quad (\text{III.h.9})$$

As expressões (III.h.7a e b) nada mais são do que $N_{\alpha}^2(j)$ e $N_{\beta}^2(j)$, de acordo com a definição de $N^2(m)$ acima, ou seja,

$$N_{\alpha}^2(j) = 2^{2j-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-2)!(j+1/2)!}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)!}$$

e

$$N_{\beta}^2(j) = 2^{2j-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-2)!(j-1/2)!}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!} .$$

A partir de (III.h.9), podemos determinar $N_{\alpha}^2(j-1)$, $N_{\beta}^2(j-2)$ e assim sucessivamente até $j-p$:

$$N_{\beta}^2(j-p) = \frac{-\lambda^+(j-p)}{\lambda^-(j-p+1)} N_{\beta}^2(j-p+1) = \\ = \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j+p-1)(p)(\sqrt{2}|\epsilon|-2j+p-2)(p-1) \dots (\sqrt{2}|\epsilon|-2j+1)(2)(\sqrt{2}|\epsilon|-2j)(1)}{2^{2p}(j-p+1/2)^2(j-p+3/2)^2 \dots (j-1/2)^2(j-3/2)^2} .$$

$$\frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-2)!(j-1/2)!}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!}$$

Chamando $j-p = m$, temos

$$\begin{aligned} N_{\beta}^2(m) &= 2^{2m-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-m-1)!(j-m)!((m-1/2)!)^2}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j-1/2)!} \\ &= \langle \beta \rangle \end{aligned} \quad \text{(III.h.10a)}$$

Da mesma forma, calculamos

$$\begin{aligned} N_{\alpha}^2(m) &= 2^{2m-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-m-1)!(j-m)!((m+1/2)!)^2}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)!(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j+1/2)!} \\ &= \langle \alpha \rangle = \frac{(m+1/2)^2}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)(j+1/2)} \langle \beta \rangle \end{aligned} \quad \text{(III.h.10b)}$$

Portanto, a integral (III.h.2) resulta em:

$$N^2 = \int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi =$$

$$\begin{aligned} \frac{4(2\pi)^3}{w^4} 2^{2m-\sqrt{2}|\epsilon|+1} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-m-1)!(j-m)!((m-1/2)!)^2}{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j-1/2)!(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!} \\ \left[\frac{(|\epsilon|-kL+\sqrt{2}/2)(m+1/2)}{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)(j+1/2)} + 4(m+1/2) \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{(2\pi)^3}{w^4} 2^{2m-\sqrt{2}|\epsilon|+5} \frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-m-1)!(j-m)!((m+1/2)!)^2 2^{|\epsilon|}}{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j-1/2)!(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)! (|\epsilon|+kL-\sqrt{2}/2)}$$

$$\delta(|\epsilon|-|\epsilon'|) \delta(k-k') \delta_{mm'} \delta_{jj'}$$

onde usamos que $(|\epsilon|^2 - (k-\sqrt{2}L/2)^2) = 4(j+1/2)(\sqrt{2}|\epsilon|-j-1/2)$.

Podemos ver de imediato que as soluções de energia positiva e negativa são ortogonais entre si, pois no produto

$$\bar{\Psi}(\epsilon, j, m, k, L) \gamma^0 \Psi(\epsilon', j', m', k', L)$$

aparecem exponenciais da forma $e^{-i(|\epsilon|+|\epsilon'|)t} e^{i(m-m')\phi} e^{i(k-k')z}$.

Assim,

$$\int \sqrt{-g} d^4x \Psi_{(+|\epsilon|, j, m, k, L)} \gamma^0 \Psi_{(-|\epsilon'|, j', m', k', L)} = 0 \quad .$$

Empregando o mesmo método que acima, calculamos todas as integrais de normalização e, finalmente, podemos escrever:

$$\langle \Psi_{(r|\epsilon|, j, m, k, L)} | \Psi_{(s|\epsilon'|, j', m', k', L)} = N^2 \delta_{rs} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(|\epsilon|-|\epsilon'|) \delta(k-k') \quad \text{(III.h.11)}$$

onde

$$N^2 = |\epsilon| R^2$$

e

$$R^2 =$$

$$\left[\frac{(2|\epsilon|-j-m-1)!(j-m)!((m+1/2)!)}{(|\epsilon|+kL-\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j-1/2)!(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!} \right] ,$$

$$-1/2 \leq m \leq j, \quad j \geq 1/2; \quad \text{(III.h.12a)}$$

$$\frac{(2\pi)^3}{w^4} 2^{2m-\sqrt{2}|\epsilon|+6} \left[\frac{(\sqrt{2}|\epsilon|-j-3/2)!(j-1/2)((1/2-m)!)}{(\sqrt{2}|\epsilon|-2j-1)(j-m)!(\sqrt{2}|\epsilon|-m-j-1)!} \right] ,$$

$$-\infty < m \leq -3/2, \quad j \geq 1/2; \quad \text{(III.h.12b)}$$

e $r, s = +, -$, correspondendo a soluções de energia positiva e negativa, respectivamente. Desde que a integral de normalização (III.h.2) se transforma como a componente zero de um vetor frente às transformações de Lorentz locais, no capítulo V seremos levados a normalizar nossas soluções (III.g.16 e 17) com o fator R.

As soluções (III.g.16 e 17), normalizadas de acordo com (III.h.12), constituem uma base completa de soluções⁽⁶⁰⁾, em termos das quais pode-se expandir qualquer solução para neutrinos em interação com a vorticidade do universo de Gödel, de métrica (III.1). No capítulo seguinte, construiremos o espaço de Fourier associado à base completa de soluções (III.g.16 e 17) e veremos

que o fator N^2 em (III.h.11) pode ser interpretado como inversamente proporcional à densidade local de número de estados naquele espaço.

REFERÊNCIAS

58. M.Abramowitz e I.Stegun, "Handbook of mathematical functions", Dover Publishing Inc., 1965; I.S.Gradhteyn e I.M.Ryzhik, "Table of integrals, series and products", Academic Press, 1980.
59. N.É.Nörlund, "The logarithmic solutions of the hypergeometric equation", Mat. Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk 2, nº 5(1963).
60. Cada uma das componentes do espinor $\Psi(x)$, ou seja, as funções da forma

$$f(t,x,\phi,z) = g(x) e^{i|\epsilon|t} e^{im\phi} e^{ikz}, \quad \text{deve constituir um}$$

conjunto completo. As funções exponenciais constituem separadamente conjuntos completos de soluções, nas quais podem ser expandidas quaisquer funções de t , ϕ e z . A completicidade das funções $g(x)$ é imediata, como pode ser visto se escrevermos as funções hipergeométricas que nelas aparecem em termos dos polinômios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ (ver A.Erdélyi, "Higher transcendental functions", vol. 2, cap. 10, Bateman Manuscript Project, 1955). Provar rigorosamente a completicidade de $f(t,x,\phi,z)$ é trabalho extremamente complexo, delicado e longo. Por esta razão, estamos postulando a completicidade destas funções, no sentido de que para qualquer equação da mecânica quântica, dado um conjunto completo de observáveis que comutam entre si (no presente caso, os operadores H , J^3 , $(J^2, \partial/\partial z$ e γ^5), as auto-funções simultâneas desses operadores constituem uma base completa de soluções da correspondente equação.

64. É possível eliminar o termo $n^{(j)}$ na definição do momentum local (III.c.5a), escrevendo a equação (III.c.4) para o espinor $\Psi'(x) = (-g)^{1/4} \Psi(x)$. Assim, de

$$\epsilon \Psi' = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi}}{L} \Psi',$$

temos

$$\pi^j = i e^{-(j)\alpha} \partial/\partial x^\alpha + \gamma^5 \Omega^{(j)} / |\Omega|.$$

CAPÍTULO IV

NEUTRINOS EM INTERAÇÃO COM A VORTICIDADE:

ESPAÇO DE MOMENTUM

Neste capítulo, vamos construir o espaço de momentum associado à base completa de soluções (III.g.16 e 17), definindo convenientemente uma generalização da transformada de Fourier usual. Examinaremos as transformações no espaço de Fourier induzidas pelas transformações de Lorentz locais e obteremos a equação de Dirac transformada.

IV.a - ESPAÇO DE FOURIER

Para construir o espaço de Fourier associado às soluções (III.g.16 e 17) é imprescindível definir convenientemente o núcleo da transformação. Designamos por $\Psi_F(\epsilon, j, m, k, L)$, ou de forma abreviada, $\Psi_F(\epsilon, j)$, as transformadas de Fourier, $F[\Psi(x)]$, das funções de onda do neutrino, definidas por

$$F[\Psi(x)] = \Psi_F(\epsilon, j, m, k, L) = \int \sqrt{-g} d^4x K(\epsilon, j, m, k; x) \Psi_{(\epsilon, j)}(x) \quad , \quad (IV.a.1)$$

onde a integração é sobre toda a variedade e $\Psi_{(\epsilon, j)}(x)$ é a forma abreviada de $\Psi_{(\epsilon, j, m, k, L)}(x)$. O núcleo da transformação acima, $K(\epsilon, j, m, k; x)$, abreviadamente $K(j; x)$, é por definição

$$K(j; x) = K^{(+)}(j; x) + K^{(-)}(j; x) \quad , \quad (IV.a.2)$$

onde

$$K^{(-)}(j; x) = \text{diag} \left[\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \langle \alpha \rangle & \langle \beta \rangle & \langle \alpha \rangle & \langle \beta \rangle \end{array} \right] e^{im\Phi} e^{i|\epsilon|t} e^{ikz} \quad (IV.a.3a)$$

e

$$K^{(-)}(j;x) = \text{diag} \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \langle \beta \rangle & \langle \alpha \rangle & \langle \beta \rangle & \langle \alpha \rangle \end{bmatrix} e^{im\phi} e^{-i|\epsilon|t} e^{ikz} \quad (\text{IV.a.3b})$$

onde $\langle \alpha \rangle = \frac{(m+1/2)^2}{(\sqrt{2}|\epsilon| - j - 1/2)(j+1/2)} \langle \beta \rangle$, com $\langle \beta \rangle$ dada por (III.h.10a), para

$$-1/2 \leq m \leq j; \text{ para } -\infty < m \leq -3/2, \langle \alpha \rangle = \frac{(\sqrt{2}|\epsilon| - j - 1/2)(j+1/2)}{(1/2 - m)^2} \langle \beta \rangle, \text{ onde}$$

$$\langle \beta \rangle = (x^2 - 1)^{-m+1/2} (x+1)^{\sqrt{2}|\epsilon| - 1} F_2(j-m+1, \sqrt{2}|\epsilon| - m - j; -m+1/2; \frac{1-x}{2}) dx.$$

Os núcleos aqui propostos são uma generalização do núcleo de Fourier usual $e^{-ik_\alpha x^\alpha}$, onde $e^{-ik_\alpha x^\alpha}$ é substituído por (IV.a.2 e 3).

