

WASHINGTON FIGUEIREDO CHAGAS FILHO

NÚMEROS TOPOLÓGICOS SEMI-INTEIROS: CONFINAMENTO E QUEBRA
ESPONTÂNEA DA SIMETRIA QUIRAL NO MODELO DE SCHWINGER.

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1987

433
0.198

- Aos Ícaros Modernos.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Juan Alberto Mignaco, pela condução do tema da tese e pelas críticas construtivas.

- Ao CNPq, por ter possibilitado a realização deste trabalho.

- À CFC, pelo apoio recebido.

- Ao amigo Soares, pela grande amizade.

- À Hélade, pela ajuda na datilografia da te
se.

- À Nair, por preservar o sonho de Ícaro.

RESUMO

Trabalhando no modelo de Schwinger, e através da utilização de propriedades topológicas, estabelecemos uma conexão entre confinamento e quebra espontânea da simetria quiral.

ABSTRACT

Working on the Schwinger model, and by the use of topological properties, we establish a connection between confinement and spontaneous symmetry breaking.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| INTRODUÇÃO | 06 |
| 1. O MODELO DE SCHWINGER | 09 |
| 1.1 O Modelo e Sua Solução | 09 |
| 1.2. A Estrutura do Vácuo - Transformações de Gauge... | 15 |
| 1.3. Instantons e o Modelo de Schwinger | 19 |
| 2. QUEBRA ESPONTÂNEA DA SIMETRIA QUIRAL | 29 |
| 3. CONCLUSÕES | 35 |
| APÊNDICE | 37 |
| REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA | 39 |

INTRODUÇÃO

A importância das simetrias no estudo dos sistemas quânticos e, em particular, em física de partículas, deu origem a um considerável número de investigações específicas. Por exemplo, a construção de modelos e, principalmente, a compreensão das interações fundamentais, exige a identificação das várias invariâncias e, em particular, da forma através da qual podem ser percebidas, aproximadas, ou mesmo violadas.

Considerações similares constituem o coração da teoria de transições ordem-desordem em meios macroscópicos, e acentuam a profunda relação entre a teoria dos campos e a mecânica estatística.

Estamos habituados a várias manifestações de simetrias. Algumas destas simetrias são discretas, por exemplo, paridade, reversão temporal, e conjugação de carga. Outras destas são contínuas, como na invariância (cinemática) de Lorentz, ou ainda dependentes do espaço-tempo, como no caso da invariância de gauge.

O interesse pela busca de invariâncias em física de partículas tem como suporte os resultados espetaculares da simetria unitária, da álgebra de correntes, e da invariância quiral, bem como o crescente interesse pela subestrutura a quarks dos hadrons.

Nos últimos anos, várias tentativas foram realizadas no sentido de detectar quarks livres. A idéia sugerida pelo fracasso destas tentativas é a de que todos os hadrons conhecidos são estados ligados de quarks. A possibilidade de

que estes últimos estejam permanentemente ligados levou ao termo "confinamento" e vários mecanismos confinantes foram sugeridos . Um dos mais promissores assume uma simetria de $c\bar{c}$, baseada em uma invariância de gauge.

No formalismo lagrangeano, uma teoria de campos será invariante sob um grupo contínuo de transformações se a lagrangeana, e portanto as equações de movimento, for invariante sob estas transformações. A nível quântico a questão torna-se 'então a de esclarecer a forma através da qual esta propriedade ' está refletida no sistema quântico e, em particular, a de estudar as suas conseqüências sobre o espectro de estados.

Sob o ponto de vista quântico, o tratamento de simetrias implica na existência de um grupo de transformações atuando sobre os observáveis físicos, e portanto sobre as variáveis dinâmicas de campo. Sob a forma infinitesimal destas transformações, seremos então levados à construção de densidades de corrente, vetoriais, associadas a cada um dos grupos, e de cargas integradas. O ponto de interesse torna-se então o de implementar estas transformações por transformações unitárias sobre o espaço de Hilbert dos estados. Localmente, o interesse concentra-se na conservação das correntes. Globalmente, o mesmo está na possibilidade de que as cargas gerem operadores unitários que comutem com o operador hamiltoniano do sistema.

Neste trabalho analisaremos alguns destes aspectos no modelo de Schwinger, isto é, Eletrodinâmica Quântica ' em um espaço-tempo bidimensional, com férmions sem massa.

Em particular, seremos capazes de estabelecer uma conexão entre o confinamento e a quebra espontânea da simetria quiral. Esta conexão é estabelecida através da utilização de propriedades topológicas da configuração de campos de gauge, no modelo.

No primeiro capítulo, faremos uma revisão de

alguns dos resultados conhecidos no modelo de Schwinger. Na seção i.i, introduzimos o modelo e sua solução em termos de operadores de campo. Mostramos também a estrutura de seu estado fundamental. Na seção 1.2, através de uma correspondência clássica, mostramos a necessidade de transformações de gauge com número topológico semi-inteiro, para explicar a estrutura completa do vácuo. Na seção 1.3, e através da utilização de métodos funcionais, evidenciamos a relação entre confinamento e números topológicos semi-inteiros. Os resultados contidos neste primeiro capítulo constituem reprodução fiel daqueles encontrados na tese de Mestrado desenvolvida por E.C.Marino.⁽¹³⁾

No segundo capítulo, o qual representa nossa contribuição ao assunto, mostraremos como transformações de gauge, caracterizadas por números topológicos semi-inteiros, induzem a não-invariância do vácuo da teoria sob transformações globais cujo gerador é a carga quiral. Ou seja, induzem quebra espontânea da simetria quiral.

No terceiro capítulo apresentaremos nossas conclusões.

1. O MODELO DE SCHWINGER

Neste capítulo faremos uma revisão de alguns dos resultados obtidos no estudo da Eletrodinâmica Quântica em um espaço-tempo bidimensional, com férmions não massivos, modelo originalmente proposto por J. Schwinger(1). Veremos também como podemos atribuir a natureza confinante do modelo à existência de configurações de campo caracterizadas por números topológicos semi-inteiros(13).

1.1. O Modelo e Sua Solução

A importância do modelo de Schwinger está ligada ao fato de que a blindagem dos férmions surge como uma consequência lógica da dinâmica do sistema.

O vácuo do modelo possui estrutura semelhante à das teorias de gauge não Abelianas a quatro dimensões. A exemplo destas teorias, podemos atribuir essa estrutura do vácuo à existência de configurações de campo tipo instanton(7, 13). Não existem excitações físicas com carga e os férmions não são observáveis isoladamente.

Trabalharemos em um espaço-tempo bidimensional de Minkowski, caracterizado por

$$x = (x^0, x^1), g^{00} = -g^{11} = \epsilon^{10} = \epsilon_{21} = 1 \quad (1.1)$$

A densidade Lagrangeana da teoria é

$$\mathcal{L}_S = i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.2)$$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ é o campo fermiônico, A_μ é o potencial eletromagnético, e é a constante de acoplamento, o tensor intensidade do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.3)$$

e

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \quad (1.4)$$

As equações de campo correspondentes à densidade Lagrangeana \mathcal{L}_S são (2, 3)

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + e : A_\mu \gamma^\mu \psi : = 0 \quad (1.5)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = e j^\mu \quad (1.6)$$

onde

$$j^\mu = : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \quad (1.7)$$

Os produtos normais estão definidos na referência (2, 3).

