

DJALMA MANOEL SOARES FILHO

ESTUDO DO TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO  
DO SUPERPOTENCIAL DO MODELO DE WESS-ZUMINO A  
NÍVEL DE 2-"LOOPS" NO CONTEXTO DE SUPERCAMPOS

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1987

- A meus pais

- A meu irmão

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prem, pelo tema, sugestões e discussões frutíferas.

Aos meus colegas do CBPF, pelas boas discussões e pelo agradável convívio.

Aos meus colegas do Instituto de Física da UFRJ.

Aos meus pais e ao meu irmão, por me apoiarem irrestritamente em todos os momentos.

A minha avó Julieta e meu padrinho João, pela força.

À Ângela, pelo carinho.

À Helena, pelo excelente trabalho de datilografia.

Ao CNPq, pela bolsa concedida, que tanto me ajudou e que tanta falta fez ao terminar.

A DEUS.

## RESUMO

Neste trabalho fazemos um estudo do Teorema de Não-Renormalização do Superpotencial, para o modelo de Wess-Zumino simples ( $N = 1$ ), no contexto de supercampos. No primeiro capítulo, revisamos supersimetria. A partir de um modelo, formado por um campo escalar real e um espinor de Majorana, obtemos a álgebra dos geradores desta transformação de simetria, através de argumentos dimensionais. Definimos superespaço, realizamos a álgebra no mesmo e apresentamos geradores diferenciais. Definimos supercampo escalar, derivadas espinoriais covariantes e, a partir destes, introduzimos supercampos quirais, anti-quirais e vetorial. Por último, neste capítulo, exibimos a ação supersimétrica de Wess-Zumino (formada por um campo escalar complexo  $A(x)$ , um espinor de Majorana  $\psi(x)$  e um campo auxiliar, escalar complexo,  $F(x)$ ), em termos dos campos componentes e dos supercampos quirais. No segundo capítulo, encontramos os superpropagadores da teoria, ou seja, os propagadores dos supercampos potenciais. No terceiro, regularizamos, através do processo de Pauli-Villares-Gupta, e renormalizamos o modelo, a nível de aproximação em cadeia dos superpropagadores. Nos três capítulos seguintes, demonstramos explicitamente o Teorema de Não-Renormalização do Superpotencial, a nível de dois "loops". No quarto capítulo, enunciemos regras de Feynman e verificamos a veracidade do Teorema a nível de um "loop", e no quinto e sexto capítulos, abordamos as funções de dois e três pontos, respectivamente, a nível de dois "loops". Verificamos que só há necessidade de um contra-termo do tipo cinético, função da constante de renormalização de função de onda, na densidade lagrangeana renormalizada do modelo em questão.

# S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
<u>CAPÍTULO 1</u> - SUPERSIMETRIA .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Transformações de SUSY. A Álgebra de Super-Poincaré ( $SP_4$ ) .....	2
1.3 - Superespaço .....	7
1.4 - Realização da Álgebra de SUSY no Superespaço e Geradores Diferenciais .....	8
1.5 - Supercampo Escalar. Derivadas Espinoriais Covariantes....	11
1.6 - Supercampos Escalares Irredutíveis .....	15
1.7 - Supercampos Quirais .....	16
1.7.i - Supermultiplete Quiral .....	16
1.7.ii - Supermultiplete Anti-Quiral .....	19
1.8 - Ação Supersimétrica para Supermultipletos Quirais, Modelo de Wess-Zumino .....	20
<u>CAPÍTULO 2</u> - SUPERPROPAGADORES .....	24
<u>CAPÍTULO 3</u> - APROXIMAÇÕES EM CADEIA .....	32
3.1 - Introdução .....	32
3.2 - Regras de Feynman para o Vértice .....	32
3.3 - Aproximação a Nível de "1-Loop" .....	34
3.3.i - Cálculo de $\Delta_{SS^\dagger}$ .....	35
3.3.ii - Regularização Através do Método de Pauli-Villars - Gupta .....	57
3.3.iii - Renormalização da Massa ao Nível de Um "Loop"....	61
3.3.iv - Renormalização da Função de Onda ao Nível de Um "Loop" .....	63
3.3.v - A Densidade Lagrangeana Renormalizada Livre ao Nível de Um "Loop" .....	65

3.4 - Aproximação em Cadeia para $\Delta^{SS^+}(z, z')$ e $\Delta^{SS}(z, z')$ .....	68
3.5 - Renormalização de Massa e de Função de Onda ao Nível de Aproximação em Cadeia .....	75
<u>CAPÍTULO 4</u> - TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE UM "LOOP" .....	79
4.1 - Diagrama I1P ao Nível de Um "Loop" .....	79
4.2 - Regras de Feynman .....	88
<u>CAPÍTULO 5</u> - TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE DOIS "LOOPS" -	
1ª PARTE .....	92
5.1 - Diagramas da Classe A .....	92
5.2 - Diagramas da Classe B .....	103
<u>CAPÍTULO 6</u> - TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE DOIS "LOOPS" -	
2ª PARTE .....	115
6.1 - Diagramas de Topologia I .....	117
6.2 - Diagramas de Topologia II .....	120
6.3 - Diagramas de Topologia III .....	121
<u>APÊNDICE A</u> - REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DO GRUPO DE LORENTZ - NOTAÇÃO...	133
<u>APÊNDICE B</u> - OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO LOCAL EM $\theta, \bar{\theta}$ PARA $\Sigma_2^{(0)}$ .....	142
<u>REFERÊNCIAS</u> .....	146

## LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>		<u>PÁG.</u>
3.1	- Diagramas que ilustram as regras de Feynman para os vértices..	34
3.2a,b	- Somas que definem os superpropagadores corrigidos de ordem mais baixa em $g$ .....	34-35
3.3	- Diagramas do tipo árvore que ilustram as regras de Feynman para os novos vértices .....	58
3.4a,b	- Somas que definem $\Delta_{12\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$ e $\Delta_{13\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$ .....	59
3.5a,b	- Aproximações em cadeia para os superpropagadores $\Delta^{SS^\dagger}(z,z')$ e $\Delta^{SS}(z,z')$ .....	68-69
4.1	- Duas pernas externas de mesma quiralidade .....	80
4.2	- Três pernas externas de mesma quiralidade .....	80
4.3	- Duas pernas externas de quiralidade diferente .....	80
4.4	- Três pernas externas; uma anti-quiral e duas quirais ( e seu complexo conjugado) .....	81
5.1a,b,c	- Diagramas da classe A .....	93
5.2a,b,c	- Diagramas da classe B .....	104
6.1a,b,c	- Diagramas que corrigem radiativamente o vértice $\Phi^3$ .....	116

SUPERSIMETRIA

1.1 - INTRODUÇÃO

Supersimetria (SUSI) é uma simetria relativística entre bósons e férmions, ou seja: é uma simetria que relaciona partículas de diferentes estatísticas (partículas de espins inteiros e semi-inteiros). Isso graças aos seus geradores fermiônicos que, ao contrário de todas as simetrias estudadas anteriormente, obedecem a relações de anti-comutação, dando origem assim a supermultipletos de partículas que diferem entre si por unidades de  $\frac{1}{2}$  de spin.

As simetrias estudadas anteriormente a SUSI possuíam geradores bosônicos e geravam a álgebra de Lie usual. Diversos teoremas "no-go" foram descobertos para mostrar que nenhuma unificação relativística não trivial era possível com geradores bosônicos. No entanto, a álgebra graduada dos geradores de SUSI, ao contrário da álgebra de Lie usual, nos permite driblar tais teoremas <sup>(1)</sup>.

Um dos fatos mais notáveis nas teorias de campos supersimétricos, que constataremos neste trabalho para um modelo específico, é que tais teorias têm graus de divergência ultravioleta inferiores aos das teorias correspondentes sem SUSI. No caso específico deste trabalho, em que abordamos, em última análise, a extensão supersimétrica dos modelos escalares  $\lambda\phi^3$  e  $\lambda\phi^4$  (os quais sem SUSI possuem divergências logarítmicas e quadráticas), vere-



mos que tal extensão possui unicamente divergências logarítmicas, ou seja, as divergências quadráticas são canceladas entre si. Vale a pena citar, que há pouco tempo foi demonstrado que a teoria de Yang-Mills  $N = 4$  com SUSI é finita <sup>(2)</sup>.

Uma outra peculiaridade importante, que pode nos oferecer a possibilidade de unificar a gravitação com as demais interações, é a introdução obrigatória de partículas tais como o gravitino e seu companheiro supersimétrico gravitino em realizações de SUSI quando exige-se a localidade de seus parâmetros.

Historicamente, pode-se afirmar que as primeiras representações lineares de SUSI foram introduzidas por Wess e Zumino <sup>(3)</sup>. Logo após, Salam juntamente com Strathdee, Ferrara e Wess e Zumino descobriram realizações de SUSI no superespaço de coordenadas (superespaço este constituído por coordenadas espaço-temporais, bosônicas, e coordenadas anti-comutativas, fermiônicas), e introduziram supercampos (definidos no superespaço) para descreverem um supermultiplete. A introdução de supercampos foi da maior importância para que as teorias quânticas usuais fossem supersimetrizadas e para o desenvolvimento posterior dessas teorias <sup>(4,5)</sup>.

Com relação à existência de SUSI na natureza, muito pouco pode ser dito atualmente, pois até agora partículas supersimétricas tais como o fotino, os squarks, os gluinos, etc ainda não foram detectadas.

## 1.2 - TRANSFORMAÇÕES DE SUSI. A ÁLGEBRA DE SUPER-POINCARÉ ( $SP_4$ )

Vamos retirar as transformações de SUSI, bem como a álgebra de Super-Poincaré, a partir de um modelo <sup>(\*)</sup>.

---

<sup>(\*)</sup> Encontra-se no Apêndice A, "Representação Espinorial do Grupo de Lorentz", a notação que faremos uso.

Considere um modelo formado por um campo escalar real  $A(x)$  e um campo espinorial de Majorana descrito pela ação:

$$I = \int d^4L = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial^\ell A) (\partial_\ell A) + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\ell \partial_\ell \psi \right\} \quad (1.1)$$

Ou também

$$I = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial^\ell A) (\partial_\ell A) + \frac{i}{2} [(\partial_\ell \psi) \sigma^\ell \bar{\psi} + (\partial_\ell \bar{\psi}) \sigma^\ell \psi] \right\} . \quad (1.2)$$

Nós trabalharemos no sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$ , de modo que a dimensão de  $L$ , simbolizada por  $[L]$ , medida em unidades do inverso do comprimento, será igual a 4,  $[L] = 4$ . Assim, através de (1.1) ou (1.2), vê-se que  $[A] = 1$  e  $[\psi] = 3/2$ .

A transformação de SUSY linear mais simples do campo  $A$  é dada por:

$$\delta_\xi A = \xi \psi + \bar{\xi} \bar{\psi} \quad , \quad (1.3)$$

onde  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  – espinores de Majorana – são parâmetros da transformação. Observe que desta transformação segue que  $[\xi] = [\bar{\xi}] = -1/2$ .

Agora, para escrever a transformação supersimétrica correspondente para o campo espinorial " $\psi$ ", devemos combinar o parâmetro " $\xi$ " (espinorial) com o campo escalar real " $A$ ". Mas o produto " $\xi A$ " simplesmente possui dimensão 1/2, enquanto " $\psi$ ", como vimos, tem dimensão 3/2. Para acertar as dimensões, temos que introduzir uma derivada espaço-temporal, pois  $[\partial_\ell] = 1$ . Assim, podemos escrever

$$\delta_\xi \psi_\alpha = i (\sigma^\ell \bar{\xi})_\alpha \partial_\ell A \quad , \quad (1.4a)$$

$$\delta_{\xi} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = i (\bar{\sigma}^{\ell} \xi)^{\dot{\alpha}} \partial_{\ell} A \quad , \quad (1.4b)$$

onde os fatores foram escolhidos apropriadamente para que a ação (1.2) seja invariante perante as transformações de SUSI (1.3) , (1.4a) e (1.4b).

Para o comutador de duas transformações supersimétricas, com parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , encontra-se para o campo bosônico "A"

$$[\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}]A = 2i (\xi_2 \sigma^{\ell} \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^{\ell} \bar{\xi}_2) \partial_{\ell} A \quad . \quad (1.5)$$

Definimos os geradores infinitesimais de SUSI " $Q_{\alpha}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ " , com  $[Q_{\alpha}] = [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 1/2$ , por:

$$\delta(\text{Campo}) = -i (\xi^{\alpha} Q_{\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) (\text{Campo}) \quad . \quad (1.6)$$

Do fato de " $\xi$ " e " $\bar{\xi}$ " anticomutarem com " $Q$ " e " $\bar{Q}$ ", pode-se deduzir a relação

$$\begin{aligned} [\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}] (\text{Campo}) &= (-\xi_2^{\alpha} \{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_1^{\dot{\beta}} + \xi_1^{\alpha} \{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_2^{\dot{\beta}} + \\ &+ \xi_2^{\alpha} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} \xi_1^{\beta} + \bar{\xi}_2^{\dot{\alpha}} \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_1^{\dot{\beta}}) (\text{Campo}) . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, comparando esta última relação com a (1.5), encontra-se que os geradores que atuam no campo "A" satisfazem as relações de anti-comutação:

$$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = -2i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\ell} \partial_{\ell} \quad , \quad (1.8a)$$

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = 0 \quad , \quad (1.8b)$$

$$\{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0 \quad . \quad (1.8c)$$

O gerador  $P_\ell$  das translações espaço-temporais pode ser definido por:

$$\delta_a x = i(a.P)x^\ell \quad , \quad (1.9)$$

de modo que

$$P_\ell = -i\partial_\ell \quad . \quad (1.10)$$

As propriedades de transformação dos campos perante translações são dadas por:

$$\delta_a A = -a^\ell \partial_\ell A = -i(a.P)A \quad , \quad (1.11a)$$

$$\delta_a \psi = -a^\ell \partial_\ell \psi = -i(a.P)\psi \quad . \quad (1.11b)$$

Logo, do comutador (que pode ser obtido diretamente das relações de transformação)

$$[\delta_a, \delta_\xi](\text{Campo}) = 0 \quad (1.12)$$

e assumindo que  $a^\ell$  comuta com os parâmetros espinoriais  $\xi, \bar{\xi}$ , deriva-se que

$$[P_\ell, Q_\alpha] = 0 \quad , \quad (1.13a)$$

$$[P_\ell, \bar{Q}_\alpha] = 0 \quad . \quad (1.13b)$$

As propriedades de transformação dos campos sob rota -

ções de Lorentz

$$\delta x^\ell = \lambda^\ell_m x^m = -\frac{i}{2} (\lambda_{pq} L^{pq}) x^\ell \quad (1.14)$$

são dadas por:

$$\delta(\text{Campo}) = \frac{i}{2} \lambda_{\ell m} M^{\ell m}(\text{Campo}) \quad , \quad (1.15)$$

onde

$$M_{\ell m} = L_{\ell m} = -i(x_\ell \partial_m - x_m \partial_\ell) \quad , \quad \text{para } A \quad , \quad (1.16a)$$

$$M_{\ell m} = L_{\ell m} + i \sigma_{\ell m} \quad , \quad \text{para } \psi \quad , \quad (1.16b)$$

$$M_{\ell m} = L_{\ell m} + i \bar{\sigma}_{\ell m} \quad , \quad \text{para } \bar{\psi} \quad . \quad (1.16c)$$

Deriva-se das relações de transformação que:

$$\begin{aligned} [\delta_L, \delta_\xi]A &= \frac{1}{2} \lambda_{\ell m} (\xi^\sigma \ell_m \psi + \bar{\xi} \bar{\sigma}^{\ell m} \bar{\psi}) \\ &= -\frac{i}{2} \lambda_{\ell m} (\xi^\sigma \ell_m Q + \bar{\xi} \bar{\sigma}^{\ell m} \bar{Q})A \quad . \end{aligned} \quad (1.17)$$

E das definições dos geradores, por outro lado,

$$[\delta_L, \delta_\xi]A = \left[ \frac{i}{2} \lambda_{\ell m} M^{\ell m}, -i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \right]A \quad . \quad (1.18)$$

Desenvolvendo esta última e comparando com (1.17) (assumindo que  $\lambda_{\ell m}$  comuta com os parâmetros espinoriais  $\xi, \bar{\xi}$ ), demonstra-se que:

$$[M^{\ell m}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\ell m} Q)_\alpha \quad , \quad (1.19a)$$

$$[\bar{M}^{\ell m}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}^{\ell m} \bar{Q})^{\dot{\alpha}} \quad , \quad (1.19b)$$

onde  $\bar{M}^{\ell m} = -(M^{\ell m})^*$ .

Similarmente, pode-se encontrar os comutadores:

$$[M_{\ell m}, P_n] = i(\eta_{mn} P_\ell - \eta_{\ell n} P_m) \quad , \quad (1.20a)$$

$$[P_\ell, P_m] = 0 \quad . \quad (1.20b)$$

Os geradores infinitesimais  $P_\ell, M_{\ell m}, Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  dão origem a uma álgebra fechada conhecida por Super-Poincaré, denotada por  $SP_4$ . É a extensão mínima da álgebra de Poincaré, gerada por  $M_{\ell m}$  e  $P_\ell$ , contendo a mais os geradores de SUSY espinoriais  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ . A álgebra fecha sob um produto de Lie graduado, definido por:

$$M_1 \wedge M_2 \equiv [M_1, M_2] = M_1 M_2 - (-1)^{m_1 m_2} M_2 M_1 \quad (1.21)$$

onde  $m$  denota o número total de índices espinoriais contidos em  $M$ .

### 1.3 - SUPERESPAÇO

Como mencionamos na Introdução, os supermultipletos podem ser representados por supercampos, definidos no superespaço de coordenadas

$$Z^M : (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \quad , \quad (1.22)$$

onde  $M$  varre os índices bosônicos ( $m$ ) e fermiônicos ( $\alpha, \dot{\alpha}$ ). As relações de comutação entre estas coordenadas são dadas por:

$$Z^k Z^L = (-1)^{\frac{k \cdot L}{2}} Z^L Z^k \quad , \quad (1.23)$$

onde  $\underline{k} = 0$ , se  $k$  for um índice bosônico e  $\underline{k} = 1$ , se  $k$  for um índice fermiônico. Quando ambos os índices  $k$  e  $L$  forem fermiônicos as coordenadas correspondentes anti-comutam.

#### 1.4 - REALIZAÇÃO DA ÁLGEBRA DE SUSI NO SUPERESPAÇO E GERADORES DIFERENCIAIS <sup>(6)</sup>

Considere inicialmente a realização do grupo de Poincaré "P" no espaço de Minkowski. "P" é definido por:

$$P = \{(a_\ell, \Lambda) \mid (a', \Lambda') (a, \Lambda) = (a' + \Lambda' a, \Lambda' \Lambda)\} \quad , \quad (1.24)$$

onde  $a_\ell$ : quadri-vetor de translação

$\Lambda = (\Lambda_m^\ell)$ : rotações de Lorentz,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad . \quad (1.25)$$

e  $a_\ell, \Lambda_m^\ell$  são reais.  $T_4$  e  $L$  são subgrupos de  $P$ ,

$$T_4 = \{(a, I) \mid (a', I) (a, I) = (a' + a, I)\} \quad , \quad (1.26)$$

$$L = \{(0, \Lambda) \mid (0, \Lambda') (0, \Lambda) = (0, \Lambda' \Lambda)\} \quad . \quad (1.27)$$

Como  $(a, \Lambda) = (a, I) (0, \Lambda)$ , o espaço coset com relação a  $L \subset P$  é dado por  $P/L = \{(a, I)L\}$ . Agora, considerando um elemento de  $P/L$ , digamos  $(x_\ell, I)L$  e sendo  $(a, \Lambda) \in P$  um elemento arbitrário, segue que:

$$\begin{aligned}
 (a, \Lambda)(x, I)L &= (a + \Lambda x, \Lambda)L \\
 &= (a + \Lambda x, I)(0, \Lambda)L \\
 &= (a + \Lambda x, I)L \quad . \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$(x, I)L \xrightarrow{(a, \Lambda)} (a + \Lambda x, I)L \equiv (x', I)L \quad , \quad (1.29)$$

isto é, qualquer  $(a, \Lambda) \in P$  induz uma transformação no espaço coset  $P/L$  parametrizado por  $(x, I)$ ,

$$x'^{\ell} = a^{\ell} + \Lambda^{\ell}_{m} x^m \quad . \quad (1.30)$$

Ou ainda, temos uma realização de  $P$  sobre os parâmetros do espaço coset.

Agora, considere o grupo de Super-Poincaré, " $SP_4$ ". Um elemento genérico de  $SP_4$  pode ser expresso por:

$$e^{i(-a^{\ell} \cdot P_{\ell} + \xi^{\alpha} Q_{\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \dot{Q}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \lambda^{\ell m} M_{\ell m})} \quad (1.31)$$

onde:

$a^{\ell}$ 's: parâmetros de translação;

$\xi^{\alpha}, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ 's: parâmetros de SUSY (espinores de Weyl);

$\lambda^{\ell m}$ 's: parâmetros de rotação de Lorentz.

Como  $LCSP_4$  é um subgrupo fechado. O espaço coset  $SP_4/L$  consiste de elementos da forma:



$$g_L(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(x \cdot P + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \quad (1.32)$$

Fazendo uso da álgebra de SUSI que extraímos,

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2 \sigma_{\alpha\beta}^\ell P_\ell \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = [Q_\alpha, P_\ell] = [\bar{Q}_\alpha, P_\ell] = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

e da relação

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots} \quad (1.34)$$

deriva-se que

$$e^{i(-a \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} g_L(x, \theta, \bar{\theta}) = g_L(x', \theta', \bar{\theta}') \quad (1.35)$$

onde

$$\begin{cases} x'^\ell = x^\ell + i(\theta \sigma^\ell_{\bar{\xi}} - \xi \sigma^\ell_{\bar{\theta}}) + a^\ell \\ \theta'_\alpha = \theta_\alpha + \xi_\alpha \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{cases} \quad (1.36)$$

As transformações de SUSI são assim realizadas como supertranslações sobre pontos no superespaço. Observe que  $x'^\ell$  é real se  $x^\ell$  também o é. Contudo,  $i(\theta \sigma^\ell_{\bar{\xi}} - \xi \sigma^\ell_{\bar{\theta}})$  é um quadri vetor com componentes nilpotentes.

Os geradores diferenciais são definidos através de

$$\delta Z^M = i(a.P + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})Z^M \quad . \quad (1.37)$$

Com isso, de (1.36) e  $\partial_\ell x^m = \delta_\ell^m$ ,  $\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$ ,  $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ ,  $\partial_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta$ ,  $\partial^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta$  etc, segue que

$$Q_\alpha = -i\partial_\alpha - \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\ell \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\ell \quad , \quad (1.38a)$$

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\ell \partial_\ell \quad , \quad (1.38b)$$

$$P_\ell = -i\partial_\ell \quad . \quad (1.38c)$$

## 1.5 - SUPERCAMPO ESCALAR. DERIVADAS ESPINORIAIS COVARIANTES

### 1.5.i - Supercampo Escalar

Supercampos são representações lineares da álgebra de SUSY. Eles são funções dos pontos do superespaço -  $F(z) = F(x, \theta, \bar{\theta})$  - que podem ser entendidos em termos de suas expansões de Taylor em " $\theta, \bar{\theta}$ ", que têm a forma geral:

$$\begin{aligned} F(z) = & f(x) + \theta^\alpha \phi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}}(x) + \theta^2 m(x) \\ & + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\ell \bar{\theta}^{\dot{\beta}} v_\ell(x) + \theta^2 \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(x) \\ & + \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 d(x) \quad , \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde  $f(x)$ ,  $\phi_\alpha(x)$ ,  $\bar{\chi}^{\dot{\beta}}(x)$ ,  $m(x)$ ,  $n(x)$ ,  $v_\ell(x)$ ,  $\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(x)$ ,  $\psi_\alpha(x)$  e  $d(x)$  denotam os campos componentes do supercampo  $F(z)$ , isto é, são os

campos que correspondem às partículas do supermultiplete em questão.

No que diz respeito às dimensões dos campos componentes, pode ser derivado de (1.39) que

$$\begin{aligned}
 [F] &= [f(x)], [\phi(x)] = [\bar{\chi}(x)] = [f(x)] + \frac{1}{2}, [m(x)] = [n(x)] = \\
 &= [v_\ell(x)] = [f(x)] + 1, [\bar{\lambda}(x)] = [\psi(x)] = [f(x)] + \frac{3}{2}, \\
 [d(x)] &= [f(x)] + 2 \quad . \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

As transformações infinitesimais dos supercampos são de finidas em termos das transformações de seus campos componentes. Elas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \delta_\xi F(z) &= \delta_\xi f(x) + \theta^\alpha \delta_\xi \phi_\alpha(x) + \bar{\phi}_\beta \delta_\xi \bar{\chi}^{\dot{\beta}}(x) \\
 &+ \theta^2 \delta_\xi m(x) + \bar{\theta}^2 \delta_\xi n(x) + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \delta_\xi v_\ell(x) \\
 &+ \theta^2 \bar{\theta}_\beta \delta_\xi \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(x) + \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \delta_\xi \psi_\alpha(x) \\
 &+ \theta^2 \bar{\theta}^2 \delta_\xi d(x) \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] F(z) &= [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] f(x) + \theta^\alpha [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] \phi_\alpha(x) \\
 &+ \dots + \theta^2 \bar{\theta}^2 [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] d(x) \quad . \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar a partir de (1.39) que a soma e o produto de dois

ou mais supercampos também são supercampos.

A forma de  $F$  num ponto infinitesimalmente próximo de  $z$ ,  $z+dz$ , é dada por:

$$\begin{aligned} F(z+dz) &= F(z) + \delta z^M \partial_M F(z) + \dots \\ &= F(z) + \delta x^\ell \partial_\ell F + \delta \theta^\alpha \partial_\alpha F + \delta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\dot{\alpha}} F + \dots \end{aligned} \quad (1.43)$$

Perante uma transformação de SUSI (supertranslação (1.36))  $z \rightarrow z'$ , o supercampo  $F(z)$  se transforma em  $F'(z')$ . Super-campo escalar complexo é definido por

$$S'(z') = S(z) \quad . \quad (1.44)$$

Para transformações infinitesimais, tendo em vista (1.36), (1.38a, b,c), obtém-se a transformação de SUSI para  $S(z)$ :

$$\begin{aligned} \delta S(z) &= S'(z) - S(z) = -(\delta z^M) \partial_M S + \dots \\ &= -i(a.P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) S + \dots \end{aligned} \quad (1.45)$$

e, tal como para os campos componentes,

$$[\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}] S(z) = 2i(\xi_2^\sigma \bar{\xi}_1^\sigma - \xi_1^\sigma \bar{\xi}_2^\sigma) S(z) \quad (1.46)$$

O fato de que  $\partial_\ell$  comuta com  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ ,

$$[\partial_\ell, Q_\alpha] = [\partial_\ell, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0 \quad , \quad (1.47)$$

nos mostra que  $\partial_\ell$  é uma derivada covariante com respeito a SUSI . Mas por outro lado,  $\partial_\alpha$  e  $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$  não são derivadas covariantes de SUSI, como pode ser visto diretamente examinando-se as expressões (1.38 a,b). As derivadas espinoriais covariantes, que denotaremos por  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$  , devem satisfazer à relação:

$$\begin{aligned} \delta_\xi D_\alpha S &= -i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) D_\alpha S \\ &= -i D_\alpha (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) S = D_\alpha \delta_\xi S \quad . \end{aligned} \quad (1.48)$$

Das expressões de  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ , (1.38a,b), pode-se definir  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$  como sendo:

$$\left\{ \begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha + i(\sigma^{\ell\bar{\theta}})_\alpha \partial_\ell & (1.49a) \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma^\ell)_{\dot{\alpha}} \partial_\ell & (1.49b) \end{aligned} \right.$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{aligned} D^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta} D_\beta = -\partial^\alpha + i(\sigma^{\ell\bar{\theta}})^\alpha \partial_\ell & (1.50a) \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{D}_{\dot{\beta}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma^\ell)^{\dot{\alpha}} \partial_\ell & (1.50b) \end{aligned} \right.$$

E destas deduz-se as seguintes relações de fundamental importância:

$$D_\alpha (FG) = (D_\alpha F)G \pm F(D_\alpha G) \quad , \quad (1.51)$$

onde o sinal superior (inferior) prevalece quando F é uma função par (ímpar) com respeito às variáveis de Grassmann;

$$D^2(FG) = D^\alpha D_\alpha(FG) = (D^2 F)G + F(D^2 G) \pm 2(D^\alpha F)(D_\alpha G) \quad ; \quad (1.52a)$$

$$\bar{D}^2(FG) = \bar{D}_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}}(FG) = (\bar{D}^2 F)G + F(\bar{D}^2 G) \pm 2(\bar{D}_\alpha F)(\bar{D}^{\dot{\alpha}} G) \quad . \quad (1.52b)$$

## 1.6 - SUPERCAMPOS ESCALARES IRREDUTÍVEIS

Perante uma transformação do SUSI, os campos componentes de um supermultipeto escalar se transformam, de acordo com (1.45) e (1.46), linearmente entre si. Um supermultipeto deve conter pelo menos um campo fermiônico e um bosônico. Podemos fazer uso dos operadores de projeção  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_T$  - definidos por:

$$P_1 \equiv \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \square} \quad , \quad (1.53a)$$

$$P_2 \equiv \frac{\bar{D}^2 D^2}{16 \square} \quad , \quad (1.53b)$$

$$P_T \equiv -\frac{1}{8 \square} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = -\frac{1}{8 \square} \bar{D}_\alpha D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \quad , \quad (1.53c)$$

que satisfazem à relação

$$P_1 + P_2 + P_T = \bar{I} \quad \text{---} \quad (1.54)$$

para obtermos supercampos componentes irredutíveis de um supercampo escalar geral. De fato,

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = P_2 S(x, \theta, \bar{\theta}) \quad - \text{ Supercampo Escalar Quiral} \quad (1.55a)$$

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = P_1 S(x, \theta, \bar{\theta}) \quad - \text{ Supercampo Escalar Anti-Quiral} \quad (1.55b)$$

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = P_T S(x, \theta, \bar{\theta}) \quad \text{- Supercampo Linear Escalar ou Multipleteo Vetorial Transverso Não Quiral} \quad (1.55c)$$

Estes supercampos podem equivalentemente ser definidos impondo-se os seguintes vínculos diferenciais:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \phi = 0 \quad , \quad (1.56a)$$

$$D_{\alpha} \phi^{\dagger} = 0 \quad , \quad (1.56b)$$

$$D^2 G = \bar{D}^2 G = 0 \quad . \quad (1.56c)$$

Um outro supermultipleteo irreductível pode ser encontrado por meio da imposição do vínculo de realidade:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) \quad . \quad (1.57)$$

Este supercampo é conhecido por supermultipleteo de gauge ou vetorial, devido ao fato de possuir entre seus campos componentes um campo de gauge vetorial ( $v^{\lambda}(x)$ ). Os supercampos quirais (isto é, com quiralidade)  $\phi$ ,  $\phi^{\dagger}$  têm somente campos de matéria, como a seguir constataremos.