Para as soluções de energia positiva, (III.g.16), as funções transformadas são:

$$\begin{aligned} \psi_F(+|\epsilon|, j) &= \int \sqrt{-g} K(j'; x) \psi(x) d^4x = \\ & \frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} i(|\epsilon| - kL + \sqrt{2}/2) & \langle \alpha \rangle^{1/2} \\ L(2m+1) & \langle \beta \rangle^{1/2} \\ iL(|\epsilon| - kL + \sqrt{2}/2) & \langle \alpha \rangle^{1/2} \\ (2m+1) & \langle \beta \rangle^{1/2} \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\epsilon| - |\epsilon'|), \end{aligned} \quad (\text{IV.a.4a})$$

$$-1/2 \leq m \leq j;$$

$$\begin{aligned} \psi_F(+|\epsilon|, j) &= \int \sqrt{-g} K(j'; x) \psi(x) d^4x = \\ & \frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} (1-2m) & \langle \alpha \rangle^{1/2} \\ iL(|\epsilon| + kL - \sqrt{2}/2) & \langle \beta \rangle^{1/2} \\ L(1-2m) & \langle \alpha \rangle^{1/2} \\ i(|\epsilon| + k(-\sqrt{2}/2)) & \langle \beta \rangle^{1/2} \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\epsilon| - |\epsilon'|), \end{aligned} \quad (\text{IV.a.4b})$$

$$-\infty < m \leq -3/2.$$

Para as soluções de energia negativa:

$$\psi_F(-|\varepsilon|, j) = \int \sqrt{-g} d^4x K(j'; x) \psi(-|\varepsilon|, j)(x) d^4x =$$

$$\frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} (2m+1) & \langle \beta \rangle 1/2 \\ iL(-|\varepsilon| + kL - \sqrt{2}/2) & \langle \alpha \rangle 1/2 \\ L(2m+1) & \langle \beta \rangle 1/2 \\ i(-|\varepsilon| + kL - \sqrt{2}/2) & \langle \alpha \rangle 1/2 \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) ,$$

(IV.a.5a)

- 1/2 ≤ m ≤ j;

$$\psi_F(-|\varepsilon|, j) = \int \sqrt{-g} K(j'; x) \psi(-|\varepsilon|, j)(x) d^4x =$$

$$\frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} -i(|\varepsilon| + kL - \sqrt{2}/2) & \langle \beta \rangle 1/2 \\ L(1-2m) & \langle \alpha \rangle 1/2 \\ iL(|\varepsilon| + kL - \sqrt{2}/2) & \langle \beta \rangle 1/2 \\ (1-2m) & \langle \alpha \rangle 1/2 \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) ,$$

(IV.a.5b)

- ∞ < m ≤ - 3/2.

Nas expressões (IV.a.4 e 5), o núcleo empregado é $K(j; x) = K^{(+)}(j; x) + K^{(-)}(j; x)$; $K^{(+)}$ tem o comportamento de um projetor nos estados de energia positiva, pois sua ação nos estados de energia negativa é nula, como pode ser visto por um cálculo direto. Da mesma forma, $K^{(-)}$ pode ser considerado como um projetor nos estados de energia negativa, já que sua ação nos estados de energia positiva é nula. Como o inverso de um projetor não é uma aplicação biunívoca, as transformadas inversas são definidas separadamente para as soluções de energia positiva e negativa, de acordo com:

$$F^{-1}(\psi_F(r|\varepsilon|, j)) = \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^j \int \frac{dkd\varepsilon}{(2\pi)^3} (K(j; x)^{(r)})^+ \psi_F(r|\varepsilon|, j) \quad , \quad (IV.a.6)$$

$-\infty < m \leq j, j \geq 1/2; r$ denota + ou -.

A transformada inversa $F^{-1}(\psi_F)$ deve satisfazer a relação

$$F^{-1}[F] = F[F^{-1}] = 1 \quad (IV.a.7)$$

Isto implica que os núcleos (IV.a.2 e 3) obedecem à propriedade:

$$\sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^j \int \frac{dkd\varepsilon}{(2\pi)^3} (K(j; x)^{(r)})^+ K(j; x')^{(s)} = \frac{\delta^4(x-x')}{\sqrt{-g}} \delta_{rs} \quad (IV.a.8)$$

e à propriedade de unitariedade:

$$\int \sqrt{-g} d^4x K(j'; x)^{(s)} (K(j; x)^{(r)})^+ = 2(2\pi)^3 \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) \delta(k-k') \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta_{rs} \quad (IV.a.9)$$

onde $r, s = +, -$. Calculando o lado esquerdo de (IV.a.7),

$$F^{-1}[F(\psi(x|\varepsilon|, j)(x))] = \int \sqrt{-g} d^4x \psi(x') \sum_j \sum_m \int \frac{dkd\varepsilon}{(2\pi)^3} (K(j, x)^{(r)})^+ K(j; x')^{(s)} \quad (IV.a.10a)$$

vemos que se (IV.a.8) for satisfeita, teremos

$$F^{-1}[F(\psi(x))] = \psi(x) \quad (IV.a.10b)$$

Do mesmo modo, a validade de (IV.a.9) significa que

$$F[F^{-1}(\psi_F)] = \psi_F \quad (IV.a.10c)$$

As relações (IV.a.10b e c) demonstram (IV.a.7).

As rotações de Lorentz locais L_A^B induzem transformações no espaço de Fourier das funções $\psi_F(\varepsilon, j)$ que podemos determinar a partir de

$$\Psi'_{\mathbb{F}}(r|\varepsilon|,j) = \int \sqrt{-g} d^4x K(j;x) \Psi'_{(r|\varepsilon|,j)}(x) = \int \sqrt{-g} d^4x K(j;x) S(L(x)) \Psi_{(r|\varepsilon|,j)}(x) \quad , \quad (\text{IV.a.11})$$

onde as funções espinoriais

$$\Psi'(x) = S(L(x)) \Psi(x)$$

são as funções transformadas sob as rotações de Lorentz $L(x)$ que satisfazem à relação (I.b.7), a saber,

$$L_A^B(x) \gamma^A = S(L(x)) \gamma^B S(L(x))^{-1} \quad .$$

Substituindo $\Psi(x)$ pela transformada inversa, $\Psi(x) = F^{-1}(\Psi_{\mathbb{F}})$, em (IV.a.11), temos que

$$\Psi'_{\mathbb{F}}(\varepsilon',j') = \sum_j \sum_m \int \frac{dk d\varepsilon}{(2\pi)^3} S(\varepsilon,j,m,k;\varepsilon',j',m',k') \Psi_{\mathbb{F}}(\varepsilon,j) \quad , \quad (\text{IV.a.12})$$

onde

$$S(\varepsilon,j,m,k;\varepsilon',j',m',k') = \int \sqrt{-g} d^4x K^{(r)}(j;x) S(L(x)) (K^{(s)}(j';x))^+ \quad (\text{IV.a.13})$$

é a transformação induzida no espaço de Fourier pela rotação de Lorentz local (IV.b.7). Sob as transformações $S(\varepsilon,j,m,k;\varepsilon',j',m',k')$ que, por razões de simplicidade de notação, designaremos por $S(j;j')$, as funções $\Psi_{\mathbb{F}}(\varepsilon,j)$ se transformam de acordo com (IV.a.12).

Se aplicarmos a transformação $S^1(j';j)$ à $\Psi_{\mathbb{F}}(\varepsilon,j)$, isto é

$$\Psi'_{\mathbb{F}}(\varepsilon',j') = \sum_j \sum_m \int \frac{dk d\varepsilon}{(2\pi)^3} S^1(j';j) \Psi_{\mathbb{F}}(\varepsilon,j) \quad (\text{IV.a.14a})$$

e $S^2(j'';j')$ à $\Psi'_{\mathbb{F}}(\varepsilon',j')$ acima,

$$\Psi''_{\mathbb{F}}(\varepsilon'',j'') = \sum_{j'} \sum_{m'} \int \frac{dk' d\varepsilon'}{(2\pi)^3} S^2(j'';j') \Psi'_{\mathbb{F}}(\varepsilon',j') \quad , \quad (\text{IV.a.14b})$$

substituindo (IV.a.14a) em (IV.a.14b), teremos

$$\Psi''_{\mathbb{F}}(\varepsilon'',j'') = \sum_{j'} \sum_{m'} \int \frac{dk' d\varepsilon'}{(2\pi)^3} \sum_j \sum_m \int \frac{dk d\varepsilon}{(2\pi)^3} S^2(j'';j') S^1(j';j) \Psi_{\mathbb{F}}(\varepsilon,j) \quad (\text{IV.a.15})$$

Usando a definição (IV.a.12) e as propriedades (IV.a.8 e 9), podemos escrever

$$\psi_F''(\epsilon'', j'') = \sum_{j, m} \int \frac{dk d\epsilon}{(2\pi)^3} S^3(j'', j) \psi_F(\epsilon, j) \quad (\text{IV.a.16})$$

onde

$$S^3(j'', j) = \int \sqrt{-g} d^4x K(j'', x) S^2(L(x)) S^1(L(x)) K^+(j, x) . \quad (\text{IV.a.17})$$

Comparando as expressões (IV.a.15) e (IV.a.16), vemos que

$$S^3(j'', j) = \sum_{j', m'} \int \frac{dk' d\epsilon'}{(2\pi)^3} S^2(j'', j') S^1(j', j) . \quad (\text{IV.a.18})$$

As transformações $S(j, j')$, induzidas no espaço de Fourier pelas rotações de Lorentz locais, formam um grupo:

a. a lei de multiplicação (IV.a.18) é associativa, como pode ser mostrado por um cálculo direto;

b. existe o elemento identidade:

$$\psi_F'(\epsilon', j') = \sum_{j, m} \int \frac{dk d\epsilon}{(2\pi)^3} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(\epsilon-\epsilon') \psi_F(\epsilon, j);$$

c. existe o elemento inverso,

$$S^{-1}(j', j) = \int \sqrt{-g} d^4x K(j', x) S^{-1}(L(x)) K^+(j, x) .$$

Usando a definição de transformação inversa (IV.a.6) e a propriedade de unitariedade (IV.a.9), vê-se que, como era de se esperar, a transformação de Fourier conserva o produto escalar, ou seja,

$$\int \sqrt{-g} d^4x \psi_{(\epsilon, j)}^+(x) \psi_{(\epsilon, j)}(x) = \sum_j \sum_m \int \frac{d\epsilon dk}{(2\pi)^3} \psi_F^+(\epsilon, j) \psi_F(\epsilon, j) .$$

As aplicações F e F^{-1} são bijetivas; a cada $\psi_{(\epsilon, j)}^+(x)$ corresponde uma $\psi_F(\epsilon, j)$ e vice-versa. Portanto, $\psi_{(\epsilon, j)}^+(x)$ e $\psi_F(\epsilon, j)$ constituem representações de um mesmo estado e o espaço de Fourier construído acima constitui um espaço de momentum para os neutrinos.