A principal característica do modelo de Schwinger é que as suas equações de movimento podem ser resolvidas exatamente. Lowenstein e Swieca obtiveram a solução exata de operadores das equações (1.5) e (1.6), que segue abaixo

$$\psi(x) = : \exp \{ i \sqrt{\pi} \gamma^5 [\Sigma(x) + \tilde{\eta}(x)] \} : \psi_0(x) \quad (1.8)$$

$$A^\mu(x) = - \frac{\sqrt{\pi}}{e} [\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Sigma(x) + \partial^\mu \eta(x)] \quad (1.9)$$

onde

$$\partial^\mu \eta = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\eta} \quad (1.10)$$

$\psi_0(x)$ é um campo fermiônico livre, $\Sigma(x)$ é um campo pseudo-escalar livre, com massa $e/\sqrt{\pi}$, $\eta(x)$ e $\tilde{\eta}(x)$ são campos escalares livres, sem massa e quantizados com métrica indefinida.

As correntes vetorial e axial livres são dadas respectivamente por

$$j_\mu^v = : \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 : \text{ e } j_\mu^{a5} = : \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_0 : = \epsilon^{\mu\nu} j_{\nu 2} \quad (1.11)$$

e podem ser usadas para definir potenciais de corrente (2) $\phi(x)$ e $\tilde{\phi}(x)$

$$j_\mu^v = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \phi \quad \text{e} \quad j_\mu^{a5} = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \tilde{\phi} \quad (1.12a)$$

com

$$\partial_M \phi = \epsilon_{M\nu} \partial^\nu \tilde{\phi} \quad (1.12b)$$

As expressões (1.8) e (1.9) não são solução das equações de campo no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\eta) \otimes \mathcal{H}(\psi) \quad (1.13)$$

mas em um subespaço físico, \mathcal{H}_f , deste espaço, constituído por estados satisfazendo a relação (2)

$$\langle \psi | \partial^M (\eta + \phi) | \Phi \rangle = 0 \quad (1.14)$$

Consideremos os operadores α_1 e α_2 , dados por

$$\alpha_\alpha = \exp \left\{ i\sqrt{\pi} \left[\eta(x) + \phi(x) + (-1)^\alpha (\tilde{\eta}(x) + \tilde{\phi}(x)) \right] \right\}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.15)$$

em termos dos quais o campo ψ pode ser expresso em determinado gauge (2, 4).

Para o cálculo das funções de correlação para estes operadores foi obtido o seguinte resultado

$$\langle 0 | \alpha(x) \alpha^\dagger(y) | 0 \rangle = 1 \quad (1.16)$$

com

$$[\alpha_\alpha(x), \alpha_\alpha(y)] = 0, \quad \alpha_\alpha^\dagger(x) = \alpha_\alpha^{-1}(x) \quad (1.17)$$

A constância dessa função de correlação é indicativa da natureza não física dos operadores α_α , independentes do espaço e do tempo. Esses operadores são, no entanto, diferentes da identidade, pois portam carga e pseudocarga livres

$$[\alpha_\alpha, Q] \neq 0 \quad \text{e} \quad [\alpha_\alpha, Q_5] \neq 0 \quad (1.18)$$

onde

$$Q = \int d^4x \, j_1^0 \quad \text{e} \quad Q_5 = \int d^4x \, j_1^{05} \quad (1.19)$$

O fato de a função de correlação (1.16) ser independente das coordenadas indica a existência de uma violação da propriedade de decomposição de cluster. Essa propriedade exi

ge que, no limite das grandes distâncias, a função de correlação de um operador $A(x)$ se comporte como

$$\langle 0|A(x)A^\dagger(y)|0\rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \langle 0|A(x)|0\rangle \langle 0|A^\dagger(y)|0\rangle \quad (1.20)$$

Quando esta propriedade é violada, isto significa que a teoria deve possuir muitos vácuos. Vejamos como este fato pode ser verificado.

Consideremos a função de correlação para o operador ϕ_α , eq. (1.16). Através da utilização de conjunto completo de estados, teremos

$$\langle 0|\phi_\alpha(x)\phi_\alpha^\dagger(y)|0\rangle = \sum_i \langle 0|\phi_\alpha(x)|i\rangle \langle i|\phi_\alpha^\dagger(y)|0\rangle \quad (1.21)$$

Entretanto,

$$\phi_\alpha(x) = e^{iP \cdot x} \phi_\alpha(0) e^{-iP \cdot x} \quad (1.22)$$

e

$$P^\mu |0\rangle = 0, \quad (1.23)$$

onde P^μ é o operador de energia-momentum, de forma que

$$\langle 0|\phi_\alpha(x)\phi_\alpha^\dagger(y)|0\rangle = \sum_i e^{-iP^i \cdot (x-y)} \langle 0|\phi_\alpha(0)|i\rangle \langle i|\phi_\alpha^\dagger(0)|0\rangle \quad (1.24)$$

em que P_μ^i é o vetor de energia-momentum do estado $|i\rangle$.

O limite das grandes distâncias, $|x-y| \rightarrow \infty$, determina uma região na qual a exponencial em (1.24) se torna violentamente oscilante, de forma que, em média, só contribuem para a função de correlação os estados para os quais $p_\mu^i = 0$, ou seja, estados de vácuo. Caracterizando estes estados por $|n\rangle$, obtemos

$$\langle 0|\phi_\alpha(x)\phi_\alpha^\dagger(y)|0\rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \sum_n \langle 0|\phi_\alpha(0)|n\rangle \langle n|\phi_\alpha^\dagger(0)|0\rangle \quad (1.25)$$

tal que

$$P^\mu |n\rangle = 0 \quad (1.26)$$

A propriedade da decomposição de cluster exigiria que o lado direito de (1.25) fosse

$$\langle 0 | Q_{\alpha} | 0 \rangle \langle 0 | Q_{\alpha}^{\dagger} | 0 \rangle = 0, \quad (1.27)$$

que impõe a existência de apenas um vácuo na teoria. Entretanto, o lado esquerdo de (1.25), como vimos, é igual a 1, impondo a existência de um outro vácuo, $|V\rangle$, diferente de $|0\rangle$, dado por

$$|V\rangle = Q_{\alpha}^{\dagger}(0) |0\rangle \quad (1.28)$$

Calculando-se a função de correlação para um número arbitrário de operadores Q_{α} , obtem-se novamente a unidade como resultado (2). Por um procedimento análogo ao descrito acima para a função de correlação (1.16), concluimos então que o modelo de Schwinger possui um número infinito de vácuos, que podem ser parametrizados por (2)

$$(Q_1)^{n_1} (Q_2)^{n_2} |0\rangle = |n_1 n_2\rangle \quad (1.29)$$

Aqui, n_1 e n_2 são inteiros arbitrários.

Podemos então obter um novo conjunto de vácuos, caracterizados por dois parâmetros arbitrários θ_1 e θ_2 , $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$, dados pela combinação (2)

$$|\theta_1 \theta_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1 n_2} e^{-i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} |n_1 n_2\rangle, \quad (1.30)$$

o chamado vácuo θ , de forma que

$$Q_{\alpha} |\theta_1 \theta_2\rangle = e^{i\theta_{\alpha}} |\theta_1 \theta_2\rangle. \quad (1.31)$$

Estes novos vácuos $|\theta_1 \theta_2\rangle$ constituem estados fundamentais de setores independentes, no espaço de Hilbert. Escritas em termos dos mesmos, as funções de correlação não violam mais a propriedade da decomposição de cluster.

Todas as cargas, elétrica e axial, livres estão contidas nos operadores Q_{α} , uma vez que os mesmos são escritos em termos dos potenciais de corrente ϕ e $\tilde{\phi}$. Como os opera-

dores \mathcal{Q}_α são de natureza não física, apenas transformando os vácuos $|n_1 n_2\rangle$ entre si, concluímos que a carga elétrica e axial livres estão "condensadas" no vácuo.