## 1.7 - SUPERCAMPOS QUIRAIS

### 1.7.i - Supermultipleteo Quiral

Através do operador  $U$ , dado por

$$U \equiv e^{i(\theta\sigma^{\ell}\bar{\theta})\partial_{\ell}} = 1 + i(\theta\sigma^{\ell}\bar{\theta})\partial_{\ell} + \theta^2\bar{\theta}^2 \square \quad , \quad (1.58)$$

os vínculos diferenciais (1.56a,b,c) podem ser facilmente resolvidos. Para (1.5a), temos:

$$U^{-1} \bar{D}_\alpha U U^{-1} \Phi = - \bar{\partial}_\alpha (U^{-1} \Phi) = 0 \quad , \quad (1.59)$$

pois, utilizando a expressão de  $\bar{D}_\alpha$ , (1.49b), demonstra-se facilmente que

$$U^{-1} \bar{D}_\alpha U = - \bar{\partial}_\alpha \quad . \quad (1.60)$$

Assim, temos que a forma geral de  $\Phi$  é dada por:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = U \Psi(x, \theta) \quad , \quad (1.61)$$

onde

$$\Psi(x, \theta) = A(x) + \sqrt{2} \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \theta^2 F(x) \quad . \quad (1.62)$$

É conveniente expressar os campos componentes de um supercampo em termos do mesmo e de suas derivadas covariantes em  $\theta = \bar{\theta} = 0$ . Para os supercampos quirais, encontra-se:

$$A(x) = \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad , \quad (1.63a)$$

$$\sqrt{2} \psi_\alpha(x) = D_\alpha \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad , \quad (1.63b)$$

$$F(x) = - \frac{1}{4} D^2 \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad . \quad (1.63c)$$

A obtenção destas relações pode ser feita diretamente por meio de (1.62) e



$$U^{-1}D_{\alpha}U = \partial_{\alpha} + 2i(\sigma^{\ell\bar{\theta}})_{\alpha} \partial_{\ell} \quad (1.64)$$

De fato:

$$\begin{aligned} D_{\alpha}\phi &= UU^{-1}D_{\alpha}U\Psi(x,\theta) \\ &= U[\partial_{\alpha} + 2i(\sigma^{\ell\bar{\theta}})_{\alpha} \partial_{\ell}]\Psi(x,\theta) \\ &= U[\sqrt{2}\psi_{\alpha}(x) + (\text{termos dependentes de } \theta)]; \quad (1.65a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2\phi &= UU^{-1}D^{\alpha}UU^{-1}D_{\alpha}U\Psi(x,\theta) \\ &= U[-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha} + (\text{termos dependentes de } \theta)]\Psi(x,\theta) \\ &= U[-4F(x) + (\text{termos dependentes de } \theta)] \quad (1.65b) \end{aligned}$$

e fazendo  $\theta = \bar{\theta} = 0$ , seguem (1.63b e c), imediatamente. A expressão (1.64), tal como (1.60), pode ser obtida facilmente através da expressão (1.49a).

O supermultiplete quirial  $(A, \psi, F)$  é uma representação irredutível da álgebra de SUSY, pois possui um único campo espinorial. Quanto às propriedades de transformação de SUSY dos campos componentes, podemos deduzí-las facilmente por meio de (1.45) e (1.63 a,b,c). Encontra-se que:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}A(x) &= \delta_{\xi}\phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ &= -\sqrt{2}\xi\psi(x) \quad ; \quad (1.66a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\delta_{\xi}\psi_{\alpha}(x) &= \delta_{\xi}D_{\alpha}\phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})D_{\alpha}\phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ &= -2\xi_{\alpha}F(x) - 2i\sigma_{\alpha\beta}^{\ell}\bar{\xi}^{\beta}\partial_{\ell}A(x) \quad ; \quad (1.66b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -4\delta_{\xi} F(x) &= \delta_{\xi} D^2 \phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) D^2 \phi \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
 &= -4\sqrt{2} i (\partial_{\lambda} \psi^{\alpha}) \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\lambda} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} .
 \end{aligned} \tag{1.66c}$$

Observe nesta última que o coeficiente de  $\theta^2$  a componente que possui a maior dimensão do supermultiplete ( $[F] = [f] + 1$ ), se transforma numa divergência total. Este fato é da maior importância quando se deseja construir invariantes supersimétricas (ações, por exemplo).

### 1.7.ii - Supermultiplete Anti-Quiral

Agora  $D_{\alpha} \phi^{\dagger} = 0$ . Procedendo similarmente ao caso anterior, encontra-se:

$$\phi^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) = U^{-1} \psi^{\dagger}(x, \bar{\theta}) , \tag{1.67}$$

onde

$$\psi^{\dagger}(x, \bar{\theta}) = A^*(x) + \bar{\theta} \bar{\psi}(x) + \bar{\theta}^2 F^*(x) \tag{1.68}$$

e analogamente

$$A^*(x) = \phi^{\dagger} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} ; \tag{1.69a}$$

$$\sqrt{2} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \phi^{\dagger} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} ; \tag{1.69b}$$

$$-4F^*(x) = \bar{D}^2 \phi^{\dagger} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} . \tag{1.69c}$$

As transformações de SUSY dos campos componentes  $- A^*$ ,

$\bar{\psi}$ ,  $F^*$  - podem ser deduzidas de  $\delta\phi^\dagger = -i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\phi^\dagger$  e novamente se encontra que a componente da mais alta dimensão -  $F^*$  - transforma-se em uma divergência total.

### 1.8 - AÇÃO SUPERSIMÉTRICA PARA SUPERMULTIPLETOS QUIRAIS, MODELO DE WESS-ZUMINO (7)

Construir ações invariantes perante SUSI é muito simples quando trabalhamos no formalismo de supercampos. Considere, por exemplo, um termo de interação da forma  $\phi_i \phi_j \phi_k \dots$ . Como este produto é um supercampo quiral, sua componente de maior dimensão ( $F$ ) se transforma, sob transformação de SUSI, numa divergência espaço-temporal total. Logo, a integral desta componente do produto sobre todo o espaço de Minkowski,

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \int d^4x D^2 (\phi_i \phi_j \phi_k \dots) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad (*) \\
 & = - \frac{1}{4} \int d^4x D^2 (\phi_i \phi_j \phi_k \dots) \quad , \quad (1.70)
 \end{aligned}$$

é uma invariante supersimétrica. Por exemplo, expressas em termos dos campos componentes,

$$\int d^4x (A_i F_j + A_j F_i - \psi_i \psi_j) \quad , \quad (1.71)$$

$$3 \int d^4x (A^2 F - A\psi\psi) \quad (1.72)$$

---

(\*) Esta igualdade tem fundamento no fato de que os termos que dependem de  $\theta, \bar{\theta}$  em  $D^2(= -\partial^\alpha \partial_\alpha + 2i\sigma_{\alpha\beta}^k \bar{\theta}^\beta \partial_k - \bar{\theta}^2 \square)$  são derivadas totais das coordenadas do espaço de Minkowski e assumimos que os termos de superfície não contribuem para a integral.

são integrais invariantes sob SUSI.

Observe agora que (1.70) não dá origem a termos que envolvam derivadas espaço-temporais. Para obter termos cinéticos para os campos de matéria, deve-se usar supercampos antiquirais. Podemos formar a invariante sob SUSI:

$$\begin{aligned} \int d^4x D^2 [(\bar{D}^2 \phi^\dagger) \phi] &= \int d^4x D^2 \bar{D}^2 (\phi^\dagger \phi) \\ &= \int d^4x D^2 \bar{D}^2 (\phi^\dagger \phi) \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0} \end{aligned} \quad (1.73)$$

onde a última igualdade é permitida graças ao abandono dos termos de superfície. Agora, da relação

$$\begin{aligned} D^2 \bar{D}^2 (\phi^\dagger \phi) &= (D^2 \bar{D}^2 \phi^\dagger) \phi + (\bar{D}^2 \phi^\dagger) (D^2 \phi) \\ &\quad + 2 (D^\alpha \bar{D}^2 \phi^\dagger) (D_\alpha \phi) \\ &= ([D^2, \bar{D}^2] \phi^\dagger) \phi + \\ &\quad + (\bar{D}^2 \phi^\dagger) (D^2 \phi) \\ &\quad + 2 ([D^\alpha, \bar{D}^2] \phi^\dagger) (D_\alpha \phi) \end{aligned} \quad (1.74)$$

onde

$$[D^2, \bar{D}^2] = -8i D^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \partial_\ell \bar{D}^{\dot{\alpha}} - 16 \square \quad (1.75a)$$

$$[\bar{D}_\alpha, D^2] = 4i D^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \partial_\ell \quad (1.75b)$$

E usando (1.63a,b,c), segue, após fazer  $\theta = \bar{\theta} = 0$ , que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{16} \int d^4x D^2 \bar{D}^2 (\Phi^\dagger \Phi) \\
 &= \int d^4x \left\{ -(\partial_\ell A) (\partial^\ell A^*) + \frac{i}{2} [(\partial_\ell \psi^\alpha) \right. \\
 & \quad \left. \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \partial_\ell \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}] + F^* F \right\}. \tag{1.76}
 \end{aligned}$$

Este último e os invariantes

$$-\frac{m}{8} \int d^4x D^2 (\Phi^2) = m \int d^4x [(AF - \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha) + c.c] \tag{1.77}$$

$$-\frac{1}{12} g \int d^4x D^2 (\Phi^3) = g \int d^4x [(A^2 F - A\psi^\alpha \psi_\alpha) + c.c] \tag{1.78}$$

definem a teoria que abordaremos neste trabalho, o Modelo de Wess -Zumino ( $I_{WZ}$ ). Reunindo os três termos, temos que:

$$\begin{aligned}
 I_{WZ} &= \int d^8z \Phi^\dagger \Phi + \left(\frac{m}{2}\right) \int d^6s \Phi^2 + c.c) \\
 & \quad + \frac{1}{3} g \left( \int d^6s \Phi^3 + c.c \right) \tag{1.79}
 \end{aligned}$$

Ou em termos dos campos componentes,

$$\begin{aligned}
 I_{WZ} &= \int d^4x \left\{ -(\partial_\ell A) (\partial^\ell A^*) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{i}{2} [(\partial_\ell \psi^\alpha) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\ell \partial_\ell \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}] \right. \\
 & \quad \left. + |F|^2 + [m(AF - \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha) + c.c] \right. \\
 & \quad \left. + g [(A^2 F - A\psi^\alpha \psi_\alpha) + c.c.] \right\} \tag{1.80}
 \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \int d^2\theta = -\frac{1}{4} D^2 \\ \int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \end{array} \right. \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \int d^4\theta &= \frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \\ &= \frac{1}{16} \bar{D}^2 D^2 \\ &= \frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{16} \\ &= \frac{\bar{D}_\alpha \dot{D}^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}}}{16} \end{aligned} \quad (1.82)$$

que podem ser verificadas abandonando-se os termos de superfície dos operadores  $D_\alpha$ ,  $\bar{D}_\alpha$ ,  $D^2$  e  $\bar{D}^2$ .

No próximo capítulo acharemos os propagadores desta teoria no contexto de supercampos potenciais, que lá definiremos.

## CAPÍTULO 2

### SUPERPROPAGADORES

A ação livre do modelo de Wess-Zumino, exibida no final do primeiro capítulo, pode ser reescrita com as integrações estendidas a todo superespaço. Ou seja, tendo em vista as identidades

$$\int d^6s \phi\phi = \int d^8z \phi \left[ -\frac{1}{4} \frac{D^2}{\square} \phi \right] \quad (2.1a)$$

$$\int d^6\bar{s} \phi^\dagger\phi = \int d^8z \phi^\dagger \left[ -\frac{1}{4} \frac{\bar{D}^2}{\square} \phi^\dagger \right] , \quad (2.1b)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_{WZ} = \int d^8z \left\{ \phi^\dagger\phi + \frac{1}{2} m\phi \left[ -\frac{1}{4} \frac{D^2}{\square} \phi \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{m} \phi^\dagger \left[ -\frac{1}{4} \frac{\bar{D}^2}{\square} \phi^\dagger \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

É conveniente introduzir superpotenciais  $S, S^\dagger$ , definidos por <sup>(8)</sup>

$$\phi = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 S \quad (2.3a)$$

$$\phi^\dagger = -\frac{1}{4} D^2 S^\dagger . \quad (2.3b)$$

Os superpropagadores de  $S, S^\dagger$  são mais simples

e são os que têm relevância para o cálculo de superdiagramas de Feynman, como constataremos.

Substituindo as expressões (2.3a) e (2.3b) na ação  $I_{WZ}$ , (2.2), encontra-se:

$$I_{WZ} = \int \frac{d^8z}{16} \left\{ D^2 S^\dagger \bar{D}^2 S - 2mS\bar{D}^2 S - 2\bar{m}S^\dagger D^2 S^\dagger \right\} , \quad (2.4)$$

com a qual estaremos aptos a derivar as equações de movimento para os superpotenciais  $S, S^\dagger$ . Contudo, antes disso, devemos levar em consideração alguns fatos. O primeiro é a necessidade da inclusão de um termo de fixação de gauge, pois, como pode ser verificado diretamente em (2.4), com a introdução dos superpotenciais  $S, S^\dagger$  a ação passou a ser invariante sob as transformações de gauge

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + \bar{D}_\alpha \dot{\bar{\Sigma}}^\alpha \\ S^\dagger &\rightarrow S^\dagger + D^\alpha \Sigma_\alpha \end{aligned} , \quad (2.5)$$

onde  $\dot{\bar{\Sigma}}^\alpha$  e  $\Sigma_\alpha$  são campos espinoriais de Weyl quaisquer. À ação acrescentaremos um termo proposto na referência (9),  $I_{G.F.}$ , expresso por:

$$I_{G.F.} = \xi^{-1} \int d^8z S^\dagger (1-P_1) \square S , \quad (2.6)$$

no qual  $\xi$  é um parâmetro de fixação de gauge.

Em segundo lugar, devemos adicionar a  $I_{WZ}$  um termo que representa a interação com as fontes externas. Este termo, que denotaremos por  $I_{INT}$ , é dado por

$$I_{INT} = \int d^8z \left\{ JS + J^\dagger S^\dagger \right\} , \quad (2.7)$$



onde  $J$  e  $J^\dagger$  são fontes clássicas externas.

Portanto, a ação total escreve-se:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{WZ} + I_{G.F.} + I_{INT} \\
 &= \int d^8z \left\{ \frac{1}{16} [D^2 S^\dagger \bar{D}^2 S - 2mS\bar{D}^2 S - 2mS^\dagger D^2 S^\dagger] + \right. \\
 &\quad \left. + \xi^{-1} S^\dagger (1-P_1) \square S + JS + J^\dagger S^\dagger \right\}. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

E as equações de movimento obtidas são:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} S^\dagger - \frac{m}{4} \bar{D}^2 S + \xi^{-1} \square (1-P_2) S^\dagger &= -J \end{aligned} \right. \quad (2.9a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{D^2 \bar{D}^2}{16} S - \frac{\bar{m}}{4} D^2 S^\dagger + \xi^{-1} \square (1-P_1) S &= -J^\dagger \end{aligned} \right. , \quad (2.9b)$$

ou, na forma matricial:

$$\left( \begin{array}{cc} -\frac{m}{4} \bar{D}^2 & \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_2) \\ \frac{D^2 \bar{D}^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_1) & -\frac{\bar{m}}{4} D^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} S \\ S^\dagger \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J \\ J^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Os superpropagadores são definidos através da equação matricial

$$\left( \begin{array}{cc} -\frac{m}{4} \bar{D}^2 & \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_2) \\ \frac{D^2 \bar{D}^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_1) & -\frac{\bar{m}}{4} D^2 \end{array} \right) .$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \Delta^{SS}(z, z') & \Delta^{SS^\dagger}(z, z') \\ \Delta^{S^\dagger S}(z, z') & \Delta^{S^\dagger S^\dagger}(z, z') \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \delta^8(z-z') \quad , \quad (2.11)$$

de maneira que

$$\begin{pmatrix} S(z) \\ S^\dagger(z) \end{pmatrix} = i \int d^8 z \begin{pmatrix} \Delta^{SS}(z, z') & \Delta^{SS^\dagger}(z, z') \\ \Delta^{S^\dagger S}(z, z') & \Delta^{S^\dagger S^\dagger}(z, z') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(z') \\ J^\dagger(z') \end{pmatrix} \quad . \quad (2.12)$$

Logo, a matriz dos superpropagadores,

$$\Delta(z, z') = \begin{pmatrix} \Delta^{SS}(z, z') & \Delta^{SS^\dagger}(z, z') \\ \Delta^{S^\dagger S}(z, z') & \Delta^{S^\dagger S^\dagger}(z, z') \end{pmatrix} \quad , \quad (2.13)$$

é dada por:

$$\Delta(z, z') = i M^{-1} I \delta^8(z-z') \quad , \quad (2.14)$$

onde  $M^{-1}$  é a inversa da matriz

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{m}{4} \bar{D}^2 & \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_2) \\ \frac{D^2 \bar{D}^2}{16} + \xi^{-1} \square (1-P_1) & -\frac{\bar{m}}{4} D^2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Assim sendo, a nossa tarefa resume-se em inverter a matriz  $M$ . Para isso, exploraremos algumas das propriedades algébricas dos chamados operadores  $-P$ , que são os operadores de projeção antiquiral e qui

ral ( $P_1 \equiv \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \square}$  e  $P_2 \equiv \frac{\bar{D}^2 D^2}{16 \square}$ , respectivamente), o operador  $P_T$   
 $(P_T \equiv \frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{8 \square} = \frac{\bar{D}^2 D^2}{8 \square})$  e os operadores  $P_+$  e  $P_-$ , definidos por :

$$P_+ \equiv \frac{D^2}{4 \square^{1/2}} \quad ; \quad (2.16a)$$

$$P_- \equiv \frac{\bar{D}^2}{4 \square^{1/2}} \quad . \quad (2.16b)$$

Nos serão úteis a relação de completeza (1.54),

$$P_1 + P_2 + P_T = I \quad , \quad (2.17)$$

e a tabela de multiplicação que pode ser encontrada facilmente por multiplicação direta.

	$P_1$	$P_2$	$P_+$	$P_-$	$P_T$
$P_1$	$P_1$	0	$P_+$	0	0
$P_2$	0	$P_2$	0	$P_-$	0
$P_+$	0	$P_+$	0	$P_1$	0
$P_-$	$P_-$	0	$P_2$	0	0
$P_T$	0	0	0	0	$P_T$

Tabela 2.1 - Tabela de multiplicação.

A técnica que usaremos para inverter o operador matricial  $M$  consiste em expandi-lo em termos dos operadores  $P$ , isto é, em escrever  $M$  na forma <sup>(7)</sup>

$$M = AP_1 + DP_2 + BP_+ + CP_- + EP_T \quad (2.18)$$

e inverter os operadores matriciais

$$A, D, E, \{A - BD^{-1}C\} \quad \text{e} \quad \{D - CA^{-1}B\} \quad , \quad (2.19)$$

pois o inverso de M, como pode ser visto, multiplicando-se diretamente,  $M^{-1}$ , é dado por: (10):

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \{A - BD^{-1}C\}^{-1} P_1 + \{D - CA^{-1}B\} P_2 \\ &- A^{-1}B\{D - CA^{-1}B\}^{-1} P_+ - D^{-1}C\{A - BDC\}^{-1} P_- + E^{-1}P_T \quad . \end{aligned} \quad (2.20)$$

M expandido em termos dos operadores-P escreve-se:

$$\begin{aligned} M &= \square \begin{pmatrix} 0 & \xi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_1 + \square \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi^{-1} & 0 \end{pmatrix} P_2 \\ &+ \square^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{m} \end{pmatrix} P_+ + \square^{1/2} \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_- \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$+ \square^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \xi^{-1} \\ \xi^{-1} & 0 \end{pmatrix} P_T \quad . \quad (2.21)$$

Logo, da expressão (2.20), após algumas simplificações,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\square - |m|^2} \\ \frac{\xi}{\square} & 0 \end{pmatrix} P_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi}{\square} \\ \frac{1}{\square - |m|^2} & 0 \end{pmatrix} P_2 - \square^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{-\bar{m}}{\square - |m|^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_+ \\
 & - \square^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m}{\square - |m|^2} \end{pmatrix} + \frac{\xi}{\square} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo os operadores-P por suas expressões em termos dos operadores-D<sup>2</sup> (D<sup>2</sup> e  $\bar{D}^2$ ), chegamos, através da tabela de multiplicação, à:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{m}D^2}{4 \square (\square - |m|^2)} & \frac{P_1}{\square - |m|^2} + \frac{\xi}{\square} (P_2 + P_T) \\ \frac{P_2}{\square - |m|^2} + \frac{\xi}{\square} (P_1 + P_T) & \frac{m\bar{D}^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Finalmente, retornando à expressão (2.14), conclui-se que os superpropagadores dos superpotenciais são dados por:

$$\Delta^{SS}(z, z') = \frac{i \bar{m} D^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \delta^8(z-z') \quad ; \quad (2.24a)$$

$$\Delta^{SS^\dagger}(z, z') = i \left\{ \frac{P_1}{\square - |m|^2} + \frac{\xi}{\square} (P_2 + P_T) \right\} \delta^8(z-z') \quad ; \quad (2.24b)$$

$$\Delta^{S^\dagger S}(z, z') = i \left\{ \frac{P_2}{\square - |m|^2} + \frac{\xi}{\square} (P_1 + P_T) \right\} \delta^8(z-z') \quad ; \quad (2.24c)$$

$$\Delta^{S^\dagger S^\dagger}(z, z') = \frac{i m \bar{D}^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \delta^8(z-z') \quad . \quad (2.24d)$$

No próximo capítulo encontraremos as correções destes superpropagadores ao nível de "1-loop" e ao nível de aproximação em cadeia. Verificaremos o teorema de não-renormalização nesses dois casos.

## CAPÍTULO 3

### APROXIMAÇÕES EM CADEIA

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Como afirmamos na introdução do capítulo 1, uma das características mais importantes das teorias supersimétricas é a atenuação do grau de divergência ultravioleta em relação às teorias sem SUSI. Este fato é bastante significativo na medida em que a tarefa de renormalizar fica consideravelmente mais simples nas teorias com SUSI.

Neste capítulo, temos por objetivo central exibir algumas das propriedades de renormalizabilidade da teoria de Wess - Zumino<sup>(\*)</sup>, através da computação dos superpropagadores corrigidos por suas aproximações em cadeia.<sup>(11,12)</sup>

#### 3.2 - REGRAS DE FEYNMAN PARA O VÉRTICE

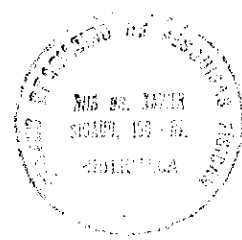
No contexto de supercampos, o termo de interação da teoria de Wess-Zumino (denotá-lo-emos por  $I_I$ ) é dado por:

$$I_I = \frac{g}{3} \left\{ \int d^6s \phi^3 + \text{c.c.} \right\} \quad . \quad (3.1)$$

Estendendo-o a todo superespaço, tal como fizemos para o termo

---

(\*) Esta teoria, como pode ser facilmente visto em (1.80), é, em última análise, a extensão supersimétrica das teorias escalares  $\lambda\phi^3$  e  $\lambda\phi^4$ .



massivo no capítulo 2, segue que:

$$\begin{aligned}
 I_I &= \frac{g}{3} \int d^8z [\Phi\Phi S + \text{c.c.}] \\
 &= \frac{g}{3} \int d^8z [\Phi(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)S + \text{c.c.}] \\
 &= \frac{g}{3} \int d^8z [(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)S + \text{c.c.}] \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Através do Teorema de Wick, podemos derivar regras de Feynman para os vértices no superespaço. Há quatro tipos de vértice, mais os seus respectivos complexos conjugados, a saber:

- $\Phi\Phi S$  - duas linhas externas e uma interna, que pode ser o superpropagador  $\Delta^{SS}(z, z')$  ou  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$ ;
- $\Phi(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)S$  - uma linha externa e duas internas -  $\Delta^{SS}(z, z')$  ou  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  - sendo que uma necessariamente está sob ação do operador diferencial  $-\frac{1}{4}\bar{D}^2$ ;
- $(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)(-\frac{1}{4}\bar{D}^2 S)S$  - as três linhas são internas -  $\Delta^{SS}(x, x')$  ou  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  - e dois dos superpropagadores estão sob ação do operador  $-\frac{1}{4}\bar{D}^2$ ;
- $\Phi\Phi\Phi$  - as três linhas são externas; é na verdade o termo de interação ao nível de árvore.



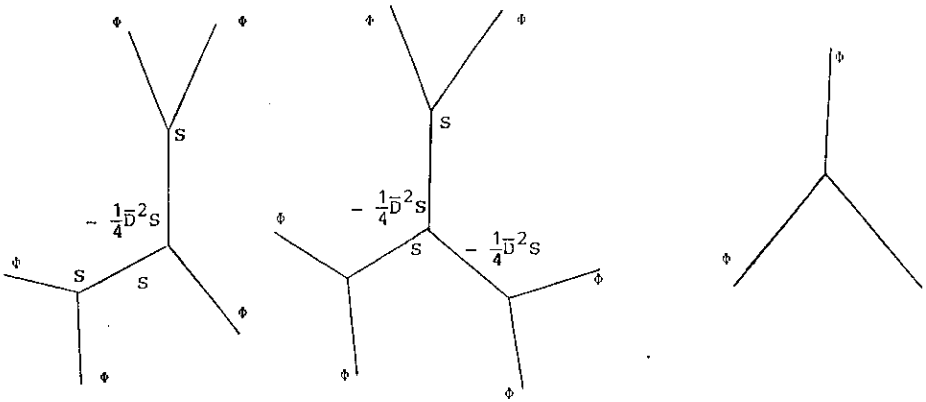


Figura 3.1 - Diagramas que ilustram as regras de Feynman para os vértices.

### 3.3 - APROXIMAÇÃO A NÍVEL DE "1-LOOP"

Os superpropagadores corrigidos de ordem mais baixa em  $g$  são os obtidos através das somas de diagramas, denotadas por  $\Delta_I^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_I^{S^\dagger S^*}$  (\*):

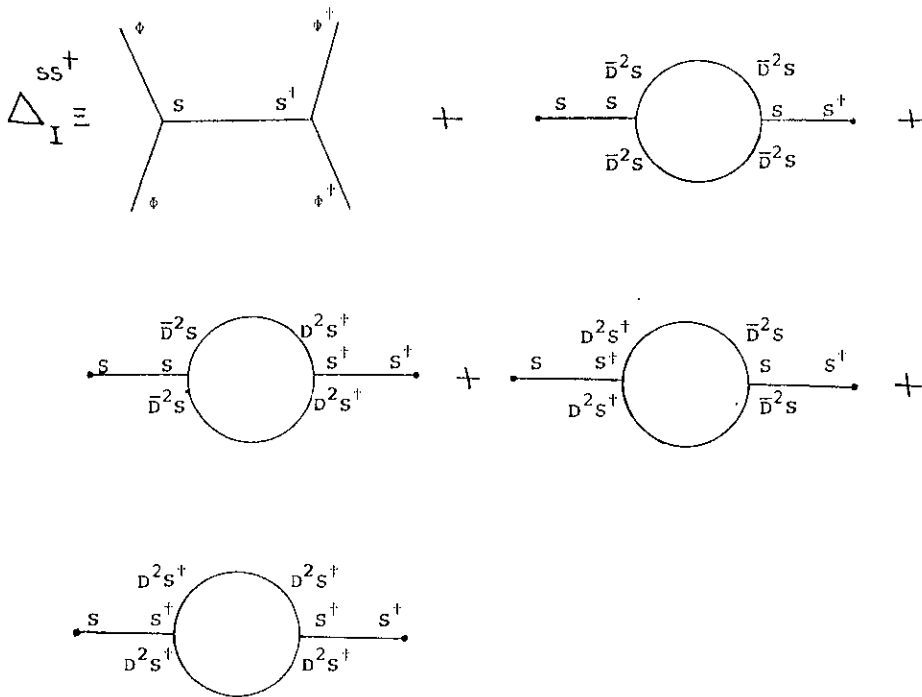


Figura 3.2a

(\*) As correções dos superpropagadores  $\Delta^{S^\dagger S}(z, z')$  e  $\Delta^{S^\dagger S^\dagger}(z, z')$  são definidas analogamente.

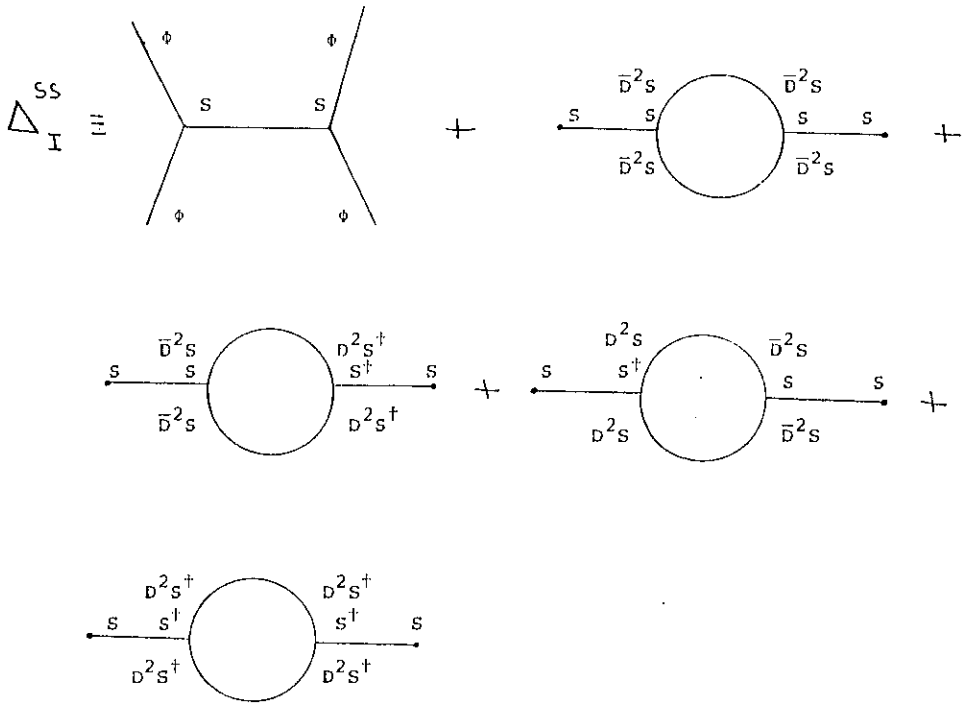


Figura 3.2b

Fig. 3.2a e b - Estas somas definem os superpropagadores corrigidos de ordem mais baixa em  $g$ .

