

RUBENS LUIS PINTO GURGEL DO AMARAL

ESPALHAMENTO QUÂNTICO POR POTENCIAL
EM ESPAÇO DE DIMENSÃO SUPERIOR

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1987

A Newton de Almeida Braga e

Fátima

AGRADECIMENTOS

A Juan Jose Giambiagi, pela sugestão do tema e pela orientação fornecida.

A Maria de Fátima Alves da Silva, pela convivência ao longo de todo tempo em que me dediquei ao mestrado.

A Myrian e Aroldo, pela boa vontade que eles sempre mostraram a todos os estudantes do CBPF.

A todos os colegas do CBPF, pois seu estímulo foi bastante importante no sentido de manter o ânimo para superar as dificuldades de fazer ciência no terceiro mundo, entre elas sobreviver com os níveis usuais das bolsas de estudo.

Em especial aos colegas da Universidade Federal Fluminense, pelo exemplo de camaradagem ao gentilmente permitirem o meu acesso aos microcomputadores sem os quais não teria sido possível a edição desta tese.

A Luis Reis, pela prestatividade com que me ajudou em problemas relacionados ao uso do computador.

ÍNDICE

Dedicatória.....	i
Agradecimentos.....	ii
Índice.....	iii
Lista de Figuras.....	v
Resumo.....	vi
Introdução.....	1
Capítulo I- Teoria do Espalhamento Quântico por Potencial	
1.1-Introdução: Visão Dependente e In- dependente do Tempo.....	6
1.2- Teoria do Espalhamento Independente do tempo.....	8
1.3-Equações Integrais Para $\Psi^+(k,r)$ e $\Psi^-(k,r)$	12
1.4-Análise de Ondas Parciais.....	18
1.5-Seção de Choque.....	24
1.6-Solução Regular e Irregular e Funções de Jost.....	27
1.7-Estados Ligados e Matriz S.....	34
1.8-Funções de Jost Para Momentos Angulares Superiores.....	35
1.9-Relações de Dispersão.....	40
Capítulo II-Funções de Jost em Dimensões Superiores	
2.1-Introdução.....	45
2.2-Sistema de Coordenadas Hiperesféricas....	48

2.3-Equação Integral Para a Função de Onda Espalhada.....	53
2.4-Análise de Ondas Parciais.....	56
2.5-Função de Onda Regular, Irregular e Função de Jost.....	60
2.6-Relação Entre Momento Angular e Dimensão.....	70
2.7-Funções de Jost Para Dimensão Superior e Momento Angular Superior.....	74
Capítulo III-Exemplos de Potenciais Analiticamente Solúveis	
3.1-Introdução.....	82
3.2-Poço esférico de Potencial.....	83
3.3-Potenciais de Bargmann.....	87
3.4-Funções de Jost para o Oscilador Harmônico.....	95
3.5-Átomo de Hidrogênio.....	102
Conclusão.....	108
Referências.....	109

LISTA DE FIGURAS

	página
Figura 1, (seção 1.3).....	16
Figura 2, (seção 1.9).....	42

RESUMO

Neste trabalho abordamos a questão do espalhamento quântico por potencial em dimensão superior através da equação de Schrodinger. Definimos as condições de contorno específicas que deve satisfazer a função de onda para representar o espalhamento de um feixe de partículas de momento definido por um potencial central, traduzindo-o em equação integral. Procedemos á análise de ondas parciais encontrando a equação radial de Schrodinger. Analisamos o comportamento assintótico da solução desta equação com conteúdo físico verificando que em dimensão superior os deslocamentos de fase permitem também obter a seção de choque. Definimos funções de Jost através do estudo das soluções regulares e irregulares da equação radial. Verificamos que estas em dimensão superior são possíveis de obter através das funções de Jost para o mesmo potencial no espaço usual para momentos angulares equivalentes

Aplicamos estes resultados para o poço esférico de potencial, oscilador harmônico e átomo de hidrogênio. Analisamos ainda os potenciais de Bargmann, que resultam em funções de Jost (e elementos de matriz S) racionais na variável momento.

ABSTRACT

In this work we deal with the question of the quantum potential scattering in higher dimension through Schrodinger's equation. We define the specific boundary conditions which the wave function has to satisfy in order to represent the scattering of a particle beam with determined momentum by a central potential, translating them in integral equations. Hence we proceed to the partial wave expansion finding the radial schrodinger equation. We analyse the asymptotic behaviour of the solutions of this equations which have physical meaning, verifying that in higher dimension the phase shifts permit one to obtain the cross section. We define the Jost functions through the study of the regular and irregular solutions of the radial equation. We verify that these function in higher dimensions may be obtained through the Jost functions in usual space for equivalent angular momenta.

We employ these results in the spheric potential well, harmonic oscillator and coulomb potential. We still analyse the Bargmann potential, that produce Jost function (and S-matrix elements) rational in momentum variable.

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste trabalho é discutir o espalhamento não relativístico de partículas por potencial em dimensão superior. Para alcançar nossos objetivos discutiremos inicialmente o caso tridimensional, no capítulo inicial, introduzindo os conceitos que trataremos de generalizar no segundo capítulo.

No primeiro capítulo abordaremos a questão da importância do comportamento assintótico das soluções da equação de Schrodinger ao tratar-se de problemas de espalhamento. Não lidaremos com a chamada teoria de espalhamento formal, que aborda o problema no Espaço de Hilbert, estudando os vetores e operadores sobre estes. Pelo contrário nosso ponto de partida será a equação de Schrodinger. Para tanto buscaremos funções de onda que correspondam a auto-valores do Hamiltoniano (que além da parte cinética conterà um potencial central) estudando seus possíveis comportamentos assintóticos quando $r \rightarrow \infty$. Buscaremos atribuir-lhes as condições de contorno que representem o espalhamento de um fluxo de partículas de momento bem definido pelo potencial central (regime estacionário). Introduziremos o conceito das funções de Jost que permitem parametrizar o espalhamento. Sua importância se deve a que elas fornecem o deslocamento de fase que por sua vez permite obter as seções de choque. Além disto, o estudo do seu comportamento analítico permite

resolver o problema dos polos falsos da matriz S distinguindo-os dos polos que realmente permitem encontrar os estados ligados.

Tendo introduzido estes conceitos tentaremos generalizá-los para dimensões superiores. Em física nuclear ao tratar do problema de muitos corpos também se é levado a introduzir espaços de dimensões superiores. Nosso ponto de vista é distinto do comumente adotado por considerarmos desde o início o espaço com uma dimensão arbitrária sem nos importarmos com a sua origem. O ponto de partida será a equação de Schrodinger tomada em dimensão arbitrária. Este será o tema que passaremos a abordar no segundo capítulo.

Buscaremos identificar o comportamento assintótico da função de onda de modo a representar o espalhamento do feixe de partículas. Veremos que somos levados à introdução da amplitude de espalhamento que possibilita encontrar a seção de choque do mesmo modo que em dimensão três. A seguir procedemos à análise de ondas parciais separando a contribuição de cada momento angular. Discutiremos o significado do momento angular em dimensão superior sendo levados à expansão da função de onda em polinômios de Gegenbauer, ao invés de em polinômios de Legendre. Isto nos propiciará a equação radial de Schrodinger. Atacaremos esta equação, para potenciais arbitrários, analisando o papel jogado agora pelos deslocamentos de fase. Obteremos também a expansão da amplitude de espalhamento em série devido aos vários momentos angulares. Obtemos então que o conhecimento dos deslocamentos de fase é suficiente para obter as seções

de choque diferenciais.

A seguir trataremos de generalizar o conceito das funções de Jost para d dimensões. Veremos que é possível definir estas funções do momento k ($E = \hbar^2 k^2 / 2m$) de modo a continuarem a jogar o papel de relacionar analiticamente o espectro contínuo do Hamiltoniano com os estados ligados. Para o eixo real sua fase será o deslocamento de fase produzido pelo potencial e o seu módulo estará relacionado com a probabilidade de encontrar a partícula na origem.

Obteremos que para a simetria esférica (onda S) em dimensão superior as funções de Jost são as mesmas que em três dimensões, para o mesmo potencial, e momentos angulares superiores. Com este resultado damos uma nova interpretação aos polos de Regge. As trajetórias de Regge que ligam os zeros da função de Jost para valores distintos (geralmente complexos) do momento angular serão vistas por nós como trajetórias na dimensão, vista agora como variável complexa. Estas trajetórias ligam estados ligados e ressonâncias de diferentes dimensões todos com simetria esférica.

Veremos além disto que é possível encontrar a função de onda radial de um estado ligado em 3d com momento angular não nulo através do seu correspondente estado ligado em dimensão superior. Analisaremos também a questão da degenerescência vendo que a estados correspondentes obtemos diferentes degenerescências.

Por fim no último capítulo aplicaremos estes

CAPÍTULO I

TEORIA DE ESPALHAMENTO QUÂNTICO POR POTENCIAL

1.1- INTRODUÇÃO: VISÃO DEPENDENTE E INDEPENDENTE DO TEMPO

Há duas visões que permitem o tratamento adequado de processos de espalhamento no contexto da mecânica quântica⁽⁶⁾. Na primeira visão estamos interessados em descrever a evolução temporal de um sistema para o qual se pode considerar que num tempo muito remoto o Hamiltoniano (que determina toda a dinâmica do sistema) seja simples e bem conhecido. Então, é aplicada uma perturbação (o Hamiltoniano é alterado) que perdura por um tempo finito de modo a que num tempo remoto no futuro a perturbação seja novamente desprezível obtendo-se novamente o Hamiltoniano original.

É conveniente, então, construir estados quânticos que tendam assintoticamente no infinito passado a auto-estados do operador não perturbado (estes são os estados (+))⁽⁷⁾. Por outro lado, constroem-se estados cujo comportamento assintótico seja dado pela condição de no infinito futuro tenderem a auto-estados do operador não perturbado (são os chamados estados (-)). A construção destes estados geralmente se faz de modo perturbativo, considerando o Hamil-

observadas na natureza.

Neste modelo o afastamento da dependência da energia com o momento angular L do tipo $l(l+1)$, que costuma ser interpretado como uma dependência do momento de inércia com o momento angular com o momento angular é vista como uma manifestação de dimensões diferentes de 3, nas quais o movimento coletivo do núcleo tem lugar. Eles obtêm através destas idéias um modelo fenomenológico simples para descrever o movimento nuclear coletivo.

A idéia de se utilizar de modelos em dimensões diferentes de três tem sido muito utilizada também em modelos de teorias de campo em que as propriedades de renormalização são dependentes da dimensão. Além disto modelos em que as propriedades topológicas são importantes necessitam de dimensões adequadas*.

* Ao estarmos com este trabalho praticamente pronto entramos em contato com trabalhos em que as funções de Jost são definidas para dimensões superiores por método diferente do nosso, definindo como equação radial de Schrödinger em dimensão superior a mesma que em três dimensões e momento angular não nulo, chegando a resultados equivalentes aos nossos (3), (4), (5).

entre o vetor momento (\vec{p}) e posição (\vec{r}).

Este comportamento assintótico mostra que longe da origem podemos considerar a função de onda que representa o estado como a superposição de uma onda plana de momento p com uma onda esférica emergente. Esta última é vista então como a resposta do espalhamento daquela onda incidente sobre o potencial. O fato de o fator $f(\cos\theta)$ só depender do ângulo entre \vec{p} e \vec{r} apenas reflete o fato de o potencial ser simetricamente esférico. Esta função de onda descreve então o processo físico em que teremos um fluxo de partículas incidindo sobre o espalhador na origem (descrito pelo potencial $V(r)$). O processo todo se dá então de modo a que o fluxo incidente não varie com o tempo formando o que se denomina de regime estacionário.

O outro estado, denominado estado (-) independente do tempo difere do anterior apenas em que na sua condição de contorno a onda esférica será emergente ao invés de incidente. Esta função de onda não tem uma interpretação física imediata.

Estas duas visões dos processos de espalhamento, dependente e independente do tempo, apesar de bastante distintas na sua formulação são equivalentes, permitindo ambas o cálculo das grandezas mensuráveis (seções de choque, "branch ratios", tempos de vida, largura de ressonâncias etc.). A visão dependente do tempo é mais sugestiva e intuitiva mas é a teoria independente do tempo que possibilita a realização dos cálculos com maior facilidade.

1.2- TEORIA DE ESPALHAMENTO INDEPENDENTE DO TEMPO

Na seção anterior introduzimos o estado (+) independente do tempo como sendo a solução da equação de Schrodinger independente do tempo sobre a qual se impôs a condição de contorno dada pela eq. (1.1.2). Para simplificar a notação vamos introduzir um sistema de unidades em que $\hbar = 1$ ao mesmo tempo em que redefinimos o potencial ($V(r) \rightarrow V(r)/2m$) resultando então na equação:

$$\nabla^2 \psi^+(\vec{k}, \vec{r}) - (V(r) - k^2) \psi^+(\vec{k}, \vec{r}) \quad (1.2.1)$$

e

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\cos\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.2.2)$$

onde agora $E = k^2/2m$. Adiante mostraremos que realmente existem soluções deste tipo.

Os estados (-) diferem do anterior somente na condição de contorno que será:

$$\psi^-(\vec{k}, \vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (1.2.3)$$

Podemos esclarecer mais o significado destes estados "+" e "-" se verificarmos suas relações com os estados (+) e (-) introduzidos na teoria de espalhamento dependente do

tempo. Isto pode ser feito considerando-se pacotes de onda construídos com estas funções de onda centrados em torno de um determinado valor do momento, digamos k_0 .

Seja então o estado descrito por:

$$\psi^+(\vec{r}, t) = \int dk \psi^+(\vec{k}, \vec{r}, t) g(k) \quad (1.2.4)$$

Onde $g(k)$ é uma função suficientemente suave de k e centrada em k_0 . $\psi^+(\vec{k}, \vec{r}, t)$ é a função de onda introduzida anteriormente submetida à evolução temporal:

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{r}, t) \equiv \psi^+(\vec{k}, \vec{r}) e^{-i \frac{k^2 t}{2m}} \quad (1.2.5)$$

onde $k = k\vec{n}_0$ e \vec{n}_0 é fixo.

Para r muito grande o comportamento de $\psi^+(\vec{r})$ será dado por:

$$\psi^+(\vec{r}) \rightarrow \int dk \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\cos\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] e^{-\frac{ik^2 t}{2m}} g(k) \quad (1.2.6)$$

ou

$$\begin{aligned} \psi^+(r) \rightarrow & \int dk e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{k^2 t}{2m})} g(k) + \\ & + \frac{f(\cos\theta)}{r} \int dk e^{i(kr - \frac{k^2 t}{2m})} g(k) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Na expressão acima o primeiro termo representa um pacote de onda centrado em torno de \vec{k}_0 , na direção

\vec{n}_0 e com velocidade de grupo $\vec{v}_g = \vec{k}_0/m$.

O segundo termo é semelhante ao primeiro, com ondas esféricas ao invés de planas. Devido ao fato de que $r > 0$ este termo é desprezível quando $t \rightarrow -\infty$. O argumento para mostrar este comportamento é baseado na análise da variação da fase da exponencial para uma variação de k . A exponencial é da forma:

$$e^{ik(r - \frac{kt}{2m})} \quad (1.2.8)$$

Ao variarmos k a variação da exponencial será grande para aqueles valores de $(r - kt/2m)$ grandes. Como assumimos que $g(k)$ é suave, uma variação grande da fase da exponencial implicará no cancelamento da contribuição para integral nesta região de k . Portanto a contribuição maior virá da região em que $(r - kt/2m)$ for pequeno. Esta contribuição será maior ainda se $k=k_0$ onde $g(k)$ é máxima. Portanto quando $t \rightarrow -\infty$ o fator na exponencial diverge e o resultado é a anulação de toda a integral.

Vemos assim que para $t \rightarrow -\infty$ pacotes formados por superposição de estados (+) apresentam o comportamento de ondas livres. Mas é este justamente o comportamento atribuído aos estados (+) na teoria dependente do tempo.

Podemos fazer a mesma análise para o estado $\psi^-(\vec{k}, \vec{r})$. Formamos o estado:

$$\psi^-(\vec{r}, t) = \int dk g(k) \psi^-(\vec{k}, \vec{r}) e^{-i \frac{k^2 t}{2m}} \quad (1.2.9)$$

condições de contorno. É importante obter-se equações integrais para estas soluções pois podem servir cálculos aproximados ou para demonstração de propriedades satisfeitas por elas.