Como em qualquer teoria de gauge, o conteúdo observável do modelo de Schwinger deve estar contido em operadores invariantes de gauge, tais como j_μ e $F_{\mu\nu}$, e em bilocais do tipo (2, 3)

$$T(x,y) = \psi(x) e^{ie \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu} \psi^\dagger(y) \quad (1.32)$$

que, ao atuarem sobre o vácuo, criam um dipolo elétrico.

Entretanto, pode-se mostrar facilmente, usando (1.3) e (1.9), que $F_{\mu\nu}$ é expresso apenas em termos do campo $\Sigma(x)$. A partir de (1.7) e (1.8) encontramos

$$j^\mu = - \frac{1}{\sqrt{\eta^{\mu\nu}}} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \Sigma(x), \quad (1.33)$$

válida no subespaço físico do espaço de Hilbert (2). Pode-se mostrar também (3) que os operadores $T(x,y)$, eq. (1.32), são funções apenas de $\Sigma(x)$ e dos operadores \mathcal{Q}_α . Como vimos anteriormente, estes últimos são de natureza não física, de forma que somos levados a concluir que as únicas excitações observáveis da teoria são os bosons Σ , que podem ser encarados como um para férmion - antiférmions (2, 3), ou como pseudoescalar "gluonium" (5).

A aplicação sobre o vácuo do operador $T(x,y)$ (dipolo elétrico), com $y \rightarrow \infty$, poderia em princípio fornecer o estado de um férmion isolado. Entretanto, este estado é não físico, pois possui energia infinita (2, 3). Ou seja, a energia necessária para separar um dipolo elétrico, no modelo de Schwinger, é infinita, o que demonstra que os férmions da teoria encontram-se confinados.

1.2. A Estrutura do Vácuo - Transformações de Gauge.

Nesta seção mostraremos como é possível obter-se a estrutura completa do vácuo do modelo de Schwinger através da utilização de transformações de gauge topologicamente não triviais.

As transformações de gauge Abelianas são dadas por

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\Lambda(x)}\psi \quad \text{e} \quad A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \Lambda(x) \quad (1.34)$$

ou, equivalentemente,

$$\psi \rightarrow \psi' = \bar{g}_j^{-1}(x)\psi \quad \text{e} \quad A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{i}{e} \bar{g}_j^{-1} \partial_{\mu} g_j \quad (1.35)$$

onde $g_j(x) = e^{-i\Lambda(x)}$ é uma parametrização dos elementos do grupo $U(1)$.

Para cada instante de tempo, $g_j(x)$ define um mapeamento entre os pontos do eixo real $(-\infty, +\infty)$, e os números complexos de módulo um, caracterizados por $\Lambda(x)$.

Este mapeamento pode ser convenientemente estudado através de uma projeção estereográfica do eixo real sobre um círculo de diâmetro unitário. Assim, estamos associando cada ponto de \mathbb{R} a um ponto do círculo.

Estando cada ponto do círculo caracterizado pelo ângulo polar φ , a projeção estereográfica é dada por

$$\cos \varphi = \frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1}, \quad \text{sen} \varphi = \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} \quad (1.36)$$

Escritos em termos do ângulo φ , os elementos do grupo $U(1)$, $g(\varphi) = \exp -i\Lambda(\varphi)$, definem um mapeamento entre os pontos do círculo de diâmetro unitário e os números complexos de módulo um. Como estes definem, também, um círculo, $g(\varphi)$ define

então um mapeamento entre dois círculos.

Mapeamento deste tipo se subdividem em infinitas classes, tais que elementos pertencentes a uma determinada classe podem ser continuamente deformados entre si, mas não em elementos pertencentes a uma outra classe (9).

Cada classe é caracterizada pelo número topológico n ,

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 \Delta(x) dx_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\varphi \Delta(\varphi) d\varphi \quad (1.37)$$

que é interpretado como o número de vezes que um círculo é coberto pelo outro no mapeamento. Para transformações g regulares, n é sempre um inteiro.

Na versão quantizada da teoria, a transformação correspondente a (1.34), (1.35), é efetuada por um operador T , tal que

$$T \psi T^{-1} = e^{i\Delta(x)} \psi ; T A_\mu T^{-1} = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Delta(x) \quad (1.38)$$

Para os campos ψ e A_μ dados por (1.8) e (1.9), o operador que realiza esta transformação é (6)

$$T[\Delta] = \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{g_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\tilde{\eta} + \tilde{\Phi}) \partial_1 \Delta - (\eta + \Phi) \partial_0 \Delta] dy_1 \right\} \quad (1.39)$$

No gauge de Lorentz, $\Delta(x)$ deve ser uma solução da equação de ondas, de forma que podemos escrever $\Delta(x)$ como

$$\Delta(x) = c(x^1 - x^0) + d(x^1 + x^0) \quad (1.40)$$

Este fato nos assegura que o operador $T[\Delta]$, eq. (1.39), é independente do tempo. Calculando a derivada em relação ao tempo de expoente em (1.39), utilizando (1.10), (1.12b) e integração por partes, teremos

$$\partial_0 \left\{ \frac{i}{\sqrt{g_1}} \int dy_1 [(\tilde{\eta} + \tilde{\Phi}) \partial_1 \Delta - (\eta + \Phi) \partial_0 \Delta] \right\} =$$

$$= \left\{ - \frac{i}{\sqrt{\pi'}} \int dy_1 [(\eta + \phi) \partial_M \partial^M \Lambda] \right\} = 0 \quad (1.41)$$

$T[\Lambda]$ é o correspondente quântico da transformação clássica $g = \exp -i\Lambda(x)$. Se

$$\Lambda(x_0, x_1) = \Lambda_a(x_0, x_1) \xrightarrow{x_1 \rightarrow \pm \infty} \begin{cases} 2\pi a \\ 0 \end{cases}; \forall a \quad (1.42)$$

então, de acordo com (1.37), g possui número topológico $n=a$.

Calculemos então a transformação quântica $T[\Lambda_1]$, que corresponde à transformação clássica g , com $a=1$ em (1.42). Escolhemos

$$\Lambda_1(y) = \Lambda_a(y_0, y_1) + 2\pi\theta(y_1 - x_1); \Lambda_a(y_0, \pm\infty) = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

com x_1 fixo e arbitrário. Embora tenhamos feito esta escolha particular, todas as funções $\Lambda_1(x)$ satisfazendo (1.42) com $a=1$ produzem operadores $T[\Lambda_1]$ equivalentes.

Inserindo (1.43) em (1.39), utilizando (1.10), (1.12b), (1.14) e integração por partes, obtemos

$$T_1 = T[\Lambda_1] = e^{2i\sqrt{\pi'}} [\tilde{\eta}(y_0, x_1) + \tilde{\phi}(y_0, x_1)] \quad (1.44)$$

válida no subespaço físico do espaço de Hilbert. Em virtude de (1.14), neste subespaço $T[\Lambda]$ só depende do comportamento de Λ em $y_1 = \pm\infty$.

Como vimos, $T[\Lambda]$ é independente do tempo, de forma que podemos fazer $y_0 = x_0$, e obter

$$T_1 = e^{2i\sqrt{\pi'}} [\tilde{\eta}(x) + \tilde{\phi}(x)] = G_1^\dagger G_2 \quad (1.45)$$

de acordo com (1.15).