Observe que os primeiros diagramas das somas representam os superpropagadores  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  e  $\Delta^{SS}(z, z')$ , respectivamente, atados a linhas externas. Todos os outros representam os diagramas que corrigem os primeiros na ordem mais baixa em  $g$ . Os pontos pretos nas suas extremidades indicam a existência de linhas externas cuja quiralidade corresponde ao superpotencial indicado, ou seja, se o superpotencial indicado é  $S(S^\dagger)$ , as linhas externas são quirais (anti-quirais).

3.3.i - Cálculo de  $\Delta_I^{SS^\dagger}$

O primeiro termo de  $\Delta_I^{SS^\dagger}$  será denotado por  $\Delta_0^{SS^\dagger}$ . Ele é dado por:

$$\Delta_0^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z' (ig)^2 \cdot 1 \cdot \Phi^2(z) \Delta^{SS^\dagger}(z, z') \Phi^{\dagger 2}(z') \quad (3.3)$$

Em que:

-  $(ig)^2$  é um fator proveniente do operador evolução

$$S = U(-\infty, +\infty) = T \left\{ e^{i \int d^4x L_I} \right\}, \quad (3.4)$$

onde  $L_I$  é a parte de interação da densidade lagrangeana em questão, dada por:

$$\begin{aligned} L_I &= \frac{g}{3} \left\{ \int d^2\theta \phi^3 + \text{c.c.} \right\} \\ &= \frac{g}{3} \left\{ \int d^4\theta \phi^2 S + \text{c.c.} \right\}; \quad (*) \end{aligned} \quad (3.5)$$

- "1" é o fator de simetrização do diagrama, que foi encontrado fazendo as combinações possíveis na aplicação do Teorema de Wick para escrever o diagrama em estudo e considerando os fatores oriundos da expansão da matriz  $S$ , (3.4) (13,14) (\*\*).

Agora, substituindo em (3.3)  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  por sua expressão (2.24b), ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta_0^{SS^\dagger} &= \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \\ &\left\{ \frac{i P_1}{\square - |m|^2} + \frac{i\xi}{\square} (1-P_1) \right\} \delta^8(z-z') \\ &= \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \end{aligned}$$

(\*) No fundo esta última igualdade só será verdadeira quando a densidade lagrangeana estiver sendo integrada em todo superespaço, pois neste caso, o operador diferencial  $-\frac{1}{4} D^2$  poderá ser substituído por  $\frac{\partial^2 \alpha}{4}$ .

(\*\*) O fator de simetrização, devido ao fato de ser global, pode ser obtido através da teoria escalar  $\lambda\phi^3$ , como pode ser visto da ação do modelo escrita no contexto de campos componentes (1.80).

$$\begin{aligned}
 & \frac{i P_1}{\square - |\ln|^2} \delta^8(z-z') + \\
 & + \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \frac{i\xi}{\square} \delta^8(z-z') \\
 & - \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \frac{i\xi}{\square} P_1 \delta^8(z-z') . \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Contudo, no superespaço a identidade abaixo se verifica<sup>(\*)</sup>

$$\begin{aligned}
 & \int \dots d^8z \dots (P_1 F(z, z', \dots)) G(z, z', \dots) \\
 & = \int \dots d^8z \dots F(z, z', \dots) (P_2 G(z, z', \dots)) \quad . \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Logo, o terceiro termo da segunda igualdade de (3.6) pode ser re-escrito como

$$\begin{aligned}
 & - \int d^8z d^8z' (ig)^2 (P_2 \phi^2(z)) \phi^{\dagger 2}(z') \frac{i\xi}{\square} \delta^8(z-z') \\
 & = - \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \frac{i\xi}{\square} \delta^8(z-z') \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

---

(\*) Para demonstrá-la basta ter em vista as identidades

$$\begin{aligned}
 & \int \dots d^8z \dots [D^2(\bar{D}^2) F(z, z', \dots)] G(z, z', \dots) \\
 & = \int \dots d^8z \dots F(z, z', \dots) [D^2(\bar{D}^2) G(z, z', \dots)] \\
 & \int \dots d^8z \dots \left[ \frac{1}{\square} F(z, z', \dots) \right] G(z, z', \dots) = \\
 & = \int \dots d^8z \dots F(z, z', \dots) \left[ \frac{1}{\square} G(z, z', \dots) \right] \quad .
 \end{aligned}$$

De fato, como  $\phi(z)$  é um supercampo quiral,  $\phi^2(z)$ , devido à identidade (1.52b), também o é; assim, tal como todo supercampo quiral,  $\phi^2(z)$  satisfaz à equação: (\*)

$$P_2 \phi^2(z) = \phi^2(z) \quad (3.9)$$

Assim, cancelando o segundo e terceiro termos de (3.6), segue que:

$$\Delta_0^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z' (ig)^2 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \frac{i}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z') \quad (3.10)$$

Agora vamos passar para o "superespaço" dos quadrimomentos  $[q^\lambda, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}]$ .

As integrais de Fourier dos supercampos  $\phi(z)$  e  $\phi^\dagger(z)$  e da delta  $\delta^8(z-z')$  ( $= \delta^4(x-x') \delta^4(\theta-\theta')$ ) são definidas em:

$$\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqx} \mathcal{V}(q, \theta, \bar{\theta}) \quad ; \quad (3.11a)$$

$$\phi^\dagger(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqx} \mathcal{V}^\dagger(-q, \theta, \bar{\theta}) \quad ; \quad (3.11b)$$

$$\delta^8(z-z') = \frac{\delta^4(\theta-\theta')}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-x')} \quad . \quad (3.11c)$$

Com isso

$$\Delta_0^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z' \frac{d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4p}{[(2\pi)^4]^5} (ig)^2 \mathcal{V}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \mathcal{V}(q_2, \theta, \bar{\theta}) \mathcal{V}^\dagger(-q_3, \theta', \bar{\theta}')$$

(\*)

Pode-se demonstrar também que  $P_1 \phi^{\dagger 2}(z) = \phi^{\dagger 2}(z)$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}^\dagger(-q_4, \theta', \bar{\theta}') \frac{-i}{p^2 + |m|^2} \delta^4(\theta - \theta') \\ & e^{ix(-q_1 + q_2 + p)} e^{ix'(-p + q_3 + q_4)} \end{aligned}$$

Todavia

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ix(r+s+t)} = \delta^4(r+s+t) \quad , \quad (3.14)$$

logo,

$$\begin{aligned} \Delta_0^{SS^\dagger} &= \int d^4\theta d^4\theta' \frac{d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4p}{[(2\pi)^4]^3} \\ & (ig)^2 \tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_2, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta', \bar{\theta}') \\ & \tilde{\Phi}^\dagger(-q_4, \theta', \bar{\theta}') \frac{-i}{p^2 + |m|^2} \delta^4(\theta - \theta') \delta^4(-q_1 + q_2 + p) \\ & \delta^4(-p + q_3 + q_4) \quad . \quad (3.15) \end{aligned}$$

Ou, integrando sobre as variáveis  $q_2, q_4, \theta'$  e  $\bar{\theta}'$ , com ajuda das deltas,

$$\begin{aligned} \Delta_0^{SS^\dagger} &= \int d^4\theta \frac{d^4q_1 d^4p d^4q_3}{[(2\pi)^4]^3} (ig)^2 \\ & \tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1 - p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \\ & \tilde{\Phi}^\dagger(p - q_3, \theta, \bar{\theta}) \Delta^{SS^\dagger}(p^2) \quad , \quad (3.16) \end{aligned}$$

onde

$$\Delta^{SS^\dagger}(p^2) \equiv \frac{-i}{p^2 + |m|^2} \quad . \quad (3.17)$$

Observe que  $\Delta^{SS^\dagger}(p^2)$  exibe um polo em  $p^2 = -|m|^2$ , com resíduo  $-i$ .

A primeira correção de  $\Delta_0^{SS^\dagger}$  é obtida através da inserção de um "loop" na linha interna, que representa o superpropagador  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$ . Tal "loop", como vimos nas figuras 3.2a e 3.2b, pode ser de quatro tipos: dois envolvendo somente um dos superpotenciais  $-S$  ou  $S^\dagger$ , e dois envolvendo os dois. Designaremos os diagramas por  $\Delta_{1i}^{SS^\dagger}$ , onde "1" nos indica que houve a inserção de um "loop" na linha que representa  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  e "i", que varia de 1 a 4, nos diz o tipo de "loop" que foi inserido, de acordo com a ordem em que estão dispostos os diagramas nas figuras 3.2a e 3.2b.

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{SS^\dagger} &= \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' \frac{1}{2} (ig)^4 \phi^2(z) \\ &\quad \phi^{\dagger 2}(z') \Delta^{SS}(z, z_1) \left[ \frac{1}{16} \bar{D}_1^2 \bar{D}_2^2 \Delta^{SS}(z_1, z_2) \right] \\ &\quad \left[ \frac{1}{16} \bar{D}_2^2 \bar{D}_1^2 \Delta^{SS}(z_2, z_1) \right] \Delta^{SS^\dagger}(z_2, z') \quad , \quad (3.18) \end{aligned}$$

onde:

$$\mathcal{O}_i \equiv \mathcal{O}(x_i, \theta_i, \bar{\theta}_i) = \mathcal{O}(z_i) \quad (3.19)$$

sendo  $\mathcal{O}_i$  um operador qualquer, isto é,

$$\mathcal{O}_i = D_i^2, \bar{D}_i^2, \square_i, \square_i^{-i}, p_{1i}, \frac{1}{\square_i - |m|^2}, \dots \quad (3.20)$$

Substituindo os superpropagadores por suas expressões, dadas por (2.24a) e (2.24b), escreve-se:

$$\Delta_{11}^{SS^\dagger} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2 (ig)^4 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z')$$

$$\left[ \frac{i \bar{m} D^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \left[ \frac{i \bar{m} \bar{D}_1^2 \bar{D}_2^2 D_1^2}{16.4 \square_1 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right]$$

$$\left[ \frac{i \bar{m} \bar{D}_2^2 \bar{D}_1^2 D_2^2}{16.4 \square_2 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i P_{12}}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2-z') \right] \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{i \xi}{\square_2} (1-P_{12}) \delta^8(z_2-z') \right] \right\} \quad (3.21)$$

Todavia, das relações (\*)

$$\left[ D_k^2, \bar{D}_j^2 \right] = 16 \square_k \delta_{kj} - 8i D_k^\alpha \partial_{\alpha\dot{\beta}} \bar{D}_j^{\dot{\beta}} \delta_{kj} \quad , \quad (3.22)$$

onde

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} \equiv \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\ell \partial_\ell \quad ; \quad (3.23)$$

$$\left[ D_k^2, D_j^2 \right] = \left[ \bar{D}_k^2, \bar{D}_j^2 \right] = 0 \quad ; \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i^2 \delta^8(z_i-z_j) = D_j^2 \delta^8(z_i-z_j) \quad ; \\ \bar{D}_i^2 \delta^8(z_i-z_j) = \bar{D}_j^2 \delta^8(z_i-z_j) \quad ; \end{array} \right. \quad (3.25a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i^2 \delta^8(z_i-z_j) = D_j^2 \delta^8(z_i-z_j) \quad ; \\ \bar{D}_i^2 \delta^8(z_i-z_j) = \bar{D}_j^2 \delta^8(z_i-z_j) \quad ; \end{array} \right. \quad (3.25b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_i^2 P_{1i} = \bar{D}_i^2 \quad ; \\ D_i^2 P_{2i} = D_i^2 \quad , \end{array} \right. \quad (3.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_i^2 P_{1i} = \bar{D}_i^2 \quad ; \\ D_i^2 P_{2i} = D_i^2 \quad , \end{array} \right. \quad (3.26b)$$

(\*) Estas relações podem ser derivadas a partir das expressões das derivadas covariantes, (1.49a) e (1.49b).



segue imediatamente que

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{SS^\dagger} &= \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2 (ig)^4 \\ &\phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \left[ \frac{i \bar{m} D^2}{4 (\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \\ &\left[ \frac{i \bar{m} \bar{D}_1^2}{4 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right] \left[ \frac{i \bar{m} \bar{D}_2^2}{4 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \\ &\left\{ \left[ \frac{i P_{12}}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2-z') \right] + \left[ \frac{i \xi}{\square_2} \delta^8(z_2-z') \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Todavia, os operadores diferenciais  $D^2$  e  $\bar{D}^2$  não atuam, respectivamente, nas deltas das variáveis de Grassmann  $\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')$  e  $\delta^2(\theta-\theta')$ , ou seja,

$$\begin{cases} D^2 \delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}') = 0 & ; & (3.28a) \\ \bar{D}^2 \delta^2(\theta-\theta') = 0 & . & (3.28b) \end{cases}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{cases} D^2 (F(x, x') \delta^8(z-z')) = (D^2 F(x, x') \delta^6(s-s')) \delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}') & (3.29a) \\ \bar{D}^2 (F(x, x') \delta^8(z-z')) = (\bar{D}^2 F(x, x') \delta^6(\bar{s}-\bar{s}')) \delta^2(\theta-\theta') . & (3.29b) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{SS^\dagger} &= \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' \ 2 (ig)^4 \ \phi^2(z) \\
 &\phi^{\dagger 2}(z') \left[ \frac{i \bar{m} D^2}{4 \square (|\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \left[ \frac{i m \bar{D}_1^2}{4 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \right] \\
 &\delta^2(\theta_1 - \theta_2) \delta^2(\theta_2 - \theta_1) \left[ \frac{i m \bar{D}_2^2}{4 (\square_2 - |m|^2)} \delta^6(\bar{s}_2 - \bar{s}_1) \right] \\
 &\left\{ \left[ \frac{i P_{22}}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z') \right] + \left[ \frac{i \xi}{\square_2} \delta^8(z_2 - z') \right] \right\} \\
 &= 0 \quad . \quad \quad \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Pois das definições das deltas,

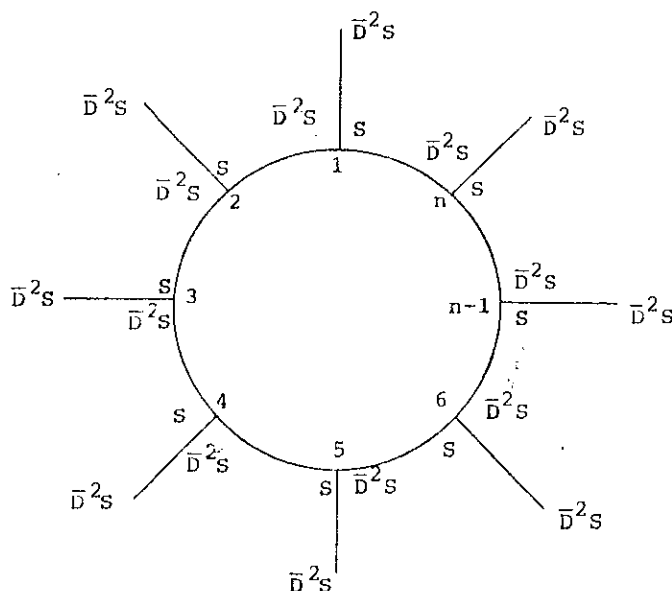
$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2(\theta - \theta') \equiv (\theta - \theta')^2 \quad ; \quad (3.31a) \\ \delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \equiv (\bar{\theta} - \bar{\theta}')^2 \quad , \quad (3.31b) \end{array} \right.$$

decorre

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \dots d^2\theta \dots (\delta^2(\theta - \theta'))^2 = 0 \quad ; \quad (3.32a) \\ \int \dots d^2\bar{\theta} \dots (\delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}'))^2 = 0 \quad . \quad (3.32b) \end{array} \right.$$

Similarmente pode-se demonstrar que o quinto diagrama  $-\Delta_{14}^{SS^\dagger}$ , que possui um "loop" envolvendo apenas superpotenciais  $S^\dagger$ , é nulo. Mais ainda, um outro resultado importante, que engloba os casos abordados acima, é que são nulos todos os diagramas (no contexto do modelo em questão) que possuem pelo menos um "loop"

que envolva somente superpotenciais de um único tipo,  $S$  ou  $S^\dagger$ , com um número arbitrário de linhas externas a ele. De fato, considere um diagrama que possua em seu interior um "loop" do tipo:



onde  $n$  é um número inteiro positivo arbitrário. Denotando este diagrama por  $\Gamma$ , teremos:

$$\Gamma = \int \dots d^2\bar{\theta}_1 \dots d^2\bar{\theta}_n \dots \left[ \frac{i \bar{m} D_1^2}{4(\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1 - z_2) \right] \left[ \frac{i \bar{m} D_2^2}{4(\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2 - z_3) \right] \dots \left[ \frac{i \bar{m} D_n^2}{4(\square_n - |m|^2)} \delta^8(z_n - z_1) \right] \quad (3.33)$$

Então, liberando as deltas anti-quirais,

$$\Gamma = \int \dots d^2\bar{\theta}_1 \dots d^2\bar{\theta}_n \dots \left[ \frac{i \bar{m} D_1^2}{4(\square_1 - |m|^2)} \delta^6(s_1 - s_2) \right]$$

$$\left[ \frac{i \bar{m} D_2^2}{4 (\square_2 - |m|^2)} \delta^6 (s_2 - s_3) \right] \dots \left[ \frac{i \bar{m} D_n^2}{4 (\square_n - |m|^2)} \delta^6 (s_n - s_1) \right]$$

$$\delta^2 (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \delta^2 (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3) \dots \delta^2 (\bar{\theta}_n - \bar{\theta}_1) = 0 \quad , \quad (3.34)$$

pois, tal como em (3.32b), tem-se, a partir da definição (3.31b), que:

$$\int \dots d^2 \bar{\theta}_1 \dots \delta^2 (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \delta^2 (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3) \dots \delta^2 (\bar{\theta}_n - \bar{\theta}_1) = 0 \quad . \quad (3.35)$$

Demonstra-se analogamente que um "loop", com um número n de pernas, envolvendo somente  $S^\dagger$ , é nulo.

Cálculo de  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' \ 2 (ig)^4 \ \phi^2 (z) \ \phi^{\dagger 2} (z')$$

$$\Delta^{SS} (z, z_1) \left[ \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{16} \Delta^{SS^\dagger} (z_1, z_2) \right]$$

$$\left[ \frac{D_2^2 \bar{D}_1^2}{16} \Delta^{S^\dagger S} (z_2, z_1) \right] \Delta^{S^\dagger S} (z_2, z') \quad (3.36)$$

Introduzindo as expressões dos superpropagadores - (2.24a) a (2.24b) - , encontra-se:

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' \ 2 (ig)^4 \ \phi^2 (z)$$

$$\phi^{\dagger 2} (z') \left[ \frac{i \bar{m} D^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \delta^8 (z - z_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{16} \left[ \frac{i P_{11}}{(\square_1 - |m|^2)} + \frac{i\xi}{\square_1} (1 - P_{11}) \right] \delta^8(z_1 - z_2) \right\} \\
 & \left\{ \frac{D_2^2 \bar{D}_1^2}{16} \left[ \frac{i P_{22}}{(\square_2 - |m|^2)} + \frac{i\xi}{\square_2} (1 - P_{12}) \right] \delta^2(z_2 - z_1) \right\} \\
 & \left[ \frac{i m \bar{D}_2^2}{4 \square_2 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2 - z') \right] \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

E das identidades (3.26a) e (3.26b) decorre que

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12}^{SS^\dagger} &= \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2 (ig)^4 \Phi^2(z) \\
 & \Phi^{\dagger 2}(z') \left[ \frac{i \bar{m} D^2}{4 \square (\square - |m|^2)} \delta^8(z - z_1) \right] \\
 & \left[ \frac{i \bar{D}_1^2 D_2^2}{16 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1 - z_2) \right] \left[ \frac{i D_2^2 \bar{D}_1^2}{16 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2 - z_1) \right] \\
 & \left[ \frac{i m \bar{D}_2^2}{4 \square_2 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2 - z') \right] , \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

ou seja, mais uma vez observar-se o cancelamento dos termos que envolvem o parâmetro de gauge  $\xi$ . Este fato é geral; em todos os casos, graças às identidades (3.26a) e (3.26b), os termos que envolvem  $\xi$  são cancelados entre si.

Agora, deslocando os operadores  $\bar{D}_1^2$  e  $D_2^2$ , por integrações por partes, das linhas  $\overline{z_1 z_2}$  e  $\overline{z_2 z_1}$  para as linhas  $\overline{z z_1}$  e  $\overline{z_2 z'}$ , respectivamente, encontra-se que

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2 (ig)^4 \Phi^2(z) \Phi^{\dagger 2}(z')$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{i \bar{m} \bar{D}_1^2 D^2}{16 \square (\square - |m|^2)} \delta^2(z-z_1) \right] \left[ \frac{i D_2^2}{4 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right] \\
 & \left[ \frac{i \bar{D}_1^2}{4 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \left[ \frac{i m D_2^2 \bar{D}_2^2}{16 \square_2 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z') \right]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ou, por intermédio de (3.22), (3.25a), (3.25b) e das definições dos operadores de projeção  $P_1$  e  $P_2$  - (1.53a) e (1.53b) -, segue que

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12}^{SS^\dagger} &= \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' 2 (ig)^4 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \\
 & \left[ \frac{i \bar{m} P_1}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z_1) \right] \left[ \frac{i D_2^2}{4 (\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right] \\
 & \left[ \frac{i \bar{D}_1^2}{4 (\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \left[ \frac{i m P_2'}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2-z') \right], \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

onde  $P_2'$  representa o operador  $P_2$  ( $\equiv \frac{\bar{D}_2^2 D^2}{16 \square}$ ) atuando no ponto  $z'$  do superespaço.

Com isso, através das identidades (3.7) - para deslocar os operadores de projeção das linhas  $\overline{zz_1}$  e  $\overline{z_2z'}$  para os supercampos  $\phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z')$ , respectivamente -, (3.9) e a sua complexa conjugada - para absorver os operadores de projeção nas linhas externas -, chega-se à:

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') 2 (ig)^4$$

$$\left[ \frac{i\bar{m}}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i D_2^2}{4(\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{i \bar{D}_1^2}{4(\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \right\} \left[ \frac{im}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2-z') \right] \quad (3.41)$$

Entretanto, de (3.29a) e (3.29b), que fornecem a identidade

$$D_j^2 (F(x_i, x_j) \delta^4(\theta_i - \theta_j)) \bar{D}_i^2 (F(x_j, x_i) \delta^4(\theta_j - \theta_i)) \\ = [D_j^2 (F(x_i, x_j) \delta^2(\theta_i - \theta_j)) \bar{D}_i^2 (F(x_j, x_i) \delta^2(\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_i))] \delta^4(\theta_i - \theta_j) \quad (3.42)$$

e das relações

$$D_k^2 \delta^2(\theta_k - \theta_j) F(x_k, x_j) = -4 e^{-i(\theta_k - \theta_j)^\alpha \partial_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}_k^{\dot{\beta}}} F(x_k, x_j) \quad (3.43a)$$

$$\bar{D}_k^2 \delta^2(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j) F(x_k, x_j) = -4 e^{i\theta_k^\alpha \partial_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j)^{\dot{\beta}}} F(x_k, x_j) \quad , \quad (3.43b)$$

que podem ser verificadas aplicando-se diretamente os operadores em termos das derivadas no espaço de Minkowski e das derivadas no espaço das variáveis de Grassmann. Então,  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$  pode ser reescrito como :

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') 2(ig)^4 \\ \left[ \frac{i\bar{m}}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{-ie^{i(\theta_1 - \theta_2)^\alpha \partial_{1\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}_1^{\dot{\beta}}}}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1 - x_2) \right] \right.$$

$$\left[ \frac{-i e^{i\theta_2^\alpha \partial_{2\alpha\dot{\beta}} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)^{\dot{\beta}}} }{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2 - x_1) \right] \delta^4(\theta_1 - \theta_2) \left\{ \right.$$

$$\left. \left[ \frac{i\bar{m}}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z') \right] \right. , \quad (3.44)$$

ou, das relações:

$$\int \dots d^2\theta_k \dots \delta^2(\theta_k - \theta_j) e^{-i(\theta_k - \theta_j)^\alpha \partial_{k\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}_k^{\dot{\beta}}} F(x_k, x_j)$$

$$= \int \dots d^2\theta_k \dots \delta^2(\theta_k - \theta_j) F(x_k, x_j) \quad (3.45a)$$

$$\int \dots d^2\bar{\theta}_k \dots \delta^2(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j) e^{i\theta_k^\alpha \partial_{k\alpha\dot{\beta}} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j)^{\dot{\beta}}} F(x_k, x_j)$$

$$= \int \dots d^2\bar{\theta}_k \dots \delta^2(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j) F(x_k, x_j) , \quad (3.45b)$$

segue que:

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' 2(ig)^4 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z')$$

$$\left[ \frac{i\bar{m}}{\square - |m|^2} \delta^8(z - z_1) \right] \left[ \frac{-i}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1 - x_2) \right]$$

$$\left[ \frac{-i}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2 - x_1) \right] \left[ \frac{i\bar{m}}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z') \right]$$

$$\delta^4(\theta_1 - \theta_2) . \quad (3.46)$$

Agora, vamos passar para o superespaço dos quadrimentos  $[q^\lambda, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}]$ . Para isso substituiremos os supercampos e as deltas sobre as vari



âveis do espaço de Minkowski por suas expressões que definem suas transformadas de Fourier - (3.11a,b,c).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12}^{SS^\dagger} = & \frac{1}{(2\pi)^{32}} \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p d^4 k d^4 k' \\
 & d^4 p' d^4 q_3 d^4 q_4 2 (ig)^4 \tilde{\phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}(q_2, \theta, \bar{\theta}) \\
 & \tilde{\phi}^\dagger(-q_3, \theta', \bar{\theta}') \tilde{\phi}^\dagger(-q_4, \theta', \bar{\theta}') e^{ix(-q_1+q_2+p)} \\
 & e^{ix_1(-p+k-k')} e^{ix_2(-k+k'+p')} \\
 & e^{ix'(-p'+q_3+q_4)} \frac{-i\bar{m}}{p'^2+|m|^2} \delta^4(\theta-\theta_1) \\
 & \frac{i}{k^2+|m|^2} \frac{i}{k'^2+|m|^2} \frac{-im}{p'^2+|m|^2} \delta^4(\theta_2-\theta') \delta^4(\theta_1-\theta_2) \quad , \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

onde  $-q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  são os quadrimomentos associados às linhas externas e  $p, k, k', p'$  representam os quadrimomentos das linhas internas.  $\overline{zz_1}, \overline{z_1z_2}, \overline{z_2z_1}$  e  $\overline{z_2z'}$ , respectivamente.

Assim, integrando sobre as variáveis do espaço de Minkowski, usando a relação (3.14), chega-se à:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12}^{SS^\dagger} = & \frac{1}{(2\pi)^{16}} \int d^4 \theta d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 d^4 \theta' d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p \\
 & d^4 k d^4 k' d^4 p' d^4 q_3 d^4 q_4 2 (ig)^4 \tilde{\phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \\
 & \tilde{\phi}(q_2, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}^\dagger(-q_3, \theta', \bar{\theta}') \tilde{\phi}^\dagger(-q_4, \theta', \bar{\theta}') \\
 & \delta^4(-q_1+q_2+p) \delta^4(-p+k-k') \delta^4(-k+k'+p')
 \end{aligned}$$

$$\delta^4(-p'+q_3+q_4) \frac{-i\bar{m}}{p'^2+|m|^2} \delta^4(\theta-\theta_1) \frac{i}{k^2+|m|^2}$$

$$\frac{i}{k'^2+|m|^2} \delta^4(\theta_1-\theta_2) \frac{-im}{p'^2+|m|^2} \delta^4(\theta_2-\theta')$$
(3.48)

Finalmente, realizando as integrações sobre as variáveis de Grassmann (com exceção de  $\theta, \bar{\theta}$ ) e sobre  $q_2, k', p'$  e  $q_4$ , chegamos à:

$$\Delta_{12}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 2(i g)^4$$

$$\tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta})$$

$$\tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) \frac{-i\bar{m}}{p'^2+|m|^2} \pi(p) \frac{-im}{p'^2+|m|^2}$$

onde  $\pi(p)$  é uma quantidade que diverge logaritmicamente, expressa por:

$$\pi(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{[(k-p)^2+|m|^2] (k^2+|m|^2)}$$
(3.50)

De fato, quando  $k$  tende a infinito,  $k^2$  tende a infinito e  $p$  e  $|m|^2$  podem ser desprezados no denominador do integrando de (3.50).

Com isso, quando  $k$  tende a infinito,  $\pi$  tende a

$$\int d^4k \frac{1}{k^4}$$
(3.51)

Essa integral pode ser efetuada utilizando-se coordenadas polares em quatro dimensões, em que

$$d^4k = k^3 dk d\Omega \quad . \quad (3.52)$$

Então

$$\int d^4k \frac{1}{k^4} = \int_{k_0}^k \frac{dk}{k} d\Omega = \Omega \ln \frac{k}{k_0} \quad (3.53)$$

que tende logaritmicamente a infinito, quando o limite superior,  $k$ , tende a infinito.

Observe também que, tal como o primeiro diagrama, o resultado final é local em  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , o que significa dizer que a supersimetria é respeitada no resultado final.