IV.b - ESPAÇO DE MOMENTUM

No espaço de momentum associado a uma base completa de soluções $\Psi_n(x)$, a equação de Dirac para neutrinos sempre pode ser escrita

$$F[\gamma^A \Psi_n(x); A] = -i\pi_A \gamma^A \Psi_F(n) = 0$$

A equação $-i\pi_A \gamma^A \Psi_F(n) = 0$ é a equação de Dirac transformada e π_A são os momenta para os neutrinos. No presente caso, o espaço de Fourier das funções $\Psi_F(r|\epsilon|, j)$ constituindo um espaço de momentum para os neutrinos, a equação de Dirac transformada é dada por

$$-i\pi_A \gamma^A \Psi_F(|\epsilon|, j) = F[\gamma^A \Psi(r|\epsilon|, j)(x); A] = \int \sqrt{-g} d^4x K(j; x) (\gamma^A \Psi(r|\epsilon|, j)(x); A) = 0 \quad (IV.b.1)$$

e podemos calcular os momenta π_A . Vamos desenvolver em detalhe os cálculos para as soluções (III.g.16b), ou seja, as soluções de energia negativa, válidas para $-1/2 \leq m \leq j$, $j \geq 1/2$. Assim,

$$\begin{aligned} -i\pi_A \gamma^A \Psi_F(-|\epsilon|, j) &= \int \sqrt{-g} d^4x K(j'; x) \gamma^A \Psi(-|\epsilon|, j)(x); A = \\ & \int \sqrt{-g} d^4x K(j'; x) \left[i|\epsilon| \gamma^0 - \sqrt{2} |\epsilon| i \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{1/2} \gamma^2 + \frac{x}{(x-1)^{1/2}} \gamma^1 + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} iL\gamma^3 + 2(x^2-1)^{1/2} \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2im}{(x^2-1)^{1/2}} \gamma^2 - ik\gamma^3 \right] \Psi(-|\epsilon|, j)(x) \quad (IV.b.2) \end{aligned}$$

onde $K(j'; x)$ é dado por (IV.a.2 e 3).

Como $K(j; x) \gamma^0 = \gamma^0 K(j; x)$ e $K(j; x) \gamma^3 = \gamma^3 K(j; x)$, podemos de imediato identificar as componentes (o) e (3) do momentum π_A :

$$\begin{aligned}\pi_0 &= -|\varepsilon| \\ \pi_3 &= k - \frac{\sqrt{2}}{2} L.\end{aligned}$$

Para identificar π_1 e π_2 , é necessário desenvolver os termos em γ^2 e γ^1 do lado direito da igualdade (IV.b.2). Usando as relações de derivação das funções hipergeométricas⁽⁵⁸⁾, temos que

$$\begin{aligned}(-i\pi_1\gamma^1 - i\pi_2\gamma^2)\psi_F(-|\varepsilon|, j) = \\ \frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} (2m+1) i (-|\varepsilon| - kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) & \langle \beta \rangle & 1/2 \\ 4L(j - \sqrt{2}|\varepsilon| + \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) & \langle \alpha \rangle & 1/2 \\ -iL(2m+1) (-|\varepsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) & \langle \beta \rangle & 1/2 \\ -4(j - \sqrt{2}|\varepsilon| + \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) & \langle \alpha \rangle & 1/2 \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|).\end{aligned}\tag{IV.b.3}$$

Desenvolvendo agora o lado esquerdo de (IV.b.2), obtemos:

$$\begin{aligned}(-i\pi_1\gamma^1 - i\pi_2\gamma^2)\psi_F(-|\varepsilon|, j) = \\ \frac{2(2\pi)^3}{\omega^4} \begin{pmatrix} (\pi_2 - i\pi_1) (-|\varepsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) & \langle \alpha \rangle & 1/2 \\ (-\pi_2 - i\pi_1) (2m+1) & \langle \beta \rangle & 1/2 \\ (-\pi_2 + i\pi_1) iL(-|\varepsilon| + kL - \frac{\sqrt{2}}{2}) & \langle \alpha \rangle & 1/2 \\ (\pi_2 + i\pi_1) (2m+1) & \langle \beta \rangle & 1/2 \end{pmatrix} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|).\end{aligned}\tag{IV.b.4}$$

Comparando (IV.b.3) e (IV.b.4), determinamos que

$$\pi_2 = 2 [(\sqrt{2}|\varepsilon| - j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})]^{1/2}$$

e

$$\pi_1 = 0,$$

onde usamos as expressões (III.h.10a e b) para $\langle \alpha \rangle$ e $\langle \beta \rangle$. Então, o momentum

$$\pi_{A(-)} = (|\varepsilon|, 0, 2[(\sqrt{2}|\varepsilon|-j-1/2)(j+1/2)]^{1/2}, k-\sqrt{2}L/2) \quad (IV.b.5)$$

Lembrando que $|\varepsilon|^2 - (k-\sqrt{2}L/2)^2 = 4(j+1/2)(\sqrt{2}|\varepsilon|-j-1/2)$, mostra-se imediatamente que $\pi_A \pi^A = 0$, como era de se esperar para partículas de massa nula, onde $\pi^A = \eta^{AB} \pi_B$. É importante observar que se realizarmos os cálculos com a solução de energia negativa (IV.g.17a), válida no intervalo $-\infty < m \leq -3/2$, é evidente que obteremos o mesmo resultado, (IV.b.5), para o momentum $\pi_{A(-)}$.

Para as soluções de energia positiva, obtém-se por um cálculo semelhante ao desenvolvido acima que

$$\pi_{A(+)} = (|\varepsilon|, 0, -2[(\sqrt{2}|\varepsilon|-j-1/2)(j+1/2)]^{1/2}, k-\sqrt{2}L/2) \quad ; \quad (IV.b.6)$$

do mesmo modo, $\pi_A \pi^A = 0$.

Note-se que as componentes dos momenta $\pi_{A(-)}$ e $\pi_{A(+)}$ têm sinais opostos, com exceção de π_3 . Isto se deve à forma como definimos os núcleos da transformação de Fourier (IV.a.1). Se na definição de $K^{(-)}(j;x)$, trocássemos $k \rightarrow -k$ e $L \rightarrow -L$, obteríamos que $\pi_3 \rightarrow -\pi_3$, $\pi_2 \rightarrow \pi_2$ e $\pi_0 \rightarrow \pi_0$, de modo que teríamos $\pi_{A(-)} = -\pi_{A(+)}$. É importante observar também que a escolha de núcleos $K^{(+)}$ e $K^{(-)}$ diagonais deve-se não só a critérios de simplicidade; na verdade, os núcleos (IV.a.3a e b) satisfazem à condição $[K^{(r)}, \gamma^0] = 0$, necessária para que $\pi_0 = \pm |\varepsilon|$. Além do mais o núcleo K escolhido comuta também com γ^3 e γ^5 ; em consequência, os auto-valores do momentum local na direção da vorticidade, $p_3 = i\partial/\partial z - \sqrt{2}\gamma^5/2$, coincidem com a componente 3 do momentum $\pi_{A(\pm)}$.

Como observamos no capítulo III.c, a constante L , auto-valor do operador helicidade, comporta-se como a constante de acoplamento dos neutrinos à vorticidade, conforme é claramente indicado na expressão da componente 3 dos momenta π_A , em (IV.b.5 e 6) acima.

CAPÍTULO V

ACOPLAMENTO DOS NEUTRINOS À GRAVITAÇÃO: ASSIMETRIAS MICROSCÓPICAS

A operação de conjugação de carga é uma simetria das equações de Dirac no espaço plano. No caso dos neutrinos, essa operação nos permite passar de estados de neutrino para estados de anti-neutrino. É razoável esperarmos que as simetrias neutrino-anti-neutrinos encontradas na ausência de gravitação se mantenham na presença dessa interação, permitindo-nos recuperar localmente as simetrias conhecidas, de forma natural. Para examinar esta questão, necessitamos definir amplitudes de neutrino e anti-neutrino num universo com curvatura e apontar a existência de transformações entre esses estados que sejam simetrias do espaço de Hilbert gerado pelas soluções aqui obtidas.

A definição de amplitudes de partícula (e anti-partícula) em um espaço curvo não é, em geral, uma tarefa simples. A variedade espaço-tempo com que estamos trabalhando, no entanto, possui características que tornam possível definir amplitudes de neutrino e anti-neutrino por analogia com essas definições no espaço plano. Como veremos neste capítulo, a existência do grupo de Lorentz local, relativamente ao qual é definido o caráter dos espinores, e a presença de um grupo de isometrias que tem $\partial/\partial t$ como um de seus vetores de Killing, nos permitem recuperar localmente as propriedades necessárias para definir nossas amplitudes de partícula e anti-partícula de forma adequada.

A construção do espaço de momentum associado a nosso conjunto de soluções nos permite calcular correntes de Fourier para neutrinos e anti-neutrinos e estudar através delas o comportamento

destas partículas quando acopladas à vorticidade da matéria. Verificaremos aqui que as correntes de neutrinos e anti-neutrinos apresentam uma assimetria microscópica ao longo da direção determinada pela vorticidade da matéria. Mostraremos também que no caso em que um par neutrino-anti-neutrino for criado por uma interação que viole CP, teremos uma assimetria entre neutrinos e anti-neutrinos.

V.a - A CORRENTE LOCAL

Num referencial de Lorentz local, a densidade de corrente local de Dirac é dada por

$$j^{(A)} = \bar{\Psi} \gamma^A \Psi \quad ; \quad (\text{I.d.5})$$

A componente $j^{(0)} = \Psi^\dagger \Psi$ representa a densidade local de número de neutrinos. A corrente local de Fourier é a corrente construída com as funções transformadas Ψ_F ,

$$j_F^{(A)} = \bar{\Psi}_F \gamma^A \Psi_F \quad (\text{V.a.1})$$

Calculemos então a corrente de Fourier $J_F^{(A)}$ para, por exemplo, $\Psi_F(+|\varepsilon|, j, m, k)$, dada por (IV.a.5a); obtemos:

$$J_{F(+)}^{(A)} = R^2 (|\varepsilon|, 0, \pi^2, \pi^3) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\varepsilon| \pm |\varepsilon'|) \quad (\text{V.a.3})$$

onde R^2 é dado por (III.h.11a).