Assim, como o operador T_1 , podemos gerar alguns estados de vácuo do modelo de Schwinger,

$$T_1^n |0\rangle = | -n_1, n \rangle \quad (1.46)$$

mas não a estrutura completa. Consequentemente, somos levados a concluir que transformações de gauge com número topológico inteiri

ro não são suficientes para gerar a estrutura completa do vácuo da teoria.

Consideremos então as transformações

$T_{+1/2} \equiv T[\Lambda_{+1/2}]$ e $T_{-1/2} \equiv T[\Lambda_{-1/2}]$ que correspondem, respectivamente, às transformações clássicas g com número topológico $n = \frac{1}{2}$ e $n = -\frac{1}{2}$

$$g_{\pm 1/2} = e^{-i \Lambda_{\pm 1/2}(x)} \quad (1.47)$$

com

$$\Lambda_{+1/2}(x_0, \pm\infty) = \begin{cases} \pi \\ 0 \end{cases}; \quad \Lambda_{-1/2}(x_0, \pm\infty) = \begin{cases} -\pi \\ 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

Note que, sobre o círculo de diâmetro unitário, $g_{+1/2}(x_0, \psi=0) \neq g_{+1/2}(x_0, 2\pi)$. As transformações $g_{\pm 1/2}$ são singulares em $\psi=0$, o que permite números topológicos não inteiros.

Em acordo com (1.48), fazemos então a escolha particular

$$\Lambda_{+1/2}(y) = b(y_1 - y_0) + \pi \theta(y_1 - y_0 - x_1 + x_0); \quad b(\pm\infty) = 0 \quad (1.49)$$

$$\Lambda_{-1/2}(y) = h(y_1 + y_0) - \pi \theta(y_1 + y_0 - x_1 - x_0); \quad h(\pm\infty) = 0 \quad (1.50)$$

com x_1 e x_0 fixos e arbitrários.

Introduzindo (1.49) e (1.50) em (1.39), utilizando (1.10), (1.12b), (1.14), integrando por partes e notando que

$$\partial_0 \theta(y_1 - y_0) = -\partial_1 \theta(y_1 - y_0); \quad \partial_0 \theta(y_1 + y_0) = \partial_1 \theta(y_1 + y_0) \quad (1.51)$$

obtemos

$$T_{\pm 1/2} \equiv T[\Lambda_{\pm 1/2}] = \exp \left\{ i\sqrt{\pi} \left[\eta(y_0, x_1 \pm y_0 \mp x_0) + \phi(y_0, x_1 \pm y_0 \mp x_0) \pm \tilde{\eta}(y_0, x_1 \pm y_0 \mp x_0) \pm \tilde{\phi}(y_0, x_1 \pm y_0 \mp x_0) \right] \right\} \quad (1.52)$$

válidas no subespaço físico do espaço de Hilbert.

Podemos fazer $y_0 = x_0$ em virtude de serem $T_{\pm 1/2}$ independentes do tempo, e obter, de acordo com (1.15)

$$T_{+1/2} = \exp \left\{ i/\hbar \int [\eta_1(x) + \phi(x) + \tilde{\eta}_1(x) + \tilde{\phi}(x)] \right\} = \mathcal{O}'_2 \quad (1.53)$$

$$T_{-1/2} = \exp \left\{ i/\hbar \int [\eta_1(x) + \phi(x) - \tilde{\eta}_1(x) - \tilde{\phi}(x)] \right\} = \mathcal{O}'_1 \quad (1.54)$$

Desta forma, para que possamos gerar a estrutura completa do vácuo da teoria, precisamos introduzir transformações de gauge com número topológico semi-inteiro.

Como os operadores \mathcal{O}'_1 e \mathcal{O}'_2 são os responsáveis pelo confinamento - pois portam toda a carga livre do modelo e são de natureza não física - as equações (1.53) e (1.54) acima, estabelecem uma relação entre confinamento e números topológicos semi-inteiros.

Examinaremos esta relação na próxima seção, em conexão com o valor esperado no vácuo do operador $T(x,y)$, eq. (1.32), que como vimos porta da natureza confinante da teoria.

1.3. Instantons e o Modelo de Schwinger.

Nesta seção veremos como configurações de campo tipo instanton (7), com números topológicos semi-inteiros, saturam a integral funcional que descreve a função de correlação para o operador $T(x,y)$, o qual porta a natureza confinante do modelo de Schwinger.

Trabalharemos em um espaço bidimensional Euclidiano caracterizado por

$$x = (x_1, x_2); \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}; \quad \epsilon^{12} = 1 \quad (1.55)$$

As matrizes de Dirac neste espaço são dadas por (8)

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i\gamma_2, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Em virtude de (1.35), dizemos que A_μ é um gauge puro quando $A_\mu = \frac{i}{e} g^{-1} \partial_\mu g$, $g = \exp -i\Lambda(x)$. Naturalmente, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é igual a zero quando A_μ é um gauge puro.

Consideremos então campos $A_\mu(x)$ que tendem a um gauge puro sobre um círculo de raio infinito em E_2 . Estes campos definem um mapeamento entre os pontos do círculo de raio infinito em E_2 e os pontos de um círculo de raio unitário no plano complexo, correspondentes aos g 's em termos dos quais A_μ é expresso.

Desta forma, podemos agrupar os campos $A_\mu(x)$, que tendem a um gauge puro no infinito, em classes, tais que elementos pertencentes a uma mesma classe podem ser continuamente deformados entre si, mas não em elementos pertencentes a uma outra classe.

Cada classe de A_μ é caracterizada pelo índice de Chern, que a duas dimensões é dado por (8,10)

$$q = \frac{e}{4\pi} \int \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x \quad (1.57)$$

Utilizando (1.3), podemos escrever

$$q = \frac{e}{2\pi} \int \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} A_\nu d^2x \quad (1.58)$$

Pelo teorema de Gauss podemos escrever

$$q = \frac{e}{2\pi} \oint_c \epsilon^{\mu\nu} A_\nu dS_\mu, \quad (1.59)$$

para os campos A_μ regulares, pelo menos nas regiões finitas de E_2 . A integral de linha é tomada sobre uma curva c , no infinito.

Se A_μ tende a um gauge puro no infinito, então

$$q = \frac{e}{2\pi} \oint_c \epsilon^{\mu\nu} \left(\frac{i}{e} g^{-1} \partial_\nu g \right) dS_\mu ; g = \exp -i\Lambda(x) \quad (1.60)$$

No apêndice mostraremos que se o campo A_μ tende a um gauge puro sobre um círculo de raio infinito em E_2 , então o índice de Chern q , eq. (1.60), é igual ao número topológico n , eq. (1.37), das transformações $g(x)$, em termos das quais o campo A_μ é expresso sobre este círculo.

Queremos, então, expressar em termos de uma integral funcional, a função de dois pontos, invariante de gauge

$$\langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu} \psi^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (1.61)$$

que corresponde ao valor esperado no vácuo do operador $T(x, y)$, eq. (1.32).

O funcional gerador da teoria é dado por

(11, 12)

$$Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int [DA_\mu]_{(q)} [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int [\mathcal{L} + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_A] d^2x} \quad (1.62)$$

\mathcal{L} é a densidade Lagrangeana do modelo no espaço Euclidiano,

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{EM} \quad (1.63)$$

\mathcal{L}_A é o termo de acoplamento com fontes externas

$$\mathcal{L}_A = J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \quad (1.64)$$

\mathcal{L}_g é um termo cuja introdução na densidade Lagrangeana objetiva a eliminação de integrações repetidas sobre configurações de campo A_μ equivalentes de gauge e continuamente deformáveis entre si. No caso Abeliano este termo é função apenas da parte longitudinal (11) de A_μ .