Cálculo de  $\Delta_{13}^{SS^\dagger}$

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{SS^\dagger} &= \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' 2(ig)^4 \Phi^2(z) \Phi^{\dagger 2}(z') \\ &\left[ -\frac{D_1^2}{4} \Delta^{SS^\dagger}(z, z_1) \right] \left[ -\frac{D_1^2}{4} \Delta^{S^\dagger S}(z_1, z_2) \right] \left[ -\frac{\bar{D}_2^2}{4} \Delta^{SS^\dagger}(z_2, z_1) \right] \\ &\left[ -\frac{\bar{D}_2^2}{4} \Delta^{SS^\dagger}(z_2, z') \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Introduzindo as expressões dos superpropagadores – (2.24a) à (2.24d) – e fazendo simplificações através das identidades (3.25a) e (3.25b) – tal como nos casos anteriores, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{SS^\dagger} &= \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' 2(ig)^4 \Phi^2(z) \Phi^{\dagger 2}(z') \\ &\left[ \frac{-i D_1^2}{4(\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{-i D_1^2}{4(\square_1 - |m|^2)} \delta^8(z_1-z_2) \right] \right. \\ &\left. \left[ \frac{-i \bar{D}_2^2}{4(\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z_1) \right] \right\} \left[ \frac{-i \bar{D}_2^2}{4(\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z') \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Das identidades (3.42), (3.43a), (3.43b), (3.45a) e (3.45b), os termos entre chaves (que correspondem ao "loop") podem ser reescritos como em (3.46). Assim:

$$\Delta_{13}^{SS^+} = \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' \frac{1}{2} (ig)^4 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z')$$

$$\left[ \frac{-i D_1^2}{4(\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1-x_2) \right] \right.$$

$$\left. \left[ \frac{i}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2-x_1) \right] \delta^4(\theta_1-\theta_2) \right\} \left[ \frac{-i \bar{D}_2^2}{4(\square_2 - |m|^2)} \delta^8(z_2-z') \right].$$

(3.56)

Agora, pode-se demonstrar, expressando as deltas em termos de suas transformadas de Fourier, que:

$$D_k^2 \{k, j\} = D_j^2 \{k, j\} \quad ; \quad (3.57a)$$

$$\bar{D}_k^2 \{k, j\} = \bar{D}_j^2 \{k, j\} \quad , \quad (3.57b)$$

onde

$$\{k, j\} \equiv \left\{ \left[ \frac{i}{\square_k - |m|^2} \delta^4(x_k-x_j) \right] \left[ \frac{i}{\square_j - |m|^2} \delta^4(x_j-x_k) \right] \right.$$

$$\left. \delta^4(\theta_k-\theta_j) \right\} . \quad (3.58)$$

Portanto, deslocando  $\bar{D}_2^2$  da linha  $\overline{z_2 z'}$  para os termos entre chaves e trocando o seu ponto de aplicação de  $z_2$  para  $z_1$ , podemos, através de mais uma integração por partes, colocá-lo na linha  $\overline{z z_1}$ ,

resultando:

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{SS^\dagger} &= \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2(ig)^4 \phi^2(z) \phi^{\dagger 2}(z') \\ &\left[ \frac{-i \bar{D}_1^2 D_1^2}{16(\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1-x_2) \right] \right. \\ &\left. \left[ \frac{i}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2-x_1) \right] \delta^4(\theta_1-\theta_2) \right\} \left[ \frac{-i}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2-z') \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

Veja que o termo correspondente à primeira linha,  $\overline{zz_1}$ , pode ser reescrito com os operadores  $-D^2$  aplicados no ponto  $z$ , por meio das identidades (3.24a), (3.21) e (3.24b), ou seja,

$$\frac{-i \bar{D}_1^2 D_1^2}{16(\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) = \frac{-i D^2 \bar{D}^2}{16(\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) \quad . \quad (3.60)$$

E da definição de  $P_1 \left( \equiv \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \square} \right)$ ,

$$\frac{-i D^2 \bar{D}^2}{16(\square - |m|^2)} \delta^8(z-z_1) = \frac{-i \square P_1}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z_1) \quad . \quad (3.61)$$

Com isso, tendo em vista a propriedade (3.7), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{SS^\dagger} &= \int d^8 z d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z' 2(ig)^4 [P_2 \phi^2(z)] \\ &\phi^{\dagger 2}(z') \left[ \frac{-i \square}{\square - |m|^2} \delta^8(z-z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1-x_2) \right] \right. \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{i}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2 - x_1) \right] \delta^4(\theta_1 - \theta_2) \left\{ \left[ \frac{-i}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z') \right] \right.$$

(3.62)

ou, de (3.9),

$$\Delta_{13}^{SS^\dagger} = \int d^8z d^8z_1 d^8z_2 d^8z' z (ig)^4 \Phi^2(z)$$

$$\Phi^2(z') \left[ \frac{-i \square}{\square - |m|^2} \delta^8(z - z_1) \right] \left\{ \left[ \frac{i}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1 - x_2) \right] \right.$$

$$\left. \left[ \frac{i}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2 - x_1) \right] \delta^4(\theta_1 - \theta_2) \right\} \left[ \frac{-i}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z') \right]$$

(3.63)

Finalmente, passando para o superespaço dos quadrimomentos  $[q^\lambda, \theta^\alpha, \bar{\theta}_\beta]$  - escrevendo os supercampos e as funções delta em termos de suas transformadas de Fourier ((3.12a), (3.12b) e (3.12c)), realizando as integrações sobre as coordenadas do espaço de Minkowski por meio de (3.14) e, por último, integrando sobre  $q_2, k', p'$  e  $q_4$  (com ajuda das deltas dos quadrimomentos que surgem nas integrações das coordenadas) e sobre as variáveis de Grassmann, com exceção de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$  - encontra-se que:

$$\Delta_{13}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 z (ig)^4$$

$$\tilde{\Psi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Psi}(q_1 - p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Psi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta})$$

$$\tilde{\Psi}^\dagger(-q_3 - p, \theta, \bar{\theta}) \frac{i}{p^2 + |m|^2} (-p^2) \pi(p) \frac{i}{p^2 + |m|^2} \quad , \quad (3.64)$$

que, tal como  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$ , não está bem definido devido à presença da quantidade  $\pi(p)$ , a qual diverge logaritmicamente, como vimos.

Agora, retornando à definição de  $\Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger}$ , figura 3.2a, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger} &= \Delta_0^{\text{SS}^\dagger} + \sum_{i=1}^4 \Delta_{1i}^{\text{SS}^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 (ig)^2 \\ &\quad \mathfrak{F}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad \mathfrak{F}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) \frac{-i}{p^2+|m|^2} \left\{ 1+2(ig)^2 \frac{-i}{p^2+|m|^2} |m|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{-i}{p^2+|m|^2} (-p^2) \right\} \pi(p) \end{aligned} \quad (3.65)$$

ou ainda, definindo:

$$R \equiv 2i \frac{p^2-|m|^2}{p^2+|m|^2} \pi(p) \quad , \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger} &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 (ig)^2 \\ &\quad \mathfrak{F}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad \mathfrak{F}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) \Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger}(p) \quad ; \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde

$$\Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger}(p) \equiv \frac{-i}{(p^2+|m|^2)(1+g^2R)} \quad . \quad (3.68)$$

Observe que, ao contrário de  $\Delta_0^{\text{SS}^\dagger}$ ,  $\Delta_{\text{I}}^{\text{SS}^\dagger}$  não apresenta pólo em  $p^2 = -|m|^2$ .

3.3ii - Regularização Através do Método de Pauli - Villars - Gupta

O método de regularização de Pauli-Villars-Gupta, consiste em introduzir na densidade lagrangeana da teoria supercampos auxiliares, de tal modo, que com a presença dos mesmos sejam canceladas as divergências. Quem controla as divergências neste processo é a massa de tais supercampos auxiliares, conhecida por massa reguladora. No final dos cálculos, deixa-se a massa reguladora ir para infinito (9,15).

A opção pelo método de Pauli-Villars-Gupta foi baseado no desejo de que fosse respeitada a SUSI na densidade lagrangeana regularizada.

Denotando por  $\phi'$ ,  $\phi'^{\dagger}$  e  $M$ , respectivamente, os supercampos quiral e anti-quiral e a massa reguladores, a densidade lagrangeana de Wess-Zumino adicionaremos a densidade lagrangeana reguladora ( $L_{Reg.}$ ):

$$L_{Reg.} = \frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \phi' \phi'^{\dagger} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} - \left\{ \frac{M}{4} D^2 \phi'^2 \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} + c.c. \right\} \quad (3.69)$$

Tal como foi feito com o modelo original, pode-se derivar os superpropagadores dos superpotenciais  $S'$  e  $S'^{\dagger}$ , que correspondem aos supercampos reguladores quiral e anti-quiral,  $\phi' \equiv -\frac{1}{4} \bar{D}^2 S'$  e  $\phi'^{\dagger} = -\frac{1}{4} D^2 S'^{\dagger}$ . Encontra-se que:

$$\Delta^{S'S'^{\dagger}}(z, z') = - \Delta^{SS^{\dagger}}(z, z') \quad (3.70a)$$

$$\Delta^{S'S'}(z, z') = - \Delta^{SS}(z, z') \quad (*) \quad (3.70b)$$

(\*) A diferença de sinal tem origem no sinal "menos" proveniente dos termos massivos reguladores.



Quanto ao termo de interação, vamos considerar

$$L_{\text{Int}} = \frac{1}{4} D^2 \frac{g}{3} (\phi + \phi')^3 \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0} + \text{c.c.} \quad (3.71)$$

que, além de possuir os termos do modelo não regularizado,

$$\frac{g}{3} \frac{1}{4} D^2 \phi^3 \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0} + \text{c.c.} ,$$

possui outros,

$$\frac{g}{3} \frac{1}{4} D^2 (\phi'^3 + 2\phi\phi'^2 + 2\phi'\phi^2 \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0} + \text{c.c.}) ,$$

que representam novas interações.

Do Teorema de Wick e de (3.71) deduz-se regras de Feynman para os vértices similares às encontradas no capítulo anterior, para o modelo original. As figuras abaixo ilustram essas regras (\*).

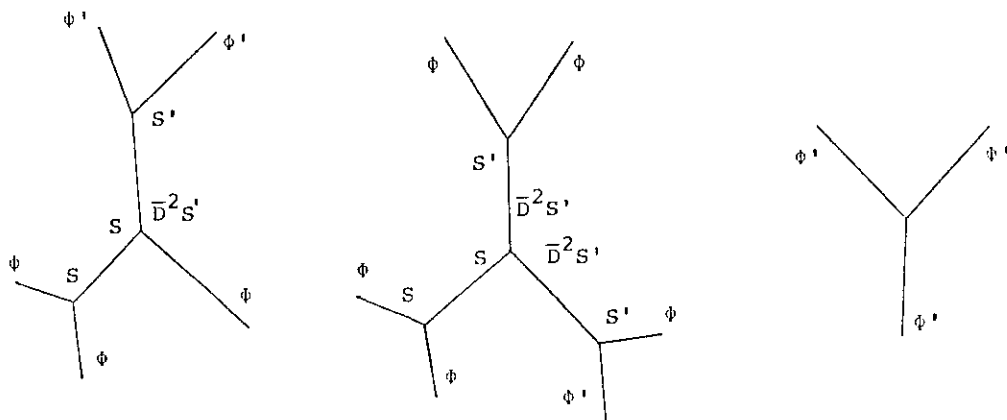


Figura 3.3 - Diagramas do tipo árvore que ilustram as regras de Feynman para os novos vértices.

(\*) Veja que são os superpotenciais  $(S, S', S^\dagger, S'^\dagger)$  que se propagam e não os supercampos  $(\phi, \phi', \phi^\dagger, \phi'^\dagger)$ , quando trabalhamos no superespaço.

Agora, como consequência desses novos vértices e dos superpropagadores (3.70a) e (3.70b), o número de diagramas que corrigem radiativamente os superpropagadores  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  e  $\Delta^{SS}(z, z')$  aumenta consideravelmente. Para cada diagrama, ao nível de um "loop" que corrigia  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$ , na teoria original, por exemplo, temos três diagramas na teoria regularizada. No lugar de  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{13}^{SS^\dagger}$ , temos agora as somas  $\Delta_{12\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{13\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$ .

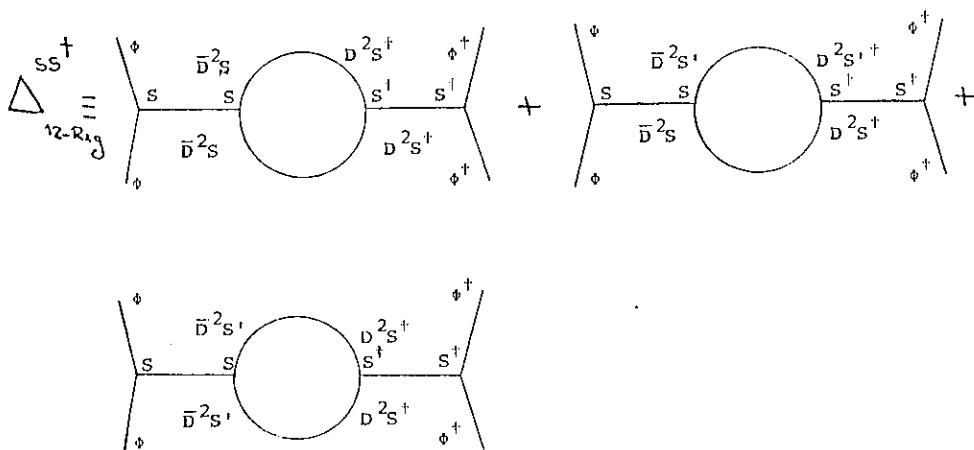


Figura 3.4a

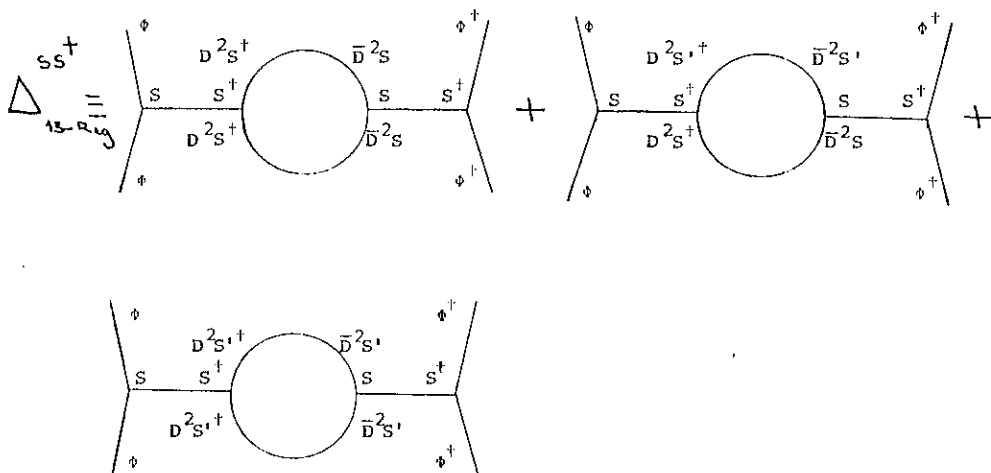


Figura 3.4b

Figura 3.4a e b - Somas que definem  $\Delta_{12\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{13\text{-Reg}}^{SS^\dagger}$ .

Realizando os cálculos, que são similares aos que fizemos para  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{13}^{SS^\dagger}$ , e multiplicando cada diagrama por seu fator de simetrização, encontra-se:

$$\Delta_{12-\text{Reg}}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 2(ig)^4$$

$$\mathfrak{F}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\frac{-i}{p^2 + |m|^2} |m|^2 \Pi(p) \frac{-i}{p^2 + |m|^2} ; \quad (3.72)$$

$$\Delta_{13-\text{Reg}}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 2(ig)^4$$

$$\mathfrak{F}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \mathfrak{F}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\frac{-i}{p^2 + |m|^2} (-p^2) \Pi(p) \frac{-i}{p^2 + |m|^2} . \quad (3.73)$$

onde:

$$\Pi(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ \frac{i}{k^2 + |m|^2} - \frac{i}{k^2 + |M|^2} \right\} \left\{ \frac{i}{(k-p)^2 + |m|^2} + \right.$$

$$\left. - \frac{i}{(k-p)^2 + |M|^2} \right\} \quad (3.74)$$

ou

$$\Pi(p) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{(|M|^2 - |m|^2)^2}{(k^2 + |m|^2)(k^2 + |M|^2)[(k-p)^2 + |m|^2][(k-p)^2 + |M|^2]}$$

que, ao contrário de  $\pi(p)$ , como pode ser visto facilmente fazendo-se a contagem das potências do quadrimomento  $k$  no denominador

do integrando, converge quando  $k$  tende a infinito.

Observe que, como dissemos anteriormente,  $\epsilon$  é a massa reguladora  $M$  que controla o comportamento de  $\Pi$ , pois quando em (3.74)  $M$  tende a infinito,  $\Pi$  tende a  $\pi$ , que diverge logaritmicamente.

Portanto, a inclusão dos supercampos ( $\epsilon$ , conseqüentemente, dos superpotenciais) e da massa reguladora fez com que a quantidade divergente  $\pi(p)$  fosse substituída por  $\Pi(p)$ , que está bem fundamentada matematicamente.

### 3.3iii - Renormalização da Massa ao Nível de um "Loop"

Com as divergências controladas pela massa reguladora, vamos tratar de encontrar a massa renormalizada, que é obtida a partir do valor do pólo de  $\Delta_I^{SS^\dagger}$ .

Na teoria renormalizada, o superpropagador corrigido, ao nível de um "loop", surge da soma de diagramas que denotaremos por  $\Delta_{I-Reg}^{SS^\dagger}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{I-Reg}^{SS^\dagger} &= \Delta_0^{SS^\dagger} + \sum_{i=1}^4 \Delta_{1i-Reg}^{SS^\dagger} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4p d^4q_3 (ig)^2 \mathcal{V}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad \mathcal{V}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \mathcal{V}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \mathcal{V}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad \frac{-i}{(p^2 + |m|^2) (1+g^2 R_{Reg})} ; \end{aligned} \tag{3.76}$$

assim, a transformada de Fourier do superpropagador corrigido re-

gularizado é dada por:

$$\gamma_{\Delta_{\text{I-Reg}}}^{\text{SS}\dagger}(p) = \frac{-i}{(p^2 + |m|^2)(1 + g^2 R_{\text{Reg}})} \quad ; \quad (3.77)$$

$$R_{\text{Reg}} = 2i \frac{p^2 - |m|^2}{p^2 + |m|^2} \Pi(p^2) \quad . \quad (3.78)$$

Agora, definindo a função  $G(p^2)$  por:

$$G(p^2) \equiv |m|^2 + 2ig^2 (p^2 - |m|^2) \Pi(p^2) \quad , \quad (3.79)$$

$\gamma_{\Delta_{\text{I-Reg}}}^{\text{SS}\dagger}$  pode ser reescrito como:

$$\gamma_{\Delta_{\text{I-Reg}}}^{\text{SS}\dagger} = \frac{-i}{p^2 + G(p^2)} \quad , \quad (3.80)$$

ou, assumindo que  $G(p^2)$  é regular na vizinhança de  $p^2 = -|m_R|^2$ , onde  $m_R$  é a chamada massa renormalizada, temos também:

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta_{\text{I-Reg}}}^{\text{SS}\dagger} = & \frac{-i}{p^2 + G(p^2 = -|m_R|^2) + \left. \frac{\partial G}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -|m_R|^2} (p^2 + |m_R|^2) + \dots +} \\ & + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n G}{\partial p^{2n}} \right|_{p^2 = -|m_R|^2} (p^2 + |m_R|^2)^n + \dots \end{aligned} \quad (3.81)$$

Mas, como  $m_R$  é definida de modo que  $p^2 = -|m_R|^2$  seja pólo de  $\gamma_{\Delta_{\text{I-Reg}}}^{\text{SS}\dagger}$ , necessariamente, como pode ser visto em (3.81),  $G(p^2)$  tem que assumir o valor  $|m_R|^2$  em  $p^2 = -|m_R|^2$ , ou seja, pela definição de massa renormalizada:

$$G(p^2 = -|m_R|^2) = |m_R|^2 \quad . \quad (3.82)$$

Portanto, de (3.79), segue que:

$$|m_R|^2 = (1 - 2ig^2 \Pi(p^2 = -|m_R|^2))^2 |m|^2 \quad , \quad (3.83)$$

ou, definindo a constante de renormalização de massa,  $Z_m$ , por

$$Z_m = 1 - 2ig^2 \Pi(p^2 = -|m_R|^2) \quad , \quad (3.84)$$

$$|m_R|^2 = Z_m^2 |m|^2 \quad , \quad (3.85)$$

e, desta última (\*),

$$m_R = Z_m m \quad (3.86)$$

Observe que  $Z_m$  diverge quando a massa regularizadora tende ao infinito.

### 3.3iv - Renormalização da Função de Onda ao Nível de um "Loop"

Retornando à (3.77), pode-se observar também que não foi somente o pólo que foi deslocado (de  $|m|^2$  para  $|m_R|^2$ ). O resíduo não mais se encontra em  $-i$ . De (3.81) encontra-se que o resíduo foi deslocado para:

---

(\*) Na verdade, de (3.85) conclui-se que  $m_R = e^{i\phi} Z_m m$ , onde  $\phi$  é uma fase arbitrária, sem significado, que fizemos igual a zero.

$$\frac{-i}{1 + \frac{\partial G}{\partial p^2}} \Big|_{p^2 = -|m_R|^2} \quad (3.87)$$

A constante de renormalização da função de onda,  $Z_3$ , é definida por:

$$Z_3 \equiv \left( 1 + \frac{\partial G}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = -|m_R|^2} \right)^{-1} \quad (3.88)$$

Com isso, derivando (3.79) e utilizando (3.85) — que fornece a massa renormalizada  $m_R$  em função da constante de renormalização de massa  $Z_m$  e da massa "nua"  $m$  — chega-se após algumas manipulações algébricas, a:

$$Z_3 = 1 - 2ig^2 \Pi(p^2 = -|m_R|^2) + 4ig^2 |m|^2 \frac{\partial \Pi}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = -|m_R|^2} + O(g^4) \quad (3.89)$$

ou ainda, derivando a integral regularizada por Pauli-Villars-Gupta  $\Pi(p^2)$ , (3.14), encontra-se que:

$$Z_3 = 1 - 2ig^2 \Pi(p^2 = -|m_R|^2) + O(g^4) \quad (3.90)$$

que é idêntico à constante de renormalização de massa  $Z_m$ . Este resultado nos mostrará adiante, quando escrevermos a densidade lagrangeana renormalizada livre, a veracidade do chamado teorema de não-renormalização do superpotencial, ao nível de um "loop". Esse teorema afirma que não há necessidade de contra-termos do tipo do superpotencial (ou seja, do tipo:  $\delta m \phi^2 + \delta g \phi^3 + c.c.$  — onde  $\delta m$  e  $\delta g$  são, respectivamente, os coeficientes dos contra-termos do tipo massi-

vo e de interação, os quais, geralmente, são funções das constantes de renormalização), na densidade lagrangeana. Em outras palavras, como verificaremos (\*), a massa e a constante de acoplamento podem ser renormalizadas com uma única constante de renormalização: a de função de onda,  $Z_3$ .

### 3.3v - A Densidade Lagrangeana Renormalizada Livre ao Nível de um "Loop"

A densidade lagrangeana livre é encontrada escrevendo -se a da teoria original em termos das quantidades renormalizadas, que são a massa, as constantes de renormalização (os Z's) e os supercampos renormalizados,  $\phi_R$  e  $\phi_R^\dagger$ , que obteremos a seguir.

Retornemos à expressão da transformada de Fourier do superpropagador corrigido  $\Delta^{SS^\dagger}(p)$ , (3.81). Ela pode ser reexpressa em termos das quantidades renormalizadas, através das relações (3.82) e (3.88), isto é, temos que:

$$\Delta_{I\text{-Reg}}^{SS^\dagger}(p) = \frac{-iZ_3}{(p^2 + |m_R|^2) [1 + \dots + Z_3 \frac{\partial^n G}{\partial p^{2n}} (p^2 + |m_R|^2)^{n-1} + \dots]} \quad (3.91)$$

(n ≥ 2 , n ∈ N) .

Observe novamente que o resíduo, que outrora se encontrava em  $-i$ , agora se acha em  $-iZ_3$ . Para que ele "retorne" ao seu ponto de origem, vamos fazer três definições.

---

(\*) Os três capítulos que seguem são consagrados à verificação dessas afirmações, com todo rigor, até o nível de dois "loops".



Definimos superpropagador renormalizado, denotado por  $\Delta_{I\text{-Ren}}^{SS^\dagger}$ , por:

$$\Delta_{I\text{-Ren}}^{SS^\dagger}(p) \equiv z_3^{-1} \Delta_{I\text{-Reg}}^{SS^\dagger}(p) \quad , \quad (3.92)$$

ou seja, da expressão (3.91),

$$\Delta_{I\text{-Ren}}^{SS^\dagger} = \frac{-i}{(p^2 + |m_R|^2) [1 + \dots + z_3 \frac{\partial^n G}{\partial p^{2n}} \Big|_{p^2 = -|m_R|^2} (p^2 + |m_R|^2)^{n-1} + \dots]} \quad (3.93)$$

que, além de possuir o resíduo, correspondente ao pólo  $p^2 = -|m_R|^2$ , em  $-i$ , é finita.

A primeira definição implica as outras duas. O super-propagador  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  é igual ao valor esperado no vácuo do produto ordenado dos superpotenciais  $S(z)$  e  $S^\dagger(z')$ , isto é,

$$\Delta^{SS^\dagger}(z, z') = \langle 0 | TS(z) S^\dagger(z') | 0 \rangle \quad . \quad (3.94)$$

Se agora definirmos superpotenciais renormalizados por:

$$S_R(z) \equiv z_3^{-1/2} S(z) \quad (3.95a)$$

e

$$S_R^\dagger(z) \equiv z_3^{-1/2} S^\dagger(z) \quad , \quad (3.95b)$$

teremos:

$$\langle 0 | TS_R(z) S_R^\dagger(z') | 0 \rangle = z_3^{-1} \langle 0 | TS(z) S^\dagger(z') | 0 \rangle = \Delta_{I\text{-Ren}}^{SS^\dagger}(z, z') \quad , \quad (3.96)$$

e, das relações que definem os supercampos vinculados  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  em

termos de  $S$  e  $S^\dagger$ , (2.3a) e (2.3b), pode-se definir naturalmente su percampos vinculados renormalizados,  $\phi_R$  e  $\phi_R^\dagger$ , por:

$$\phi_R(z) \equiv Z_3^{-1/2} \phi(z) \quad (3.97a)$$

$$\phi_R^\dagger(z) \equiv Z_3^{-1/2} \phi^\dagger(z) \quad (3.97b)$$

Assim estamos aptos a escrever a densidade lagrangeana livre de Wess-Zumino em termos das quantidades renormalizadas. Ela é dada por:

$$L_{0\text{-Ren}} = Z_3 \phi_R^\dagger \phi_R \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \left[ Z_3 Z_m^{-1} m_R \phi_R^2 \Big|_{\theta^2} + \text{c.c.} \right], \quad (3.98)$$

ou das expressões das constantes de renormalização (3.84) e (3.90),

$$L_{0\text{-Ren}} = Z_3 \phi_R^\dagger \phi_R \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \left( m_R \phi_R^2 \Big|_{\theta^2} + \text{c.c.} \right) \quad (3.99)$$

ou ainda,

$$L_{0\text{-Ren}} = \phi_R^\dagger \phi_R \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \delta c \phi_R^\dagger \phi_R \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \left( m_R \phi_R^2 \Big|_{\theta^2} + \text{c.c.} \right), \quad (3.100)$$

onde  $\delta c$  é o coeficiente do contratermo do tipo cinético dado por:

$$\delta c = Z_3^{-1} \quad (3.101)$$

Observe que, como havíamos dito, a densidade lagrangeana renormalizada não apresenta contra-termo do tipo massivo. Isso ratifica o teorema da não-renormalização do superpotencial no tocante ao termo massivo, ao nível de um "loop".

Por último, cumpre observar que os mesmos resultados podem ser encontrados através das correções radiativas, ao nível de um "loop", para o superpropagador  $\Delta^{SS}(z, z')$  (Figura 3.2b).

### 3.4 - APROXIMAÇÃO EM CADEIA PARA $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$ E $\Delta^{SS}(z, z')$

Considere as seguintes séries de diagramas. Elas definem as aproximações em cadeia para os superpropagadores  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  e  $\Delta^{SS}(z, z')$ , que denotaremos por  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{AC}^{SS}$ , respectivamente.

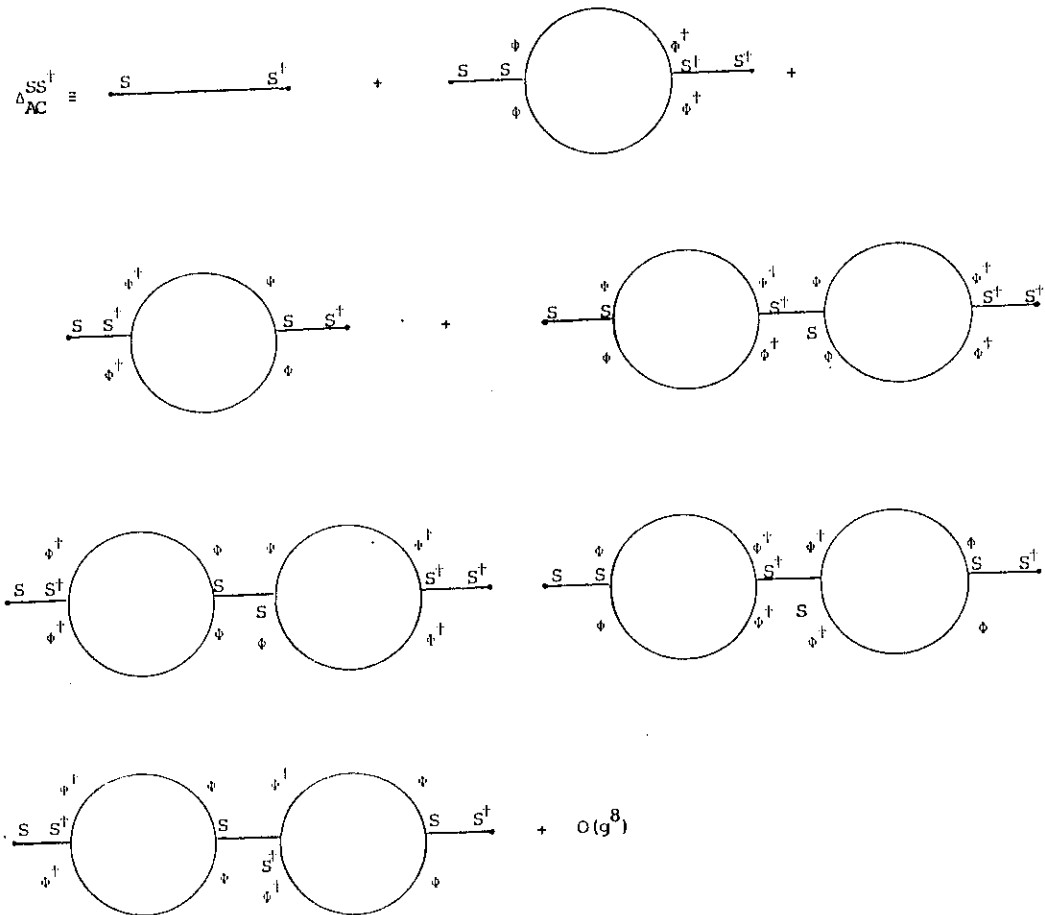
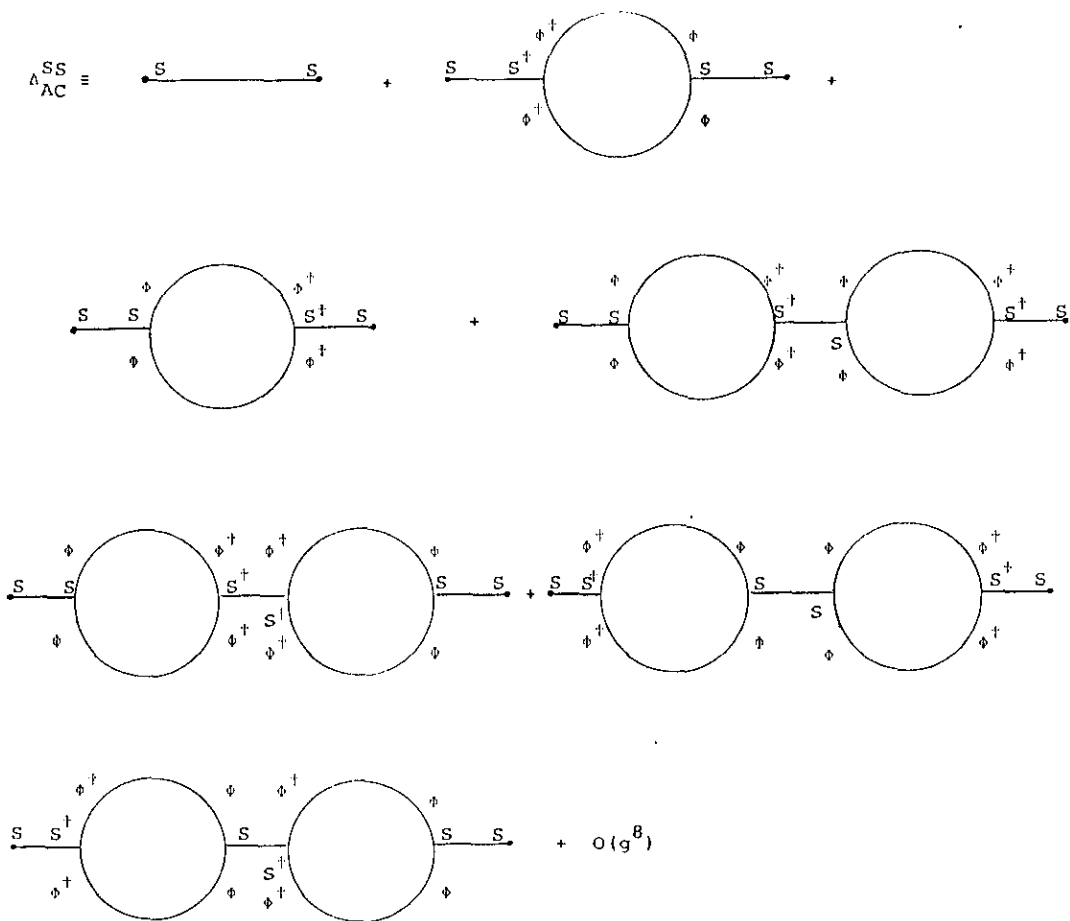


Figura 3.5a



Figuras 3.5a e b - Aproximações em cadeia para os superpropagadores  $\Delta^{SS^\dagger}(z, z')$  e  $\Delta^{SS}(z, z')$ .

Nos diagramas acima:

- (1) Os pontos pretos nas extremidades dos diagramas representam linhas externas, cujas quiralidades estão designadas pelos superpotenciais indicados. Ou seja: o superpotencial  $S$  indica que as linhas externas são quirais, enquanto  $S^\dagger$  nos diz que são antiquirais.
- (2) Os supercampos  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  nos vértices dos "loops" representam os operadores  $-\frac{1}{4} \bar{D}^2$  e  $-\frac{1}{4} D^2$  agindo nos superpotenciais  $S$  e

$S^\dagger$ , respectivamente. Lembre-se de que  $\Phi = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 S$  e  $\Phi^\dagger = -\frac{1}{4} D^2 S^\dagger$ .

Os cálculos dos diagramas de ordem  $g^6$  em diante são similares aos que fizemos para encontrar as correções radiativas ao nível de um "loop". Na verdade, tais cálculos são uma extensão dos que fizemos.

Denotando por  $\Delta_n^{SS^\dagger}$  todas as contribuições de nível  $n$  "loops", obtém-se que:

$$\Delta_2^{SS^\dagger} = \sum_{i=1}^{2^2} \Delta_{2i}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p 2^2 (ig)^6$$

$$\tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\left\{ p^4 - \binom{3}{2} |m|^2 p^2 \right\} \gamma_{SS^\dagger} (\pi \Delta^{SS^\dagger})^2 ; \quad (3.102)$$

$$\Delta_3^{SS^\dagger} = \sum_{i=1}^{2^3} \Delta_{3i}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p 2^3 (ig)^8$$

$$\tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\left\{ -p^6 + \binom{4}{2} |m|^2 p^4 - |m|^4 p^2 \right\} \gamma_{SS^\dagger} (\pi \Delta^{SS^\dagger})^3 ; \quad (3.103)$$

$$\Delta_4^{SS^\dagger} = \sum_{i=1}^{2^4} \Delta_{4i}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p 2^4 (ig)^{10}$$

$$\tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\left\{ p^8 - \binom{5}{2} |m|^2 p^6 + \binom{5}{4} |m|^4 p^4 \right\} \gamma_{SS^\dagger} (\pi \Delta^{SS^\dagger})^4 ; \quad (3.104)$$

e assim por diante.

Agora, reunindo esses resultados com os que obtivemos até a ordem  $g^4$ ,

$$\Delta_0^{SS^\dagger} + \Delta_1^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int \dots (ig)^2 \left\{ \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} + 2(ig)^2 \left[ |m|^2 - p^2 \right] \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} (\pi \Delta^{SS^\dagger}) \right\}, \quad (3.105)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{AC}^{SS^\dagger} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int \dots (ig)^2 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} \\ &\left\{ \left[ 1 - A \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} p^2 + A^2 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 2} p^4 - A^3 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 3} p^6 + \dots \right] + \right. \\ &+ A |m|^2 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} \left[ 1 - \binom{3}{2} A \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} p^2 + \binom{4}{2} A^2 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 2} p^4 \right. \\ &- \left. \left. \binom{5}{2} A^3 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 3} p^6 + \dots \right] - A^3 |m|^4 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 3} p^2 \right. \\ &\left. \left[ 1 - \binom{5}{4} A \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger} p^2 + \binom{6}{4} A^2 \gamma_{\Delta}^{SS^\dagger 2} p^4 - \dots \right] \right. \\ &\left. + \dots \right\}, \quad (3.106) \end{aligned}$$

onde

$$A \equiv (ig)^2 \pi. \quad (3.107)$$

Entretanto, para  $|x| < 1$ , temos que

$$1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad (3.108a)$$

$$1 - \binom{3}{2} x + \binom{4}{2} x^2 - \dots = \frac{1}{(1+x)^3} \quad ; \quad (3.108b)$$

$$1 - \binom{5}{4} x + \binom{6}{4} x^2 - \dots = \frac{1}{(1+x)^5} \quad ; \quad (3.108c)$$

e assim por diante. Então, se assumirmos que  $|A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2| < 1$  para todos os valores de  $p$  (\*),  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$  pode ser reescrita como:

$$\Delta_{AC}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int \dots \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} \left\{ \frac{1}{1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2} + \frac{A |m|^2 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^3} - \frac{A^3 |m|^4 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger 3}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^5} + \frac{A^5 |m|^6 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger 5}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^7} - \dots \right\} \quad , \quad (3.109)$$

ou ainda,

$$\Delta_{AC}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int \dots \frac{\Delta^{\nu_{SS}^\dagger}}{1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger}} \left\{ 1 + \frac{A |m|^2 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^2} \left[ 1 - \frac{A^2 |m|^2 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger 2}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^2} + \frac{A^4 |m|^4 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger 4}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^4} - \dots \right] \right\} \quad . \quad (3.110)$$

Finalmente, usando (3.109a) e assumindo que

$$\left| \frac{A^2 |m|^2 \Delta^{\nu_{SS}^\dagger 2}}{(1 + A \Delta^{\nu_{SS}^\dagger} p^2)^2} \right| < 1 \quad (*) \quad (3.111)$$

para todos os valores de  $p$ , chega-se, após algumas manipulações, à expressão final:

(\*) Essa afirmação carecerá de sentido enquanto estivermos trabalhando com a teoria original, não regularizada.

$$\Delta_{AC}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p$$

$$\tilde{\phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\psi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\psi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) (ig)^2$$

$$\frac{-i}{p^2(1-iA) + \frac{|m|^2}{1-iA}} \quad . \quad (3.112)$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar que

$$\Delta_{AC}^{SS} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p$$

$$\left[ \frac{D^2}{4} (p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \right] \tilde{\psi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta})$$

$$\tilde{\psi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) (ig)^2 \frac{i \bar{m}}{p^2 [p^2(1-iA) + |m|^2]} \quad . \quad (3.113)$$

Todavia, como já tivemos oportunidade de salientar no rodapé da página 72, tanto  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$  quanto  $\Delta_{AC}^{SS}$  carecerão de sentido enquanto estivermos lidando com a teoria não regularizada.

Para regularizá-la, usaremos, tal como ao nível de um "loop", o processo de Pauli-Villars-Gupta. Vamos passar da teoria original à regularizada.

$$L_{Reg} = \phi^\dagger \phi \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \phi'^\dagger \phi' \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + \left[ m\phi^2 \Big|_{\theta^2} - M\phi'^2 \Big|_{\theta^2} + c.c. \right]$$

$$+ \frac{1}{3} g \left[ (\phi + \phi')^3 \Big|_{\theta^2} + c.c. \right] \quad . \quad (3.114)$$

O efeito desses supercampos e massas reguladores é o



mesmo que observamos no caso anterior, qual seja: a quantidade divergente  $\pi$ , proveniente de cada "loop", é substituída pela quantidade bem fundamentada  $\Pi$ , expressa por (3.74) ou (3.75). Desse modo, os resultados das aproximações em cadeia  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$  e  $\Delta_{AC}^{SS}$  na teoria regularizada são praticamente os encontrados com a teoria original. A única diferença está na função  $A$ , que agora é função da quantidade bem definida  $\Pi$ , e não de  $\pi$ . Ou seja, agora temos que

$$\Delta_{AC}^{SS^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p (ig)^2$$

$$\tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta})$$

$$\frac{-i}{p^2 (1 - i A_{Reg}) + \frac{|m|^2}{1 - i A_{Reg}}}; \quad (3.115)$$

$$\Delta_{AC}^{SS} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p (ig)^2$$

$$\left[ \frac{D^2}{4} (p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(q_1-p, \theta, \bar{\theta}) \right] \tilde{\Phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta})$$

$$\tilde{\Phi}^\dagger(-q_3-p, \theta, \bar{\theta}) \frac{i \bar{m}}{p^2 (1 - i A_{Reg}) + |m|^2}, \quad (3.116)$$

onde

$$A_{Reg} \equiv (ig)^2 \Pi. \quad (3.117)$$

3.5 - RENORMALIZAÇÃO DE MASSA E DE FUNÇÃO DE ONDA AO NÍVEL DE APROXIMAÇÃO EM CADEIA (11,12)

Considere o resultado de  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$ , (3.115). Podemos reescrevê-lo a partir da definição abaixo.

$$\tilde{\Delta}_{AC}^{SS^\dagger}(p^2) \equiv \frac{-i}{p^2(1 - i A_{Reg}) + \frac{|m|^2}{1 - i A_{Reg}}} \quad (3.118)$$

Desse modo

$$\begin{aligned} \Delta_{AC}^{SS^\dagger} &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\theta d^4q_1 d^4q_3 d^4p (ig)^2 \\ &\quad \tilde{\phi}(-q_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}(q_1 - p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}^\dagger(-q_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\phi}^\dagger(-q_3 - p, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad \tilde{\Delta}_{AC}^{SS^\dagger}(p^2) \quad (3.119) \end{aligned}$$

Tal como renormalizamos ao nível de um "loop", vamos exigir que o pólo de  $\tilde{\Delta}_{AC}^{SS^\dagger}(p^2)$  nos indique a massa renormalizada e que o seu resíduo, correspondente à essa massa, seja igual ao de  $\tilde{\Delta}^{SS^\dagger}(p^2)$ , isto é,  $-i$ .

Definindo

$$H(p^2) \equiv -i p^2 A_{Reg} + \frac{|m|^2}{1 - i A_{Reg}} \quad (3.120)$$

podemos escrever

$$\tilde{\Delta}_{AC}^{SS^\dagger}(p^2) = \frac{-i}{p^2 + H(p^2)} \quad (3.121)$$

ou, expandindo  $H(p^2)$  em torno de  $p^2 = -|m_R|^2$ ,

$$\Delta_{AC}^{\gamma SS^\dagger}(p^2) = \frac{-i}{p^2 + H_0 + (p^2 + |m_R|^2)H_1 + (p^2 + |m_R|^2)H_C} \quad (3.122)$$

onde

$$H_0 \equiv H(p^2 = -|m_R|^2) \quad ; \quad (3.123a)$$

$$H_1 \equiv \left. \frac{\partial H}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -|m_R|^2} \quad ; \quad (3.123b)$$

$$H_C \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(p^2 + |m_R|^2)^{n-1}}{n!} \left. \frac{\partial^n H}{\partial p^{2n}} \right|_{p^2 = -|m_R|^2} \quad (3.123c)$$

Agora, com base na exigência de que  $-|m_R|^2$  seja pólo de (3.122), temos que necessariamente igualar  $H_0$  a  $|m_R|^2$ . De fato, se assim fizermos,  $\Delta_{AC}^{\gamma SS^\dagger}(p^2)$  poderá ser escrito como

$$\Delta_{AC}^{\gamma SS^\dagger}(p^2) = \frac{-i}{(p^2 + |m_R|^2)(1 + H_1 + H_C)} \quad (3.124)$$

e desta vê-se claramente que o pólo se encontra em  $p^2 = -|m_R|^2$ , como desejamos. Conseqüentemente, de (3.123a) segue que

$$|m_R|^2 = z_m^2 |m|^2 \quad , \quad (3.125)$$

em que

$$z_m = \frac{1}{1 - i A_{Reg}} \quad (3.126)$$

E assim, a massa renormalizada fica sendo dada por:

$$m_R = Z_m m \quad . \quad (3.127)$$

Retornando à expressão (3.124), observa-se facilmente que o resíduo de  $\Delta_{AC}^{SS^\dagger}$ , que corresponde ao pólo  $p^2 = -|m_R|^2$ , é dado por:

$$\text{Res } \Delta_{AC}^{SS^\dagger}(p^2) = \frac{-i}{1 + H_1} \quad (*) \quad (3.128)$$

Desse modo, definindo a constante de renormalização de função de onda (tal como no caso de um "loop") por:

$$Z_3 \equiv (1 + H_1)^{-1} \quad , \quad (3.129)$$

vem, da expressão (3.123b), que

$$Z_3 = (1 - i A_{\text{Reg}})^{-1} \quad , \quad (3.130)$$

que é igual a  $Z_m$ .

Portanto, seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido ao nível de um "loop", chega-se à densidade lagrangeana livre da teoria regularizada e renormalizada ao nível de aproximação em cadeia, expressa por:

$$L_{\text{Ren}} = Z_3 \left. \phi_R^\dagger \phi_R \right|_{\theta^2 \theta^{-2}} + (m_R \phi_R^2 \Big|_{\theta^2} + \text{c.c.}) \quad (3.131)$$

ou

---

(\*) Da expressão (3.123c) deduz-se diretamente que  $H_c$  é nulo quando  $p^2$  é igual a  $-|m_R|^2$ .

$$L_{\text{Ren}} = \left. \Phi_R^\dagger \Phi_R \right|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} + (m_R \Phi_R^2 \Big|_{\theta^2} + \text{c.c.}) + \delta c \left. \Phi_R^\dagger \Phi_R \right|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} ,$$

(3.132)

onde  $\delta c$  é o contratermo cinético dado por  $Z_3^{-1}$ , tal como no caso anterior. Veja que, tal como em (3.100),  $L_{\text{Ren}}$  só possui contra-termo do tipo cinético.

## CAPÍTULO 4

### TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE UM "LOOP"

O objetivo central deste capítulo e dos vindouros é de mostrar explicitamente o chamado "Teorema de Não-Renormalização do Superpotencial", para o modelo em questão. Ou seja, a nossa tarefa é mostrar que as dificuldades matemáticas (os "infinitos") oriundas das correções radiativas das funções de dois e três pontos são tais que não há necessidade de adicionar contra-termos dos tipos massivo e de interação à densidade lagrangeana de Wess-Zumino. Para que a teoria seja renormalizada precisamos unicamente de acrescentar-lhe um contra-termo do tipo cinético, função da constante de renormalização de função de onda ( $Z_3$ ), somente <sup>(17)</sup>.

A demonstração baseiar-se-á na análise de cada uma das contribuições irreduzíveis por uma partícula <sup>(13)</sup> (I1P) que corrigem as funções de dois e três pontos, até o nível de dois "loops". Neste capítulo trataremos especificamente dos diagramas do nível de um "loop" e nos dois últimos abordaremos os de dois "loops".

#### 4.1 - DIAGRAMA I1P AO NÍVEL DE UM "LOOP"

Os diagramas I1P ao nível de um "loop" são aqueles que

resultam em uma única integração sobre os quadrimomentos internos. Vamos classificá-los em duas categorias:

- A - os que possuem linhas externas de mesma quiralidade, isto é, linhas externas quirais ou anti-quirais;
- B - os que possuem linhas externas de quiralidades diferentes, isto é, linhas quirais e anti-quirais.

A nível de um "loop" as funções dois e três pontos que nos interessam são as seguintes:

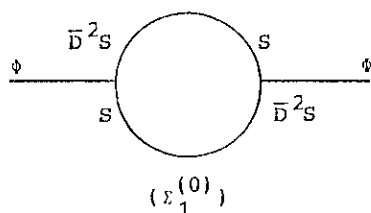


Fig. 4.1 - Duas pernas externas de mesma quiralidade.

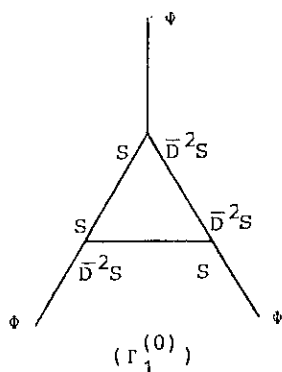


Fig. 4.2 - Três pernas externas de mesma quiralidade.

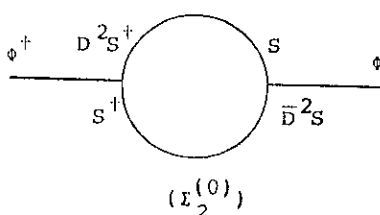


Fig. 4.3 - Duas pernas externas de quiralidade diferentes.

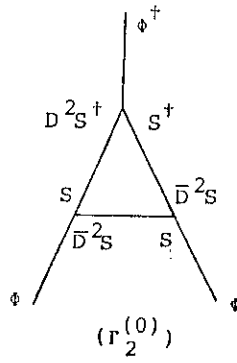


Fig. 4.4 - Três pernas externas; uma anti-quiral e duas quirais (e seu complexo conjugado).

Vimos no capítulo três que todos os diagramas ao nível de um "loop" que possuem  $n$  pernas externas de mesma quiralidade, não contribuem para a expansão da matriz  $S$ . Portanto, podemos afirmar diretamente que os diagramas da categoria A são nulos, pois correspondem à expressão (3.33), para  $n$  igual a dois e a três, respectivamente. Assim, pelo menos ao nível de um "loop", podemos garantir que não há necessidade de contra-termos dos tipos massivo e de interação, na teoria de Wess-Zumino renormalizada, ou seja, não necessitamos acrescentar-lhe termos do tipo  $\delta m \phi^2 \Big|_{\theta^2} + c.c.$ ,  $\delta g \phi^3 \Big|_{\theta^2} + c.c.$ , onde  $\delta m$  e  $\delta g$  são coeficientes (no caso, nulos) que normalmente são funções das constantes de renormalização. Com isso, concluímos que o Teorema da Não-Renormalização se afirma, ao nível de um "loop", para a teoria de Wess-Zumino.

Entretanto, mesmo não havendo obrigatoriedade de contra-termos dos tipos massivo e de interação, pode ser que haja necessidade de um contra-termo do tipo cinético, ou seja, da forma  $\delta c \phi^\dagger \phi$ . O diagrama responsável por tal contra-termo é o da Fig. 4.3. No fundo, este diagrama é o que simbolizamos por  $\Delta_{12}^{SS^\dagger}$  com suas pernas externas amputadas. Entretanto, com o intuito de



introduzir uma outra técnica de computar super gráficos (que é muito mais simples e poderosa do que a usual, baseada na remoção dos operadores  $-D^2$ , por integrações por partes), vamos calculá-lo explicitamente.

Esta segunda técnica foi por nós criada quando computávamos os diagramas do nível de dois "loops". O grande número de linhas dificulta enormemente a liberação das deltas das variáveis de Grassmann ("θ's"), por integrações por partes, pois cada uma delas dá origem a dois outros fatores, dificultando consideravelmente a remoção dos operadores  $-D^2$  (10). A nossa técnica, ao contrário, não se baseia em integrações por partes, e sim em expressar todos os fatores, nos quais os operadores  $-D^2$  atuam nas deltas das "θ's", em termos de exponenciais, expandir tais exponenciais em potências de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , e recolher todos os termos que sobreviverão às integrações das "θ's". Vamos ver como isso pode ser realizado no cálculo de  $\Sigma_2^{(0)}$ .

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(0)} &= \text{Diagram: A circle with two vertices } z_1 \text{ and } z_2. \text{ At } z_1, \text{ an incoming line from the left is labeled } \phi^+ \text{ and } s^+, \text{ and an outgoing line to the right is labeled } D^{2s^\dagger}. \text{ At } z_2, \text{ an incoming line from the left is labeled } s \text{ and an outgoing line to the right is labeled } \bar{D}^{2s}. \\
 &= \int d^8 z_1 d^8 z_2 (ig)^2 2 \phi^+(z_1) \phi(z_2) \\
 &\quad \left[ -\frac{1}{4} D_1^2 \Delta^{S^\dagger S}(z_1, z_2) \right] \left[ -\frac{1}{4} \bar{D}_2^2 \Delta^{SS^\dagger}(z_2, z_1) \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Agora, ao invés de trabalharmos em toda extensão do superespaço, vamos por intermédio das relações (\*):

$$\int d^8 z F = \int d^6 s \left[ -\frac{\bar{D}^2}{4} F \right] \quad (4.2a)$$

(\*)  $d^6 s \equiv d^4 x d^2 \theta$  e  $d^6 \bar{s} \equiv d^4 x d^2 \bar{\theta}$ .

$$\int d^8 z F = \int d^6 \bar{s} \left[ -\frac{D^2}{4} F \right], \quad (4.2b)$$

restringir as integrações<sup>(\*)</sup>, ou seja, reescreveremos  $\Sigma_2^{(0)}$  como:

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^6 \bar{s}_1 d^6 s_2 \phi^\dagger(z_1) \phi(z_2) \left[ \frac{D_1^2 \bar{D}_2^2}{16} \Delta^{S^\dagger S}(z_1, z_2) \right] \left[ \frac{\bar{D}_2^2 D_1^2}{16} \Delta^{SS^\dagger}(z_2, z_1) \right]. \quad (4.3)$$

Substituindo os superpropagadores por suas expressões, (2.24b), (2.24c), e realizando algumas simplificações algébricas imediatas, segue que:

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^6 \bar{s}_1 d^6 s_2 \phi^\dagger(z_1) \phi(z_2) \left[ \frac{D_1^2 \bar{D}_2^2}{16} \frac{i}{\square_1 - |m|^2} \delta^8(z_1 - z_2) \right] \left[ \frac{\bar{D}_2^2 D_1^2}{16} \frac{i}{\square_2 - |m|^2} \delta^8(z_2 - z_1) \right]. \quad (4.4)$$

Por conseguinte,

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^6 \bar{s}_1 d^6 s_2 \phi^\dagger(z_1) \phi(z_2) \left[ \frac{e^{-i(\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 + \theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) \theta_{1n}}}{\square_1 - |m|^2} \delta^4(x_1 - x_2) \right]$$

(\*) Observe que com esta restrição perdemos a capacidade de realizar integrações por partes, ou seja, não podemos deslocar os operadores  $-D^2$ .

$$\left[ \frac{e^{i(\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 + \theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) \partial_{2n}}}{\square_2 - |m|^2} \delta^4(x_2 - x_1) \right]. \quad (4.5)$$

Mas (\*) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = e^{i\theta \sigma^{n\bar{\theta}} \partial_n} \Psi(x, \theta) \end{array} \right. \quad (4.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^\dagger(z) = e^{-i\theta \sigma^{n\bar{\theta}} \partial_n} \Psi^\dagger(x, \bar{\theta}) \end{array} \right. \quad (4.6b)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x, \theta) \equiv A(x) + \sqrt{2} \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \theta^2 F(x) \end{array} \right. \quad (4.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^\dagger(x, \bar{\theta}) \equiv A^*(x) + \sqrt{2} \bar{\theta}_\alpha \bar{\psi}^\alpha(x) + \bar{\theta}^2 F^*(x) \end{array} \right. \quad (4.7b)$$

ou, inserindo as integrais de Fourier dos campos componentes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x, \theta) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{\Psi}(p, \theta) \end{array} \right. \quad (4.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^\dagger(x, \bar{\theta}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{\Psi}^\dagger(-p, \bar{\theta}) \end{array} \right. \quad (4.8b)$$

em que  $\tilde{\Psi}(p, \theta)$  e  $\tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta})$ , em termos das transformadas dos campos componentes, são dadas por:

---

(\*) A veracidade dessas relações pode facilmente ser verificada através da expansão das exponenciais em potências das "θ's" e posterior aplicação das mesmas sobre os supercampos, em termos de seus componentes (exp.(4.7a,b)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}(p, \theta) = \tilde{A}(p) + \sqrt{2}\theta\tilde{\psi}(p) + \theta^2\tilde{F}(p) \\ \tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}) = \tilde{A}^*(p) + \sqrt{2}\bar{\theta}\tilde{\psi}(p) + \bar{\theta}^2\tilde{F}^*(p) \end{array} \right. \quad (4.9a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}) = \tilde{A}^*(p) + \sqrt{2}\bar{\theta}\tilde{\psi}(p) + \bar{\theta}^2\tilde{F}^*(p) \end{array} \right. \quad (4.9b)$$

Então, introduzindo as expressões (3.11c), (4.6a e b) e (4.8a e b),  $\Sigma_2^{(0)}$  resulta em

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^6 s_1 d^6 s_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^{16}}$$

$$\left[ e^{-i\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 \partial_{1n}} e^{-ipx_1} \tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}_1) \right]$$

$$\left[ e^{i\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 \partial_{2n}} e^{ip'x_2} \tilde{\Psi}(p', \theta_2) \right]$$

$$\left[ \frac{i e^{-i(\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 + \theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) \partial_{1n}}}{\square_1 - |m|^2} e^{iq_1(x_1 - x_2)} \right]$$

$$\left[ \frac{i e^{i(\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 + \theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) \partial_{2n}}}{\square_2 - |m|^2} e^{iq_2(x_2 - x_1)} \right] \quad (4.10)$$

Logo, aplicando os operadores  $\partial^\alpha$  e  $(\square - |m|^2)^{-1}$  nas exponenciais e, em seguida, integrando em  $x_1$  e  $x_2$ , tendo em vista a relação (3.14), segue que

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^2 \bar{\theta}_1 d^2 \theta_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^8}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ e^{-\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1} p_n \psi^+(p, \bar{\theta}_1) \right] \left[ e^{-\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2} p'_n \psi(p', \theta_2) \right] \\
 & \left[ \frac{i e^{(\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 + \theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \right] \\
 & \left[ \frac{i e^{-(\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 + \theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2} \right] \\
 & \delta^4(-p + q_1 - q_2) \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad , \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

na qual as deltas (que tiveram origem nas integrações em  $x_1$  e  $x_2$ ) indicam, como sempre, que os quadrimomentos são conservados nos vértices e, conseqüentemente, nos permitem escrever  $q_2$  e  $p'$  em termos de  $p$  e  $q_1$ . Isto é, delas vem que:

$$q_2 = q_1 - p \quad \text{e} \quad p' = p \quad (4.12)$$

que substituídas em (4.11) nos dão, após algumas simplificações:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(0)} &= (ig)^2 2 \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^8} \\
 & \psi^+(p, \bar{\theta}_1) \psi(p, \theta_2) \left[ - \frac{i e^{-2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \right] \\
 & \left[ - \frac{i e^{2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 (q_1 - p)_n}}{(q_1 - p)^2 + |m|^2} \right] \delta^4(-p + q_1 - q_2) \\
 & \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Repare que todos os termos que continham as " $\theta$ 's" que não serão integradas ( $\theta_1$  e  $\bar{\theta}_2$ ) cancelaram-se mutuamente, restando apenas os que envolviam unicamente  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$ .

$\Sigma_2^{(0)}$  pode ser mais simplificada ainda, ou seja, ela pode ser escrita com uma única exponencial,

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 \frac{d^4p d^4q_1 d^4q_2 d^4p'}{(2\pi)^8} \tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p', \theta_2) \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{(q_1 - p)^2 + |m|^2} e^{-2\theta_2 \sigma^n \bar{\theta}_1 p_n} \delta^4(-p + q_1 - q_2) \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad (4.14)$$

Contudo, o resultado acima não é local nas " $\theta$ 's", ao contrário dos obtidos nas aproximações em cadeia, no capítulo anterior. Mas felizmente  $\Sigma_2^{(0)}$  pode ser reescrito na forma local (que nos indica que a SUSI é respeitada), através de algumas manipulações algébricas, que deixamos para o Apêndice B.

A expressão final de  $\Sigma_2^{(0)}$  fica sendo:

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}^\dagger(p, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(p, \theta, \bar{\theta}) \pi(p^2, |m|^2) \quad , \quad (4.15)$$

em que  $\pi(p^2, |m|^2)$  é a quantidade (3.50), a qual, como vimos, diverge logaritmicamente. Portanto,  $\Sigma_2^{(0)}$  faz com que seja necessário um contra-termo do tipo cinético (ou melhor, da forma  $\delta c \Phi^\dagger \Phi$ , onde  $\delta c$  é uma função da constante de renormalização da função de onda) na densidade lagrangeana renormalizada.

Agora vamos resumir o que fizemos com o objetivo de extrair Regras de Feynman para o cálculo de todos os outros diagramas que abordaremos a seguir.

Da expressão (4.1) (obtida diretamente da Fig.4.3, através de (4.2a e b)), escrevemos (4.3), na qual os vértices estão saturados de operadores  $-D^2$ .

De (4.3) fomos para (4.5), na qual os superpropagadores, submetidos aos operadores  $-D^2$ , estão expressos em termos de exponenciais.

Desta última, introduzindo-se (4.6 a e b), passamos para o (super) espaço dos quadrimomentos (expressão (4.11)), e desta, após algumas manipulações, chegamos à (4.13), onde há somente termos que envolvem as " $\theta$ 's" que serão integradas, pois, surpreendentemente, todos os outros termos cancelaram-se mutuamente quando as deltas dos quadrimomentos foram usadas. De (4.13) passamos à (4.14), e desta (no Apêndice B) escrevemos (4.15), que é a expressão final local em  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ .

#### 4.2 - REGRAS DE FEYNMAN

Este procedimento nos leva às seguintes regras:

(1) Para cada LINHA EXTERNA, inclua um fator  $\tilde{\Psi}(p, \theta)$  ou  $\tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta})$ , de acordo com a quiralidade da linha em questão (onde  $p$  é o seu quadrimomento associado).

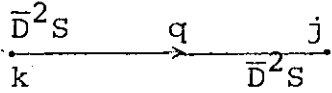
(2) Para cada VÉRTICE, inclua um fator  $ig(2\pi)^4 \delta^4(q_i + q_j + q_k)$ , onde  $q_i, q_j, q_k$  são os seus quadrimomentos correspondentes.