Examinando a integral de normalização (III.h.11), vemos que o fator de normalização é $N^2 = |\varepsilon| R^2$, onde R^2 é dado por (III.h.1 a e b); de (IV.b.6), temos que $|\varepsilon| = \pi^0$, ou seja, é exatamente a componente zero do momentum local $\pi_{(+)}^A$, dado por (IV.b.6), que aparece em (III.h.11), e que caracteriza seu comportamento sob as transformações de Lorentz locais. Isto nos sugere normalizar as

funções (III.g.16 e 17) com

$$R^2 = \frac{4 N^2}{(2\pi)^3 w^4 (|\epsilon| + \pi^3 L)} \quad , \quad (V.a.4)$$

de modo a termos

$$\langle \Psi(\epsilon, j, m, k, L) | \Psi(\epsilon', j', m', k', L) \rangle = |\epsilon| \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k-k') \delta(|\epsilon| - |\epsilon'|) = \Psi_F^+(\epsilon, j, m, k) \Psi_F(\epsilon', j', m', k') \quad (V.a.5)$$

Com esta normalização, as funções (III.g.16a) são agora escritas:

$$\phi(+|\epsilon|, j, m, k, l)(x) = \frac{w^2}{2\sqrt{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}} N_\alpha} \left(\begin{array}{c} (|\epsilon| + \pi^3 L)^{1/2} (x^2 - 1)^{(m+1/2)/2} (x+1)^{-(\sqrt{2}|\epsilon|-1)/2} F(a, b; m+3/2; \frac{1-x}{2}) \\ \frac{(2m+1)L}{(|\epsilon| + \pi^3 L)^{\frac{1}{2}}} (x^2 - 1)^{(m-1/2)/2} (x+1)^{-(\sqrt{2}|\epsilon|+1)/2} F(a, b; m+1/2; \frac{1-x}{2}) \end{array} \right) \cdot e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \quad , \quad (V.a.6)$$

onde $a = m - \sqrt{2}|\epsilon| + j + 1$, $b = m - j$, $-1/2 \leq m \leq j$, $j \geq 1/2$, e, da mesma forma, podemos escrever as soluções (III.g.16b, 17a e 17b) com esta normalização.

Assim, a corrente local $J_F^{(A)}$ será igual ao momentum local, ou seja, escrevendo as funções δ explicitamente:

$$J_{F(+)}^{(A)} = \pi_{(+)}^A \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(|\epsilon| - |\epsilon'|) \delta(k-k') \quad . \quad (V.a.7)$$

Podemos dizer que a expressão $\pi_A^A = 0$ nada mais é do que a conservação da corrente, $\nabla_A (\bar{\Psi} \gamma^A \Psi) = 0$, escrita no espaço de momentum. Na verdade,

$$F[\nabla_A (\bar{\Psi} \gamma^A \Psi)] = -i \pi_A (\bar{\Psi}_F \gamma^A \Psi_F) = 0 \quad .$$

Logo, $\bar{\Psi}_F \gamma^A \Psi_F \sim \pi^A$, como acabamos de ver e, com a normalização (V.a.4),

$$\bar{\Psi}_F \gamma^A \Psi_F = \pi^A \quad .$$

De maneira semelhante, obtemos que a corrente de Fourier $J_{F(-)}^{(A)}$, para as soluções de energia negativa (IV.a.6a) é:

$$J_{F(-)}^{(A)} = (|\varepsilon|, 0, -\pi^2, -\pi^3) = -\pi_{(-)}^A \quad .$$

No parágrafo seguinte, calcularemos explicitamente a componente da corrente local (I.d.5) na direção determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$.

V.b - ESTADOS DE NEUTRINO E ANTI-NEUTRINO

Na ausência de gravitação, o grupo de Poincaré é o grupo de simetria da variedade espaço-tempo. Em particular, o vetor $\partial/\partial t$ é um vetor de Killing dessa variedade, permitindo naturalmente a definição de modos de energia. Além disto, existe um conjunto de modos naturais, associados às translações em (t,x,y,z) , que permite decompor uma determinada função de onda numa base de ondas planas. Na presença de gravitação, no entanto, o grupo de Poincaré não é mais o grupo de simetria do espaço-tempo e, em geral, não existem vetores de Killing com os quais definir modos invariantes de energia ou momenta naturais (a menos que esse espaço-tempo admita um grupo de isometrias). No presente trabalho, estamos estudando o comportamento de neutrinos em uma variedade de Gödel $H^3 \times R$, que admite um grupo de isometrias G_5 e há, como vimos nos capítulos I e II, dois grupos distintos envolvidos: o grupo de Lorentz local, relativamente ao qual é definido o caráter do quadri-espinor $\Psi(x)$ e o grupo de isometrias G_5 , da métrica (III.a.4). Os quadri espinores $\Psi(x)$, soluções da equação de Dirac generalizada para o espaço

curvo, . determinam uma representação escalar para G_5 , como vimos no capítulo II.f, é possível determinar modos globais invariantes (tipo "onda plana"), convenientes ao tratamento de nosso problema. Em particular, $\partial/\partial t$ é um vetor de Killing globalmente definido desta métrica e os quadri-espinores $\Psi(x)$ podem ser decompostos em modos globais invariantes de energia.

No espaço-tempo plano, não há ambiguidade possível e a definição de amplitudes de partículas e de anti-partículas refere-se unicamente ao grupo de Poincaré: os auto-estados de energia relacionam-se a $\partial/\partial t$, vetor de Killing associado ao grupo de Poincaré enquanto grupo de isometria; por outro lado, a operação de conjugação de carga-paridade (CP) é uma simetria do espaço de Hilbert das soluções da equação de Dirac, que determinam uma representação espinorial do grupo de Poincaré. Num espaço curvo, no entanto, para definir amplitudes de partículas devemos referir-nos a ambos os grupos, o grupo de isometrias e o grupo de Lorentz local.

Para fermions num universo de Gödel, a construção de auto-estados de energia é possível por ser $\partial/\partial t$ um vetor de Killing da métrica (III.a.4); a invariância do espaço de soluções da equação de Dirac (III.a.8), sob, por exemplo, as operações γ^5 e conjugação de carga-paridade, é relativa à estrutura espinorial local, no sentido de que essas soluções determinam uma representação espinorial do grupo de Lorentz local. Por outro lado, γ^5 só é identificado ao operador helicidade para auto-estados de energia, cuja definição envolve o grupo de isometrias de (III.a.4).

No espaço plano, as propriedades de invariância sob as operações γ^5 e conjugação de carga-paridade e a existência de auto-estados de energia são imprescindíveis para a construção de ampli-

tudes de neutrino e anti-neutrino. Em $H^3 \times R$, devido à estrutura de Minkowski local (III.a.2) e a existência do grupo de Lorentz local, as propriedades de invariância do espaço gerado pelas soluções (III.g.16 e 17) sob as operações γ^5 e conjugação de carga-paridade se mantêm localmente, enquanto que o caráter de vetor de Killing globalmente definido de $\partial/\partial t$ possibilita a decomposição dessas funções em auto-estados de energia. Assim, as duas estruturas de grupo presentes na variedade $H^3 \times R$ podem ser utilizadas para definir amplitudes de neutrino e anti-neutrino, em interação com a vorticidade da matéria; para tal, vamos tentar definir de maneira consistente transformações que possam ser interpretadas localmente, por analogia com o espaço-plano, como relacionadas a simetrias conhecidas da física de partículas.

No caso dos neutrinos, as soluções da equação de Dirac formam um sub-espaço do espaço das funções que constituem uma representação espinorial do grupo de Lorentz local - o sub-espaço dos espinores que são auto-estados de γ^5 . No caso presentemente tratado, essas soluções são dadas por (III.g.16 e 17), normalizadas de acordo com (V.a.4). Nosso procedimento será o de obter transformações de simetria neutrino-anti-neutrino do espaço de Hilbert gerado por essas soluções, em cuja determinação tenham sido levadas em consideração ambas as estruturas de grupo presentes e que possam ser convenientemente interpretadas em termos de simetrias conhecidas da física de partículas no espaço plano, no sentido de que essas transformações preservam o espaço de Hilbert gerado pela base de soluções (III.g.16 e 17).

Tomemos, por exemplo, uma solução de energia positiva

$$\Psi_{(+|\varepsilon|)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_{(+|\varepsilon|)}(\mathbf{x}) \\ L\phi_{(+|\varepsilon|)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{V.b.1})$$

onde

$$\phi_{(+|\varepsilon|)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} i(|\varepsilon|-kL+\sqrt{2}/2)\alpha(\mathbf{x}) \\ L(2m+1)\beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{-i|\varepsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} \quad (\text{V.b.2})$$

e $\alpha(\mathbf{x})$ e $\beta(\mathbf{x})$ são as funções (III.f.7a e b), respectivamente. Na representação usada neste trabalho, o operador $iL\gamma^5\gamma^2$ é dado por

$$iL\gamma^5\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.b.3})$$

e, por um cálculo direto, determinamos que

$$\begin{aligned} iL\gamma^5\gamma^2\Psi_{(+|\varepsilon|,j,m,k,L)} &= \begin{pmatrix} (2m+1)\alpha(\mathbf{x}) \\ -iL(|\varepsilon|-kL+\sqrt{2}/2)\beta(\mathbf{x}) \\ -L(2m+1)\alpha(\mathbf{x}) \\ i(|\varepsilon|-kL+\sqrt{2}/2)\beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{-i|\varepsilon|t} e^{im\phi} e^{-ikz} = \\ &= \Psi_{(-|\varepsilon|,j,m,-k,-L)}^*(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned}$$

Portanto, as soluções de energia positiva e energia negativa se relacionam entre si de acordo com

$$iL\gamma^5\gamma^2\Psi_{(+|\varepsilon|,j,m,k,L)}(\mathbf{x}) = \Psi_{(-|\varepsilon|,j,m,-k,-L)}^*(\mathbf{x}) \quad (\text{V.b.4})$$

Se multiplicarmos ambos os lados da igualdade acima por $\gamma^2\gamma^5L$, teremos

$$i\Psi_{(+|\varepsilon|,j,m,k,L)} = \gamma^2\Psi_{(-|\varepsilon|,j,m,-k,-L)}^*$$

ou, trocando k por $-k$ e L por $-L$, e lembrando que $\gamma^0(\bar{\Psi})^T = \Psi^*$,

$$\gamma^2\gamma^0(\bar{\Psi})^T_{(-|\varepsilon|,j,m,k,L)} = i\Psi_{(+|\varepsilon|,j,m,-k,-L)} \quad (\text{V.b.5})$$

A operação acima é da forma

$$K_C (\bar{\Psi}(x))^T = \Psi_C(x) \quad (\text{V.b.6})$$

onde K_C tem o caráter de um operador de conjugação de carga, satisfazendo a

$$K_C \gamma^A K_C^+ = -(\gamma^A)^T.$$

Na representação (III.d.2) usada, $K_C = \gamma^2 \gamma^0$ (a menos de um fator de fase constante). A transformação (V.b.5) é uma (transformação) de simetria do espaço de Hilbert das soluções (III.g.16 e 17), pois transforma uma solução (de energia positiva) deste espaço em outra solução (de energia negativa) do mesmo espaço; possui o caráter de um operador de conjugação de carga sobre as amplitudes (III.g.16 e 17): no caso de soluções da equação de Dirac para partículas carregadas, K_C relaciona soluções para partículas com carga positiva com soluções para partículas com carga negativa. Além disto, amplitudes de neutrino relacionadas por (V.b.5) têm momento k e helicidade L opostos. De (V.b.5), tem-se ainda que K_C inverte o sinal das componentes do momentum local,

$$K_C \pi^A K_C^+ = -\pi^A,$$

pois $\pi^A(\Psi_{(+|\varepsilon|)}(x)) = -\pi^A(\Psi_{(-|\varepsilon|)}(x))$. A operação K_C acima definida relaciona amplitudes com momenta locais opostos, helicidades opostas e energias opostas. Note-se que (V.b.5) é (a menos de um fator constante) exatamente a simetria entre soluções de energia positiva e negativa, dada por (III.g.6c).