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g[A_\mu] = \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.65)$$

Da teoria da integração funcional,

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J^\mu = \eta = \bar{\eta} = 0} \quad (1.66)$$

onde $\frac{\delta}{\delta \lambda}$ indica derivação funcional.

Como os dois vácuos que aparecem na função de dois pontos são $|0\rangle$, a integral em A_μ deve ser tomada sobre os campos da classe $q=0$. Obtemos então,

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int [DA_\mu] (0) [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int [\mathcal{L} + \mathcal{L}_g]} \psi(x) \bar{\psi}(y) \quad (1.67)$$

A função de dois pontos fermiônica, em presença de um campo arbitrário A_μ é dada, segundo a teoria de integrais funcionais, por

$$\begin{aligned} G(x, y; A_\mu) &= \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle |_{A_\mu} \\ &= \frac{\int [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int \mathcal{L}_F d^2 z} \psi(x) \bar{\psi}(y)}{\int [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int \mathcal{L}_F d^2 z}} \end{aligned} \quad (1.68)$$

com

$$\int [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int \mathcal{L}_F d^2 z} = \det [i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu)] \quad (1.69)$$

No caso bidimensional e Abeliano, o determinante fermiônico é dado por (12, 17)

$$\det [i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu)] = e^{-\frac{e^2}{2\pi} \int A_\mu (\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}) A_\nu d^2 z} \quad (1.70)$$

Coletando os resultados dos dois últimos parágrafos e introduzindo em (1.67), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z[0]} \int [DA_\mu] (0) e^{-\int [\mathcal{L}_{EM} + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu (\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}) A_\nu + \mathcal{L}_g]} d^2 z} \\ &\quad \times G(x, y; A_\mu), \end{aligned} \quad (1.71)$$

pois

$$\int [D\psi] [D\bar{\psi}] e^{-\int \mathcal{L}_1 d^2 z} \psi(x) \bar{\psi}(y) = G(x,y; A_M) e^{-\int \frac{e^2}{2\mathbb{H}} A_M (\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}) A_\nu d^2 z} \quad (1.72)$$

A função de Green de dois pontos, $G(x,y; A_M)$, satisfaz a equação (12)

$$i \mathcal{V}^\mu (\partial_\mu - ie A_M) G(x,y; A_M) = \delta(x-y) \quad (1.73)$$

que, como o modelo de Schwinger é solúvel, pode ser resolvida , fornecendo o seguinte resultado (12)

$$\begin{aligned} G(x,y; A_M) &= \exp \left\{ \int d^2 z A_M(z) \left[ie \partial_\mu (D(x-z) - D(y-z)) + e \mathcal{V}^\mu \epsilon^{\lambda\mu\gamma} \partial_\lambda (D(x-z) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D(y-z)) \right] \right\} \langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle \\ &\equiv e^{\int \mathcal{L}_1 d^2 z} \langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.74)$$

As derivadas são tomadas em relação a z ,

$$D(x-y) = -\frac{1}{4\mathbb{H}} \ln \frac{e^4}{\mathbb{H}^2} (x-y)^2, \quad \partial^2 D(z) = -\delta(z) \quad (1.75)$$

e a função de Green livre é dada por

$$\langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle = G(x-y) = -i \mathcal{V}^\mu \partial_\mu D(x-y) \quad (1.76)$$

Substituindo este resultado em (1.71), teremos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z_1[0]} \int [DA_M]_{(0)} e^{-\int [\mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_g + \frac{e^2}{2\mathbb{H}} A_M (\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}) A_\nu - \mathcal{L}_1] d^2 z} \\ &\quad \times \langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.77)$$

podemos agora obter a função de dois pontos, invariante de gauge, utilizando técnica conhecida em integração funcional (13)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M} \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = & \frac{1}{Z[0]} \int [DA_M]_{(0)} \exp \left\{ - \int [\mathcal{L}_{\xi M} + \mathcal{L}_3 + \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{2\pi} A_M (\delta_{uv} - \frac{\partial_u \partial_v}{\partial^2}) A_V - \mathcal{L}_1 - ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M \right] d^2 z \langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.78)$$

Por uma questão de simplicidade, calcularemos a componente (1,1) de (1.61)

$$\langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M} \psi^\dagger(y) | 0 \rangle_{11} = \langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M} \bar{\psi}(y) | 0 \rangle_{12} \quad (1.79)$$

A componente (1,2) de (1.78) fornece então

(14)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M} \psi^\dagger(y) | 0 \rangle_{11} = & \frac{1}{Z[0]} \int [DA_M]_{(0)} e^{-\int \mathcal{L}_1 d^2 z} \langle 0 | \psi_{01}(x) \psi_{01}^\dagger(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.80)$$

onde a ação efetiva é

$$\begin{aligned} S_{ef} = \int_{ef} d^2 z = & \int [\mathcal{L}_{\xi M} + \mathcal{L}_3 + \frac{e^2}{2\pi} A_M (\delta_{uv} - \frac{\partial_u \partial_v}{\partial^2}) A_V - \\ & - ie A_M \partial_M (D(x-z) - D(y-z)) + e A_M \epsilon^{\lambda\mu} \partial_\lambda (D(x-z) - D(y-z)) \\ & - ie \int_x^y A_M(\xi) d\xi_M] d^2 z \end{aligned} \quad (1.81)$$

e as derivadas são todas em relação a z.

Desenvolvendo $\mathcal{L}_{\xi M} = \frac{1}{4} F_{\xi\mu} F^{\mu\xi}$ em termos de A_μ ,

e utilizando integração por partes, obtemos

$$\int [\mathcal{L}_{\xi M} + \mathcal{L}_3] d^2 z = \int - \frac{1}{2} A_M \partial^2 A^\mu d^2 z \quad (1.82)$$

Se efetuarmos a mudança de variável

$$\xi = (x-y)t + y, \quad d\xi^\mu = (x-y)^\mu dt \quad \text{com } 0 \leq t \leq 1 \quad (1.83)$$

podemos escrever

$$ie \int_x^y A_\mu(\xi) d\xi_\mu = -ie \int d^2z A_\mu(z) (x-y)^\mu \int_0^1 dt \delta((x-y)t + y - z) \quad (1.84)$$

Introduzindo (1.82) e (1.84) na ação efetiva, S_{ef} , eq. (1.81), obtemos a equação clássica satisfeita por A_μ , que minimiza a ação efetiva (13)

$$\begin{aligned} (-\partial^2 + \frac{e^2}{\pi}) A_\mu(z) - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} A_\nu(z) = -e \epsilon^{\lambda\mu} \partial_\lambda (D(x-z) - D(y-z)) \\ + ie \partial_\mu (D(x-z) - D(y-z)) - ie (x-y)^\mu \int_0^1 \delta((x-y)t + y - z) dt \end{aligned} \quad (1.85)$$

Se trabalharmos no gauge em que $\partial_\nu A_\nu = 0$, teremos a equação

$$(-\partial^2 + \frac{e^2}{\pi}) A_\mu(z) = J_\mu(z; x, y) \quad (1.86)$$

em que $J_\mu(z; x, y)$ é o termo do lado direito de (1.85).