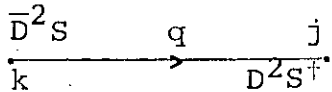
(3) Compute o fator topológico da forma usual e o inclua.

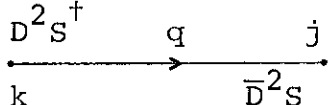
(4) Para cada VÉRTICE, inclua uma integração sobre as " $\theta$ 's" -  $\int d^2\theta$  ou  $\int d^2\bar{\theta}$  -, de acordo com a sua quiralidade (ou se-

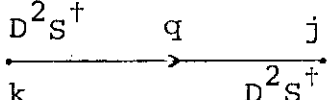
ja, de acordo com a quiralidade de suas linhas quando as mesmas já estiverem saturadas).

(5) Para cada LINHA INTERNA, inclua um dos fatores:

(a)  $\frac{-im\delta^2(\theta_k - \theta_j)}{q^2 + |m|^2}$  para 

(b)  $\frac{-i e^{2\theta_k \sigma^n \bar{\theta}_j} q_n}{q^2 + |m|^2}$  para 

(c)  $\frac{-i e^{-2\theta_j \sigma^n \bar{\theta}_k} q_n}{q^2 + |m|^2}$  para 

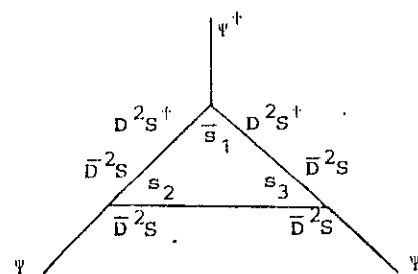
(d)  $\frac{-im\delta^2(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_j)}{q^2 + |m|^2}$  para 

(6) Integre sobre todos os QUADRIMOMENTOS, internos e externos, isto é,

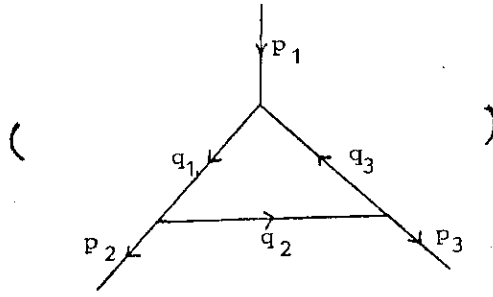
$$\int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \text{ para cada } \xrightarrow{p_i}$$

(7) Por último, faça as simplificações com a ajuda das deltas nos quadrimomentos e escreva o resultado final local, procedendo tal como no Apêndice B para  $\Sigma_2^{(0)}$ .

Assim, a função de três pontos  $\Gamma_2^{(0)}$  (Fig. 4.4) é dada por:

$$\Gamma_2^{(0)} = \text{Diagrama triangular com vértices } \psi, \psi^+, \psi \text{ e linhas internas } D^2 S, \bar{D}^2 S, D^2 S^+, \bar{D}^2 S^+ \text{ e momentos } s_1, s_2, s_3$$






$$= \int d^2\bar{\theta}_1 \int d^2\theta_2 \int d^2\theta_3 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} 2^2 (ig) \delta^4(-p_1+q_1-q_3) \cdot$$

$$(ig) \delta^4(-q_1+p_2+q_2) \cdot (ig) \delta^4(p_3-q_2+q_3) \cdot$$

$$\cdot \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \cdot \tilde{\Psi}(p_2, \theta_2) \cdot \tilde{\Psi}(p_3, \theta_3) \cdot$$

$$\frac{-i e^{-2\theta_2 \sigma^n \bar{\theta}_1 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i \bar{m} \delta^2(\theta_2 - \theta_3)}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_3 \sigma^n \bar{\theta}_1 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2}$$

(4.16)

ou

$$\Gamma_2^{(0)} = (ig)^3 2^2 \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\theta_3 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}}$$

$$d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_2) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_3)$$

$$\frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \frac{-i \bar{m}}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_3^2 + |m|^2} e^{-2\theta_2 \sigma^n \bar{\theta}_1 p_{1n}} \delta^2(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\delta^4(-p_1+q_1-q_3) \delta^4(-q_1+p_2+q_2) \delta^4(-q_2+q_3+p_3)$$

(4.17)

ou ainda (veja Apêndice B),

$$\Gamma_2^{(0)} = (ig)^3 2^2 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}^\dagger(p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\psi}(p_1 - p_3, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\psi}(p_3, \theta, \bar{\theta})$$

$$\frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-im}{(q_1 - p_1 + p_3)^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{(q_1 - p_1)^2 + |m|^2} \quad (4.18)$$

que, como pode ser visto diretamente, é matematicamente bem definida. Logo  $\Gamma_2^{(0)}$  não nos obriga a acrescentar contratermo.

Nos dois próximos capítulos abordaremos as funções de dois e três pontos a nível de dois "loops".

TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE DOIS "LOOPS"

1ª PARTE

Neste capítulo, abordaremos os diagramas irreduzíveis a uma partícula ao nível de dois "loops", que corrigem as funções de dois pontos que consideramos no capítulo anterior, com a finalidade de comprovar a veracidade do Teorema de Não-Renormalização para o termo massivo. Ou seja, tal como fizemos ao nível de um "loop", mostraremos que as correções radiativas ao nível de dois "loops" nos levam a uma única renormalização, a de função de onda.

Mais uma vez iremos considerar duas classes de diagramas. Classe A: a dos que possuem linhas externas de mesma quiralidade, quiral ou anti-quiral. Classe B: a classe dos que possuem linhas de diferentes quiralidades, isto é, uma quiral e outra anti-quiral.

5.1 - DIAGRAMAS DA CLASSE A

Os diagramas da Classe A são aqueles que podem fazer com que sejam necessários contra-termos massivos (i.e., da forma:  $\delta m \left. \phi^2 \right|_{\theta^2}$ ; onde  $\delta m$  é, em geral, uma função das constantes de renormalização de massa e função de onda, as quais divergem quando o parâmetro de regularização - que pode ser a massa reguladora do mé-

todo de Pauli-Villars-Gupta ou o número de dimensões do espaço-tempo no processo de regularização dimensional, ou outro parâmetro de regularização qualquer - tende a um determinado valor).

Os diagramas são (\*):

I)

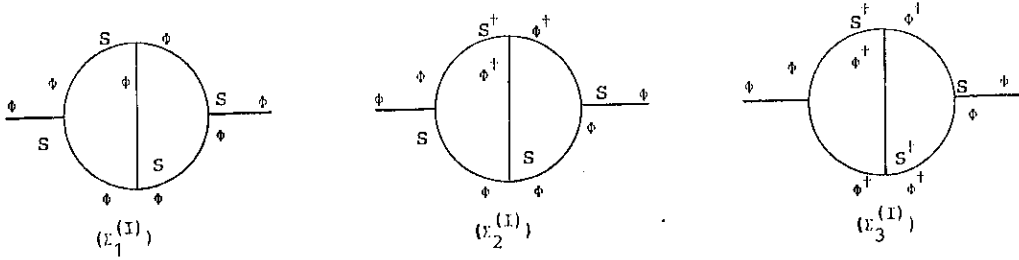


Figura 5.1a

II)

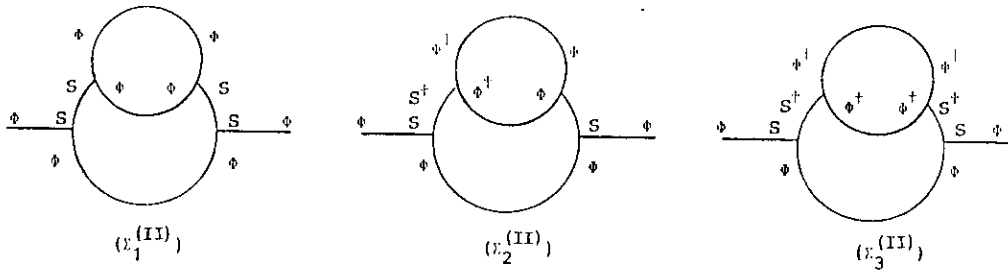


Figura 5.1b

III)

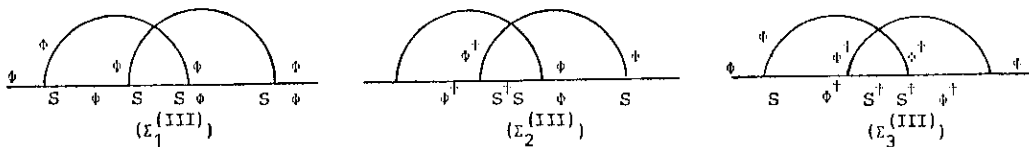


Figura 5.1c

(\*) Mais uma vez, com o intuito de não sobrecarregar as figuras, escrevemos  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  ao invés de  $-\frac{1}{4} D^{-2} S$  e  $-\frac{1}{4} D^2 S^\dagger$ , respectivamente.

Vamos calculá-los através das Regras de Feynman enunciadas no final do Capítulo 4.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^{(I)} &= \text{Diagram: A circle with a vertical line through its center. The top vertex is labeled $s_2$, the bottom $s_4$, the left $s_1$, and the right $s_3$. Two horizontal lines labeled $\psi$ enter from the left and exit to the right, meeting the circle at $s_1$ and $s_3$ respectively.} \\
 &= \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5}{(2\pi)^{28}} \\
 &\quad (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \\
 &\quad \delta^4(p_2-q_3+q_4) \delta^4(-q_4-q_2+q_5) \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \\
 &\quad \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_1-\theta_2)}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_2-\theta_4)}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_2-\theta_3)}{q_3^2 + |m|^2} \\
 &\quad \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_4^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_4-\theta_1)}{q_5^2 + |m|^2} = \\
 &= \int \dots d^2\theta_1 \dots \delta^2(\theta_1-\theta_2) \delta^2(\theta_2-\theta_4) \delta^2(\theta_4-\theta_1) = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

(5.1)

Note que poderíamos indicar diretamente esse resultado, pois, como vimos em (3.33), todos os diagramas que possuem em seu interior pelo menos um "loop" envolvendo somente superpotenciais \$S\$ (ou \$S^\dagger\$), são nulos.

$$\Sigma_2^{(I)} = \text{Diagram: A circle with a vertical line through its center. The top vertex is labeled $\bar{s}_2$, the bottom $s_4$, the left $s_1$, and the right $s_3$. Two horizontal lines labeled $\psi$ enter from the left and exit to the right, meeting the circle at $s_1$ and $s_3$ respectively.}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5}{(2\pi)^{28}} \\
 & (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \\
 & \delta^4(p_2-q_3+q_4) \delta^4(-q_4-q_2+q_5) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \\
 & \frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot \\
 & \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_4^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_4-\theta_1)}{q_5^2 + |m|^2} \quad , \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

ou, usando as deltas das "θ's",

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(I)} &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \dots \\
 & \delta^4(-q_1+q_2+q_3) e^{-2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (-q_1+q_2+q_3)_n} \\
 & \delta^2(\theta_3-\theta_4) \cdot \delta^2(\theta_4-\theta_1) \dots \quad , \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

onde sô explicitamos os termos envolvendo as "θ's" e a delta dos quadrimomentos do vértice  $z_2$ , a qual anula o expoente da exponencial e nos permite escrever

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(I)} &= \int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots \delta^2(\theta_3-\theta_4) \delta^2(\theta_4-\theta_1) \dots \\
 &= \int \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{2\dot{\alpha}}} \left\{ \dots \delta^2(\theta_3-\theta_4) \delta^2(\theta_4-\theta_1) \right\} = 0 \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3^{(I)} &= \text{Diagram} \\
 &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\bar{\theta}_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3}{(2\pi)^{28}} \\
 &\quad d^4q_4 d^4q_5 (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \\
 &\quad \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \delta^4(p_2-q_3+q_4) \delta^4(-q_4-q_2+q_5) \\
 &\quad \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-im \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_4)}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \\
 &\quad \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_4 q_{4n}}}{q_4^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_4 q_{5n}}}{q_5^2 + |m|^2}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Logo, através da presença da delta  $\delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_4)$ , segue que:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3^{(I)} &= \int \dots d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\bar{\theta}_4 \dots \\
 &\quad \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \delta^4(p_2-q_3+q_4) \delta^4(-q_4-q_2+q_5) \\
 &\quad \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \dots \\
 &\quad e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (q_1 - q_5)_n} e^{2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_4 (q_4 - q_3)_n} \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_4) \cdot
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Mas, das deltas sobre os quadrimomentos:

$$\begin{cases} q_1 - q_5 = p_1 \\ q_4 - q_3 = p_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(I)} = \int \dots d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\bar{\theta}_4 \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \\ e^{2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^{\bar{n}} \bar{\theta}_2 p_1 \bar{n}} \cdot \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_4) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Observe que somente os termos que são proporcionais à  $\bar{\theta}_2^{-2} \bar{\theta}_4^{-2}$  sobrevivem após as integrações em  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_4$ , pois como vimos,

$$\int d^2\bar{\theta} f(\bar{\theta}) \quad (= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} f(\bar{\theta}))$$

é diferente de zero unicamente se em  $f(\bar{\theta})$  há termos da forma  $a\bar{\theta}^2$ , onde  $a$  é uma função que não tem dependência em  $\bar{\theta}$ . Logo, após a expansão da exponencial

$$(e^{2\theta\sigma\bar{\theta}p} = 1 + 2\theta\sigma\bar{\theta}p - \frac{\theta^2\bar{\theta}^2 p^2}{4} )$$

o único termo que nos interessa é dado por:

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(I)} = \int \dots d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\bar{\theta}_4 \dots \\ \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \bar{\theta}_2^{-2} (-p_1^2) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_4) \end{aligned} \quad (5.9)$$



ou ainda,

$$\Sigma_3^{(I)} = \int \dots d^2\theta \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta) \tilde{\Psi}(p_2, \theta) (-p^2) \dots \quad (5.10)$$

Assim, integrando em  $q_2, q_3, q_5$  e  $p_2$ , finalmente, obtemos:

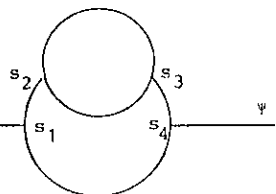
$$\Sigma_3^{(I)} = (ig)^4 2^4 \int d^2\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tilde{\Psi}(-p_1, \theta) \tilde{\Psi}(p_1, \theta) f_1(p_1) \quad (5.11)$$

onde

$$f_1(p_1) = i \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_4}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{p_1^2}{(q_1^2 + |m|^2) [(q_1 - q_4 - p_1)^2 + |m|^2] [(q_1 - p_1)^2 + |m|^2]} \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{[(q_4 + p_1)^2 + |m|^2] (q_4^2 + |m|^2)} \right\} \quad (5.12)$$

que, como pode ser visto fazendo-se a contagem das potências de  $q_1$  e  $q_4$  no denominador do integrando, converge. Logo,  $\Sigma_3^{(I)}$  está bem fundamentado matematicamente, e similarmente ao caso analisado no Apêndice B, também pode ser expresso numa forma local, isto é,

$$\Sigma_3^{(I)} = (ig)^4 2^4 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tilde{\Psi}(-p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Psi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_1(p_1) \quad (5.13)$$

$$\Sigma_1^{(II)} = \begin{array}{c} \text{---} \psi \text{---} \text{---} \psi \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = 0 \quad (5.14)$$


pois ambos os "loops" envolvem unicamente superpotenciais  $S$ , que

significa dizer, no contexto das regras de Feynman, que todas as deltas das " $\theta$ 's" quirais foram liberadas.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(II)} &= \text{Diagrama: Um círculo com dois vértices superiores rotulados } s_2 \text{ e } s_3, \text{ e dois vértices inferiores rotulados } s_1 \text{ e } s_4. \text{ Linhas horizontais entram e saem dos vértices inferiores, rotuladas com } \psi. \\
 &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5}{(2\pi)^{28}} \\
 &\quad (ig)^4 2^3 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2-q_3) \delta^4(-q_2+q_3+q_4) \\
 &\quad \delta^4(-q_4+p_2+q_5) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_2) \frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \\
 &\quad \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2} \frac{-i e^{2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \frac{-i \bar{m} \delta^2(\theta_3 - \theta_4)}{q_4^2 + |m|^2} \\
 &\quad \frac{-i \bar{m} \delta^2(\theta_4 - \theta_1)}{q_5^2 + |m|^2} \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

ou, explicitando somente os termos que contêm as " $\theta$ 's",

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(II)} &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \dots \\
 &\quad \delta^4(-q_1+q_2-q_3) e^{-2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (-q_1+q_2-q_3)_n} \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \\
 &\quad \delta^2(\theta_3 - \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_1) = \\
 &= \int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \delta^2(\theta_3 - \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_1) \\
 &= \int \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \left\{ \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \delta^2(\theta_3 - \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_1) \right\} = 0 \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

pois os termos entre as chaves não possuem dependência em  $\bar{\theta}_{2\alpha}$ .

$$\Sigma_3^{(II)} = \begin{array}{c} \text{---} \psi \text{---} \overline{\theta}_{2\alpha} \text{---} \text{---} \overline{\theta}_{2\alpha} \text{---} \psi \text{---} \\ \text{---} s_1 \text{---} \text{---} s_4 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = 0 \quad , \quad (5.17)$$

jã que o "loop" superior contém unicamente o superpotencial  $S^\dagger$ .

$$\Sigma_1^{(III)} = \begin{array}{c} \text{---} \psi \text{---} \text{---} \psi \text{---} \\ \text{---} s_1 \text{---} s_2 \text{---} s_3 \text{---} s_4 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = 0 \quad , \quad (5.18)$$

pois ambos os "loops" contém unicamente o superpotencial  $S$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(III)} &= \begin{array}{c} \text{---} \psi \text{---} \text{---} \psi \text{---} \\ \text{---} s_1 \text{---} s_2 \text{---} s_3 \text{---} s_4 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5}{(2\pi)^{28}} \\ &\quad (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1+q_2) \delta^4(-q_1+q_3+q_4) \delta^4(-q_3-q_2+q_5) \\ &\quad \delta^4(-q_5-q_4+p_2) \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_4) \\ &\quad \frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i \bar{m} \delta^2(\theta_1 - \theta_3)}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{4n}}}{q_4^2 + |m|^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot \frac{i \bar{m} \delta^2(\theta_3 - \theta_4)}{q_5^2 + |m|^2} \quad , \quad (5.19) \end{aligned}$$

ou seja, usando o fato das deltas das "θ's" estarem presentes,

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(III)} &= \int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots \delta^4(-q_1+q_4+q_3) e^{2\theta_1\sigma^{n\bar{\theta}}_2(q_1-q_4-q_3)_n} \\ &\quad \delta^2(\theta_1-\theta_3) \delta^2(\theta_3-\theta_4) = \\ &= \int \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \left\{ \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \delta^2(\theta_1-\theta_3) \delta^2(\theta_3-\theta_4) \right\} = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(III)} &= \int \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}} \left\{ \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \delta^2(\theta_1-\theta_3) \delta^2(\theta_3-\theta_4) \right\} = 0. \\ \Sigma_3^{(III)} &= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\bar{\theta}_3 d^2\theta_4 \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} \\ &\quad (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1+q_2) \delta^4(-q_1+q_3+q_4) \\ &\quad \delta^4(-q_2-q_3+q_5) \delta^4(-q_5-q_4+p_2) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \\ &\quad \frac{-i e^{2\theta_1\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_1\sigma^{n\bar{\theta}}_3 q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2} \\ &\quad \frac{-im\delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3)}{q_3^2 + |m|^2} \frac{-ie^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{4n}}}{q_4^2 + |m|^2} \\ &\quad \frac{-i e^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_3 q_{5n}}}{q_5^2 + |m|^2} \end{aligned} \tag{5.21}$$

ou, usando o fato da presença da delta  $\delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(III)} = & \int \dots d^2_{\bar{\theta}_2} d^2_{\bar{\theta}_3} \dots \delta^4(-p_1+q_1+q_2) \delta^4(-q_1+q_3+q_4) \\ & \delta^4(-q_2-q_3+q_5) \delta^4(-q_5-q_4+p_2) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \\ & e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}_2} (q_1+q_2)_n} \delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_3} (q_4+q_5)_n} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Contudo, das deltas sobre os quadrimomentos:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 = p_1 \\ q_4 + q_5 = p_2 \\ p_1 = p_2 \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(III)} = & \int d^2_{\bar{\theta}_2} d^2_{\bar{\theta}_3} \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{2(\theta_1-\theta_4) \sigma^{n\bar{\theta}_3} p_{1n}} \\ & \delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3) \\ = & \int \dots d^2_{\bar{\theta}_2} d^2_{\bar{\theta}_3} \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \delta^2(\theta_1-\theta_4) \bar{\theta}_3^2 (-p_1^2) \\ & \delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3) \end{aligned} \quad (5.24)$$

pois, dos três termos da expansão da exponencial

$$\left( \begin{array}{l} e^{2(\theta_1-\theta_4) \sigma^{n\bar{\theta}_3} p_{1n}} = \\ 1 + 2(\theta_1-\theta_4) \sigma^{n\bar{\theta}_3} p_{1n} + \delta^2(\theta_1-\theta_4) \bar{\theta}_3^2 (-p_1^2) \end{array} \right)$$

apenas o terceiro fornece um resultado não nulo, quando as integrações em  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_3$  são efetuadas. Portanto,

$$\Sigma_3^{(III)} = (ig)^4 2^4 \int d^2\theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Psi}(-p_1, \theta) \tilde{\Psi}(p_1, \theta) f_2(p_1) \quad , \quad (5.25)$$

ou, na forma local em  $\theta$  e  $\bar{\theta}$  ,

$$\Sigma_3^{(III)} = (ig)^4 2^4 \int d^4\theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Psi}(-p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Psi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_2(p_1) \quad , \quad (5.26)$$

onde  $f_2(p_1)$  é uma função bem comportada matematicamente do quadri-momento externo  $p_1$ , dada por:

$$f_2(p_1) =$$

$$\frac{-i}{(2\pi)^8} \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_4 p_1^2}{(q_1^2 + |m|^2) [(p_1 - q_1)^2 + |m|^2] [(q_1 - q_4)^2 + |m|^2] (q_4^2 + |m|^2) [(p_1 - q_4)^2 + |m|^2]} \quad (5.27)$$

## 5.2 - DIAGRAMAS DA CLASSE B

Acabamos de constatar que todas as correções radiativas da função de dois pontos de pernas externas de mesma quiralidade estão bem fundamentadas. Assim, ao nível de dois "loops", não há necessidade de que sejam adicionados contra-termos massivos à densidade lagrangeana do modelo de Wess-Zumino. Agora, vamos abordar os diagramas que corrigem a função de dois pontos de pernas externas de diferentes quiralidades, os quais nos dirão se há necessidade de contra-termos do tipo cinético. Os diagramas da classe B são os que seguem:

I)

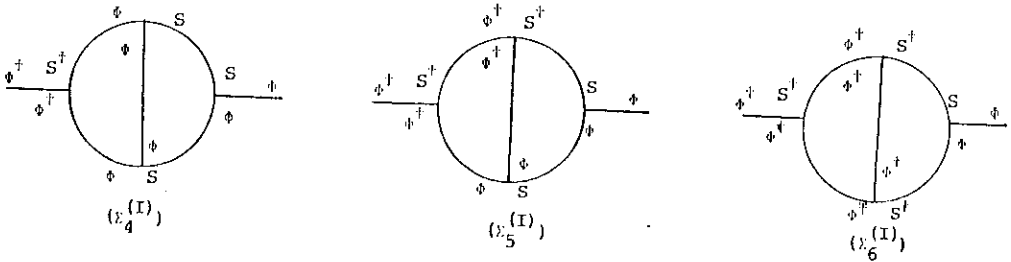


Figura 5.2a

II)

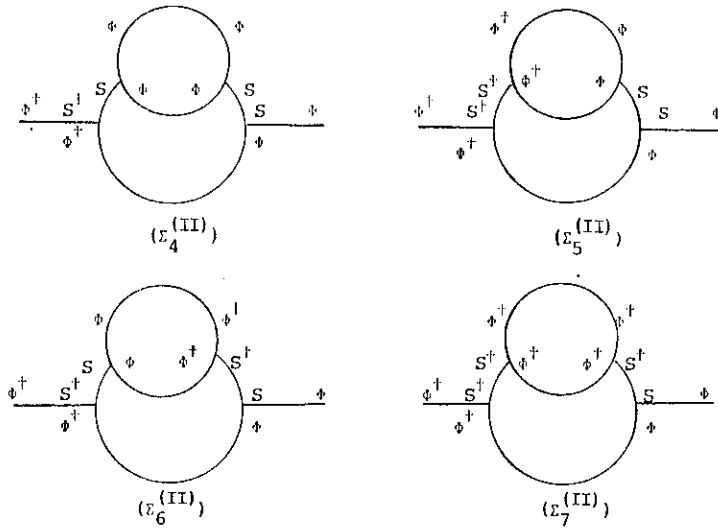


Figura 5.2b

III)

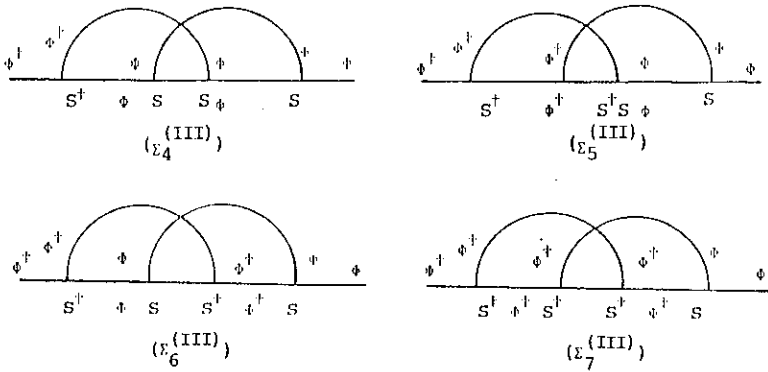


Figura 5.2c

Figura 5.2a,b e c - Diagramas da Classe g.

$$\Sigma_4^{(I)} = \Sigma_6^{(I)} = 0 \quad , \quad (5.28)$$

pois ambos contêm um "loop" envolvendo um único tipo de superpotencial - o "loop" da esquerda de  $\Sigma_4^{(I)}$  sô envolve o superpotencial S e o da direita de  $\Sigma_6^{(I)}$  sô possui  $S^\dagger$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_5^{(I)} &= \text{Diagram} \\ &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5}{(2\pi)^{28}} \\ & (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \\ & \delta^4(-q_3+p_2+q_4) \delta^4(-q_4-q_2+q_5) \hat{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \\ & \frac{-im\delta^2(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)}{q_1^2+|m|^2} \frac{-i e^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_2q_{2n}}}{q_2^2+|m|^2} \frac{-i e^{-2\theta_3\sigma^{n\bar{\theta}}_2q_{3n}}}{q_3^2+|m|^2} \\ & \frac{-i\bar{m}\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_4^3+|m|^2} \frac{-i e^{2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_1q_{5n}^2}}{q_5^2+|m|^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Mas, das deltas sobre os quadrimomentos,

$$\begin{cases} q_1 = q_2 + q_3 \\ p_1 = q_1 - q_5 \end{cases} \quad (5.30)$$

Logo,



$$\Sigma_5^{(I)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \dots$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} \delta^2(\theta_3 - \theta_4)$$

(5.31)

ou, integrando em  $\bar{\theta}_2$  e  $\theta_3$ ,

$$\Sigma_5^{(I)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_4 \dots \hat{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}}$$

(5.32)

ou ainda, na forma local em  $\theta, \bar{\theta}$ ,

$$\Sigma_5^{(I)} = (ig)^4 2^4 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} d^4\theta \hat{\Psi}^\dagger(p_1, \theta, \bar{\theta}) \hat{\Psi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_3(p_1);$$

(5.33)

em que  $f_3(p_1)$  é dada por:

$$f_3(p_1) = -i \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_4}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{1}{(q_1^2 + |m|^2)(q_4^2 + |m|^2)[(q_1 - q_4 - p_1)^2 + |m|^2]} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{[(q_1 - p_1)^2 + |m|^2][(q_4 + p_1)^2 + |m|^2]} \right\},$$

(5.34)

que é matematicamente bem fundamentada, como pode ser visto diretamente fazendo-se a contagem das potências de  $q_1$  e  $q_4$  no integrando.

$$\Sigma_4^{(II)} = \Sigma_7^{(II)} = 0,$$

(5.35)

pois ambos possuem um "loop" envolvendo um único tipo de superpotencial.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_5^{(II)} &= \text{Diagram} \\
 &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} \\
 &\quad (ig)^4 2^3 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1-q_5) \delta^4(-q_1+q_2-q_3) \\
 &\quad \delta^4(-q_2+q_3+q_4) \delta^4(-q_4+p_2+q_5) \hat{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_4) \\
 &\quad \frac{-im\delta^2(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)}{q_1^2+|m|^2} \frac{-ie^{-2\theta_3\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{2n}}}{q_2^2+|m|^2} \\
 &\quad \frac{-ie^{2\theta_3\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2+|m|^2} \frac{-im\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_4^2+|m|^2} \frac{-ie^{2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_1 q_{5n}}}{q_5^2+|m|^2}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

No entanto, das deltas dos quadrimomentos:

$$\begin{cases} q_4 = q_2 - q_3 \\ p_2 = q_4 - q_5 \\ p_2 = p_1 \end{cases} \tag{5.37}$$

Logo, escrevendo apenas os termos que envolvem as " $\theta$ 's",

$$\begin{aligned}
 \Sigma_5^{(II)} &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \dots \hat{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_4) \delta^2(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2) e^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_2 p_{1n}} \\
 &\quad \delta^2(\theta_3-\theta_4)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

ou, integrando sobre  $\bar{\theta}_2$  e  $\theta_3$ ,

$$\Sigma_5^{(II)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_4 \dots \Psi^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} \quad (5.39)$$

Finalmente, explicitando todos os termos, vem que  $\Sigma_5^{(II)}$ , na forma local em  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , é dado por:

$$\Sigma_5^{(II)} = (ig)^4 2^3 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}^\dagger(p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_4(p_1); \quad (5.40)$$

em que  $f_4(p_1)$ , dada por:

$$f_4(p_1) = -i|m|^2 \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{1}{(q_1^2 + |m|^2)(q_2^2 + |m|^2)[(q_1 - q_2)^2 + |m|^2]} \cdot \frac{1}{[(q_1 - p_1)^2 + |m|^2]} \right\}, \quad (5.41)$$

é uma função do quadrimomento externo  $p_1$  que, ao contrário de todos os casos analisados até aqui (ao nível de dois "loops"), diverge logaritmicamente (\*).

$$\begin{aligned} \Sigma_6^{(II)} &= \text{Diagram} \\ &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\bar{\theta}_3 d^2\theta_4 \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} \\ & (ig)^4 2^3 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1 + q_1 - q_5) \delta^4(-q_1 + q_2 - q_3) \delta^4(-q_4 - q_2 + q_3) \\ & \delta^4(-q_4 + p_2 + q_5) \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_2) \frac{-i e^{-2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \frac{-i e^{2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_3 q_n}}{q_2^2 + |m|^2} \end{aligned}$$

(\*) Para que isso seja visto, basta fazer a contagem das potências do quadrimomento  $q_2$ , no denominador do integrando e comparar com a potência da medida "d<sup>4</sup>q<sub>2</sub>".

$$\frac{-i e^{-2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}_3} q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \frac{-i e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_3} q_{4n}}}{q_4^2 + |m|^2} \frac{-i e^{2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_1} q_{5n}}}{q_5^2 + |m|^2} \quad (5.42)$$

Das deltas dos quadrimomentos, temos que:

$$\begin{cases} q_2 - q_3 = q_1 \\ q_1 = q_4 \\ q_5 = q_1 - p_1 \end{cases} \quad (5.43)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \Sigma_6^{(II)} = & \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\bar{\theta}_3 d^2\theta_4 \dots \Psi^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \Psi(p_2, \theta_4) e^{2(\theta_4 - \theta_2) \sigma^{n\bar{\theta}_1} q_{1n}} \\ & e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_1} p_{1n}} e^{2(\theta_2 - \theta_4) \sigma^{n\bar{\theta}_3} q_{1n}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Sigma_6^{(II)} = & \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\bar{\theta}_3 d^2\theta_4 \dots \Psi^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \Psi(p_2, \theta_4) \\ & e^{2(\theta_2 - \theta_4) \sigma^{n(\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1)} q_{1n}} e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_1} p_{1n}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} e^{2(\theta_2 - \theta_4) \sigma^{n(\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1)} q_{1n}} &= 1 + 2(\theta_2 - \theta_4)^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{n\cdot} (\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1)^\beta q_{1n} \\ &\quad - \delta^2(\theta_2 - \theta_4) \delta^2(\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1) q_1^2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Logo, integrando em  $\bar{\theta}_3$ , isto é,

$$\Sigma_6^{(II)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\theta_4 \dots \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_3^\alpha} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_3^\alpha} \left\{ \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \right. \\ \left. \left[ 1 + 2(\theta_2 - \theta_4)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^n (\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1)^{\dot{\beta}} q_{1n} - \delta^2(\theta_2 - \theta_4) \delta^2(\bar{\theta}_3 - \bar{\theta}_1) q_1^2 \right] \right. \\ \left. e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} \right\} \quad (5.47)$$

segue que:

$$\Sigma_6^{(II)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\theta_4 \dots \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \\ \delta^2(\theta_2 - \theta_4) (-q_1^2) e^{2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} = \\ = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_4 \dots \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) (-q_1^2) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} \quad (5.48)$$

ou, finalmente,

$$\Sigma_6^{(II)} = (ig)^4 2^3 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}^\dagger(p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_5(p_1) \quad (5.49)$$

onde  $f_5(p_1)$  é a quantidade logaritmicamente divergente expressa por:

$$f_5(p_1) = i \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{q_1^2 q_2^2}{(q_1^2 + |m|^2)^2 (q_2^2 + |m|^2) [(q_2 - q_1)^2 + |m|^2]} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{[(q_1 - p_1)^2 + |m|^2]} \right\} \quad (5.50)$$

que, tal como (5.40), obriga a adiçãõ de um contra-termo do tipo cinético.

$$\Sigma_4^{(III)} = \Sigma_7^{(III)} = 0 \quad , \quad (5.51)$$

pois ambos possuem um "loop" contendo um único tipo de superpotencial, em seus interiores.

$$\begin{aligned} \Sigma_5^{(III)} &= \int_{\Psi^+}^{\Psi} \frac{d^4 p_1 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} (ig)^4 \\ &= \int d^2 \bar{\theta}_1 d^2 \theta_2 d^2 \bar{\theta}_3 d^2 \theta_4 \frac{d^4 p_1 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} (ig)^4 \\ &\quad \delta^4(-p_1 + q_1 + q_2) \delta^4(-q_1 + q_4 + q_3) \delta^4(-q_2 - q_3 + q_5) \\ &\quad \delta^4(-q_5 - q_4 + p_2) \tilde{\Psi}^+(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) \\ &\quad \frac{-i e^{-2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}_1} q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \frac{-im \delta^2(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3)}{q_2^2 + |m|^2} \frac{-i e^{2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}_3} q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \\ &\quad \frac{-im \delta^2(\theta_2 - \theta_4)}{q_4^2 + |m|^2} \frac{-i e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_3} q_{5n}}}{q_5^2 + |m|^2} \quad , \quad (5.52) \end{aligned}$$

ou, usando as deltas das "θ's",

$$\begin{aligned} \Sigma_5^{(III)} &= \int d^2 \bar{\theta}_1 d^2 \theta_2 d^2 \bar{\theta}_3 d^2 \theta_4 \dots \tilde{\Psi}^+(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}_3} (q_3 - q_1 - q_5)_n} \\ &\quad \delta^2(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3) \delta^2(\theta_2 - \theta_4) \quad . \quad (5.53) \end{aligned}$$

Mas, das deltas dos quadrimomentos,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 - q_1 = -q_4 \\ -q_5 - q_4 = -p_2 \\ p_2 = p_1 \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Então,

$$\Sigma_5^{(III)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 d^2\bar{\theta}_3 d^2\theta_4 \dots \bar{\Psi}^+(p_1, \bar{\theta}_1) \bar{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{-2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}_3} p_{1n}} \delta^2(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3) \delta^2(\theta_2 - \theta_4) \quad (5.55)$$

ou, integrando sobre  $\bar{\theta}_2$  e  $\theta_3$ ,

$$\Sigma_5^{(III)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_4 \dots \bar{\Psi}^+(p_1, \bar{\theta}) \bar{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}_1} p_{1n}} \quad (5.56)$$

Assim, finalmente obtemos:

$$\Sigma_5^{(III)} = (ig)^4 2^4 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}^+(p_1, \theta, \bar{\theta}) \bar{\Psi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_6(p_1) \quad (5.57)$$

onde  $f_6(p_1)$  é uma função de  $p_1$ , dada por:

$$f_6(p_1) = -i|m|^2 \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_4}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{1}{(q_1^2 + |m|^2) [(p_1 - q_1)^2 + |m|^2] [(q_1 - q_4)^2 + |m|^2]} \cdot \frac{1}{(q_4^2 + |m|^2) [(p_1 - q_4)^2 + |m|^2]} \right\} \quad (5.58)$$

bem comportada.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_6^{(III)} &= \int_{\bar{s}_1}^{\psi^\dagger} \int_{\bar{s}_2}^{\psi} \int_{s_3} \int_{s_4} \\
 &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_5}{(2\pi)^{28}} \\
 &\quad (ig)^4 2^4 (2\pi)^{16} \delta^4(-p_1+q_1+q_2) \delta^4(-q_1+q_4+q_3) \delta^4(-q_2-q_3+q_5) \\
 &\quad \delta^4(-q_5-q_4+p_2) \tilde{\psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\psi}(p_2, \theta_4) \frac{-im\delta^2(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)}{q_1^2+|m|^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{-ie^{-2\theta_3\sigma^{n\bar{\theta}}_1 q_{2n}}}{q_2^2+|m|^2} \cdot \frac{-ie^{-2\theta_3\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2+|m|^2} \cdot \frac{-ie^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{4n}}}{q_4^2+|m|^2} \\
 &\quad \cdot \frac{i\bar{m}\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_5^2+|m|^2} \quad , \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

ou, usando as deltas das "θ's",

$$\begin{aligned}
 \Sigma_6^{(III)} &= \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 \dots \tilde{\psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\psi}(p_2, \theta_4) \delta^2(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2) \\
 &\quad e^{2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_1(-q_2-q_3-q_4)_n} \delta^2(\theta_3-\theta_4) \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

Das deltas dos quadrimomentos,

$$q_2 + q_3 + q_4 = p_1 \quad (5.61)$$

Então, integrando sobre  $\bar{\theta}_2$  e  $\theta_3$ ,



$$\Sigma_6^{(III)} = \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_4 \dots \tilde{\Psi}^\dagger(p_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_4) e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_{1n}} \quad (5.62)$$

Assim, explicitando todos os termos e integrando sobre  $q_2$  e  $q_3$ ,

$$\Sigma_{(6)}^{III} = (ig)^4 2^4 \int d^4\theta \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}^\dagger(p_1, \theta, \bar{\theta}) \tilde{\Phi}(p_1, \theta, \bar{\theta}) f_6(p_1) \quad (5.63)$$

onde  $f_6(p_1)$  é definida por (5.58).

CAPÍTULO 6

TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO AO NÍVEL DE DOIS "LOOPS"

2ª PARTE

Neste último capítulo, a nossa tarefa é mostrar que o "Teorema de Não-Renormalização do Superpotencial" se aplica para o termo de interação, ao nível de dois "loops". Com isso, levando em conta os resultados obtidos nos dois capítulos anteriores, completaremos a demonstração deste teorema para o modelo de Wess-Zumino, até o nível de dois "loops".

Os diagramas que corrigem radiativamente o vértice  $\phi^3$  são os das figuras abaixo; designá-lo-emos por diagramas de topologia I, II e III, respectivamente.

I)

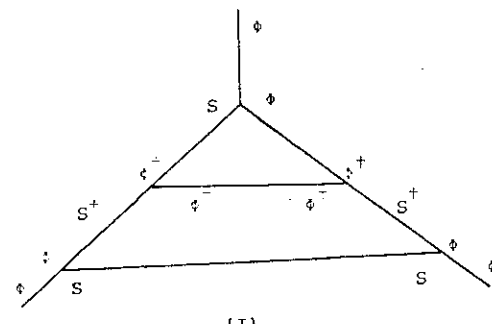
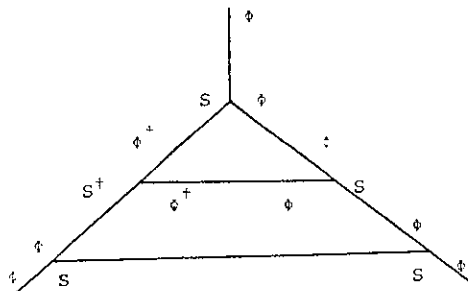
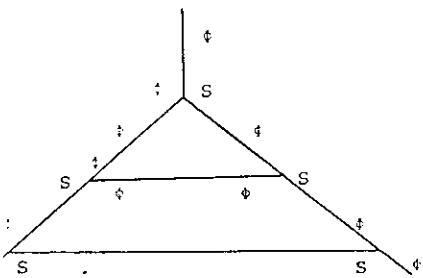
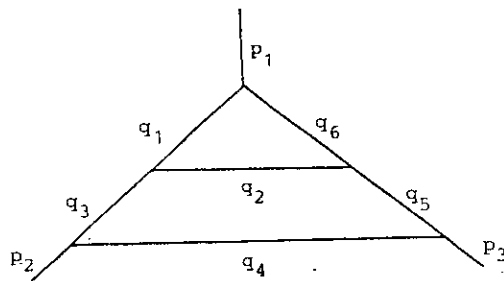


Figura 6.1a

II)

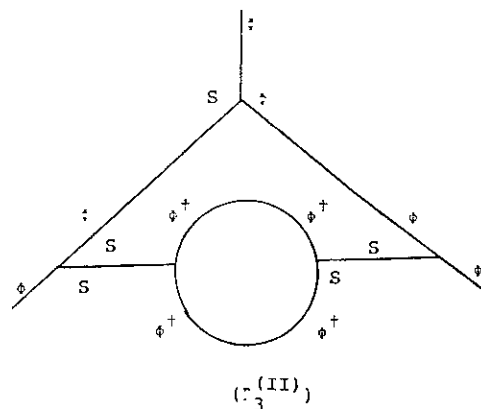
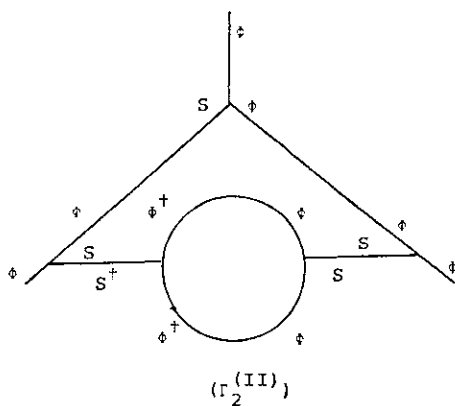
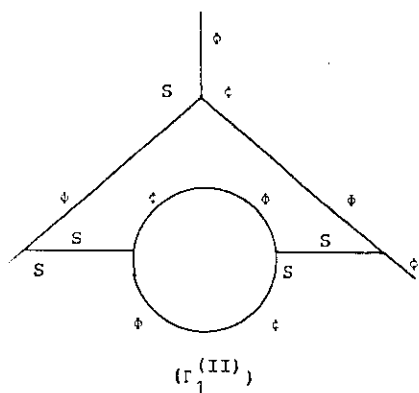
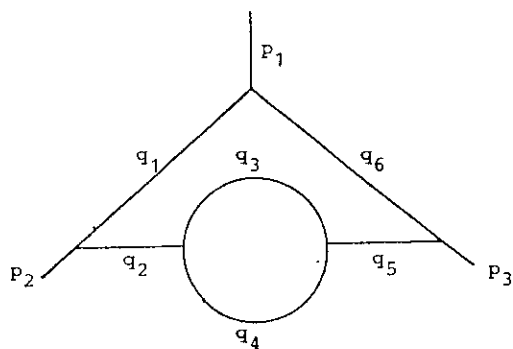


Figura 6.1b

III)

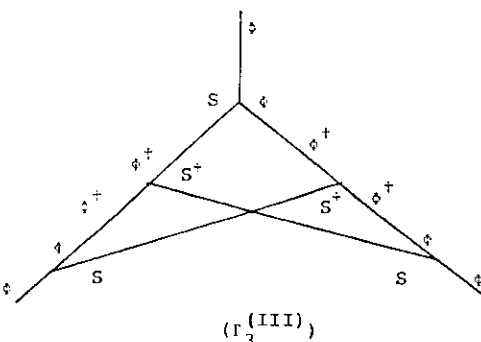
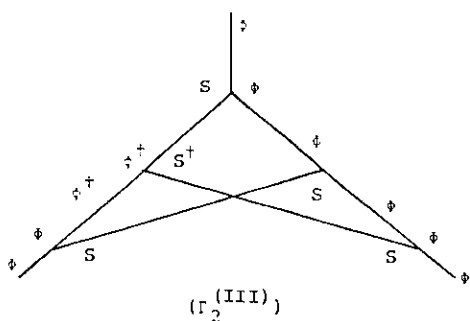
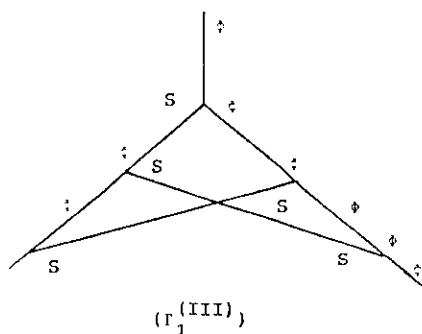
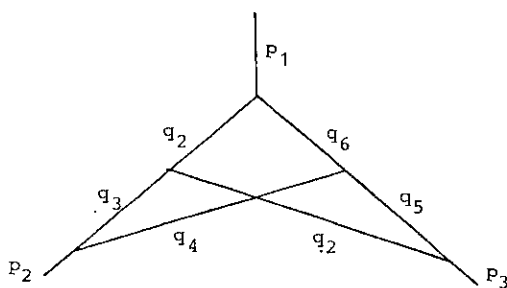


Figura 6.1c

Figuras 6.1a,b e c: Diagramas que corrigem radiativamente o vértice  $\phi^3$  a nível de dois "loops".

Vamos computá-los através das regras de Feynman enunciadas no quarto capítulo, tal como fizemos no capítulo precedente.

6.1 - DIAGRAMAS DE TOPOLOGIA I

$$\Gamma_1^{(I)} = \text{Diagrama} = 0 \quad (6.1)$$

The diagram for  $\Gamma_1^{(I)}$  is a triangle with vertices. The top vertex is connected to the bottom-left and bottom-right vertices by lines labeled  $s_1$ . The bottom-left and bottom-right vertices are connected by lines labeled  $s_2$  and  $s_5$  respectively. The bottom-left and bottom-right vertices are also connected by lines labeled  $s_3$  and  $s_4$  respectively. External lines labeled  $\psi$  are attached to each vertex: one at the top, one at the bottom-left, and one at the bottom-right.

pois sô hã superpotenciais do tipo S em ambos os "loops"

$$\Gamma_2^{(I)} = \text{Diagrama}$$

The diagram for  $\Gamma_2^{(I)}$  is identical in structure to the one for  $\Gamma_1^{(I)}$ , but the internal line between the bottom-left and bottom-right vertices is labeled  $\bar{s}_2$  instead of  $s_2$ .

$$= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 d^2\theta_5 d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \frac{d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5 d^4q_6}{(2\pi)^{36}}$$

$$2^4 (1g)^5 (2\pi)^{20} \delta^4(-p_1+q_1+q_6) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \delta^4(-q_3+q_4+p_2)$$

$$\delta^4(-q_4-q_5+p_3) \delta^4(-q_2+q_5-q_6)$$

$$\tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_5 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2}$$

$$\cdot \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot \frac{i m \delta^2(\theta_3 - \theta_4)}{q_4^2 + |m|^2}$$

$$\cdot \frac{i\bar{m}\delta^2(\theta_4-\theta_5)}{q_5^2+|m|^2} \cdot \frac{i\bar{m}\delta^2(\theta_5-\theta_1)}{q_6^2+|m|^2} \quad , \quad (6.2)$$

ou, considerando a existência das deltas das "θ's",

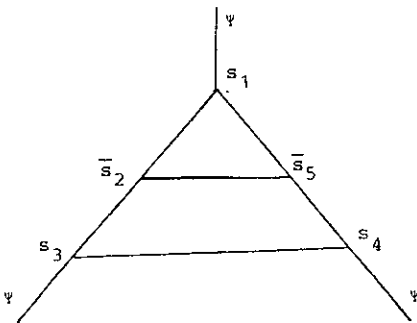
$$\Gamma_2^{(I)} = \int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4)$$

$$e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}_2} (q_1 - q_2 - q_3)_n} \delta^2(\theta_3 - \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_5) \delta^2(\theta_5 - \theta_1) =$$

$$\int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4)$$

$$\delta^2(\theta_3 - \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_5) \delta^2(\theta_5 - \theta_1) = 0 \quad , \quad (6.3)$$

pois nesta última não há dependência em  $\bar{\theta}_2$ .

$$\Gamma_3^{(I)} =$$


$$= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 d^2\bar{\theta}_5 d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \frac{d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5 d^4q_6}{(2\pi)^{36}}$$

$$2^5 (ig)^5 (2\pi)^{20} \delta^4(-p_1+q_1+q_6) \delta^4(-q_1+q_2+q_3) \delta^4(-q_3+q_4+p_2)$$

$$\delta^4(-q_4-q_5+p_3) \delta^4(-q_2+q_5-q_6) \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4)$$

$$\frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}_2} q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{i\bar{m}\delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}_2} q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{i\bar{m}\delta^2(\theta_3-\theta_4)}{q_4^2+|m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{5n}}}{q_5^2+|m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_1\sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{6n}}}{q_6^2+|m|^2} , \quad (6.4)$$

ou, através das deltas das " $\theta$ 's" e dos quadrimomentos,

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(I)} &= \int \dots e^{2\theta_1\sigma^{n\bar{\theta}}_2 p_{1n}} \delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_5) \delta^2(\theta_3-\theta_4) e^{-2\theta_4\sigma^{n\bar{\theta}}_5 p_{1n}} \dots \\ &= \int \dots e^{2(\theta_1-\theta_4)\sigma^{n\bar{\theta}}_5 p_{1n}} \delta^2(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_5) \delta^2(\theta_3-\theta_4) \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Daí, integrando em  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ , tendo em vista que  $e^{2(\theta_1-\theta_4)\sigma^{n\bar{\theta}}_5 p_{1n}} = 1 + 2(\theta_1-\theta_4)\sigma^{n\bar{\theta}}_5 p_{1n} + \delta^2(\theta_1-\theta_4)\bar{\theta}_5^2(-p_1^2)$ , segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(I)} &= \int \dots (-p_1^2) \delta^2(\theta_1-\theta_4) \delta^2(\theta_3-\theta_4) = \\ &= \int d^2\theta_1 \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} 2^5 (ig)^5 \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_1-p_3, \theta_1) \hat{\Psi}(p_3, \theta_1) \\ &F(p_1, p_3) \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde  $F(p_1, p_3)$  é uma função bem comportada dos quadrimomentos externos, expressa por

$$\begin{aligned} F(p_1, p_3) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 q_1 d^4 q_3 \left\{ \frac{1}{(q_1^2+|m|^2)(q_3^2+|m|^2)[(q_1-q_3)^2+|m|^2]} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{1}{[(q_3-p_1+p_3)^2+|m|^2][(-q_3+p_1)^2+|m|^2][(p_1+q_1)^2+|m|^2]} \right\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Vê-se então que os diagramas de topologia I não fornecem contribuições divergentes. Os dois primeiros são nulos e o último contribui com uma quantidade bem definida, não nos obrigando, pois, a renormalizar o vértice  $\phi^3$ .

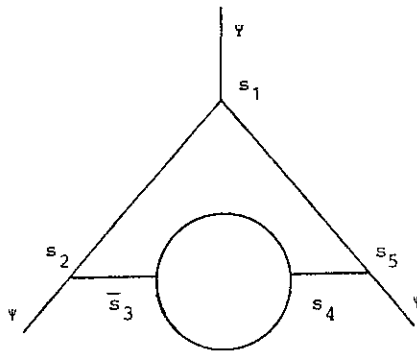
## 6.2 - DIAGRAMAS DE TOPOLOGIA II

Devido à existência de "loops" envolvendo um único tipo de superpotencial, deduz-se imediatamente que o primeiro e o terceiro diagramas de topologia II são nulos. Isto é,

$$\Gamma_1^{(II)} = \Gamma_3^{(II)} = 0 \quad . \quad (6.8)$$

Quanto a

$$\Gamma_2^{(II)} =$$



pode-se mostrar, com a ajuda das deltas das "θ's" e dos quadrimomentos, que os termos que contêm dependência em  $\bar{\theta}_3$  cancelam-se mutuamente, fazendo com que seja nula a derivada do integrando em relação a  $\bar{\theta}_3$ . Logo,

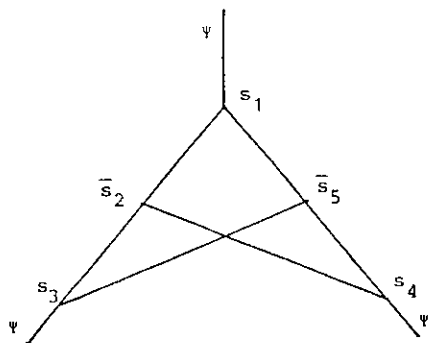
$$\Gamma_2^{(II)} = 0 \quad . \quad (6.9)$$

6.3 - DIAGRAMAS DE TOPOLOGIA III

Os dois primeiros diagramas dessa topologia são nulos . O primeiro graças aos "loops" que envolvem apenas o superpotencial S, e o segundo, por consequência do cancelamento dos termos que possuem a variável de Grassmann anti-quiral<sup>(\*)</sup>, que pode ser verificado facilmente através do uso das deltas das "θ's" e dos quadrimomentos.

$$\Gamma_1^{(III)} = \Gamma_2^{(III)} = 0 \quad . \quad (6.10)$$

Desse modo, resta-nos, para mostrar a validade do Teorema de Não-Renormalização para o vértice (ao nível de dois "loops"), que o terceiro diagrama de topologia III,  $\Gamma_3^{(III)}$ , ofereça uma contribuição finita.

$$\Gamma_3^{(III)} =$$


The diagram shows a triangle with vertices and internal lines labeled s1, s2, s3, s4, s5. External lines labeled ψ are attached to the vertices. The diagram is part of an integral expression for Γ3^(III).

$$= \int d^2\theta_1 d^2\bar{\theta}_2 d^2\theta_3 d^2\theta_4 d^2\bar{\theta}_5 d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4q_1 \frac{d^4q_2 d^4q_3 d^4q_4 d^4q_5 d^4q_6}{(2\pi)^{36}} \cdot 2^5$$

$$(ig)^5 \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) (2\pi)^{20} \delta^4(-p_1 + q_1 - q_6)$$

$$\delta^4(-q_1 + q_2 + q_3) \delta^4(-q_3 + p_2 + q_4) \delta^4(-q_2 + p_3 + q_5) \delta^4(-q_5 - q_4 + q_6)$$

<sup>(\*)</sup>  $D_{\alpha} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = [\partial_{\alpha} + i(\sigma^{\ell\bar{\theta}})_{\alpha} \partial_{\ell}] \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 0$ , isto é, anti-quiral neste sentido.



$$\frac{-i e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}}}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{2n}}}{q_2^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{3n}}}{q_3^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{4n}}}{q_4^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{5n}}}{q_5^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i e^{-2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{6n}}}{q_6^2 + |m|^2}, \quad (6.11)$$

ou, usando as deltas para expressar os quadrimomentos internos  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_6$ , em termos de  $q_1$  e  $q_5$ ,

$$\Gamma_3^{(III)} = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \dots e^{2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}} \cdot e^{-2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (q_5 + p_3)_n} \cdot e^{-2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (q_1 - q_5 - p_3)_n} \cdot e^{2\theta_3 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 (q_1 - q_5 - p_1)_n} \cdot e^{2\theta_4 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{5n}} \cdot e^{-2\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_5 (q_1 - p_1)_n} \quad (6.12)$$

Desta segue diretamente que

$$\Gamma_3^{(III)} = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \dots e^{2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}}_2 q_{1n}} \cdot e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}}_2 (q_5 + p_3)_n} \cdot e^{2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}}_5 q_{5n}} \cdot e^{2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}}_5 (q_1 - p_1)_n} = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \dots e^{2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^{n(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)} q_{1n}} \cdot e^{2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)} q_{5n}} \cdot e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}}_2 p_{3n}} \cdot e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}}_5 p_{1n}} \quad (6.13)$$

ou, expandindo as duas primeiras exponenciais,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3^{(III)} &= \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) \\
 & [1 + 2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) q_{1n} + \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2)] \\
 & [1 + 2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) q_{5n} + \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2)] \\
 & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots \tag{6.14} \\
 & = \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} \\
 & e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots + \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) \\
 & 2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) q_{5n} e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) \\
 & \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) q_{1n} \\
 & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) q_{1n} \\
 & 2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) q_{5n} e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n \bar{\theta}_2 p_{3n}} \\
 & e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^n \bar{\theta}_5 p_{1n}} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) q_{1n} \\
 & \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) \\
 & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\
 & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\
 & 2(\theta_4 - \theta_2) \sigma^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) q_{5n} \\
 & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n}} \dots \\
 & + \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\
 & \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} \\
 & e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n}} \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Denotando as parcelas desta expressão por algarismos romanos i , ii, ... ix, teremos

$$\Gamma_3^{(III)} = i + ii + \dots + ix \quad , \tag{6.16}$$

onde

$$i = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2) \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2) \dots \dots \tag{6.17}$$

pois somente os terceiros termos das expansões das exponenciais contribuem com um fator que não se anula com a integração em  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ . Logo, integrando sobre as "θ's", com exceção de  $\theta_1$ , segue

$$i = \int d^2\theta_1 \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_1) p_1^2 p_3^2 \dots \quad (6.18)$$

$$ii = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) q_{5n} \\ [1 - 2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n} + \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2)] [1 - 2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n} \\ + \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2)] \dots \quad (6.19)$$

Tendo em vista que os operadores  $\partial/\partial\bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}}$ ,  $\partial/\partial\bar{\theta}_{2\dot{\alpha}}$ ,  $\partial/\partial\bar{\theta}_5^{\dot{\beta}}$ ,  $\partial/\partial\bar{\theta}_{5\dot{\beta}}$ , serão aplicados ao integrando quando integrarmos em  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ , em - contra-se que os únicos termos que sobreviverão são dados por:

$$ii_a = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_4 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\alpha}} q_{5n} \\ (-2) (\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\dot{\ell}} \bar{\theta}_2^{\dot{\beta}} p_{3\dot{\ell}} \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2) \dots \quad (6.20a)$$

$$ii_b = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_4 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\alpha}} q_{5n} \\ \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2) (-2) (\theta_3 - \theta_1)^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\dot{\ell}} \bar{\theta}_5^{\dot{\gamma}} p_{1\dot{\ell}} \dots \quad (6.20b)$$

De  $ii_a$  segue que,

$$ii_a = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) (-2) (\theta_4 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}} q_{5n} (-2)$$

$$(\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\lambda \bar{\theta}_2^{\dot{\beta}} p_{3\lambda} \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2) \dots \quad (6.21)$$

E desta, usando as propriedades abaixo,

$$\theta^\alpha \cdot \theta^\beta = \frac{\epsilon^{\beta\alpha}}{2} \theta^2 \quad (6.22a)$$

$$\bar{\theta}^\alpha \cdot \bar{\theta}^\beta = \frac{\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}{2} \bar{\theta}^2 \quad (6.22b)$$

$$\sigma^{n\beta\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\lambda = -2\eta^{n\lambda} \quad , \quad (6.22c)$$

chega-se, após algumas manipulações, à:

$$ii_a = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) (-2) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 q_{5n} \cdot p_3^n \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1)^2 \dots \quad (6.23)$$

Com isso, integrando sobre as "θ's" (com exceção de θ<sub>1</sub>), obtem -se:

$$ii_a = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_1) 2 q_5 \cdot p_3 p_1^2 \dots \quad (6.24)$$

Agora, quanto à parcela ii<sub>b</sub>, basta integrar em θ<sub>3</sub> para mostrar que sua contribuição é nula, devido à presença da delta δ<sup>2</sup>(θ<sub>4</sub> - θ<sub>3</sub>). Assim:

$$ii = ii_a \quad . \quad (6.25)$$

$$iii = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2)$$

$$e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma_{\bar{\theta}}^{n_{\bar{\theta}}}} p_{3n} \quad e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma_{\bar{\theta}}^{n_{\bar{\theta}}}} p_{1n} \quad \dots \quad (6.26)$$

Ou, usando a delta  $\delta^2(\theta_4 - \theta_3)$  para substituir a primeira exponencial por 1, e expandindo a segunda,

$$\begin{aligned} \text{iii} = & \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) \\ & [1 - 2(\theta_3 - \theta_1)^\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^{n_{\alpha}} \bar{\theta}_5^{\dot{\alpha}} p_{1n} + \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2)] \dots \quad (6.27) \end{aligned}$$

Ou ainda, tendo em vista as integrações sobre as variáveis anti-quirais  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ ,

$$\begin{aligned} \text{iii} = & \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) \\ & \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2) \dots \quad (6.28) \end{aligned}$$

Logo, realizando as integrações sobre as "θ's" (com exceção de  $\theta_1$ ),

$$\text{iii} = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_1) q_5^2 p_1^2 \dots \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \text{iv} = & \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^{n_{\alpha}} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\ & e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma_{\bar{\theta}}^{n_{\bar{\theta}}}} p_{3n} \quad e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma_{\bar{\theta}}^{n_{\bar{\theta}}}} p_{1n} \quad \dots \\ = & \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^{n_{\alpha}} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\ & [1 - 2(\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\beta}^{\dot{\bar{\theta}}_2} p_{3\dot{\beta}} + \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2)] [1 - 2(\theta_3 - \theta_1)^\gamma \sigma_{\gamma\gamma}^{m_{\bar{\theta}}}] p_{1m} \end{aligned}$$

$$+ \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^{-2} (-p_1^2) \dots \quad (6.30)$$

Ou, retendo os termos proporcionais a  $\bar{\theta}_2^{-2} \bar{\theta}_5^{-2}$ ,

$$\begin{aligned} iv = iv_a + iv_b = & \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \cdot \\ & \bar{\theta}_2^{\dot{\alpha}} q_{1n} (-2) (\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\ell \bar{\theta}_2^{\dot{\beta}} p_{3\ell} \delta^2(\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^{-2} (-p_1^2) \dots + \\ & + \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) (-2) (\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \bar{\theta}_5^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\ & \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^{-2} (-p_3^2) (-2) (\theta_3 - \theta_1)^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^m \bar{\theta}_5^{\dot{\gamma}} p_{1m} \dots \quad (6.31) \end{aligned}$$

Realizando cálculos similares aos de ii, encontra-se que

$$iv_a = 0 \quad (6.32)$$

e

$$iv_b = \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_1) \hat{\Psi}(p_3, \theta_1) (-2) q_1 \cdot p_1 p_3^2 \dots \quad (6.33)$$

Assim,

$$iv = iv_b \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} v = & \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\ & 2(\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\ell (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\beta}} q_{5\ell} e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^m} \bar{\theta}_2 p_{3m} \\ & e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^\theta} \bar{\theta}_5 p_{1\theta} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2 (\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\
 &\quad 2 (\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\beta}^{\dot{\ell}} (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\beta}} q_{5\ell} [1 - 2 (\theta_4 - \theta_3)^\gamma \sigma_{\gamma\gamma}^m \bar{\theta}_2^{\dot{\gamma}}] p_{3m} \\
 &+ \delta^2 (\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2) [1 - 2 (\theta_3 - \theta_1)^\mu \sigma_{\mu\mu}^{\not{\theta}} \bar{\theta}_5^{\dot{\mu}}] p_{1\theta} \\
 &+ \delta^2 (\theta_3 - \theta_1) \bar{\theta}_5^2 (-p_1^2) ] \dots \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

Ou, considerando apenas os termos que sobreviverão às integrações nas variáveis anti-quirais  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ ,

$$\begin{aligned}
 v &= \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) 2 (\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \\
 &\quad 2 (\theta_4 - \theta_3)^\beta \sigma_{\beta\beta}^{\dot{\ell}} (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\beta}} q_{5\ell} (-2) (\theta_4 - \theta_3)^\gamma \sigma_{\gamma\gamma}^m \bar{\theta}_2^{\dot{\gamma}} p_{3m} (-2) \\
 &\quad (\theta_3 - \theta_1)^\mu \sigma_{\mu\mu}^{\not{\theta}} \bar{\theta}_5^{\dot{\mu}} p_{1\theta} \dots \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

Ou, através das propriedades (6.22a) e (6.22b),

$$\begin{aligned}
 v &= \int \dots \hat{\Psi}(-p_1, \theta_1) \hat{\Psi}(p_2, \theta_3) \hat{\Psi}(p_3, \theta_4) \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\gamma\beta} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\mu}} \sigma_{\alpha\alpha}^n \sigma_{\beta\beta}^{\dot{\ell}} \sigma_{\gamma\gamma}^m \\
 &\quad \sigma_{\mu\mu}^{\not{\theta}} q_{1n} q_{5\ell} p_{3m} p_{1\theta} \delta^2 (\theta_1 - \theta_3) \delta^2 (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) \delta^2 (\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 \dots \tag{6.37}
 \end{aligned}$$

Não obstante, pode-se provar que

$$\epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\gamma\beta} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\mu}} \sigma_{\alpha\alpha}^n \sigma_{\beta\beta}^{\dot{\ell}} \sigma_{\gamma\gamma}^m \sigma_{\mu\mu}^{\not{\theta}} = - 2 \eta^{n\ell} \eta^{m\theta} \tag{6.38}$$

Com isso,



$$v = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) (-2) (q_1 \cdot q_5) (p_3 \cdot p_1) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 \dots \quad (6.39)$$

isto é, realizando as integrações sobre as variáveis de Grassmann (menos sobre  $\theta_1$ ),

$$v = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_1) (-2) (q_1 \cdot q_5) (p_3 \cdot p_1) \dots \quad (6.40)$$

$$vi = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) 2(\theta_1 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} q_{1n} \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{\bar{k}\bar{\theta}}_2 p_{3\bar{k}}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{m\bar{\theta}}_5 p_{1m}} \dots = 0 \quad (6.41)$$

pois

$$\int \dots d^2\bar{\theta}_2 \dots (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5)^{\dot{\alpha}} \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) = 0 \quad (6.42)$$

$$vii = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}}_2 p_{3n}} e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}}_2 p_{1n}} \dots \quad (6.43)$$

Ou, aproveitando a presença da delta  $\delta^2(\theta_1 - \theta_3)$ ,

$$vii = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2)$$

$$e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_3} p_{3n}} \dots \quad (6.44)$$

Expandindo a exponencial e retendo os termos que sobre viverão às integrações sobre  $\bar{\theta}_2$  e  $\bar{\theta}_5$ ,

$$\begin{aligned} \text{vii} &= \int \dots \check{\Psi}(-p_1, \theta_1) \check{\Psi}(p_2, \theta_3) \check{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\ &\quad \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \bar{\theta}_2^2 (-p_3^2) \dots = \\ &= \int \dots \check{\Psi}(-p_1, \theta_1) \check{\Psi}(p_2, \theta_1) \check{\Psi}(p_3, \theta_1) (-q_1^2) (-p_3^2) \dots \quad (6.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{viii} &= \int \dots \check{\Psi}(-p_1, \theta_1) \check{\Psi}(p_2, \theta_3) \check{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\ &\quad 2(\theta_4 - \theta_3)^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{n\cdot} (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2)^{\dot{\alpha}} q_{5n} e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} \\ &\quad e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n}} \dots = 0 \quad , \quad (6.46) \end{aligned}$$

graças à propriedade (6.42).

$$\begin{aligned} \text{ix} &= \int \dots \check{\Psi}(-p_1, \theta_1) \check{\Psi}(p_2, \theta_3) \check{\Psi}(p_3, \theta_4) \delta^2(\theta_1 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) (-q_1^2) \\ &\quad \delta^2(\theta_4 - \theta_3) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) (-q_5^2) e^{-2(\theta_4 - \theta_3) \sigma^{n\bar{\theta}_2} p_{3n}} \\ &\quad e^{-2(\theta_3 - \theta_1) \sigma^{n\bar{\theta}_5} p_{1n}} \dots = 0 \quad , \quad (6.47) \end{aligned}$$

pois

$$\int d^2\bar{\theta}_2 \delta^2(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_5) \delta^2(\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_2) = 0 \quad . \quad (6.48)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(III)} &= i + ii + \dots + ix = \int \dots \tilde{\Psi}(-p_1, \theta_1) \tilde{\Psi}(p_2, \theta_3) \tilde{\Psi}(p_3, \theta_4) \\ & [p_1^2 p_3^2 + 2 q_5 \cdot p_3 p_1^2 + q_5^2 p_1^2 - 2q_1 \cdot p_1 p_3^2 \\ & - 2 q_1 \cdot q_5 p_1 \cdot p_3 + q_1^2 p_3^2] \dots \quad . \quad (6.49) \end{aligned}$$

Assim, tendo em vista (6.11) e realizando as integrações sobre os quadrimomentos  $q_2, q_3, q_6$  e  $p_2$ , com a ajuda das deltas, finalmente chega-se à:

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(III)} &= \int d^2\theta \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} 2^5 (ig)^5 \tilde{\Psi}(-p_1, \theta) \tilde{\Psi}(p-p_3, \theta) \tilde{\Psi}(p_3, \theta) \\ & F(p_1, p_3) \quad , \quad (6.50) \end{aligned}$$

onde  $F(p_1, p_3)$ , dada por

$$\begin{aligned} F(p_1, p_3) &= - \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_5}{(2\pi)^8} \left\{ \frac{p_1^2 p_3^2 + 2q_5 \cdot p_3 p_1^2 + \right. \\ & \left. + q_5^2 p_1^2 - 2q_1 \cdot p_1 p_3^2 - 2q_1 \cdot q_5 p_1 \cdot p_3 + q_1^2 p_3^2}{[(q_1 - p_1)^2 + |m|^2] [(p_3 + q_5)^2 + |m|^2] [(q_1 - q_5 - p_3)^2 + |m|^2] [(q_1 - q_5 - p_1)^2 + |m|^2]} \right\} \quad , \quad (6.51) \end{aligned}$$

é uma função bem definida matematicamente dos quadrimomentos externos  $p_1$  e  $p_3$ , como pode ser constatado de sua expressão, através da contagem das potências de  $q_1$  e  $q_5$  no integrando.

## APÊNDICE A

### REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DO GRUPO DE LORENTZ - NOTAÇÃO

A álgebra de Lie dos geradores  $M^{\ell m}$  do Grupo de Lorentz Homogêneo - GLH - ( $\ell, m = 0, 1, 2, 3$ ) é dada por:

$$[M_{\ell m}, M_{pq}] = i(\eta_{\ell p} M_{mp} - \eta_{mp} M_{\ell q} + \eta_{mq} M_{\ell p} - \eta_{\ell q} M_{mp}) \quad , \quad (A.1)$$

onde  $M_{\ell m} = -M_{m\ell}$  e  $\eta_{\ell m} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica.

Uma realização desta álgebra é obtida em termos dos elementos  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  da álgebra de Clifford sobre o espaço de Minkowski. As " $\gamma$ 's" satisfazem à relação

$$\{\gamma^\ell, \gamma^m\} = 2\eta^{\ell m} I \quad . \quad (A.2)$$

Pode-se demonstrar que

$$M_{\ell m} = \frac{1}{4i} [\gamma_\ell, \gamma_m] \quad (A.3)$$

satisfaz (A.1) tendo em vista (A.2). Os elementos do grupo de Lie  $S(\Lambda)$  são parametrizados na forma

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= e^{\frac{i}{2} \lambda_{\ell m} M^{\ell m}} \\ &= e^{\frac{1}{8} \lambda_{\ell m} [\gamma^\ell, \gamma^m]} \quad , \quad (A.4) \end{aligned}$$

onde  $\lambda_{\ell m} = -\lambda_{m\ell}$  são seis parâmetros essenciais que caracterizam

uma rotação de Lorentz e  $(\Lambda^{\ell}_{\ m})$  é a matriz de transformação de Lorentz que satisfaz:  $\eta_{\ell m} \Lambda^{\ell}_{\ p} \Lambda^m_{\ q} = \eta_{pq}$ . Pode-se verificar que

$$\begin{aligned} [M^{\ell m}, \gamma^n] &= -(\Sigma^{\ell m})^n_{\ p} \gamma^p \\ &= i (\eta^{\ell m} \gamma^n - \eta^{mn} \gamma^{\ell}) \end{aligned} \quad (A.5)$$

e

$$\gamma^{\ell} = \Lambda^{\ell}_{\ m} S(\Lambda) \gamma^m S^{-1}(\Lambda) \quad (A.6)$$

Sendo que a última nos mostra que os " $\gamma^{\ell}$ 's" são "invariantes" perante rotação de Lorentz e " $\ell$ " é um índice de quadri-vetor.

Uma representação irredutível de  $\gamma^{\ell}$  pode ser obtida em termos de matrizes complexas  $4 \times 4$ . Assim sendo, nós obtemos uma representação do GLH que atua no espaço espinorial complexo, conhecido por Espaço Espinorial de Dirac.  $S(\Lambda)$  atua em quadriespinores  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} (x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (A.7)$$

$$\det S(\Lambda) = 1 \quad (A.8)$$

Uma representação conveniente para as " $\gamma^{\ell}$ 's" é a representação de Weyl definida por:

$$\gamma^{\ell} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\ell} \\ \bar{\sigma}^{\ell} & 0 \end{pmatrix} \quad (A.9)$$

onde  $\sigma^{\ell}$  e  $\bar{\sigma}^{\ell}$  são iguais a

$$\sigma^{\ell} = (I, \vec{\sigma}) \quad (A.10a)$$

$$\bar{\sigma}^{\ell} = (\mathbf{I}, -\vec{\sigma}) \quad (\text{A.10b})$$

onde  $\vec{\sigma}$  são as matrizes de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Portanto, explicitamente,

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12a})$$

$$\gamma^k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12b})$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_5 &\equiv -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \\ &= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \end{aligned} \quad (\text{A.12c})$$

A matriz de conjugação de carga  $C$  é dada por:

$$C = -\gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = -C^T = -C^{*-1}. \quad (\text{A.13})$$

E temos que

$$C^{-1} \gamma^{\ell} C = -\gamma^{\ell T} \quad (\text{A.14a})$$

e

$$C^{-1} \gamma^5 C = \gamma_5^T. \quad (\text{A.14b})$$

Na representação de Weyl  $S(\Lambda)$  adquire a forma:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} S_1(\Lambda) & 0 \\ 0 & S_1^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$S_1(\Lambda) = e^{-\frac{1}{2} \lambda_{\ell m} \sigma^{\ell m}} \quad , \quad (\text{A.16a})$$

$$S_1^{-1\dagger}(\Lambda) = e^{-\frac{1}{2} \lambda_{\ell m} \bar{\sigma}^{\ell m}} \quad (\text{A.16b})$$

e

$$\det S_1(\Lambda) = \det S_1^{-1\dagger}(\Lambda) = 1 \quad ; \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\sigma^{\ell m} = \frac{1}{4} (\sigma^{\ell} \bar{\sigma}^m - \sigma^m \bar{\sigma}^{\ell}) \quad , \quad (\text{A.18a})$$

$$\bar{\sigma}^{\ell m} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^{\ell} \sigma^m - \bar{\sigma}^m \sigma^{\ell}) \quad . \quad (\text{A.18b})$$

Os geradores  $i\sigma^{\ell m}$  e  $i\bar{\sigma}^{\ell m}$ , individualmente, satisfazem (A.1).  $S_1$  e  $S_1^{-1\dagger}$  são duas representações matriciais inequivalentes  $D(\frac{1}{2}, 0)$  e  $D(0, \frac{1}{2})$ , respectivamente — de  $SL(2, C)$  (isomorfo a  $SO(3, 1)$ ) que é o G.L.H. .

Pode-se mostrar que  $S_1 \sim S_1^{-1T}$  e  $S_1^* \sim S_1^{-1\dagger}$  ("~" equivalente). Verifica-se que

$$S_1 = \sigma_2 S_1^{-1T} \sigma_2 \quad , \quad (\text{A.19a})$$

$$S_1^* = \sigma_2 S_1^{-1\dagger} \sigma_2 \quad . \quad (\text{A.19b})$$

Na representação de Weyl  $\psi \in [D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})]$  se escreve como

$$\psi = \begin{pmatrix} (\chi_\alpha) \\ (\bar{\psi}^{\dot{\beta}}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2 \\ \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2} \end{matrix} \quad , \quad (\text{A.20})$$

de modo que, sob uma transformação de Lorentz Homogênea, temos as transformações:

$$x' = S_1 x \quad (\text{A.21a})$$

ou, se  $S_1 \equiv (S_{1\alpha}^{\beta})$  ,

$$x'_{\alpha} = S_{1\alpha}^{\beta} x_{\beta} \quad (\text{A.21b})$$

e  $\bar{\psi}' = S_1^{-1\dagger} \bar{\psi}$  (A.22a)

ou  $\bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = (S_1^{-1*})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}$  . (A.22b)

De

$$x' = S_1 x = \sigma_2 S_1^{-1T} \sigma_2 x \quad (\text{A.23})$$

encontra-se

$$(\sigma_2 x')^T = (\sigma_2 x)^T S_1^{-1} \quad (\text{A.24})$$

que nos leva à relação

$$(\sigma_2 x')^T \eta' = (\sigma_2 x)^T \eta \quad (\text{A.25})$$

se

$$\eta' = S_1 \eta \quad (\text{A.26})$$

A identidade (A.24), pois, sugere a definição de  $\chi^{\alpha}$  e a introdução do tensor  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  para subir e descer os índices, isto é:

$$(\chi^{\alpha}) \equiv i\sigma_2 (\chi_{\alpha}) \quad (\text{A.27})$$



ou

$$\chi^\alpha \equiv \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta \quad (\text{A.28})$$

onde

$$(\epsilon^{\alpha\beta}) \equiv i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Analogamente,

$$(\sigma_2 \bar{\psi}')^T = (\sigma_2 \bar{\psi})^T S_1^\dagger \quad (\text{A.30})$$

e desta podemos definir

$$(\bar{\psi}_\alpha^\bullet) \equiv -i \sigma_2 \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.31})$$

ou

$$\bar{\psi}_\alpha^\bullet \equiv \epsilon_{\alpha\beta}^\bullet \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.32})$$

onde

$$(\epsilon_{\alpha\beta}^\bullet) \equiv -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Os tensores métricos  $\epsilon_{\alpha\beta}$  e  $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  são definidos como os inversos de  $\epsilon^{\alpha\beta}$  e  $\epsilon_{\alpha\beta}^\bullet$ , respectivamente. Ou seja,

$$\epsilon_{\alpha\lambda} \epsilon^{\lambda\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{A.34a})$$

e

$$\epsilon_{\alpha\lambda}^\bullet \epsilon^{\dot{\lambda}\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.34b})$$

e destas segue que

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = (\epsilon_{\alpha\beta}^\bullet) = -i\sigma_2 \quad (\text{A.35a})$$

e

$$(\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = (\epsilon^{\alpha\beta}) = i\sigma_2 \quad (\text{A.35b})$$

Das definições de  $\chi^\alpha$  e  $\bar{\psi}_\alpha$ , pode-se verificar, por meio de (A.19a e b) e (A.21a e b), que estes se transformam como

$$\chi'^{\alpha} = S_1^{-1}{}^{\alpha}{}_{\beta} \chi^{\beta} \quad , \quad (\text{A.36a})$$

$$\bar{\psi}'_{\alpha} = S_1^{*\dot{\beta}}{}_{\alpha} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad . \quad (\text{A.36b})$$

Facilmente demonstra-se que  $\chi^\alpha \eta_\alpha$  e  $\bar{\psi}_\alpha \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$  são invariantes de Lorentz. Definem-se os produtos  $\chi\eta$  e  $\bar{\psi}\bar{\xi}$  da seguinte maneira:

$$\chi\eta \equiv \chi^\alpha \eta_\alpha = - \chi_\alpha \eta^\alpha = \eta^\alpha \chi_\alpha = \eta\chi \quad (\text{A.37a})$$

$$\bar{\psi}\bar{\xi} \equiv \bar{\psi}_\alpha \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\xi}_\alpha = \bar{\xi}_\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}\bar{\psi} \quad (\text{A.37b})$$

Facilmente também demonstra-se que  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\epsilon^{\alpha\beta}$ ,  $\epsilon_{\alpha\dot{\beta}}$ ,  $\epsilon^{\dot{\alpha}\beta}$ ,  $\delta_\alpha^\beta$  e  $\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$  são tensores "invariantes" de Lorentz.

Agora, de (A.15) temos que

$$S(\Lambda) = \left( \begin{array}{c|c} (S_{1\alpha}{}^\beta) & 0 \\ \hline 0 & (S_1^{-1}{}^{\dot{\beta}}{}_\alpha) \end{array} \right) \quad ; \quad (\text{A.38a})$$

$$S^{-1}(\Lambda) = \left( \begin{array}{c|c} (S_{1\alpha}^{-1}{}^\beta) & 0 \\ \hline 0 & (S_1^{\dot{\beta}}{}_\alpha) \end{array} \right) \quad ; \quad (\text{A.38b})$$

$$S_Y^m S^{-1} = i \left( \begin{array}{c|c} 0 & S_1^{\sigma\lambda} S_1^{\dagger} \\ \hline S_1^{-1}{}^{\dagger}{}_{\sigma\lambda} S_1^{-1} & 0 \end{array} \right) \quad . \quad (\text{A.38c})$$

E da relação  $\gamma^\ell = \Lambda^\ell_m S(\Lambda) \gamma^m S^{-1}(\Lambda)$ , com o intuito de ajeitar os índices na notação de duas componentes, devemos escrever

$$\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{\alpha\dot{\beta}}) = (-I, \vec{\sigma}) \quad , \quad (\text{A.39a})$$

$$\bar{\sigma}^\ell = (\bar{\sigma}^\ell^{\dot{\alpha}\beta}) = (-I, -\vec{\sigma}) \quad . \quad (\text{A.39b})$$

Assim,

$$\gamma^\ell = i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\ell_{\alpha\dot{\beta}}) \\ \hline (\bar{\sigma}^\ell^{\dot{\alpha}\beta}) & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.40})$$

O espinor de Dirac adjunto é obtido por

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 &= -\psi^\dagger \gamma_0 = (-i) (\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \psi^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i (\psi^\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

E o espinor de Majorana, definido por  $\psi_M^C = \psi_M$ , na representação de Weyl, é dado por<sup>(\*)</sup>

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \hline -\dot{\bar{\chi}} \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{A.42})$$

pois

$$\bar{\psi}_M^T = -i \begin{pmatrix} \chi^\alpha \\ \hline \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

---

(\*) Se o espinor  $\psi$  satisfaz à equação de Dirac para uma partícula de carga  $e$ , o espinor  $\psi^C$  satisfaz à mesma equação para uma partícula de carga  $-e$ .

e

$$\begin{aligned} \psi_M^C \equiv C \bar{\psi}_M^T &= \begin{pmatrix} -i\sigma_2 (\chi^\alpha) \\ i\sigma_2 (\bar{\chi}_\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \psi_M^{(*)} \end{aligned} \quad (A.44)$$

---

(\*) Na representação de Weyl o operador conjugação de carga é dado pela expressão (A.13),  $C = -\gamma^0 \gamma_2$ .

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO LOCAL EM  $\theta, \bar{\theta}$  PARA  $\Sigma_2^{(0)}$

O diagrama  $\Sigma_2^{(0)}$ , que abordamos no quarto capítulo, bem como os demais computados neste trabalho, têm em suas expressões finais uma única integração nas variáveis de Grassmann (" $\theta$ 's"). No terceiro capítulo, na computação dos diagramas da aproximação em cadeia, vimos, por meio de integrações por partes, que todas as deltas das " $\theta$ 's" podem ser liberadas e, portanto, todas podem ser integradas, com exceção de uma. Neste Apêndice mostraremos, através de cálculos explícitos para  $\Sigma_2^{(0)}$  que os resultados aparentemente não locais obtidos por meio de nossa técnica podem na verdade ser expressos localmente nas " $\theta$ 's".

A expressão encontrada para  $\Sigma_2^{(0)}$  é a de número (4.14) e queremos chegar à de número (4.15) que é local

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^8} \hat{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}_1) \hat{\Psi}(p', \theta_2) \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} e^{-2\theta_2^\sigma \bar{\theta}_1^\rho p_\rho} \delta^4(-p + q_1 - q_2) \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad (B.1)$$

Das expressões (4.6a), (4.6b), (4.8a) e (4.8b), pode-se concluir que

$$\tilde{\Psi}^\dagger(p, \bar{\theta}_1) = e^{\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 p_n} \tilde{\Phi}^\dagger(p, \theta_1, \bar{\theta}_1) \quad , \quad (\text{B.2a})$$

$$\tilde{\Psi}(p', \theta_2) = e^{\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 p'_n} \tilde{\Phi}(p', \theta_2, \bar{\theta}_2) \quad . \quad (\text{B.2b})$$

Substituindo estas expressões em (B.1), encontra-se que

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(0)} &= (ig)^2 \int d^2\bar{\theta}_1 d^2\theta_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^8} \tilde{\Phi}^\dagger(p, \theta_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\Phi}(p', \theta_2, \bar{\theta}_2) \\ &\quad \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} e^{(\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 + \theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) p_n} \\ &\quad \delta^4(-p + q_1 - q_2) \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad . \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Mas como sabemos

$$\delta^4(-p + q_1 - q_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x_1 e^{i(-p + q_1 - q_2) x_1} \quad (\text{B.4a})$$

$$\delta^4(p' - q_1 + q_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x_2 e^{i(p' - q_1 + q_2) x_2} \quad (\text{B.4b})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(0)} &= (ig)^2 \int d^6\bar{s}_1 d^6s_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^{16}} e^{-ipx_1} \tilde{\Phi}^\dagger(p, \theta_1, \bar{\theta}_1) \\ &\quad e^{ip'x_2} \tilde{\Phi}(p', \theta_2, \bar{\theta}_2) \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \\ &\quad e^{(\theta_1 \sigma^{n\bar{\theta}}_1 + \theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_2 - 2\theta_2 \sigma^{n\bar{\theta}}_1) p_n} \cdot e^{i(x_1 - x_2)(q_1 - q_2)} \quad , \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

ou, das definições das transformadas de Fourier de  $\Phi(z)$  e  $\Phi^\dagger(z)$ , (3.11a) e (3.11b),

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^6 \bar{s}_1 d^6 s_2 \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \phi^\dagger(x_1, \theta_1, \bar{\theta}_1) \phi(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2) \left. \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \left\{ e^{-i(\theta_1 \sigma^{\bar{n}}_{\theta_1} + \theta_2 \sigma^{\bar{n}}_{\theta_2} - 2\theta_2 \sigma^{\bar{n}}_{\theta_1}) \partial_1 \ln} e^{i(x_1 - x_2)(q_1 - q_2)} \right\} \right\} \quad (B.6)$$

ou ainda,

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^6 \bar{s}_1 d^6 s_2 \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \phi^\dagger(x_1, \theta_1, \bar{\theta}_1) \phi(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2) \left. \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \left\{ D_1^2 \bar{D}_2^2 \delta^4(\theta_1 - \theta_2) e^{i(x_1 - x_2)(q_1 - q_2)} \right\} = \right. \\ (ig)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \phi^\dagger(x_1, \theta_1, \bar{\theta}_1) \phi(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2) \left. \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \delta^4(\theta_1 - \theta_2) e^{i(x_1 - x_2)(q_1 - q_2)} \right\} \quad (B.7)$$

Utilizando novamente as expressões das transformadas , (3.11a) e (3.11b), segue

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \frac{d^4 p d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 p'}{(2\pi)^{16}} \tilde{\phi}^\dagger(p, \theta_1, \bar{\theta}_1) \tilde{\phi}(p', \theta_2, \bar{\theta}_2) \left. \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \delta^4(\theta_1 - \theta_2) e^{ix_1(-p+q_1-q_2)} e^{ix_2(p'-q_1+q_2)} \right\} \quad (B.8)$$

E de (3.4a) e (3.4b),

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \frac{d^4p d^4q_1 d^4q_2 d^4p'}{(2\pi)^8} \bar{\psi}^\dagger(p, \theta_1, \bar{\theta}_1) \psi(p', \theta_2, \bar{\theta}_2) \frac{-i}{q_1^2 + |m|^2} \cdot \frac{-i}{q_2^2 + |m|^2} \delta^4(\theta_1 - \theta_2) \delta^4(-p + q_1 - q_2) \delta^4(p' - q_1 + q_2) \quad (B.9)$$

Finalmente, chega-se, após as integrações sobre  $\theta_2, \bar{\theta}_2, p'$  e  $q_2$ , à

$$\Sigma_2^{(0)} = (ig)^2 2 \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}^\dagger(p, \theta, \bar{\theta}) \psi(p, \theta, \bar{\theta}) \pi(p^2, |m|^2) \quad , \quad (B.10)$$

que é a expressão (4.15). Cálculos similares podem ser realizados para todos os outros diagramas dos capítulos quatro, cinco e seis.



REFERÊNCIAS

- (1) - P.P. Srivastava: "Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction"; 1ª edição, Adam Hilger, Bristol and Boston, (1986).
- (2) - V.O. Rivelles: "Supersimetria-Supergravidade"; IV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Itatiaia (1983) - Sociedade Brasileira de Física.
- (3) - J. Wess e B. Zumino: "Supergauge Transformations in Four Dimensions"; Nucl. Phys. B70 (1974) 39.
- (4) - A. Salam e J. Strathdee: "Supergauge Transformations" ; Nucl. Phys. B76 (1974) 477.
- (5) - S. Ferrara, J. Wess e B. Zumino: "Supergauge Multiplets and Superfields", Phys. Letters 51B (1974) 239.
- (6) - P.P. Srivastava: "Introduction to Supersymmetry and Supergravitation"; III School of Gravitation and Cosmology, Editado pela Sociedade Astronômica Brasileira (1983) 250.
- (7) - J. Wess e J. Bagger: "Supersymmetry and Supergravity"; 1ª edição, Princeton University Press, Princeton (1982).
- (8) - P.P. Srivastava: "Simplified Chiral Superfield Propagators for Chiral Constant Mass Superfields", CBPF, Notas de Física (1983).
- (9) - P.P. Srivastava: "On Functional Integral for Chiral Superfields"; Phys. Letters 149B (1984) 135.
- (10) - A.W. Smith: "Supersymmetry and Supergravity - Part I"; Publicado no Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (1983).
- (11) - C. Nash: "Relativistic Quantum Fields"; 1ª edição, Academic Press Inc., London, (1978).
- (12) - D. Lurié: "Particles and Fields"; 1ª edição, Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons, England , (1968).

- (13) - D.J. Amit: "Field Theory, The Renormalization Group, and Critical Phenomena"; International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill International Book Company, New York (1978).
- (14) - P. Ramond: "Field Theory - A Modern Primer"; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park (1981).
- (15) - C. Itzykson e J.B. Zuber: "Quantum Field Theory"; McGraw Hill International Book Company, New York (1980).
- (16) - J. Wess e B. Zumino: "A Lagrangian Invariant Under Super-gauge Transformations"; Phys. Letters 49B (1974) 52.
- (17) - J. Goity, T. Kugo e R.D. Peccei; "A Comment on the Nonrenormalization Theorem in Supersymmetric Gauge Theories"; Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik (dezembro, 1983).

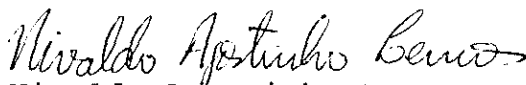
"ESTUDO DO TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO DO SUPER-POTENCIAL  
DO MODELO DE WESS-ZUMINO A NÍVEL DE 2 "LOOPS"  
NO CONTEXTO DE SUPERCAMPOS"

DJALMA MANOEL SOARES FILHO

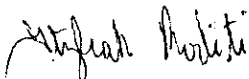
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Prem Prakash Srivastava - Presidente



Nivaldo Agostinho Lemos



Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, 30 de junho de 1987