Tomemos inicialmente a função $\Psi^+(\vec{k}, \vec{r})$. Ela é definida através da equação (1.2.1) com o comportamento definido de modo a que longe do centro espalhador seja uma superposição de onda plana com onda esférica emergente. Podemos traduzir estas condições numa equação integral resolvendo a equação não homogênea:

$$(\nabla^2 + k^2) G^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1.3.1)$$

Tendo encontrado $G^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}')$ podemos expressar $\Psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ como:

$$\Psi^+(\vec{k}, \vec{r}) = \psi_0(\vec{k}, \vec{r}) + \int d^3r' G^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') V(r') \Psi^+(\vec{k}, \vec{r}') \quad (1.3.2)$$

obs: $r' = |\vec{r}'|$

Na expressão acima $\psi_0(\vec{k}, \vec{r})$ é solução da equação homogênea:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_0(\vec{k}, \vec{r}) = 0 \quad (1.3.3)$$

De fato, é trivial demonstrar que $\Psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ é solução da equação de Schrodinger usando as definições acima. Falta estudar as condições de contorno. Podemos conseguir a condição adequada utilizando para a solução da

Calculando a transformada de Fourier inversa teremos a seguinte expressão para a função de Green:

$$G(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{k^2 - p^2} d^3p \quad (1.3.9)$$

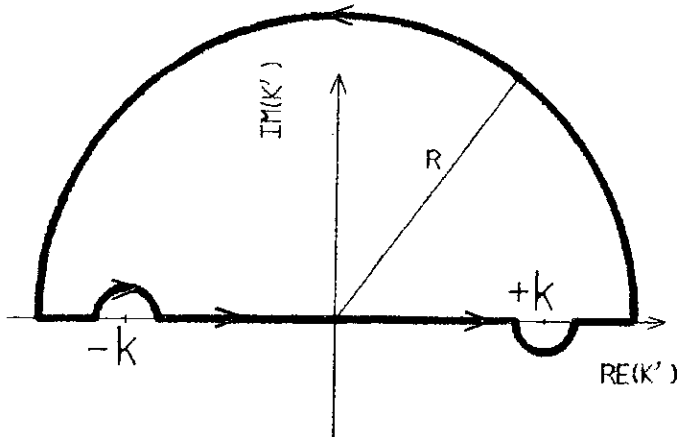
A expressão anterior não tem sentido do modo como está definida pois há um polo no integrando em $k^2 = p^2$. O modo de contornarmos estes polos é que ditará a condição de contorno da função de green. Podemos calcular a integral usando coordenadas esfericas:

$$G^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') \equiv G^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} G^+(\vec{k}, \vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{k^2 - p^2} d^3p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_{-1}^{+1} \frac{e^{ipr \cos \theta}}{k^2 - p^2} d(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{ri} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipr}}{k^2 - p^2} p dp \quad (1.3.10) \end{aligned}$$

Para realizar esta última integração é que se põe o problema de definir como contornaremos os polos em $p = +k$. Escolhendo contornar $-k$ por cima (ao longo de um pequeno semi-círculo no semi-plano superior) e $+k$ por baixo podemos calcular a integral usando o teorema de Cauchy. Fechamos o circuito por um semi-círculo centrado na origem e no semi-plano superior com raio que será tão grande quanto quisermos. No limite em que $|R| \rightarrow \infty$ a contribuição

deste semi-circulo é desprezível pois o integrando se anula (v. figura 1).



Teremos portanto:

$$\begin{aligned}
 G^+(k,r) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{ir} \int_C \frac{e^{iPr}}{(k^2-p^2)} P dp = \frac{2i}{4\pi ir} \sum \text{Res} \\
 &= \frac{-1}{4\pi r} e^{ikr} \qquad (1.3.11)
 \end{aligned}$$

Observemos ainda que tivéssemos escolhido o percurso de modo a contornar o primeiro polo por baixo e o segundo por cima teríamos obtido uma nova função de Green:

$$G^-(k,r) = \frac{-1}{4\pi r} e^{-ikr} \qquad (1.3.12)$$

A primeira função de Green é então adequada para a função $\psi^+(\vec{R}, \vec{r})$, que satisfará a equação integral:

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{+ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') \psi^+(\vec{k}, \vec{r}') \quad (1.3.13)$$

De modo semelhante teremos a equação integral para a segunda função:

$$\psi^-(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') \psi^-(\vec{k}, \vec{r}') \quad (1.3.14)$$

Podemos nos assegurar de que estas soluções apresentam o comportamento assintótico adequado. Usando que quando r tende ao infinito teremos:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \rightarrow r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \quad (1.3.15)$$

$$e^{+ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow e^{ikr} \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right] \quad (1.3.16)$$

e

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right) \quad (1.3.17)$$

assim então vale a aproximação:

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{r}) \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{-1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} V(r') \psi^+(\vec{k}, \vec{r}') \right] \quad (1.3.18)$$

que é o comportamento que esperávamos obter, representando uma onda plana incidente superposta a uma onda esférica

emergente. Com a expressão acima obtemos também uma útil representação para a amplitude de espalhamento:

$$f(\cos\theta) = \frac{-1}{4\pi} \int e^{ik \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} V(r') \psi^+(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' \quad (1.3.19)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{k} .

Notemos ainda que as funções de Green acima introduzidas não dependem da direção de \vec{k} e portanto é coerente adotar a convenção:

$$G^+(k, \vec{r}) \equiv G^+(\vec{k}, \vec{r}) \quad (1.3.20)$$

sempre que $|\vec{k}| = k$.

1.4- ANÁLISE DE ONDAS PARCIAIS

É muitas vezes conveniente expandir a função de onda espalhada $\psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ em auto-funções do momento angular. A razão é que é bem mais fácil tratar com uma função que dependa somente de uma variável (r) do que com uma de três variáveis (x, y e z). Além disso o momento angular é uma grandeza conservada num processo de espalhamento por potencial central. As seções de choque também serão expandidas de modo a separar a contribuição de cada momento angular. Num processo real, obviamente, o que será observado é o resultado da contribuição de todos os momen-

tos angulares, para seção de choque ou para a amplitude de espalhamento. Teríamos então de lidar com a soma de infinitas contribuições. Na verdade porém se estamos lidando com baixas energias somente os momentos angulares inferiores é que contribuirão significativamente para amplitude de espalhamento.

Queremos expressar a função de onda como:

$$\psi^+(k, \vec{r}) = \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \psi_{\ell}^+(k, r) \quad (1.4.1)$$

Sabemos que cada componente daquele somatório é auto-função do momento angular total de auto valor $\hbar^2 \ell(\ell+1)$.

Será importante sabermos do comportamento assintótico de $\psi_{\ell}^+(k, r)$, que pode ser obtido do comportamento de $\psi^+(k, \vec{r})$ dado pela eq. (1.2.2).

Inicialmente precisaremos desenvolver a onda plana em polinômios de Legendre:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr\xi} = \sum_{\ell} u_{\ell}(k, r) P_{\ell}(\xi) \quad (1.4.2)$$

Podemos determinar $u_{\ell}(k, r)$, como é bem conhecido usando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre⁽⁸⁾:

$$\int_{-1}^{+1} d\xi P_{\ell}(\xi) P_{\ell'}(\xi) = \frac{2\delta_{\ell', \ell}}{2\ell+1} \quad (1.4.3)$$

Assim:

$$\int_{-1}^{+1} d\xi P_{\ell'}(\xi) e^{ikr\xi} = \sum_{\ell} \int_{-1}^{+1} d\xi P_{\ell'}(\xi) P_{\ell}(\xi) u_{\ell}(k, r)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\ell+1} u_\ell(k,r) &= \int_{-1}^{+1} d\xi P_\ell(\xi) e^{ikr\xi} = \\ &= \frac{e^{ikr}}{ikr} P_\ell(1) - \frac{e^{-ikr}}{ikr} P_\ell(-1) - \int_{-1}^{+1} \frac{e^{ikr\xi}}{ikr} \frac{dP_\ell(\xi)}{d\xi} d\xi \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Integrando por parte o último termo obteremos termos proporcionais a $1/r^2$. Fazendo repetidas integrações obteremos uma expansão em séries decrescentes de r . O comportamento assintótico será dominado então por:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\ell+1} u_\ell(k,r) &\longrightarrow \frac{e^{ikr}}{ikr} P_\ell(1) - \frac{e^{-ikr}}{ikr} P_\ell(-1) \\ &= \frac{2i^\ell}{kr} \text{sen}(kr - \ell\pi/2) \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Por outro lado sabemos que $\exp(ik \cdot r)$ satisfaz à equação:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + k^2 \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Usando a equação (1.4.2) e a equação satisfeita pelos polinômios de Legendre*:

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_\ell(\cos\theta) + \ell(\ell+1) P_\ell(\cos\theta) = 0 \quad (1.4.7)$$

e novamente a ortogonalidade dos Polinômios de Legendre, obtemos a equação satisfeita por $u_1(k,r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u_\ell(k,r) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2 \right) u_\ell(k,r) = 0 \quad (1.4.8)$$

Fazendo a transformação:

$$u_\ell(k,r) = (kr)^{-1/2} \phi_\ell(kr) \quad (1.4.9)$$

obtemos a equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_\ell(kr) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_\ell(kr) + \frac{(\ell+1/2)^2}{r^2} \phi_\ell(kr) = -k^2 \phi_\ell(kr) \quad (1.4.10)$$

Esta é a equação de Bessel para a variável $z=kr$. Obtemos portanto a expressão:

$$u_\ell(kr) = A_\ell J_{\ell+1/2}(kr) + B_\ell N_{\ell+1/2}(kr) \quad (1.4.11)$$

Como na origem a função $u_1(k,r)$ deve ser finita teremos de fazer $B_1=0$. Portanto:

$$u_\ell(k,r) = C_\ell \sqrt{\pi/2kr} J_{\ell+1/2}(kr) \quad (1.4.12)$$

Os coeficientes C_1 podem ser determinados através do comportamento assintótico já estabelecido, usando que:

$$J_{\nu}(kr) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}) \quad (1.4.13)$$

comparando então com (1.4.5), obtemos:

$$(2\ell + 1)i^{\ell} = C_{\ell} \quad (1.4.14)$$

Finalmente teremos:

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell} (2\ell+1)i^{\ell} J_{\ell+1/2}(kr) \sqrt{\pi/2kr} P_{\ell}(\cos\theta) \quad (1.4.15)$$

E assintoticamente:

$$e^{ikr\cos\theta} \rightarrow \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1)i^{\ell} \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad (1.4.16)$$

De posse deste resultado podemos estudar o comportamento assintótico de $\Psi^+_{\ell}(k,r)$. Supondo que o potencial $V(r)$ tenda a zero suficientemente rápido quando r tender a infinito, teremos o seguinte comportamento para a função $\Psi^+_{\ell}(k,r)$:

$$\psi_{\ell}^+(k,r) \rightarrow \frac{C_{\ell}(2\ell+1)}{kr} \text{sen}(kr - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{\ell}) \quad (1.4.17)$$

Isto é obtido se observamos que a equação radial de Schrodinger é

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \psi_{\ell}^+(k,r) - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r} - k^2 + V(r) \right] \psi_{\ell}^+(k,r) = 0 \quad (1.4.18)$$

Definindo:

$$\psi_{\ell}^{+}(k,r) = \frac{\phi_{\ell}^{+}(k,r)}{r} \quad (1.4.19)$$

obtemos que

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi_{\ell}^{+}(k,r) + k^2 \phi_{\ell}^{+}(k,r) = \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \phi_{\ell}^{+}(k,r) \quad (1.4.20)$$

e desprezando o termo da direita, quando r é muito grande, obtemos a solução geral:

$$\phi_{\ell}^{+}(k,r) = (2\ell+1)C_{\ell} \sin\left(kr + \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{\ell}\right) \quad (1.4.21)$$

Obtemos portanto o comportamento:

$$\psi_{\ell}^{+}(k,r) \rightarrow \frac{(2\ell+1)C_{\ell}}{kr} \left[\frac{e^{i\{kr - \frac{\pi}{2}\ell + \delta_{\ell}\}} - e^{-i\{kr - \frac{\pi}{2}\ell + \delta_{\ell}\}}}{2i} \right] \quad (1.4.22)$$

Usando (1.2.2) e (1.4.16) e comparando com a equação anterior obteremos:

$$\begin{aligned} \psi^{+}(\vec{k}, \vec{r}) &\longrightarrow \sum_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1)}{2ikr} \\ &\times \left[i^{\ell} e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} i^{-\ell} + kA_{\ell}(k) e^{ikr} 2i \right] \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

onde fizemos:

$$f(\cos\theta) = \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) A_{\ell}(k) (2\ell+1) \quad (1.4.24)$$

A comparação com (1.4.22) nos força a fazer:

$$C_1 = e^{i\delta_1} i^1 \quad (1.4.25)$$

Do mesmo modo obtemos que:

$$A_\ell(k) = \frac{e^{i\delta_\ell(k)} \text{sen}(\delta_\ell(k))}{k} \quad (1.4.26)$$

O comportamento assintótico de $\Psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ será então dado por:

$$\Psi^+(\vec{k}, \vec{r}) \rightarrow \sum_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{2i\delta_\ell(k) + ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] \quad (1.4.27)$$

enquanto que para $f(\cos\theta)$ obtemos:

$$f(\cos\theta) = \sum_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1) e^{i\delta_\ell(k)} \text{sen}(\delta_\ell(k))}{k} \quad (1.4.28)$$

A expressão $e^{2i\delta_1(k)} = S_1(k)$ chamaremos de elemento de matriz S. Na teoria formal de espalhamento ela corresponderá ao coeficiente da expansão da matriz S (que relaciona estados (+) com estado (-)) em harmônicos esféricos.

Poderíamos levar a cabo a mesma análise para a segunda função e obter a expansão:

$$\Psi^-(\vec{k}, \vec{r}) \rightarrow \sum_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-i(kr+2\delta_\ell(k))} \right] \quad (1.4.29)$$

1.5- SEÇÃO DE CHOQUE

O objetivo principal quando se está lidando com espalhamento é encontrar as seções de choque para os processos que estamos estudando. Para espalhamento por potencial estas podem ser obtidas através do comportamento assintótico da função de onda:

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{r}) \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.5.1)$$

A seção de choque diferencial é definida através da expressão:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I_{\Omega}}{I_i} \quad (1.5.2)$$

onde $I_{\Omega} \cdot d\Omega$ é o número de partículas espalhadas por unidade de tempo para o ângulo sólido $d\Omega$ e I_i é o fluxo incidente.

O fluxo incidente é obtido através do termo $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$:

$$I_i = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} = \frac{\vec{p}}{2m} \quad (1.5.3)$$

O fluxo de partículas emergentes pode ser obtido a partir do segundo termo em (1.5.1):

$$\vec{I}_{\text{esp}} = \frac{\hbar}{2mi} \left[f^*(\cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{\nabla} f(\cos\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} - f(\cos\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} \vec{\nabla} f^*(\cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \quad (1.5.4)$$

que na direção radial resulta:

$$I(\theta, \phi) = \frac{\hbar}{2m} \frac{|f(\cos\theta)|^2}{r^2} \quad (1.5.5)$$

Já o número de partículas espalhadas na direção determinada pelos ângulos θ e ϕ , por unidade de ângulo sólido e de tempo será:

$$I_{\Omega} = I(\theta, \phi) r^2 = \frac{\hbar k}{2m} |f(\cos\theta)|^2 \quad (1.5.6)$$

Obtemos então o importante resultado:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\cos\theta)|^2 \quad (1.5.7)$$

Utilizando então (1.4.28) podemos expressar a seção de choque apresentando de forma explícita a contribuição de cada momento angular:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) (2\ell+1) e^{i\delta_{\ell}(k)} \frac{\text{sen}(\delta_{\ell}(k))}{k} \right|^2 \quad (1.5.8.a)$$

$$= \left| \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \frac{(2\ell+1)}{2ik} \left[S_{\ell}(k) - 1 \right] \right|^2 \quad (1.5.8.b)$$

É importante ressaltar que os deslocamentos de fase

para momentos angulares grandes são geralmente muito pequenos, tão menores quanto maior seja l . Muitas vezes, principalmente a baixas energias, a expressão acima pode ser truncada nos primeiros termos, resultando numa boa aproximação para a seção de choque.

1.6- SOLUÇÃO REGULAR E IRREGULAR E FUNÇÕES DE JOST

É conveniente introduzir duas soluções da equação radial de Schrodinger que diferem da componente da expansão da função de onda total ($\Psi^+(k,r)$) na condição de contorno.

Consideremos a equação radial de Schrodinger para $l = 0$:

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi_0(k,r) + k^2 \phi_0(k,r) - V(r) \phi_0(k,r) = 0 \quad (1.6.1)$$

Supondo que o potencial seja não singular na origem a equação acima se torna:

$$\phi_0''(k,r) + k^2 \phi_0(k,r) = 0 \quad (1.6.2)$$

Podemos analisar o comportamento de uma solução de (1.6.2) na origem expandindo a função em série de Taylor:

$$\phi_0(k,r) = r^S \sum_{n=0}^{\infty} A_n(k) r^n \quad (1.6.3)$$

Se substituirmos esta expressão na equação anterior obtemos os possíveis valores de s : $s = +1$ ou $s = 0$.

Fisicamente a condição $s = 0$ deve ser descartada pois embora não levasse a probabilidade infinita de encontrar a partícula na origem a função de onda resultante não satisfaria a equação de Schrodinger. A razão é que a função de onda $\Psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ construída através das contribuições de cada momento angular tem de satisfazer à equação de Schrodinger. O operador Laplaciano, que comparece na equação de Schrodinger, aplicado a uma função que se comporte como r^{-1} na origem (e este é o comportamento da contribuição da onda S se escolhermos $s = 0$) resulta numa função delta de Dirac. Uma solução com este comportamento não pode portanto satisfazer à equação de Schrodinger.

Se queremos um comportamento adequado na origem podemos pois exigir as condições de contorno:

$$\phi_0(k, 0) = 0 \quad (1.6.4)$$

$$\phi'_0(k, 0) = 1 \quad (1.6.5)$$

Estas são chamadas então de soluções regulares da equação de Schrodinger.

Outras soluções que embora não sejam geralmente fisicamente aceitáveis têm ainda assim uma importância teórica são as chamadas soluções irregulares. Estas são definidas pelo seu comportamento no infinito. Novamente supondo

que o potencial se anule de modo suficientemente rápido no infinito teremos para a equação radial de Schrodinger o mesmo comportamento assintótico dado pela eq. (1.6.2). Duas soluções independentes desta equação são e^{+ikr} e a função e^{-ikr} . Definimos assim as duas soluções irregulares:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-ikr} f_0^+(k,r) = 1 \quad (1.6.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{+ikr} f_0^-(k,r) = 1 \quad (1.6.7)$$

Ressaltemos que como estas soluções são definidas pelo seu comportamento no infinito geralmente não têm comportamento aceitável na origem.

A seguir introduziremos um conceito importante que é o das funções de Jost. Para onda S as definimos por meio de (9):

$$f_0^+(k) = f_0^+(k,0) \quad (1.6.8)$$

Pode-se perguntar se as condições (1.6.6) e (1.6.7) são suficientes para definir as funções irregulares. Para $f_0^+(k,r)$ podemos observar que (1.6.6) a define somente para valores do momento tais que $\text{Im}(k) > 0$. Quando $\text{Im}(k) < 0$, esta condição não define totalmente a solução pois se é acrescentada a uma função com aquele comportamento uma com o comportamento dado por (1.6.7) esta será totalmente despre-

zível nesta região. Tal combinação terá portanto o mesmo comportamento que a função original. Já para a segunda solução, $f_0^+(k,r)$ ocorre o inverso. Ela está bem definida para $\text{Im}(k) < 0$, mas não para $\text{Im}(k) > 0$.

Como $f_0^+(k,r)$ e $f_0^-(k,r)$ são duas soluções independentes de uma equação de segunda ordem qualquer outra solução pode ser expressa como uma combinação linear destas duas. Podemos pois expressar a solução regular deste modo. Isto é importante pois como conhecemos o comportamento das soluções irregulares para r grande podemos através de tal expressão encontrar o comportamento no infinito da solução regular. Este por sua vez nos possibilitará obter as seções de choque.

Queremos pois encontrar os coeficientes da expansão:

$$\phi_0(k,r) = A f_0^+(k,r) + B f_0^-(k,r) \quad (1.6.9)$$

Se usamos que $\phi_0(k,0) = 0$, obtemos a seguinte relação:

$$\phi_0(k,r) = g(k) \{ f_0^+(k,r) f_0^-(k) - f_0^-(k,r) f_0^+(k) \} \quad (1.6.10)$$

Podemos encontrar $g(k)$ calculando o Wronskiano de $f^+(k,r)$ com $\phi_0(k,r)$. Notemos que devido à equação (1.6.10), teremos:

$$W[f_0^+(k,r), \phi_0(k,r)] = -g(k)f_0^+(k) W[f_0^+(k,r), f_0^-(k,r)] \quad (1.6.11)$$

O Wronskiano entre as duas soluções irregulares pode ser calculado através dos seus comportamentos no infinito. Neste sentido lembremos que devido à equação radial de Schrodinger o Wronskiano não depende de r . Obtemos então:

$$W[f_0^+(k,r), f_0^-(k,r)] = -2ik \quad (1.6.12)$$

Por outro lado podemos calcular o Wronskiano na origem usando o comportamento conhecido da solução regular. Deste modo obtemos o valor de $g(k)$ ($g(k)=1/2ik$), resultando na seguinte expressão para a solução regular:

$$\phi_0(k,r) = \frac{1}{2ik} \left[f_0^-(k) f_0^+(k,r) - f_0^+(k) f_0^-(k,r) \right] \quad (1.6.13)$$

O comportamento assintótico da solução regular no infinito será:

$$\phi_0(k,r) \rightarrow \frac{1}{2ik} \left[f_0^-(k) e^{ikr} - f_0^+(k) e^{-ikr} \right] \quad (1.6.14)$$

Uma questão que precisa ser estudada é quanto à analiticidade das funções de Jost. Pode-se mostrar que para uma extensa classe de potenciais $f^+(k)$ é analítica no semiplano superior ($\text{Im}(k) > 0$). Para tal é suficiente que os primeiros e segundos momentos do potencial sejam finitos:

$$\int_0^{\infty} r |V(r)| dr < \infty \quad (1.6.15)$$

e

$$\int_0^{\infty} r^2 |V(r)| dr < \infty \quad (1.6.16)$$

Por outro lado a região de analiticidade pode ser estendida para $\text{Im}(k) > -a$ se requeremos a condição:

$$\int_0^{\infty} dr r |V(r)| e^{2ar} < \infty \quad (1.6.17)$$

Para $f^-(k)$ acontece o contrário. Se vale (1.6.15) e (1.6.16) esta função será analítica no semiplano inferior enquanto que (1.6.17) garante a analiticidade para $k < a$. A situação mais favorável é aquela em que o potencial pode ser estendido analiticamente e valem as relações:

$$\int_0^{\infty} dr r |V_{\phi}(r)| < \infty \quad (1.6.18.a)$$

e

$$\int_0^{\infty} dr r^2 |V_{\phi}(r)| < \infty \quad (1.6.18.b)$$

onde adotamos a definição:

$$V_{\phi}(r) = e^{2i\phi} V(re^{i\phi}) \quad (1.6.19)$$

e consideramos o argumento de "r" tal que $|\phi| < \pi/2$.

$$\psi_0^+(k, r) = \frac{\phi_0(k, r)}{f_0^+(k) \cdot r} \quad (1.6.23)$$

e

$$f_0^-(k) = |f_0^+(k)| e^{+i\delta(k)} \quad (1.6.24)$$

Vale a pena incluir também a seguinte relação:

$$\delta(k) = -\delta(-k) \quad (1.6.25)$$

1.7- ESTADOS LIGADOS E MATRIZ S

Por muito tempo se soube que os elementos da matriz S, $S_1(k)$ tinham seus polos relacionados com os estados ligados do sistema. Isto é os estados ligados somente ocorrem em valores de k (complexos) para os quais $S_1(k)$ apresenta um polo. No entanto havia o problema de que nem todos os polos da matriz S correspondiam a verdadeiros estados ligados. Foi através das funções de Jost que se conseguiu distingui-los.

Para entender esta questão, tomemos a função de onda regular para $k = iw$, com $w > 0$. Utilizando a equação (1.6.14) teremos a expressão:

$$\phi_0(k, r) \longrightarrow \frac{1}{2ik} \left[f_0^-(iw) e^{-wr} - f_0^+(iw) e^{+wr} \right] \quad (1.7.1)$$

A definição das soluções regulares requer agora uma alteração. Se expandimos a solução em série de potências na origem, e substituímos na equação radial de Schrodinger encontramos que a potência mais baixa será r^{l+1} ou r^{-l} . A primeira solução tem de ser descartada agora pois levaria a uma probabilidade infinita de encontrar a partícula na origem. Definimos a solução regular então através da condição de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(l+1)} \phi_l(k, r) = 1 \quad (1.8.6)$$

No caso em que $V(r)=0$, onda livre, teremos as seguintes soluções:

$$\phi_l^{(0)}(k, r) = r^{1/2} \left(\frac{k}{2}\right)^{-(l+1/2)} \Gamma(l+3/2) J_{l+1/2}(kr) \quad (1.8.7)$$

e

$$f_l^{\pm(0)}(k, r) = e^{\pm i \frac{\pi}{2}(l+1)} \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{l+1/2}^{\pm 1}(kr) \quad (1.8.8)$$

Onde, $J_n(z)$ é a função de Bessel e $H_n(z)$ são as funções de Hankel.

O comportamento das soluções irregulares na origem será:

$$f_l^{\pm}(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} e^{\pm i \pi l/2} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{kr}{2}\right)^{-l} \quad (1.8.9)$$

Pode-se confirmar explicitamente as condições (1.8.4) e (1.8.5).

Neste caso torna-se conveniente definirmos duas funções de Jost, através de:

$$f_{\ell}^{\pm}(k) = \frac{e^{\mp i\pi\ell/2} \sqrt{\pi}}{2^{\ell} \Gamma(\ell+1/2)} \lim_{r \rightarrow 0} (kr)^{\ell} f_{\ell}^{\pm}(k, r) \quad (1.8.10)$$

e

$$F_{\ell}^{\pm}(k) = (2\ell+1) \lim_{r \rightarrow 0} r^{\ell} f_{\ell}^{\pm}(k, r) = \frac{(2\ell+1) \Gamma(\ell+1/2)}{\pi k^{\ell}} f_{\ell}^{\pm}(k) \quad (1.8.11)$$

A razão para introduzir as duas funções é que como veremos, a primeira é útil para pois sua fase dará o deslocamento de fase da solução física, enquanto seu módulo estará relacionado com a probabilidade de encontrar a partícula na origem. Já a segunda função de Jost será útil para obtermos uma expressão para a solução regular em termos das irregulares de forma mais compacta.

Tomemos novamente a tarefa de encontrar uma expressão para solução regular em termos das irregulares. Como estas são independentes, podemos fazer:

$$\phi_{\ell}(k, r) = A f_{\ell}^{+}(k, r) + B f_{\ell}^{-}(k, r) \quad (1.8.12)$$

Determinamos as constantes A e B usando que a solução regular é nula na origem, enquanto que a irregular é finita e geralmente não nula (para condições adequadas do potencial

soluções regulares e irregulares encontrando funções de Green com o comportamento adequado para a equação de Schrodinger para onda livre. Teremos então:

$$\phi_{\ell}(k,r) = \phi_{\ell}^{(0)}(k,r) + \int_0^r dr' g_{\ell}(k,r,r')V(r')\phi_{\ell}(k,r') \quad (1.8.17)$$

onde:

$$g_{\ell}(k,r,r') = i \frac{\pi}{4} (rr')^{1/2} .$$

$$\left[H_{\ell+1/2}^1(kr') H_{\ell+1/2}^2(kr) - H_{\ell+1/2}^1(kr) H_{\ell+1/2}^2(kr') \right] \quad (1.8.18)$$

Para as soluções irregulares teremos as equações seguintes:

$$f_{\ell}^{\pm}(k,r) = f_{\ell}^{\pm(0)}(k,r) - \int_r^{\infty} dr' g_{\ell}(k,r,r')V(r')f_{\ell}^{\pm}(k,r') \quad (1.8.19)$$

Estudando estas equações integrais se pode demonstrar as propriedades citadas acima, tais como que as funções irregulares são holomórficas nos seus domínios de definição. Além disso se demonstra que:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f_{\ell}^{\pm}(k) = 1 \quad (1.8.20)$$

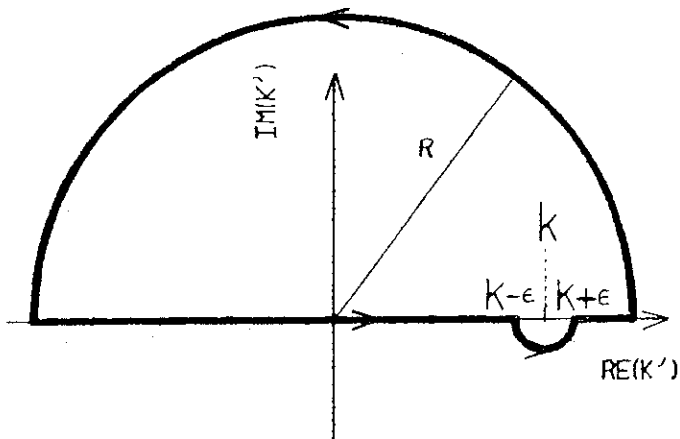
1.9- RELAÇÕES DE DISPERÇÃO

Pode-se obter importantes relações para as funções de Jost utilizando as propriedades analíticas citadas. Tratam-se das relações de dispersão que permitem a obtenção da parte real da função de Jost através do conhecimento da parte imaginária⁽¹⁰⁾.

Como $f_l^+(k)$ é holomórfica no semiplano superior podemos aplicar o teorema de Cauchy e obter que:

$$-1 + f_l^+(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f_l^+(k') - 1)}{k' - k} dk' \quad (1.9.1)$$

Onde c é o percurso mostrado na figura (2), consistindo da integral ao longo do eixo real de $-\infty$ a $k-\epsilon$, seguindo por um semicírculo no semiplano superior até $k+\epsilon$. A seguir continua através do eixo real até $+\infty$ e fecha o circuito através de um semicírculo de raio infinito no semiplano superior centrado na origem (fig2).



A integral sobre o semicírculo superior não contribui quando o raio vai a infinito pois neste limite a

função de Jost se anula. A integral sobre o pequeno semi-círculo resulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f_{\ell}^{+}(k')-1}{k'-k} dk' = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^0 \frac{f_{\ell}^{+}(k')-1}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \approx \frac{f_{\ell}^{+}(k)-1}{2} \quad (1.9.2)$$

sendo a expressão final válida quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Como resultado teremos:

$$f_{\ell}^{+}(k)-1 = \frac{1}{\pi i} P \int \frac{f_{\ell}^{+}(k')-1}{k'-k} dk' \quad (1.9.3)$$

Onde por P indicamos valor principal. Tomando a parte real da expressão acima, teremos:

$$\operatorname{Re}(f_{\ell}^{+}(k)) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int \frac{\operatorname{Im}(f_{\ell}^{+}(k'))}{k'-k} dk' \quad (1.9.4)$$

De modo semelhante encontra-se:

$$\operatorname{Im}(f_{\ell}^{+}(k)) = -\frac{1}{\pi} P \int \frac{\operatorname{Re}(f_{\ell}^{+}(k'))}{k'-k} dk' \quad (1.9.5)$$

Vemos assim que o conhecimento da parte real de $f(k)$ é equivalente ao conhecimento da parte imaginária e vice-versa.

Podemos encontrar também relações de dispersão entre a fase da função de Jost e seu módulo (ou entre o deslocamento de fase e a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na origem. Tomando $\ln(f^{+}(k))$, vemos que como

a função de Jost tende à unidade quando $k \rightarrow \infty$ teremos que o logaritmo se anula neste limite. Podemos então realizar a mesma argumentação anterior com $\ln(f^+(k))$ no lugar de $f^+(k) - 1$. No entanto agora o logaritmo não é holomórfico no semiplano superior, mas apresenta polos sempre que $f^+(k)$ se anula. Podemos no entanto retirar este polos definindo uma nova função:

$$f_{\ell}^{\text{red}}(k) = \prod_n \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} f_{\ell}^+(k) \quad (1.9.6)$$

onde $k = i\chi_n$ correspondem aos zeros de $f_{\ell}^+(k)$ no eixo imaginário positivo.

Repetindo o argumento anterior obtemos então:

$$\text{Re}(\ln(f_{\ell}^{\text{red}}(k))) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \frac{\text{Im}(\ln(f_{\ell}^{\text{red}}(k')))}{k' - k} \quad (1.9.7)$$

ou, notando que :

$$\ln(f_{\ell}^{\text{red}}(k)) = \ln(|f_{\ell}^+(k)|) - i\delta_{\ell}(k) + 2i \sum_n \text{Cot}^{-1} k/\chi_n \quad (1.9.8)$$

obtemos:

$$\ln(|f_{\ell}^+(k)|) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \frac{[\delta_{\ell}(k') - 2 \sum_n \text{Cot}^{-1}(k'/\chi_n)]}{k - k'} \quad (1.9.9)$$

esta última integral pode ser calculada levando à expres-

CAPÍTULO II

FUNÇÕES DE JOST EM DIMENSÕES SUPERIORES

2.1- INTRODUÇÃO

A equação de Shrodinger em d dimensões tem a forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(r) \psi(\vec{r}, t) \quad (2.1.1)$$

onde o operador laplaciano é definido como:

$$\nabla^2 = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1.2)$$

com x^i ($i = 1, 2, \dots$ e d) sendo as coordenadas cartesianas no espaço de d dimensões.

Adotaremos neste capítulo novamente um sistema de coordenadas em que $\hbar = 2m = 1$. Fazendo isto a equação (2.1.1) se torna:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = - \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(r) \psi(\vec{r}, t) \quad (2.1.3)$$

A equação de auto-estados do Hamiltoniano se torna então:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) - V(r) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.1.4)$$

Nosso objetivo é estudar o espalhamento em dimensão arbitrária. Procuraremos, para isto, soluções da equação (2.1.4) que tenham o significado físico de uma onda plana incidente espalhada pelo potencial $V(r)$. Assumiremos que o potencial seja esfericamente simétrico. Nos propomos a generalizar os conceitos introduzidos no capítulo anterior, tratando da teoria de espalhamento independente do tempo. Não adotaremos uma abordagem formal, trabalhando no espaço de Hilbert, independentemente de representação. Ao contrário lidaremos sempre com as funções de onda analisando o seu significado físico.

Queremos então atribuir à função de onda espalhada o seguinte comportamento a longas distâncias do centro espalhador situado na origem:

$$\Psi_d^+(\vec{k}, \vec{r}) \text{ ---> Onda plana incidente} + f(\cos(\theta)) \cdot \text{onda esférica emergente} \quad (2.1.5)$$

As formas das ondas planas e esféricas obtemos através da equação de Schrodinger para partículas livres:

$$\nabla^2 \psi(\vec{k}, \vec{r}) + k^2 \psi(\vec{k}, \vec{r}) = 0 \quad (2.1.6)$$

Para as ondas planas obtemos a função de onda:

$$\psi(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.1.7)$$

onde, evidentemente, $\vec{k} \cdot \vec{r} = \sum_i k_i r_i$.

Para ondas esféricas queremos que $\Psi(k, r)$ dependa somente da variável radial $r^2 = \sum_i r_i^2$. Neste caso podemos utilizar a relação:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.1.8)$$

para obter a equação:

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi(k, r) + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} \psi(k, r) + k^2 \psi(k, r) = 0 \quad (2.1.9)$$

A solução desta equação será dada por:

$$\psi(k, r) = r^{-\frac{(d-2)}{2}} Z_{\frac{d-2}{2}}(k, r) \quad (2.1.10)$$

onde $Z_{(d-2)/2}(z)$ é qualquer das funções(8):

$H^1_{(d-2)/2}(k, r)$, $H^2_{(d-2)/2}(k, r)$, $J_{(d-2)/2}(k, r)$ ou $N_{(d-2)/2}(k, r)$

funções de Hankel, Bessel ou Neumann. Ou ainda qualquer combinação linear destas.

Se queremos representar ondas emergentes ou incidentes serão adequadas as funções de Hankel pois resultarão no comportamento:

$$\psi(k, r) = r^{-\frac{(d-2)}{2}} H^1_{\frac{d-2}{2}}(kr) + \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-\frac{(d-1)}{2} i\pi/2} \frac{e^{ikr}}{r^{\frac{(d-1)}{2}}} \quad (2.1.11)$$

ou

$$\psi(k,r) = r^{-\frac{(d-2)}{2}} H_{\frac{d-2}{2}}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{+\frac{(d-1)}{2}i\pi/2} \frac{e^{-ikr}}{r^{\frac{(d-1)}{2}}} \quad (2.1.12)$$

A primeira apresenta o comportamento de onda esférica emergente (basta recordar a dependência temporal dos auto-estados do Hamiltoniano), enquanto que a segunda representa ondas incidentes.

A função de onda que representa uma situação em que um feixe de partículas foi espalhado pelo potencial terá o comportamento:

$$\psi_d^+(\vec{k},\vec{r}) \rightarrow e^{ikr \cos \theta} + f(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r^{\frac{(d-1)}{2}}} \quad (2.1.13)$$

onde $\cos(\theta) = \vec{k} \cdot \vec{r} / kr$, \vec{k} é o momento do feixe de partículas incidentes e k é o seu módulo.

2.2- SISTEMA DE COORDENADAS HIPERESFÉRICO

Para tratar com um espaço Euclidiano com dimensão arbitrária precisaremos introduzir o sistema de coordenadas que generaliza as coordenadas esféricas para dimensões superiores^{(11),(12)}. O espaço será descrito por uma coordenada radial (já introduzida) e $(d-1)$ coordenadas "angulares". Este sistema é definido por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r \cos(\theta) \\
 r_2 &= r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi_1) \\
 r_3 &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_{d-1} &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_1) \dots \operatorname{sen}(\varphi_{d-3}) \cos(\varphi_{d-2}) \\
 r_d &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_1) \dots \operatorname{sen}(\varphi_{d-3}) \operatorname{sen}(\varphi_{d-2})
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

Variando as novas coordenadas nos intervalos:

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi_i < \pi \quad (i=1, 2, \dots, d-3) \quad \text{e} \quad -\pi < \varphi_{d-2} < +\pi
 \tag{2.2.2}$$

cobriremos realmente todo o espaço gerado através dos intervalos $-\infty < x_i < \infty$. É fácil verificar que realmente a coordenada r corresponde à anteriormente introduzida.

O deslocamento infinitesimal será descrito pelo vetor:

$$\begin{aligned}
 \rightarrow dS &= (dr, r d\theta, r \operatorname{sen}(\theta) d\varphi_1, r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_1) d\varphi_2, \dots, \\
 &\quad r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_1) \dots \operatorname{sen}(\varphi_{d-2}) d\varphi_{d-2})
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3}$$

O elemento de volume neste espaço será:

$$\begin{aligned}
 d^d r &= \prod_{i=1}^d dx_i = r^{p+1} \operatorname{sen}^p(\theta) \operatorname{sen}^{p-1}(\varphi_1) \operatorname{sen}^{p-2}(\varphi_2) \dots \dots \dots \\
 &\quad \dots \dots \operatorname{sen}(\varphi_{d-3}) dr \cdot d\theta \cdot d\varphi_1 \dots \dots d\varphi_{d-2}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.4}$$

O ângulo sólido total será $\Omega = \Omega_\theta \cdot \Omega_\varphi$, onde:

$$\Omega_\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}^p(\theta) d\theta = \frac{\pi}{p} \frac{2^{-(p-2)} \Gamma(p)}{\Gamma(p/2) \Gamma(p/2)}
 \tag{2.2.5}$$

$$e \quad \Omega_{\phi} = \int_0^{\pi} \text{sen}^{p-1} \phi_1 \, d\phi_1 \int_0^{\pi} \text{sen}^{p-2} \phi_2 \, d\phi_2$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen} \phi_{p-1} \, d\phi_{p-1} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_p = \frac{2\pi^{\frac{(p+1)}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} \quad (2.2.6)$$

Na expressão acima adotamos a notação $p=(d-2)$ que utilizaremos ao longo de todo o capítulo.

Para lidar com a equação de Schrodinger precisaremos também expressar o operador Laplaciano neste sistema de coordenadas. Supondo que tenhamos uma função dependendo somente de r e θ teremos a expressão:

$$\nabla^2 f(r, \theta) = \frac{1}{r^{p+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^p \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{sen}^p \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(r, \theta) \quad (2.2.7)$$

Podemos chegar a esta expressão através do vetor deslocamento, eq. (2.2.3).

As autofunções do momento angular em d dimensões podem ser generalizadas através dos polinômios de Gegenbauer. Estes podem ser definidos por meio da função geratriz:

$$\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{2r}{r_0} \cos \theta \right]^{-p/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta | p) \quad (2.2.8)$$

Para $p=1$ obtemos os polinômios de Legendre. Podemos obter as equações satisfeitas por tais polinômios observando que:

$$\nabla_d^2 r^{-(d-2)} = 0 \quad (2.2.9)$$

para $r=0$, e que (2.2.8) nada mais é que a expansão de R^{-p} , onde:

$$R = \sqrt{\sum_i [x^2 - y^2]} \quad (2.2.10)$$

com Y sendo um ponto no eixo $\theta=0$, r_0 é a norma do vetor que vai da origem a Y , e X é um ponto arbitrário. Decorre então que que os polinômios de Gegenbauer obedecem a:

$$\frac{d}{d\theta} \sin^p \theta \frac{d}{d\theta} P_\ell(\cos\theta|p) = -\ell(\ell+p) \sin^p(\theta) P_\ell(\cos\theta|p) \quad (2.2.11)$$

O operador Laplaciano aplicado a uma função com a forma:

$$f(r, \theta) = g(r) \cdot P_\ell(\cos\theta|p) \quad (2.2.12)$$

resulta em:

$$\left[\frac{1}{r^{p+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} g(r) - \frac{\ell(\ell+p)}{r^2} g(r) \right] P_\ell(\cos\theta|p) = \nabla^2 f(r, \theta) \quad (2.2.13)$$

Na verdade usando as definições (2.2.1) é fácil mostrar que em qualquer dimensão é válida a relação:

$$\nabla^2 = P_r^2 + 1/r^2 \cdot L^2 \quad (2.2.14)$$

onde L^2 será o quadrado do operador momento angular total. Em dimensão maior que três não se pode falar de rotações em torno de **um** eixo mas ao longo de um plano (ou em torno dos $d-2$ eixos perpendiculares àquele plano). Os operadores de momento angular (orbital, estamos sempre tratando com espin nulo!) serão em número $d(d-1)/2$ e podem ser definidos como:

$$L_{ij} = \frac{\hbar}{i} \left[x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \quad (2.2.15)$$

para $i < j$. L_{ij} será o gerador das rotações no plano ij . Ou seja:

$$e^{-i\theta L_{ij}/\hbar} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_d) =$$

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_i \cos(\theta) + x_j \sin(\theta), \dots, -x_i \sin(\theta) + x_j \cos(\theta), \dots, x_d) \quad (2.2.16)$$

Para demonstrar (2.2.14) basta utilizar as definições de L^2 , L_{ij} e (2.1.2). Com um pouco de algebrismo se chega àquele resultado. Naquela expressão entendemos por P_r^2 o operador diferencial:

$$-\hbar^2 \frac{1}{r^{p+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.2.17)$$

Outra propriedade importante dos polinômios de Gegenbauer é a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta|p) P_{\ell'}(\cos\theta|p) \sin^p\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell \neq \ell' \\ \frac{p}{2} \frac{\Gamma(\ell+p)}{(\ell+p/2)\Gamma(p)} \Omega_\theta, & \text{se } \ell = \ell' \end{cases} \quad (2.2.18)$$

com Ω_θ dado por (2.2.5).

2.3- EQUAÇÃO INTEGRAL PARA A FUNÇÃO DE ONDA ESPALHADA

Pretendemos encontrar uma equação integral que substitua a equação de Schrodinger e a condição de contorno (2.1.13). Esta equação terá a forma:

$$\psi_d^+(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \int G_d^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') V(r') \psi_d^+(\vec{k}, \vec{r}') d^d r' \quad (2.3.1)$$

Na qual a função de Green satisfaz a:

$$(\nabla_d^2 + k^2) G_d^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') = \delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.3.2)$$

Como no capítulo anterior calculamos $G^+(k, r, r')$ através de sua transformada de Fourier:

$$G_d^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d_p^d e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \tilde{G}_d(\vec{k}, \vec{p}, \vec{r}') \quad (2.3.3)$$

temos então, usando as duas equações anteriores:

$$\tilde{G}_d(\vec{k}, \vec{p}, \vec{r}') = \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}'}}{k^2 - p^2} \quad (2.3.4)$$

Portanto:

$$G_d^+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{e^{i \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{k^2 - p^2} \equiv G_d^+(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') \quad (2.3.5)$$

Para calcular a ultima integral procedemos de modo semelhante ao seguido no último capítulo:

$$G_d^+(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}}}{k^2 - p^2} p^{d-1} \sin^p \theta \sin^{p-1} \phi_1 \dots \sin \phi_p d\theta d\phi_1 \dots d\phi_p \quad (2.3.6)$$

usando a eq. (2.2.5):

$$G_d^+(k, x) = \frac{\Omega_\phi}{(2\pi)^d} \int \frac{e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}}}{k^2 - p^2} p^{d-1} \sin^p \theta d\theta dr \quad (2.3.7)$$

Ajustando adequadamente a direção dos eixos coordenados podemos obter:

$$G_d^+(k, x) = \frac{\Omega_\phi}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp \int_0^\pi \frac{e^{i p \cdot x \cos \theta}}{k^2 - p^2} p^{d-1} \sin^p \theta d\theta \quad (2.3.8)$$

Se usamos que(8):

$$\int_0^\pi e^{i\beta \cos \theta} \sin^{d-2} \theta d\theta = \pi \left\{ \frac{2}{\beta} \right\}^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \frac{I_{\frac{d-2}{2}}(\beta)}{\frac{d-2}{2}} \quad (2.3.9)$$

obtemos:

$$G_d^+(k, x) = \frac{\Omega_\phi}{(2\pi)^d} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \left\{ \int_0^\infty \frac{p^{d/2}}{k^2 - p^2} \left[H_{\frac{d-2}{2}}^1(px) + H_{\frac{d-2}{2}}^2(px) \right] dp \right\} \quad (2.3.10)$$

Podemos transformar as integrais numa só usando as relações de circuito para as funções de Hankel⁽⁸⁾:

$$H_{\nu}^2(e^{-i\pi}z) = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^1(z) \quad (2.3.11)$$

obtemos então:

$$G_d^+(k, x) = \frac{\Omega_{\phi}}{(2\pi)^d} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{d/2}}{k^2 - p^2} H_{\frac{d-2}{2}}^1(px) dp \quad (2.3.12)$$

Esta inequal é agora calculável usando o cálculo de resíduos. Acrescentamos a integral sobre o semicírculo infinito no semiplano superior centrada na origem e escolhemos o mesmo contorno dos polos que na seção 1.3 (v. figura 1). Obtemos, se usamos que novamente o semicírculo infinito não contribui, o valor da integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{d/2}}{k^2 - p^2} H_{\frac{d-2}{2}}^1(px) dp = -2\pi i \frac{k^{d/2}}{2k} H_{\frac{d-2}{2}}^1(kx) \quad (2.3.13)$$

Que este contorno resulta na condição de contorno em que estamos interessados é verificado a posteriori. Teremos que a função de Hankel implicará numa onda esférica emergente, gerando o comportamento desejado para a função de onda. Teremos então:

$$G_d^+(k, x) = -i 2^{-(\frac{d}{2}+2)} (d-1)\pi^{\frac{(5-d)}{2}} x^{\frac{(2-d)}{2}} k^{\frac{d-2}{2}} H_{\frac{d-2}{2}}^1(kx) \quad (2.3.14)$$

2.4- ANÁLISE DE ONDAS PARCIAIS

Usando os polinômios de Gegenbauer podemos expandir a função de onda $\Psi^+(k, r)$ de modo a separarmos a contribuição de cada momento angular. Ou seja, requeremos uma expansão da forma:

$$\psi_d^+(\vec{k}, \vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell}^{+d}(k, r) P_{\ell}(\cos\theta | p) \quad (2.4.1)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores momento e posição. Supomos que \vec{k} esteja na direção do primeiro eixo coordenado, x_1 , de modo que θ coincida com o mesmo ângulo introduzido na seção 2.2. Podemos supor que a função de onda $\Psi_d^+(\vec{k}, \vec{r})$ depende somente do módulo de \vec{r} e de seu ângulo com \vec{k} devido à simetria esférica do potencial.

Podemos encontrar a equação satisfeita pelas funções radiais usando (2.2.13) e (2.2.18):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\ell(\ell+p)}{r^2} \right) \psi_{\ell}^{+d}(k, r) = V(r) \psi_{\ell}^{+d}(k, r) \quad (2.4.2)$$

É importante investigar o comportamento assintótico de $\Psi_d^+(\vec{k}, r)$ quando $r \rightarrow \infty$. Usaremos para

isto o comportamento já conhecido de $\Psi_d^+(\vec{k}, \vec{r})$, eq. (2.1.13). Inicialmente precisaremos da expansão da onda plana em polinômios de Gegenbauer(11):

$$e^{i\vec{k}\vec{r} \cos\theta} = 2^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(p/2) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+p) P_{\ell}(\cos\theta | p) \times \\ \times i^{\ell} (kr)^{-p/2} J_{(\ell+p)/2}(kr) \quad (2.4.3)$$

Quando $r \rightarrow \infty$ o potencial é suposto desprezível, de modo que neste limite a função de onda satisfaz à equação de onda livre. Isto nos sugere então o comportamento assintótico:

$$\psi_{\ell}^{+d}(k, r) \rightarrow 2^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(p/2) (2\ell+p) i^{\ell} \alpha_{\ell} \times \\ \times (kr)^{\frac{-p+1}{2}} \sin(kr - \frac{\pi}{4} (2\ell+p-1) + \delta_{\ell}(k)) \quad (2.4.4)$$

Na expressão acima α_{ℓ} e δ_{ℓ} são constantes arbitrárias que asseguram o caráter genérico da solução. Usando agora (2.1.13) e o comportamento assintótico das funções de Bessel (1.4.13) somos forçados à identificação:

$$\alpha_{\ell} = e^{i\delta_{\ell}(k)} \quad (2.4.5)$$

Obtemos assim que o comportamento assintótico da função de onda parcial difere apenas por um deslocamento de fase e por um fator da função de onda parcial da partícula livre.

Segundo a mesma argumentação obtemos a expressão

para a amplitude de espalhamento total:

$$f(\cos\theta) = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p-1)}}{2ik \frac{p+1}{2} \sqrt{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos\theta | p) (2\ell+p) \left[S_{\ell}(k) - 1 \right] \quad (2.4.6)$$

Onde adotamos novamente a notação:

$$S_1(k) = e^{2i\delta_1(k)} \quad (2.4.7)$$

O comportamento de $\psi^{+d}_1(k,r)$ resulta então:

$$\psi^{+d}_{\ell}(k,r) \rightarrow 2^{\frac{p-2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(p/2) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+p) i^{\ell} x$$

$$x e^{i\delta_{\ell}(k)} P_{\ell}(\cos\theta | p) (kr)^{\frac{p+1}{2}} \sin(kr - \frac{\pi}{4}(2\ell+p+1) + \delta_{\ell}(k)) \quad (2.4.8)$$

Em três dimensões a amplitude de espalhamento $f(\cos(\theta))$ nos dá a seção de choque. Em dimensões superiores podemos ver que ela tem o mesmo significado. A seção de choque é dada pela razão entre o fluxo espalhado e o incidente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I(\theta)}{I_0} \quad (2.4.9)$$

onde I_0 é o fluxo de partículas incidente e I_{θ} é o número de partículas espalhadas através do ângulo sólido unitário numa direção especificada pelo ângulo θ .

A corrente de probabilidade é dada, como em três

dimensões pelo vetor de componentes:

$$J_i = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \frac{\partial}{\partial x_i} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x_i} \psi^* \right] \quad (2.4.10)$$

O fluxo incidente será portanto:

$$I_0 = \frac{\hbar}{2m} k \quad (2.4.11)$$

O fluxo espalhado é calculado através da onda esférica espalhada obtida da equação (2.1.13). Na direção radial teremos o valor para o fluxo dado por:

$$J_r^{\text{esp}} = \frac{\hbar |f(\cos\theta)|^2 k}{m r^{(p+1)}} \quad (2.4.12)$$

Tendo obtido o fluxo, este dá o número de partículas espalhadas por unidade tempo e de área na direção radial. Para encontrar a seção de choque precisamos do número de partículas espalhadas por unidade de tempo por unidade de ângulo sólido. Em dimensões superiores a relação entre unidade de área e unidade de ângulo sólido é definida como $dA = r^{d-1} d\Omega$. Obtemos então o valor do fluxo por unidade de ângulo sólido:

$$I(\theta) = J_r^{\text{esp}} \frac{dA}{dr} = \frac{\hbar |f(\cos\theta)|^2 k}{m} \quad (2.4.13)$$

Obtemos por fim a expressão para a seção de choque em termos da amplitude de espalhamento:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\cos\theta)|^2 \quad (2.4.14)$$

Vemos assim que a relação entre seção de choque e amplitude de espalhamento é a mesma em qualquer dimensão. Havíamos encontrado uma expansão da amplitude de espalhamento em ondas parciais de momento angular bem definido. Esta mesma expressão nos possibilita encontrar a seção de choque. Assim o problema de encontrar seções de choque se resume a encontrar os deslocamentos de fase. A contribuição de cada momento angular se anula quando $\delta = 0$ e é máxima quando $\delta = \pi/2$.

2.5- FUNÇÃO DE ONDA REGULAR, IRREGULAR E FUNÇÕES DE JOST

Queremos agora generalizar o conceito das funções de Jost para dimensão arbitrária. No capítulo anterior vimos que através destas funções se pode encontrar os estados ligados, que sua fase é o deslocamento de fase da função de onda física e que seu módulo está relacionado com a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na origem. Obtivemos estas propriedades analisando as soluções regular e irregular da equação de Schrodinger.

Em dimensões superiores teremos a equação para a parte radial da função de onda:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} + \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\ell(\ell+p)}{r^2} \right) \psi(r) = V(r) \psi(r) \quad (2.5.1)$$

Chamando:

$$\Psi(r) = r^{-p} \phi(r) \quad (2.5.2)$$

a equação para $\phi(r)$ se torna, tomando $l = 0$ por simplicidade:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(d-3)}{r} + \frac{d}{dr} + k^2 \right) \phi(r) = V(r) \phi(r) \quad (2.5.3)$$

Vamos definir soluções irregulares da equação anterior por meio das condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (kr)^{-\frac{(p-1)}{2}} e^{+ikr} f_{\pm}^{+d}(kr, r) = 1 \quad (2.5.4)$$

para a onda livre as soluções com este comportamento serão:

$$f_{\pm}^{+d}(kr) = \pm i e^{\pm i \frac{\pi}{4} (p-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} H_{p/2}^{\pm 1/2}(kr) \quad (2.5.5)$$

Por que fizemos a transformação (2.5.2)? Nos lembremos que em três dimensões a função de onda irregular para a onda livre definida pelas condições (2.5.4) quando $p=1$ tem o valor "1" em $r=0$. Por querermos definir a função de Jost, para momento angular nulo, simplesmente como o valor da função de onda irregular na origem, somos levados àquela

transformação. Por outro lado o comportamento da função de onda no infinito, para potenciais que tendam suficientemente rápido para zero naquele limite, será o mesmo que da onda livre. Por isto introduzimos os fatores $(kr)^{-(p-1)/2}$ na expressão (2.5.4). Poderíamos, é verdade, preservar a equação original e mudar as definições da solução irregular e das funções de Jost. Preferimos no entanto adotar este procedimento.

Pela discussão anterior definimos pois as funções de Jost como:

$$f^{\pm d}(k) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{4}(p-1)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(p/2)}{\pi} 2^{p/2}} f^{\pm d}(k,0) \quad (2.5.6)$$

Para a onda livre esta definição resulta em $f^d(k) = 1$. Esta é a razão para introduzir os fatores na definição das funções de Jost.

Com estas definições valem as relações usuais entre as soluções irregulares:

$$f^{+d}(k^*,r) = [f^{-d}(k,r)]^* \quad (2.5.7)$$

e

$$f^{+d}(k^*0) = [f^{-d}(k)]^* \quad (2.5.8)$$

É importante também encontrar expressões que definam aquelas soluções através de equações integrais.

Para encontrar as equações integrais precisamos achar a função de Green da equação (2.5.3). Isto se obtém notando que estas são soluções de:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d-3}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right] \bar{G}_d(k, r, r') = \delta(r-r') \quad (2.5.9)$$

Para $r < r'$ as soluções são as mesmas que para a onda livre. A condição de contorno nos exige que para $r > r'$ a função de Green seja nula. Para resultar numa delta de Dirac precisamos impor uma descontinuidade de um na sua derivada em $r = r'$. Precisamos da condição de a função de Green se anular para r maior que r' já que formaremos a equação integral usando a função de onda irregular para partícula livre como a parte não homogênea. Como esta já apresenta o comportamento adequado no infinito precisamos nos garantir que a função de Green não contribua naquele limite.

A expressão encontrada usando aqueles argumentos é :

$$f^{\pm d}(k, r) = \pm i e^{\pm i \frac{\pi}{4}(p-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} H_{p/2}^1(kr) + \int_r^\infty \bar{G}_d(k, r, r') V(r') f^{\pm d}(k, r') dr' \quad (2.5.10)$$

onde a função de Green é:

$$\bar{G}_d(k, r, r') = -i \frac{\pi}{2} r^{i \left(\frac{p-2}{2} \right)} r^{p/2} \left[J_{p/2}(kr) H_{p/2}^1(kr') - J_{p/2}(kr') H_{p/2}^1(kr) \right] \quad (2.5.11)$$

para $r < r'$. Para $r > r'$, teremos $G_d(k, r, r') = 0$.

Vamos definir agora a solução regular, cujo comportamento na origem seja aceitável fisicamente. Esta será definida por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-p} \cdot \phi^d(k, r) = 1 \quad (2.5.12)$$

Podemos chegar a este comportamento do seguinte modo. Queremos uma probabilidade de encontrar a partícula numa hiperesfera de raio r centrada na origem que seja finita. Esta probabilidade é dada por:

$$\int_{\mathbf{v}} |\psi(r)|^2 d^d r = \Omega \int_0^{r_0} r^{-2p} |\phi(r)|^2 r^{d-1} dr \quad (2.5.13)$$

Se agora expandimos a função de onda radial na origem em série de potências onde a potência de ordem mais baixa seja do tipo r^α , teremos que a probabilidade de encontrar a partícula quando o raio for bastante pequeno será proporcional à integral:

$$\int_0^{r_0} r^{\alpha+1-p} dr$$

Para que esta integral não seja divergente é necessário que $\alpha > p/2 - 1$. Por outro lado usando a expansão da função e a equação (2.5.3) obtemos, se supomos o potencial desprezível neste limite, que teremos de impor que $\alpha = p$. A outra opção, $\alpha = 0$, levaria a uma probabilidade infinita de encontrar a partícula na origem. Este comportamento na origem corresponde geralmente às funções de

onda irregulares.

Para a partícula livre teremos:

$$\phi^{d(0)}(k,r) = k^{-p/2} 2^{p/2} \Gamma(p/2 + 1) r^{p/2} J_{p/2}(kr) \quad (2.5.14)$$

Podemos encontrar também uma equação integral para esta solução. Desta vez o comportamento na origem é o especificado. Teremos de fazer com que a função de Green se anule para $r < r'$. Obtemos, por argumentos análogos aos anteriores a equação:

$$\phi^d(k,r) = \phi^{d(0)}(k,r) + \int_0^r G(k,r,r') V(r') \phi^d(k,r') dr' \quad (2.5.15)$$

onde a função de Green é agora:

$$G(k,r,r') = i \frac{\pi}{2} r^{(1-p/2)} r'^{p/2} \left[J_{p/2}(kr) H'_{p/2}(kr') - J_{p/2}(kr') H_{p/2}(kr) \right] \quad (2.5.16)$$

para $r > r'$ e nula em caso contrário.

No capítulo anterior foi encontrando a expressão da função de onda irregular como combinação linear das irregulares que pudemos dar uma interpretação para a função de Jost e entender melhor o papel que lhe é atribuído. Podemos fazer o mesmo em dimensão arbitrária. Novamente lidamos com uma equação do segundo grau e as soluções irregulares são duas soluções independentes. Teremos portanto:

$$\phi^d(k,r) = A f^{+d}(k,r) + B f^{-d}(k,r) \quad (2.5.17)$$

$$W[f^{+d}(k,r), f^{-d}(k,r)] \rightarrow -2ikr^{(d-3)} k^{(d-3)} \quad (2.5.22)$$

O Wronskiano entre $\phi^d(k,r)$ e $f^{+d}(k,r)$ terá a forma:

$$W[f^{+d}(k,r), \phi^d(k,r)] = +2ik(kr)^{d-3} g f^{+d}(k,0) \quad (2.5.23)$$

Este Wronskiano também pode ser calculado na origem, pois lá conhecemos o comportamento da solução regular. Neste limite encontramos:

$$W[f^{+d}(k,r), \phi^d(k,r)] = (d-2) r^{d-3} f^{+d}(k,0) \quad (2.5.24)$$

Depois destas manipulações chegamos à expressão procurada:

$$\begin{aligned} \phi^d(k,r) &= \frac{d-2}{2ik} k^{-(p-1)} \left[f^{-d}(k,0) f^{+d}(k,r) - f^{+d}(k,0) f^{-d}(k,r) \right] \\ &= \frac{d-2}{2ik} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(p/2) 2^{p/2}}{\pi} k^{-(p-1)} \left[f^{+d}(k,r) e^{+i\frac{\pi}{4}(p-1) + i\delta_\ell(k)} \right. \\ &\quad \left. - f^{-d}(k,r) e^{-i\frac{\pi}{4}(p-1) - i\delta_\ell(k)} \right] |f^{+d}(k)| \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Para chegar à última linha usamos que:

$$f^{+d}(k) = |f^{+d}(k)| e^{-i\delta_\ell(k)} = |f^{-d}(k)|^* \quad (2.5.26)$$

Como sabemos a solução regular é bem comportada na origem. Podemos observar que $r^{-p} \psi^{+d}(k,r)$ também é solução da mesma equação e também tem um comportamento aceitável na origem. Estas duas soluções são

portanto linearmente dependentes. Podemos encontrar a constante de proporcionalidade comparando os seus comportamentos assintóticos. Obtemos então a relação:

$$\psi_0^{+d}(k,r) = e^{i\delta_\ell(k)} \frac{r^{-p}}{|f_0^{+d}(k)|} \phi_0^d(k,r) \quad (2.5.27)$$

Esta última relação tem um significado muito grande. Ela permite dar o significado da função de Jost quando a variável k for real. Sabemos que o comportamento da solução regular na origem é independente da forma do potencial. Por outro lado para momentos angulares superiores, como veremos, a solução regular se comporta como $r^{(p+1)}$ e não contribui para a probabilidade de encontrar a partícula na origem. A relação acima nos diz então que a probabilidade de encontrar a partícula na origem quando do espalhamento de um feixe incidente de partícula de momento bem definido é proporcional ao inverso do módulo do quadrado da função de Jost para a onda S . Por outro lado a equação (2.5.25) nos permite, usando o comportamento assintótico das soluções irregulares, identificar a fase da função de Jost por nós definida como o deslocamento de fase da função de onda parcial.

As propriedades de simetria das funções de Jost seguem-se das propriedades correspondentes para o caso da partícula livre. É preciso lembrar que as funções de Hankel não têm em geral um único valor. Pelo contrário elas apresentam um corte de 0 a $-i\infty$. É preciso estudar o

comportamento das funções de Bessel e de Hankel ao percorrer um circuito fechado em torno da origem para obter o seguinte resultado (8):

$$(f^{+d}(k^*, r))^* = f^{-d}(k, r) \quad (2.5.28)$$

$$f^{+d}(e^{i\pi} k, r) = e^{i\frac{\pi}{2}(p-1)} f^{-d}(k, r) \quad (2.5.29)$$

e

$$f^{+d}(e^{2i\pi} k, r) = e^{-ip\pi} f^{+d}(k, r) + e^{i(p-1/2)\pi} \frac{\text{sen}(p\pi)}{\text{sen}(\frac{p\pi}{2})} f^{-d}(k, r) \quad (2.5.30)$$

As expressões acima valem, a princípio, somente para partículas livres. Usando as equações integrais definidoras (2.5.10) e (2.5.11) estas relações se generalizam para potenciais diferentes de zero.

Para as funções de Jost obtemos, através das suas definições (2.5.6), as mesmas propriedades:

$$(f^{+d}(k^*))^* = f^{-d}(k) \quad (2.5.31)$$

$$f^{+d}(e^{i\pi} k) = f^{-d}(k) \quad (2.5.32)$$

e

$$f^{+d}(e^{2i\pi} k) = -e^{i\pi p} f^{+d}(k) + e^{i\frac{\pi p}{2}} \cos(\frac{p\pi}{2}) f^{-d}(k) \quad (2.5.33)$$

Desta última relação vemos que para dimensões pares as funções de Jost não são univalentes.

Se continuamos usando a mesma definição para os elementos de matriz S ,

$$S(k) = \frac{f^{-d}(k)}{f^{+d}(k)} \quad (2.5.34)$$

podemos concluir que as funções de Jost continuam com a propriedade de distinguir entre os polos de $S_1(k)$ aqueles que realmente representam estados ligados. Estes serão caracterizados pelos zeros de $f^{+d}(k)$ em $\text{Im}(k) > 0$.

Para encerrar esta relação de propriedades das funções Jost vamos citar, sem demonstrar, que $f^{+d}(k)$ é analítica no semiplano superior para potenciais que satisfaçam às mesmas condições que do capítulo anterior. Também esperamos que as funções de Jost se aproximem de "1" quando o módulo de k for muito grande, já que neste regime esperamos poder desprezar o potencial.

2.6- RELAÇÃO ENTRE MOMENTO ANGULAR E DIMENSÃO

Analisamos o problema do espalhamento em dimensões superiores definindo as funções regulares e irregulares para a equação (2.5.3). Podemos encontrar uma relação entre aquela equação e a equação de Schrodinger em três dimensões. Façamos a transformação:

$$\phi(k,r) = (kr)^{\frac{p-1}{2}} \psi(k,r) \quad (2.6.1)$$

onde $\psi(k,r)$ é suposta uma solução qualquer de (2.5.3). Obtemos então a seguinte equação para $\psi(k,r)$:

$$\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(p-1)(p+1)}{4r^2} + k^2 \psi(k,r) = V(r)\psi(k,r) \quad (2.6.2)$$

Mas esta é justamente a equação radial de Schrodinger em três dimensões para:

$$l = (p-1)/2 \quad (2.6.3)$$

Esta relação é de grande importância. Ela nos diz que toda solução da equação radial de Schrodinger em dimensão superior para momento angular nulo difere por apenas um fator, do tipo r elevado a uma potência, da solução da equação de Schrodinger em três dimensões e momento angular diferente de zero, para o mesmo potencial. Devemos investigar agora a questão das condições de contorno que usamos para definir as soluções regulares e irregulares. É fácil encontrar que realmente a solução irregular para $d \leq 3$ é levada à solução irregular para três dimensões:

$$f^{+d}(k,r) = (kr)^{\frac{p-1}{2}} f_{\ell}^{+}(k,r) \quad (2.6.4)$$

Usando as definições das funções de Jost em termos dos valores das soluções irregulares na origem obtemos que as funções de Jost são idênticas ($f^{+d}(k) =$

$f^{+3}_1(k)$). Como consequência deste fato podemos concluir que todo estado ligado em três dimensões com momento angular l bem definido corresponde a um estado ligado em dimensão superior com simetria (hiper)esférica. O mesmo vale para ressonâncias que correspondem a zeros da função de Jost próximos ao eixo real de k para l inteiro, dando como consequência um pico na contribuição daquela onda parcial para a seção de choque. Isto também pode ser visto como o resultado de um zero da função de Jost em dimensões superiores ímpares próximo ao eixo real de k .

Esta relação entre dimensão e momento angular não é completa no sentido de privilegiar dimensões ímpares. Às dimensões pares correspondem momentos angulares orbitais semiinteiros que não são observados na natureza.

Esta relação entre momento angular e dimensão possibilita dar uma nova interpretação às assim chamadas trajetórias de Regge^{(13),(14)}. As trajetórias de Regge resultam de se acompanhar o deslocamento de um zero da função de Jost (ou polo da matriz S) no plano complexo l (momento angular) ao variarmos k continuamente. Isto é, faz-se uma continuação analítica de modo a definir as funções de Jost para momento angular complexo. Isto pode ser feito diretamente tornando l não físico nas equações (1.8.9), (1.8.21) e (1.8.22). Toma-se então um momento angular arbitrário (provavelmente inteiro) e um valor de k que resulte numa função de Jost nula. Se $\text{Im}(k) > 0$ e $\text{Re}(k) = 0$ estaremos diante de um estado ligado verdadeiro. Agora variamos k conti-

nuamente variando concomitantemente o valor de l de modo a que a função de Jost continue nula. Este procedimento definirá uma trajetória no plano complexo l . Sempre que a trajetória passar por um valor de l físico teremos um novo estado ligado. Por outro lado passando próximo a um l físico mas para $k > 0$ teremos provavelmente uma ressonância. Assim esta trajetória liga vários estados ligados e ressonâncias para energias diferentes e momentos angulares distintos.

A relação encontrada acima permite interpretar a trajetória de Regge como se processando no plano complexo da dimensão. Estados ligados com momento angular nulo em dimensões diferentes estão conectados pela trajetória de Regge na dimensão. Como a transformação entre momento angular e dimensão é linear obteremos trajetórias semelhantes às trajetórias no plano l . A continuação analítica necessária para obter as funções de Jost para dimensões complexas será dada pelas equações (2.5.10), (2.5.11) e (2.5.6) tomando d complexo nestas expressões.

Esta relação entre as funções de Jost em dimensões superiores e função de Jost em dimensão usual com momento angular não nulo permite ainda demonstrar a sua analiticidade no plano superior e o limite unitário quando sob as condições citadas na seção 1.6 para $|k| \rightarrow \infty$.

Outra questão que devemos investigar é quanto à degenerescência. A onda S em qualquer dimensão é não degenerada. Para um valor fixo da energia só há um estado ligado que apresente função de onda com simetria esférica.

superiores teremos que atacar esta equação e definir suas soluções regular e irregulares. Para manter a análise uniforme vamos novamente fazer a transformação:

$$\psi_{\ell}^d(k,r) = r^{-p} \phi_{\ell}^d(k,r) \quad (2.7.2)$$

de modo que teremos de lidar com a equação:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d-3}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\ell(\ell+p)}{r^2} \right] \phi_{\ell}^d(k,r) = V(r) \phi_{\ell}^d(k,r) \quad (2.7.3)$$

A vantagem desta transformação, repetimos, está em que ela permite que o valor da função de onda irregular seja finito e geralmente não nulo na origem, para a onda S.

O programa a ser seguido agora é claro. Devemos definir as soluções irregulares e regulares da equação (2.7.3) através de seus comportamentos assintóticos. Notando que para $r \rightarrow \infty$ a equação se torna a mesma que para momento angular nulo e potencial desprezível, definimos as soluções irregulares pelas mesmas condições:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (kr)^{-\frac{(p-1)}{2}} e^{\pm ikr} f_{\ell}^{\pm d}(k,r) = 1 \quad (2.7.4)$$

O comportamento na origem será evidentemente modificado já que temos agora uma potencial efetivo que se comporta de maneira singular na origem. Para encontrar os possíveis comportamentos na origem expandimos a solução em série de potências na origem e substituímos na equação (2.7.3). A potência de menor ordem é encontrada então ser $r^{(p+1)}$

ou r^{-1} . O mesmo argumento quanto à aceitabilidade física da solução na origem nos leva a exigir o primeiro tipo de comportamento. Definimos então a solução regular pela condição de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(p+\ell)} \phi_{\ell}^d(k, r) = 1 \quad (2.7.5)$$

As soluções irregulares, por outro lado apresentarão geralmente o comportamento:

$$f_{\ell}^{\pm d}(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{Cte } r^{-\ell} \quad (2.7.6)$$

que não é aceitável fisicamente.

Novamente é importante definir estas soluções através de equações integrais. Estas terão como termos não homogêneos as soluções para a partícula livre. Estas se obtêm transformando a equação (2.7.3) na equação de Bessel, multiplicando-se a solução daquela por potências adequadas de r . Obtemos então as soluções:

$$f_{\ell}^{+d(0)}(k, r) = e^{+i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} H_{p/2+\ell}^1(kr) \quad (2.7.7.a)$$

$$f_{\ell}^{-d(0)}(k, r) = e^{-i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} H_{p/2+\ell}^2(kr) \quad (2.7.7.b)$$

$$\phi_{\ell}^{d(0)}(k,r) = k^{-(\ell+p/2)} \Gamma(\ell+\frac{p}{2}+1) r^{p/2} J_{p/2+\ell}(kr) \quad (2.7.8)$$

As funções de Green também são achadas facilmente do mesmo modo que tratamos o caso da onda S. Obtemos então as equações integrais:

$$\phi_{\ell}^d(k,r) = \phi_{\ell}^{d(0)}(k,r) + \int_0^r i \frac{\pi}{2} r'^{(1-p/2)} r^{p/2} \{ J_{p/2+\ell}(kr') H_{p/2+\ell}^1(kr) - J_{p/2+\ell}(kr) H_{p/2+\ell}^1(kr') \} V(r') \phi_{\ell}^d(k,r') dr' \quad (2.7.9)$$

e

$$f_{\ell}^{+d}(k,r) = f_{\ell}^{+d(0)}(k,r) + \int_0^r \left(-\frac{i\pi}{2} \right) r'^{(1-p/2)} r^{p/2} \left[J_{p/2+\ell}(kr) H_{p/2+\ell}^1(kr') - J_{p/2+\ell}(kr') H_{p/2+\ell}^1(kr) \right] V(r') f_{\ell}^{+d}(k,r') dr' \quad (2.7.10)$$

Para a função de onda física teremos:

$$U_{\ell}^d(k,r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} J_{\ell+p/2}(kr) + \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2i} r'^{(1-p/2)} r^{p/2} J_{p/2+\ell}(kr_{<}) H_{p/2+\ell}^1(kr_{>}) V(r') U_{\ell}^d(k,r') dr' \quad (2.7.11)$$

Por função de onda física entendemos aquela que comparece na expansão da função de onda total em d dimensões dada na equação (2.4.1). Esta função é definida então por:

$$\psi_d^+(\vec{k}, \vec{r}) = 2^{\frac{p-2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+p) i^{\ell} p_{\ell}(\cos\theta|p) (kr)^{-p} U_{\ell}^d(k,r) \quad (2.7.12)$$

$$\phi_{\ell}^d(k,r) = \frac{1}{2ik^p} \left[F_{\ell}^{-d}(k) f_{\ell}^{+d}(k,r) - F_{\ell}^{+d}(k) f_{\ell}^{-d}(k,r) \right] \quad (2.7.15)$$

onde:

$$F_{\ell}^{\pm d}(k) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)}}{k^{\ell}} \frac{(2\ell+p)}{2^{(p/2+\ell)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(p/2+\ell)}{2} f_{\ell}^{\pm d}(k) \quad (2.7.16)$$

Esta equação nos permite encontrar o comportamento no infinito da solução regular:

$$\phi_{\ell}^d(k,r) \longrightarrow |F_{\ell}^{+d}(k)| (kr)^{\frac{p-1}{2}} k^{-p} \text{sen}(kr+\delta(k) - \frac{\pi}{4}(p+2\ell-1)) \quad (2.7.17)$$

onde δ é a fase de $f_{\ell}^{+d}(k)$. Este comportamento nos permite então encontrar a contante de proporcionalidade entre a solução regular e a solução física. Obtemos:

$$U_{\ell}^d(k,r) = \frac{k^p e^{i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)}}{F_{\ell}^{+d}(k)} \phi_{\ell}^d(k,r) \quad (2.7.18)$$

Esta penúltima equação nos permite também identificar a fase da função de Jost com o deslocamento de fase da solução física.

Vimos portanto que é possível generalizar o conceito de funções de Jost também para dimensões superiores e momentos angulares não nulos. Podemos nos perguntar agora sobre a relação entre momentos angulares superiores em dimensões superiores e momentos angulares superiores em três dimensões. Isto é se há relação entre as funções de

Jost naquelas duas situações. A resposta é novamente afirmativa.

Podemos chegar à resposta à pergunta formulada no parágrafo precedente fazendo $f(k,r) = r^{(p-1)/2} \tilde{f}(k,r)$. Se a primeira satisfaz à equação (2.7.3) para momento angular l a segunda obedece à equação radial de Schrodinger em três dimensões para momento angular l' dado por:

$$l' = l + (p-1)/2 \quad (2.7.19)$$

Novamente temos de conferir as condições de contorno respectivas e obtemos a relação:

$$f_{\ell}^{+d}(k,r) = (kr)^{\frac{p-1}{2}} f_{\ell + \frac{p-1}{2}}^{+3}(k,r) \quad (2.7.20)$$

Para as funções de Jost obtemos a igualdade:

$$f_{\ell}^{+d}(k) = f_{\ell + \frac{p-1}{2}}^{+3}(k) \quad (2.7.21)$$

Vemos portanto que é sempre possível encontrar um momento angular (ainda que fracionário) tal que as características de um determinado estado de uma partícula em dimensão superior seja obtido por meio de um problema equivalente em dimensão usual.

A analogia só não é perfeita mais uma vez no que diz respeito à degenerescência. Se permitimos dependência não só em θ mas em todos os ângulos ao realizar a análise de ondas parciais teremos de usar não mais os

polinômios de Gegenbauer mas as funções hiperesféricas (12).

As funções hiperesféricas são soluções da equação:

$$\nabla^2 r^\ell Y_\ell(\theta, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p) = 0 \quad (2.7.22)$$

Elas generalizam os harmônicos esféricos para qualquer dimensão e podem ser utilizadas para a expansão de uma função qualquer dos ângulos θ e ϕ . Se $\Psi(r)$ é uma solução da equação de Schrodinger e fazemos:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r) Y_\ell(\theta, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p) = 0 \quad (2.7.23)$$

obtemos que $\Psi(r)$ satisfaz à equação (2.7.1). A função acima definida representa uma partícula com momento angular total $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ mais genérica que a anterior.

Existe um número N de funções hipergeométricas independentes:

$$N = (2\ell+p) \frac{(\ell+p-1)!}{\ell! p!} \quad (2.7.24)$$

Esta portanto é a degenerescência da energia para o mesmo valor do momento angular total. Ela é diferente conforme a dimensão mesmo para o mesmo valor da energia.

CAPÍTULO III

EXEMPLOS DE POTENCIAIS ANALITICAMENTE SOLÚVEIS

3.1- INTRODUÇÃO:

Neste capítulo pretendemos apresentar alguns exemplos de potenciais que permitam calcular as funções de Jost em dimensões arbitrárias. Começaremos com o poço esférico de potencial que devido à sua simplicidade nos permite utilizar os conceitos introduzidos no capítulo segundo sem necessidade de qualquer generalização. Em seguida trataremos dos potenciais de Bargmann que são interessantes pois resultam em uma função de Jost e num elemento de matriz S para dimensão e momento angular fixos com a dependência em "k" através de uma função racional. A seguir discutiremos o oscilador harmônico e o potencial Coulombiano que requerem modificações nas definições introduzidas no segundo capítulo, já que não pertencem à classe dos potenciais que satisfazem a (1.6.15) ou (1.6.16). Veremos então que mesmo sem satisfazer àquelas restrições pode-se definir funções de Jost que mantenham algumas das propriedades citadas nos capítulos anteriores, em especial o fato de seus zeros resultarem nos estados ligados.

3.2- POÇO ESFÉRICO DE POTENCIAL

Consideraremos o seguinte potencial^{(15),(16)}:

$$V(r) = \begin{cases} -V & , \text{ se } r < a \\ 0 & , \text{ se } r > a \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Este nos fornecerá a equação radial de Schrodinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{k^2}{2m} + V \right] \psi(r) = 0$$

para $r < a$ e, para $r > a$, teremos:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{k^2}{2m} \right] \psi(r) = 0 \quad (3.2.2)$$

Se agora fazemos a transformação da função de onda descrita no capítulo 2, seção 5, $\psi(r) = r^{-p}\phi(\rho)$, ficaremos com a equação, após fazer $\hbar = 2m = 1$:

$$\ddot{f}^{+d}(k,r) - \frac{d-3}{r} \dot{f}^{+d}(k,r) + k^2 f^{+d}(k,r) = V(r) f^{+d}(k,r) \quad (3.2.3)$$

Para $r < a$ obtemos a seguinte função de onda:

$$\begin{aligned} f^{+d}(k,r) = & \alpha e^{+i\frac{\pi}{4}(p+1)} \sqrt{\pi/2} (kr)^{p/2} H_{p/2}^1(k'r) + \\ (1) & \\ & + B e^{+i\frac{\pi}{4}(p+1)} \sqrt{\pi/2} (kr)^{p/2} H_{p/2}^2(k'r) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

onde "α" e "B" são constantes que dão á solução

anterior o caráter de soluções gerais. Na equação anterior teremos também $k^{\prime 2} = k^2 + V$.

Por outro lado para $r > a$ obtemos:

$$f_{(2)}^{+d}(k, r) = e^{+i\frac{\pi}{4}(p+1)} \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} (kr)^{p/2} H_{p/2}^1(kr) \quad (3.2.5)$$

que é a mesma solução apresentada na seção 2.5 para a onda livre. A condição de contorno obedecida pela solução acima (2.5.3) é a adequada para as soluções irregulares.

Para encontrar as constantes α e B temos de impor as condições de contorno dadas pela continuidade da função de onda e de sua derivada espacial ao atravessar a descontinuidade do potencial em $r=a$. O resultado será

$$\alpha = \frac{k\dot{H}^1 H'^2 - k'H^1 \dot{H}'^2}{k' [H'^2 \dot{H}'^1 - H'^1 \dot{H}'^2]} \quad (3.2.6)$$

e

$$B = \frac{k'H^1 \dot{H}'^1 - k\dot{H}^1 H'^1}{k' [H'^2 \dot{H}'^1 - H'^1 \dot{H}'^2]} \quad (3.2.7)$$

Onde adotamos a notação:

$$\begin{aligned} H^1 &= H_{p/2}^1(ka), \\ H^2 &= H_{p/2}^2(ka), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} H'^1 &= H_{p/2}^1(k'a), \\ H'^2 &= H_{p/2}^2(k'a) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

e notação análoga para as derivadas, que se referem sempre ao argumento da função de Bessel.

As funções de Jost se obtêm então diretamente da definição (2.5.5). O resultado é:

$$f^{+d}(k) = -\frac{i}{2} \pi \left(\frac{k}{k'}\right)^{p/2} a \left[k \dot{H}_{p/2}^1(ka) J_{p/2}(k'a) - k' \dot{J}_{p/2}(k'a) H_{p/2}^1(ka) \right] \quad (3.2.10)$$

Podemos comprovar as propriedades já citadas das funções de Jost. Para ver que quando o momento tende a infinito (em módulo), a função de Jost se aproxima de um basta notar que, neste limite teremos $k' \rightarrow k e^{(8)}$:

$$J_{p/2}(k'a) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k'a}} \cos(k'a - \frac{\pi}{4} (p+1)) \quad (3.2.11)$$

$$H_{p/2}^1(ka) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} e^{i(ka - \frac{\pi}{4} (p+1))} \quad (3.2.12)$$

Os estados ligados serão obtidos através dos zeros de $f^d_1(k)$, ou seja, os auto-valores do Hamiltoniano serão, as raízes da equação:

$$\sqrt{E} \dot{K}_{p/2}(\sqrt{E} a) J_{p/a}(k'a) - k' \dot{J}_{p/2}(k'a) K_{p/2}(\sqrt{E} a) \quad (3.2.13)$$

e a energia será $E = -k^2$. Aqui $K_{p/2}(z)$ é a função modificada de Bessel⁽⁸⁾ e $k' = \sqrt{V - E}$.

Observemos que poderíamos ter obtido a mesma equação resolvendo diretamente o problema de auto-valores para a equação (3.2.1) do modo usual exigindo bom comporta-

mento tanto na origem como no infinito. Obteríamos então o mesmo resultado.

Para tornar completa a análise incluímos o valor da função de onda regular, calculada de modo análogo à irregular, notando que para $r < a$ a solução será a mesma que para a onda livre (2.5.11). Teremos portanto:

$$\begin{aligned} \phi^{\tilde{d}}(k,r) = & i^{\pi} a k^{-p/2} \Gamma(p/2 + 1) 2^{p/2-2} r^{p/2} \times \\ & \times \left[\{KJ'\dot{H}^2 - K'j'H^2\} H_{p/2}^1(kr) - \{KJ'\dot{H}^1 - K'j'H^1\} H_{p/2}^2(kr) \right] \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

para $r > a$ e para $r < a$

$$\phi^{\tilde{d}}(k,r) = K^{-p/2} 2^{p/2} \Gamma(p/2 + 1) r^{p/2} J_{p/2}(k'r) \quad (3.2.15)$$

Pode-se calcular ainda a segunda função irregular $f^{-d}(k,r)$, de modo extremamente semelhante ao usado para encontrar $f^{+d}(k,r)$, e obter então $f^{-d}(k)$. Verifica-se então que realmente valem as relações:

$$f^{+d}(k,r) = [f^{-d}(k^*,r)]^* \quad (3.2.16)$$

e

$$f^{+d}(k) = [f^{-d}(k^*)]^* \quad (3.2.17)$$

Também se verifica explicitamente que a relação (2.5.23) que expressa a solução regular como combinação

linear das irregulares é válida neste caso. Consequentemente a fase da função de Jost nos dará o deslocamento de fase.

3.3- POTENCIAIS DE BARGMANN

Como um segundo exemplo de potencial que resulte em uma função de Jost de interesse lidaremos com os potenciais de Bargmann. Tratam-se de potenciais que resultam em funções de Jost e elemento de matriz S , para um determinado momento angular (em 3 dimensões) que são funções racionais do momento "k". Eles servem de modelos simples que permitem a introdução de estados ligados e ressonâncias com a energia que se deseje. Foram eles introduzidos inicialmente por Bargmann em 1949⁽¹⁸⁾ de modo restrito somente à onda S .

Para encontrar tais potenciais seguiremos inicialmente um procedimento devido a R. G. Newton⁽⁷⁾ que possibilita construir tais potenciais para momento angular arbitrário. Trata-se de um método desenvolvido inicialmente por W. R. Theis⁽¹⁹⁾. Devido à relação encontrada entre momento angular e dimensão, este método possibilita generalizar tais potenciais para dimensão arbitrária. É este método adaptado para nossas pretensões que discutiremos a seguir.

A importância dos potenciais de Bargmann reside ainda em que eles foram os primeiros exemplos de Solução do

problema inverso do espalhamento. O problema inverso consiste de, ao invés de calcularmos os resultados do espalhamento de uma partícula por potencial conhecido, encontrar o potencial que produza certos resultados do espalhamento experimentalmente observado. Neste caso queremos que a função de Jost tenha uma forma determinada.

Queremos portanto que as funções de Jost tenham a forma:

$$f_{\ell}^{+}(k) = \frac{\pi}{i} \frac{k - \alpha_i}{k - B_i} \quad (3.3.1)$$

onde α_i e B_i são constantes arbitrárias.

Denotaremos ainda:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_i, & \text{se } \text{Im}(\alpha_i) > 0 \\ \alpha_i &= y_i, & \text{se } \text{Im}(\alpha_i) < 0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Observemos que somente para $k = x_i$ (quando $\text{Re}(x_i) = 0$) é que teremos verdadeiros estados ligados. Em $k = B_i^*$ teremos um polo falso da matriz S :

$$S(k) = \frac{\pi}{i} \frac{k - \alpha_i^*}{k - B_i^*} \cdot \frac{k - B_i}{k - \alpha_i} \quad (3.3.3)$$

Para encontrar os potenciais que produzam (3.3.1) introduzimos as funções:

$$\chi_i(k, r) = \frac{W[\phi_i^{(0)}(B_i, r), f_i^{+(0)}(k, r)]}{B_i^2 - k^2} \quad (3.3.4)$$

e

$$Y_i(k,r) = \frac{W[\phi_\ell^{(0)}(B_i, r), \phi_\ell^{(0)}(k, r)]}{B_i^2 - k^2} \quad (3.3.5)$$

aqui $\phi^{(0)}_1(k,r)$ e $f^{(0)}_1(k,r)$ são as soluções regulares e irregulares da equação de Schrodinger para onda livre.

Definimos a seguir as funções $K_i(r)$ através das equações algébricas:

$$\sum_i X_i(-\gamma_j, r) K_i(r) = -f_\ell^{+(0)}(-k_j, r) \quad (3.3.6)$$

$$\sum_i [X_i(-x_i, r) - c_j Y_i(x_j, r)] = -f_\ell^{+(0)}(-x_j, r) + c_j \phi_\ell^0(x_j, r) \quad (3.3.7)$$

aqui c_j são constantes arbitrárias, havendo uma para cada estado ligado. Sua maior importância reside em que elas são parâmetros da degenerescência do potencial. Ou seja ao final do processo teremos uma família de potenciais para cada função de Jost que resulte em estados ligados.

É fácil mostrar então que as funções

$$h(k,r) \equiv f_\ell^{+(0)}(k,r) + \sum_i K_i(r) X_i(k,r) \quad (3.3.8)$$

e

$$g(k,r) \equiv \phi_\ell^{(0)}(k,r) + \sum_i K_i(r) Y_i(k,r) \quad (3.3.9)$$

satisfazem às equações:

$$-\frac{d^2}{dr^2} h(k,r) + [\ell(\ell+1)r^{-2} + V(r) - K^2]h(k,r) \quad (3.3.10)$$

e

$$= \sum_i \rho_i(r) X_i(k,r)$$

$$-\frac{d^2}{dr^2} g(k,r) + [\ell(\ell+1)r^{-2} + V(r) - K^2] g(k,r) \quad (3.3.11)$$

onde

$$= \sum_i \rho_i(r) Y_i(k,r)$$

$$V(r) = 2 \frac{d}{dr} \left[\sum_i K_i(r) \phi_\ell^{(0)}(B_i, r) \right] \quad (3.3.12)$$

e

$$\rho_i(r) = -\frac{d^2}{dr^2} K_i(r) + [\ell(\ell+1)r^{-2} + V(r) - B_i^2] K_i(r) \quad (3.3.13)$$

Pode-se agora demonstrar que $\rho_i(r)$ é geralmente nulo. Para isto teremos de notar que devido às próprias definições as funções $h(k,r)$ e $g(k,r)$ satisfazem às condições:

$$h(-\gamma_i, r) = 0 \quad (3.3.14)$$

e

$$h(-x_j, r) - c_j g(x_j, r) = 0 \quad (3.3.15)$$

Consequentemente pode-se ver que através das equações

(3.3.10) e (3.3.11) se demonstra a validade das seguintes relações algébricas:

$$\sum_i X_i(-\gamma_j, r) \rho_i(r) = 0 \quad (3.3.16)$$

$$\sum_i \left[X_i(-x_j, r) - c_j Y_i(x_j, r) \right] \rho_i(r) = 0 \quad (3.3.17)$$

Vistas como equações matriciais homogêneas para $\rho(r)$, devido ao caráter genérico das constantes, concluimos que $\rho_i(r)$ é nulo.

Assim as funções $h(k, r)$ e $g(k, r)$ são soluções da equação de Schrodinger para o potencial $V(r)$. Veremos que podemos relacioná-las com as soluções regular e irregular. Precisamos estudar as condições de contorno satisfeitas por aquelas soluções.

Para $r \rightarrow \infty$ quando $\text{Im}(B_i) < 0$ obtem-se, utilizando os comportamentos assintóticos das soluções para onda livre:

$$X_i(k, r) \rightarrow \frac{-(2\ell+1)\Gamma(\ell+1/2)e^{-i\pi\ell/2}}{\pi B_i^\ell} \cdot \frac{e^{i(k+B_i)r}}{2B_i(k+B_i)} \quad (3.3.18)$$

e

$$Y_i(x_j, r) \rightarrow \frac{i(2\ell+1)^2 [\Gamma(+1/2)]^2}{\pi^2 x_j^\ell B_i^\ell} \cdot \frac{e^{i(B_i-x_j)r}}{4 B_i x_j (x_j-B_i)} \quad (3.3.19)$$

Substituindo nas equações (3.3.6) e (3.3.7) obtemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{K_i(r) e^{iB_i r} (2\ell+1)\Gamma(\ell+1/2) e^{-i\pi\ell/2}}{2\pi B_i^{\ell+1}} = a_i \quad (3.3.20)$$

onde as constantes a_i satisfazem a

$$1 - \sum_i \frac{a_i}{\alpha_j - B_i} = 0, \quad \forall_j \quad (3.3.21)$$

Mas este é justamente o comportamento da função de Jost (3.3.1): a expressão é nula para $k=\alpha_i$ e tem um polo em $k=B_i$ sendo ainda uma função racional de k . Obtemos então que:

$$f_\ell^+(k) = 1 - \sum_i \frac{a_i}{k - B_i} \quad (3.3.22)$$

Resta ver que esta é realmente a função de Jost produzida pelo potencial $V(r)$. Usando (3.3.8), (3.3.21) e (3.3.23) obtemos:

$$h(k,r) \rightarrow e^{ikr} f_\ell^+(-k) \quad (3.3.23)$$

Portanto a solução irregular para o potencial $V(r)$ será:

$$f_\ell^+(k,r) = \frac{h(k,r)}{f_\ell^+(-k)} \quad (3.3.24)$$

Do mesmo modo se demonstra que $g_1(k,r)$ satisfaz à mesma condição de contorno que a solução regular da

equação de Schrodinger. É suficiente tomar o limite quando r tende a zero das equação (3.3.9) e observar que devido a (3.3.6) e (3.3.7) teremos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\ell K_i(r) = c^t e \quad (3.3.25)$$

A seguir é facil encontrar o comportamento assintótico quando r tende a infinito de $g(k,r)$:

$$g(k,r) \rightarrow \frac{1}{2ik} \left[\frac{(2\ell+1)}{\pi k^\ell} \Gamma(\ell + 1/2) e^{-i\pi\ell/2} e^{ikr} f^+(k) - \frac{(2\ell+1)}{\pi k^\ell} \Gamma(\ell + 1/2) e^{+i\frac{\pi}{2}\ell} f_\ell^+(-k) e^{-ikr} \right] \quad (3.3.26)$$

Usando as relações (2.7.15) e (2.7.16) chegamos então à conclusão de que $f^+_{\ell}(k)$ é realmente a função de Jost para este potencial.

Podemos então, usando a relação momento angular dimensão, encontrar os potenciais de Bargmann para dimensões superiores.

Por exemplo, se queremos apenas um polo que não corresponda a estado ligado, isto é se queremos que:

$$f^{+d}(k) = \frac{k-\gamma}{k-B} \quad (3.3.27)$$

onde $\gamma = -ia$, $B = -ib$ e $a, b > 0$, obtemos, se aplicamos o método:

$$V_d(r) = \frac{2(B^2 - \gamma^2)}{[\gamma \dot{H}J + BH\dot{J}]} \left[-\gamma^2 \dot{H}^2 J^2 + B^2 \dot{J}^2 H^2 - \right. \\ \left. - (\gamma^2 - B^2) H^2 J^2 + \frac{1}{r} \left[B^2 J \dot{J} H^2 - \gamma^2 \dot{H} H J^2 \right] \right] \quad (3.3.28)$$

ou

$$V_d(r) = 2 \frac{d}{dr} \left[\frac{(B^2 - \gamma^2) H J}{[\gamma \dot{H}J + BH\dot{J}]} \right] \quad (3.3.29)$$

onde

$$H = H_{p/2}^1(-\gamma r)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} H_{p/2}^1(-\gamma r)$$

$$J = J_{p/2}(Br)$$

$$\dot{J} = \frac{1}{B} \frac{d}{dr} J_{p/2}(Br) \quad (3.3.30)$$

obs: $p=(d-2)$.

A função de onda irregular será:

$$f_d^+(k, r) = + i e^{i\frac{\pi}{4}(p-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kr)^{p/2} H_{p/2}^1(kr) \times \\ \times \frac{K+B}{K+\gamma} + \frac{B^2 - \gamma^2}{(B-K)(K+\gamma)} \times \frac{\begin{bmatrix} K \frac{\dot{H}_{p/2}^1(Kr)}{H_{p/2}^1(-\gamma r)} - B \frac{\dot{J}_{p/2}(Br)}{J_{p/2}(Br)} \\ H_{p/2}^1(-\gamma r) & J_{p/2}(Br) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \gamma \frac{\dot{H}_{p/2}^1(-\gamma r)}{H_{p/2}^1(-\gamma r)} + B \frac{\dot{J}_{p/2}(Br)}{J_{p/2}(Br)} \\ H_{p/2}^1(-\gamma r) & J_{p/2}(Br) \end{bmatrix}} \quad (3.3.31)$$

O elemento de matriz S será:

$$S^d(k) = \frac{K+\gamma}{K+b} \frac{K-B}{K-\gamma} \quad (3.3.32)$$

onde se deve observar o polo falso em $K=+ib$.

Finalmente a função de onda regular será:

$$\phi^d(k,r) = K^{-p/2} 2^{p/2} \Gamma(p/2 + 1) r^{p/2} J_{p/2}(kr) \cdot \left[1 + \frac{B^2 - \gamma^2}{B^2 - K^2} \cdot \frac{\left[K \frac{\dot{J}_{p/2}(kr)}{J_{p/2}(kr)} - B \frac{\dot{J}}{J} \right]}{\left[\frac{\dot{H}}{H} + B \frac{\dot{J}}{J} \right]} \right] \quad (3.3.33)$$

3.4- FUNÇÕES DE JOST PARA O OSCILADOR HARMÔNICO

O oscilador harmônico é um exemplo de um sistema físico para o qual não se pode falar propriamente de espalhamento. Como o potencial cresce com a distância não existem estados não ligados. Mesmo assim podemos definir funções de Jost que relacionam soluções regulares e irregulares da equação radial de Schrodinger e cujos zeros darão os estados ligados. Em três dimensões elas foram introduzidas, para o oscilador harmônico, por Alessandrini e Giambiagi em 1963(20).

Em d dimensões teremos a equação radial de Schrodinger dada pela equação (2.7.1). Anteriormente havíamos redefinido a função de onda de modo a que o valor da função de onda irregular na origem fosse finito e não nulo (para

onda S). Vamos continuar usando a mesma definição, já que na origem o potencial para o oscilador harmônico será bem comportado no sentido dado no primeiro capítulo. Portanto novamente fazemos:

$$\psi(r) = r^{-p} \phi(r)$$

e a equação para $\phi(r)$ neste caso resulta:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(d-3)}{r} \frac{d}{dr} + E - B^2 r^2 - \frac{\ell(\ell+p)}{r} \right] \phi(r) = 0 \quad (3.4.1)$$

onde $2"B"$ é a frequência (clássica) do oscilador e $"E"$ a energia do sistema. Neste caso não resulta de interesse introduzir a variável $"k^2"$ como se verá a seguir.

Busquemos pois as soluções de (3.4.1). Para tanto fazemos:

$$\phi(r) = r^{(p+\ell)} \exp(-1/2 Br^2) \rho(r) \quad (3.4.2)$$

e transformamos a variável de r para:

$$\xi = Br^2$$

obtendo então a equação:

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} \rho(\xi) + \left[\frac{p+2\ell+2}{2} - \xi \right] \frac{d}{d\xi} \rho(\xi) + \frac{(E-B[p+2\ell+2])}{4B} \rho(\xi) = 0 \quad (3.4.3)$$

que nada mais é que a equação confluyente hypergeométrica:

$$z \frac{d^2}{dz^2} Y(z) + (c-z) \frac{d}{dz} Y(z) - a Y(z) \quad (3.4.4)$$

para os coeficientes

$$a = \frac{P + 2l + 2}{4} - \frac{E}{4B} \quad (3.4.5)$$

e

$$c = \frac{P + 2l + 2}{2} \quad (3.4.6)$$

Segundo notação de Morse e Feshbach⁽²¹⁾ teremos duas soluções independentes de (3.4.6) dadas por:

$$F(a|c|z) = 1 + \frac{a}{c} z + \frac{a(a+1)}{2!c(c+a)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \quad (3.4.7)$$

e

$$z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \quad (3.4.8)$$

Observando que a segunda destas soluções é singular na origem (levando a uma densidade de probabilidade infinita de encontrar a partícula na origem) definiremos a solução regular como:

$$\phi_\ell^d(E, r) = r^{P+\ell} \exp\left(-\frac{1}{2} Br^2\right) F\left(\frac{P+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B} \mid \frac{P+2\ell+2}{2} \mid Br^2\right) \quad (3.4.9)$$

cujo comportamento na origem será o já definido no capítulo anterior:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(p+l)} \phi_{\ell}^d(E, r) = 1 \quad (3.4.10)$$

Tais soluções são bem comportadas na origem mas no infinito geralmente divergem. Para definir as soluções irregulares precisaremos redefinir as condições no infinito onde o potencial diverge. Obviamente as definições anteriores não funcionarão neste caso. Podemos recorrer a outras duas soluções independentes da equação confluyente hypergeométrica:

$$U_1(a|c|z) = \frac{e^z z^{a-c}}{\Gamma(c-a)} \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du \quad (3.4.11)$$

e

$$U_2(a|c|z) = \frac{e^{ia\pi} z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du \quad (3.4.12)$$

cujos comportamentos assintóticos são:

$$U_1(a|c|z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} z^{a-c} \exp(z) \quad (3.4.13)$$

e

$$U_2(a|c|z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} e^{ia\pi} z^a \quad (3.4.14)$$

Definimos então as soluções irregulares

$$f_{1\ell}^d(E,r) = r^{\ell+p} \exp(-\frac{1}{2} Br^2) U_2\left(\frac{p+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B} \mid \frac{p+2\ell+2}{2} \mid Br^2\right) \quad (3.4.15)$$

e

$$f_{2\ell}^d(E,r) = r^{\ell+p} \exp(-\frac{1}{2} Br^2) U_1\left(\frac{p+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B} \mid \frac{p+2\ell+2}{2} \mid Br^2\right) \quad (3.4.16)$$

com os comportamentos assintóticos:

$$f_{1\ell}^d(E,r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{i\pi\left(\frac{p+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B}\right)} B^{\left\{\frac{E}{4B} - \frac{p+2\ell+2}{4}\right\}} \times r^{\left\{\frac{E}{2B} + \frac{p-2}{2}\right\}} \exp(-1/2 Br^2) \approx 0 \quad (3.4.17)$$

e

$$f_{2\ell}^d(E,r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} B^{-\left[\frac{p+2\ell+2}{4} + \frac{E}{4B}\right]} r^{\left(\frac{p-2}{2} - \frac{E}{4B}\right)} \exp(1/2 Br^2) \approx \infty \quad (3.4.18)$$

Estes comportamentos são bem diferentes dos comportamentos usuais para potenciais bem comportados. No entanto, devido ao comportamento aceitável fisicamente de $f_{1\ell}^d(E,r)$ no infinito, as funções de Jost podem ser definidas através do Wronskiano:

$$f_{\ell}^d(E) = W\left[f_{1\ell}^d(E,r), \phi_{\ell}^d(E,r)\right] r^{-(d-3)} \quad (3.4.19)$$

Pode-se demonstrar que $f_{1\ell}^d(E)$ independe de r . Realmente lembrando que o Wronskiano de duas soluções da equação (3.4.1) têm a dependência espacial do tipo

const $r^{(d-3)}$. Os zeros da função de Jost correspondem então a estados ligados, pois quando isto ocorrer as soluções regular e irregular serão proporcionais.

Podemos investigar agora as relações entre a função de Jost e as soluções regular e irregulares tentando expressar a solução regular como combinação das irregulares. Anteriormente $F^{+d}_1(k,r)$ e $F^{-d}_1(k,r)$ eram soluções independentes. Agora não temos esta relação pois as soluções irregulares dependem apenas de E e não de K . Podemos no entanto encontrar relação análogas àquelas que relacionavam as duas soluções irregulares como continuações analíticas uma da outra.

Utilizando então a relação (que se demonstra facilmente através das equações integrais definidoras):

$$U_1\left(\frac{c}{2} - a|c|z\right) = e^z U_2\left(\frac{c}{2} + a|c|e^{i\pi}z\right) \quad (3.4.20)$$

encontramos a relação entre as duas soluções irregulares:

$$f_{2\ell}^d(E,r) = e^{-i\pi\left(\frac{p+\ell}{2}\right)} f_{1\ell}^d(-E, e^{i\pi/2}r) \quad (3.4.21)$$

esta então é a relação que substitui (2.5.9) para o caso do oscilador harmônico. Usando agora a relação:

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} U_1(a|c|z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} U_2(a|c|z) \quad (3.4.22)$$

podemos encontrar a expressão pretendida:

$$\phi_{\ell}^d(E,r) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{-i\pi(\frac{p+\ell}{2})} f_{1\ell}^d(-E,ir) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} f_{1\ell}^d(E,r) \quad (3.4.23)$$

onde "a" e "c" estão definidas em (3.4.5) e (3.4.6). A partir desta obtemos então as funções de Jost:

$$f_{\ell}^d(E) = -1 r^{-(p-1)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{i\pi(\frac{p+\ell}{2})} W \left[f_{1\ell}^d(-E,ir), f_{1\ell}^d(E,r) \right] \quad (3.4.24)$$

e calculando o Wronskiano usando o comportamento assintótico destas funções obtemos finalmente:

$$f_{\ell}^d(E) = \frac{2\Gamma(\frac{p+2\ell+2}{2})}{\Gamma(\frac{p+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B})} B^{-\left(\frac{p}{2} + \ell\right)} e^{i\pi\left(\frac{p+2\ell+2}{4} - \frac{E}{4B}\right)} \quad (3.4.25)$$

Os estados ligados serão dados pelos zeros de $f_{1\ell}^d(k)$ ou os polos da função $\Gamma((p+2\ell+2)/4 - E/4B)$. Portanto:

$$E = (2\eta + \ell + \frac{d}{2}) \hbar\omega \quad (3.4.26)$$

onde novamente inserimos os fatores \hbar e m .

Vale a pena ressaltar que a função de Jost depende somente de $(p+2\ell)$ e não de "p" e "l" separadamente, o que é um reflexo da relação entre dimensão e momento angular por nós encontrada. Finalmente pode-se notar que a função de Jost poderia equivalentemente ter sido definida por:

$$f_{\ell}^d(E,r) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{\ell(2\ell+p)} f_{1\ell}^d(E,r) \quad (3.4.27)$$

relação que decorre de se utilizar a expressão:

$$U_2(a|c|z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi a} F(a|c|z) + \\ + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \quad (3.4.28)$$

e utilizar a expansão do segundo membro na origem.

A degenerescência neste caso, como no poço esférico de potencial e no potencial Coulombiano tratado a seguir, será dado pelo número de harmônicos hiperesféricos independentes para cada valor de "d" e "l", como vimos no capítulo anterior. O mesmo valor das energias foi obtido também por Guilherme Dussel que resolve o problema de autovalores através da equação (3.4.3) reconhecendo-a como a equação de Laguerre.

A conclusão desta seção é pois que embora o potencial não seja bem comportado no sentido do primeiro capítulo é possível ainda assim generalizar o conceito das funções de Jost que retêm muitas de suas propriedades, ou apresentam propriedades semelhantes.

3.5- ÁTOMO DE HIDROGÊNIO.

Nosso próximo exemplo será o átomo de hidrogênio, ou o potencial de Coulomb. Inicialmente faremos uma

advertência. Em d dimensões o potencial Coulombiano mais natural seria do tipo:

$$V(r) \propto r^{2-d} \quad (3.5.1)$$

e não o que tomaremos aqui:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (3.5.2)$$

A razão está em que uma das características do potencial Coulombiano ordinário é que o operador Laplaciano aplicado a ele resulta proporcional à função delta de Dirac. Em dimensões superiores se queremos manter esta característica somos levados ao potencial (3.5.1). Entretanto a existência de estados ligados para aquele potencial não é fácil de ser definida pelos métodos usuais.

Trataremos portanto de resolver a equação de Schrodinger com o potencial (3.5.2), que, apesar de não estar incluído entre aqueles tipos descritos nos capítulos anteriores devido ao seu longo alcance, parece-nos importante o suficiente para que nos ocupemos dele. A razão para sua importância reside não apenas no interesse no espalhamento Coulombiano puro como também no fato de o espalhamento de qualquer partícula carregada por outra mesmo que envolva outros potenciais utilizar ainda aquele potencial.

Teremos então a seguinte equação para as funções de onda radiais:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d-3}{r} \frac{d}{dr} + k^2 + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell(\ell+p)}{r^2}\right) \phi(r) = 0 \quad (3.5.3)$$

supondo evidentemente que $2m=h=1$. A função de onda total terá, como sabemos, a forma:

$$\psi(r) = r^{-P} \phi(r) P_\ell(\cos \theta | p) \quad (3.5.4)$$

Podemos transformar (3.5.3) para uma forma bem conhecida fazendo a transformação:

$$\phi(r) = r^{(\ell+p)} e^{ikr} \rho(r) \quad (3.5.5)$$

e mudando a variável para:

$$\xi = -2i kr \quad (3.5.6)$$

obtemos a equação:

$$\left\{ \xi \frac{d^2}{d\xi^2} + \left[2\ell+p+1-\xi \right] \frac{d}{d\xi} + \left[\frac{2\ell+p+1}{2} + \frac{\alpha}{2ik} \right] \right\} \rho(\xi) = 0 \quad (3.5.7)$$

que é novamente a equação confluyente hypergeométrica (3.4.4) para

$$a = (2\ell+p+1)/2 + \alpha/2ik \quad (3.5.8)$$

e

$$c = 2\ell+p+1 \quad (3.5.9)$$

Como na seção anterior teremos dois tipos de comportamentos na origem, levando às duas soluções:

$$\begin{aligned} \phi_{\ell}^d(k,r) &= r^{\ell+p} e^{ikr} F\left(\ell + \frac{p+1}{2} - \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell + p + 1 \mid -2ikr\right) \\ &= r^{\ell+p} e^{ikr} F\left(\ell + \frac{p+1}{2} + \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell + p + 1 \mid 2ikr\right) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

e

$$g_{\ell}^d(k,r) = r^{-\ell} e^{ikr} F\left(\frac{i\alpha}{2k} - \frac{2\ell+p-1}{2} \mid 1 - 2\ell - p \mid -2ikr\right) \quad (3.5.11)$$

Onde usamos a relação $F(a|c|z) = e^z F(c-a|c|-z)$ (21). A primeira destas soluções será a solução regular enquanto a segunda não é aceitável na origem.

A seguir, precisaremos definir a solução irregular. Podemos proceder como no caso do oscilador harmônico. Lá tivemos de encontrar soluções da equação de Schrodinger cujo comportamento no infinito fosse bem definido. Na verdade o que está em jogo é o fenômeno de Stokes para as funções confluentes hypergeométricas. As soluções definidas acima têm diferentes comportamentos assintóticos quando $|r| \rightarrow \infty$ dependendo do valor da fase de "k". As soluções que têm um comportamento uniforme no infinito serão:

$$\begin{aligned} f_{\ell}^{+d}(k,r) &= (kr)^{p+\ell} 2^{\frac{2\ell+p+1}{2}} e^{+i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)+ikr} U_2\left(\frac{2\ell+p+1}{2} - \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell + p + 1 \mid 2e^{3i\pi/2} kr\right) \\ &= (kr)^{p+\ell} 2^{\frac{2\ell+p+1}{2}} e^{+i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)-ikr} U_1\left(\frac{2\ell+p+1}{2} + \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell+p+1 \mid 2e^{i\pi/2} kr\right) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

e

$$\begin{aligned}
 f_{\ell}^{-d}(k,r) &= (kr)^{(p+\ell)} 2^{\frac{2\ell+p+1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} e^{+ikr} U_1\left(\frac{2\ell+p+1}{2} - \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell+p+1 \mid 2e^{-i\pi/2} kr\right) \\
 &= (kr)^{(p+\ell)} 2^{-i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} e^{-ikr} U_2\left(\frac{2\ell+p+1}{2} + \frac{i\alpha}{2k} \mid 2\ell+p+1 \mid 2e^{+i\pi/2} kr\right)
 \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Pode-se ver que para $\alpha=0$ recai-se nas soluções apresentadas no segundo capítulo para ondas livres. Precisaremos ainda do comportamento assintótico destas funções, que pode ser obtido usando as relações (3.4.13) e (3.4.14):

$$f_{\ell}^{+d}(k,r) \longrightarrow 2^{\frac{i\alpha}{2k}} (kr)^{\frac{p-1}{2} + \frac{i\alpha}{2k}} e^{-\frac{\pi\alpha}{4k}} e^{+ikr} \tag{3.5.14}$$

enquanto que:

$$f_{\ell}^{-d}(k,r) \longrightarrow 2^{-\frac{i\alpha}{2k}} (kr)^{\frac{p-1}{2} + \frac{i\alpha}{2k}} e^{-\frac{\pi\alpha}{4k}} e^{-ikr} \tag{3.5.15}$$

Vemos portanto que para $k = iq$, com $q > 0$ a função $f_{\ell}^{+d}(k,r)$ apresenta um comportamento aceitável no infinito. Definimos então as funções de Jost, de acordo com relação encontrada no capítulo anterior, como:

$$f_{\ell}^{+d}(k) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} k^{\ell} r^{-(p-1)}}{(2\ell+p) 2^{\frac{2\ell+p}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \ell)}}{\pi} W\left[f_{\ell}^{+d}(k,r), \phi_{\ell}^d(k,r)\right] \tag{3.5.16}$$

Neste caso é fácil calcular o Wronskiano. Podemos primeiro expressar a solução regular como combinação linear das irregulares, utilizando (3.4.22) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_{\ell}^{\tilde{d}}(k,r) &= \frac{\Gamma(2\ell+p+1)}{\Gamma(\ell + \frac{p+1}{2} + \frac{i\alpha}{2k})} k^{-(p+\ell)} \frac{1}{2} e^{-(\ell + \frac{p+1}{2}) - i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} \cdot f_{\ell}^{+d}(k,r) \\ &+ \frac{\Gamma(2\ell+p+1)}{\Gamma(\ell + \frac{p+1}{2} - \frac{i\alpha}{2k})} k^{-(p+\ell)} \frac{1}{2} e^{-(\ell + \frac{p+1}{2}) + i\frac{\pi}{4}(p+2\ell+1)} f_{\ell}^{-d}(k,r) \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Encontra-se então o Wronskiano entre $f_{\ell}^{+d}(k,r)$ e $f_{\ell}^{-d}(k,r)$ utilizando o resultado:

$$W \left[U_1(a|c|z), U_2(a|c|a) \right] = -z^{-c} e^{z+i\pi a} \quad (3.5.18)$$

A função de Jost do potencial Coulombiano será:

$$f_{\ell}^{+d}(k) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{p+1}{2})}{\Gamma(\ell + \frac{p+1}{2} - \frac{i\alpha}{2k})} e^{-\frac{\pi\alpha}{2k}} \quad (3.5.19)$$

Em que sentido estas são funções de Jost? Pode-se ver que os seus zeros resultarão nos estados ligados, pelas mesmas razões apresentadas nos exemplos anteriores. Estes serão dados pelos polos da função gama, ou seja⁽²²⁾:

“ESPALHAMENTO QUÂNTICO POR POTENCIAL EM ESPAÇO DE DIMENSÃO SUPERIOR”

RUBENS LUIS PINTO GURGEL DO AMARAL

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Juan José Giambiagi - Presidente

Carlos Márcio do Amaral

Sérgio Joffily

Rio de Janeiro, 15 de abril de 1987