Para resolvermos a eq. (1.86) utilizamos a função de Green de uma partícula escalar livre de massa e^2/π , $\Delta(z; \frac{e^2}{\pi})$, que satisfaz (12)

$$(-\partial^2 + \frac{e^2}{\pi}) \Delta(z; \frac{e^2}{\pi}) = \delta(z) \quad (1.87)$$

Sendo a solução de (1.86) denotada por $A_\mu^{cl}(z)$ temos então

$$A_\mu^{cl}(z) = \int d^2z' \Delta(z-z'; \frac{e^2}{\pi}) J_\mu(z'; x, y) \quad (1.88)$$

Através da utilização de (1.87), de (1.75) e de integração por partes, pode-se calcular (15)

$$\begin{aligned} A_\mu^{cl}(z) = -\frac{\pi}{e} \epsilon^{\lambda\mu} \partial_\lambda \left[D(x-z) - \Delta(x-z; \frac{e^2}{\pi}) - D(y-z) + \Delta(y-z; \frac{e^2}{\pi}) \right] + \\ + \frac{i\pi}{e} \partial_\mu \left[D(x-z) - \Delta(x-z; \frac{e^2}{\pi}) - D(y-z) + \Delta(y-z; \frac{e^2}{\pi}) \right] - \end{aligned}$$

$$ie(x-y)_\mu \int_0^1 \Delta((x-y)t + y-z; \frac{e^2}{\pi}) dt \quad (1.89)$$

Naturalmente (14) $\partial_\mu A_\mu^{cl} = 0$.

Observemos agora que a integral funcional que aparece em (1.80) pode ser colocada como a integral da exponencial de uma forma quadrática

$$\int [DA_\mu]_{(0)} e^{-S_{ef}[A_\mu]} = \int [DA_\mu]_{(0)} e^{-\int \left[\frac{1}{2} A_\mu K A^\mu - J^\mu A_\mu \right] d^2 z} \quad (1.90)$$

com

$$K = -\partial^2 + \frac{e^2}{\pi} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \quad (1.91)$$

e $J^\mu \equiv J^\mu(z;x,y)$, da eq. (1.86).

Este tipo de integral é bem conhecido da teoria da integração funcional, e fornece (11)

$$\begin{aligned} \int [DA_\mu]_{(0)} e^{-\int \left[\frac{1}{2} A_\mu K A^\mu - J^\mu A_\mu \right] d^2 z} &= e^{-S_{ef}[A_\mu^{cl}]} \int [DA'_\mu]_{(0)} \\ &\times e^{-\int \left[\frac{1}{2} A'_\mu K A'^\mu \right] d^2 z} = e^{-S_{ef}[A_\mu^{cl}]} Z[0] \end{aligned} \quad (1.92)$$

já que A_μ^{cl} minimiza a ação efetiva.

Então, finalmente, podemos escrever

$$\langle 0 | \psi(x) e^{ie \int_x^y A_\mu(\xi) d\xi_\mu} \psi^\dagger(y) | 0 \rangle_{11} = e^{-S_{ef}[A_\mu^{cl}]} \langle 0 | \psi_{01}(x) \psi_{01}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (1.93)$$

que nos mostra que a função de dois pontos invariante de gauge, eq. (1.79), e expressa exclusivamente em termos da configuração A_μ^{cl} , eq (1.89).

Uma vez que $D(0) = \Delta(0; \frac{e^2}{\pi})$, então o campo $A_\mu^{cl}(z)$ é regular (12).

O segundo termo de $A_{\mu}^{cl}(z)$ é identicamente um gauge puro, não contribuindo, conseqüentemente, para o índice de Chern q . Eventualmente, pode ser anulado por uma transformação ' de gauge (13).

Uma vez que (12) $\Delta(\infty; e^2/\bar{y}) = 0$, temos

$$A_M^{cl} \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} - \frac{\pi}{e} e^{\lambda_M} \partial_{\lambda} [D(x-z) - D(y-z)] \quad (1.94)$$

Assim,

$$A_M^{cl} \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{2e} e^{\lambda_M} \left[\frac{(z-y)\lambda}{(z-y)^2} - \frac{(z-x)\lambda}{(z-x)^2} \right] \quad (1.95)$$

Sabe-se, entretanto, que (8,16)

$$\frac{i}{e} g_1^{-1} \partial_M g_1 = \frac{1}{e} e^{\lambda_M} \frac{\alpha_{\lambda}}{\alpha^2} \quad (1.96)$$

onde

$$g = e^{-i\varphi} = \frac{\alpha_1 - i\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}; \quad \alpha = (z-a) \quad (1.97)$$

é uma transformação com número topológico $n=1$. Vemos então que (13)

$$\frac{1}{2e} e^{\lambda_M} \frac{\alpha_{\lambda}}{\alpha^2} = \frac{1}{e} g_{1/2}^{-1} \partial_M g_{1/2}; \quad g_{1/2} = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \quad (1.98)$$

De acordo com (1.37), a transformação $g_{1/2}$ tem número topológico $n = \frac{1}{2}$.

Vemos portanto que (13)

$$A_M^{cl}(z) \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} \frac{i}{e} \left[g_{1/2}^{-1}(y) \partial_M g_{1/2}(y) + g_{1/2}^{-1}(x) \partial_M g_{1/2}(x) \right] \quad (1.99)$$

Ou seja, a configuração $A_M^{cl}(z)$, em termos da qual é expressa a função de correlação (1.79), é a soma de um instanton ($q=+1/2$) e de um anti-instanton ($q=-1/2$), localizados respectivamente em y e x . Como teria de ser, A_{μ}^{cl} possui $q=0$.

Como a função de correlação correspondente ao

valor esperado no vácuo do operador $T(x, y)$ é saturada por A_{μ}^{cl} , então $T(x, y)$ é função exclusivamente da soma de um instanton e um anti-instanton com números topológicos $+ 1/2$ e $-1/2$, respectivamente. Podemos então atribuir a natureza confinante da Eletrodinâmica Quântica bidimensional, sem massa, à existência de configurações tipo instanton com números topológicos semi-inteiros.

2. QUEBRA ESPONTÂNEA DA SIMETRIA QUIRAL

Neste capítulo veremos como transformações ' de gauge, caracterizadas por números topológicos semi-inteiros , induzem o mecanismo de quebra espontânea da simetria quiral no modelo de Schwinger, estabelecendo, assim, um elo fundamental entre a quebra da simetria quiral e o fenômeno de confinamento.

Como vimos no capítulo 1, podemos atribuir a estrutura do vácuo do modelo de Schwinger à existência de configurações de campo tipo instanton.

Vimos também que cada classe de A_μ é caracterizada pelo índice de Chern, q , dado por

$$\begin{aligned} q &= \frac{e}{2\pi} \int \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} A_\nu d^2 x \\ &= \frac{e}{2\pi} \int \partial_\mu I^\mu d^2 x \\ &= \frac{e}{2\pi} \oint_C I^\mu ds_\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como o índice de Chern (o análogo, em duas ' dimensões, da carga topológica da teoria não-Abeliana, a quatro dimensões) parece definir naturalmente um vetor $I^\mu = \epsilon^{\mu\nu} A_\nu$, vamos interpretá-lo como uma "corrente topológica", e definir uma nova corrente axial, não invariante de gauge, e no espaço-tempo de Minkowski, da forma

$$\begin{aligned} \tilde{J}_5^\mu &= J_5^\mu + \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu ; \quad (\epsilon^{10} = -\epsilon^{01} = 1) \end{aligned} \quad (2.2a)$$

com

$$A_M(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{e} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu [\bar{Z}(x) + \tilde{\eta}(x)] ; (\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1) \quad (2.2b)$$

de forma que

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} A_\nu = -\frac{\sqrt{\pi}}{e} \partial_\mu \partial^\mu [\bar{Z}(x) + \tilde{\eta}(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{e} m^2 \bar{Z}(x) \quad (2.2c)$$

Em seguida, definimos a nova carga axial, não invariante frente a transformações de gauge

$$\tilde{Q}_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_5^0 dx_1 \quad (2.3)$$

Verifiquemos, então, como \tilde{Q}_5 se comporta sob uma transformação de gauge efetuada por $g_{\pm 1/2}(x) = \exp -i\Lambda_{\pm 1/2}(x)$, inserindo as transformações

$$A_M \rightarrow A'_M = A_M + \frac{i}{e} g_{\pm 1/2}^{-1} \partial_\mu g_{\pm 1/2} \quad (2.4)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = g_{\pm 1/2}^{-1} \psi \quad (2.5)$$

em (2.2a).