A existência do grupo de Lorentz local e do grupo de isometrias e as propriedades acima apontadas nos levam, por analogia com o espaço plano, a interpretar a operação (V.b.5) como uma

transformação CP para as amplitudes de neutrino (III.g.16 e 17): se interpretarmos

$$\Psi (+|\varepsilon|, j, m, k, L) \quad (\text{V.b.7})$$

como uma amplitude de neutrino, então a amplitude de anti-neutrino correspondente será

$$\Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, -L) \quad (\text{V.b.8})$$

Devido à não conservação da paridade para neutrinos, tomamos $L=-1$ para neutrinos e $L=+1$ para anti-neutrinos. A transformação operada por K_C leva neutrinos levôgeros em anti-neutrinos dextrôgeros. Dizemos que os estados de energia positiva $\Psi (+|\varepsilon|, j, m, k, -1)$ e $\Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, 1)$ são relacionados por uma operação CP no sentido de que o estado de energia negativa correspondente, $\Psi (-|\varepsilon|, j, m, -k, 1)$ e $\Psi (-|\varepsilon|, j, m, -k, 1)$, de um é transformado no outro, $\Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, 1)$ e $\Psi (+|\varepsilon|, j, m, k, -1)$, respectivamente, através de (V.b.5).

V.c - ASSIMETRIA MICROSCÓPICA NA CORRENTE DE NEUTRINOS

Neste parágrafo, discutiremos a emissão de neutrinos (e anti-neutrinos) ao longo da direção determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$. Para tal, consideramos a corrente de Fourier (V.a.6), a saber,

$$J_F^{(A)} = (+|\varepsilon|, 0, [2(j+1/2)(\sqrt{2}|\varepsilon|^{-j-1/2})]^{1/2}, -k + \sqrt{2}L/2),$$

e, em particular, a componente ao longo da direção da vorticidade $\vec{\Omega}$, $J_F^{(3)} = \sqrt{2}(\vec{J} \cdot \vec{\Omega})/w$, ou seja,

$$J_F^{(3)} = -k + \sqrt{2}L/2 \quad ;$$

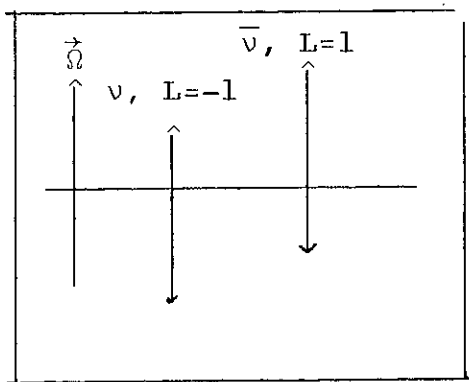
a relação entre $|k|$ e $\sqrt{2}L/2$ determina se a corrente $J_F^{(3)}$ é paralela ou anti-paralela a $\vec{\Omega}$. Vamos analisar separadamente os casos de

neutrinos e anti-neutrinos.

Para neutrinos, $L=-1$ e

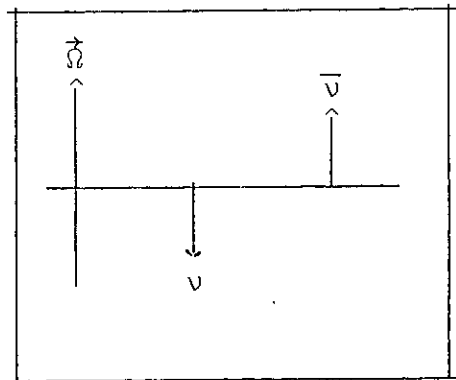
$$J_F^{(3)} = -k - \sqrt{2}/2 .$$

Quando $|k| > \sqrt{2}/2$, se $0 \leq k < \infty$, a corrente será anti-paralela à $\vec{\Omega}$. Como se pode ver de $J_F^{(3)}$ acima, a componente anti-paralela será sempre maior que a componente paralela. Quando $|k| < \sqrt{2}/2$, para qualquer valor de k , só haverá componente de $J_F^{(3)}$ anti-paralela à $\vec{\Omega}$. Para os anti-neutrinos, $L=1$ e $J_F^{(3)} = -k + \sqrt{2}/2$. Por uma análise semelhante, concluímos que para $|k| > \sqrt{2}/2$, a componente na direção paralela à $\vec{\Omega}$ é sempre maior que na direção anti-paralela; para $|k| < \sqrt{2}/2$, só haverá componente de $J_F^{(3)}$ paralela à $\vec{\Omega}$. Estes resultados podem ser resumidos nos diagramas seguintes:



$$k > \sqrt{2}/2$$

Diagrama 1a



$$k < \sqrt{2}/2$$

Diagrama 1b

É importante observar que os diagramas acima são invariantes sob a operação CP (V.b.5), no sentido de que as amplitudes de neutrinos relativas às correntes $J_F(\nu)$ ali representadas são transformadas por (V.b.5) nas amplitudes de anti-neutrinos relativas às $J_F(\bar{\nu})$, e vice-versa. De fato, se chamarmos as amplitudes relativas às componentes maiores das correntes de neutrinos e anti-neutrinos no diagrama 1a, respectivamente de $\Psi_{(+|\epsilon|)}^I(\nu)$ e $\Psi_{(+|\epsilon|)}^{II}(\bar{\nu})$, e de

$\Psi_{(+|\epsilon|)}^{\text{III}}(\nu)$ e $\Psi_{(+|\epsilon|)}^{\text{IV}}(\bar{\nu})$ as amplitudes relativas às componentes menores das correntes de neutrino e anti-neutrino, respectivamente, isto significa que $\Psi^{\text{I}}(\nu)$ e $\Psi^{\text{II}}(\bar{\nu})$ são relacionadas por CP e $\Psi^{\text{III}}(\nu)$ e $\Psi^{\text{IV}}(\bar{\nu})$ também. Assim, a assimetria na emissão de neutrinos é invariante sob CP.

A componente da corrente local (I.d.5) na direção de $\vec{\Omega}$ é

$$J^3 = \bar{\Psi}(x) \gamma^3 \Psi(x) .$$

Para as amplitudes (III.g.16a) e com as funções $\Psi(x)$ normalizadas por (V.a.4), por um cálculo direto temos:

$$J^3(x) = \frac{Lw^4}{4(2\pi)^3 N_\alpha^2} \left[(|\epsilon| + \pi^3 L)^2 L \alpha^2(x) - (2m+1)^2 \beta^2(x) \right] ,$$

onde

$$\alpha(x) = (x^2-1)^{(m-1/2)/2} (x+1)^{(-\sqrt{2}|\epsilon|-1)/2} F(a,b;m+3/2;\frac{1-x}{2})$$

e

$$\beta(x) = (x^2-1)^{(m-1/2)/2} (x+1)^{(-\sqrt{2}|\epsilon|+1)/2} F(a,b;m+1/2;\frac{1-x}{2}) , .$$

onde $a = m - \sqrt{2}|\epsilon| + j + 1$, $b = m - j$, $1/2 \leq m \leq j$, $j \geq 1/2$.

Devido à homogeneidade do espaço-tempo de Gödel $H^3 \times R$, os resultados obtidos em qualquer ponto $x=x_0$ são típicos; vamos então calcular a corrente local $J^3(x)$ em $x=1$. Usando a propriedade das funções hipergeométricas,

$$\lim_{c \rightarrow 0} c F(a,b;c;y) = ab y F(a+1,b+1;2;y) ,$$

mostra-se que em $x=1$, $\beta(x)$ só é diferente de zero para o modo $m=1/2$ e $\alpha(x)$, para $m=-1/2$. Portanto, para um dado $j \geq 1/2$, somente contribuem os modos $m=\pm 1/2$, e teremos

$$J^3_{(m=1/2)}(x=1) = -16L 2^{-\sqrt{2}|\epsilon|} \frac{w^4}{8(2\pi)^3 N_\alpha^2(1/2)}$$

e

$$J_{(m=-1/2)}^3(x=1) = (|\varepsilon| + \pi^3 L)^2 L 2^{-\sqrt{2}} |\varepsilon| \frac{w^4}{8(2\pi)^3 N_\alpha^2 (-1/2)}$$

Para um dado modo $j \geq 1/2$, a corrente na direção da vorticidade $\vec{\Omega}$ em $x=1$ será:

$$J^3(x=1) = \sum_m J_{(m)}^3 = \frac{Lw^4}{4(2\pi)^3} (\sqrt{2} |\varepsilon| - 2j - 1) (-k + \sqrt{2}L/2) .$$

De $\sqrt{2} |\varepsilon| = 2(2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (\pi^3)^2}$, vê-se que $\sqrt{2} |\varepsilon|$ é sempre maior que $2j+1$, e o sinal de J^3 depende da relação entre $|k|$ e $\sqrt{2}L/2$. Análise semelhante à feita para $J_F^{(3)}$ é válida aqui e obtêm-se diagramas análogos. Podemos portanto concluir que as correntes de neutrinos e anti-neutrinos apresentam uma assimetria microscópica ao longo da direção determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$.

V.d - ASSIMETRIA MICROSCÓPICA ENTRE NEUTRINOS E ANTI-NEUTRINOS

A análise da densidade de número de estados de neutrinos e anti-neutrinos, considerando a invariância ou violação de CP na criação de pares no universo presentemente estudado, nos levará a algumas conclusões interessantes.

No parágrafo V.a, interpretamos como amplitudes de neutrino as funções $\Psi_{(+|\varepsilon|, j, m, k, L)}$ e como amplitudes de anti-neutrino as funções $\Psi_{(+|\varepsilon|, j, m, -k, -L)}$; dizemos que estas funções são relacionadas por CP: a amplitude de energia negativa de cada uma delas é transformada pela operação (V.b.5) na amplitude de energia positiva da outra. Ou seja,

$$\Psi_{(+|\varepsilon|, j, m, k, L)} \xleftrightarrow{CP} \Psi_{(+|\varepsilon|, j, m, -k, -L)}$$

pois

$$i \Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, -L) = \gamma^0 \Psi^* (-|\varepsilon|, j, m, k, L) \cdot$$

Para $L=-1$,

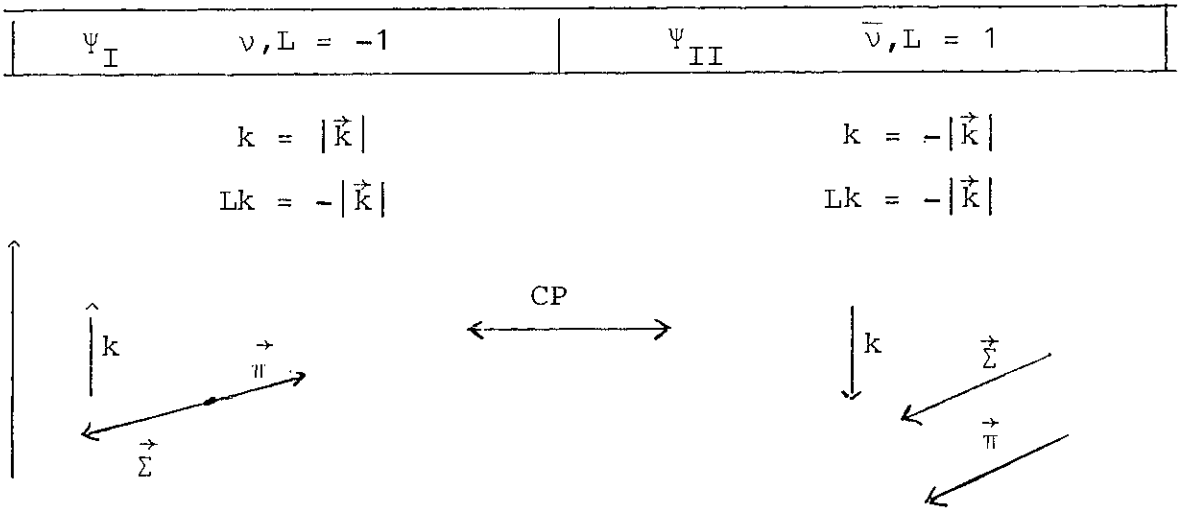
$$i \Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, 1) = \gamma^0 \Psi^* (-|\varepsilon|, j, m, k, -1) \cdot$$

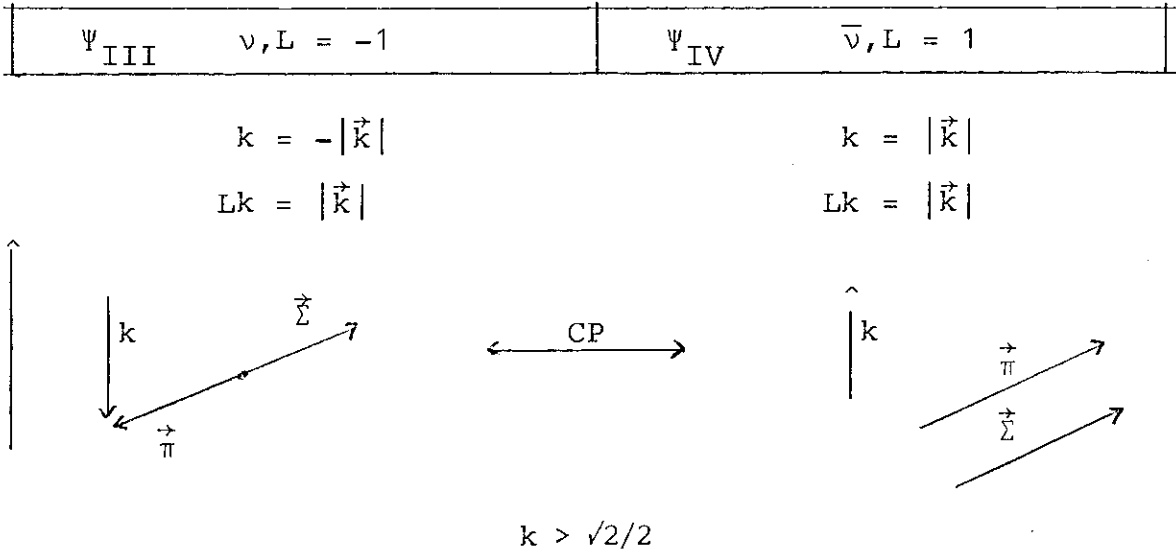
onde $\Psi (-|\varepsilon|, j, m, k, -1)$ é a amplitude (de energia negativa) de neutrino e $\Psi (+|\varepsilon|, j, m, -k, 1)$, a amplitude de anti-neutrino. Assim,

$$\Psi^{\nu} (+|\varepsilon|, j, m, k, -1) \xleftrightarrow{\text{CP}} \Psi^{\bar{\nu}} (+|\varepsilon|, j, m, -k, 1) \cdot$$

Considerando a simetria (V.b.5), representada acima e lembrando que $\pi^3 = k - \sqrt{2}L/2$, de acordo com o sinal de LK , vamos classificar as amplitudes de neutrino e anti-neutrino, dadas por (V.b.7 e 8), e representá-las pelo diagrama seguinte:

Diagrama 2





Portanto, com relação à criação de pares neutrino-anti-neutrino no universo de Gödel, duas situações são possíveis:

- a) criação de pares cujas amplitudes são relacionadas por uma o peração CP, a saber $(\Psi^I(\nu), \Psi^{II}(\bar{\nu}))$ ou $(\Psi^{III}(\nu), \Psi^{IV}(\bar{\nu}))$. Como já observamos no parágrafo anterior, em ambos os casos, o diagrama de correntes correspondente é invariante sob a ope-
ração CP definida por (V.b.5); verificaremos adiante que a densidade de número de estados de neutrinos é igual à densi-
dade de número de estados de anti-neutrinos.
- b) criação de pares por interações que violem a invariância CP, ou seja, cujas amplitudes não são relacionadas por uma ope-
ração (V.b.5), a saber, $(\Psi^I(\nu), \Psi^{IV}(\bar{\nu}))$ ou $(\Psi^{II}(\nu), \Psi^{III}(\bar{\nu}))$. Em ambos os pares acima, observamos que Lk tem sinais diferen-
tes para as amplitudes de neutrino e anti-neutrino; como ve-
remos a seguir, isto corresponde a densidade de número de es-
tados diferentes para neutrinos e anti-neutrinos.

Com efeito, a densidade de número de estados (j, m, k, L) , ou densidade de número no espaço de Fourier, é, por definição⁽⁶¹⁾:

$$n(kL) = \left| \frac{dk}{d|\epsilon|} \right| \frac{1}{|\epsilon(kL)|} .$$

Da expressão

$$|\epsilon(kL)| = \sqrt{2}(2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (k-\sqrt{2}L/2)^2} ,$$

obtemos que

$$n(kL) = \left| \frac{\sqrt{(2j+1)^2 + (k-\sqrt{2}L/2)^2}}{k-\sqrt{2}L/2} \right| \frac{1}{|\epsilon(kL)|}$$

A assimetria no número de estados de neutrinos e anti-neutrinos é dada por:

$$\delta_k = \frac{n(\nu) - n(\bar{\nu})}{n(\nu) + n(\bar{\nu})} .$$

Relativamente às duas possibilidades mencionadas acima, teremos:

a) pares cujas amplitudes são relacionadas por CP, ou seja,

$(\psi^I(\nu), \psi^{II}(\bar{\nu}))$ ou $(\psi^{III}(\nu), \psi^{IV}(\bar{\nu}))$. Neste caso:

$$n(\psi^I(\nu)) = n(\psi^{II}(\bar{\nu})) = n(-|k|) = \left| \frac{\sqrt{(2j+1)^2 + (|k|+\sqrt{2}/2)^2}}{|k|+\sqrt{2}/2} \right| \frac{1}{|\epsilon(kL)|}$$

ou ainda,

$$n(\psi^{III}(\nu)) = n(\psi^{IV}(\bar{\nu})) = n(|k|) =$$

$$\left| \frac{\sqrt{(2j+1)^2 + (|k|+\sqrt{2}/2)^2}}{-|k|+\sqrt{2}/2} \right| \frac{1}{|\epsilon(kL)|}$$

Nos dois casos acima, $n(\nu) = n(\bar{\nu})$.

b) Os pares neutrino-anti-neutrino são descritos por amplitudes

não relacionadas pela operação CP dada por (V.b.5), a saber,

$(\psi^I(\nu), \psi^{IV}(\bar{\nu}))$ ou $(\psi^{II}(\nu), \psi^{III}(\bar{\nu}))$. Se estes pares forem cri

ados por uma interação invariante por CP, teremos

$$(\Psi^I(\nu), \Psi^{IV}(\bar{\nu})) \xleftrightarrow{CP} (\Psi^{II}(\nu), \Psi^{III}(\bar{\nu}))$$

e ambos os pares serão igualmente prováveis. Neste caso, $n(\nu) = n(\bar{\nu})$ e $\delta_k = 0$, não havendo assimetria no número de estados de neutrino e de anti-neutrino. Se, no entanto, um dos dois pares, $(\Psi^I(\nu), \Psi^{IV}(\bar{\nu}))$ ou $(\Psi^{II}(\nu), \Psi^{III}(\bar{\nu}))$, for criado por uma interação que viole a invariância sob CP, o outro par será proibido e aparecerá uma assimetria entre neutrinos e anti-neutrinos, no sentido de que o número de estados de neutrino será diferente do número de estados de anti-neutrino. Com efeito, se for criado o par (I,IV), por exemplo, o par (II,III) será proibido e, neste caso,

$$\delta_k = \frac{n(\Psi^I(\nu)) - n(\Psi^{IV}(\bar{\nu}))}{n(\Psi^I(\nu)) + n(\Psi^{IV}(\bar{\nu}))} = \frac{n(|k|) - n(-|k|)}{n(|k|) + n(-|k|)} =$$

$$\frac{\left| \frac{\sqrt{(2j+1) + (|k| + \sqrt{2}/2)}}{\epsilon(|k|)(|k| + \sqrt{2}/2)} \right| - \left| \frac{\sqrt{(2j+1) + (|k| - \sqrt{2}/2)}}{\epsilon(-|k|)(|k| - \sqrt{2}/2)} \right|}{\left| \frac{\sqrt{(2j+1) + (|k| + \sqrt{2}/2)}}{\epsilon(|k|)(|k| + \sqrt{2}/2)} \right| + \left| \frac{\sqrt{(2j+1) + (|k| - \sqrt{2}/2)}}{\epsilon(-|k|)(|k| - \sqrt{2}/2)} \right|} .$$

Note-se que δ_k só é significativamente diferente de zero para $|k|$ da ordem de $\sqrt{2}/2$.

A violação da invariância sob a operação CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$ é conhecida desde 1964⁽⁶²⁾, o que nos permite considerar a possibilidade de que um par neutrino-anti-neutrino seja criado por uma interação que viole CP. Conforme apontado na literatura⁽⁶³⁾, uma assimetria entre o número de estados de neutrinos e anti-neutrinos poderia fornecer informação sobre o significativo valor da atual assimetria bariônica em nosso universo.

REFERÊNCIAS

61. A densidade do número de estados no espaço de momentum no intervalo de energia $(\epsilon, +d\epsilon)$ e vetor de onda $(k, k+dk)$ é, por definição,

$$\rho(\epsilon) = 1/N^2 \left| \frac{dk}{d\epsilon} \right|,$$

onde $\int d^4x \Psi_{(\epsilon, k)}^+ \Psi_{(\epsilon, k)} = N^2$. Ver, por exemplo, A.Messiah, "Quantum Mechanics", North-Holland Publishing Company, 1966.

62. J.H.Christensen, J.W.Cronin, V.C.Fitch e R.Tulay, Phys.Rev.Lett., 13(1964) 138.
63. E.W.Kolb e M.S.Turner, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci., 33(1983)645; R.W.Brown e F.W. Stecker, Phys.Rev.D, 26(1982)373.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, examinamos o acoplamento de neutrinos (e anti-neutrinos) à vorticidade da matéria, no contexto da teoria da relatividade geral de Einstein. Por ser a mais simples das soluções das equações de Einstein em que a matéria apresenta vorticidade não nula, descrevemos nosso universo em rotação pela solução de Gödel. Neutrinos são descritos por campos espinoriais, soluções da equação de Dirac generalizada para o espaço curvo e optamos por utilizar espinores a quatro componentes de Dirac, $\Psi(x)$, do ponto de vista do formalismo de tetradas. A inexistência de neutrinos dextrógiros (e de anti-neutrinos levógiros) é uma propriedade destas partículas que não é alterada pela presença de um campo gravitacional e os quadri-espinores $\Psi(x)$ são auto-estados do operador helicidade.

O universo de Gödel é caracterizado como o grupo de Lie $H^3 \times R$, onde H^3 é um tri-hiperbolóide imerso em E^4 e R a reta real, sobre o qual definimos uma métrica lorentziana, solução das equações de Einstein com constante cosmológica e poeira como fonte de curvatura. Determinamos, por construção, o grupo de isometrias G_5 associado à métrica de Gödel.

Sobre a variedade de Gödel $H^3 \times R$, definimos independentemente em cada ponto, um campo de neutrinos descrito por quadri-espinores de Dirac. Empregando o formalismo de tetradas e o cálculo com formas diferenciais, encontramos a forma explícita da equação de Dirac na métrica de Gödel. Impomos sobre nossos campos espinoriais $\Psi(x)$ as simetrias geradas pelos vetores de Killing da métrica de Gödel, $\partial/\partial t$, $\partial/\partial \phi$ e $\partial/\partial z$, globalmente definidos sobre $H^3 \times R$, simplificando a resolução da equação de Dirac por separação de variáveis.

veis e obtendo assim uma base de soluções nos modos globais invariantes hiperbólicos, ou seja, na forma, $\Psi(x) = \Psi(x)e^{-i\epsilon t}e^{-im\phi}e^{-ikz}$. Estas funções descrevem neutrinos em auto-estados de energia e momentum angular e momentum linear na direção determinada pela vorticidade da matéria com, respectivamente, auto-valores ϵ , m e k . A hamiltoniana do sistema, $H=L\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$, onde $\vec{\Sigma}$ é a matriz de spin e \vec{p} o operador de momentum linear local, definida com relação ao vetor de Killing $\partial/\partial t$, determina a dinâmica local dos neutrinos. A projeção do spin $\vec{\Sigma}$ na direção do momentum é, em consequência, uma constante de movimento e $\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{\epsilon}$ é o operador helicidade, de auto-valor constante L . Nos modos invariantes de energia acima, o operador helicidade é proporcional a γ^5 e os quadri-espinores de Dirac $\Psi(x)$ satisfazem $\gamma^5\Psi=L\Psi$; podemos assim empregar espinores a duas componentes $\phi(x)$, onde $\Psi(x)=\begin{pmatrix} \phi(x) \\ L\phi(x) \end{pmatrix}$. Verificamos que o spin do neutrino precessiona localmente em torno da direção da vorticidade. Denotamos por $\phi_{(\epsilon,m,k,L)}(x)$, ou de forma abreviada, $\phi_{(\epsilon,m)}$, as soluções da equação de Dirac nos modos globais invariantes hiperbólicos obtidas, que têm a forma:

$$\phi_{(\epsilon,m,k,L)}(x) = \begin{pmatrix} (2m+1)(x^2-1)^{\frac{m-1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}\epsilon+1}{2}} F(a,b;m+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}) \\ iL(\epsilon+kL-\frac{\sqrt{2}}{2})(x^2-1)^{\frac{m+1/2}{2}} (x+1)^{\frac{\sqrt{2}\epsilon-1}{2}} F(a,b;m+\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}) \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t}e^{-im\phi}e^{-ikz}$$

onde $a=m+\sqrt{2}\epsilon/2 + 1/2 + n/2$, $b=m+\sqrt{2}\epsilon/2 + 1/2 - n/2$. Sobre o espaço dessas soluções, construímos operadores de momentum angular J^+ , J^- e J^3 , onde J^+ e J^- são definidos de maneira a gerar, através de sua ação sobre as soluções $\Psi_{(\epsilon,m)}$, uma seqüência de soluções num intervalo de valores de m , e $J^3\Psi_{(\epsilon,m)} = (i\partial/\partial\phi + i\sqrt{2}/2 \partial/\partial t)\Psi_{(\epsilon,m)} = (m+\sqrt{2}\epsilon/2)\Psi_{(\epsilon,m)}$. Os neutrinos em interação com a vorticidade do universo de Gödel, descritos pelas funções $\Psi_{(\epsilon,j)}$ acima, devem satis

fazer a condições de contorno e regularidade consistentes com seu caráter de campo teste que não influe sobre a curvatura do espaço tempo: impusemos assim que as funções $\Psi_{(\epsilon, j)}$ sejam regulares em $x=1$ e perturbações nulas no limite $x \rightarrow \infty$. Obtivemos assim um conjunto de soluções $\Psi_{(\pm|\epsilon|, j, m, k, L)}^{(x)}$, que constituem uma base completa para uma representação espinorial local da álgebra dos operadores de momentum angular do campo de neutrinos em Gödel, de dimensão infinita, cobrindo o intervalo $-\infty < m \leq j$, $j \geq 1/2$, união das soluções $\Psi_{(\epsilon, j)}^I$, válidas para $-1/2 \leq m \leq j$, com as soluções $\Psi_{(\epsilon, j)}^{II}$, para $-\infty < m \leq -3/2$. Este conjunto de soluções é normalizado convenientemente, constituindo assim uma base completa ortonormal de soluções, em termos das quais pode-se expandir qualquer solução para neutrinos em interação com a vorticidade do universo de Gödel. Das condições de regularidade e contorno impostas resulta que

$$|\epsilon| = \sqrt{2}(2j+1) + \sqrt{(2j+1)^2 + (k - \sqrt{2}L/2)^2} \quad ;$$

ou seja, os auto-valores de energia, momentum linear e momentum angular não são independentes entre si. O operador de momentum angular J^3 tem auto-valores $(m + \sqrt{2}\epsilon/2)$; como m e j são semi-inteiros, da expressão da energia acima, vê-se que os auto-valores de J^3 , em geral, são não inteiros. Podem ser (por exemplo, para $k = \sqrt{2}L/2$) semi-inteiros; em particular, no limite $k \rightarrow 0$, J^3 tem auto-valores 0 e 1, respectivamente para energia positiva e negativa, e os neutrinos comportam-se então como bosons ao longo da direção privilegiada determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$.

Construímos o espaço de Fourier associado às bases $\Psi_{(\pm|\epsilon|, j)}$, que vai se constituir num espaço de momentum para o campo de neutrinos. O núcleo $K(j; x)$ da transformação foi conveni-

entamente definido, como uma generalização do núcleo da transformada de Fourier usual, de modo a que a condição $[K(j;x), \gamma^0] = 0$ seja satisfeita e que $\pi_0 = \pm |\epsilon|$. π_0 é a componente zero do momentum do neutrino, definido pela equação de Dirac transformada $-i\pi_A \gamma^A F(\Psi) = 0$. O núcleo $K(j;x)$ escolhido satisfaz também a $[K, \gamma^3] = [K, \gamma^5] = 0$, de modo que os auto-valores do momentum local p_3 coincidem com a componente π_3 .

Para definir consistentemente amplitudes de neutrinos e de anti-neutrinos em interação com a vorticidade da matéria, utilizamos as duas estruturas de grupo presente na variedade de Gödel $H^3 \times R$, a saber, o grupo de Lorentz local e o grupo de isometrias G_5 . Tomamos assim as soluções relacionadas por uma operação de conjugação de carga-paridade, a saber,

$$\gamma^2 \gamma^0 (\bar{\Psi})^T (-|\epsilon|, j, m, k, L) = i \Psi (+|\epsilon|, j, m, -k, -L) \quad ,$$

e interpretamos $\Psi (|\epsilon|, j, m, k, L)$ como a amplitude de neutrinos e $\Psi (|\epsilon|, j, m, -k, -L)$, como a amplitude de anti-neutrinos correspondente. Analisando as correntes de Fourier na direção determinada pela vorticidade $\vec{\Omega}$, verificamos a existência de uma assimetria na emissão de neutrinos e anti-neutrinos, ou seja, para um dado valor do momentum linear k , a componente da corrente de Fourier de neutrinos na direção paralela ao campo de vorticidade é menor que a componente na direção anti-paralela; o contrário ocorre para anti-neutrinos. Este resultado é também obtido calculando-se as correntes locais no ponto $x=1$; devido à homogeneidade do espaço-tempo de Gödel, tal resultado é típico. Desta forma, a emissão microscópica de neutrinos é preferencialmente ao longo da direção anti-paralela à vorticidade, e de anti-neutrinos, da direção paralela. Estes re-

sultados são invariantes por uma transformação CP, como pode ser visto no diagrama 1. Leavy e Unruh⁽⁶⁵⁾ e independentemente Vilenkin⁽⁶⁶⁾ encontraram resultados análogos para a emissão de neutrinos por um buraco-negro de Kerr: esses autores verificaram que a perda de momentum angular no processo de evaporação por um buraco-negro de Kerr em rotação resulta na emissão preferencial de partículas com helicidade positiva na direção paralela ao momentum angular do buraco-negro e de partículas com helicidade negativa, na direção contrária. A violação da paridade dos neutrinos e anti-neutrinos resulta assim numa assimetria na emissão destas partículas na direção do momentum angular do buraco-negro, um efeito análogo ao que ocorre quando neutrinos e anti-neutrinos interagem com a matéria em rotação no universo de Gödel. Um outro tipo de assimetria pode ocorrer se pares de neutrinos e anti-neutrinos acoplados à vorticidade forem produzidos por uma interação que viole CP. Neste caso, para valores do momentum linear k da ordem de $\sqrt{2}L/2$, uma assimetria microscópica entre neutrinos e anti-neutrinos aparece também na densidade de número de estados.

A solução de Gödel é tipo D na classificação de Petrov e é caracterizada assim pela existência de duas direções nulas principais distintas κ_A e χ_A , com $\kappa_A \kappa^A = \chi_A \chi^A = 0$. Calculamos estes vetores no sistema de coordenadas (t, r, ϕ, z) e obtivemos $\kappa_A = (1, 0, 0, 1)$ e $\chi_A = (1, 0, 0, -1)$. Denominamos neutrinos radiativos os neutrinos com quadri-corrente ao longo destas direções. Verifica-se que estes neutrinos (e anti-neutrinos) correspondem a soluções da equação de Dirac (III.a.8) da forma $\Psi = \begin{pmatrix} \pm \phi \\ \pm \sigma^3 \phi \end{pmatrix}$, para as quais a corrente local tem componentes $j^A = (2\phi^+ \phi, 0, 0, \pm 2\phi^+ \phi)$ e, obviamente, $j_A j^A = 0$. Neutrinos e anti-neutrinos radiativos propagam-se ao longo das dire -

ções κ_A e χ_A . Mostra-se também que estas soluções correspondem ao modo $j=-1/2$, que foi excluído da base completa de soluções por permitir a possibilidade de auto-valores negativos para o momentum angular total $(J)^2$.

Uma continuação natural do presente trabalho seria a quantização do campo de neutrinos em interação com a vorticidade do universo de Gödel. Podemos expandir um operador do campo de neutrinos qualquer numa base completa de soluções $\{\Psi_k, \Psi_k^*\}$, onde k designa números quânticos convenientes (em nosso caso, ϵ, j, m, k, L). Ψ_k (Ψ_k^*) são as amplitudes de probabilidade de se encontrar um neutrino (anti-neutrino) no estado k ; a quantização considera os coeficientes da expansão como operadores de criação a_k^+ e destruição a_k . Desta forma, poderíamos calcular processos como o decaimento de mesons num universo com rotação, onde, devido à presença do campo de vorticidade, deverão aparecer efeitos notáveis de assimetria na distribuição das partículas produzidas pelo decaimento.

REFERÊNCIAS

65. D.A. Leahy e W.G. Unruh, Phys.Rev.D, 19(1979)3509.
66. A.Vilenkin, Phys.Rev.Lett., 41(1978)1575.

APÊNDICE I

Operadores \vec{J} : hermiticidade e anti-hermiticidade

A hermeticidade do operador J^3 é imediata, pois,

$$\int \sqrt{-g} d^4x \Psi_{(m)} (J^3 \Psi_{(m')})^+ = \int \sqrt{-g} d^4x \Psi_{(m)} [-i(\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial t}) \Psi_{(m')}]^+ =$$

$$\int \sqrt{-g} d^4x \Psi_{(m)} [-m' - \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon'] \Psi_{(m')}^+ = \int \sqrt{-g} d^4x (J^3 \Psi_{(m')}) \Psi_{(m)}^+ d^4x =$$

$$(-m' - \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon') \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(\epsilon - \epsilon') \delta(k - k') = m + \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon.$$

onde, para simplificar a notação, designamos $\Psi(x)$ por $\Psi_{(\epsilon, m, j, k, L)}$.

Para provar a anti-hermiticidade de J^1 e J^2 , temos que mostrar que

$$\int \sqrt{-g} d^4x (J^+ \phi_{(m)})^+ \phi_{(m'+1)} = - \int \sqrt{-g} d^4x \phi_{(m)}^+ J^- \phi_{(m'+1)}. \quad (A.I.1)$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade acima, temos:

$$\int \sqrt{-g} d^4x (J^+ \phi_{(m)})^+ \phi_{(m'+1)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_1^{\infty} dx \{ a^* (L^+ \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}}) [\alpha(m) e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi}] .$$

$$a' \alpha(m'+1) e^{-i\epsilon' t} e^{-i(m'+1)\phi} e^{-ik'z} + b^* (L^+ \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}})^* [\beta(m) e^{i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz}] .$$

$$. b' \beta(m'+1) e^{-i\epsilon' t} e^{-i(m'+1)\phi} e^{-ik'z} ,$$

onde $a = 2m+1$ e $b = iL(\epsilon + kL - \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ L \phi \end{pmatrix}$ e $\alpha(m)$ e $\beta(m)$ designam

$\alpha(\epsilon, j, m, k, L)$ e $\beta(\epsilon, j, m, k, L)$, as componentes do espinor $\phi(x)$ em

(III.g.16 e 17).

$$\text{Mas, } (L^+ + \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}}) \alpha(m) e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} =$$

$$(x^2-1)e^{i\phi} e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \left[\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x^2-1)} \right] (m) =$$

$$\lambda^+ \alpha(m+1) e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{i(m+1)\phi} \quad (\text{A.I.2})$$

e

$$(L^+ - \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}}) \alpha(m) e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} =$$

$$(x^2-1)^{1/2} e^{i\phi} e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \left[\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x^2-1)} \right] \beta(m) =$$

$$\lambda + \beta(m+1) e^{i\epsilon t} e^{ikz} e^{i(m+1)\phi}. \quad (\text{A.I.3})$$

Então,

$$\int \sqrt{-g} d^4x (J^+ \phi_{(m)})^+ \phi_{(m'+1)} =$$

$$(2\pi)^3 \int_1^\infty (x^2-1)^{1/2} \{ |a|^2 \left[\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x^2-1)} \right] \alpha(m) \alpha(m+1) +$$

$$|b|^2 \left[\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x^2-1)} \right] \alpha(m) \beta(m'+1) \} dx$$

Mas, de (A.I.2) e (A.I.3), vê-se que

$$(x^2-1)^{1/2} \left[\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x^2-1)} \right] \begin{pmatrix} \alpha(m) \\ \beta(m) \end{pmatrix} = J^+ \begin{pmatrix} \alpha(m) \\ \beta(m) \end{pmatrix} = \lambda^+ \begin{pmatrix} \alpha(m+1) \\ \beta(m+1) \end{pmatrix}$$

Para provar a relação (A.I.1), basta mostrar que

$$\int_1^{\infty} dx (J^+ f(m)) f(m+1) = - \int_1^{\infty} f(m) (J^- f(m+1)) dx,$$

onde $f(m)$ representa $\alpha(m)$ ou $\beta(m)$.

Vamos desenvolver em detalhe a demonstração para $\alpha(m)$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} dx (L^+ + \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)}) \alpha(m) \alpha(m+1) = \\ & \int_1^{\infty} dx \{ (x^2-1)^{1/2} [\frac{d}{dx} - \frac{mx}{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x^2-1)}] \alpha(m) \} \alpha(m) = \\ & (x^2-1)^{1/2} \alpha(m) \alpha(m+1) \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} dx \alpha(m) [\frac{d}{dx} + \frac{mx}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x^2-1)}] (x^2-1)^{1/2} \alpha(m) \end{aligned}$$

A condição (III.g.2) garante que $(x^2-1)^{1/2} \alpha(m) \alpha(m+1) \Big|_1^{\infty} = 0$. En

tão,

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} dx (L^+ + \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}}) \alpha(m) \alpha(m+1) = \\ & - \int dx \alpha(m) (x^2-1)^{1/2} [\frac{d}{dx} + \frac{mx}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x^2-1)}] \alpha(m+1). \end{aligned} \quad (A.I.4)$$

Mas, aplicando $(L^- - \frac{e^{i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}})$ a $\alpha(m)$, vê-se que

$$(x^2-1)^{1/2} [\frac{d}{dx} + \frac{mx}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x^2-1)}] \alpha(m) =$$

$$(L^- - \frac{e^{i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}}) \alpha(m) = \lambda^- \alpha(m-1).$$

Finalmente, de (A.I.4), podemos escrever que

$$\int_1^{\infty} dx \left(L^+ + \frac{e^{-i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}} \right) \alpha^{(m)} \alpha^{(m+1)} = - \int_1^{\infty} dx \alpha^{(m)} \left(L^- - \frac{e^{i\phi}}{2(x^2-1)^{1/2}} \right) \alpha^{(m+1)}.$$

(A.I.5)

e a igualdade (A.I.1) está provada.

Vamos desenvolver

$$\int \sqrt{-g} d^4x (J^1 \phi_{(m)}^+)^+ \phi_{(m'+1)};$$

lembrando a definição (III.f.12a), teremos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} d^4x (J^1 \phi_{(m)}^+)^+ \phi_{(m'+1)} &= 1/2 \int \sqrt{-g} d^4x (J^+ \phi_{(m)}^+)^+ \phi_{(m'+1)} + \\ &1/2 \int \sqrt{-g} d^4x (J^- \phi_{(m)}^+)^+ \phi_{(m'+1)} = -1/2 \int \sqrt{-g} d^4x \phi_{(m)}^+ (J^- \phi_{(m'+1)}^-)^+ + \\ &- 1/2 \int \sqrt{-g} d^4x \phi_{(m)}^+ (J^+ \phi_{(m'+1)}^-)^+ = - \int \sqrt{-g} d^4x \phi_{(m)}^+ (J^1 \phi_{(m'+1)}^-)^+, \end{aligned}$$

explicitando a anti-hermiticidade de J^1 . O mesmo pode ser demonstrado para J^2 .