Obtemos imediatamente

$$\tilde{J}_5^\mu \xrightarrow{g_{\pm 1/2}} \tilde{J}_5^\mu + \frac{1}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} i g_{\pm 1/2}^{-1} \partial_\nu g_{\pm 1/2} \quad (2.6)$$

ou, de acordo com (3.3),

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_5 &\rightarrow \tilde{Q}'_5 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i g_{\pm 1/2}^{-1} \partial_1 g_{\pm 1/2} dx_1 \\ &= \tilde{Q}_5 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 \Lambda_{\pm 1/2}(x) dx_1 \\ &= \tilde{Q}_5 - 2n \\ &= \tilde{Q}_5 + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde n é o número topológico da transformação, eq. (1.37).

Na versão quantizada, a transformação correspondente a $g_{\pm 1/2}$ é realizada por um operador $T_{\pm 1/2} \equiv T[\Lambda_{\pm 1/2}]$ introduzido no capítulo anterior, e cuja ação sobre \tilde{Q}_5 , vista como um operador, é dada por

$$\tilde{Q}_5 \xrightarrow{T_{\pm 1/2}} T_{\pm 1/2} \tilde{Q}_5 T_{\pm 1/2}^{-1} \quad (2.8)$$

Concluimos então que

$$T_{\pm 1/2} \tilde{Q}_5 T_{\pm 1/2}^{-1} = \tilde{Q}_5 \neq 1,$$

ou seja

$$[\tilde{Q}_5, T_{\pm 1/2}] = \pm T_{\pm 1/2} \quad (2.9)$$

Estudaremos agora a ação de \tilde{Q}_5 sobre os vácuos

$$|n_1 n_2\rangle = (T_{-1/2})^{n_1} (T_{1/2})^{n_2} |0\rangle \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_5 |n_1 n_2\rangle &= \tilde{Q}_5 T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2} |0\rangle \\ &= T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2} \tilde{Q}_5 |0\rangle + [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2}] |0\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$[\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2}] = [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1}] T_{1/2}^{n_2} + T_{-1/2}^{n_1} [\tilde{Q}_5, T_{1/2}^{n_2}] \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1}] &= [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1-1} T_{-1/2}] = \\ &= [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1-1}] T_{-1/2} + T_{-1/2}^{n_1-1} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$[\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1-1}] = [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1-2}] T_{-1/2} + T_{-1/2}^{n_1-2} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}] \quad (2.14)$$

E, já que

$$[[\tilde{Q}_5, T_{\pm 1/2}], T_{\pm 1/2}] = 0 \quad (2.15)$$

$$[\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1}] = 2 T_{-1/2}^{n_1-1} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}] + [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1-2}] T_{-1/2}^2 \quad (2.16)$$

Repetindo o processo n_1-1 vezes, obtemos

$$[\tilde{Q}_5, T_{-1/2}^{n_1}] = n_1 T_{-1/2}^{n_1-1} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}] \quad (2.17)$$

Damesma forma

$$[\tilde{Q}_5, T_{1/2}^{n_2}] = n_2 T_{1/2}^{n_2-1} [\tilde{Q}_5, T_{1/2}] \quad (2.18)$$

Obtemos então

$$\tilde{Q}_5 |n_1 n_2\rangle = T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2} \tilde{Q}_5 |0\rangle + (n_1 T_{-1/2}^{n_1-1} [\tilde{Q}_5, T_{-1/2}] T_{1/2}^{n_2} + n_2 T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2-1} [\tilde{Q}_5, T_{1/2}]) |0\rangle \quad (2.19)$$

Impondo agora

$$\tilde{Q}_5 |0\rangle = 0 \quad (2.20)$$

teremos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_5 |n_1 n_2\rangle &= - (n_1 - n_2) T_{-1/2}^{n_1} T_{1/2}^{n_2} |0\rangle \\ &= - (n_1 - n_2) |n_1 n_2\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou seja, os vácuos $|n_1 n_2\rangle$ são auto-estados da carga axial \tilde{Q}_5 , com autovalor $-(n_1 - n_2)$.

Vejamos agora o efeito da transformação quiral, isto é, a transformação cujo gerador é a carga \tilde{Q}_5 , sobre os vácuos

$$|\theta_1 \theta_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1 n_2} e^{-i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} |n_1 n_2\rangle$$

que, como vimos no capítulo 1, constituem ground states de setores independentes no espaço de Hilbert, e são portanto os verdadeiros vácuos da teoria.

$$e^{i\alpha \tilde{Q}_5} |\theta_1 \theta_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1 n_2} e^{-i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} e^{i\alpha \tilde{Q}_5} |n_1 n_2\rangle$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi n_1 n_2} \sum e^{-i[n_1(\theta_1+\alpha) + n_2(\theta_2-\alpha)]} |n_1 n_2\rangle \\
 &= |\theta_1+\alpha, \theta_2-\alpha\rangle \qquad (2.22)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.21).

Vemos, portanto, que a transformação gerada pela carga axial \tilde{Q}_5 leva um vácuo $|\theta_1\theta_2\rangle$ em outro. Isto é realizado por uma rotação do vácuo de um ângulo α .

Por outro lado, demonstrou-se recentemente que, sob o ponto de vista quântico, no modelo de Schwinger, vale a seguinte equação (5)

$$\partial_M J_5^\mu = - \frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \Sigma(x), \qquad (2.23)$$

que é uma manifestação da anomalia de Adler, Bell e Jackiw, no modelo.

Concluimos então que \tilde{J}_5^μ é uma corrente conservada

$$\partial_M \tilde{J}_5^\mu = 0, \qquad (2.24)$$

de onde se conclui que \tilde{Q}_5 é conservada, ou seja, no modelo de Schwinger

$$[\tilde{Q}_5, H] = 0, \qquad (2.25)$$

onde H é o operador Hamiltoniano. Desta forma, a operação quiral $e^{i\alpha\tilde{Q}_5}$ é uma simetria do sistema.

Suponhamos agora que um determinado vácuo $|\theta_1\theta_2\rangle$ possua energia E_0

$$H|\theta_1\theta_2\rangle = E_0|\theta_1\theta_2\rangle \qquad (2.26)$$

Então

$$e^{i\alpha\tilde{Q}_5} H|\theta_1\theta_2\rangle = E_0|\theta_1+\alpha, \theta_2-\alpha\rangle \qquad (2.27)$$

Em virtude de (2.25)

$$H|\theta_1+\alpha, \theta_2-\alpha\rangle = E_0|\theta_1+\alpha, \theta_2-\alpha\rangle. \quad (2.28)$$

Vemos então que todos os vácuos $|\theta_1\theta_2\rangle$ possuem a mesma energia. Assim, os diversos setores do espaço de Hilbert, cujos estados fundamentais são os vácuos $|\theta_1\theta_2\rangle$, são fisicamente equivalentes.

A essência destes resultados é que a operação de simetria quiral $e^{i\alpha\tilde{Q}_5}$ leva um vácuo do sistema em um outro estado com a mesma energia, isto é, em outro vácuo, de onde se conclui que no modelo de Schwinger ocorre quebra espontânea da simetria quiral.

Isto provém do seguinte fato. Como no modelo não há transições entre os diferentes ⁽⁵⁾vácuos θ , pode-se escolher como vácuo do modelo qualquer um deles, com valores fixos de θ_1 e θ_2 . Assim, a escolha do vácuo físico, com valores dados de θ_1 e θ_2 , leva à quebra da invariância sob as transformações $\exp i\alpha\tilde{Q}_5$.

3. CONCLUSÕES

Neste capítulo tentaremos compreender, e examinar possíveis consequências dos resultados obtidos nos dois últimos capítulos.

Como vimos no capítulo 1, podemos atribuir a natureza confinante da Eletrodinâmica Quântica bidimensional sem massa à existência de configurações de campos de gauge tipo instanton, caracterizadas por números topológicos semi-inteiros.

A natureza confinante da teoria está, então, intimamente relacionada com a invariância de gauge. No capítulo citado mostramos que números topológicos semi-inteiros caracterizam transformações de gauge que, a nível quântico, têm como correspondentes, operadores unitários que geram a estrutura do vácuo.

Poderíamos pensar que a natureza confinante estaria, de fato, associada à estrutura (degenerada) do vácuo. Entretanto, isto não é verdadeiro. A degenerescência do vácuo em QED_2 não é um fato inerente ao modelo, e o grau de degenerescência depende do gauge escolhido. A degenerescência em um gauge particular depende da presença de cargas gauge-não-invariantes conservadas ⁽¹⁸⁾.

No capítulo 2, constatamos que $n = \pm 1/2$ caracteriza transformações de gauge que, a nível quântico, induzem a quebra espontânea da simetria quiral.

Como o modelo de Schwinger possui uma estrutura de vácuo, no gauge de Lorentz, inteiramente análoga à das teorias não-Abelianas a quatro dimensões ⁽¹³⁾, a investigação dos aspectos análogos (para $n = \pm 1$) aos apresentados neste trabalho, em QCD, torna-se aconselhável.

Finalmente, esperamos que nossos esforços venham a contribuir para uma melhor compreensão das interações fortes.

APÊNDICE

Aqui mostraremos que se o campo A_μ tende a um gauge puro sobre um círculo de raio infinito em E_2 , então q , eq. (1.60), é igual a n , eq. (1.37). Em outras palavras, o índice de Chern de um campo A_μ , regular nas regiões finitas de E_2 , e que tende a um gauge puro sobre um círculo infinito, é igual ao número topológico das transformações $g(x)$, em termos das quais A_μ é expresso sobre este círculo.

O índice de Chern, q , pode ser escrito

$$q = \frac{e}{2\pi} \int_C \epsilon^{\mu\nu} \left(\frac{i}{e} g^{-1} \partial_\nu g \right) \hat{x}_\mu ds \quad (A.1)$$

Queremos expressar (A.1) no sistema de coordenadas esféricas de E_2 , dado por

$$\bar{x}^\mu = (R, \varphi); \quad 0 \leq R \leq \infty; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \epsilon^{R\varphi} = 1 \quad (A.2)$$

com

$$x_1 = R \cos \varphi; \quad x_2 = R \sin \varphi \quad (A.3)$$

e cujo tensor métrico é $\bar{g}^{\mu\nu}$.

Esta transformação é efetuada por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \quad (A.4)$$

Usando (A.3) podemos calcular o Jacobiano, J ,

$$J = \det (T^{\mu\nu}) = R \quad (A.5)$$

Teremos então

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} \bar{g}^{\alpha\beta}; \quad 1 = J^2 \bar{g}; \quad \bar{g} = \det (\bar{g}^{\alpha\beta}) \quad (A.6)$$

de forma que

$$1/\sqrt{g} = J = R \quad (\text{A.7})$$

Seja c uma circunferência de raio infinito

em E_2 , temos

$$ds = R d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{g}} \quad (\text{A.8})$$

Como a grandeza $\sqrt{g} \epsilon^{uv}$ é um tensor ($g = \det(g^{ij})$),

obtemos

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint_c \frac{d\varphi}{\sqrt{g}} \sqrt{g} \epsilon^{uv} \bar{\partial}_v \Delta \hat{x}_u \quad (\text{A.9})$$

onde \hat{x}_μ é o vetor unitário em coordenadas esféricas, normal a C .

Em virtude de (A.2), q pode ser escrito

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \epsilon^{uv} \bar{\partial}_v \Delta \hat{x}_u \quad (\text{A.10})$$

Já que \hat{x}_μ só possui componente R , pois é normal a C , e já que $\epsilon^{R\varphi} = 1$, obtemos

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\partial}_\varphi \Delta d\varphi = n \quad (\text{A.11})$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- 1 - SCHWINGER, J., Phys. Rev. 128, 2425 (1962)
- 2 - LOWENSTEIN, J. H. and SWIECA, J. A. Ann. Phys. (N. Y.) 68 ,
172 (1971)
- 3 - SWIECA, J. A., Forts. der Physik 25, 303 (1977)
- 4 - ROTHE, K. D. and SWIECA, J. A., Phys. Rev. D15, 541 (1977)
- 5 - TAVKHELIDZE, A. N. and TOKAREV, V. F., Sov J. Part. Nucl. '
16(5), 431 (1985)
- 6 - ROTHE, K. D. and SWIECA, J. A., Phys. Rev. D15, 541 (1977)
- 7 - BELAVIN, A.; POLYAKOV, A.; SCHWARTZ, A. and TYUPKIN, Y., '
Phys. Letters 59B, 85(1975)
- 8 - NIELSEN, N. K. and SCHRER, B., Nucl. Phys. B127, 497 (1977)
- 9 - MARCIANO, W. and PAGELS, H., Phys. Reports 36C, 137 (1978)
- 10 - CALLAN Jr., C.; DASHEN, R. F. and Gross, D. J., Phys. Letters
63B, 334 (1976)
- 11 - COLEMAN, S., Summer School of Physics "Ettore Majorana" '
(1973) Erice, Sicilia, Itália
- 12 - NIELSEN, N. K. and SCHROER, B., Nucl. Phys. B120, 62, (1977)
- 13 - MARINO, E. C., Tese de Mestrado, PUC-Rio, (1978)
- 14 - NIELSEN, N. K. and SHROER, B., Phys. Letters B66, 475 (1977)
- 15 - NIELSEN, N. K. and SHROER, B., Phys. Letters B66, 373 (1977)
- 16 - NIELSEN, H.B. and OLESEN, P., Nucl. Phys. B61, 45. (1973)
- 17 - MIGNACO, J. A. and REGO MONTEIRO, M. A., Phys. Rev. D31 ,
3251 (1985)
- 18 - KIESELEV, A. V., Theor, Math. Phys. 61, 3, 1233 (1984).

"NUMEROS TOPOLOGICOS SEMI-INTEIROS: CONFINAMENTO E
QUEBRA ESPONTANEA DA SIMETRIA QUIRAL
NO MODELO DE SCHWINGER"

WASHINGTON FIGUEIREDO CHAGAS FILHO

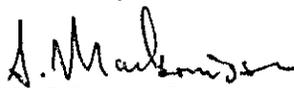
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora. os seguintes professores:



Juan Alberto Mignaco - Presidente



Eduardo Cantera Marino



Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson