

BARTOLOMEU DONATILA BONORINO FIGUEIREDO

UM ESTUDO DA INTERAÇÃO GRAVITACIONAL DE CAMPOS ESCALARES E  
ESPINORIAIS COM A TORÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO E  
COM A VORTICIDADE DA MATÉRIA

TESE DE

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1987

Agradecimentos:

Ao professor Ivano Damião Soares, pela orientação deste trabalho, e ao professor Jayme Tiomno, pela co-orientação. A Helena de Souza Ferreira, pela datilografia. Aos colegas, professores e funcionários do CBPF.

## R E S U M O

O objetivo deste trabalho é o estudo de teoria de campos nos modelos cosmológicos do tipo Gödel da teoria de Einstein-Cartan. Para isso, primeiramente encontramos as soluções do tipo Gödel das equações de Einstein-Cartan, supondo que a fonte de curvatura do espaço é constituída ou por um fluido de Weyssenhoff e por um campo eletromagnético ou por um fluido de Weyssenhoff com pressão anisotrópica. A presença simultânea da torção e do campo eletromagnético (ou da pressão anisotrópica) permite a ocorrência de uma métrica circular diagonal e restrin<sup>te</sup> ou elimina a classe de métricas hiperbólicas que não apresentam curvas fechadas do tipo tempo.

A seguir, analisamos as soluções das equações de Klein-Gordon e de Dirac nesses espaços do tipo Gödel. Tratamos os campos escalar e espinorial como campos de teste que não interagem com qualquer campo eletromagnético. A partir de condições de contorno compatíveis com o caráter de partículas de teste, encontramos, para cada uma das classes de métricas do tipo Gödel, os espectros de energias e os intervalos de variação para os autovalores  $m$  do operador  $i\partial\bar{\partial}\phi$ . Obtemos os seguintes resultados gerais:

- a) Nos espaços com métricas circulares, os espectros de energias são discretos e os valores de  $m$  são limitados inferior e superiormente.
- b) Nos espaços com métrica de Som-Raychaudhuri, os espectros de energia também são discretos, mas  $m$  apresenta somente um limite inferior (energias positivas), ou somente um limite superior (energias negativas).
- c) Nos espaços com métricas hiperbólicas, há dois casos a serem considerados:

- 1º) Para métricas sem curvas fechadas do tipo tempo, os espectros são mistos, com energias discretas na parte inferior e com energias contínuas na parte superior.

29) Para métricas com curvas fechadas do tipo tempo, os espectros para o campo escalar são discretos. O campo espinorial, sob certas circunstâncias, pode apresentar um espectro misto, mas com as energias contínuas localizadas na região inferior.

Para as soluções com energias contínuas, os valores de  $m$  não são limitados, nem inferior nem superiormente. Para energias discretas, ocorrem limitações semelhantes às do item b).

Mostramos também que o movimento geodético de uma partícula de teste pode ser considerado como o análogo clássico correspondente ao campo escalar. As partículas com movimentos confinados, correspondem a soluções escalares com energias discretas; as partículas com movimentos ilimitados, correspondem a soluções com energias contínuas. Os valores quânticos para  $m$  são constituídos por todos os números inteiros contidos no intervalo contínuo que determina os valores possíveis da constante de movimento clássica associada à coordenada  $\phi$ .

Discutimos ainda certas assimetrias das correntes de neutrinos e antineutrinos, resultantes da rotação e da torção do espaço. Essas assimetrias dependem da relação entre os valores da torção e da rotação e, para um caso particular, se anulam.

Finalmente analisamos as soluções da equação de Klein-Gordon para um campo escalar acoplado simultaneamente à gravitação do modelo de Som-Raychaudhuri e a um campo magnético constante de origem cosmológica. Encontramos uma assimetria entre estados de energia positiva e negativa, para partículas com um dado sinal de carga. Este efeito não apresenta análogo clássico.

## Í N D I C E

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	.ii
RESUMO .....	iii
<u>CAPÍTULO 1</u> - INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO 2</u> - A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN .....	8
2.1 - INTRODUÇÃO .....	8
2.2 - A GEOMETRIA DE RIEMANN-CARTAN .....	8
2.3 - A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN .....	13
2.4 - AS EQUAÇÕES DE DIRAC EM E-C .....	16
2.5 - O CAMPO ESCALAR EM E-C .....	21
2.6 - O CAMPO ELETROMAGNÉTICO E AS EQUAÇÕES DE MAXWELL EM E-C.	24
2.7 - O FLUIDO DE WEYSSENHOFF-RAABE EM E-C .....	26
<u>CAPÍTULO 3</u> - MÉTRICAS DO TIPO GÜDEL EM EINSTEIN-CARTAN .....	30
3.1 - GENERALIDADES .....	30
3.2 - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-CARTAN-MAXWELL .....	32
3.3 - POTENCIAIS ELETROMAGNÉTICOS .....	42
3.4 - FLUIDO DE WEISSENHOFF COM PRESSÃO ANISOTRÓPICA .....	45
3.5 - VETORES DE KILLING .....	48
<u>CAPÍTULO 4</u> - EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON .....	50
4.1 - GENERALIDADES .....	50
4.2 - SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON .....	53
4.3 - ESPECTROS DE ENERGIA E NORMALIZAÇÃO .....	59
4.3.1 - Métricas Hiperbólicas .....	59
4.3.2 - Métricas Circulares .....	67
4.4 - LIMITES PARA AS MÉTRICAS DE SOM-RAYCHAUDHURI E MIN - KOWSKI .....	74
4.5 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS CLÁSSICOS .....	78
4.5.1 - Introdução .....	78
4.5.2 - Métricas Hiperbólicas .....	80
4.5.3 - Métrica de Som-Raychaudhuri .....	82
4.5.4 - Métricas Circulares .....	82

4.6 - OPERADORES COM ÁLGEBRA DE MOMENTUM ANGULAR .....	84
<u>CAPÍTULO 5</u> - EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS DO TIPO GÜDEL .....	87
5.1 - GENERALIDADES .....	87
5.2 - SOLUÇÕES GERAIS E OPERADORES $K_{(\pm)}$ .....	96
5.3 - ESPECTROS DE ENERGIA E NORMALIZAÇÃO .....	106
5.3.1 - Métricas Hiperbólicas .....	107
5.3.2 - Métricas Circulares .....	119
5.4 - LIMITES PARA A MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI .....	125
5.5 - ESPAÇO COM MÉTRICA DE MINKOWSKI .....	128
<u>CAPÍTULO 6</u> - ASSIMETRIAS NA CORRENTE FERMIÔNICA .....	131
6.1 - GENERALIDADES .....	131
6.2 - MÉTRICAS HIPERBÓLICAS .....	135
6.3 - MÉTRICAS CIRCULARES .....	142
<u>CAPÍTULO 7</u> - CONCLUSÕES .....	145
<u>APÊNDICE A</u> - ACOPLAMENTO DO CAMPO ESCALAR COM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO (MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI) .....	152
A.1 - GENERALIDADES .....	152
A.2 - MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI .....	155
<u>REFERÊNCIAS</u> .....	167

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nesta Introdução vamos apresentar algumas definições, delimitar o tema do presente trabalho e fixar certas notações.

Chamamos de métricas homogêneas do tipo Gödel àque - las cujos elementos de linha podem ser escritos como

$$ds^2 = [dt+H(r)d\phi]^2 - dr^2 - [D(r)d\phi]^2 - dz^2 \quad , \quad (1.1)$$

onde D e H são funções somente da coordenada r e satisfazem os critérios de homogeneidade do espaço-tempo <sup>(1)</sup>. De acordo com estes critérios, devemos ter

$$\frac{1}{D} \frac{d^2 D}{dr^2} = 4\ell^2 \quad , \quad \frac{1}{2D} \frac{dH}{dr} = \Omega \quad , \quad (1.2)$$

sendo  $\ell^2$  e  $\Omega$  constantes reais arbitrárias. Se interpretarmos as variáveis r,  $\phi$  e z como coordenadas cilíndricas, as soluções de (2) são (ver Capítulo 3)

$$D = \frac{\sinh \ell r}{2\ell} \quad , \quad H = \frac{\Omega}{\ell^2} \sinh^2 \ell r \quad . \quad (1.3)$$

As relações das constantes  $\Omega$  e  $\ell$  com os parâmetros físicos dependem da teoria usada para descrever o campo gravitacional e

do conteúdo material atribuído ao universo. No caso da teoria da relatividade geral (RG), essas relações são determinadas a partir das equações de Einstein,

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa t_{ij} \quad , \quad (1.4)$$

onde  $G_{ij}$  é o tensor de Einstein,  $g_{ij}$  é o tensor métrico,  $t_{ij}$  o tensor momentum-energia,  $\kappa$  a constante gravitacional e  $\Lambda$  a constante cosmológica. Nesta teoria,  $\Omega$  representa a rotação da matéria. Se postularmos, como Rebouças e Novello <sup>(2-4)</sup>, que a fonte de curvatura do espaço é constituído por um fluido perfeito e por um campo magnético na direção da rotação, as soluções de (2) são dadas por

$$\left. \begin{aligned} \kappa p &= \Omega^2 - \kappa \rho_{em} - \Lambda \\ \kappa \rho &= \Omega^2 + \kappa \rho_{em} + \Lambda \end{aligned} \right\} \implies \Omega^2 = \frac{\kappa(p+\rho)}{2} \quad (1.5a)$$

$$(1.5b)$$

$$2\ell^2 = \Omega^2 - \kappa \rho_{em} \quad (1.5c)$$

onde  $\rho$  é a densidade de matéria,  $p$  a pressão hidrostática do fluido e  $\rho_{em}$  a densidade de energia eletromagnética. Para assegurar a positividade da pressão e da densidade  $\rho$  e a validade da equação de estado  $\rho \geq p$ , a constante cosmológica deve pertencer ao intervalo

$$-\kappa \rho_{em} \leq \Lambda \leq \Omega^2 - \kappa \rho_{em} \quad . \quad (1.6)$$

A expressão (3c) mostra que, dependendo da razão entre  $\kappa \rho_{em}$  e  $\Omega^2$ ,  $\ell^2$  pode assumir valores positivos, negativos ou anular-se.



Isto nos permite agrupar as métricas do tipo Gödel em uma das três classes abaixo:

a) - Métricas Hiperbólicas: são aquelas em que  $\ell^2 > 0$ , ou seja,  $\ell$  é uma constante real e, por isso, D e H são expressos em termos de funções hiperbólicas, como em (3). Para estas métricas, escolheremos os seguintes intervalos de variação para as coordenadas

$$-\infty < t < \infty \quad , \quad 0 \leq r < \infty \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad , \quad -\infty < z < \infty . \quad (1.7)$$

No exemplo dado por (5), temos métricas hiperbólicas quando  $p+\rho > 2\rho_{em}$  e  $\Lambda \geq 0$ . Se  $\rho_{em} = p = 0$  e  $\Lambda = \Omega^2$ , temos a métrica de Gödel propriamente dita <sup>(5)</sup>.

b) - Métricas Circulares: assim serão denominadas as métricas com  $\ell^2 < 0$  ou, equivalentemente,  $\ell = i\lambda$  ( $\lambda = \text{real}$ ). As soluções da forma (3) podem, então, ser escritas em termos de funções trigonométricas:

$$D = \frac{\text{sen}2\lambda r}{2\lambda} \quad , \quad H = \frac{\Omega}{\lambda^2} \text{sen}^2\lambda r \quad . \quad (1.8)$$

Neste caso a coordenada r será interpretada como uma variável angular e, ao invés de (7), vamos adotar os intervalos

$$-\infty < t < \infty \quad , \quad -1 \leq \cos 2\lambda r \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad , \quad -\infty < z < \infty . \quad (1.9)$$

No exemplo acima, ocorrem métricas circulares quando  $p+\rho < 2\rho_{em}$  e  $\Lambda < 0$ .

c) - Métrica de Som-Raychaudhuri <sup>(6)</sup>: é aquela para a qual  $\ell^2 = 0$ . Nesse limite as expressões (3) assumem a forma

$$D = r \quad , \quad H = \Omega r^2 \quad , \quad (1.10)$$

com intervalos de variação para as coordenadas dados novamente por (7). Para as soluções (5), estas métricas correspondem a  $p+\rho = 2\rho_{em}$  e  $\Lambda \leq 0$ .

Neste trabalho, as denominações acima, estabelecidas com base no sinal do parâmetro  $\ell^2$ , serão mantidas, mesmo quando as hipóteses sobre o conteúdo material do universo ou sobre a teoria gravitacional não coincidirem com as do exemplo apresentado.

Consideremos agora a teoria de Einstein-Cartan(E-C). Esta teoria admite que a geometria do espaço-tempo é a de Riemann-Cartan, que basicamente se distingue da riemanniana pelo postulado segundo o qual a parte antissimétrica da afinidade  $\Gamma$  (ou seja, a torção  $\tau$ ) é diferente de zero:

$$\tau^k_{ij} = \frac{1}{2} (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \neq 0 \quad . \quad (1.11)$$

Na teoria de E-C, como formulada por Hehl <sup>(7)</sup>, as equações para o campo gravitacional são semelhantes às equações de Einstein, mas os tensores  $G_{ij}$  e  $t_{ij}$  não são mais simétricos e dependem da torção. Esta teoria constitui uma generalização da RG, coincidindo com aquela no limite de torção nula. Na realidade, os termos que contêm a torção são interpretados como correções, à relatividade geral, introduzidas pelo spin da matéria.

Supondo que a fonte de curvatura do espaço <sup>a</sup> é constitu

ida somente por um fluido com spin (ou fluido de Weyssenhoff), Teixeira, D. de Oliveira e Tiomno <sup>(8)</sup> encontraram soluções do tipo Gödel hiperbólicas e circulares para as equações de Einstein-Cartan. Certa classe dessas soluções hiperbólicas não admite a ocorrência de curvas fechadas do tipo tempo, contrariamente ao que se verifica na correspondente situação da RG. Entretanto, no limite de torção nula, obtemos apenas a métrica de Gödel propriamente dita. A fim de generalizar as métricas de Rebouças-Novello para o contexto de E-C, devemos acrescentar ao fluido de Weyssenhoff um campo eletromagnético ou um tensor de pressões anisotrópicas: esta é a tarefa preliminar do presente trabalho.

Por não apresentarem expansão, os modelos do tipo Gödel são inadequados para a descrição de nosso universo. Mas, a anisotropia da radiação cósmica de fundo <sup>(9)</sup> e a rotação dos aglomerados galácticos <sup>(10)</sup> sugerem que a rotação pode ser um parâmetro relevante para a descrição de eras passadas da evolução cósmica. Em consequência disto, um modelo cosmológico realístico deveria apresentar, simultaneamente, rotação e expansão. Embora os modelos do tipo Gödel não se incluam nesta categoria, a sua simplicidade nos permite determinar a influência da rotação sobre partículas de teste acopladas ao campo gravitacional. Um estudo dessa natureza, pode, além disso, revelar, no comportamento das partículas de teste, as diferenças correspondentes às diversas classes de métricas do tipo Gödel. Quanto ao estudo de geodésicas de partículas de prova, remetemos ao trabalho de tese de Calvão <sup>(11)</sup> e às referências ali contidas. O objetivo principal do nosso trabalho é analisar as soluções das equações de Klein-Gordon e de Dirac em espaços do tipo Gödel

com torção. Então, bastará anular a torção para que obtenhamos os resultados referentes às métricas riemannianas. No caso particular da métrica de Gödel, esses resultados devem reproduzir os das refs. (12-13). A abordagem do nosso tema obedecerá à ordem especificada abaixo.

No Capítulo 2, apresentamos uma revisão da teoria de Einstein-Cartan e das equações da física, nessa teoria, que serão trabalhadas nos capítulos seguintes. No Capítulo 3, iniciamos propriamente o nosso trabalho, com a integração das equações de Einstein-Cartan para métricas do tipo Gödel. Primeiramente, supomos que a fonte de curvatura é o fluido de Weyssenhoff mais um campo eletromagnético e, a seguir, substituímos o campo eletromagnético por um tensor de pressões anisotrópicas. No Capítulo 4, analisamos as soluções das equações de Klein-Gordon para uma partícula de teste sem acoplamento eletromagnético (algumas soluções acopladas a um campo eletromagnético estão no Apêndice A). Também estabelecemos algumas relações entre os nossos resultados e a natureza das órbitas de partículas clássicas que descrevem geodésicas nesses universos. O Capítulo 5 trata das soluções da equação de Dirac para cada uma das classes de métricas do tipo Gödel. No Capítulo 6, definimos um espaço de Fourier para as soluções espinoriais e analisamos as simetrias da corrente fermiônica ao longo da vorticidade. As Conclusões estão reunidas no Capítulo 7. O Apêndice A apresenta algumas soluções escalares com acoplamento eletromagnético, como já havíamos dito.

NOTAÇÕES: As convenções que usaremos com mais frequência são

as seguintes:

- 1)  $A := B$  e  $A =: B$  significam, respectivamente: "por definição A é igual a B" e "por definição B é igual a A".
- 2) Em  $A_{[ij\dots|k\ell\dots|m\dots]}$  os colchetes indicam antissimetriação dos índices contidos dentro deles, exceto dos que estão compreendidos entre as barras. Para indicar simetrização, usaremos parênteses, ao invés de colchetes.
- 3) A derivação covariante em relação à afinidade de Riemann-Cartan será denotada por  $\nabla$ , ao passo que derivada covariante riemanniana estará indicada por  $\tilde{\nabla}$ . As notações

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \quad A_{i,j} \quad \text{ou} \quad \partial_j A_i$$

designam a derivada parcial do objeto  $A_i$  em relação à coordenada  $x^j$ .

- 4) Um til significa que o objeto ao qual é superposto se refere a um espaço riemanniano. Assim,

$$\tilde{R}^k_{ijl} \quad \text{e} \quad \tilde{G}_{ij}$$

simbolizam os tensores de curvatura e de Einstein formados a partir do símbolo de Christoffel. Na ausência do til, essas quantidades se referem à geometria de Riemann-Cartan.

## CAPÍTULO 2

### A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos os resultados básicos de uma teoria gravitacional que chamaremos de teoria de Einstein-Cartan (E-C). Inicialmente expomos algumas relações geométricas dos espaços de Riemann-Cartan e, a seguir, usando essas relações e os postulados de Hehl, deduzimos, através do princípio variacional, as equações para o campo gravitacional, ou equações de Einstein-Cartan. Incluímos seções que tratam das equações de Dirac (2.4), Klein-Gordon (2.5) e de Maxwell (2.6), bem como do fluido de Weyssenhoff-Raabe (2.7) em Einstein-Cartan, porque esses temas são relevantes para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Nossa abordagem está baseada no formalismo tensorial. Para uma discussão do mesmo assunto na linguagem das formas diferenciais, remetemos aos trabalhos de Trautmann<sup>(14)</sup> ou às revisões que constam em Kuchowics<sup>(15)</sup>, Galvão<sup>(16)</sup> ou Fonseca<sup>(17)</sup>. Uma formulação espinorial da teoria de E-C é apresentada nos trabalhos de Datta<sup>(18)</sup>.

#### 2.2 - A GEOMETRIA DE RIEMANN-CARTAN

Seja

$$\delta C^k := -\Gamma^k_{ij} C^i dx^j \quad (2.1)$$

a lei para o deslocamento paralelo de um vetor contravariante  $C^k$  em uma variedade diferencial dotada de uma métrica real e simétrica,  $g_{ij} = g_{ji}$ , e de uma afinidade  $\Gamma^k_{ij}$ . Tal variedade constitui um espaço de Riemann-Cartan (que denotaremos por  $U_4$ ) se a torção  $\tau^k_{ij}$ , definida por

$$\tau^k_{ij} := \Gamma^k_{[ij]} \quad , \quad (2.2)$$

é diferente de zero e se a derivada covariante da métrica, relativamente à afinidade  $\Gamma^k_{ij}$ , é nula, isto é,

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il} = 0 \quad . \quad (2.3)$$

De (2) e (3) podemos escrever

$$\Gamma^i_{jk} = \{^i_{jk}\} - K^i_{jk} \quad , \quad (2.4a)$$

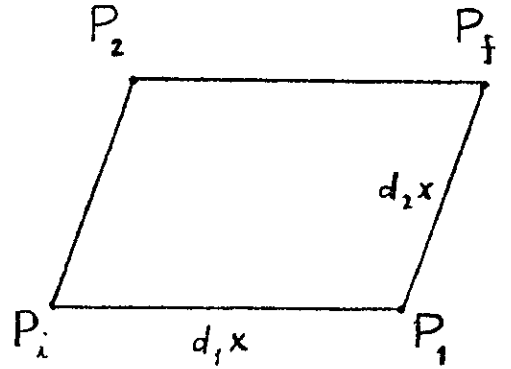
onde a primeira parcela à direita é o símbolo de Christoffel de segunda espécie e  $K^i_{jk}$  é o tensor de contorção

$$K_{ijk} := -\tau_{ijk} - \tau_{jki} + \tau_{kij} \quad . \quad (2.4b)$$

(Por convenção, o primeiro índice de  $\tau^i_{jh}$ ,  $K^i_{jh}$ , etc, estão sendo baixados para a primeira posição, enquanto Hehl os baixa para a última. Nossas convenções também diferem das de Hehl pelo uso de  $\Gamma^k_{ij}$  em (1) ao invés de  $\Gamma^k_{ji}$ .)

A expressão para o tensor de curvatura pode ser enconu

trada deslocando paralelamente um vetor  $C^k$  de um ponto inicial  $P_i$  a um ponto  $P_f$  infinitesimalmente próximo de  $P_i$  ao longo dos lados  $d_1x$  e  $d_2x$  do paralelogramo da figura ao lado. Se primeiro efetuarmos o transporte seguindo o ca-



minho  $P_i \rightarrow P_1 \rightarrow P_f$  e depois seguindo o caminho  $P_i \rightarrow P_2 \rightarrow P_f$ , encontraremos que em  $P_f$  a diferença em  $C^k$  deslocado segundo esses dois caminhos é dada por

$$C^k(P_f) \Big|_{P_i \rightarrow P_1 \rightarrow P_f} - C^k(P_f) \Big|_{P_i \rightarrow P_2 \rightarrow P_f} = - R^k_{\ell ij} C^\ell dH^{ij} \quad , \quad (2.5a)$$

onde

$$dH^{ij} := 2d_1x^{[i}d_2x^{j]} \quad (2.5b)$$

$$R^k_{\ell ij} := 2\Gamma^k_{\ell [j,i]} + 2\Gamma^k_{n[i]}\Gamma^n_{\ell |j]} \quad , \quad (2.6)$$

$R^k_{\ell ij}$ , definido em (6), é o tensor de curvatura e apresenta as propriedades (19):

$$R^k_{\ell (ij)} = R_{(k\ell)ij} = 0 \quad , \quad (2.7a)$$

$$R^k_{[\ell ij]} = -4\tau^n_{[ij]}\tau^k_{|\ell]n} - 2\nabla_{[j]}\tau^k_{|\ell i]} \quad , \quad (2.7b)$$

$$\nabla_{[m}R^k_{\ell |ij]} = -2\tau^n_{[ij]}R^k_{\ell |m]n} \quad . \quad (2.7c)$$

Usando a definição (6) e considerando os tensores  $U_k$ ,  $F_{\ell m}$  e



$M_{k\ell m}$ , podemos escrever os comutadores de suas derivadas covariantes antes de segunda ordem como

$$2 \nabla_{[i} \nabla_{j]} U_k = R^{\ell}_{kij} U_{\ell} - 2\tau^{\ell}_{ij} \nabla_{\ell} U_k \quad (2.8a)$$

$$2 \nabla_{[i} \nabla_{j]} F_{\ell m} = R^n_{lij} F_{nm} + R^n_{mij} F_{\ell m} - 2\tau^n_{ij} \nabla_n F_{\ell m} \quad (2.8b)$$

$$2 \nabla_{[i} \nabla_{j]} M_{m\ell m} = R^n_{kij} M_{n\ell m} + R^n_{lij} M_{knn} + R^n_{mij} M_{k\ell n} + \\ - 2 \tau^n_{ij} \nabla_n R_{k\ell m} \quad (2.8c)$$

Definamos agora o tensor de Ricci ( $R_{ij}$ ) e a curvatura escalar (R) através de

$$R_{ij} := R^{\ell}_{ij\ell} \quad , \quad R := R^i_i = g^{ij} R_{ij} \quad (2.9)$$

Então, a propriedade (7b) nos permite mostrar que a parte anti-simétrica do tensor de Einstein,

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad , \quad (2.10a)$$

é dada por

$$G_{[ij]} = R_{[ij]} = \hat{\nabla}_k T^k_{ij} \quad , \quad (2.10b)$$

onde o tensor de "torção modificada",  $T_{kij}$ , e o operador  $\hat{\nabla}_k$  foram definidos por

$$T_{kij} := \tau_{kij} + 2 \tau^{\ell}_{\ell[i} g_{j]k} \quad (2.11a)$$

$$\widehat{\nabla}_k := \nabla_k + 2 \tau^{\ell}_{\ell k} \quad . \quad (2.11b)$$

Por outro lado, contraindo os índices "i" com "k" e "l" com "m" na identidade Bianchi, (7c), encontramos

$$\widehat{\nabla}_k G^k_j + 2 \tau^m_{j\ell} G^{\ell}_m = T^{mnk} R_{knmj} \quad . \quad (2.12)$$

Podemos ainda substituir a afinidade  $\Gamma^k_{ij}$  pela expressão (4a) em (10a) para mostrar que o tensor de Einstein pode ser escrito como

$$\begin{aligned} G^{ij} = & \tilde{G}^{ij} + \widehat{\nabla}_{\ell} [T^{\ell ij} + T^{ij\ell} - T^{j\ell i}] + \\ & + \left\{ 4 T_{[m|}{}^{\ell j} T_{|\ell]}{}^{mi} + 2 T^{n\ell j} T_{n\ell}{}^i - T^{jn\ell} T_{n\ell}{}^i \right\} + \\ & - \frac{1}{2} g^{ij} \left\{ T^{\ell mn} T_{\ell mn} - 4 T^{nm}{}_{[\ell|} T^{\ell}{}_{|n]m} \right\} \quad . \quad (2.13) \end{aligned}$$

Consideremos agora uma densidade vetorial  $J^i$  de peso +1. Sua divergência pode ser escrita como

$$\partial_i J^i = \widehat{\nabla}_i J^i \quad . \quad (2.14)$$

Seja, então, a integral

$$I = \int A(\nabla_k B) dx^4 \quad , \quad (2.15a)$$

onde A e B simbolizam objetos tensoriais de qualquer ordem, mas tais que o integrando seja uma densidade escalar. Nesse caso AB deve ser uma densidade vetorial contravariante e, por (14),

temos

$$A \nabla_k B = \partial_k (AB) - (\hat{\nabla}_k A) B \quad . \quad (2.15b)$$

Nos problemas variacionais com fronteiras fixas, A ou B representa uma quantidade que se anula nos limites de integração e a divergência parcial no integrando pode ser desprezada. Assim, obtemos a seguinte regra para a integração parcial em  $U_4$ :

$$\int A (\nabla_k B) dx^4 = - \int (\hat{\nabla}_k A) B dx^4 \quad . \quad (2.15c)$$

A identidade de Palatini, que relaciona a variação do tensor de Ricci num dado ponto do espaço com a variação da afinidade se escreve como

$$\delta R_{ij} = \nabla_\ell \delta \Gamma^\ell_{ij} - \nabla_j \delta \Gamma^\ell_{i\ell} - 2\tau^k_{\ell j} \delta \Gamma^\ell_{ik} \quad , \quad (2.16a)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^k_{ij} = & \frac{1}{2} g^{k\ell} \left[ \nabla_j \delta g_{i\ell} + \nabla_i \delta g_{\ell j} - \nabla_\ell \delta g_{ij} \right] + \\ & + g^{k\ell} \left[ g_{im} \delta \tau^m_{j\ell} + g_{jm} \delta \tau^m_{i\ell} + g_{\ell m} \delta \tau^m_{ij} \right] \end{aligned} \quad (2.16b)$$

### 2.3 - A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

A teoria gravitacional de Einstein-Cartan (E-C), elaborada principalmente por Hehl <sup>(7)</sup>, postula que a geometria do espaço-tempo é a de Riemann-Cartan e que as variáveis indepen -

dentos que descrevem o campo gravitacional são a métrica e a torção (ou contorção). As equações de campo são derivadas por meio do princípio variacional aplicado à ação

$$S = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} \, dx^4 (R-2\Lambda) + \int \sqrt{-g} \, dx^4 L_m \quad (2.17)$$

onde a primeira parcela corresponde à ação para o campo gravitacional e  $L_m$  é a lagrangeana para os campos materiais obtida daquela da relatividade restrita através do acoplamento mínimo, ou seja, substituindo a métrica de Minkowski  $\eta_{AB}$  pela métrica do espaço curvo  $g_{ij}$  e as derivadas ordinárias por derivadas covariantes de Riemann-Cartan.

Definimos o tensor de momentum-energia métrico ( $t^{ij}$ ) e o tensor de spin ( $S^{ijk}$ ) por

$$\sqrt{-g} \, t^{ij} := \frac{2\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g_{ij}} \quad (2.18a)$$

$$\sqrt{-g} \, S^{ijk} := \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta K_{kji}} \quad (2.18b)$$

O spin ainda pode ser escrito como

$$S^{ijk} = M^{i[kj]} \quad , \quad (2.19)$$

onde  $M^{ikj}$ , às vezes denominado de tensor de pseudo-spin, é dado por

$$M_{ijk} := \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta \tau_{kji}} \quad (2.20)$$

$$\delta(\sqrt{-g} R) = -\sqrt{-g} G^{ij} \delta g_{ij} + \sqrt{-g} g^{ij} \delta R_{ij} \quad ,$$

podemos usar a identidade de Palatini, (16), e a regra (15c) para a integração parcial a fim de escrever

$$\begin{aligned} \int dx^4 \delta \left[ \sqrt{-g} R - 2\Lambda \sqrt{-g} \right] &= \\ &= \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \left[ G^{(ij)} - \tilde{\nabla}_\ell (T^{ij\ell} - T^{j\ell i}) + \Lambda g^{ij} \right] \delta g_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[ T_\ell^{ij} + T_\ell^{ji} - T_\ell^{ij} \right] \delta \tau^\ell_{ij} \right\} . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Exigindo que  $\delta S = 0$ , para variações independentes da métrica e da torção, e usando as definições (18), encontramos

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} R - 2\Lambda \sqrt{-g})}{\delta g_{ij}} = -\kappa \sqrt{-g} t^{ij} \quad (ij)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta \tau^k_{ji}} = -2\kappa \sqrt{-g} M^{ij}_k \quad [ij]$$

Calculando o lado esquerdo dessas equações a partir de (21) e fazendo uso de (19), chegamos às "equações de Einstein-Cartan"

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (2.22a)$$

$$T_{ijk} = \kappa S_{ijk} \quad , \quad (2.22b)$$

onde

$$T^{ij} := \frac{1}{\kappa} \tilde{\nabla}_\ell \left[ T^{\ell ij} + T^{ij\ell} - T^{j\ell i} \right] + t^{ij} \quad . \quad (2.23)$$

Para chegar à equação (22a), empregamos a eq. (10b) para es -

crever

$$G^{(ij)} = G^{ij} - G^{[ij]} = G^{ij} - \hat{\nabla}_\ell T^{\ell ij} \quad .$$

As identidades geométricas (10b) e (12), em conjunto com as eqs. (22), fornecem-nos as seguintes leis para a conservação do momentum angular de spin e para o momentum-energia

$$\hat{\nabla}_\ell S^{\ell ij} = T^{[ij]} \quad (2.24a)$$

$$\hat{\nabla}_\ell T^{\ell i} + 2 \tau^{ki}{}_\ell T^\ell{}_k = S^{mnk}{}_{R_{knm}}{}^i \quad . \quad (2.24b)$$

#### 2.4 - AS EQUAÇÕES DE DIRAC EM E-C

Consideremos agora um campo clássico de Dirac  $\Psi$  (com massa  $M$ ) e seu adjunto conjugado  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$  no espaço  $R_4$  de Minkowski. As equações de Dirac podem ser obtidas, via princípio variacional, a partir da ação <sup>(20)</sup>

$$S_D = \int dx^4 L_D \quad (2.25a)$$

$$L_D = + \frac{i}{2} \left[ \bar{\Psi} \gamma^A \partial_A \Psi - (\partial_A \bar{\Psi}) \gamma^A \Psi + 2iM \bar{\Psi} \Psi \right] \quad , \quad (2.25b)$$

onde as matrizes de Dirac,  $\gamma^A$ , satisfazem à álgebra de Clifford

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\eta^{AB}$$

(índices maiúsculos se referem ao espaço  $R_4$ ). Sob translações espaço-temporais,

$$x'^A = x^A + a^A \quad , \quad (a^A = \text{constante}) \quad . \quad (2.26a)$$

$S_D$  será invariante, se as matrizes de Dirac permanecerem inalteradas e se os espinores se comportarem como escalares,

$$\psi'(x) = \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) \quad . \quad (2.26b)$$

Sob rotações de Lorentz,

$$x'^A = \Lambda^A_B x^B \quad (2.27a)$$

$$\Lambda^A_C \Lambda^B_D \eta_{AB} = \eta_{CD} \quad , \quad (2.27b)$$

a invariância de  $S_D$  fica assegurada se as matrizes de Dirac novamente permanecerem inalteradas e se os espinores se transformarem de acordo com

$$\psi'(x) = T(\Lambda)\psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)T(\Lambda)^{-1} \quad , \quad (2.28a)$$

onde  $T(\Lambda)$  é uma matriz  $4 \times 4$  (e  $T^{-1}$  a sua inversa) da representação do grupo homogêneo de Lorentz, satisfazendo

$$T^{-1} \gamma^A T = \Lambda^A_B \gamma^B \quad , \quad T^{-1}T = TT^{-1} = I \quad . \quad (2.28b)$$

Para rotações infinitesimais,

$$\Lambda^A_B = \delta^A_B + \omega^A_B \quad , \quad \omega_{AB} = -\omega_{BA} = \text{const.} \quad , \quad (2.29)$$

as condições (28) podem ser satisfeitas pela matriz

$$T(\Lambda) = I + \frac{1}{2} \omega_{AB} \sigma^{AB} \quad (2.30a)$$

com os geradores  $\sigma^{AB}$  dados por

$$\sigma^{AB} = \frac{1}{2} [\gamma^A, \gamma^B] \quad . \quad (2.30b)$$

No espaço de Minkowski, os espinores de Dirac a quatro componentes são definidos como os objetos que apresentam as propriedades (16b) e (28) sob transformações espaço-temporais e rotações de Lorentz, respectivamente. A fim de generalizar essa noção para um espaço de Riemann-Cartan, vamos primeiramente escolher um referencial de Lorentz local, em cada ponto da variedade, definido pelas tetradas  $e^A_i(x)$  e por suas inversas  $e^j_B(x)$ ,

$$g_{ij}(x) = e^A_i(x) e^B_j(x) \eta_{AB} \quad , \quad (2.31a)$$

$$e^A_i(x) e^i_B(x) = \delta^A_B \quad , \quad e^A_i(x) e^j_A(x) = \delta^i_j \quad . \quad (2.31b)$$

Uma rotação local de Lorentz nessas tetradas,

$$e'^A_i(x) = \Lambda^A_B(x) e^B_i(x) \quad , \quad (2.32)$$

com  $\Lambda^A_B$  satisfazendo (27b) em cada ponto, deixa as relações (31) inalteradas, expressando a equivalência de todos os referenciais localmente inerciais. Então, os espinores de Dirac em espaços curvos são, por definição, objetos que se transformam como escalares sob transformações gerais de coordenadas  $[x^i \rightarrow x'^i = x'^i(x)]$  e de acordo com (28) sob rotações locais de Lorentz nas tetradas. Neste caso,  $\omega_{AB}$ ,  $\Lambda^A_B$  e  $T(\Lambda)$  em (28-30a) são funções das coordenadas. Para que a ação (25), com



$$\partial_A := e^i_A \partial_i \quad , \quad (2.33)$$

permaneça invariante sob transformação geral de coordenadas é suficiente substituir  $dx^4$  pelo elemento invariante de volume  $\sqrt{-g} dx^4$ . Mas, para garantir a invariância dessa ação sob as rotações (32), é necessário substituir as derivadas  $\partial_A$  por um operador de "derivada espinorial covariante",  $D_A(x)$ , que sob (32) se transforme como

$$D'_A(x) \Psi'(x) = \Lambda^B_A(x) T(x) D_B(x) \Psi(x) \quad , \quad (2.34a)$$

$$D'_A(x) \bar{\Psi}'(x) = \Lambda^B_A(x) [D_B(x) \bar{\Psi}(x)] T(x)^{-1} \quad . \quad (2.34b)$$

Tomando

$$\boxed{D_A(x) \Psi(x) := (\partial_A + \Gamma_A(x)) \Psi(x)} \quad , \quad (2.35)$$

a condição (34a) requer que  $\Gamma_A$  se transforma como uma afinidade, isto é,

$$\Gamma'_A(x) = \Lambda^B_A(x) [T(x) \Gamma_B(x) T(x)^{-1} - (\partial_B T(x)) T(x)^{-1}] \quad . \quad (2.36)$$

Em consequência disto, o operador  $D_A(x)$  ficará determinado se encontrarmos um objeto que cumpra essa lei de transformação. Uma solução possível que obtemos <sup>(21)</sup> é

$$\Gamma_A(x) = \frac{1}{2} \sigma_{BC} e^i_A e^{Bj} \nabla_i e^C_j \quad (2.37)$$

ou, usando a definição dos coeficientes de rotação de Ricci,

$$\gamma_{AB}^C = - (\tilde{\nu}_j e^C_i) e^i_A e^j_B \quad , \quad (\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}) \quad (2.38)$$

e as equações (4a) e (30b),

$$\Gamma_A = \frac{1}{4} (\gamma_{CBA} - K_{CBA}) \gamma^C \gamma^B \quad , \quad (2.39)$$

onde

$$K_{ABC} := e^i_A e^j_B e^{\ell_C} K_{ij\ell} \quad .$$

Da condição

$$D_A (\bar{\Psi} \Psi) = \partial_A (\bar{\Psi} \Psi) \quad ,$$

encontramos

$$D_A \bar{\Psi} = \partial_A \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \Gamma_A \quad . \quad (2.40)$$

Então, a ação invariante sob transformações gerais de coordenadas e sob rotações locais das tetradas é constituída por (25a) com  $L_D$  representando a densidade

$$L_D = + \frac{i}{2} \sqrt{-g} [\bar{\Psi} \gamma^A D_A \Psi - (D_A \bar{\Psi}) \gamma^A \Psi + 2iM\bar{\Psi}\Psi] \quad . \quad (2.41)$$

As equações de Euler-Lagrange para os espinores  $\bar{\Psi}$  e  $\Psi$  fornecem (22)

$$\gamma^A [D_A + \frac{1}{2} K_{CA}^C] \Psi = -iM\Psi \quad (2.42a)$$

$$(D_A + \frac{1}{2} K_{CA}^C) \bar{\Psi} \gamma^A = +iM\bar{\Psi} \quad . \quad (2.42b)$$

Quando o campo de Dirac se constitui em fonte de cur

vatura do espaço-tempo, o tensor momentum-energia  $t_{ij}$  é redefinido através de

$$\sqrt{-g} t^{ij} = e^{iA} \frac{\delta(L_D)}{\delta e^A_j} \quad . \quad (2.43)$$

Escolhendo a contorção (ou torção) e as tetradas como variáveis gravitacionais independentes e usando esta nova definição, as eqs. (22) ficam formalmente inalteradas. Além disso, para matéria tensorial, (43) coincide com (18a) e, no caso de matéria espinorial a simetria  $t_{ij} = t_{ji}$  é assegurada pelas equações de Euler-Lagrange para os campos  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  <sup>(22)</sup>.

## 2.5 - O CAMPO ESCALAR EM E-C

Se o spin da teoria de E-C for interpretado como resultante do alinhamento dos spins das partículas elementares, devemos esperar que a matéria escalar não gere torção. Isto realmente ocorre, pois a torção é introduzida na ação material através da derivada covariante, que neste caso é igual à derivada ordinária, isto é,

$$L_m = g^{ij} \phi_{,i} \phi^*_{,j} - M^2 |\phi|^2 \quad (2.44)$$

em (17). Dessa forma, um espaço-tempo que tivesse o campo escalar como única fonte de curvatura seria descrito pela geometria riemanniana. Mas, se a curvatura resultar de outros campos, uma partícula escalar considerada como corpo de prova, pode ser afetada pela torção uma vez que esta terá influência sobre a métri

ca que aparece em (44). A equação de Euler-Lagrange correspondente ao campo  $\phi$  escreve-se como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (g^{ij} \sqrt{-g} \phi_{,i})_{,j} + M^2 \phi = 0 \quad ,$$

ou, num referencial de Lorentz local, definido pelas tetradas (31),

$$\boxed{\eta^{AB} \phi_{,AB} - \gamma^{CB} \phi_{,C} + M^2 \phi = 0} \quad (2.45a)$$

$$\phi_{,AB} := e^i_A e^j_B \phi_{,ij} \quad , \quad \phi_{,C} := e^i_C \phi_{,i} \quad (2.45b)$$

Vamos agora substituir  $M^2$  em (44) por  $M^2 + R/6$  e supor novamente que a curvatura do espaço não é gerada pelo campo escalar (isto significa que  $R$  pode depender da torção em E-C). Para  $R \rightarrow 0$ , a ação assim modificada se reduz à da relatividade restrita; porém, em RG, o termo  $R/6$  é justificado pelo fato de que a equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \phi) + (M^2 + \frac{R}{6}) \phi = 0 \quad , \quad (2.46)$$

no limite de massa nula, permanece invariante sob o mapeamento conforme

$$a) \quad g_{ij} \rightarrow \bar{g}_{ij} = [C(x)]^2 g_{ij} \quad , \quad b) \quad \phi \rightarrow \bar{\phi} = [C(x)]^{-1} \phi \quad (2.47)$$

ou seja, a função,

$$f(\bar{g}, \bar{\phi}, \bar{R}) := \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_i (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{ij} \partial_j \bar{\phi}) + \frac{\bar{R}}{6} \bar{\phi} \quad (2.48)$$

é nula. Para saber se o mesmo ocorre em E-C, vamos reescrever R como

$$R = R_r + R_t \quad , \quad (2.49a)$$

onde  $R_r$  é o escalar de curvatura formado com a afinidade riemanniana e  $R_t$  é um termo dependente da contorção dado por

$$R_t = \tilde{\nabla}_\ell (2K^{m\ell}_m) + K^{m\ell}_{m\ell} K^{mn}_n - K^{m\ell}_{mn} K^{mn}_\ell \quad . \quad (2.49b)$$

Encontramos <sup>(23)</sup>, então,

$$\{\bar{\ell}_n\} = \{\ell_n\} + 4[C(x)]^{-1} \frac{\partial C(x)}{\partial x^n} \quad (2.50a)$$

$$f(\bar{g}, \bar{\Phi}, \bar{R}_r) = [C(x)]^{-3} \left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \Phi) + \frac{R_r}{6} \bar{\Phi} \right] \quad (2.50b)$$

Suponhamos que a contorção  $K^{m\ell}_{mn}$  não é afetada pela transformação (43), isto é,

$$\bar{K}^{m\ell}_{mn} = K^{m\ell}_{mn} \implies \bar{K}^{mn}_m = [C(x)]^{-2} K^{mn}_{nn} \quad . \quad (2.51)$$

Levando (51) a (49b), encontramos

$$\bar{R}_t = [C(x)]^{-2} R_t + 4[C(x)]^{-3} (\partial_\ell C(x)) K^{m\ell}_m \quad . \quad (2.52)$$

Então, por meio de (50b), (52) e (46), temos

$$f(\bar{g}, \bar{\Phi}, \bar{R}) = \frac{2}{3} [C(x)]^{-4} (\partial_\ell C(x)) K^{m\ell}_m \bar{\Phi} \quad . \quad (2.53)$$

Vemos, portanto, que a equação de Klein-Gordon em  $U_4$  em geral

não é invariante sob transformações conforme. Entretanto, se o traço da contorção for nulo, a invariância fica assegurada; isso é o que ocorre quando a fonte de curvatura é um fluido de Weyssenhoff-Raabe (Seção 2.7) ou um campo de Dirac. O campo eletromagnético, por sua vez, não gera torção, se for acoplado ao campo gravitacional de acordo com a prescrição da seção seguinte.

## 2.6 - O CAMPO ELETROMAGNÉTICO E AS EQUAÇÕES DE MAXWELL EM E-C

O acoplamento gravitacional mínimo, com afinidade de Riemann-Cartan, não pode ser aplicado ao campo eletromagnético, pois um tensor de Maxwell da forma

$$\bar{F}_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j = A_{i,j} - A_{j,i} + 2\tau^{\ell}_{ij} A_{\ell} \quad (2.54)$$

não é invariante sob transformações de calibre locais nos potenciais  $A_i$  ( $A_i \rightarrow A_i + \partial_i f(x)$ ), ao contrário do que requer a conservação da carga. Além disso, para a lagrangeana

$$\bar{L} = - \frac{1}{4} \bar{F}_{ij} \bar{F}^{ij} \quad ,$$

correspondente ao tensor (54), o spin, definido em (18), teria a forma

$$S_{ijk} = - \bar{F}_i [j A_k] \quad , \quad (2.55)$$

que também não é invariante sob transformações de calibre. Por esses motivos, ao invés da expressão (54), emprega-se a expres-

são covariante (e invariante de calibre)

$$F_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i} \quad (2.55)$$

com a correspondente lagrangeana para o campo resultante de uma fonte  $J^\ell$

$$\tilde{L}_{em} = -\left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + A_i J_i\right] \quad (\text{MKS}) \quad . \quad (2.56)$$

A partir de (56) e das equações de Euler-Lagrange, reincidimos nas equações de Maxwell da relatividade geral

$$\tilde{\nabla}_k F^{\ell k} = J^\ell \quad , \quad (2.57a)$$

$$\tilde{\nabla}_{[k} F_{ij]} = 0 \quad , \quad (2.57b)$$

de onde segue a equação da continuidade

$$\tilde{\nabla}_\ell (\sqrt{-g} J^\ell) = 0 \quad . \quad (2.58)$$

Para o tensor momentum-energia, temos

$$t_{ij} = F_{i\ell} F^\ell_j + \frac{1}{4} g_{ij} F_{\ell k} F^{\ell k} \quad , \quad (2.59a)$$

$$\tilde{\nabla}_j t^{ij} = F^{ij} J_j \quad . \quad (2.59b)$$

Num referencial de Lorentz local, determinada pelas tetradas (31), as equações (57) e (58) se escrevem como

$$F^{AB}{}_{,B} + \gamma^B{}_{CB} F^{AC} + \gamma^A{}_{BC} F^{BC} = J^A \quad (2.60a)$$

$$F_{[AB,C]} - 2\gamma^D{}_{[AB} F^C]D = 0 \quad (2.60b)$$

$$J^A{}_{,A} = \gamma_{AB}{}^B J^A$$

$$F_{AB} := e^i{}_A e^j{}_B F_{ij} \quad , \quad J_A := e^i{}_A J_i \quad .$$

## 2.7 - O FLUIDO DE WEYSSENHOFF-RAABE EM E-C

O tensor momentum energia usado na relatividade geral para descrever um fluido perfeito é dado por

$$t_{ij} = (p+\rho)u_i u_j - p g_{ij} \quad , \quad u^i u_i = 1 \quad , \quad (2.61)$$

onde  $u^i$  é a quadrivelocidade do fluido e  $p$  e  $\rho$  são as densidades de pressão e de energia medidas por um observador que se desloca com o fluido, isto é, com velocidade  $u^i$ . Esse tensor é simétrico e constitui uma generalização do tensor usado em relatividade restrita para um fluido sem spin.

Para descrever um fluido com spin na relatividade restrita, Weyssenhoff e Raabe <sup>(24)</sup> propuseram um tensor momentum-energia da forma

$$T_{ij} = h_i u_j - p g_{ij} \quad , \quad (2.62)$$

onde  $h_i$  é uma função que deve ser determinada a partir da lei de conservação do momentum-angular. Disto resulta que o tensor



(62) é assimétrico. Por outro lado, pode-se mostrar<sup>(7)</sup>, por meio do teorema de Noether aplicado à teoria de E-C, que os tenso - res (23) e (18) são uma generalização dos tensores "canônicos" de momentum-energia e de momentum-angular de spin definidos na teoria relativística de campos (relatividade restrita). Dessa forma, a teoria de E-C pode ser encarada como uma extensão da RG, que toma em consideração o spin da matéria. Em vista disto, a generalização do conceito de fluido perfeito para teoria de E-C é feita a partir de (62) e  $h_i$  é determinado pelo uso da lei de conservação (24a). Para isto, supõe-se que o spin pode ser escrito como

$$S^{\ell}_{ij} = u^{\ell} S_{ij} = - u^{\ell} S_{ji} \quad (2.63a)$$

com a densidade de spin  $S_{ij}$  satisfazendo

$$u^i S_{ij} = 0 \quad . \quad (2.63b)$$

A condição (63b), na relatividade restrita, visa garantir a integrabilidade das equações clássicas de movimento e assegurar que a componente temporal do vetor de spin,

$$S^i := \frac{1}{2} n^{ijkl} S_{jk} u_{\ell}, \quad (2.64)$$

se anula no sistema de repouso da partícula.

Por meio das equações (4b), (11a) e (12b), podemos escrever a contorção (para um fluido de Weyssenhoff) como

$$K^m_{i\ell} = -\kappa [u^m S_{i\ell} + u_i S_{\ell}^m - u_{\ell} S^m_i] \quad (2.65a)$$

$$K^m_{im} = \tau^m_{mi} = 0 \quad . \quad (2.65b)$$

De (11b) e (65b), vemos que  $\tilde{\nabla}_\ell = \nabla_\ell$ . Então, a lei de conservação do spin, (24a), torna-se

$$T_{[ij]} = \nabla_\ell S^\ell_{ij} = \nabla_\ell (u^\ell S_{ij}) \quad (2.66)$$

Usando a expressão  $\rho = T_{ij} u^i u^j$  para a densidade de energia ( $\rho$ ) e substituindo (62) no lado esquerdo de (66), encontramos

$$h_i = (p+\rho)u_i - 2u^k \nabla_\ell (u^\ell S_{ki}) \quad , \quad (2.67)$$

ou seja,

$$T_{ij} = (p+\rho)u_i u_j - pg_{ij} + 2u^k u^\ell \nabla_\ell (u_k S_{ij}) \quad . \quad (2.68)$$

Podemos ainda reescrever todas as derivadas covariantes que aparecem em (68) e (13) em termos da derivada riemanniana  $\tilde{\nabla}_\ell$  a fim de escrever as equações de E-C (22) na forma "pseudo-riemanniana"

$$\tilde{G}_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa \Sigma_{ij} \quad (2.69a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} := & (p+\rho-2\kappa S^2)u_i u_j - (p-\kappa S^2)g_{ij} + \\ & + 2(u^\ell u^k - g^{k\ell}) \tilde{\nabla}_\ell [u_{(j} S_{i)k}] \end{aligned} \quad (2.69b)$$

$$S^2 := \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} \quad . \quad (2.69c)$$

Se, além do fluido de Weissenhoff, existirem outras fontes de curvatura para o espaço, devemos acrescentar os cor -

respondentes tensores de momentum-energia no lado direito de  
(69a).

## CAPÍTULO 3

### MÉTRICAS DO TIPO GÖDEL EM EINSTEIN-CARTAN

#### 3.1 - GENERALIDADES

O objeto do presente capítulo são as métricas descritas pelo elemento de linha da forma

$$ds^2 = (dt + H(r)d\phi)^2 - dr^2 - [D(r)d\phi]^2 - dz^2, \quad (3.1)$$

onde  $H$  e  $D$  são funções que dependem somente da coordenada  $r$  e devem ser soluções das equações de Einstein-Cartan, com as fontes de curvatura que especificaremos abaixo. Os espaços assim obtidos constituirão o cenário cosmológico no qual estudaremos, nos capítulos seguintes, a dinâmica de partículas de teste acopladas ao campo gravitacional (partículas escalares e de Dirac).

Vamos escrever o elemento de linha (1) na forma

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (3.2a)$$

com as 1-formas diferenciais,

$$\theta^A := e^A_i dx^i, \quad x^i = (t, r, \phi, z) \quad (3.2b)$$

dadas por

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + H(r) d\phi & , & & \theta^1 &= dr & , \\ \theta^2 &= D(r) d\phi & , & & \theta^3 &= dz & . \end{aligned} \quad (3.3)$$

As equações (3) equivalem à escolha de um sistema de tetradas,  $e^A_i$ , em que as componentes não nulas são

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= e^{(1)}_1 = e^{(3)}_3 = 1 & , \\ e^{(0)}_2 &= H(r) & , & e^{(2)}_2 = D(r) & , \end{aligned} \quad (3.4a)$$

e cujas inversas,  $e^i_A$ , são

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= e^1_{(1)} = e^3_{(3)} = 1 & , \\ e^2_{(2)} &= \frac{1}{D(r)} & , \\ e^0_{(2)} &= -\frac{H(r)}{D(r)} & . \end{aligned} \quad (3.4b)$$

Então, os coeficientes de rotação de Ricci, (2.38), que são diferentes de zero, se escrevem como

$$\left. \begin{aligned} \gamma^1_{20} &= -\gamma^2_{10} = \gamma^0_{12} = \gamma^1_{02} = -\gamma^0_{21} = -\gamma^2_{01} = \Omega \\ \gamma^1_{22} &= -\gamma^2_{12} = -\frac{D'}{D} & , \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

onde o sinal " ' " simboliza  $d/dr$  e

$$\Omega = \frac{H'}{2D} & . \quad (3.6)$$

A forma pseudo-riemanniana das equações de E-C, projetadas no sistema de tetradas, torna-se

$$\tilde{G}_{AB} + \Lambda \eta_{AB} = \kappa (\Sigma_{AB} + t_{AB}) \quad , \quad (3.7)$$

onde  $\Sigma_{AB}$  é a quantidade (2.69b) e  $t_{AB}$  é ou o tensor "momentum-energia" (2.59a) para o campo eletromagnético, ou um tensor de pressões anisotrópicas. Para  $t_{AB} = 0$ , as equações (7) foram resolvidas por Duarte de Oliveira, Teixeira e Tiomno <sup>(8)</sup>. Nosso objetivo aqui é investigar as consequências provenientes da hipótese de que  $t_{AB} \neq 0$ .

### 3.2 - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-CARTAN-MAXWELL

Para encontrar as soluções de (7), vamos supor nesta Seção que  $t_{AB}$  representa um campo eletromagnético sem fontes e vamos escolher um observador comóvel com o fluido,

$$u^i = \delta^i_0 \implies u^A = e^A_0 = \delta^A_0 \quad , \quad (3.8)$$

no sistema de coordenadas (1). Com isso encontramos, através de (2.4a) e de (2.65a), que os parâmetros cinemáticos calculados com o uso do símbolo de Christoffel ( $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\omega}_{ij}$ ) se relacionam com os parâmetros calculados com a conexão de Riemann - Cartan ( $\theta$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\omega_{ij}$ ) através de

$$\tilde{\theta} := \tilde{\nabla}_i u_i = \theta \quad , \quad (\text{expansão}) \quad (3.9a)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} := h^k_i h^\ell_j \tilde{\nabla}_{[\ell} u_{k]} - \frac{1}{3} \tilde{\theta} h_{ij} = \sigma_{ij} \quad (\text{deformação}) \quad (3.9b)$$

$$\tilde{\omega}_{ij} := h^k_i h^\ell_j \tilde{\nabla}_{[\ell} u_{k]} = \omega_{ij} + \kappa S_{ij} \quad , \quad (\text{rotação}) \quad (3.9c)$$



onde  $h_{ij}$  é o projetor

$$h_{ij} = g_{ij} - u_i u_j \quad .$$

Para métricas com a forma dada em (1), a expansão e a rotação se anulam, mas as componentes tetrádicas da rotação têm a forma

$$\tilde{\omega}_{AB} = -2\Omega(r) \delta^1_{[A} \delta^2_{B]} \quad ,$$

$$\omega_{AB} = \tilde{\omega}_{AB} - \kappa S_{AB} \quad .$$

Daí resulta que o vetor "riemanniano" de rotação,

$$\tilde{\omega}^A := \frac{1}{2} \eta^{ABCD} \tilde{\omega}_{BC} u_D \quad , \quad (3.10)$$

é dado por

$$\tilde{\omega}^A = \Omega(r) \delta^A_3 \quad , \quad (3.11)$$

ao passo que, para o vetor de rotação da teoria de E-C, definido de forma análoga a (10), temos

$$\omega^A = (0, \kappa S_{(2)(3)}, \kappa S_{(3)(1)}, \Omega(r) + \kappa S_{(1)(2)}) \quad . \quad (3.12)$$

O vetor (11) define a tetrada  $e^{(3)}_i$  como uma direção privilegiada na RG. Para preservar essa simetria em E-C, suporemos que as únicas componentes de  $S_{AB}$  que não se anulam são

$$S_{(1)(2)} = -S_{(2)(1)} =: S(r) \quad , \quad (3.13a)$$

e que a única componente tetrádica do campo magnético diferen-

te de zero é

$$\begin{aligned} F_{(1)(2)} &= -F_{(2)(1)} =: B \neq 0, \\ F_{(2)(3)} &= F_{(3)(4)} = 0. \end{aligned} \quad (3.13b)$$

Em consequência da primeira dessas hipóteses, a rotação (12) fica

$$\omega^A = [\Omega(r) + S(r)] \delta^A_3. \quad (3.14)$$

Podemos agora aproveitar os resultados da ref. (8) para escrever as equações de E-C como

$$\begin{aligned} 3\Omega^2 - \frac{D''}{D} &= \kappa\rho - (\kappa S)^2 - 4\kappa S\Omega - \Lambda + \kappa t_{(0)(0)} \\ (D'' &:= \frac{d^2 D}{dr^2}) \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$\Omega^2 = \kappa\rho - (\kappa S)^2 - 2\kappa S\Omega + \Lambda + \kappa t_{(1)(1)} \quad (3.15b)$$

$$\frac{D''}{D} - \Omega^2 = \kappa\rho - (\kappa S)^2 + \Lambda + \kappa t_{(3)(3)} \quad (3.15c)$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\kappa \frac{dS}{dr} + \kappa t_{(0)(2)} \quad (3.15d)$$

$$t_{(1)(1)} = t_{(2)(2)} \quad (3.15e)$$

$$t_{(0)(1)} = 0. \quad (3.15f)$$

Estas duas últimas equações, juntamente com (2.59a), implicam que

$$|F_{(0)(1)}| = |F_{(0)(2)}|, \quad F_{(0)(2)}^B = 0,$$

mas, pela hipótese (13b), vemos que  $F_{(0)(1)} = F_{(0)(2)} = 0$ . As-



sim, a única componente do campo elétrico que pode ser diferente de zero é:

$$F_{(0)(3)} =: E \quad . \quad (3.16)$$

Então, as equações de Maxwell sem fonte, (2.60), se reduzem a

$$\frac{dE}{dz} + 2\Omega(r)B = 0 \quad , \quad (3.17a)$$

$$\frac{dB}{dz} - 2\Omega(r)E = 0 \quad , \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \phi} = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial \phi} = \frac{\partial B}{\partial r} = 0 \quad . \quad (3.17c)$$

As equações (17a-b) requerem que E seja necessariamente diferente de zero (exceto se  $\Omega = 0$ ) e que  $\Omega(r)$  seja constante, pois, por (17c), E e B não dependem de r:

$$\Omega := \frac{H'}{2D} = \text{constante} \quad . \quad (3.18)$$

Integrando (17a-b), encontramos

$$B = E_0 \cos[2\Omega(z-z_0)] \quad , \quad E = -E_0 \sin[2\Omega(z-z_0)] \quad (\text{se } \Omega \neq 0) \quad (3.19)$$

onde  $E_0$  e  $z_0$  são constantes de integração. A partir de (2.59a) e de (19) obtemos

$$t_{(2)(2)} = t_{(0)(0)} = t_{(1)(1)} = -t_{(3)(3)} = \frac{E^2 + B^2}{2} = \frac{E_0^2}{2} = \rho_{em} \quad , \quad (3.20)$$

onde  $\rho_{em}$  designa a densidade de energia eletromagnética.

Integrando (15d), temos

$$\boxed{\Omega = \Omega_0 - \kappa S} \quad . \quad (3.21)$$

A constante de integração  $\Omega_0$  pode ser interpretada como a rotação que este modelo teria na RG; porém, substituindo (21) em (14), vem:

$$\omega^A = \Omega_0 \delta^A_3 \quad .$$

Portanto,  $\Omega_0$  também deve ser interpretada como a rotação da teoria de E-C. Uma vez que  $\Omega$ ,  $S$ , e  $\rho_{em}$  são constantes, inferimos de (15a-c) que

$$p = \text{constante} \quad , \quad \rho = \text{constante} \quad (3.23a)$$

$$\frac{D''}{D} = \text{constante} := 4\ell^2 \quad . \quad (3.23b)$$

As condições (18) e (23b) são consequência da compatibilidade das equações de Maxwell com as equações de E-C e são as condições necessárias e suficientes para que o espaço-tempo seja homogêneo, conforme demonstraram Rebouças e Tiomno<sup>(1)</sup>. Portanto, as equações de E-C, com campo eletromagnético, admitem somente soluções homogêneas. (Para  $\rho_{em} = 0$ , as condições (18) e (23b) não se fazem necessárias e são possíveis soluções não homogêneas.)

As equações (18) e (23b) podem ser integradas diretamente. Para determinar as constantes de integração vamos exigir que  $D$  e  $H$  satisfaçam às condições de regularidade de Maitra<sup>(25)</sup> próximo à origem

$$\lim_{r \rightarrow 0} D = r \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} H \sim r^2 .$$

Estas condições são impostas para que as variáveis  $r$ ,  $\phi$  e  $z$  possam ser interpretadas como coordenadas cilíndricas. Então, a partir de (23b), encontramos

$$D = \frac{\sinh 2\ell}{2\ell} \quad . \quad (3.24a)$$

Substituindo esta função em (18), integrando a equação resultante e escolhendo a constante de integração de forma que a condição de Maitra seja satisfeita, encontramos

$$H = \frac{\Omega}{\ell^2} \sinh^2 \ell r \quad , \quad (3.24b)$$

que são as soluções que havíamos apresentado no Capítulo 1 .  
Substituindo  $\Omega$  por  $\Omega_0 - \kappa S$  e  $D''/D$  por  $4\ell^2$  em (15a-c), obtemos

$$\kappa p = \Omega_0^2 - \kappa \rho_{em} - \Lambda \quad , \quad (3.25a)$$

$$\kappa p = \Omega_0^2 + \kappa \rho_{em} + \Lambda \quad , \quad (3.25b)$$

$$2\ell^2 = \Omega_0^2 - \kappa \rho_{em} - \kappa S \Omega_0$$

ou (3.26)

$$\Omega = \frac{2\ell^2 + \kappa \rho_{em}}{\Omega_0} \quad .$$

A equação (25b) resultou da soma de (15a) com (15c). Exigindo que a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  sejam positivas e que a equa

ção de estado

$$p = \mu\rho \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3.27)$$

seja satisfeita, encontramos que a constante cosmológica deve estar situada no intervalo

$$\boxed{-\kappa\rho_{em} \leq \Lambda \leq \Omega_0^2 - \kappa\rho_{em}} \quad . \quad (3.28)$$

No extremo inferior deste intervalo,  $\Lambda = -\kappa\rho_{em}$ , temos um fluido rígido ( $p = \rho$ ) com  $\kappa\rho = \Omega_0^2$ , ao passo que para  $\Lambda = \Omega_0^2 - \kappa\rho_{em}$ , temos um fluido com pressão nula e com rotação dada por  $\Omega_0^2 = \kappa\rho/2$ . Além disso, para  $\Lambda = 0$ , devemos ter

$$\Omega_0^2 \geq \kappa\rho_{em} \quad (\text{se } \Lambda = 0) \quad (3.29)$$

e, por isso, é impossível a ocorrência de métricas circulares na teoria da RG ( $S = 0$ ) se  $\Lambda = 0$ . [Veja eq. (26).] Na teoria de E-C, as métricas circulares (com  $\Lambda = 0$  ou  $\Lambda \neq 0$ ) podem existir ou não, pois a equação (26) mostra claramente que a torção pode ser favorável (se  $\Omega_0 S > 0$ ) ou desfavorável (se  $\Omega_0 S < 0$ ) a isso. Pela soma de (24) e de (25), podemos expressar a rotação como

$$\boxed{\Omega_0 = \left[ \frac{\kappa(p+\rho)}{2} \right]^{1/2}} \quad , \quad (3.30)$$

onde escolhemos o sinal positivo para  $\Omega_0$ . De agora em diante, vamos também considerar  $\ell$  e  $\lambda$  positivos para as métricas hiperbólicas ( $\ell = \text{real}$ ) e para as métricas circulares ( $\ell = i\lambda = \text{ima}$

ginário puro).

Combinando as equações (26) e (30), podemos ainda reescrever a rotação como

$$\Omega_0 = \frac{\kappa S}{2} + \left[ \left(\frac{\kappa S}{2}\right)^2 + 2\ell^2 + \kappa\rho_{em} \right]^{1/2}, \quad (3.31a)$$

de onde vemos que  $\ell^2$  deve estar inferiormente limitado através de

$$2\ell^2 \geq - \left(\frac{\kappa S}{2}\right)^2 - \kappa\rho_{em}. \quad (3.31b)$$

A seguir vamos discutir dois casos particulares das métricas (24), casos que se verificam somente em presença do campo eletromagnético.

a) - Métrica Diagonal. Por (26) e (21), vemos que para

$$2\ell^2 = -2\lambda^2 = -\kappa\rho_{em} \quad (3.32a)$$

temos

$$\Omega = 0, \quad \kappa S = \Omega_0, \quad \rho_{em} \neq 0, \quad (3.32b)$$

e, daí, a métrica torna-se diagonal com elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \left( \frac{\text{sen}2\lambda r}{2\lambda} d\phi \right)^2 - dz^2. \quad (3.32c)$$

Para  $r, t, z$  constantes,  $ds^2$  será do tipo nulo soemnte quando

$$r = n\pi/\lambda^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por outro lado, para a métrica (32), as amplitudes dos campos

elétricos e magnéticos são constantes e desacoplados. As soluções (19) das equações de Maxwell não refletem a independência de E e B porque foram obtidas supondo-se que  $\Omega \neq 0$ .

O limite de (32), quando  $\rho_{em} \rightarrow 0$ , é a métrica de Minkowski com curvatura não nula <sup>(8)</sup>:

$$D = r \quad , \quad H = 0 \quad , \quad \kappa S = \Omega_0 \quad , \quad \rho_{em} = \Omega = 0 \quad (3.33)$$

b) Métrica de Som-Raychaudhuri em E-C. É obtido tomando-se o limite quando  $\ell^2 \rightarrow 0$  das expressões (24) e (26), do que resulta

$$D = r \quad , \quad H = \Omega r^2 \quad (3.34a)$$

$$\Omega = \frac{\kappa \rho_{em}}{\Omega_0} \quad , \quad \kappa S = \Omega_0 - \Omega \quad (\Omega_0 \neq 0) \quad . \quad (3.34b)$$

O limite de (34), quando  $\rho_{em} \rightarrow 0$ , é o espaço (33), se  $\Omega_0 \neq 0$ . Mas se  $\Omega_0$  também tende a zero, a primeira das eqs. (26) nos permite escrever

$$\left. \begin{aligned} D = r \quad , \quad H = \Omega r^2 \\ \Omega = -\kappa S \quad , \quad \Omega_0 = \rho_{em} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Vemos, assim, que na teoria de E-C é matematicamente possível a existência da métrica de Som-Raychaudhuri na ausência de campo eletromagnético. Entretanto, se  $\Omega_0 = 0$ , estamos em presença do vácuo ( $p = \rho = \Lambda = 0$ ) e, neste caso, a interpretação física do spin da teoria de E-C requer que  $\kappa S = -\Omega = 0$  em (35). Dessa

forma, (35) representa na realidade um espaço de Minkowski (sem curvatura).

Vamos, por fim, apresentar outro efeito do campo eletromagnético, desta vez relacionado com a causalidade em métricas do tipo hiperbólico. Façamos  $t$ ,  $z$  e  $r$  constantes em (1). Então, por intermédio de (24),

$$ds^2 = (H^2 - D^2) d\phi^2 = \frac{\sinh^2 \ell r}{\ell^2} \left[ \frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^2} \sinh^2 \ell r - 1 \right] d\phi^2 . \quad (3.36)$$

Este  $ds^2$  será do tipo espaço, para qualquer valor de  $r$ , sempre que  $\Omega^2 - \ell^2 < 0$ , ou usando (26), quando  $\ell$  pertencer ao intervalo

$$\frac{\Omega_0}{4} - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{16} - \frac{\kappa \rho_{em}}{2}} < \ell < \frac{\Omega_0}{4} + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{16} - \frac{\kappa \rho_{em}}{2}} . \quad (3.37)$$

A maior amplitude desse intervalo ocorre para  $\rho_{em} = 0$  ( $0 < \ell < \Omega_0/2$ ) mas, deixando  $\Omega_0$  fixo e variando a densidade de energia eletromagnética a partir de zero, a largura do intervalo vai se reduzindo até se anular quando

$$8\kappa\rho_{em} \geq \Omega_0^2 \quad (\implies \Omega^2 \geq \ell^2) . \quad (3.38)$$

Portanto, o campo eletromagnético reduz ou elimina a classe de métricas hiperbólicas que não apresentam círculos acausais. Para métricas com  $\ell$  fora do intervalo (37), esses círculos acausais têm lugar sempre que  $r > R_c$ , com  $R_c$  dado por

$$\frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^2} \sinh^2 \ell R_c = 1 \iff R_c = \ln \left[ \left( \frac{\Omega + \ell}{\Omega - \ell} \right) \right]^{1/2} . \quad (3.39)$$

### 3.3 - POTENCIAIS ELETROMAGNÉTICOS

Nas equações da mecânica quântica, a interação de uma partícula carregada com o campo eletromagnético ocorre através do acoplamento eletromagnético mínimo e para isto é necessário conhecer os potenciais eletromagnéticos. Vamos, pois, determinar esses potenciais para o campo (19). Projetando  $F_{AB}$  no sistema geral de coordenadas,

$$F_{ij} = e^A_i e^B_j F_{AB} \quad ,$$

obtemos

$$F_{03} := \frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial z} = E(z) \quad , \quad (3.40a)$$

$$F_{12} := \frac{\partial A_2}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial \phi} = -D(r)B(z) \quad , \quad (3.40b)$$

$$F_{23} := \frac{\partial A_3}{\partial \phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = H(r)E(z) \quad , \quad (3.40c)$$

onde  $E(z)$  e  $B(z)$  são os campos elétrico e magnético dados em (19). Devido às equações (17) e (18), podemos substituir  $E$  e  $D$  em (40) por

$$E = \frac{1}{2\Omega} \frac{dB}{dz} \quad , \quad D = \frac{1}{2\Omega} \frac{dH}{dr} \quad (\text{se } \Omega \neq 0) \quad . \quad (3.41)$$

Supondo, então, que os potenciais não dependem de  $\phi$  e de  $t$ , temos

$$A_0 = -\frac{B(z)}{2\Omega} + C_1 \quad , \quad A_2 = -\frac{H}{2\Omega} B(z) + C_2 \quad (\text{se } \Omega=0) \quad (3.42)$$

Para  $\Omega = 0$  (com  $E$  e  $B$  diferentes de zero), podemos integrar  $di$



retamente as equações (40a,b) para encontrar

$$A_0 = -Ez + C_2 \quad , \quad A_2 = -\frac{B}{2\ell^2} \sinh^2 \ell r + C_4 \quad (B \text{ e } E = \text{const}) \quad (3.43)$$

Para o caso geral em que E e B são diferentes de zero, os potenciais (43) para a métrica diagonal não podem ser obtidos como limites de (42). No entanto, se o campo elétrico for nulo ( $E_0 = 0$ ) em (43), isso é possível desde que façamos  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$  e  $C_1 = E_0 |2\Omega$ .

A dependência dos potenciais (42) e (43) (ou dos campos (19)) em relação à coordenada z torna o estudo do comportamento de partículas de prova carregadas em universos do tipo Gödel matematicamente mais complexo que o correspondente estudo de partículas neutras. Por exemplo, na RG as trajetórias clássicas de tais partículas deveriam ser determinadas a partir das equações

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \{j\ell\} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^\ell}{d\lambda} = \frac{q}{M} F^i_j(z) \frac{dx^j}{d\lambda} \quad , \quad (3.44)$$

onde o tensor de Maxwell,  $F^{ij}$ , é dependente de z, e q e M representam a carga e a massa da partícula. Semelhantemente, nas equações quânticas deveríamos usar o acoplamento eletromagnético mínimo, que consiste em substituir as derivadas ordinárias  $\partial_i$  pela derivada covariante de calibre  $\partial_i - iqA_i$ , sendo  $A_i$  os potenciais dependentes de z. Dessa forma, a interação de uma partícula clássica ou quântica com o campo eletromagnético torna as equações de movimento explicitamente dependentes de z, exceto para  $\Omega = 0$  [se tomarmos  $E_0 = 0$  em (43)].

A seguir, vamos apresentar um modelo para as métricas do tipo Gödel em que a dependência dos potenciais em relação a  $z$  é suprimida. Para isso, ressaltemos que um dos motivos pelo qual incluímos o campo eletromagnético na fonte de curvatura foi o desejo de obtermos a métrica de Som-Raychaudhuri quando  $\lambda \rightarrow 0$ , e, para isso, fizemos a hipótese que o fluido de Weyssenhoff era neutro. Porém, originalmente essa métrica foi obtida para um fluido carregado com uma distribuição contínua de cargas <sup>(6)</sup> e, só posteriormente, Raychaudhuri e Thakurta <sup>(26)</sup> mostraram que também podemos interpretá-la como resultante de um campo eletromagnético sem fontes. Suponhamos, então, que o fluido de Weyssenhoff apresenta uma densidade  $\sigma$  de cargas. As equações de Maxwell reescrevem-se como

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dz} + 2\Omega B &= \sigma \\ \frac{dB}{dz} - 2\Omega E &= 0 \end{aligned} \right\} , \quad (3.45)$$

com  $\Omega = \text{constante}$  e sem nenhuma alteração formal em (15). Integrando essas equações, veremos que a densidade de energia eletromagnética não depende de  $z$  [e, portanto, é compatível com (15)] somente se o campo elétrico for nulo, isto é,

$$2\Omega B = \sigma , \quad \frac{dB}{dr} = 0 . \quad (3.46)$$

Daí segue-se que, para  $\Omega = 0$ , devemos ter  $\sigma = 0$ , com  $B = \text{constante}$  arbitrária. Portanto, a métrica diagonal não pode ser interpretada como resultante de um fluido de Weyssenhoff carregado. Exceto este caso, característico da teoria de E-C, continua

válida a ambigüidade na interpretação das fontes do campo eletromagnético a que se referem Raychaudhuri e Thakurta. Através de (40b) e de (41), encontramos duas possibilidades para a escolha dos potenciais eletromagnéticos

$$A_2 = -\frac{B}{2\Omega} H = -\frac{B}{2\ell^2} \sinh^2 \ell r, \quad A_0 = 0 \quad (3.47a)$$

$$A_0 = -\frac{B}{2\Omega}, \quad A_2 = -\frac{BH}{2\Omega} = -\frac{B}{2\ell^2} \sinh^2 \ell r. \quad (3.47b)$$

Os potenciais (47a) são idênticos a (43), com  $E_0 = 0$  neste último. Por (47) torna-se claro que nem a equação (44) nem o acoplamento eletromagnético mínimo introduzem qualquer função dependente de  $z$  nas equações que descrevem a partícula de teste. Devemos, então, esperar que a solução dessas equações seja mais simples que no caso do campo eletromagnético sem fontes.

### 3.4 - FLUIDO DE WEYSSENHOFF COM PRESSÃO ANISOTRÔPICA

Na mesma referência mencionada na seção anterior, Raychaudhuri e Thakurta sugerem que as métricas da Seção 3.2, no contexto de RG, "podem ser consideradas como devidas a uma distribuição de matéria com viscosidade", ou seja, com pressão anisotrópica. Rebouças e Novello <sup>(2-4)</sup> mostraram que de fato isto é possível em RG. Vejamos brevemente como este tratamento pode ser adaptado para o âmbito da teoria de EC.

Suponhamos que, ao invés do tensor momentum-energia para o campo eletromagnético em (7), tenhamos um tensor de "pressão anisotrópica"  $\pi_{AB}$  proporcional à matriz de vorticida

de,  $\Omega_{AB}$ , definida por

$$\Omega_{AB} := \omega_A \omega_B + \frac{1}{3} \Omega_0^2 \eta_{AB} \quad , \quad A, B = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.48a)$$

com

$$\Omega_0^2 := - \omega_A \omega^A \quad , \quad (3.48b)$$

e onde  $\omega_A$  é o vetor de rotação da teoria de E-C, eq. (22) — se usássemos o vetor (11), estaríamos desde o início eliminando a possibilidade da métrica diagonal. Escrevendo, então,

$$\pi_{AB} = - \alpha^2 \Omega_{AB} \quad , \quad (\alpha^2 \geq 0) \quad (3.49a)$$

temos, por (22),

$$\pi_{AB} = - \frac{\alpha^2}{3} \text{diag}(\Omega_0^2, \Omega_0^2, -2\Omega_0^2) \quad . \quad (3.49b)$$

Em consequência, encontramos ao invés das equações (25-26)\* ,

$$\kappa p = \left(1 - \frac{\kappa \alpha^2}{3}\right) \Omega_0^2 - \Lambda \quad , \quad (3.50a)$$

$$\kappa \rho = \left(1 + \kappa \alpha^2\right) \Omega_0^2 + \Lambda \quad , \quad (3.50b)$$

$$4\ell^2 = (2 - \kappa \alpha^2) \Omega_0^2 - 2\kappa S \Omega_0 \iff \Omega = \frac{2\ell^2}{\Omega_0} + \frac{\kappa \alpha^2}{2} \Omega_0 \quad , \quad (3.50c)$$

que implicam que a positividade da pressão hidrostática ( $p$ ) e da densidade ( $\rho$ ), bem como a equação de estado (27), são satisfeitas sempre que

---

\* Neste caso as condições de homogeneidade devem ser impostas, ao passo que no caso do campo eletromagnético eram decorrência das equações de Maxwell.

$$-\frac{2\kappa\alpha^2}{3} \Omega_0^2 \leq \Lambda \leq \left(1 - \frac{\kappa\alpha^2}{3}\right) \Omega_0^2 \quad . \quad (3.51)$$

Para o valor mínimo de  $\Lambda$ , temos novamente um fluido rígido ( $p = \rho$ ) e, para o valor máximo de  $\Lambda$ , temos um fluido com precisão hidrostática nula ( $p = 0$ ). No entanto, para  $\Lambda = 0$ , (51) implica que

$$\kappa\alpha^2 \leq 3 \quad ,$$

de onde resulta que, mesmo quando  $S = 0$ , podemos ter métricas circulares, contrariamente ao que acarretava a equação (29). Por outro lado, somando (51a) com (51b), temos

$$\Omega_0 = \left( \frac{\kappa(p+\rho)}{2 + \frac{2}{3} \kappa\alpha^2} \right)^{1/2} \quad , \quad (3.52)$$

que, comparada com (30), manifesta uma segunda diferença em relação às métricas com campo eletromagnético: para  $p$  e  $\rho$  fixos, a rotação dos modelos de universo com pressão anisotrópica é sempre menor que a daqueles com campo eletromagnético. Uma comparação mais detalhada entre os casos particulares de métricas com pressão anisotrópica e campo eletromagnético pode ser expressa no quadro seguinte (pág. 48):

Casos Particulares	E-C com pressão anisotrópica	E-C com campo eletromagnético
M.Hiperbólicas ( $\ell^2 > 0$ )	$(2-\kappa\alpha^2)\Omega_0^2 > 2\kappa S\Omega_0$	$\Omega_0^2 - \kappa\rho_{em} > \kappa S\Omega_0$
M.Circulares ( $\ell^2 < 0$ )	$(2-\kappa\alpha^2)\Omega_0^2 < 2\kappa S\Omega_0$	$\Omega_0^2 - \kappa\rho_{em} < \kappa S\Omega_0$
M.Som-Raychaudhuri ( $\ell^2=0$ )	$(2-\kappa\alpha^2)\Omega_0^2 = 2\kappa S\Omega_0$	$\Omega_0^2 - \kappa\rho_{em} = \kappa S\Omega_0$
M.Diagonal ( $\Omega = 0$ )	$4\ell^2 = -\kappa\alpha^2\Omega_0^2$	$2\ell^2 = -\kappa\rho_{em}$
M. Minkowski	$\kappa\alpha^2 = 0$ , $\kappa S = \Omega_0$	$\kappa\rho_{em} = 0$ , $\kappa S = \Omega_0$

Para comparar esses resultados com os da RG, basta fazer  $\Omega = \Omega_0$  e  $S = 0$  na tabela acima.

Finalmente, para seções com  $t$ ,  $z$  e  $r$  constantes, as métricas hiperbólicas apresentam curvas do tipo espaço fechadas para qualquer valor da coordenada  $r$  sempre que

$$\frac{\Omega_0}{4} - \frac{\Omega_0}{4} \sqrt{1-8\kappa\alpha^2} < \ell < \frac{\Omega_0}{4} + \frac{\Omega_0}{4} \sqrt{1-8\kappa\alpha^2} . \quad (3.54)$$

Isto implica que para  $\kappa\alpha^2 > 1/8$ , todas as métricas hiperbólicas apresentam um raio crítico  $r_c$ , tal que o intervalo (36) é do tipo tempo para  $r > r_c$ .

### 3.5 - VETORES DE KILLING

Para referências posteriores vamos reescrever os cinco vetores independentes de Killing, para as métricas do tipo Gödel<sup>(1)</sup>, como

$$K_{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad K_{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad K_{(2)} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.55a)$$

$$K_{(3)} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\phi \left[ \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (3.55b)$$

$$K_{(4)} = -\sin\phi \frac{\partial}{\partial r} - \cos\phi \left[ \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (3.55c)$$

Esses vetores satisfazem à álgebra

$$[K_{(0)}, K_{(r)}] = [K_{(1)}, K_{(r)}] = 0 \quad , \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad (3.56a)$$

$$[K_{(2)}, K_{(3)}] = K_{(4)} \quad , \quad [K_{(2)}, K_{(4)}] = -K_{(3)} \quad (3.56b)$$

$$[K_{(3)}, K_{(4)}] = -2\Omega K_{(0)} - 4\ell^2 K_{(2)} = -4\ell^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Omega}{2\ell^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (3.56c)$$

Os limites para a métrica diagonal são obtidos imediatamente, tomando  $H = \Omega = 0$  em (55-56).

## CAPÍTULO 4

### EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

#### 4.1 - GENERALIDADES

Neste capítulo analisamos as soluções da equação de Klein-Gordon para um campo escalar considerado como partícula de teste em universos do tipo Gödel. Nosso objetivo é determinar a influência da vorticidade (rotação) e do spin do espaço-tempo sobre o comportamento de tais partículas. Para simplificar o problema, partimos de duas hipóteses.

(a) O campo escalar não interage com nenhum campo eletromagnético. Isto significa que a partícula de teste é neutra ou que os espaços que estamos considerando não incluem o campo eletromagnético na fonte de curvatura, no caso de partículas carregadas. Algumas soluções com acoplamento eletromagnético serão apresentadas no Apêndice ao final deste trabalho.

(b) Desconsideramos o termo de acoplamento conforme  $R/6$  que aparece na equação (2.46). Para os modelos do Capítulo 3, o escalar de curvatura é dado por

$$R = \kappa(\rho - 3p) - 4\Lambda = \text{constante} \quad ,$$

e pode ser positivo ou negativo. Na RG, por exemplo, é negativo para a métrica de Gödel propriamente dita, e positivo para



a métrica de Som-Raychaudhuri. O estudo das consequências do acréscimo de uma parcela negativa ao termo que contém a massa na equação de Klein-Gordon nos desviaria do tema principal que temos em vista, pois tornaria a análise dos espectros de energia mais complexa, quando  $R < 0$ .

Em consequência desses postulados, a eq. (2.45) se escreve, para as métricas do tipo Gödel, como

$$\frac{D^2 - H^2}{D^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{D^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{2H}{D^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi \partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + M^2 \phi - \frac{D'}{D} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad , \quad (4.1)$$

onde

$$D = \frac{\sinh \ell r}{2\ell} \quad , \quad H = \frac{\Omega}{2} \sinh^2 \ell r \quad . \quad (4.2)$$

Para resolver essa equação, vamos introduzir modos invariantes  $\phi_{(i)}$  associados aos vetores de Killing  $\frac{\partial}{\partial t}$  ,  $\frac{\partial}{\partial \phi}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$ , modos estes definidos por (27)

$$\mathcal{E}_{\frac{\partial}{\partial z}} \phi_{(2)} = -ik_3 \phi_{(2)} \quad , \quad \mathcal{E}_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \phi_{(1)} = -im\phi_{(1)} \quad , \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{E}_{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_{(0)} = -i\epsilon \phi_{(0)} \quad , \quad (4.3b)$$

onde  $\mathcal{E}_{K_{(i)}}$  simboliza a derivada de Lie ao longo dos vetores  $K_{(i)}$ . As soluções de (3) são

$$\phi_{(2)} \sim e^{-ik_3 z} \quad , \quad \phi_{(1)} \sim e^{-im\phi} \quad , \quad \phi_{(0)} \sim e^{-i\epsilon t} \quad .$$

Estes modos invariantes nos permitem fazer a separação de variáveis

$$\Phi_m = R(r) e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad , \quad (4.4)$$

na equação (1). Como  $K_{(0)} = \partial/\partial t$  é um vetor de Killing do tipo tempo, gerador de translações temporais, a eq. (3b) pode ser interpretada como a definição dos modos invariantes de energia. Além disso, estamos interpretando  $\phi$  como uma coordenada angular que varia de zero a  $2\pi$  e, por este motivo, vamos exigir que o parâmetro  $m$  seja um número inteiro,

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ,$$

pois, desta forma, a função escalar  $\Phi$  terá um único valor nos pontos equivalentes  $(t, r, \phi, z)$  e  $(t, r, \phi + 2\pi, z)$ .

Após essas observações preliminares vamos indicar como o tema deste capítulo será desenvolvido. Na Seção 4.2 apresentamos a solução geral [da forma (4) e finitas em  $r = 0$ ] para as equações (1-2) e encontramos operadores  $K_{(+)}$  e  $K_{(-)}$  que aumentam ou diminuem de uma unidade o valor do índice  $m$  de  $\Phi_m$ . Esses operadores serão úteis na normalização das soluções e, em determinados casos, apresentam uma álgebra de momentum angular, como veremos. Em 4.3, exigimos que as soluções sejam finitas em todos os pontos do espaço-tempo e, assim, encontramos os espectros de energia, discutindo primeiramente o caso de métricas hiperbólicas e, depois, o caso das métricas circulares. Paralelamente, normalizamos todas as soluções com energias discretas. Na Seção 4.4, mostramos como as soluções relativas às métricas de Som-Raychaudhuri e de Minkowski podem ser obtidas por um processo de limite, aplicado às soluções que se referem às métricas hiperbólicas ou circulares. Na Seção 4.5,

mostraremos que os nossos resultados estão de acordo com os resultados obtidos da análise das geodésicas descritas por partículas de teste em universos do tipo Gödel. Em 4.6, mostraremos que os operadores  $K_{(\pm)}$  geram uma álgebra de momentum angular, nos espaços em que  $\ell \neq 0$ .

#### 4.2 - SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Substituindo (2) e (4) em (1) e efetuando a mudança de variável

$$x = \cosh 2\ell r \quad , \quad (4.5)$$

obtemos a equação

$$4\ell^2(x^2-1) \frac{d^2}{dx^2} + 8\ell^2 x \frac{dR}{dx} + 4\ell^2 \left[ \frac{\frac{\Omega^2 \epsilon^2}{\ell^2} + 2\Omega \epsilon m}{2\ell^2(x+1)} - \frac{m^2}{x^2-1} - P \right] R = 0 \quad (4.6a)$$

$$P := \left( \frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^2} \epsilon^2 + M^2 + k_3^2 \right) \div 4\ell^2 \quad (4.6b)$$

Para a métrica diagonal ( $\Omega=0$ ,  $\ell^2 \neq 0$ ), a eq. (6a) se reduz à equação associada de Legendre.

Quando  $\ell^2 \rightarrow 0$ , (Som-Raychaudhuri, se  $\Omega \neq 0$  ou Minkowski, se  $\Omega = 0$ ) é suficiente, para retornar à variável  $r$ , fazer a aproximação

$$x \sim 1 + 2\ell^2 r^2 \quad , \quad (4.7)$$

em (6a), e depois tomar o limite  $\ell^2 \rightarrow 0$  da equação assim obtida. Este fato é fundamental para a obtenção das soluções da

Seção 4.4.

Efetuada a substituição

$$R(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (x+1)^{\frac{\Omega\epsilon}{2\ell^2}} X(x) \quad (4.8)$$

em (6), seguida de uma nova mudança de variável,

$$y = \frac{1-x}{2} \quad , \quad (4.9)$$

obtemos a equação hipergeométrica

$$y(1-y) \frac{d^2X}{dy^2} + [c-(a+b+1)y] \frac{dX}{dy} - abX = 0 \quad , \quad (4.10)$$

onde

$$a = m + \frac{1}{2} + \frac{\Omega\epsilon}{2\ell^2} + \frac{n}{2} \quad , \quad b = m + \frac{1}{2} + \frac{\Omega\epsilon}{2\ell^2} - \frac{n}{2} \quad , \quad c = m+1 \quad , \quad (4.11)$$

com n dado por

$$n := \left[ \frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^4} \epsilon^2 + \frac{M^2 + k_3^2 + \ell^2}{\ell^2} \right]^{1/2} \quad . \quad (4.12)$$

A solução geral de (10) pode ser expressa como a soma de duas soluções independentes

$$X(y) = AF(a,b,c;y) + By^{1-c} F(a-c+1,b-c+1,2-c;y) \quad , \quad (4.13)$$

onde A e B são constantes de integração e  $F(a,b,c;y)$  representa a função hipergeométrica <sup>(28)</sup>,

$$F(a,b,c;y) = 1 + \frac{ab}{c} y + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} + \dots \quad (4.14)$$

Usando a propriedade

$$F(a,b,c;y) = (1-y)^{c-a-b} F(c-a,c-b,c;y) \quad , \quad (4.15)$$

podemos reescrever  $R(x)$ , dado em (8), como

$$R(x) = C^I (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (1+x)^{\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2}} F(a,b,c;\frac{1-x}{2}) + \\ C^{II} (x^2-1)^{-\frac{m}{2}} (x+1)^{-\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2}} F(a',b',c';\frac{1-x}{2}) \quad , \quad (4.16)$$

onde  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  são dados por (11) com a troca de  $\Omega\varepsilon$  por  $-\Omega\varepsilon$  e de  $m$  por  $-m$  ( $C^I$  e  $C^{II}$  são novas constantes de integração). Para que  $R(x)$  seja finito em  $x = 1$  ( $r = 0$ ), devemos escolher

$$(a) \quad C^{II} = 0 \quad , \quad \text{quando } m > 0$$

$$(b) \quad C^I = 0 \quad , \quad \text{quando } m < 0 \quad ,$$

enquanto para  $m = 0$  ambas as parcelas em (16) são finitas em  $x = 1$  e linearmente dependentes. Então, as soluções (4) podem ser escritas como

$\phi^I = C^I (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (x+1)^{\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2}} F(a,b,c;\frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3z+\varepsilon t)} \quad (m \geq 0) \quad (4.17a)$
$\phi^{II} = C^{II} (x^2-1)^{-\frac{m}{2}} (x+1)^{-\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2}} F(a',b',c';\frac{1-x}{2}) e^{-i(+m\phi+k_3z+\varepsilon t)} \quad (m \leq 0) \quad (4.17b)$

sendo a, b e c os parâmetros dados por (11), e

$$a' = -m + \frac{1}{2} - \frac{\Omega \varepsilon}{2\ell^2} + \frac{n}{2} \quad , \quad b' = -m + \frac{1}{2} - \frac{\Omega \varepsilon}{2\ell^2} - \frac{n}{2} \quad , \quad c' = 1-m \quad (4.18)$$

Para  $m = 0$ , temos  $\phi^I \sim \phi^{II}$ . Por outro lado, comparando (17a) com (17b), vemos que tais soluções se relacionam através de

$$\sigma C^{II*} \phi^I(k_3, \varepsilon, m) = C^I \left[ \phi^{II}(-k_3, -\varepsilon, -m) \right]^* \quad , \quad (4.19)$$

onde o asterisco indica conjugação complexa e  $\sigma = 1$ , se  $\ell^2 > 0$ ,  $\sigma = (-1)^m$  se  $\ell^2 < 0$ . Podemos, então, trabalhar somente com  $\phi^I$  ou  $\phi^{II}$  e usar a eq. (19) quando quisermos recuperar as outras soluções.

Introduzindo os operadores

$$K_{(\pm)} = K_{(\mp)}^* = e^{\mp i\phi} \left[ 2\ell \sqrt{x^2-1} \frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{2i\ell x}{x^2-1} \frac{\partial}{\partial \phi} \mp \frac{i\Omega}{\ell} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad , \quad (4.20)$$

encontramos que sua ação sobre  $\phi_m$  é dada por

$$K_{(+)} \phi_m^I = -\ell \frac{ab}{c} \phi_{m+1}^I \quad , \quad K_{(+)} \phi_m^{II} = -4\ell m \phi_{m+1}^{II} \quad (4.21a)$$

$$K_{(-)} \phi_m^I = 4\ell m \phi_{m-1}^I \quad , \quad K_{(-)} \phi_m^{II} = -\ell \frac{a'b'}{c'} \phi_{m-1}^{II} \quad . \quad (4.21b)$$

As expressões (20) podem ser generalizadas através de

$$K_{(\pm)} = K_{(\mp)} = e^{\mp i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mp i \left( \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = K_{(3)} \pm iK_{(4)} \quad , \quad (4.22)$$

sendo  $K_{(3)}$  e  $K_{(4)}$  os vetores de Killing definidos nas eqs.

(3.55b,c). As expressões (22) são mais apropriadas que (20) quando se trata de obter os operadores  $K_{(\pm)}$  para casos particulares das classes de métricas que estamos considerando.

Partindo de uma solução com um dado valor para  $m$ , podemos, por aplicações sucessivas de  $K_{(\pm)}$ , gerar todo o conjunto de soluções representado em (17). Por exemplo, partindo de  $\phi^I (m=m_0)$ , podemos obter todas as soluções  $\phi^I (m > m_0)$  através de  $K^I_{(+)}$ . As soluções  $\phi^I (m < m_0)$  são obtidas aplicando-se  $m_0$  vezes o operador  $K_{(-)}$  a  $\phi^I (m=m_0)$ ; na última destas aplicações, chegamos a  $\phi^I (m=0)$ . Mais uma aplicação de  $K^I_{(-)}$  a  $\phi^I (m=0)$  nos fornece  $\phi^{II} (m=-1)$  pois, por (21b),

$$\lim_{m \rightarrow 0} K^I_{(-)} \phi^I (m) = 4\ell \lim_{c-1 \rightarrow 0} [(c-1) \phi^I (m-1)] \sim \phi^{II} (m=-1) .$$

Por aplicações sucessivas de  $K_{(-)}$  em  $\phi^{II} (m=-1)$  obtemos todas as outras soluções  $\phi^{II}$  com  $m < -1$ .

Para normalizar as soluções (17), vamos definir o produto escalar entre essas soluções através de

$$\langle \phi (m') | \phi (m) \rangle = \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, \phi^* (m') \phi (m) \quad , \quad (4.23)$$

onde  $dx^4 := d\phi dr dz dt$  e  $\phi (m')$ ,  $\phi (m)$  na realidade simbolizam  $\phi (m' k'_3 \epsilon'; x)$  e  $\phi (m k_3 \epsilon; x)$ . Integrando em  $t$ ,  $\phi$  e  $z$ , essa definição fornece

$$\langle \phi (m') | \phi (m) \rangle = \frac{(2\pi)^3}{\ell^2} \delta_{m', m} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \int_1^\infty |R_m|^2 dx \quad , \quad (4.24)$$

$$\langle \phi (m') | \phi (m) \rangle = \frac{(2\pi)^3}{\lambda^2} \delta_{m', m} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \int_{-1}^1 |R_m|^2 dx \quad , \quad (4.25)$$

onde  $R(m)$  é dado por (17) sem os fatores exponenciais. A primeira dessas equações se aplica aos espaços com métricas hiperbólicas ( $1 \leq x = \cosh 2\ell r < \infty$ ) e a segunda aos espaços com métricas circulares ( $-1 \leq x \leq 1$ ). Das definições (20) e (23), encontramos, através de uma integração parcial,

$$\begin{aligned} \langle \phi(m') | K_{(+)} \phi(m) \rangle &= -\langle K_{(-)} \phi(m') | \phi(m) \rangle + \\ &+ \frac{2(2\pi)^3}{\ell} \delta_{m',m+1} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \lim_{x \rightarrow k} \left[ \sqrt{x^2 - 1} R^*(m+1) R(m) \right], \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(m') | K_{(-)} \phi(m) \rangle &= -\langle K_{(+)} \phi(m') | \phi(m) \rangle + \\ &+ \frac{2(2\pi)^3}{\ell} \delta_{m',m-1} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \lim_{x \rightarrow k} \left[ \sqrt{x^2 - 1} R^*(m-1) R(m) \right], \end{aligned} \quad (4.25b)$$

onde  $x \rightarrow k$  significa  $x \rightarrow \infty$  (métricas hiperbólicas) ou  $x \rightarrow -1$  (métricas circulares). Para que a norma de  $\phi$ , definida por (23), seja finita, devemos impor que os limites que aparecem no lado direito de (26) também o sejam. As condições suficientes para que isto ocorra são

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-g}  R(m) ^2 = \text{finito}$	(Métricas hiperbólicas) (4.27)
$\lim_{x \rightarrow -1}  R(m) ^2 = \text{finito}$	(Métricas circulares), (4.28)

onde  $\sqrt{-g} = \sqrt{x^2 - 1} / (2\ell)$ .



Se os limites (28) forem nulos, teremos

$$\langle \phi(m') | K_{(\pm)} \phi(m) \rangle = -\langle K_{(\mp)} \phi(m') | \phi(m) \rangle \quad (4.29)$$

Esta propriedade nos permitirá normalizar todas as soluções escalares cujos espectros de energia, resultantes das condições (27) e (28), forem discretos.

Nas seções seguintes vamos supor que  $\Omega \geq 0$ , tanto para as métricas hiperbólicas quanto para as métricas circulares. As soluções para  $\Omega < 0$  podem ser obtidas a partir das soluções com  $\Omega > 0$ , através da operação

$$C^{II} \phi^I(-\Omega, m, \phi) = C^I \phi^{II}(\Omega, -m, -\phi) \quad (4.30)$$

#### 4.3 - ESPECTROS DE ENERGIAS E NORMALIZAÇÃO

Como estamos supondo que os campos escalares representam partículas de prova, que não contribuem para a curvatura do espaço-tempo, devemos exigir que sua densidade seja finita em qualquer ponto do espaço-tempo. Mais especificamente, exigiremos que a norma das soluções escalares sejam finitas, impondo, para isto, as condições (27) e (28). Dessas condições resultarão espectros discretos ou contínuos de energia, bem como certas restrições ao intervalo de variação de  $m$ .

##### 4.3.1 - Métricas Hiperbólicas

Vamos reescrever as funções hipergeométricas como <sup>(28)</sup>

$$F(a, b, c; \frac{1-x}{2}) = B_1(a, b, c) \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-a} F(a, c-b, a-b+1; \frac{2}{1+x}) + \\ + B_2(a, b, c) \left(\frac{1+x}{2}\right)^{-b} F(b, c-a, b-a+1, \frac{2}{1+x}) \quad , \quad (4.31)$$

onde

$$B_1(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \quad , \quad B_2(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \quad . \quad (4.32)$$

Quando  $x \rightarrow \infty$ , o argumento das funções hipergeométricas no lado direito de (31) se anulam e tornam essas funções iguais à unidade. Então, a condição (27) se escreve como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-g} |R^I(m)|^2 \sim |2^a B_1(a, b, c) e^{-\ell n r} + 2^b B_2(a, b, c) e^{\ell n r}|^2 = \text{finito} \quad (4.33)$$

Pela definição (12), vemos que  $n$  e, em consequência, os parâmetros  $a$  e  $b$ , podem ser reais ou imaginários. Vamos considerar separadamente cada um destes casos.

1º Caso:  $n = \text{real}$ . Isto ocorre sempre que  $\Omega^2 \geq \ell^2$ , isto é para métricas com círculos acausais. Mas, se  $\Omega^2 < \ell^2$ ,  $n$  será real somente para as energias limitadas por

$$\epsilon^2 \leq \frac{\ell^2 + M^2 + k_3^2}{\ell^2 - \Omega^2} \ell^2 \quad (\ell^2 > \Omega^2) \quad . \quad (4.34)$$

Devido à presença do fator exponencial, devemos anular a constante  $B_2$  para que o limite (33) seja finito. Para isto há duas possibilidades distintas, que consistem em fazer  $a$  ou  $c-b$  igual a zero ou inteiro negativo. Façamos

$$\left. \begin{aligned} a = m-j \quad , \quad j = \text{inteiro positivo} \geq m \\ \iff n = -(2j+1) - \frac{\Omega \varepsilon}{\ell^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.35a)$$

$$\left. \begin{aligned} c-b = -j \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ \iff n = -(2j+1) + \frac{\Omega \varepsilon}{\ell^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.35b)$$

Das eqs. (35), (11) e (12) decorre um espectro discreto de energias,

$$\boxed{|\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [(\Omega^2 - \ell^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 + \ell^2]^{1/2}} \quad , \quad (4.36)$$

e os seguintes conjuntos de parâmetros para as soluções  $\phi^I$ :

$$\varepsilon = -|\varepsilon| \quad , \quad a = m-j \quad , \quad b = m+j+1 - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} \quad , \quad j \geq m \geq 0 \quad (4.37a)$$

$$\varepsilon = |\varepsilon| \quad , \quad b = m+j+1 \quad , \quad a = m-j + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} \quad , \quad j, m \text{ independentes.} \quad (4.37b)$$

Designando por  $\phi_{jm}^{(+)}$  as soluções com energias positivas, encontramos, pela substituição de (37) em (17a) e pelo uso de (19)

$$\begin{aligned} \phi_{jm}^I (+) &= C^I (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (x+1)^{\frac{\Omega|\varepsilon|}{2\ell^2}} F(j+m+1, m-j + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2}, m+1; \frac{1-x}{2}) \\ &e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon|\ell)} \quad (j, m \text{ independentes}) \quad (4.38a) \end{aligned}$$

$$\phi_{jm}^{II(+)} = C^{II} (x^2-1)^{-\frac{m}{2}} (x+1)^{-\frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2}} F(-m-j, j-m+1 - \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, 1-m; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3z+|\epsilon|\ell)} \quad (-j \leq m \leq 0) \quad (4.38b)$$

A união de (38a) e (38b) constitui uma base completa para as soluções escalares com energias positivas em espaços com  $\Omega^2 > \ell^2$ . Para as soluções (38), os valores de m estão limitados por

$$m \in [-j, \infty) \quad , \quad j = \frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \quad (4.39a)$$

As soluções com energias discretas negativas, obtidas a partir de (38) via eq. (19), são tais que

$$m \in [-\infty, j] \quad (4.39b)$$

Para  $\Omega^2 \geq \ell^2$ , j pode assumir qualquer valor inteiro positivo nas soluções (38). Porém, quando  $\Omega^2 < \ell^2$ , os valores de j devem ser restritos de forma que a inequação (34) seja satisfeita, isto é,

$$2j+1 \leq \frac{\Omega}{\ell} \left[ \frac{M^2+k_3^2+\ell^2}{\ell^2-\Omega^2} \right]^{1/2} \quad (\Rightarrow n = \text{real}) \quad (4.40)$$

Para valores de j que não satisfaçam esta restrição, ou equivalentemente, para valores de energias que não satisfaçam (34), n torna-se imaginário.

2º Caso: n = imaginário. Quando n é imaginário, ou seja quando

$$\epsilon^2 > \frac{M^2+k_3^2+\ell^2}{\ell^2-\Omega^2} \quad , \quad (\ell^2 > \Omega^2) \quad (4.41)$$

os fatores exponenciais em (33) se expressam em termos de senos e cossenos trigonométricos que, obviamente, são finitos para qualquer valor de seus argumentos. Isso significa que o limite (33) já é finito e não é necessário, portanto, que as constantes  $B_1$  e  $B_2$  se anulem. As partículas escalares que satisfazem (41) têm suas soluções dadas simplesmente por (17) e seus espectros de energias devem ser considerados contínuos; neste caso, os valores de  $m$  variam de  $-\infty$  a  $+\infty$ :

$$-\infty \leq m \leq \infty \quad , \quad (\Omega^2 < \ell^2 \text{ e } n = \text{imaginário})$$

(4.41')

Vemos, dessa forma, que para as métricas hiperbólicas sem círculos acausais ( $\ell^2 > \Omega^2$ ), as partículas escalares apresentam um espectro misto de energia. Nos modelos do Capítulo 3, a inexistência de círculos acausais se deve à torção, pois, quando esta se anula, todas aquelas métricas apresentam um raio crítico além do qual ocorre violação de causalidade.

Normalização das Soluções. No caso de soluções com energias discretas, o limite (33) é nulo e, portanto, valem as propriedades (29) para os operadores  $K_{(\pm)}$ . Essas propriedades podem ser empregadas para normalizar as soluções. Assim, as eqs. (21), particularizadas para as soluções (38), nos permitem escrever

$$\phi_{jm}^{II(+)} = a_m K_{(+)}^{j+m} \phi_{j,m=-j}^{II(+)} \quad , \quad K_{(-)}^{j+m} \phi_{j'm'}^{II(+)} = b_m \phi_{j',m'-m-j}^{II(+)} \quad .$$

(4.42a)

onde

$$a_m = \frac{(-m)!}{(4\ell^2)^{m+j} j!} \quad (4.42b)$$

e

$$b_m = \frac{(-\ell)^{m+j} (-m')! (j'+m')}{(j+m-m')! (j'-j+m'-m)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon'|}{\ell^2} - j'+m'\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon'|}{\ell^2} - j'-j+m'-m\right)} \quad (4.42c)$$

A partir de (42a) e de (29), encontramos

$$\langle \phi_{j'm'}^{II(-)} | \phi_{jm}^{II(+)} \rangle = (-1)^{m+j} a_m \langle K_{(-)}^{j+m} \phi_{j'm'}^{II(+)} | \phi_{j,-j}^{II(+)} \rangle$$

ou

$$\langle \phi_{j'm'}^{II(+)} | \phi_{jm}^{II(+)} \rangle = (-1)^{m+j} a_m b_m \langle \phi_{j',m'-m-j}^{II(+)} | \phi_{j,-j}^{II(+)} \rangle \quad (4.43)$$

Usando (24) e fazendo  $\Delta = \delta_{m'm} \delta_{j'j} \delta(k'_3 - k_3)$ , vem

$$\langle \phi_{j',m'-m-j}^{II(+)} | \phi_{j,-j}^{II(+)} \rangle = \frac{(2\pi)^3}{4\ell^2} |c^{II}| e^{-\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + 2j + 1} \cdot j! \frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j + m\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)} \Delta \quad (4.44)$$

Levando (43b,c) e (44) a (43), ficamos com

$$\langle \phi_{j'm'}^{II(+)} | \phi_{jm}^{II(+)} \rangle =$$

$$= \frac{(2\ell)^3}{4\ell^2} |C^{II}|^2 2^{-2m+1-\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}} \frac{[(-m)!]^2 (j+m)!}{j! \left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j + m\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)} \Delta. \quad (4.45)$$

Para  $\phi_{jm}^{I(+)}$  temos, ainda por (21) e (38),

$$\phi_{j,m}^{I(+)} = \frac{(-1)^m j! m!}{\ell^m (m+j)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + m - j\right)} K_{(+)}^m \phi_{j0}^{I(+)}$$

e

$$K_{(-)}^m \phi_{j',m'}^{I(+)} = 2^{2m} \ell^m m'! \phi_{j',m'-m}^{I(+)} / (m'-m)!$$

Daí

$$\langle \phi_{jm}^{I(+)} | \phi_{jm}^{I(+)} \rangle = \frac{2^{2m} (m'!)^2 j!}{(m'-m)! (j+m)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + m - j\right)} \langle \phi_{j',m'-m}^{I(+)} | \phi_{j0}^{I(+)} \rangle \quad (4.46)$$

Entretanto, para  $m = 0$ , temos

$$C^{II} \phi_{j0}^{I(+)} = C^I 2^{2\ell^2} \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} \phi_{j0}^{II(+)}$$

e daí decorre, por meio de (45),

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j',m'-m}^{I(+)} | \phi_{j0}^{I(+)} \rangle &= \left| \frac{C^I}{C^{II}} \right|^2 2 \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} \langle \phi_{j',m'-m}^{II(+)} | \phi_{j0}^{II(+)} \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^3}{4\ell^2} |C^I|^2 2 \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + 1 / \left( \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1 \right) \end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em (46), resulta

$$\langle \phi_{j',m'}^{I(+)} | \phi_{jm}^{I(+)} \rangle =$$

$$= |C^I|^2 \frac{(2\pi)^3}{4\ell^2} 2^{2m + \frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + 1} \left[ \frac{j! (m!)^2 \left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)}{(m+j)! \left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1\right) \Gamma\left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + m - j\right)} \right]. \quad (4.47)$$

Igualando (45) e (47) a  $\Delta$ , obtemos as expressões para  $C^I$  e  $C^{II}$  que ortonormalizam as soluções escalares com  $\epsilon > 0$ :

$$C^I = 2^{-m - \frac{|\Omega|\epsilon|}{2\ell^2}} \left[ \frac{2[|\Omega|\epsilon| - \ell^2(2j+1)]}{(2\pi)^3} \frac{(m+j)}{(m!)^2 j!} \frac{\Gamma\left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + m - j\right)}{\left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)} \right]^{1/2}, \quad (4.48a)$$

$m, j \geq 0$

$$C^{II} = 2^{m + \frac{|\Omega|\epsilon|}{2\ell^2}} \left[ \frac{2[|\Omega|\epsilon| - \ell^2(2j+1)]}{(2\pi)^3} \frac{j!}{[(-m)!]^2 (j+m)!} \frac{\Gamma\left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j\right)}{\Gamma\left(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + m - j\right)} \right]^{1/2} \quad (4.48b)$$

$-j \leq m \leq 0$

Estas duas equações serão usadas na Seção 4.4 a fim de obter soluções ortonormais para a métrica de Som-Raychaudhuri como limites, quando  $\ell \rightarrow 0$ , das soluções (38).

Antes de passar para as soluções com métricas circulares, devemos observar que a imposição

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\phi|^2 \sim [2^a B_1 e^{-(n+1)\ell r} + 2^b B_2 e^{(n-1)\ell r}]^2 = \text{finito}, \quad (4.49a)$$

ao invés de (33), traz uma única alteração à análise anterior : para  $\Omega^2 < \ell^2$  e  $n = \text{real}$ , devemos fazer  $B_2 = 0$  somente quando  $n > 1$ . Isto significa que, de acordo com esta condição de contorno, devemos interpretar como contínuas todas as energias que satisfaçam à condição



$$\varepsilon^2 \geq \ell^2 \frac{M^2 + k_3^2}{\ell^2 - \Omega^2} \implies \text{energias contínuas} \quad , \quad (4.49b)$$

e discretas em caso contrário. Em razão desta diferença no valor da energia que separa o espectro discreto do espectro contínuo, devemos decidir qual a condição de contorno que deve ser considerada correta. Veremos, na Seção 4.5, que, no problema clássico correspondente ao nosso, é exatamente o limite de energia (49b) que determina a transição de geodésicas limitadas para geodésicas ilimitadas. Postulando, então, que deve haver correspondência entre resultados clássicos e quânticos, devemos adotar (49a) como a condição de contorno apropriada.

Notemos ainda que a condição (33) foi imposta a fim de garantir, aos operadores  $K_{(\pm)}$ , as propriedades (29), usadas na normalização das soluções (38). Resultou, daí, que tais propriedades eram válidas para qualquer solução com  $n > 0$ , e, portanto, para  $n > 1$ , como requer a nova condição.

Ressaltamos finalmente que a adoção de uma ou de outra dessas condições conduz aos mesmos resultados, quando  $\Omega^2 > \ell^2$ . Neste caso se inclui a métrica de Gödel propriamente dita, cujas soluções escalares foram discutidas na referência (13).

#### 4.3.2 - Métricas Circulares

Nas soluções para métricas circulares [ $\ell^2 = -\lambda^2$  em (17)], fazemos a transformação (29)

$$F(a, b, c; y) = C_1 y^{-a} F(a, a-c+1, a+b-c+1; 1 - \frac{1}{y}) +$$

$$+ C_2 (1-y)^{c-a-b} y^{a-c} F(c-a, 1-a, c-a-b+1; 1 - \frac{1}{y}) \quad , \quad (4.50a)$$

onde

$$C_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad C_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad . \quad (4.50b)$$

Substituindo (50), com  $y = (1-x)/2$ , nas soluções (17), encontramos

$$\lim_{x \rightarrow -1} |\phi_m^I|^2 \sim \left| C_1 (1+x)^{\frac{m}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2}} + 2^{\frac{m}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2}} C_2 (1+x)^{-\frac{m}{2} + \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2}} \right|^2 \quad (4.51a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} |\phi_m^{II}| \sim \lim_{x \rightarrow -1} |\phi_m^I|^2 \quad \text{com} \quad \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \quad , \quad m \leftrightarrow -m \quad (4.51b)$$

Para que o limite (51a) seja finito devemos fazer

$$C_1 = 0 \quad , \quad \text{quando } m < \Omega\varepsilon/\lambda^2$$

$$C_2 = 0 \quad , \quad \text{quando } m > \Omega\varepsilon/\lambda^2 \quad .$$

Estas condições podem ser satisfeitas tomando-se, respectivamente<sup>\*</sup>,

$$\left. \begin{aligned} c-a = \text{zero ou inteiro negativo} = -j \\ (\Leftrightarrow n = 2j + 1 + \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2}) \end{aligned} \right\} m \leq \Omega\varepsilon/\lambda^2 \quad , \quad (4.52a)$$

\* À direita de (52a) e (52b) usamos os sinais  $\leq$  e  $\geq$ , ao invés de  $<$  e  $>$ , para que, no limite  $\Omega = 0$ , não sejam eliminadas as soluções com  $m = 0$  (polinômios de Legendre).

$$\left. \begin{aligned} b &= \text{zero ou inteiro negativo} = m-j \\ (\Leftrightarrow n &= 2j+1 - \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2}) \end{aligned} \right\} m \geq \Omega\varepsilon/\lambda^2 \quad . \quad (4.52a)$$

Por intermédio de (12), as equações (52) implicam

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \Omega(2j+1) + [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2] \\ a &= m+1+j, \quad b = m-j-\Omega\varepsilon/\lambda^2, \quad 0 \leq m \leq \Omega\varepsilon/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.53a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -\Omega(2j+1) \pm [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} \\ a &= m+j+1-\Omega\varepsilon/\lambda^2, \quad b = m-j, \quad j \geq m \geq \Omega\varepsilon/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.53b)$$

Procedendo de forma análoga com (51b), encontramos para  $\Phi^{II}$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -\Omega(2j+1) - [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} \\ a' &= j+1-m, \quad b' = -m-j+\Omega\varepsilon/\lambda^2, \quad m \geq \Omega\varepsilon/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.54a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \Omega(2j+1) \pm [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} \\ a' &= j+1-m+\Omega\varepsilon/\lambda^2, \quad b' = -m-j, \quad -j \leq m \leq \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.54b)$$

Vamos usar as notações

$$|\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} \quad (4.55a)$$

$$|\varepsilon_2| = -\Omega(2j+1) + [(\Omega^2+\lambda^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} \quad . \quad (4.55b)$$

Substituindo, então, os parâmetros (54) e (55) em (17) obtemos

as soluções para energias positivas e negativas. Para energias positivas, temos

$$\phi^{I(+)}(\epsilon) = C^I (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (1+x)^{-\frac{\Omega|\epsilon|}{2\lambda^2}} F(m+j+1, m-j-\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2}, m+1; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)} , \quad 0 \leq m \leq \Omega|\epsilon|/\lambda^2 \quad (4.56a)$$

$$\phi^{I(+)}(\epsilon_2) = C^I (x^2-1)^{\frac{m}{2}} (1+x)^{-\frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2}} F(m+j+1-\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2}, m-j, m+1; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon_2|t)} , \quad \frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} \leq m \leq j \quad (4.56b)$$

$$\phi^{II(+)}(\epsilon) = C^{II} (x^2-1)^{-\frac{m}{2}} (1+x)^{\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2}} F(j+1-m+\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2}, -m-j, 1-m; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)} , \quad -j \leq m \leq 0 \quad (4.56b)$$

Para a base completa de soluções escalares com energias positivas, constituída pelo conjunto das soluções (56), os valores de  $m$  estão limitados inferior e superiormente, ao contrário do que ocorre com as soluções para as métricas hiperbólicas. Os intervalos para a variação de  $m$  podem ser reescritos como

$$m \in [-j, \frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2}] , \quad j = \frac{n(\epsilon)}{2} - \frac{\Omega|\epsilon|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} \quad (4.57a)$$

$$m \in [\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2}, j] , \quad j = \frac{n(\epsilon_2)}{2} + \frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} , \quad (4.57b)$$

onde

$$n(\epsilon) = [\Omega^2 \epsilon^2 + \lambda^2 (\epsilon^2 - M^2 - k_3^2 + \lambda^2)]^{1/2} \div \lambda^2 .$$

O limite superior do intervalo (57a) s3o pode ser atingido se  $\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2}$  for inteiro; analogamente, m s3o pode assumir o valor inferior de (57b) se  $\frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2}$  for inteiro. Al3em disso, (57b), mostra que uma condi33o necess3ria para a exist3ncia das solu33es (56b) 3

$$\frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2} + \frac{n(\epsilon_2)}{2} - \frac{1}{2} \geq \frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2}$$

ou, equivalentemente,

$$|\epsilon_2|^2 + 2\Omega|\epsilon_2| \geq M^2 + k_3^2 .$$

Esta 3ltima express3o mostra que, mesmo para o espectro  $\epsilon_2$ , a energia 3 sempre igual ou maior que a massa de repouso da part3cula.

No limite para a m3trica diagonal ( $\Omega \rightarrow 0, \lambda^2 \neq 0$ ), (56a) 3 v3lida apenas para  $m = 0$ , mas tais solu33es s3o linearmente dependentes em rela33o a  $\phi^{II}(m=0)$ . Ent3o, de (56b) e de (56c) resultam

$$\phi^{I(+)} = C^I (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} F(m+j+1, m-j, m+1; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\epsilon| t)} \quad (4.58a)$$

$$0 \leq m \leq j := \left[ \frac{\epsilon^2 - M^2 - k_3^2 + \lambda^2}{4\lambda^2} \right]^{1/2} ,$$

$$\phi^{II(+)} = C^2 (x^2 - 1)^{-\frac{m}{2}} F(j+1-m, -j-m, 1-m; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\epsilon| t)} \quad (4.58b)$$

$$-j \leq m \leq 0 ,$$

com

$$|\epsilon| = [\lambda^2(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2 - \lambda^2]^{1/2} = |\epsilon_2| \quad (\Omega=0). \quad (4.59a)$$

As soluções (58) podem ainda ser postas na forma

$$\phi^{(+)} = C P_j^m(x) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\epsilon| t)} \quad (4.59b)$$

com

$$m \in \left[ - \left( \frac{\epsilon^2 + \lambda^2 - M^2 - k_3^2}{4\lambda^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} = -j, j \right] \quad (4.59c)$$

e com  $P_j^m(x)$  simbolizando os polinômios associados de Legendre. Este é o resultado que deveríamos esperar, pois a eq. (6) se reduz à equação associada de Legendre quando  $\Omega = 0$ , como já havíamos observado.

A normalização das soluções (56) pode ser efetuada de forma semelhante ao caso das métricas hiperbólicas, isto é, usando-se os operadores  $K_{(\pm)}$  e a definição (25) para o produto escalar. Os resultados são

$$\langle \phi_{j'm'}^{I(+)} | \phi_{jm}^{I(+)} \rangle = \frac{|C^{II}|^2 2^{2m - \frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + 1} (2\pi)^3}{4\lambda^2 \left( \frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + 2j + 1 \right)} \frac{j! (m!)^2}{(j+m)!} \times$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + j + 1 - m\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + j + 1\right)} \Delta, \quad 0 \leq m \leq \Omega|\epsilon|/\lambda^2 \quad (4.60a)$$

$$\langle \phi_{j'm'}^{I(+)} | \phi_{jm}^{I(+)} \rangle =$$

$$= \frac{(2\pi)^3 |C^I|^2 2^{2m - \frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + 1}}{4\lambda^2 \left(-\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + 2j + 1\right)} \frac{(m!)^2 (j-m)!}{j!} \times$$

(4.60b)

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + j + 1\right) \Delta}{\Gamma\left(-\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + j + m + 1\right)}, \quad \frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} \leq m \leq j = \frac{n(\epsilon)}{2} - \frac{\Omega|\epsilon|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}$$

$$\langle \phi_{jm'}^{II(+)} | \phi_{jm}^{II(+)} \rangle =$$

$$= \frac{(2\pi)^3 |C^{II}|^2 2^{-2m + \frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + 1}}{4\lambda^2 \left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} + 2j + 1\right)} \frac{[(-m)!]^2 (j+m)!}{j!} \times$$

(4.60c)

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + j + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + j - m + 1\right)} \Delta, \quad -j = \frac{n(\epsilon_2)}{2} + \frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} \leq m \leq 0$$

A normalização das soluções (58) (métrica diagonal) é obtida fazendo-se  $\Omega = 0$  em (60b) e (60c):

$$\langle \phi_{jm'}^{(+)} | \phi_{jm}^{(+)} \rangle = \frac{(2\pi)^3 |C|^2 2^{2m+1}}{4\lambda^2 (2j+1)} \frac{(m!)^2 (j-m)!}{(j+m)!} \Delta, \quad (0 \leq m \leq j)$$

(4.61)

$$\langle \phi_{jm'}^{(+)} | \phi_{jm}^{(+)} \rangle = \frac{(2\pi)^3 |C|^2 2^{1-2m}}{4\lambda^2 (2j+1)} \frac{[(-m)!]^2 (j+m)!}{(j-m)!} \Delta, \quad (-j \leq m \leq 0)$$

Em resumo, as soluções escalares para espaços com métricas circulares apresentam

- a) espectros discretos de energias;
- b) intervalos para a variação de m limitados inferior e superiormente.

Nesta seção, os únicos resultados típicos da teoria de Einstein-Cartan são os que se referem à métrica diagonal, se nos limitarmos ao contexto do Capítulo 3, onde não encontramos nenhum modelo riemanniano com  $\Omega = 0$  e  $\lambda^2 \neq 0$ .

#### 4.4 - LIMITES PARA AS MÉTRICAS DE SOM-RAYCHAUDHURI E DE MIN - KOWSKI

Vamos primeiramente mostrar que as soluções da equação de Klein-Gordon para a métrica de Som-Raychaudhuri podem ser obtidas como limite das soluções para métricas hiperbólicas com  $\Omega^2 > \ell^2$  quando  $\ell^2 \rightarrow 0$  (ou a partir das soluções para métricas circulares,  $\lambda^2 \rightarrow 0$ ). A demonstração se constitui de dois passos:

1º) para  $\ell^2 \rightarrow 0$ , fazemos as aproximações em (38a):

$$b = m-j + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} \approx \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} \quad (4.62a)$$

$$x = \cosh 2\ell r \approx 1 + 2\ell^2 r^2 = 1 + \frac{2\xi}{b} \quad (4.62b)$$

com

$$\xi := \Omega|\varepsilon|r^2, \quad |\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [\Omega^2(2j+1)^2 + M^2 k_3^2]^{1/2} \quad (4.63)$$

2º) após essas aproximações, tomamos o limite das soluções or-



normalizadas quando  $b$  tende ao infinito. Para isto nos valem as relações

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^b = e^\xi \quad (4.64a)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b, c; \frac{\xi}{b}) = F(a, c; \xi) \quad (4.64b)$$

sendo  $F(a, c; \xi)$  a função hipergeométrica confluyente, que tem a propriedade (29)

$$F(a, c; -\xi) = e^{-\xi} F(c-a, c; \xi) \quad (4.65)$$

Então, (62) e (63) nos permitem fazer as seguintes aproximações na solução (38a) e na constante  $C^I$ , dada por (48a),

$$(x-1)^{\frac{m}{2}} (x+1)^{\frac{m}{2} + \frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2}} \rightarrow b^{-\frac{m}{2}} e^m + \frac{m}{2} \frac{m}{\xi^2} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^{\frac{b}{2} + \frac{m}{2}},$$

$$F(m+j+1, m-j + \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, m+1; \frac{1-x}{2}) \rightarrow F(m+j+1, b, m+1; -\frac{\xi}{b}),$$

$$C_m^I \rightarrow b^{\frac{m}{2}} 2^{-m} b^{-\frac{b}{2}} \left[ \frac{2\Omega|\epsilon|}{(2\pi)^3} \frac{(m+j)!}{(m!)^2 j!} \right]^{1/2}.$$

Daí vem

$$\phi^I(+) = B_m^I \xi^{\frac{m}{2}} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^{\frac{b}{2} + \frac{m}{2}} F(m+j+1, b, m+1; -\frac{\xi}{b}) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\epsilon|t)} \quad (4.66)$$

onde

$$B_m^I = \left[ \frac{2\Omega|\epsilon|}{(2\pi)^3} \frac{(m+j)!}{(m!)^2 j!} \right]^{1/2} \quad (4.67)$$

Efetuada o limite de (66) quando  $b \rightarrow \infty$ , encontramos, por meio de (64)

$$\phi_{jm}^{I(+)} = B_m^I \xi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-j, m+1; \xi) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)} \quad (4.68)$$

$m, j \geq 0$  .

Para encontrar o limite de (38b), com  $C^{II}$  dado por (48b), podemos usar a transformação (15) para escrever

$$\phi_{jm}^{II(+)} = C_m^{II} 2^{-m-\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}} (x-1)^{-\frac{m}{2}} (x+1)^{\frac{m}{2} + \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}} F(j+1, -j + \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, 1-m, \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)}$$

Então, seguindo o mesmo caminho que nos levou a (67-68), chegamos a

$$\phi_{jm}^{II(+)} = B_m^{II} \xi^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-m-j, 1-m; \xi) e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)} \quad (4.69a)$$

$$B_m^{II} = \left[ \frac{2\Omega|\epsilon|}{(2\pi)^3} \frac{j!}{[(-m)!]^2 (j+m)!} \right]^{1/2}, \quad -j \leq m \leq 0 \quad (4.69b)$$

As soluções (67-69) já se encontram ortonormalizadas como deveríamos esperar. Essas soluções poderiam ter sido obtidas a partir das soluções válidas para métricas circulares, por meio de um processo semelhante ao anterior.

O limite de (39a) fornece o intervalo de variação para

$m$ :

$$m \in \left[ -j = -\frac{\epsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\Omega|\epsilon|} + \frac{1}{2}, \infty \right) \quad \epsilon > 0 \quad (4.70)$$

Para a métrica de Minkowski, a eq. (1) se reduz à equação de Klein-Gordon em coordenadas cilíndricas para uma partícula livre com Massa  $M$ , cujas soluções são dadas em termos das funções de Bessel,  $J_m$ . Queremos mostrar que essas soluções também podem ser obtidas como limites das soluções para métricas hiperbólicas quando  $\ell \rightarrow 0$ . O processo de limite é semelhante ao que foi usado para obter as soluções para a métrica de Som-Raychau - dhuri com a diferença que agora devemos primeiramente anular  $\Omega$ . Fazendo então a aproximação  $x = 1 + 2\ell^2 r^2$  em (17a), podemos escrever

$$a = \frac{1}{2\ell} [M^2 + k_3^2 - \epsilon^2]^{1/2} = -b$$

$$x = 1 - \frac{2}{a^2} \left(\frac{y}{2}\right)^2, \quad \frac{1-x}{2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{y}{2}\right)^2, \quad x^2 - 1 = -\frac{4}{a^2} \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$x + 1 = 2 \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{y}{2}\right)^2\right],$$

com

$$y := [\epsilon^2 - M^2 - k_3^2]^{1/2} r.$$

Levando essas aproximações a (17a) e tomando o limite para  $a^2 \rightarrow \pm\infty$ , ficamos com

$$R^I(x) \sim \left(\frac{y}{2}\right)^m \lim_{a^2 \rightarrow \infty} F(a, -a, m+1; \frac{1}{a^2} \left(\frac{y}{2}\right)^2) = m! J_m(y),$$

ou seja,

$$\phi^I(r) = C J_m \left( \sqrt{\epsilon^2 - (M^2 + k_3^2)} r \right) e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad m \geq 0 \quad (4.71a)$$

O mesmo processo aplicado a (17b) fornece

$$\phi^{II}(r) = C J_{-m} \left( \sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2} r \right) e^{-i(k\phi + k_3 z + \varepsilon t)} \quad m \leq 0 \quad (4.71b)$$

Essas soluções podem ser reunidas numa única expressão,

$$\phi_m = C J_m \left( \sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2} r \right) e^{-i(m\phi + k_3 z + \varepsilon t)} \quad -\infty < m < \infty, \quad (4.72)$$

e são finitas em  $r = 0$ , em conformidade com o fato de que foram obtidas a partir de soluções que já apresentavam essa propriedade.

#### 4.5 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS CLÁSSICOS

##### 4.5.1 - Introdução

Os resultados que obtivemos para o campo escalar podem ser confrontados com os resultados provenientes do estudo de geodésicas de partículas de teste (sem spin) em espaços do tipo Gödel. É o que faremos a seguir.

As geodésicas podem ser obtidas extremando-se a ação

$$A = \int L(x^i, \dot{x}^i) du \quad , \quad (4.73a)$$

onde  $\dot{x}^i := dx^i/du$ , sendo  $u$  o parâmetro afim, e onde  $L$  é a função lagrangeana,

$$L(x^i, \dot{x}^i) := \frac{M^2}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad . \quad (4.73b)$$

Para as métricas do tipo Gödel, esta lagrangeana não depende ex

plicitamente das coordenadas  $t$ ,  $\phi$  e  $z$ . Dessa forma, as equações de Euler-Lagrange nos fornecem três constantes de movimento, que, nas referências (16), (30) e (31), são designadas por  $p_t$ ,  $p_\phi$  e  $p_z$  e estão definidas por

$$p_t := \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \quad , \quad p_\phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad , \quad p_z := \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad .$$

Façamos a correspondência desses momenta associados às coordenadas  $t$ ,  $\phi$  e  $z$  com os autovalores do campo escalar associados aos vetores de Killing  $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial \phi$  e  $\partial/\partial z$ :

$$\begin{aligned} p_t \text{ (contínua)} &\longleftrightarrow \varepsilon \\ p_\phi \text{ (contínua)} &\longleftrightarrow m = \text{inteiro} \\ p_z \text{ (contínua)} &\longleftrightarrow k_3 \quad . \end{aligned}$$

Nas Refs. acima  $p_t$  é interpretado como a energia da partícula e é considerado positivo. Por isso, vamos escolher as soluções escalares com energias positivas para fins de comparação. As trajetórias clássicas são chamadas de ilimitadas, quando a coordenada  $r$  pode assumir todos os valores pertinentes aos seus domínios de definição dados no Capítulo 1. São chamados de limitadas, quando  $r \in [r_1, r_2]$ , sendo que pelo menos um dos pontos de "retorno",  $r_1$  ou  $r_2$ , não coincide com os extremos para  $r$ , Cap.1.

Ao compararmos os resultados clássicos (31) com os resultados do presente capítulo, constatamos que

- a) as geodésicas limitadas correspondem a soluções escalares com energias discretas; as ilimitadas correspondem a soluções escalares com energias contí-

nuas;

- b) os intervalos de variação do momentum clássico  $p_\phi$  são "equivalentes", no sentido explicado mais abaixo, aos intervalos de variação referentes ao parâmetro quântico  $m$ .

A seguir vamos examinar essas correspondências para cada uma das três classes de métricas: hiperbólicas, circulares, Som-Raychaudhuri.

#### 4.5.2 - Métricas Hiperbólicas

a) Métricas hiperbólicas com  $\Omega^2 \geq \ell^2$  ( $\Rightarrow n > 1$ ): as trajetórias são limitadas com\*

$$p_\phi \in \left[ -\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{2}, \infty \right), \text{ (geodésicas limitadas)} \quad (4.74)$$

ao passo que as soluções escalares têm energias discretas e

$$m \in \left[ -\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = -j, \infty \right) \text{ (campo escalar)} \quad (4.39a)$$

Para a diferença entre os limites inferiores desses intervalos temos

$$0 < -j - \left( -\frac{\Omega\varepsilon}{2\ell^2} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{2} \right) < \frac{1}{2} \quad .$$

---

\* Nas fórmulas clássicas, estamos escrevendo  $\varepsilon$  e  $k_3$  ao invés de  $p_t$  e  $p_z$ . Para comparar os intervalos de variação de  $p_\phi$  e de  $m$ , supomos que a energia que determina o intervalo clássico é igual a um dado valor de energia do espectro quântico.

Isto significa que o intervalo clássico contínuo, (74), contém exatamente os mesmos valores inteiros contidos no intervalo quântico (39a).

b) Métricas hiperbólicas com  $\Omega^2 < \ell^2$ : Neste caso temos geodésicas limitadas, se

$$\epsilon^2 < \ell^2 \frac{M^2 + k_3^2}{\ell^2 - \Omega^2} \quad (\Leftrightarrow n = \text{real} > 1) \quad (4.75)$$

e geodésicas ilimitadas para outros valores de energia. No primeiro caso, o intervalo de variação para  $p_\phi$  ainda é dado por (74), enquanto, para as trajetórias ilimitadas, temos

$$p_\phi \in (-\infty, \infty) : \text{geodésicas ilimitadas} \quad (4.76)$$

O valor de  $\epsilon$  dado por

$$\epsilon^2 = \ell^2 \frac{M^2 + k_3^2}{\ell^2 - \Omega^2}$$

constitui, portanto, a energia que separa as geodésicas limitadas das ilimitadas. Pela equação (49), vemos que esse mesmo valor separa as soluções escalares com energias discretas das soluções com energias contínuas. Observe-se, entretanto, que, para obter essa harmonia entre os resultados clássicos e quânticos, devemos tomar a condição de contorno (49a) para o campo escalar, conforme discutimos no fim da Seção 4.3.1. Por outro lado, o intervalo (41') para a variação de  $m$ , no caso de energias contínuas, está contido no intervalo (76) que determina a variação da correspondente quantidade clássica,  $p_\phi$ .

### 4.5.3 - Métrica de Som-Raychaudhuri

No limite  $\ell \rightarrow 0$ , as soluções clássicas com  $\Omega^2 > \ell^2$  nos fornecem geodésicas limitadas com

$$p_\phi \in \left[ -\frac{p_t^2 - p_z^2 - M^2}{4\Omega p_t}, \infty \right) : \text{(clássico)} \quad . \quad (4.77)$$

As soluções escalares correspondentes a este caso têm energias discretas dadas por (70) com

$$m \in \left[ -\frac{\epsilon^2 - k_3^2 - M^2}{4\Omega\epsilon} + \frac{1}{2} = -j, \infty \right) \text{ (quântico)} \quad . \quad (4.70)$$

Este intervalo está contido em (77), e (77) não inclui nenhum valor inteiro que não esteja contido em (70).

### 4.5.4 - Métricas Circulares

As trajetórias clássicas são sempre limitadas no sentido de que a variável  $x = \cos 2\lambda r$  não assume todos os valores de seu domínio,  $[-1, 1]$ . Os valores de  $p_\phi$  são dados por

$$p_\phi \in \left[ \frac{\Omega\epsilon}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}(n(\epsilon)^2 - 1)^{1/2}, \frac{\Omega\epsilon}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}(n(\epsilon)^2 - 1)^{1/2} \right] . \quad (4.79)$$

Por outro lado, as energias das soluções escalares são sempre discretas, mas temos duas expressões para seu espectro,  $\epsilon$  e  $\epsilon_2$ , com

$$m \in \left[ -j = \frac{\Omega\epsilon}{2\lambda^2} - \frac{n(\epsilon)}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\Omega\epsilon}{\lambda^2} \right] \quad (4.57a)$$



$$m \in \left[ \frac{\Omega \varepsilon_2}{\lambda^2}, j = \frac{\Omega \varepsilon_2}{2\lambda^2} + \frac{n(\varepsilon_2)}{2} - \frac{1}{2} \right] . \quad (4.57b)$$

Para comparar estes intervalos com o intervalo clássico (79), de vemos considerar partículas quânticas com um único valor de energia, isto é,  $\varepsilon = \varepsilon_2$  em (57). Isto implica que o valor de  $j$  em (57b) deve ser maior que o de  $j$  em (57a). Seja  $j' =$  inteiro positivo o limite superior de (57b). Então,

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \text{ se } j' - j = n(\varepsilon) - 1 = \text{inteiro positivo} .$$

Como  $n(\varepsilon)$  é uma função contínua de  $k_3$ , esta condição sempre pode ser satisfeita, através da escolha de um valor conveniente para  $k_3$ . Nesse caso, da união de (57a) e (57b), vem

$$m \in \left[ -j = \frac{\Omega \varepsilon}{2\lambda^2} - \frac{n(\varepsilon)}{2} + \frac{1}{2}, j' = \frac{\Omega \varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{n(\varepsilon)}{2} - \frac{1}{2} \right] . \quad (4.80)$$

Este intervalo está contido no intervalo (79) e podemos mostrar facilmente que o intervalo clássico não inclui nenhum valor inteiro que não esteja contido no intervalo quântico. Essa conclusão também se aplica ao limite  $\Omega = 0$  (métrica diagonal), para o qual temos os intervalos simétricos

$$p_\phi \in \left[ -\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\lambda^2}}, \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\lambda^2}} \right] \text{ (clássico)} \quad (4.81a)$$

$$m \in \left[ -\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\lambda^2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\lambda^2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] . \text{ (quântico)} \quad (4.81b)$$

#### 4.6 - OPERADORES COM ÁLGEBRA DE MOMENTUM ANGULAR

Para  $\ell \neq 0$ , vamos definir os operadores  $L_i$  através de

$$L_1 = \frac{K_{(3)}}{2\ell} \quad , \quad L_2 = \frac{K_{(4)}}{2\ell} \quad , \quad L_3 = \frac{i\partial}{\partial\phi} + \frac{i\Omega}{2\ell^2} \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad (4.82a)$$

e os operadores  $L_{(\pm)}$  por meio de

$$L_{(\pm)} = \frac{K_{(\pm)}}{2\ell} = L_1 \pm iL_2 \quad , \quad (4.82b)$$

onde  $K_{(3)}$  e  $K_{(4)}$  são os vetores de Killing (3.55b,c), e  $K_{(\pm)}$  são os operadores (22). Usando a álgebra (3.56) dos vetores de Killing, encontramos

$$[L_i, L_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (4.83a)$$

$$[L_{(+)}, L_{(-)}] = 2L_3 \quad , \quad [L_{(+)}, L_3] = -L_{(+)} \quad , \quad (4.83b)$$

$$[L_{(-)}, L_3] = L_{(-)} \quad .$$

Estas propriedades dos operadores (82) constituem uma álgebra de momentum angular. Além disso, se definirmos o quadrado do "momentum angular total",  $L^2$ , por

$$L^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 \quad , \quad (4.84)$$

podemos escrever a equação de Klein-Gordon como

$$L^2\phi = \frac{1}{4\ell^2} \left( \frac{\ell^2 - \Omega^2}{\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + M^2 \right) \phi \quad . \quad (4.85)$$

Para soluções escalares com a forma dada em (4), temos

$$L^2 \phi_m = \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^4} \epsilon^2 + \frac{M^2 + k_3^2}{\ell^2} \right) \phi_m = \frac{n^2 - 1}{4} \phi_m, \quad (4.86)$$

ou seja, as soluções  $\phi_m$  são autofunções do operador  $L^2$ . Por outro lado, de acordo com interpretação decorrente das condições de contorno (28) e (49a), sempre que  $n > 1$ , temos soluções com energias discretas, ao passo que para  $n^2 \leq 1$  as soluções apresentam energias contínuas. Daí e da equação (86), vemos que os autovalores de  $L^2$  são positivos para soluções com energias discretas e negativos ou nulos para soluções com energias contínuas. A negatividade dos autovalores de  $L^2$ , no caso das métricas hiperbólicas, está de acordo com o fato de que os operadores  $L_1$  e  $L_2$  usados para definir  $L^2$  não são hermitianos em relação ao produto escalar definido pela eq. (23), conforme podemos verificar usando as relações (26) e as definições (82). Mais especificamente, temos as seguintes propriedades para os operadores  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\langle L_i \phi(m') | \phi(m) \rangle = \langle \phi(m') | L_i \phi(m) \rangle, \quad \ell^2 < 0,$$

$$\langle L_i \phi(m') | \phi(m) \rangle = - \langle \phi(m') | L_i \phi(m) \rangle, \quad \ell^2 > 0, n^2 > 1,$$

$$\langle L_i \phi(m') | \phi(m) \rangle \neq \pm \langle \phi(m') | L_i \phi(m) \rangle, \quad \ell^2 > 0, n^2 \leq 1.$$

Vemos daí que os operadores  $L_1$  e  $L_2$  são: a) hermitianos para as soluções escalares, em espaços com métricas circulares; b) antihermitianos para as soluções com energias discretas em espaços com métricas hiperbólicas; c) nem hermitianos nem antihermitia-

nos, para as soluções com energias contínuas (métricas hiperbólicas).

Finalmente, devemos observar que as definições (82) , baseadas em simples combinações lineares de  $K_{(+)}$  e  $K_{(-)}$ , com coeficientes constantes, não podem ser estendidas para as métricas com  $\ell = 0$ . Para a métrica de Minkowski, em particular,  $K_{(+)}$  e  $K_{(-)}$  podem ser reescritos num sistema de coordenadas cartesianas como

$$K_{(\pm)} = i(-i\frac{\partial}{\partial x}) \pm (-i\frac{\partial}{\partial y}) = ip_x \pm p_y \quad ,$$

onde  $p_x$  e  $p_y$  são as componentes do operador de momentum linear ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ .

## CAPÍTULO 5

### EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS DO TIPO GÖDEL

#### 5.1 - GENERALIDADES

O tema deste capítulo é a dinâmica de partículas de Dirac acopladas com a gravitação dos universos do tipo Gödel. Analogamente ao que fizemos ao trabalharmos com o campo escalar, supomos aqui que os férmions:

- a) são partículas de teste, que não geram curvatura,
- b) não interagem com o campo eletromagnético de origem cosmológica, se houver.

A primeira dessas hipóteses implica que a densidade  $\psi^\dagger\psi$  deve ser finita em qualquer ponto do espaço-tempo. Da segunda hipótese, decorre que, em se tratando de neutrinos, os resultados que obteremos são válidos para qualquer dos modelos discutidos no Capítulo 3; porém, para férmions massivos, sua validade fica restrita a espaços sem campo eletromagnético. Uma generalização relativamente simples desses resultados pode ser obtida acoplando-se os férmions com os potenciais (3.47b) e procedendo como no Apêndice A, onde discutimos o caso escalar.

Nesta seção, discutimos algumas propriedades genéricas das soluções fermiônicas e, através do estudo das constantes de movimento do problema, mostramos que existem apenas du-

as componentes espinoriais independentes. A determinação dessas componentes e a análise das soluções, para cada classe de métricas do tipo Gödel, seguirá o roteiro exposto no último parágrafo da presente seção.

Como, para um fluido de Weyssenhoff, o traço da contorção é nulo, a equação (2.42a) se reduz a

$$[\gamma^A (\partial_A + \Gamma_A) + iM] \psi =: (\gamma^A D_A + iM) \psi = 0 \quad , \quad (5.1a)$$

$$\Gamma_A = \frac{1}{4} (\gamma_{CBA} - K_{CBA}) \gamma^C \gamma^B \quad , \quad \partial_A = e^i_A \partial_i \quad . \quad (5.1b)$$

Lembrando que, nestas equações

$$K_{ABC} = -\kappa (u_A S_{BC} + u_B S_{CA} - u_C S_{AC}) \quad (2.65)$$

$$u_A = \eta_{0A} \quad (3.8)$$

$$e^0_{(0)} = e^1_{(1)} = e^3_{(3)} = 1 \quad , \quad e^0_{(2)} = -\frac{H}{D}, \quad e^2_{(2)} = \frac{1}{D} \quad (3.46)$$

$$\gamma_{120} = -\gamma_{210} = -\gamma_{012} = \gamma_{102} = \gamma_{021} = -\gamma_{201} = \Omega, \quad \gamma_{122} = -\gamma_{212} = \frac{D'}{D} \quad , \quad (3.5)$$

e que as únicas componentes de  $S_{AB}$  que não se anulam são  $S_{12} = -S_{21} = S$ , encontramos

$$\Gamma_0 = \frac{\kappa S - \Omega}{2} \gamma^1 \gamma^2 \quad , \quad \Gamma_1 = \frac{\kappa S - \Omega}{2} \gamma^1 \gamma^2$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Omega - \kappa S}{2} \gamma^0 \gamma^1 + \frac{D'}{2D} \gamma^1 \gamma^2 \quad , \quad \Gamma_3 = 0 \quad .$$

Então, as derivadas covariantes dos espinores podem ser escri -

tas como

$$\begin{aligned} D_0 \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\kappa S - \Omega) \gamma^1 \gamma^2 \psi \quad , \\ D_1 \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{2} (\kappa S - \Omega) \gamma^0 \gamma^2 \psi \quad , \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$D_2 \psi = -\frac{H}{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{D} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \left[ \frac{D'}{2D} \gamma^1 \gamma^2 + \frac{1}{2} (\Omega - \kappa S) \gamma^0 \gamma^1 \right] \psi \quad ,$$

$$D_3 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad .$$

Representando as matrizes de Dirac por

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^A \\ -\sigma^A & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad , \\ & \quad \quad \quad (A = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

com as matrizes de Pauli  $\sigma^A$  descritas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (5.4)$$

e substituindo (2) em (1a), obtemos

$$\boxed{i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi} + M \gamma^0) \psi} \quad . \quad (5.5)$$

Nesta equação  $\vec{\Sigma}$  simboliza as matrizes de spin

$$\Sigma^A = \begin{pmatrix} \sigma^A & 0 \\ 0 & \sigma^A \end{pmatrix} = \gamma^5 \gamma^0 \gamma^A \quad (A = 1, 2, 3) \quad (5.6a)$$

e

$$\pi^1 := -i \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{D'}{2D} \quad , \quad \pi^2 := i \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad \pi^3 = -i \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^5 \frac{\Omega - \kappa S}{2} \quad (5.6b)$$

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi} := \pi^1_{\Sigma^1} + \pi^2_{\Sigma^2} + \pi^3_{\Sigma^3} \quad . \quad (5.6c)$$

O operador

$$\hat{H} := \gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi} + M\gamma^0 \quad , \quad (5.7)$$

na equação (5), pode ser interpretado como o operador hamiltoniano que determina o desenvolvimento temporal do sistema. A helicidade  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi}$  em geral não comuta com  $\hat{H}$ , e, portanto, não constitui uma constante de movimento. Mas, definindo  $\hat{C}$  por

$$\hat{C} = -\gamma^5 i \frac{\partial}{\partial z} + M\gamma^3 \gamma^5 = \gamma^5 \pi^3 + M\gamma^3 \gamma^5 - \frac{1}{2} (\Omega - \kappa S) \quad , \quad (5.8a)$$

encontramos

$$[\hat{C}, \hat{H}] = 0 \quad , \quad (5.8b)$$

isto é,  $\hat{C}$  representa uma constante de movimento. Além disso os operadores (7), (8),  $i \frac{\partial}{\partial \phi}$  e  $i \frac{\partial}{\partial z}$  formam um conjunto de operadores compatíveis entre si e podemos, por isso, escolher autofunções simultâneas de todos eles. Sejam, pois, as equações de autovalores

$$\hat{H}\psi = i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \varepsilon \psi \quad , \quad i \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = m\psi \quad , \quad i \frac{\partial \psi}{\partial z} = k_3 \psi \quad (5.9)$$

e façamos a separação de variáveis

$$\psi = R(r) \Phi(\phi) Z(z) T(t) \quad , \quad (5.10a)$$

com

$$R = (R_1, R_2, R_3, R_4)^T \quad , \quad (5.10b)$$

onde T significa "transposta". Daí, segue-se que



$$\psi = R(r) e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad (5.11)$$

As equações (9) equivalem à construção de modos globalmente invariantes dos vetores de Killing  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \phi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ , como no caso do campo escalar. O autovalor  $\epsilon$  de  $\hat{H}$  é a energia do sistema. Para as soluções (11), os autovalores de  $\hat{C}$  são dados por

$$\hat{C}\psi = -e \sqrt{M^2 + k_3^2} \psi \quad , \quad e = \pm 1 \quad , \quad (5.12a)$$

se a massa  $M$  for diferente de zero. Para neutrinos ( $M = 0$ ) temos

$$\hat{C}\psi = -k_3 L \psi \quad , \quad L = \pm 1 \quad , \quad (5.12b)$$

onde  $L$  é o autovalor do operador de helicidade dos neutrinos  $\gamma^5$ . Para que (12b) possa ser obtida como limite de (12a), quando  $M \rightarrow 0$  (ou  $k_3^2 \gg M^2$ ), devemos ter

$$Lk_3 = e |k_3| \quad \text{ou} \quad L = \text{esn}(k_3) \quad , \quad (5.13)$$

com  $\text{sn}(k_3)$  significando "sinal de  $k_3$ ".

Substituindo  $\hat{C}$  em (12b) pela expressão (8a) e usando (10b), encontramos

$$R_3 = \gamma_{(+)} R_1 \quad , \quad R_4 = \gamma_{(-)} R_2 \quad , \quad (5.14)$$

$$\gamma_{(\pm)} := \frac{\pm M + e \sqrt{M^2 + k_3^2}}{k_3} \quad , \quad \gamma_{(+)} \gamma_{(-)} = 1 \quad , \quad (5.15)$$

ou seja,

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \gamma_{(+)} R_1 \\ \gamma_{(-)} R_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{pmatrix} R_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{pmatrix} R_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

onde introduzimos a matriz A, definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (5.17)$$

com a finalidade de simplificar a notação das próximas seções . Em virtude de (11) e de (16), basta determinar as funções  $R_1$  e  $R_2$  para que tenhamos as soluções da equação de Dirac. Usando (8a), podemos reescrever a equação (5) como

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \gamma^5 (\Sigma^1 \pi^1 + \Sigma^2 \pi^2) + \Sigma^3 (\hat{C} + \frac{\Omega - \kappa S}{2}) \right] \psi \quad . \quad (5.17)$$

Por intermédio de (3), (4), (9), (12a) e (16), esta equação se reduz ao sistema de equações acopladas

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{D'}{2D} - \frac{\epsilon H}{D} + \frac{m}{D} \right) R_1 = i \gamma_{(-)} (\epsilon - K) R_2 \quad , \quad (5.18a)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{D'}{2D} + \frac{\epsilon H}{D} - \frac{m}{D} \right) R_2 = i \gamma_{(+)} (\epsilon + K) R_1 \quad , \quad (5.18b)$$

com  $K$  dado por

$$K := e \sqrt{M^2 + k_3^2} - \frac{1}{2} (\Omega - \kappa S) \quad (5.19)$$

As relações (14) e as equações (18) foram obtidas supondo-se que  $k_3$  é diferente de zero. Supondo agora que  $k_3$  é nulo, encontramos, ao invés de (14):  $R_2=R_3=0$ , se  $e = -1$ ;  $R_1=R_4 = 0$ , se  $e = 1$ . Então, a equação (17) se reduz novamente a um sistema de duas equações diferenciais, para cada um desses casos. Se compararmos essas equações com as equações que obtemos quando tomamos  $\gamma_{(\pm)} = 1$  em (18), veremos que as soluções para  $k_3 = 0$  podem ser obtidas através de

$$R = \sqrt{2} \lim_{k_3 \rightarrow 0} \begin{pmatrix} R_1(\gamma_{(\pm)}=1) \\ 0 \\ 0 \\ R_2(\gamma_{(\pm)}=1) \end{pmatrix} (e=1), \quad R = \sqrt{2} \lim_{k_3 \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ R_2(\gamma_{(\pm)}=1) \\ R_1(\gamma_{(\pm)}=1) \\ 0 \end{pmatrix} (e=1), \quad (5.20)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são as soluções das equações (18). Escrevemos  $R_1(\gamma_{(\pm)}=1)$  e  $R_2(\gamma_{(\pm)}=1)$  em (20) para ressaltar que, antes de efetuar o limite, devemos fazer  $\gamma_{(\pm)} = 1$  nas soluções de (18) [veja eqs. (33-34)]. O fator  $\sqrt{2}$  garante que as soluções (20) satisfazem a mesma lei de normalização que as soluções (16); se as soluções (16) estiverem ortonormalizadas, por exemplo, o mesmo ocorrerá com (20).

Vamos agora acoplar a equação (5) com um campo eletromagnético, através da substituição

$\partial_A \rightarrow \partial_A - iqA_A$  , ( $A_A$  = potencial no sistema de tetradas).

Obtemos

$$[-\gamma^0(\pi^0 + qA_0) + \gamma^1(\pi^1 + qA^1) + \gamma^2(\pi^2 + qA^2) + \gamma^3(-i\frac{\partial}{\partial z} + qA^3) + \gamma^3\gamma^5(\frac{\Omega - \kappa S}{2}) + M]\psi = 0 \quad . \quad (\pi^0 = i\frac{\partial}{\partial t}) \quad . \quad (5.21a)$$

Trocando  $q$  por  $-q$  e  $\psi$  por  $\psi_c$  nesta equação, ficamos com

$$[-\gamma^0(\pi^0 - qA_0) + \gamma^1(\pi^1 - qA^1) + \gamma^2(\pi^2 - qA^2) + \gamma^3(-i\frac{\partial}{\partial z} - qA^3) + \gamma^3\gamma^5(\frac{\Omega - \kappa S}{2}) + M]\psi_c = 0 \quad . \quad (5.21b)$$

A "conjugação de carga" é a operação que nos permite obter as soluções de (21b) a partir das soluções de (21a). Em outras pa-lavras, essa operação nos permite obter as soluções da equação de Dirac para uma partícula com massa  $M$  e carga  $-q$  a partir das soluções que descrevem um fêrmion com carga  $+q$  e com mesma mas-sa. Para realizar essa operação, tomemos o complexo conjugado de (21a). Tendo em vista que

$$\pi^{a*} = -\pi^a \quad (a = 0, 1, 2) \quad , \quad A^{a*} = A^a \quad (a = 0, 1, 2, 3)$$

ficamos com

$$\left\{ \sum_{a=0}^2 \gamma_a^*(\pi^a - qA^a) \right] - \gamma^{3*}(-i\frac{\partial}{\partial z} - qA^3) + \gamma^{3*}\gamma^{5*}(\frac{\Omega - \kappa S}{2}) + M \left\} \psi^* = 0 \quad .$$

Comparando esta equação com (21b), vemos que, se pudermos encontrar uma matriz  $B$  não singular, tal que

$$B\gamma^{A*}B^{-1} = -\gamma^A \quad (A=0,1,2,3) \quad , \quad B\gamma^{3*}\gamma^{5*}B^{-1} = \gamma^3\gamma^5 \quad , \quad (5.22a)$$

poderemos, então, expressar a solução de (21b) como

$$\psi_C = B\psi^* \quad .$$

É fácil verificar que as matrizes

$$B = B^{-1} = B^\dagger = \pm i\gamma^2 \quad (5.22b)$$

satisfazem as propriedades (22a) e, portanto,

$$\boxed{\psi_C = \pm i\gamma^2\psi^*} \quad . \quad (5.23)$$

Além disso, se  $\psi$  satisfaz as equações de autovalores (9), então,

$$i \frac{\partial \psi_C}{\partial t} = -\epsilon \psi_C \quad , \quad i \frac{\partial \psi_C}{\partial \phi} = -m \psi_C \quad , \quad i \frac{\partial \psi_C}{\partial z} = -k_3 \psi_C \quad . \quad (5.24a)$$

Por outro lado, para neutrinos temos

$$\gamma^5 \psi = L \psi \quad .$$

Daqui e de (23), segue-se que, além de (24), vale a equação de autovalores

$$\gamma^5 \psi_C = -L \psi_C \quad , \quad (5.24b)$$

ou seja, as soluções  $\psi_C$  têm helicidade contrária à dos correspondentes neutrinos  $\psi$ . Esta última propriedade permite transformar uma solução de energia negativa, para uma partícula de

massa  $M$  e carga  $q$ , numa solução de energia positiva, para uma "antipartícula" com massa  $M$  e carga  $-q$ . Na realidade, todos os resultados que aqui obtivemos para a conjugação de carga são idênticos aos que se obtêm em espaços de Minkowski <sup>(32)</sup>; nestes o operador  $I\partial_A$  é diagonal e comuta com qualquer matriz constante, ao passo que nos espaços curvos isso não ocorre necessariamente com a derivada covariante  $D_A$ . Esse foi o motivo para a demonstração acima.

Em prosseguimento, apresentamos, na Seção 5.2, as soluções das equações (18) e, para normalizá-las, construímos operadores  $J_{(\pm)}$ . Na Seção 5.8, exigindo que essas soluções sejam finitas em todos os pontos do espaço-tempo, encontramos os espectros de energia e normalizamos os espinores com energias discretas. Na Seção 5.4, mostramos que as soluções relativas às métricas de Som-Raychaudhuri podem ser obtidas como limites das soluções referentes às métricas hiperbólicas. Na última seção discutimos os limites para a métrica de Minkowski.

## 5.2 - SOLUÇÃO GERAL E OPERADORES $K_{(\pm)}$

Substituindo, em (18),  $D$  e  $H$  pelas expressões

$$D = \frac{\sinh 2\ell r}{2\ell} \quad , \quad H = \frac{\Omega}{\ell^2} \sinh^2 \ell r \quad (5.25)$$

e efetuando a mudança de variável

$$x = \cosh 2\ell r \quad , \quad (5.26)$$

ficamos com

$$\left( 2\ell\sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} + \frac{\ell x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\Omega\epsilon}{\ell} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2\ell m}{\sqrt{x^2-1}} \right) R_1 = i\gamma_{(-)} [\epsilon-K] R_2 \quad (5.27a)$$

$$\left( 2\ell\sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} + \frac{\ell x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\Omega\epsilon}{\ell} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{2\ell m}{\sqrt{x^2-1}} \right) R_2 = i\gamma_{(+)} [\epsilon+K] R_1 \quad (5.27b)$$

De (27a), temos

$$R_2 = \frac{1}{i\gamma_{(-)} [\epsilon-K]} \left( 2\ell\sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} + \frac{\ell x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\Omega\epsilon}{\ell} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2\ell m}{\sqrt{x^2-1}} \right) R_1 \quad (5.28)$$

que, ao ser substituída em (27b), fornece

$$\left\{ (x^2-1) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2(x+1)} \left( \frac{\Omega\epsilon}{\ell} - 1 \right) \left( \frac{\Omega\epsilon}{\ell} + 2m \right) - \frac{(m + \frac{1}{2})^2}{x^2-1} + \right. \\ \left. - \frac{1}{4\ell^2} \left[ \left( \frac{\Omega\epsilon}{\ell} - 1 \right) \epsilon^2 - \ell^2 + K^2 \right] \right\} R_1 = 0 \quad (5.29)$$

Fazendo a substituição

$$R_1 = (x^2-1)^{\frac{2m+1}{4}} (x+1)^{\frac{\Omega\epsilon}{2\ell} - \frac{1}{2}} f(x) \quad (5.30)$$

na eq. (29), encontramos que  $f(x)$  deve ser solução de

$$z(z-1) \frac{d^2 f}{dz^2} + [c-(a+b+1)z] \frac{df}{dz} - abf = 0 \quad (5.31a)$$

com

$$z = \frac{1-x}{2} \quad (5.31b)$$

$$a = m + \frac{1}{2} + \frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} + \frac{n}{2} \quad , \quad b = m + \frac{1}{2} + \frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} - \frac{n}{2} \quad , \quad c = m + \frac{3}{2} \quad (5.32a)$$

$$n := \left[ \frac{\Omega^2 - \ell^2}{\ell^4} \epsilon^2 + \frac{K^2}{\ell^2} \right]^{1/2} \quad . \quad (5.32b)$$

Uma solução geral de (31) é dada por

$$f(x) = C_1 F(a, b, c; \frac{1-x}{2}) + C_2 (x-1)^{1-c} (x+1)^{c-a-b} F(1-a, 1-b, 2-c; \frac{1-x}{2}) \quad .$$

No entanto, para que  $R_1$  seja finito em  $x = 1$ , devemos tomar

$$C_2 = 0 \quad , \quad \text{quando } m \geq -\frac{1}{2}$$

$$C_1 = 0 \quad , \quad \text{quando } m \leq -\frac{1}{2}$$

e, assim, obtemos duas expressões para  $R_1$ , que indicamos por I e II,

$$R_1^I = C^I i\gamma_{(-)} (\epsilon - K) (x^2 - 1)^{\frac{2m+1}{4}} (x+1)^{\frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} - \frac{1}{2}} F(a, b, m + \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad m \geq -\frac{1}{2} \quad (5.33a)$$

$$R_1^{II} = C^{II} \gamma_{(-)} (-2m+1) \ell (x^2 - 1)^{-\frac{2m+1}{4}} (x+1)^{-\frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} + \frac{1}{2}} F(a', b', \frac{1}{2} - m; \frac{1-x}{2}) \quad m \leq -\frac{1}{2} \quad (5.33b)$$

$$a' = 1 - b = \frac{1}{2} - m - \frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} + \frac{n}{2} \quad , \quad b' = 1 - b = \frac{1}{2} - m - \frac{\Omega \epsilon}{2\ell^2} - \frac{n}{2} \quad , \quad (5.33c)$$

sendo que as constantes multiplicativas,  $i\gamma_{(-)} [\epsilon - K]$  e  $\ell \gamma_{(-)} (-2m+1)$ , foram acrescentadas para que, mais adiante, a ope-



ração de "conjugação de carga" se torna mais simples. Substituindo (33a) e (33b) em (28), encontramos, respectivamente,

$$R_2^I = C^I \ell (2m+1) (x^2-1)^{\frac{2m-1}{4}} (x+1)^{\frac{\Omega \varepsilon}{2\ell} + \frac{1}{2}} F(a, b, m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad m \geq -\frac{1}{2} \quad (5.34a)$$

$$R_2^{II} = iC^{II} (\varepsilon+K) (x^2-1)^{-\frac{2m-1}{4}} (x+1)^{-\frac{\Omega \varepsilon}{2\ell} - \frac{1}{2}} F(1-b, 1-a, \frac{3}{2}-m; \frac{1-x}{2}) \quad (5.34b)$$

$$m \leq -\frac{1}{2}$$

Então, as soluções da forma (16), finitas em  $r = 0$ , podem ser escritas como

$$\psi^I = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{pmatrix} R_1^I \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{pmatrix} R_2^I \end{pmatrix} e^{-i(m\phi+k_3 z+\varepsilon t)} \quad (5.35a)$$

$$m \geq -\frac{1}{2}$$

$$\psi^{II} = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{pmatrix} R_1^{II} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{pmatrix} R_2^{II} \end{pmatrix} e^{-i(m\phi+k_3 z+\varepsilon t)} \quad (5.35b)$$

$$m \leq -\frac{1}{2}$$

As relações (28)

$$\lim_{m \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (m + \frac{1}{2}) F(a, b, m+\frac{1}{2}; z) = [abzF(a+1, b+1, 2; z)]_{m=-\frac{1}{2}} \quad (5.36a)$$

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z) \quad (5.36b)$$

nos permitem mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow -\frac{1}{2}} \psi^I(m) = \frac{i(\epsilon-K)}{4\ell} 2^{-\frac{\Omega\epsilon}{\ell^2}} \frac{C^I}{C^{II}} \psi^{II}(m = -\frac{1}{2}) \quad (5.37)$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \frac{1}{2}} \psi^{II}(m) = \frac{i(\epsilon+K)}{4\ell} 2^{\frac{\Omega\epsilon}{\ell^2}} \frac{C^{II}}{C^I} \psi^I(m = \frac{1}{2}) \quad (5.38)$$

ou seja, o valor de m em (35b) pode ser estendido até m = 1/2.  
Porém, para m = ±1/2, as soluções (35a) e (35b) são linearmente dependentes.

Também podemos constatar que, em (33) e (34),

$$C^{II}R^I_2(-\epsilon, -m, k_3) = \gamma_{(+)} C^IR^{II}_1(\epsilon, m, k_3) \quad , \quad (5.39a)$$

$$C^{II}R^I_1(-\epsilon, -m, k_3) = -\gamma_{(+)} C^IR^{II}_1(\epsilon, m, k_3) \quad , \quad (5.39b)$$

$$A\gamma^2 = \gamma^2A \quad . \quad (5.39c)$$

Com isso torna-se fácil mostrar que para M ≠ 0 temos

$$\psi^{II}(\epsilon, m, k_3) = B i\gamma^2 [\psi^I(-\epsilon, -m, -k_3)]^* \quad (5.40a)$$

$$B = \begin{cases} C^{II}/C^{I*} & , \quad \text{se } \ell^2 > 0 \\ (-i)^m + \frac{1}{2} C^{II}/C^{I*} & , \quad \text{se } \ell^2 < 0 \end{cases} \quad (5.40b)$$

Para neutrinos (M = 0), a troca de k<sub>3</sub> por -k<sub>3</sub> só deixa K inalterado, como no caso acima, quando simultaneamente trocamos L por -L [ver eqs. (13) e (19)]. Tendo isto em vista, encontramos

$$\psi^{II}(\epsilon, m, k_3, L) = Bi\gamma^2 [\psi^I(-\epsilon, -m, -k_3, -L)]^* \quad (M = 0) \quad . \quad (5.40b)$$

As equações (23), (24) e (40) nos autorizam concluir que as soluções  $\psi^I$  e  $\psi^{II}$  estão relacionadas através da operação de conjugação de carga. Em outros termos, a operação de conjugação de carga deixa invariante o conjunto formado pelas soluções  $\psi^I$  e  $\psi^{II}$ . Isto é o que deveríamos esperar, pois, na ausência de campo eletromagnético, a equação (21a) é igual à equação (21b).

Definindo agora os operadores  $K_{(+)}$  e  $K_{(-)}$  através de

$$K_{(\pm)} = e^{\mp i\phi} \left[ 2\ell \sqrt{x^2-1} \frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{i\Omega}{\ell} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{2i\ell x}{\sqrt{x^2-1}} \frac{\partial}{\partial \phi} \mp \frac{\ell \Sigma^3}{\sqrt{x^2-1}} \right] , \quad (5.41)$$

encontramos

$$K_{(+)} \psi^I(m) = -\frac{2\ell ab}{3+2m} \psi^I(m+1) , \quad K_{(-)} \psi^I(m) = 2\ell(1+2m) \psi^I(m-1) , \quad (5.42a)$$

$$K_{(+)} \psi^{II}(m) = 2\ell(1-2m) \psi^{II}(m+1) , \quad K_{(-)} \psi^{II}(m) = -\frac{2\ell a'b'}{3-m} \psi^{II}(m-1) . \quad (5.42b)$$

Portanto, o operador  $K_{(+)}$  (ou  $K_{(-)}$ ) aumenta (ou diminui) de uma unidade o valor de  $m$  nas soluções espinoriais. Por outro lado, pelas equações (37), (38) e (42), obtemos

$$K_{(+)} \psi^{II}(m=-\frac{1}{2}) \sim \psi^I(m=\frac{1}{2}) , \quad K_{(-)} \psi^I(m=\frac{1}{2}) \sim \psi^{II}(m=-\frac{1}{2}) . \quad (5.43)$$

Estas relações nos possibilitam gerar todo o conjunto das soluções (35) por aplicações sucessivas dos operadores  $K_{(+)}$  e  $K_{(-)}$  a uma solução com um dado valor  $m_0$  para  $m$ , positivo ou negativo.

Podemos ainda reescrever as expressões (41) numa forma mais geral, aplicável às soluções referentes a todos os ca -

solos particulares das métricas do tipo Gödel:

$$\begin{aligned}
 K_{(\pm)} &= e^{\mp i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mp i \left( \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \mp \frac{\Sigma^3}{2D} \right] = \\
 &= K_{(3)} \pm iK_{(4)} \mp e^{\mp i\phi} \frac{\Sigma^3}{2D} , \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

onde  $K_{(3)}$  e  $K_{(4)}$  são os vetores de Killing (3.55b) e (3.55c). Para a métrica de Minkowski ( $D = r$ ,  $H = 0$ ), ficamos com

$$K_{(\pm)} = e^{\mp i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mp \frac{\Sigma^3}{2r} \right] .$$

O termo com a matriz de spin pode ser eliminado desta expressão, por meio da transformação unitária

$$\tilde{O} \rightarrow U\tilde{O}U^\dagger , \quad U := \cos \frac{\phi}{2} - i \Sigma^3 \sin \frac{\phi}{2} , \quad (5.45a)$$

nos operadores  $\tilde{O}$ . Encontramos

$$U\Sigma^3U^\dagger = \Sigma^3 , \quad U\left(i\frac{\partial}{\partial \phi}\right)U^\dagger = i\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\Sigma^3}{2} , \quad (5.45b)$$

e, portanto,

$$UK_{(\pm)}U^\dagger = e^{\mp i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \mp i\frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \quad (5.46a)$$

ou, em coordenadas cartesianas ( $x = r\cos\phi$ ,  $y = r\sin\phi$ ),

$$UK_{(\pm)}U^\dagger = \frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y} = ip_x \pm p_y . \quad (5.46b)$$

Esta expressão é a mesma que havíamos encontrado para os operadores  $L_{(\pm)}$ , no caso do campo escalar. Para uma partícula carre-

gada interagindo com um campo magnético constante  $B$ , dirigido ao longo do eixo  $z$  de um sistema de coordenadas cartesianas, podemos obter os operadores  $K_{(\pm)}$  através do acoplamento mínimo

$$\frac{\partial}{\partial X} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - iqA_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial Y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} - iqA_y \quad , \quad A_x = -\frac{B}{2}y \quad , \quad A_y = \frac{B}{2}x \quad ,$$

ou seja,

$$K_{(\pm)} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{iqB}{2} y \right) \mp i \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{iqB}{2} x \right) \quad . \quad (5.47)$$

Os operadores (47) coincidem com os que foram usados por Johnson e Lipmann<sup>(33)</sup> a fim de construir as soluções da equação de Dirac para o problema em questão.

Para  $\ell \neq 0$ , vamos definir os operadores  $J_{(\pm)}$  através de

$$J_{(\pm)} = K_{(\pm)} / (2\ell) \quad (5.48a)$$

e os operadores  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  por meio de

$$J_1 = \frac{J_{(+)} + J_{(-)}}{2} \quad , \quad J_2 = \frac{J_{(+)} - J_{(-)}}{2i} \quad , \quad J_3 = \frac{i\partial}{\partial \phi} + \frac{i\Omega}{2\ell} \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (5.48b)$$

Usando a álgebra dos vetores de Killing, temos

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \quad \epsilon_{123} = 1 \quad (5.49a)$$

$$[J_{(+)}, J_{(-)}] = 2J_3 \quad , \quad [J_{(+)}, J_3] = -J_{(+)} \quad , \quad [J_{(-)}, J_3] = -J_{(-)} \quad , \quad (5.49b)$$

isto é, os operadores (48) satisfazem à álgebra dos operadores

do momentum angular. O operador de "momentum angular total" ao quadrado, definido por,

$$J^2 = (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2 \quad , \quad (5.50a)$$

comuta com os operadores que representam constantes de movimento na Seção 5.1;  $\hat{H}$ ,  $\hat{C}$ ,  $-i\partial/\partial\phi$ ,  $-i\partial/\partial t$ . Então,  $J^2$  também é uma constante de movimento. Para as soluções (35), temos a equação de autovalores

$$J^2\psi = \frac{n^2-1}{4} \psi(m) = \frac{1}{4\ell^2} \left[ \frac{\Omega^2-\ell^2}{\ell^2} \epsilon^2 + K^2 - \ell^2 \right] \psi(m) \quad . \quad (5.50b)$$

Dessa forma, para  $n =$  imaginário ou real menor que 1, os autovalores de  $J^2$  são negativos. Em termos de energia, esses autovalores são negativos se

$$\epsilon^2 < \frac{\ell^2(\ell^2-K^2)}{\Omega^2-\ell^2} \quad , \quad \text{quando } \Omega^2 > \ell^2 \quad , \quad (5.51a)$$

$$\epsilon^2 > \frac{\ell^2(K^2-\ell^2)}{-\Omega^2+\ell^2} \quad , \quad \text{quando } \Omega^2 < \ell^2 \quad , \quad (5.51b)$$

onde  $K$  está definido por (19). No caso do campo escalar, os autovalores de  $L^2$  só podiam ser negativos nos espaços com  $\Omega^2 < \ell^2$  (métricas hiperbólicas sem círculos acausais) e para "altas" energias. Para o campo espinorial, a eq. (51a) mostra que os autovalores de  $J^2$  podem ser negativos mesmo para espaços com métricas hiperbólicas com círculos acausais ( $\Omega^2 > \ell^2$ ), porém para energias menores que um certo valor. Veremos na próxima seção que a negatividade dos autovalores de  $J^2$  pode ser associada às soluções espinoriais com espectros de energias contínuos, tal como ocorria com o campo escalar. Essa correspondência, no en -

tanto, somente é válida quando considerarmos, como condição de contorno apropriada, a exigência de que a densidade do campo escalar ou fermiônico seja finita em todos os pontos do espaço - tempo.

Os operadores  $J_1$  e  $J_2$  não são hermitianos em relação ao produto escalar

$$\begin{aligned} \langle \psi(m', k'_3, \epsilon'; \mathbf{x}) | \psi(m', k'_3, \epsilon'; \mathbf{x}) \rangle &= \\ &= \int \sqrt{-g} \psi(m', k'_3, \epsilon'; \mathbf{x})^\dagger \psi(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x}) d\mathbf{x}^4, \end{aligned} \quad (5.52a)$$

que usaremos para normalizar as soluções espinoriais. Integrando essa expressão em  $t$ ,  $\phi$  e  $z$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \psi(m', k'_3, \epsilon'; \mathbf{x}) | \psi(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x}) \rangle &= \\ &= \frac{(2\pi)^3}{4\ell^2} \delta_{mm'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \int_1^\infty |R(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.52b)$$

para métricas hiperbólicas e

$$\begin{aligned} \langle \psi(m', k'_3, \epsilon'; \mathbf{x}) | \psi(j, m, k_3; \mathbf{x}) \rangle &= \\ &= \frac{(2\pi)^3}{4\lambda^2} \delta_{mm'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(\epsilon' - \epsilon) \int_{-1}^1 |R(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.52c)$$

para métricas circulares. Em (52b,c),  $|R|^2 := R^\dagger R$ . Suponhamos agora que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-g} |R(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x})|^2 = 0, \quad (\ell^2 > 0) \quad (5.53a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} |R(m, k_3, \epsilon; \mathbf{x})|^2 = 0, \quad (\ell^2 = -\lambda^2 < 0). \quad (5.53b)$$

Então, obtemos, por integração parcial,

$$\langle K_{(\pm)} \psi(m') | \psi(m) \rangle = - \langle \psi(m') | K_{(\mp)} \psi(m) \rangle \quad . \quad (5.54)$$

De (48) e (54) segue-se que os operadores  $J_1$  e  $J_2$  são anti-hermitianos. Se as condições (53) não forem satisfeitas, devemos acrescentar uma constante ao lado direito de (54), como nas eqs. (4.26); neste caso  $J_1$  e  $J_2$  não são nem hermitianos nem anti-hermitianos em relação ao produto escalar (52). A não hermiticidade de desses operadores explica por que os autovalores de  $J^2$  em (50) podem ser negativos.

### 5.3 - ESPECTROS DE ENERGIA E NORMALIZAÇÃO

Como os férmions são, por hipótese, partículas de teste, ou seja, partículas que não contribuem para a curvatura do espaço, vamos exigir que a densidade  $\psi^\dagger \psi$  (ou equivalentemente  $R^\dagger R$ ) seja finita em todos os pontos do espaço-tempo. Mais especificamente, queremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R^\dagger R = \text{finito, para métricas hiperbólicas} \quad (5.55)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} R^\dagger R = \text{finito, para métricas circulares} \quad . \quad (5.56)$$

Analogamente ao caso do campo escalar, essas exigências nos fornecerão os espectros de energia e imporão limitações sobre os autovalores  $m$  do operador  $i \frac{\partial}{\partial \phi}$ , exceto se os espectros de energias forem contínuos. Suporemos, a seguir, que  $m$  só pode assumir valores semi-inteiros e que  $\Omega \geq 0$ .



5.3.1 - Métricas Hiperbólicas

Consideremos primeiramente a solução  $\psi^I$ . Então, a eq.

(4.32) nos permite escrever

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R_1^I|^2 \sim \left| 2^a B_1(a, b, m + \frac{3}{2}) x^{-\frac{n+1}{2}} + 2^b B_2(a, b, m + \frac{3}{2}) x^{\frac{n-1}{2}} \right|^2 \quad (5.57a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R_2^I|^2 \sim (m + \frac{1}{2})^2 \left| 2^a B_1(a, b, m + \frac{1}{2}) x^{-\frac{n+1}{2}} + 2^b B_2(a, b, m + \frac{1}{2}) x^{\frac{n-1}{2}} \right|^2, \quad (5.57b)$$

onde

$$B_1(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad B_2(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}.$$

Considerando agora a solução  $\psi^{II}$ , encontramos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R_1^{II}| \sim \lim_{x \rightarrow \infty} |R_2^I| \quad \text{com } \varepsilon \text{ e } m \text{ trocados por } -\varepsilon \text{ e } -m, \quad (5.58a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R_2^{II}| \sim \lim_{x \rightarrow \infty} |R_1^I| \quad \text{com } \varepsilon \text{ e } m \text{ trocados por } -\varepsilon \text{ e } -m, \quad (5.58b)$$

para  $n^2 \leq 1$  os limites (57) e (58) são finitos e não é necessário impor nenhuma restrição sobre as constantes  $B_1$  e  $B_2$ . Isto significa que as soluções com  $n^2 \leq 1$  apresentam espectros contínuos de energia. Por outro lado, para  $n^2 > 1$  ( $n = \text{real} > 1$ ), as parcelas com  $x^{(n-1)/2}$  em (57) divergem, a menos que se imponha que

$$B_2(a, b, m + \frac{3}{2}) = B_2(a, b, m + \frac{1}{2}) = 0.$$

Esta condição pode ser implementada, fazendo-se

$$a = \text{zero ou inteiro negativo} = m-j \quad (j \geq m) \implies n = -(2j+1) - \frac{\Omega \varepsilon}{\ell^2}, \quad (5.59a)$$

ou

$$\begin{aligned} m + \frac{3}{2} - b = \text{zero ou inteiro negativo} &= -(j - \frac{1}{2}), \quad j \geq \frac{1}{2} \implies n = \\ &= -(2j+1) + \frac{\Omega \varepsilon}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (5.59b)$$

De (32b) e (59), obtemos espectros de energias discretos\* cujo módulo é dado por

$$|\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [(\Omega^2 - \ell^2)(2j+1)^2 + \kappa^2]^{1/2} \quad (5.60)$$

e os conjuntos de parâmetros para as soluções  $\psi^I$ , dados por

$$\begin{aligned} \psi_{jm}^I (-): \quad \varepsilon = -|\varepsilon|, \quad a = m-j, \quad b = m+j+1 - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2}, \quad j = \text{semi-inteiro} \geq m \geq \\ \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.61a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{jm}^{II} (+): \quad \varepsilon = |\varepsilon|, \quad a = m-j + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2}, \quad b = m+j+1, \quad j = \text{semi-inteiro} \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq m < \infty \end{aligned} \quad (5.61b)$$

onde empregamos os sinais "-" e "+" para denotar as soluções com energias negativas e positivas, respectivamente. Basta trocar  $m$  por  $-m$  e  $\varepsilon$  por  $-\varepsilon$  em (61), para obter os parâmetros que tornam os limites (58) finitos, quando  $n > 1$ :

$$\psi_{jm}^{II} (+): \quad \varepsilon = |\varepsilon|, \quad a' = -m-j, \quad b' = -m+j+1 - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2}, \quad -j \leq m \quad (5.62a)$$

---

\*Esse espectro é discreto em relação ao número  $j$ ; em relação ao momentum  $k_3$ , contido em  $\kappa^2$ , através da eq. (19), o espectro é contínuo.

$$\psi_{jm}^{II(-)} : \varepsilon = -|\varepsilon|, a' = m-j + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2}, b' = m+j+1, j \geq \frac{1}{2}, -\infty < m \leq -\frac{1}{2} \quad (5.62b)$$

Substituindo os parâmetros (61) em (35a) e (62) em (35b), encontramos as seguintes expressões para energias positivas e negativas

$$\psi^{I(+)} = C^{IA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] i\gamma(-) [|\varepsilon|-K] \alpha_m^{(1)} \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] \ell(2m+1) \beta_m^{(1)} \end{array} \right) e^{-i(m\phi+k_3z+|\varepsilon|t)} \quad (5.63a)$$

$$j \geq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leq m < \infty$$

$$\psi^{II(+)} = C^{IIA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] \gamma(-) (1-2m) \alpha_m^{(2)} \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] i[|\varepsilon|+K] \beta_m^{(2)} \end{array} \right) e^{-i(m\phi+k_3z+|\varepsilon|t)} \quad (5.63b)$$

$$-j \leq m \leq \frac{1}{2}$$

$$\psi^{I(-)} = C^{IA} \left( \begin{array}{l} -\left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] i\gamma(-) [|\varepsilon|+K] \beta_{-m}^{(2)} \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] \ell(2m+1) \alpha_{-m}^{(2)} \end{array} \right) e^{-i(m\phi+k_3z-|\varepsilon|t)} \quad (5.64a)$$

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq j$$

$$\psi^{II(-)} = C^{IIA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] \ell\gamma(-) (1-2m) \beta_{-m}^{(1)} \\ -\left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] i(\varepsilon-K) \alpha_{-m}^{(1)} \end{array} \right) e^{-i(m\phi+k_3z-|\varepsilon|t)} \quad (5.64b)$$

$$j \geq \frac{1}{2}, -\infty < m \leq -\frac{3}{2}$$

$$\alpha_m^{(1)} = (x^2 - 1)^{\frac{2m+1}{4}} (x+1)^{\frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} - \frac{1}{2}} F\left(m-j + \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, m+j+1, m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \quad (5.65a)$$

$$\beta_m^{(1)} = (x^2 - 1)^{\frac{2m-1}{4}} (x+1)^{\frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} + \frac{1}{2}} F\left(m-j + \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, m+j+1, m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \quad (5.65b)$$

$$\alpha_m^{(2)} = (x^2 - 1)^{-\frac{2m+1}{4}} (x+1)^{-\frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} + \frac{1}{2}} F\left(-m-j, j-m+1 - \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, \frac{1}{2}-m; \frac{1-x}{2}\right) \quad (5.65c)$$

$$\beta_m^{(2)} = (x^2 - 1)^{-\frac{2m-1}{4}} (x+1)^{-\frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} - \frac{1}{2}} F\left(-m-j, j-m+1 - \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2}, \frac{3}{2}-m; \frac{1-x}{2}\right) \quad (5.65d)$$

Ao escrever (63) e (64), fizemos uso das eqs. (37) e (38) para eliminar as soluções linearmente dependentes. Podemos verificar que as soluções de energia negativa estão relacionadas com as soluções de energias positivas através da operação de "conjugação de carga", como deveríamos esperar. As eqs. (63) e (64) mostram também que o intervalo de variação de  $m$ , para a base completa de soluções, é dado por

$m \in [-j, \infty) \quad , \quad \text{se } \epsilon > 0$ $m \in (-\infty, +j] \quad , \quad \text{se } \epsilon < 0$	(5.66a)
--	---------

onde  $j$  pode ser expresso, em termos da energia, como

$$j = \frac{\Omega|\epsilon|}{2\ell^2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \quad (5.66b)$$

As condições (59), que impusemos aos parâmetros das funções hipergeométricas, só são necessárias quando  $n = \text{real} > 1$ , ou equivalentemente, se

$$\epsilon^2 > \frac{\ell^2(\ell^2 - K^2)}{\Omega^2 - \ell^2} : \text{ energias discretas, quando } \Omega^2 > \ell^2 \quad (5.67a)$$

$$\epsilon^2 < \frac{\ell^2(K^2 - \ell^2)}{\ell^2 - \Omega^2}: \text{energias discretas, quando } \Omega^2 < \ell^2 \quad (5.67b)$$

$$K^2 > \ell^2: \text{energias discretas, quando } \ell^2 = \Omega^2 \quad (5.67c)$$

Estas equações mostram que as características da partícula que contribuíram para determinar a natureza de seu espectro de energias são o valor da própria energia e o valor da constante  $K^2$ , definida por

$$K^2 = \left[ e \sqrt{M^2 + k_3^2} - \frac{\Omega - \kappa S}{2} \right]^2 .$$

Para um dado valor do momentum  $k_3$ , esta constante,  $K^2$ , assume valores diferentes conforme o valor do número quântico  $e$  seja igual a +1 ou a -1.

Pela equação (67a), vemos que, nos espaços cujas métricas podem apresentar círculos acausais ( $\Omega^2 > \ell^2$ ), a partícula de Dirac apresentará somente energias discretas, se  $\ell^2 \leq K^2$ . Porém, se  $\ell^2 > K^2$ , o espectro de energias pode tornar-se contínuo para baixos valores de energia, permanecendo discreto para valores altos de energia.

Inversamente ao caso anterior, uma partícula de Dirac, em espaços cuja métrica não pode apresentar círculos acausais ( $\ell^2 > \Omega^2$ ), pode ter espectro discreto para baixas energias, se  $\ell^2 < K^2$ , e contínuo para altas energias. Porém, para  $\ell^2 \geq K^2$ , as energias serão unicamente contínuas. No parágrafo anterior, podíamos ter espectros puramente discretos para  $\ell^2 \leq K^2$ ; aqui podemos ter espectros puramente contínuos, mas para isto devemos ter  $\ell^2 \geq K^2$ , ao contrário daquele caso.

A equação (67c) mostra que, para espaços com  $\ell^2 = \Omega^2$ ,

a natureza do espectro depende somente da relação entre  $\kappa^2$  e  $\ell^2$ ; discreto, se  $\kappa^2 > \ell^2$ , e contínuo, em caso contrário.

Para as métricas hiperbólicas com  $\Omega = \kappa S$ , temos

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 &= M^2 + k_3^2, \\ |\varepsilon| &= \Omega(2j+1) + [(\Omega^2 - \ell^2)(2j+1)^2 + M^2 + k_3^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} (\Omega = \kappa S) \quad (5.68)$$

ou seja, a natureza do espectro de energias e os próprios valores da energia tornam-se independentes do número quântico  $j$  (ou da helicidade, no caso de neutrinos e antineutrinos).

As condições (67), que determinam a existência de espectros discretos, impõe certas limitações sobre os valores de  $j$ . Pela equação (66), vemos que  $n = \text{real} > 1$ , se

$$\Omega|\varepsilon| - (2j+1)\ell^2 > \ell^2 \quad (5.69)$$

Substituindo  $|\varepsilon|$  nesta equação pela expressão dada em (60), encontramos que  $j$  deve satisfazer

$$\left. \begin{aligned} j &> \frac{\Omega}{2\ell} \sqrt{\frac{\ell^2 - \kappa^2}{\Omega^2 - \ell^2}} - 1, \quad \text{se } \kappa^2 < \ell^2 \\ j &\geq -\frac{1}{2}, \quad \text{se } \kappa^2 \geq \ell^2 \end{aligned} \right\} \Omega^2 > \ell^2 \quad (5.70a)$$

$$\left. \begin{aligned} j &< \frac{\Omega}{2\ell} \sqrt{\frac{\kappa^2 - \ell^2}{\ell^2 - \Omega^2}} - 1, \quad \text{se } \kappa^2 > \ell^2 \\ \text{nenhum valor,} & \quad \text{se } \kappa^2 \leq \ell^2 \end{aligned} \right\} \Omega^2 < \ell^2 \quad (5.70b)$$

$$\left. \begin{aligned} j &\geq -\frac{1}{2}, \quad \text{se } \kappa^2 > \ell^2 \\ \text{nenhum valor,} & \quad \text{se } \kappa^2 \leq \ell^2 \end{aligned} \right\} \Omega^2 = \ell^2 \quad (5.70c)$$

"Nenhum valor" para  $j$  significa, em (70b,c), que o espectro é contínuo.

Para a métrica de Gödel propriamente dita, temos  $S=0$  e  $\Omega^2 = 2\ell^2$ . Então, as condições (67a) e (70a) nos informam que ocorrem espectros discretos quando

$$\epsilon^2 > \ell^2 - K^2 \quad (5.71a)$$

e, nesta circunstância, os níveis de energia são dados por (60) com

$$j > \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{K^2}{\ell^2}} - 1, \text{ se } \ell^2 > K^2$$

e

$$j \geq -\frac{1}{2}, \text{ se } \ell^2 \leq K^2.$$

Mas temos espectro contínuo quando

$$\epsilon^2 \leq \ell^2 - K^2, \text{ com } \ell^2 > K^2.$$

Portanto, se  $\ell^2 > 2K^2$ , é suprimido o nível discreto com  $j=-1/2$  (e somente este).

Essas conclusões, referentes a espectros contínuos no espaço de Gödel propriamente dito, está em desacordo com os resultados encontrados nas referências (12) e (13). Tal discrepância provém da condição de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-g} \psi^\dagger \psi = \text{finito}, \quad (5.72)$$

que foi usada nesses trabalhos, ao invés da condição (55), sem o fator  $\sqrt{-g}$ . Realmente, para  $x \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{-g} \sim x$  e, dessa forma, o fator  $x^{(n-1)/2}$  em (57) e (58) é substituído por  $x^{n/2}$ . Para

que este fator não seja divergente, devemos impor as condições (59) para todo  $n > 0$ . Porém, para a classe de métricas hiperbólicas com  $\Omega^2 > \ell^2$ ,  $n$  é sempre maior que zero, como vemos pela equação (32b). Em consequência, teremos somente soluções com energias discretas, quando  $\Omega^2 > \ell^2$ , se adotarmos (72) como ponto de partida para a interpretação da natureza dos espectros.

Entretanto, vimos no capítulo anterior que a presença do fator  $\sqrt{-g}$ , na condição de contorno para o campo escalar, conduz a resultados quânticos que não se harmonizam com resultados provenientes do estudo do movimento geodésico de uma partícula de teste. O valor de energia que separa as geodésicas "limitadas" das "ilimitadas" não coincide com o valor de energia que separa o espectro discreto do espectro contínuo. Devemos lembrar também que o fator  $\sqrt{-g}$  foi introduzido em (72) com a finalidade de garantir a propriedade (54) para os operadores  $K_{(\pm)}$ , usada na normalização das soluções com energias discretas. Contudo, com o fator  $\sqrt{-g}$  em (72) ou sem ele, chegamos às mesmas expressões (64) para as soluções com energias discretas. A diferença reside unicamente em que, ao impormos a condição

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi^\dagger \psi = \text{finito} \quad , \quad (5.73)$$

excluimos do rol das soluções discretas todas aquelas com energias tais que

$$0 < n = \text{real} \leq 1 \quad .$$

Em nossa interpretação, baseada na condição (73), é atribuído



um espectro contínuo a estas soluções. A outra interpretação simplesmente seleciona alguns valores discretos nesse "continuum" e despreza os restantes.

O uso da condição (73) tem, em nossa opinião, a vantagem adicional de representar uma prescrição **g e r a l**, segundo a qual fazemos uma única e mesma exigência tanto para o campo escalar quanto para o espinorial, quer se trate de métricas hiperbólicas ou circulares: a função de onda,  $\phi$  ou  $\psi$ , deve ser finita em todos os pontos do espaço-tempo.

Normalização das soluções com energias discretas. Definindo

$\langle \alpha_{jm} \rangle$  e  $\langle \beta_{jm} \rangle$  por

$$\langle \alpha_{jm} \rangle = \frac{1}{4\ell^2} \int_1^\infty |\alpha_{jm}|^2 dx, \quad \langle \beta_{jm} \rangle = \frac{1}{4\ell^2} \int_1^\infty |\beta_{jm}|^2 dx, \quad (5.74)$$

e simbolizando o produto escalar por

$$\langle j'm' | jm \rangle := \int \psi(j'm'k'_3 \epsilon', x)^\dagger \psi(jmk_3 \epsilon, x) \sqrt{-g} dx,$$

podemos escrever

$$\langle j'm' | jm \rangle^{I(+)} = |C^I|^2 (1 + \gamma_{(-)}^2) [ (|\epsilon| - K)^2 \langle \alpha_{jm}^{(1)} \rangle + 4\ell^2 (m + \frac{1}{2})^2 \langle \beta_{jm}^{(1)} \rangle ] \Delta, \\ j \geq \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \leq m < \infty \quad (5.75a)$$

$$\langle j'm' | jm \rangle^{II(+)} = |C^{II}|^2 (1 + \gamma_{(-)}^2) [ (|\epsilon| + K)^2 \langle \beta_{jm}^{(2)} \rangle + 4\ell^2 (\frac{1}{2} - m)^2 \langle \alpha_{jm}^{(2)} \rangle ] \Delta, \\ -j \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (5.75b)$$

onde

$$\Delta := \delta(k'_3 - k_3) \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(|\epsilon| - |\epsilon'|) \quad (5.76)$$

Podemos usar as fórmulas,

$$(c-1)F(a,b,c-1;z) = z^{2-c} \frac{d}{dz} [z^{c-1}F(a,b,c;z)] \quad (5.77a)$$

e

$$\frac{d}{dz} [(1-z)^{a+b+c} F(a,b,c;z)] = \frac{(c-a)(c-b)}{c} (1-z)^{a+b-c-1} F(a,b,c+1;z), \quad (5.77b)$$

para encontrar a relação entre  $\langle \alpha \rangle$  e  $\langle \beta \rangle$ . Por exemplo, em  $\langle \beta_{jm}^{(1)} \rangle$ , podemos empregar (77a) para reescrever uma das funções hipergeométricas que aparecem no integrando em termos de uma derivada e, então, efetuar uma integração parcial. O termo integrado se anula devido à equação (53a), enquanto a nova derivada parcial, que surge no integrando, pode ser eliminada por meio de (77b). Dessa forma chegamos a

$$4\ell^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \langle \beta_{jm}^{(1)} \rangle = (\epsilon^2 - K^2) \langle \alpha_{jm}^{(1)} \rangle \quad (5.78a)$$

e, analogamente, a

$$4\ell^2 \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \langle \alpha_{jm}^{(2)} \rangle = (\epsilon^2 - K^2) \langle \beta_{jm}^{(2)} \rangle \quad (5.78b)$$

Levando estas expressões às equações (75), ficamos com

$$\langle j'm' | jm \rangle^{I(+)} = |C^I|^2 (2\pi)^3 (1+\gamma_{(-)}^2) 2|\epsilon| (|\epsilon| - K) \langle \alpha_{jm}^{(1)} \rangle \Delta \quad (5.79a)$$

$$j > \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \leq m \leq \infty$$

$$\langle j'm' | jm \rangle^{II(+)} = |C^{II}|^2 (2\pi)^3 (1+\gamma_{(-)}^2)^2 |\epsilon| (|\epsilon|+K) \langle \beta_{jm}^{(2)} \rangle \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta(k_3' - k_3) \\ -j \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (5.79b)$$

Nestas equações,  $\langle \alpha^{(1)} \rangle$  e  $\langle \beta^{(2)} \rangle$  são dados por

$$\langle \alpha_{jm}^{(1)} \rangle = \frac{2^{2m + \frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} + 1} (j - \frac{1}{2})! [(m + \frac{1}{2})!]^2 \Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j - \frac{1}{2})}{4\ell^2 (m+j)! (\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1) \Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j + m)}, \quad (5.80a)$$

$$\langle \beta_{jm}^{(2)} \rangle = \frac{2^{1-2m - \frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2}} (j+m)! [(\frac{1}{2} - m)!]^2 \Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j - m)}{4\ell^2 (j + \frac{1}{2})! (\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1) \Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - j + \frac{1}{2})}, \quad (5.80b)$$

onde  $\Gamma$  representa a função gama. Para demonstrar estas fórmulas, podemos usar os operadores  $K_{(\pm)}$ . De (42) e de (63) encontramos, para  $j+m \geq 1$ ,

$$\psi_{jm}^{II(+)} = a_n K_{(-)}^{j+m} \psi_{j,-j}^{II(+)} \quad , \quad K_{(+)}^{j+m} \psi_{j'm'}^{II(+)} = b_n \psi_{j',j'-j-m}^{II(+)} \quad (5.81)$$

onde

$$a_m := 2^{-2m-2j} \ell^{-m-j} \frac{(\frac{1}{2} - m)!}{(j + \frac{1}{2})!} \quad (5.82a)$$

$$b_m := (-\ell)^{m+j} \frac{(\frac{1}{2} - m')!}{(\frac{1}{2} + j+m-m')!} \frac{(j'+m')!}{(j'+m'-j-m)!} \frac{\Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon'|}{\ell^2} - j' - j + m')}{\Gamma(\frac{|\Omega|\epsilon'|}{\ell^2} - j' - j + m' - m)} \quad (5.82b)$$

Usando, então, a propriedade (54) para o operador  $K_{(-)}$ , e a equação (81), obtemos

$$\langle j'm' | jm \rangle^{II(+)} = (-1)^{m+j} a_m b_m \langle j', m' - j - m | j, -j \rangle \quad (5.83)$$

Encontramos, pela equação (79b),

$$\langle j', m' - j - m | j, -j \rangle = |C^{II}| (2\pi)^3 (1 + \gamma_{(-)}^2) 2|\varepsilon| (|\varepsilon| + K) \langle \beta_{j, -j}^{(2)} \rangle^\Delta, \quad (5.84)$$

Mas, da definição da função beta, temos

$$\langle \beta_{j, -j}^{(2)} \rangle = \frac{2^{2j+1} - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} (j + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - 2j - 1)}{4\ell^2 \Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - j + \frac{1}{2})},$$

e daí

$$\langle j', m' - j - m | j, -j \rangle = \frac{|C^{II}|^2 (2\pi)^3}{4\ell^2} 2^{2j+1} - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} 2|\varepsilon| (|\varepsilon| + K) (j + \frac{1}{2})! \cdot \frac{\Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - 2j - 1)}{\Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - j + \frac{1}{2})} \delta_{m', m} \delta_{j', j} \delta_{(k_3' - k_3)}. \quad (5.85)$$

Levando (82) e (85) a (83) e comparando o resultado com a eq. (79b), obtemos a expressão (80b).

Para  $\psi^I$ , temos, por (42a),

$$\psi_{j, m}^{I(+)} = C_m K_{(+)}^{m - \frac{1}{2}} \psi_{j, \frac{1}{2}}^{I(+)}, \quad (5.86a)$$

$$K_{(-)}^{m - \frac{1}{2}} \psi_{j', m'}^{I(+)} = d_m \psi_{j', m' - m + \frac{1}{2}}^{I(+)}, \quad (5.86b)$$

onde

$$C_m := \left(-\frac{1}{\ell}\right)^{m - \frac{1}{2}} \frac{(m + \frac{1}{2})! (j + \frac{1}{2})}{(j+m)!} \frac{\Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - j - m)}{\Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\ell^2} - 2j)} \quad (5.87a)$$

$$d_m = \frac{2^{2m-1} \ell^{m - \frac{1}{2}} (m' + \frac{1}{2})!}{(m' - m + 1)!} \quad (5.87b)$$

Então, usando a propriedade (54) para o operador  $K_{(+)}$ , vem

$$\langle j', m' | jm \rangle^{I(+)} = (-1)^{m - \frac{1}{2}} C_m d_m \langle j', m' - m + \frac{1}{2} | j, \frac{1}{2} \rangle^{I(+)} \quad (5.88)$$

Porém, a eq. (38) nos permite escrever

$$|j, \frac{1}{2}\rangle^{I(+)} = \frac{\frac{\Omega |\epsilon|}{\ell^2} + 2}{|\epsilon| + K} \frac{C^I}{C^{II}} |j, -\frac{1}{2}\rangle^{II(+)} \quad .$$

Assim, podemos usar as equações (79b) e (80b) para mostrar que

$$\langle j', m' - m + \frac{1}{2} | j, \frac{1}{2} \rangle^{I(+)} = \frac{\frac{\Omega |\epsilon|}{\ell^2} |C^I|^2 (2\pi)^3 (1 + \gamma_{(-)}^2) 2|\epsilon| (|\epsilon| - K)}{4\ell^2 (j + \frac{1}{2}) (\frac{\Omega |\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1) \Gamma(\frac{\Omega |\epsilon|}{\ell^2} - j - \frac{1}{2})} \Delta \quad (5.89)$$

Levando (89) e (87) a (88) e comparando o resultado com (79a), encontramos a expressão (80a) para  $\langle \alpha^{(1)} \rangle$ .

### 5.3.2 - Métricas Circulares

Para as métricas circulares, devemos substituir  $\ell$  por  $i\lambda$  nas soluções (33-35). A seguir, vamos supor que  $\Omega \geq 0$  e  $\lambda > 0$ . Da transformação (4.50), encontramos

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(a, b, c; \frac{1-x}{2}) = C(c) \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-a} + D(c) \left(\frac{1+x}{2}\right)^{c-a-b} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{a-c} \quad (5.90a)$$

com

$$C(c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad D(c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad . \quad (5.90b)$$

Por meio de (33) e (34), seguem-se daí

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -1} |R_1^I| \sim \left| C\left(m+\frac{3}{2}\right) (1+x)^{\frac{m}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2} - \frac{1}{4}} + 2^{\frac{m-1}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2}} D\left(m+\frac{3}{2}\right) (1+x)^{-\frac{m}{2} + \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{1}{4}} \right| \right. \quad (5.91a)$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow -1} |R_2^I| \sim \left(m+\frac{1}{2}\right) \left| C\left(m+\frac{1}{2}\right) (1+x)^{\frac{m}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{1}{4}} + 2^{\frac{m+1}{2} - \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2}} D\left(m+\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-\frac{m}{2} + \frac{\Omega\varepsilon}{2\lambda^2} - \frac{1}{4}} \right| \right. \quad (5.91b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} |R_1^{II}| &\sim \lim_{x \rightarrow -1} |R_2^I| \quad \text{com } m \text{ e } \varepsilon \text{ trocados por } -m \text{ e } -\varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow -1} |R_2^{II}| &\sim \lim_{x \rightarrow -1} |R_1^I| \quad \text{com } m \text{ e } \varepsilon \text{ trocados por } -m \text{ e } -\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (5.92)$$

Examinando os limites (91), vemos que a condição de contorno (56) será satisfeita se fizermos

$$C\left(m + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad , \quad \text{se} \quad m - \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \leq 0 \quad ,$$

e

$$D\left(m + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad , \quad \text{se} \quad m - \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \geq 0 \quad ,$$

ou, equivalentemente,

$$m + \frac{3}{2} - a = -(j - \frac{1}{2}) \quad , \quad j = \text{semi-inteiro} \geq \frac{1}{2} \quad (m \leq \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2} - \frac{1}{2}) \quad (5.93a)$$

e

$$b = m - j \quad , \quad j = \text{semi-inteiro} \geq m \quad (m \geq \frac{\Omega\varepsilon}{\lambda^2} + \frac{1}{2}) \quad . \quad (5.93b)$$

Substituindo os parâmetros a e b nestas equações pelas expressões (32), encontramos energias discretas (em relação ao número

j), com módulos dados por

$$|\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [(\Omega^2 + \lambda^2)(2j+1)^2 + K^2]^{1/2}, \quad (5.94a)$$

$$|\varepsilon_2| = -\Omega(2j+1) + [(\Omega^2 + \lambda^2)(2j+1)^2 + K^2]^{1/2}, \quad (5.94b)$$

As igualdades (93) tornam-se, agora, equivalentes a seguinte escolha de parâmetros para  $\psi^I$ :

$$\psi^{I(+)}: \varepsilon = |\varepsilon|, \quad a = m + j + 1, \quad b = m - j - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}, \quad j \geq \frac{1}{2} \quad (m \leq \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} - \frac{1}{2}) \quad (5.95a)$$

$$\psi^{I(+)}: \varepsilon = |\varepsilon_2|, \quad a = m + j + 1 - \frac{\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2}, \quad b = m - j, \quad (j \geq m \geq \frac{\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2} + \frac{1}{2}) \quad (5.95b)$$

$$\psi^{I(-)}: \varepsilon = -|\varepsilon|, \quad a = m + j + 1 + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}, \quad b = m - j, \quad (j \geq m \geq \frac{1}{2} - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}) \quad (5.95c)$$

(95b) e (95c) resultaram de (93b). As soluções com energia  $\varepsilon = -|\varepsilon_2|$  e com  $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{-\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2} + \frac{1}{2}$ , que resultariam de (93a), foram eliminadas porque teriam possibilidade de existir somente para  $m = -1/2$  e, assim, não constituiriam soluções independentes em relação às soluções  $\psi^{II(-)}$  ( $m = -1/2$ ), dadas a seguir, em (96b).

Para tornar finitos os limites (92) é suficiente trocar  $m$  e  $\varepsilon$  por  $-m$  e  $-\varepsilon$  em (95). Assim, temos, para  $\psi^{II}$

$$\psi^{II(-)}: \varepsilon = -|\varepsilon|, \quad a' = -m + j + 1, \quad b' = -m + j - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}, \quad j \geq \frac{1}{2}, \quad (m \geq -\frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + \frac{1}{2}) \quad (5.96a)$$

$$\psi^{II(-)}: \varepsilon = -|\varepsilon_2|, \quad a' = -m + j + 1 - \frac{\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2}, \quad b' = -m - j \quad (-j \leq m \leq -\frac{1}{2} - \frac{\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2}) \quad (5.96b)$$

$$\psi^{II(+)}: \varepsilon = |\varepsilon|, \quad a' = -m + j + 1 + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}, \quad b' = -m - j \quad (-j \leq m \leq \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} - \frac{1}{2}) \quad (5.96c)$$

Levando (95a), (95b) e (96c) a (35), ficamos com as seguintes expressões para as soluções independentes com energias positivas\* :

$$\psi^{I(+)} = C_m^{IA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] i\gamma(-) [|\varepsilon| - K] \alpha_m^{(1)}(w) \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] \lambda(2m+1) \beta_m^{(1)}(w) \end{array} \right) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon| t)}, \quad (5.97a)$$

$$j \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{w}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

$$\psi^{I(+)} = C_m^{IA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] i\gamma(-) [|\varepsilon_2| - K] \alpha_m^{(3)}(w_2) \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] \lambda(2m+1) \beta_m^{(3)}(w_2) \end{array} \right) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_2| t)} \quad (5.97b)$$

$$j \geq m \geq \frac{w_2}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

$$\psi^{II(+)} = C_m^{IIA} \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(+), \end{array} \right] \lambda\gamma(-) (1-2m) \alpha_m^{(2)}(w) \\ \left[ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma(-) \end{array} \right] i[|\varepsilon| + K] \beta_m^{(2)}(w) \end{array} \right) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon| t)} \quad (5.97c)$$

$$-j \leq m \leq \frac{w}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

onde adotamos as notações

$$w = \Omega|\varepsilon|, \quad w_2 = \Omega|\varepsilon_2| \quad (5.98a)$$

$$\alpha_m^{(1)}(w) = (1-x^2)^{\frac{2m+1}{4}} (1+x)^{-\frac{w}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}} F(m+j+1, m-j-\frac{w}{2}, m+\frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}), \quad (5.98b)$$

$$\beta_m^{(1)}(w) = (1-x^2)^{\frac{2m-1}{4}} (1+x)^{-\frac{w}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}} F(m+j+1, m-j-\frac{w}{2}, m+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}), \quad (5.98c)$$

\*  $C_m := C \exp[\frac{i\pi}{2}(2m+1)]$ , resultou da troca de  $x^2-1$  por  $1-x^2$  em (35).



$$\alpha_m^{(2)}(w) = (1-x^2)^{\frac{2m+1}{4}} (1+x)^{\frac{w}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}} F(-m-j, j+1-m+\frac{w}{\lambda^2}, \frac{1}{2}-m; \frac{1-x}{2}), \quad (5.98d)$$

$$\beta_m^{(2)}(w) = (1-x^2)^{\frac{2m-1}{4}} (1+x)^{\frac{w}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}} F(-m-j, j+1-m+\frac{w}{\lambda^2}, \frac{3}{2}-m; \frac{1-x}{2}), \quad (5.98e)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m^{(3)}(w_2) &= \beta_m^{(2)}(w) \text{ com } w \text{ e } m \text{ trocados por } -w_2 \text{ e } -m, \\ \beta_m^{(3)}(w_2) &= \alpha_m^{(2)}(w) \text{ com } w \text{ e } m \text{ trocados por } -w_2 \text{ e } -m. \end{aligned} \right\} \quad (5.98f)$$

Para as soluções acima o domínio de variação para  $m$  é dado por

$$m \in [-j, \frac{\Omega|\epsilon|}{\lambda^2} - \frac{1}{2}] \quad , \quad j = \frac{n}{2} - \frac{\Omega|\epsilon|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} \quad , \quad \text{se } \epsilon = |\epsilon| \quad , \quad (5.99a)$$

$$m \in [\frac{\Omega|\epsilon_2|}{\lambda^2} + \frac{1}{2}, j] \quad , \quad j = \frac{n}{2} + \frac{\Omega|\epsilon_2|}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} \quad , \quad \text{se } \epsilon = |\epsilon_2| \quad , \quad (5.99b)$$

As soluções para energias negativas podem ser obtidas substituindo (95c), (96a) e (96b) em (35) ou, alternativamente, aplicando a operação (23) de conjugação de carga às soluções acima. O intervalo de variação para  $m$  é dado por (99) com  $-m$  no lugar de  $m$ .

As soluções (97a,c) diferem das soluções (63a,b) pela troca de  $\Omega\epsilon/\ell^2$  por  $-\Omega\epsilon/\lambda^2$ , correspondente à troca de  $\ell^2$  por  $-\lambda^2$  em (35). No entanto, o domínio de variação para  $m$  em (99a) é diferente do domínio (66), referente às métricas hiperbólicas. Além disso, temos as soluções (97b) com o espectro (94b) para as energias, diferentemente do caso hiperbólico. Um fato semelhante ocorre no caso do campo escalar, como vimos no capítulo anterior. Para que essas soluções com o espectro de energias

$\varepsilon_2$  existam, é necessário que o limite inferior do intervalo (99b) seja menor que o limite superior; daí decorre que

$$(\varepsilon_2)^2 > K^2 \quad .$$

A normalização das soluções pode ser feita através dos operadores  $K_{(\pm)}$  e da definição (52c) para o produto escalar, mas as relações (78) devem agora ser substituídas por

$$4\lambda^2 (m + \frac{1}{2})^2 \langle \beta_{jm}^{(1)} \rangle = (\varepsilon^2 - K^2) \langle \alpha_{jm}^{(1)} \rangle \quad (5.100a)$$

$$4\lambda^2 (\frac{1}{2} - m)^2 \langle \alpha_{jm}^{(2)} \rangle = (\varepsilon^2 - K^2) \langle \beta_{jm}^{(2)} \rangle \quad . \quad (5.100b)$$

Encontramos

$$\langle j'm' | jm \rangle^{I(+)} = (2\pi)^3 |C^I|^2 (1 + \gamma_{(-)}^2) 2|\varepsilon| (|\varepsilon| - K) \langle \alpha_{jm}^{(1)}(w) \rangle \Delta, \quad (5.101a)$$

$$\langle j'm' | jm \rangle^{I(+)} = (2\pi)^3 |C^I|^2 (1 + \gamma_{(-)}^2) 2|\varepsilon_2| (|\varepsilon_2| - K) \langle \beta_{jm}^{(3)}(w_2) \rangle \Delta \quad (5.101b)$$

$$\langle j'm' | jm \rangle^{II(+)} = (2\pi)^3 |C^{II}|^2 (1 + \gamma_{(-)}^2) 2|\varepsilon| (|\varepsilon| + K) \langle \beta_{jm}^{(2)}(w) \rangle \Delta, \quad (5.101c)$$

onde

$$\Delta = \delta_{m'm} \delta_{j'j} \delta(k_3' - k_3) \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) \quad (5.102a)$$

$$\langle \alpha_{jm}^{(1)}(w) \rangle = 2 \frac{2m+1 - \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}}{\lambda^2} \frac{(j+\frac{1}{2})! [(m+\frac{1}{2})!]^2 \Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + j+1-m)}{(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + 2j+1)(j+m)! \Gamma(\frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + j + \frac{1}{2})} \quad (5.102b)$$

$$\langle \beta_{jm}^{(2)}(w) \rangle = \frac{2^{1-2m} \frac{\Omega |\epsilon|}{\lambda^2} (2j+1) (j+m)! \left[ \left( \frac{1}{2}-m \right) ! \right]^2 \Gamma \left( \frac{\Omega |\epsilon|}{\lambda^2} + j + \frac{3}{2} \right)}{\left( \frac{\Omega |\epsilon|}{\lambda^2} + 2j+1 \right) \left( j + \frac{1}{2} \right)! \Gamma \left( \frac{\Omega |\epsilon|}{\lambda^2} + j+1-m \right)} \quad (5.102c)$$

$$\langle \beta_{jm}^{(2)}(w_2) \rangle = \langle \beta_{jm}^{(3)}(w) \rangle \text{ com } w \text{ e } m \text{ trocados por } -w_2 \text{ e } -m \quad (5.102d)$$

Os limites para a métrica diagonal são obtidos fazendo-se  $\Omega = 0$  ( $\lambda^2 \neq 0$ ) em (97-99). Os espectros (94a) e (94b) tornam-se iguais,

$$|\epsilon| = [\lambda^2 (2j+1)^2 + \kappa^2]^{1/2} = |\epsilon_2| \quad , \quad (5.103a)$$

e o intervalo (99) para a variação de  $m$  fica

$$m \in \left[ -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \quad , \quad j = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right] \quad , \quad \epsilon = |\epsilon| = |\epsilon_2| \quad , \quad \Omega = 0 \quad , \quad (5.103b)$$

que é um intervalo simétrico em relação a zero. Observe-se que , ao contrário do campo escalar, as soluções espinoriais para a métrica diagonal não podem ser expressas em termos dos polinômios associados de Legendre, como podemos ver fazendo  $\Omega = 0$  em (29).

#### 5.4 - LIMITES PARA A MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI

O processo para obter os limites para as soluções da equação de Dirac com a métrica de Som-Raychaudhuri, a partir das soluções com métricas hiperbólicas ou circulares, é semelhante ao que usamos no caso do campo escalar. Vamos lembrá-lo breve-

mente e enunciar os resultados finais.

Partindo das soluções com energias positivas nos espaços com métricas hiperbólicas, equações (63a-b), expandimos  $x = \cosh 2\ell r$  em torno de  $\ell = 0$  e desprezamos os termos de ordem superior a  $\ell^2$ :

$$x = 1 + 2\ell^2 r^2 \implies x+1 = 2(1 + \ell^2 r^2), \quad x-1 = 2\ell r^2, \quad x^2-1 = 4\ell^2 r^2 \quad (5.104)$$

Levando isso a (27) e, a seguir, tomando o limite  $\ell \rightarrow 0$ , recuperamos as equações (18) com a métrica de Som-Raychaudhuri:  $D = r$ ,  $H = \Omega r^2$ . Então, a fim de obter as soluções para a métrica de Som-Raychaudhuri, podemos aplicar esse mesmo procedimento às soluções (63), que consideraremos normalizadas de acordo com

$$(79a) = (79b) = |\varepsilon| \delta_{m'm} \delta_{j'j} \delta(k'_3 - k_3) \delta(|\varepsilon| - |\varepsilon'|) \quad (5.105)$$

Para  $j$  e  $m$  fixos em (63) podemos fazer a aproximação

$$b = \Omega |\varepsilon| / \ell^2, \quad \text{quando } \ell^2 \rightarrow 0.$$

Definindo a variável  $\xi$  por

$$\xi = \Omega |\varepsilon| r^2, \quad ,$$

encontramos

$$\alpha(1) = |\Omega \varepsilon| 2^{\frac{b}{2} + m} b^{-\frac{m-1}{2}} \xi^{\frac{2m+1}{4}} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^{\frac{b}{2}} F\left(m+j+1, \overset{b}{m+\frac{3}{2}}; \frac{-\xi}{b}\right),$$

$$\ell \beta(1) = 2^{\frac{b}{2} + m} b^{-\frac{m-1}{2}} \xi^{\frac{2m-1}{4}} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^{\frac{b}{2}} F\left(m+j+1, b, m+\frac{1}{2}; \frac{-\xi}{b}\right),$$

$$|C^I| = 2^{-\frac{b}{2}-m} b^{\frac{m-1}{2}} \left[ \frac{\Omega |\varepsilon| (j+m)!}{(2\pi)^3 (1+\gamma_{(-)}^2) (|\varepsilon|-K) [(m+\frac{1}{2})!]^2 (j-\frac{1}{2})!} \right]^{1/2}$$

Substituindo estas expressões em (63a) e, com o auxílio de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi}{b}\right)^{\frac{b}{2}} = e^{\frac{\xi}{2}}$$

e de

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b, c; -\frac{\xi}{b}) = F(a, c; -\xi) = e^{-\xi} F(c-a, c; \xi) ,$$

tomando o limite quando  $b \rightarrow \infty$  (equivalente a  $\ell^2 \rightarrow 0$ ), encontramos

$$\psi^{I(+)} = B_m^I A \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{array} \right) i\gamma_{(-)} (|\varepsilon|-K) \alpha(1) \\ \left( \begin{array}{l} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{array} \right) \sqrt{|\Omega\varepsilon|} (2m+1) \beta(1) \end{array} \right] e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon|t)} \quad \left. \begin{array}{l} j \geq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leq m < \infty \end{array} \right\} \quad (5.106a)$$

com

$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon| = \Omega(2j+1) + [\Omega^2(2j+1)^2 + K^2]^{1/2} \\ \alpha(1) = \xi^{\frac{2m+1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-j + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}; \xi) \\ \beta(1) = \xi^{\frac{2m-1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \xi) \end{array} \right\} \quad (5.106b)$$

$$B_m^I = \left[ \frac{\Omega |\varepsilon| (j+m)!}{(2\pi)^3 (1+\gamma_{(-)}^2) [|\varepsilon|-K] [(m+\frac{1}{2})!]^2 (j-\frac{1}{2})!} \right]^{1/2}$$

Aplicando o mesmo processo de limite à solução (63b),

obtemos

$$\psi^{II(+)} = B_m^{IIA} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{array} \right) \sqrt{|\Omega \epsilon|} \gamma_{(-)} (1-2m) \alpha^{(2)} \\ \left( \begin{array}{l} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{array} \right) i \gamma_{(-)} (|\epsilon|+K) \beta^{(2)} \end{array} \right] e^{-i(m\phi+k_3 z+|\epsilon|t)} \quad -j \leq m \leq \frac{1}{2}$$

(5.107a)

com

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^{(2)} = \xi^{-\frac{2m+1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-m-j, \frac{1}{2}-m; \xi) \\ \beta^{(2)} = \xi^{-\frac{2m-1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(-m-j, \frac{3}{2}-m; \xi) \end{array} \right\} \quad (5.107b)$$

$$B_m^{II} = \left[ \frac{\Omega |\epsilon| (j + \frac{1}{2})!}{(2\pi)^3 (1+\gamma_{(-)}^2) (|\epsilon|+K) [(\frac{1}{2}-m)! [{}^2(j+m)!]} \right]^{1/2}$$

Para o conjunto das soluções (106) e (107), o intervalo de variação para  $m$  é

$$[-j = -\frac{\epsilon^2 - K^2}{4\Omega|\epsilon|}, \infty) \quad . \quad (5.108)$$

### 5.5 - ESPAÇO COM MÉTRICA DE MINKOWSKI

Procedendo da mesma forma que o fizemos com o campo escalar, na seção 4.4, encontramos que os limites das soluções (35) para  $l^2 \rightarrow 0$  ( $\Omega = 0$ ) são dados por

$$\psi = CA \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{(+)} \end{pmatrix} iY_{(-)} (\epsilon - K) J_{m+\frac{1}{2}}(Y) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{(-)} \end{pmatrix} \sqrt{\epsilon^2 - K^2} J_{m-\frac{1}{2}}(Y) \end{bmatrix} e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad (5.109a)$$

$-\infty < m < \infty$

onde  $J_\nu$  são as funções de Bessel de primeira espécie e

$$Y := \sqrt{\epsilon^2 - K^2} r, \quad K = e \sqrt{M^2 + k_3^2} + \frac{\Omega_0}{2} \quad (5.109b)$$

A influência da curvatura do espaço sobre o comportamento dos fêrmions está contida em  $K$ . Para ver como essa curvatura afeta os níveis de energias, façamos  $\Omega = H = 0$  e  $D = r$  em (17). Efeituando, então, a transformação unitária (45a), seguida de uma mudança para coordenadas cartesianas, essa equação se reduz a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi, \quad (5.110a)$$

onde

$$\hat{H} = \gamma^5 \Sigma^1 (-i \frac{\partial}{\partial x}) + \gamma^5 \Sigma^2 (-i \frac{\partial}{\partial y}) + \Sigma^3 (\hat{C} + \frac{KS}{2}) \quad (5.110b)$$

Agora, além de  $i \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $i \frac{\partial}{\partial z}$  e  $\hat{C}$ ,  $i \frac{\partial}{\partial x}$  e  $i \frac{\partial}{\partial y}$  também são constantes de movimento. Daí, considerando as equações de autovalores

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \epsilon \psi, \quad i \frac{\partial}{\partial x} \psi = k_1 \psi, \quad i \frac{\partial}{\partial y} \psi = k_2 \psi, \quad i \frac{\partial}{\partial z} \psi = k_3 \psi, \quad (5.111)$$

e fazendo a separação de variáveis

$$\psi = T(t)X(x)Y(y)T(z),$$

encontramos

$$\psi = R e^{-i(\epsilon t + k_1 x + k_2 y + k_3 z)} , \quad R = (R_1, R_2, R_3, R_4)^T , \quad (5.112)$$

onde R é uma constante. Como, por outro lado,  $\hat{C}\psi = -e\sqrt{M^2+k_3^2} \psi$  implica que  $R_3 = \gamma_{(+)} R_1$ ,  $R_4 = \gamma_{(-)} R_2$ , ao substituir (112) em (110), obtemos o sistema de equações

$$\left[ \epsilon + \left( e \sqrt{M^2+k_3^2} + \frac{\kappa S}{2} \right) \right] R_1 = -(k_1 - ik_2) \gamma_{(-)} R_2$$

$$\left[ \epsilon - \left( e \sqrt{M^2+k_3^2} + \frac{\kappa S}{2} \right) \right] R_2 = -(k_1 + ik_2) \gamma_{(+)} R_1 .$$

Estas equações terão soluções não triviais para  $R_1$  e  $R_2$ , somente se

$$\epsilon^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2 + \left( \sqrt{M^2+k_3^2} + e \frac{\kappa S}{2} \right)^2 \quad (5.113)$$

Vemos, assim, que, mesmo neste caso, a rotação ou torção ( $\Omega_0 = \kappa S$ ) produz um desdobramento dos níveis de energia ( $e = \pm 1$ ) correspondentes a um dado valor de momentum  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ .



## CAPÍTULO 6

### ASSIMETRIAS NA CORRENTE FERMIÔNICA

#### 6.1 - GENERALIDADES

Aqui daremos continuidade à análise das soluções espinoriais com energias discretas, através do estudo da corrente de Dirac ao longo da vorticidade. Para isso, aplicaremos o mesmo procedimento usado nas referências (12) e (13). Em outras palavras, primeiramente vamos definir um espaço generalizado de Fourier e, a seguir, encontrar a componente  $J_F^{(3)}$  da corrente de Dirac nesse espaço. Veremos que a vorticidade e a torção podem dar origem a assimetrias em  $J_F^{(3)}$ . As mesmas assimetrias também se manifestam na componente  $J^{(3)}$  da corrente no espaço de coordenadas, calculada no ponto  $x = 1$ .

Nesta seção apresentamos algumas definições e alguns resultados gerais, válidos para todas as classes de métricas que estamos considerando. Nas seções seguintes particularizaremos esses resultados para as soluções referentes aos espaços com métricas hiperbólicas e circulares, respectivamente.

Definamos, então, a transformada de Fourier  $\psi_F$  das soluções  $\psi(x)$  através de

$$\psi_F(j'm'k'_3\varepsilon') = (2\pi)^{-3} \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, N(j'm'k'_3\varepsilon'; x) \psi(x) \quad (6.1)$$

onde o núcleo  $N$  está definido pela matriz diagonal

$$N(jmk_3 \epsilon; x) = N^{(+)}(jk_3 \epsilon m; x) + N^{(-)}(jmk_3 \epsilon; x) \quad (6.2a)$$

com

$$N^{(+)} := \text{diag} \left[ \frac{\alpha(m)}{\sqrt{\langle \alpha(m) \rangle}}, \frac{\beta(m)}{\sqrt{\langle \beta(m) \rangle}}, \frac{\alpha(m)}{\sqrt{\langle \alpha(m) \rangle}}, \frac{\beta(m)}{\sqrt{\langle \beta(m) \rangle}} \right] e^{i(m\phi + k_3 z + |\epsilon|t)}; \quad (6.2b)$$

$$N^{(-)} := \text{diag} \left[ \frac{\beta(-m)}{\sqrt{\langle \beta(-m) \rangle}}, \frac{\alpha(-m)}{\sqrt{\langle \alpha(-m) \rangle}}, \frac{\beta(-m)}{\sqrt{\langle \beta(-m) \rangle}}, \frac{\alpha(-m)}{\sqrt{\langle \alpha(-m) \rangle}} \right] e^{i(m\phi + k_3 z - |\epsilon|t)} \quad (6.2c)$$

Em (2)  $\alpha(m), \beta(m), \dots$ , são as mesmas funções que em (5.65) e (5.98) denotamos por  $\alpha_m, \beta_m, \dots$ . Substituindo o núcleo (2) na definição (1), encontramos, para as soluções da Seção 5.3,

$$\psi_F(jmk_3 \epsilon, j'm'k'_3 \epsilon') = R_F(jmk_3 \epsilon) \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(|\epsilon'| - |\epsilon|) \quad (6.3)$$

onde o espinor constante  $R_F$  é igual à expressão que se obtém através da supressão do fator  $\exp[-i(m\phi + k_3 z \pm |\epsilon|t)]$  nas soluções do espaço de coordenadas, seguida da substituição das funções  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  por  $\langle \alpha \rangle^{1/2}$  e  $\langle \beta \rangle^{1/2}$ . Por exemplo, para as soluções de energias positivas (5.63), temos

$$R_F^{(+)} = AC^I \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{pmatrix} i \gamma_{(-)} [|\epsilon| - K] \langle \alpha^{(1)}(m) \rangle^{1/2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{pmatrix} \ell(2m+1) \langle \beta^{(1)}(m) \rangle^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \frac{3}{2} \leq m < \infty \quad (6.4a)$$

$$R_F^{(+)} = AC^{II} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(+)} \end{pmatrix} \ell(1-2m) \gamma_{(-)} \langle \alpha^{(2)}(m) \rangle^{1/2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{(-)} \end{pmatrix} i [|\epsilon| + K] \langle \beta^{(2)}(m) \rangle^{1/2} \end{pmatrix}, \quad -j \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (6.4b)$$

A partir dessas amplitudes de Fourier, podemos recuperar as soluções no espaço de coordenadas através de

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sum_{j', m'} \int dk'_3 d\varepsilon' \left[ N^{(\pm)}(j', m', k'_3 \varepsilon'; \mathbf{x}) \right]^\dagger \psi_F^{(\pm)}(j', m', k'_3 \varepsilon') \quad (6.5)$$

onde  $\psi_F^{(+)}$  e  $\psi_F^{(-)}$  indicam as transformadas correspondentes às soluções de energias positivas e negativas respectivamente.

Por integração direta, encontramos, ainda,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, N^{(r)}(j', m', k'_3 \varepsilon'; \mathbf{x}) \left[ N^{(s)}(j m k_3 \varepsilon; \mathbf{x}) \right]^\dagger = \\ = (2\pi)^3 \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(|\varepsilon'| - |\varepsilon|) \delta_{rs} \quad r, s = \pm \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vamos agora escrever a equação de Dirac como [Ver eq. (5.21)]

$$[\gamma^A \pi_A - M] \psi(j m k_3 \varepsilon; \mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \pi_A = \eta_{AB} \pi^B \quad (6.7)$$

onde  $\pi_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\pi^1, \pi^2$  e  $\pi^3$  são os operadores (5.6b). Substituindo  $\psi$  pelo lado direito de (5), encontramos

$$[\gamma^A \pi_A - M] \left[ N^{(\pm)}(j m k_3 \varepsilon; \mathbf{x}) \right]^\dagger R_F^{(\pm)}(j m k_3 \varepsilon) = 0 \quad . \quad (6.8)$$

Consideremos, ainda, a corrente de Dirac no espaço de coordenadas

$$J^A(j', m', k'_3 \varepsilon', j m k_3 \varepsilon; \mathbf{x}) := \bar{\psi}(j', m', k'_3 \varepsilon'; \mathbf{x}) \gamma^A \psi(j m k_3 \varepsilon; \mathbf{x}) \quad . \quad (6.9)$$

Esta corrente é um escalar em relação a transformações gerais de coordenadas, mas, sob rotações locais de Lorentz, se trans -

forma como um quadrivector. A componente  $J^{(0)}(x)$ , por exemplo, se transforma como

$$J'^{(0)}(x) = \Lambda^0_B J^B(x) \quad (6.10)$$

e, conseqüentemente, a normalização que usamos na Seção 5.4,

$$\begin{aligned} \langle j'm'k'_3 \varepsilon' | jmk_3 \varepsilon \rangle &= \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, J^{(0)}(x) = \\ &= |\varepsilon| \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(|\varepsilon'| - |\varepsilon|) \quad , \quad (6.11) \end{aligned}$$

depende do sistema de tetradas que escolhemos. No entanto, os modelos do tipo Gödel do Capítulo 3 foram construídos tomando-se  $u^i = e^i_{(0)}(x)$ . Qualquer transformação local de Lorentz que preserve esta condição deve ter  $\Lambda^0_B = \delta^0_B$ . Neste caso, a normalização (9) permanece inalterada.

Por analogia com a corrente (9), vamos definir a corrente de Dirac no espaço de Fourier,  $J^A_F$ , por intermédio de

$$\begin{aligned} J^A_F(j'm'k'_3 \varepsilon', jmk_3 \varepsilon) &= \sum_{m''j''} \int d\varepsilon'' dk''_3 \bar{\psi}_F(j'm'k'_3 \varepsilon', m''k''_3 \varepsilon'') \times \\ &\quad \gamma^A \psi_F(j''m''k''_3 \varepsilon'', jmk_3 \varepsilon) \quad . \quad (6.12) \end{aligned}$$

Usando as equações (5), (6) e (11), encontramos, então,

$$\begin{aligned} J^{(0)}_F &= (2\pi)^{-3} \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, J^{(0)}(x) = \\ &= (2\pi)^{-3} |\varepsilon| \delta_{mm'} \delta(k'_3 - k_3) \delta(|\varepsilon'| - |\varepsilon|) \delta_{j,j'} \quad (6.13a) \end{aligned}$$

$$J^{(3)}_F = (2\pi)^{-3} \int \sqrt{-g} \, dx^4 \, J^{(3)}(x) \quad . \quad (6.13b)$$

## 6.2 - MÉTRICAS HIPERBÓLICAS

Neste caso as soluções no espaço de coordenadas são da  
das por (5.63) e (5.64). Usando, então, as eqs. (5.18), encontramos

$$[\gamma^1 \pi^1 + \gamma^2 \pi^2] [N^{(+)}]^\dagger = - \sqrt{\varepsilon^2 - K^2} [N^{(+)}]^\dagger \gamma^2, \quad \frac{3}{2} \leq m < \infty \quad (6.14a)$$

$$[\gamma^1 \pi^1 + \gamma^2 \pi^2] [N^{(+)}]^\dagger = + \sqrt{\varepsilon^2 - K^2} [N^{(+)}]^\dagger \gamma^2, \quad -j \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (6.14b)$$

Por outro lado,

$$[\gamma^0 \pi^0 - \gamma^3 \pi^3 - M] [N^{(\pm)}]^\dagger = [N^{(\pm)}]^\dagger \left[ \pm |\varepsilon| \gamma^0 + \gamma^3 \left( k_3 - \frac{\Omega - \kappa S}{2} \gamma^5 \right) - M \right] \quad (6.14c)$$

Daí, a eq. (8), após a eliminação de  $N^{(+)}$ , se reduz a

$$(\gamma^A P_A - M) \psi_F^{(+)}(j m k_3 \varepsilon) = 0, \quad (6.15)$$

que é a equação de Dirac no espaço de momenta correspondente às soluções com energias positivas; os momenta  $P_A$  são dados por\*

$$P_A = (|\varepsilon|, 0, \sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, k_3 - \gamma^5 \frac{\Omega - \kappa S}{2}), \quad \frac{3}{2} \leq m < \infty, \quad (6.16a)$$

$$P_A = (|\varepsilon|, 0, -\sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, k_3 - \gamma^5 \frac{\Omega - \kappa S}{2}), \quad -j \leq m \leq \frac{1}{2}. \quad (6.16b)$$

Para as soluções com energias negativas devemos trocar  $\psi_F^{(+)}$  por  $\psi_F^{(-)}$  em (16) e os momenta por

---

\* A escolha de uma matriz diagonal para o núcleo  $N$  da transformação, tal que  $[N, \gamma^0] = 0$ , é um fato importante, pois só dessa forma podemos ter  $P_0 \sim |\varepsilon|$  em (16) e (17).

$$P_A = (-|\varepsilon|, 0, \sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, k_3 - \gamma^5 \frac{\Omega - \kappa S}{2}) : -\frac{1}{2} \leq m \leq j \quad (6.17a)$$

$$P_A = (-|\varepsilon|, 0, -\sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, k_3 - \gamma^5 \frac{\Omega - \kappa S}{2}) : -\infty < m \leq -\frac{3}{2} \quad (6.17b)$$

As equações (16)-(17) são válidas para  $M \neq 0$ ; para  $M = 0$ , a única alteração que devemos fazer é redefinir  $P_3$  por

$$P_3 = k_3 - L \frac{\Omega - \kappa S}{2}, \quad (M = 0), \quad (6.18)$$

onde  $L$  é a helicidade dos neutrinos ou antineutrinos. Escrevendo explicitamente as transformadas de Fourier para as soluções de energias negativas e comparando-as com (4), concluímos que são válidas as seguintes relações

$$\psi_F^{(+)}(-m, -k_3) = -i\gamma^2 \psi_F^{(-)}(m, k_3)^* , \quad \text{se } M \neq 0 , \quad (6.19a)$$

$$\psi_F^{(+)}(-m, -k_3, -L) = -i\gamma^2 \psi_F^{(-)}(m, k_3, L)^* , \quad \text{se } M = 0 . \quad (6.19b)$$

Propriedades análogas a estas também relacionam as soluções de energias positivas e negativas no espaço de coordenadas. Em (19) omitimos a dependência de  $\psi_F$  em relação a  $m'_2, k'_3$ , e  $L'$ , mas deve entender-se que o sinal destas quantidades no lado esquerdo de (9) é contrário ao do lado direito.

Para o caso particular em que  $M = 0$ , temos, por (16)-(18),

$$P^A P_A = 0 , \quad (6.20)$$

que é uma relação para os momenta análoga à que ocorre para uma partícula livre sem massa no espaço de Minkowski.

Usando, agora a definição (9), as transformadas (4) e a normalização (11), encontramos que a componente  $J_F^{(3)}$  da corrente de Fourier, relativa às soluções com energias positivas, é dada por

$$\begin{aligned}
 J_F^{(3)}(j'm'k'_3\varepsilon', jmk_3\varepsilon) &= \\
 &= -\frac{k_3}{(2\pi)^3} \left[ 1 - \frac{1}{e\sqrt{M^2+k_3^2}} \frac{\Omega-\kappa S}{2} \right] \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k'_3-k_3) \delta(|\varepsilon'|-|\varepsilon|) \\
 & \hspace{20em} (M \neq 0) \hspace{2em} (6.21a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_F^{(3)}(j'm'k'_3, \varepsilon', jmk_3\varepsilon) &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ -k_3 + \frac{\Omega-\kappa S}{2L} \right] \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k'_3-k_3) \delta(|\varepsilon'|-|\varepsilon|) \\
 & \hspace{20em} (M = 0) \hspace{2em} (6.21b)
 \end{aligned}$$

De acordo com a interpretação de Dirac ("hole theory"), as soluções com energias positivas descrevem objetos físicos denominados partículas (elétrons ou neutrinos) e as soluções com energias negativas estão associadas a objetos chamados de antipartículas (pósitrons e antineutrinos, respectivamente), através da seguinte regra <sup>(34)</sup>: aplicando a operação de conjugação de carga a uma solução com energia negativa, obtemos uma solução que descreve a antipartícula correspondente. Tendo em vista que no nosso caso valem as simetrias (19), podemos dizer que, se

$$\psi_F^{(+)}(m, k_3) \text{ descreve elétrons e} \hspace{10em} (6.22a)$$

$$\psi_F^{(+)}(m, k_3, L) \text{ descreve neutrinos,} \hspace{10em} (6.22b)$$

então, temos que [confira eqs. (19a,b)]

$\psi_F^{(+)}(-m, -k_3)$  descreve pósitrons correspondentes a (22a) e

$\psi_F^{(+)}(-m, -k_3, -L)$  descreve antineutrinos correspondentes a (22b).

A seguir vamos restringir a análise das correntes (21) a neutrinos e antineutrinos ou, ainda, a férmions massivos com  $k_3^2 \gg M$ , pois neste caso a helicidade pode ser considerada um bom número quântico [ver eqs. (5.12) e (5.13)]. Para neutrinos resultantes de interações fracas, que violam a paridade, devemos escolher  $L = -1$  e, para os correspondentes antineutrinos  $L = 1$ . Então, de (21b), ficamos com

$$J_F^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ -k_3 - \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2} \right] \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k_3' - k_3) \delta(|\epsilon'| - |\epsilon|), \quad (6.23a)$$

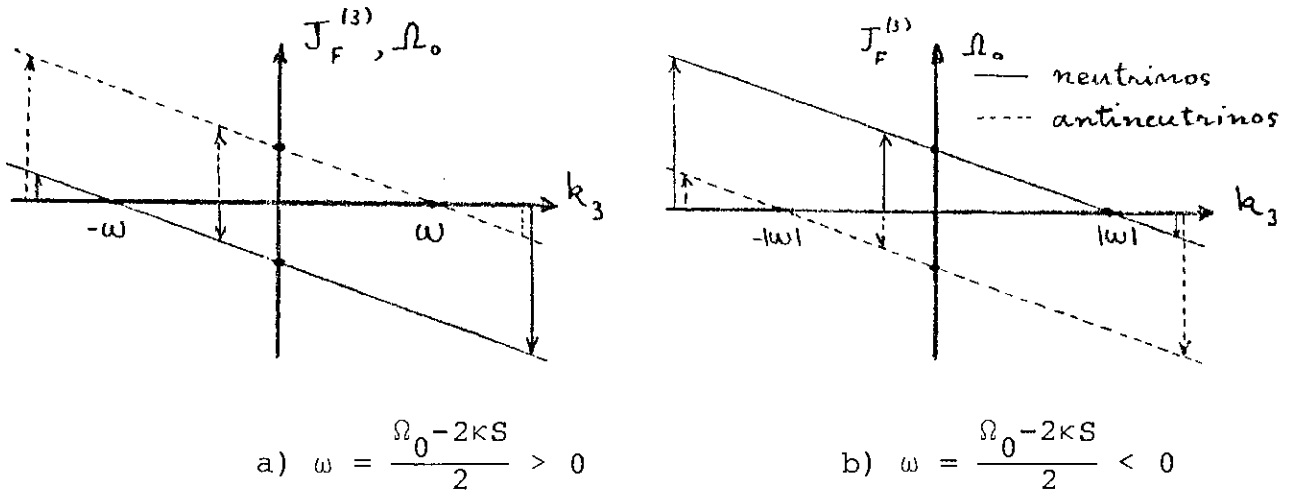
(neutrinos)

$$J_F^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ -k_3 + \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2} \right] \delta_{mm'} \delta_{jj'} \delta(k_3' - k_3) \delta(|\epsilon'| - |\epsilon|), \quad (6.23b)$$

(antineutrinos)

onde usamos a equação (3.21) para escrever  $\Omega = \Omega_0 - \kappa S$ . O valor destas correntes depende tanto de  $k_3$  quanto da relação entre a rotação  $\Omega_0$  e a torção  $S$ . Assim, quando  $\Omega_0 = 2\kappa S$ , para um dado valor de  $k_3$ , a corrente de neutrinos tem o mesmo sentido e o mesmo módulo que a de antineutrinos. Nos outros casos ( $\Omega_0 \neq 2\kappa S$ ) essas correntes são assimétricas. Tais assimetrias estão ilustradas nos gráficos da página a seguir, a menos do fator  $\delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k_3' - k_3) \delta(|\epsilon'| - |\epsilon|)$ .





Considerando um dado módulo de  $k_3$ , temos (a menos das deltas)

$$J_F^{(3)}(k_3) + J_F^{(3)}(-k_3) = - \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{(2\pi)^3} \quad (\text{neutrinos}) \quad (6.24a)$$

$$J_F^{(3)}(k_3) + J_F^{(3)}(-k_3) = + \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{(2\pi)^3} \quad (\text{antineutrinos}) \quad (6.24b)$$

Estas últimas equações mostram que, para um dado módulo de  $k_3$ , a corrente de neutrinos predomina num sentido e a de antineutrinos no sentido contrário, exceto se  $\Omega_0 = 2\kappa S$ . Assim, para  $\Omega_0 > 2\kappa S$  – caso onde se incluem as métricas riemannianas – os neutrinos serão emitidos predominantemente no sentido contrário ao da rotação; mas, para  $\Omega_0 < 2\kappa S$ , esses neutrinos serão emitidos preferencialmente no mesmo sentido da rotação. Podemos também analisar o sentido das correntes em função de  $k_3$ . Nos gráficos acima, o sentido da rotação coincide com o sentido do eixo das ordenadas. Daí vemos que

a) Se  $\Omega_0 > 2\kappa S$ , a corrente de neutrinos tem sempre sentido contrário ao da rotação, se  $|k_3| < \omega$ , e a de antineutrinos tem o mesmo sentido que a rotação. Para  $k_3 < -\omega$ , as correntes de neutrinos e antineutrinos têm o mesmo sentido que a rota

ção, sendo maior a de antineutrinos. Se  $k_3 > \omega$ , ambas as correntes têm sentido oposto ao da rotação, e a de neutrinos é maior que a de antineutrinos.

b) Se  $\Omega_0 < 2\kappa S$ , os neutrinos e antineutrinos são sempre emitidos em sentidos opostos, quando  $|k_3| < |\omega|$ : neutrinos, no sentido da rotação, e antineutrinos no sentido contrário. Para  $|k_3| > |\omega|$ , ambas as correntes têm o mesmo sentido: a de neutrinos é maior que a de antineutrinos, quando  $k_3 < -|\omega|$ ; a de antineutrinos é maior que a de neutrinos, quando  $k_3 > |\omega|$ .

Em qualquer das situações acima, uma das correntes (a de neutrinos ou a de antineutrinos) se anula, quando  $k_3 = \pm \left(\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right)$ . Este fato, em princípio, poderia ser usado para determinar o valor de  $\Omega_0 - 2\kappa S$ , ou da rotação, se  $S = 0$ .

As assimetrias acima, que se referem às correntes no espaço de Fourier, também ocorrem na componente  $J^{(3)}(x)$  da densidade de corrente do espaço de coordenadas. Devido à homogeneidade do espaço-tempo, vamos calcular  $J^{(3)}(x)$  apenas no ponto  $x = 1$ . De (5.65) e de (9) encontramos que  $J^{(3)}(x=1)$  é diferente de zero somente quando  $(j'm'k'_3'\epsilon') = (jmk_3\epsilon)$  em (9) e  $m = \pm 1/2$ . Obtemos, então,

$$J^{(3)}(m=\frac{1}{2}) = \frac{-\ell^2}{(2\pi)^3} L\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j-1\right) \left(|\epsilon| + Lk_3 - \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right), \quad j \geq -\frac{1}{2}$$

(6.25a)

$$J^{(3)}(m=-\frac{1}{2}) = \frac{\ell^2}{(2\pi)^3} L\left(\frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j-1\right) \left(|\epsilon| - Lk_3 + \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right), \quad j \geq \frac{1}{2}$$

(6.25b)

Daí, segue-se que a corrente total para  $j = -\frac{1}{2}$  é dada por

(25a) e para  $j \geq \frac{1}{2}$  é dada pela soma de (25a) com (25b), ou seja,

$$\sum_m J^{(3)} = -\frac{2\ell^2 L}{(2\pi)^3} \left( \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1 \right) \left( Lk_3 - \frac{\Omega_0^{-2\kappa S}}{2} \right), \quad j \geq \frac{1}{2} \quad (6.26)$$

Nesta última equação, fazendo  $L = -1$  para neutrinos e  $L = 1$  para antineutrinos, ficamos com

$$\sum_m J^{(3)} (j \geq \frac{1}{2}) = \frac{2\ell^2}{(2\pi)^3} \left( \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1 \right) \left( -k_3 - \frac{\Omega_0^{-2\kappa S}}{2} \right) \text{ neutrinos} \quad (6.27a)$$

$$\sum_m J^{(3)} (j \geq \frac{1}{2}) = \frac{2\ell^2}{(2\pi)^3} \left( \frac{\Omega|\epsilon|}{\ell^2} - 2j - 1 \right) \left( -k_3 + \frac{\Omega_0^{-2\kappa S}}{2} \right) \text{ antineutrinos} \quad (6.27b)$$

O fator que está dentro dos últimos parênteses em cada uma destas expressões é o mesmo que aparece em (23). No entanto, os gráficos anteriores não são aplicáveis a este caso porque  $|\epsilon|$  também é função de  $k_3$ , ou seja,

$$|\epsilon| = \Omega(2j+1)^2 + \left[ (\Omega^2 - \ell^2)(2j+1)^2 + \left( Lk_3 - \frac{\Omega_0^{-2\kappa S}}{2} \right)^2 \right]^{1/2} .$$

Apesar disso, qualitativamente as assimetrias exibidas por (27) são as mesmas que encontramos para as correntes (23). Por exemplo a corrente de neutrinos ao longo da rotação, para valores fixos de  $|k_3|$  e de  $|\epsilon|$ , tem o mesmo módulo mas sentido oposto ao da corrente de antineutrinos com mesmo valor de energia e com momentum  $-k_3$ . Além disso, uma dessas correntes é nula sempre que  $k_3 = \pm \frac{\Omega_0^{-2\kappa S}}{2}$ , como no caso anterior.

Considerando, agora, a corrente (24a) para  $j = -m =$

$= -\frac{1}{2} (|\varepsilon| = |K|)$ , encontramos

$$J^{(3)} (j=-m=-\frac{1}{2}) = \mp \frac{2\Omega}{(2\pi)^3} |K| (|K|+K) \quad , \quad (6.28)$$

com

$$K = \mp k_3 - \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2} \quad , \quad \begin{array}{l} -: \text{ neutrinos} \\ +: \text{ antineutrinos} \end{array}$$

Para  $K < 0$  [isto é, para neutrinos com  $k_3 > -(\Omega_0 - 2\kappa S)/2$  e para antineutrinos com  $k_3 < (\Omega_0 - 2\kappa S)/2$ ], a corrente (28) é nula .

Calculando  $J^{(0)}$  em  $x = 1$ , temos

$$J^{(0)} (j = -m = -\frac{1}{2}, x=1) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} |K| (|K|+K) \quad ,$$

ou seja, o lado direito de (28) será nulo se, e somente se, a densidade  $J^{(0)}$  for nula.

Os limites de (27) e (28), quando  $l^2 \rightarrow 0$  (Som-Raychaudhuri) são triviais e preservam todas as assimetrias encontradas nesta seção.

### 6.3 - MÉTRICAS CIRCULARES

Para o caso de métricas circulares, as soluções com energias positivas e negativas no espaço de coordenadas são dadas, respectivamente, por (5.97) e (5.40). Procedendo da mesma forma que na seção anterior, obtemos as quantidades referentes ao espaço de Fourier, quantidades estas que diferem das anteriores devido aos novos intervalos de variação para  $m$  e devido à presença de soluções com espectro de energias  $\varepsilon_2$ . Assim, para

partículas com  $M = 0$ , ao invés de (16), obtemos

$$P_A = (|\varepsilon|, 0, \sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, P_3), \quad \frac{1}{2} \leq m < \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + \frac{1}{2}, \quad j \geq \frac{1}{2},$$

$$P_A = (|\varepsilon|, 0, -\sqrt{\varepsilon^2 - K^2}, P_3), \quad -j \leq m - \frac{1}{2} + \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2}$$

$$P_A = (|\varepsilon_2|, 0, \sqrt{(\varepsilon_2)^2 - K^2}, P_3), \quad \frac{\Omega|\varepsilon_2|}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \leq m \leq j, \quad ,$$

onde  $P_3 = k_3 - L \frac{\Omega - \kappa S}{2}$ .

onde  $|\varepsilon|$  e  $|\varepsilon_2|$  são dados pelas equações (5.94a,b).

As equações (29b), (20) e (23) agora se aplicam também às soluções com energias  $\varepsilon_2$ . As assimetrias das correntes (23) e das correntes correspondentes a  $\varepsilon_2$  permanecem inalteradas para cada um desses espectros. Se, para um dado intervalo de  $m$ , houver soluções com ambos os espectros, as correntes devem ser adicionadas, mas isso altera apenas a intensidade de  $J_F^{(3)}$  e não as suas assimetrias.

Consideremos, por outro lado, a componente  $J^{(3)}(x)$  da corrente no espaço de coordenadas, em  $x = 1$ . Novamente, esta corrente será diferente de zero somente para  $m = \pm 1/2$  e  $(j'm'k'_3\varepsilon') = (jmk_3\varepsilon)$  em (9). Além disso, as soluções com espectro de energias  $\varepsilon_2$ , (5.97b), só contribuiriam se  $m = 1/2$  e  $\Omega = 0$ , mas, neste caso, tais soluções são dependentes de (5.97c) com  $m = -1/2$ ; por isso, devemos considerar somente a expressão (5.97c). Então, a partir de (5.97) e de (11), encontramos

$$J^{(3)}(m = -\frac{1}{2}) = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} L \left[ \frac{\Omega|\varepsilon|}{\lambda^2} + j + \frac{1}{2} \right] (|\varepsilon| - K), \quad j \geq \frac{1}{2}$$

$$J^{(3)} \left( m = \frac{1}{2} \right) = - \frac{\lambda^2 L}{(2\pi)^3} \left( \frac{\Omega |\varepsilon|}{2\lambda^2} + j + \frac{1}{2} \right) (|\varepsilon| + K) \quad , \quad j \geq -\frac{1}{2} \quad ,$$

onde  $K = Lk_3 - \frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}$  . As simetrias ou assimetrias destas correntes são análogas às apresentadas pelas correntes (25).

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Os problemas que nos propusemos resolver neste trabalho foram abordados nos Capítulos 3 a 6. Aqui vamos apresentar algumas conclusões e indicar certas questões relacionadas com os nossos temas e que ainda permanecem sem soluções.

No Capítulo 3 discutimos as soluções das equações de Einstein-Cartan, supondo que a fonte de curvatura era constituída por um fluido de Weyssenhoff-(Raabe) mais um campo eletromagnético na mesma direção do vetor de rotação, ou por um fluido de Weyssenhoff com pressão anisotrópica. Em razão dessas hipóteses, podemos considerar essa parte da tese como uma generalização de trabalhos anteriores de Rebouças e Novello<sup>(2,3,4)</sup> (teoria riemanniana) e do trabalho em que Teixeira, Duarte e Tiomno<sup>(8)</sup> discutem as métricas do tipo Gödel em Einstein-Cartan, com a curvatura dada unicamente pelo fluido com spin. Nossa tarefa consistiu em determinar as consequências da presença simultânea da torção e do campo eletromagnético ou da torção e da pressão anisotrópica do fluido. Mostramos que o campo eletromagnético ou a pressão anisotrópica diminuem a amplitude do intervalo de  $l$  (ou o suprimem) para o qual não ocorrem curvas do tipo fechadas, qualquer que seja o valor da coordenada  $r$  - eq. (3.37) e (3.54). Além de havermos obtido a métrica de

Som-Raychaudhuri em Einstein-Cartan, como esperávamos, também encontramos a possibilidade de uma métrica diagonal, pertencente à família das métricas circulares. Esta métrica diagonal não pode existir, se o campo magnético resultar de uma densidade constante de cargas do fluido em rotação. No caso de pressão anisotrópica, impusemos que as soluções deveriam ser homogêneas; porém, em presença de campo eletromagnético, a homogeneidade decorreu das próprias equações de Einstein-Cartan-Maxwell.

No Capítulo 4 analisamos, para as diversas classes de métricas do tipo Gödel, as soluções da equação de Klein-Gordon sem acoplamento com campo eletromagnético. O campo escalar foi tomado como partícula de teste. As soluções para os espaços com  $\ell = 0$  (Som-Raychaudhuri e Minkowski com torção) foram obtidas como limites das soluções dos espaços com  $\ell \neq 0$ . Devido ao caráter de partícula de teste que atribuímos ao campo escalar, exigimos que este fosse finito em qualquer ponto do espaço e, assim, obtivemos a natureza dos espectros de energia (contínuos ou discretos). No caso de energias discretas\*, encontramos certas limitações para os autovalores  $m$  do operador  $i\partial/\partial\phi$ , para partículas com energias contínuas  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro, positivo ou negativo. Depois disso, tomamos de empréstimo das referências (11), (30) e (31) alguns resultados concernentes a trajetórias geodéticas de partículas de teste clássicas em universos do tipo Gödel e os confrontamos com nossos resultados quânticos\*\*. Para isso, fizemos a correspondência em -

---

\* Chamamos de espectro discreto aquele em que o valor da energia depende de um número  $j$ , inteiro no caso do campo escalar e semi-inteiro no caso do campo de Dirac. Essas energias são funções contínuas do momentum  $k_3$ .

\*\* Para a comparação dos resultados, consideramos apenas as soluções com energias positivas.



tre  $\epsilon$ ,  $m$  e  $k_3$  (autovalores dos operadores quânticos  $i\partial/\partial t$ ,  $i\partial/\partial\phi$  e  $i\partial/\partial z$ ) e as constantes clássicas  $p_t$ ,  $p_\phi$  e  $p_z$  (momenta constantes associados às coordenadas  $t$ ,  $\phi$  e  $z$ ). A constante clássica  $p_\phi$  pertence a um dado intervalo real, cujas extremidades dependem da classe de métricas em questão e dos parâmetros que caracterizam a partícula. Mostramos que, se considerarmos uma partícula escalar com  $\epsilon = p_t$  e  $k_3 = p_z$ , então, o intervalo de variação de  $m$  é constituído por todos os números inteiros contidos no intervalo clássico para  $p_\phi$ .

Vimos, também, que as trajetórias clássicas limitadas (em relação à coordenada  $r$ ) correspondem a partículas escalares com espectros discretos de energias; as geodésicas ilimitadas, correspondem a partículas escalares com espectros contínuos de energias. Ocorrem trajetórias ilimitadas somente no caso de métricas hiperbólicas com  $\ell^2 > \Omega^2$  (isto é, sem curvas fechadas tipo tempo) e com a condição de que a energia da partícula satisfaça a desigualdade  $(p_t)^2 \geq \ell^2 [M^2 + (p_z)^2] / (\ell^2 - \Omega^2)$ . Substituindo  $p_t$  e  $p_z$  por  $\epsilon$  e  $k_3$  nesta desigualdade, encontramos a condição sob a qual a correspondente partícula escalar apresenta energia contínua. No contexto do Capítulo 3, a existência de trajetórias ilimitadas ou de espectros de energia contínuos é característico da teoria de Einstein-Cartan, uma vez que, no limite de torção nula, não obtemos nenhuma métrica riemanniana com  $\ell^2 > \Omega^2$ . Devemos lembrar ainda que a harmonia entre os resultados quânticos e clássicos referentes a esses espaços é uma consequência da adoção da condição de contorno (4.49a) para o campo escalar, ao invés da condição (4.27).

No Capítulo 5, efetuamos uma análise das soluções da equação de Dirac nos espaços do tipo Gödel, análise semelhante

ã que fizemos para as soluções escalares, mas não procuramos nenhum análogo clássico ao nosso problema. Da exigência de que os espinores fossem finitos em qualquer ponto do espaço-tempo, obtivemos novamente energias contínuas ou discretas e, no caso das energias discretas, vimos que os intervalos que determinam os autovalores possíveis,  $m$ , do operador  $i\partial/\partial\phi$  são limitados (agora,  $m =$  semi-inteiro). Para métricas circulares, as energias são sempre discretas e o intervalo para  $m$  é limitado inferior e superiormente. Para a métrica de Som-Raychaudhuri as energias também são discretas e  $m$  é limitado inferiormente para energias positivas. Para espaços com métricas hiperbólicas, as energias podem ser contínuas ou discretas, dependendo das relações entre os parâmetros cosmológicos e os parâmetros que caracterizam a partícula; para energias contínuas  $m$  pode assumir qualquer valor semi-inteiro, mas, para energias discretas,  $m$  pertence a um intervalo limitado inferior ou superiormente. Se  $\ell^2 > \Omega^2$  (métricas sem círculos acausais) as energias discretas, se existirem, se situam na parte inferior do espectro, como no caso do campo escalar. Para métricas hiperbólicas com  $\Omega^2 > \ell^2$ , uma partícula de Dirac pode, sob certas condições, apresentar energias contínuas na parte inferior do espectro e energias discretas na parte superior. Isto é decorrência da condição de contorno que adotamos e desapareceria se houvéssemos exigido, ao invés dessa condição, que  $\sqrt{-g} \psi^\dagger \psi$  fosse finito em qualquer ponto. Esta última condição de contorno é mais forte que a outra, pois elimina soluções com energias pertencentes a um determinado intervalo contínuo de valores. A escolha de uma ou de outra dessas condições poderia, em princípio, ser feita com base na experiência, uma vez que conduzem a resultados dife

rentes.

No espaço de Minkowski com torção, as soluções espinoriais têm energias contínuas; neste caso também encontramos as soluções da equação de Dirac em coordenadas cartesianas. Constatamos que, para um valor fixo de momentum,  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ , as energias são dadas por

$$\epsilon^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2 + (e\sqrt{M^2 + k_3^2} + \kappa S)^2,$$

onde  $\underline{e}$  é um número quântico igual a +1 ou -1. Ou seja, para um dado valor de momentum temos dois valores possíveis para a energia da partícula. Esse mesmo número  $\underline{e}$  também aparece em todas as fórmulas dos espectros de energias discretas e está relacionado com os autovalores de uma constante de movimento que nos permitiu reduzir o número de componentes espinoriais independentes a duas. Para partículas com massas nulas,  $e|k_3| = Lk_3$ , onde L é a helicidade (ou autovalor da matriz  $\gamma^5$ ).

O Capítulo 6 foi dedicado à análise da corrente de Dirac, para neutrinos e antineutrinos resultantes de interações fracas, ao longo da direção da rotação  $\Omega_0$ . A componente  $J_F^{(3)}$  dessas correntes, definidas num espaço de Fourier generalizado, têm sentidos e módulos que dependem, para um dado valor de  $k_3$ , da relação entre  $\Omega_0$  e  $2\kappa S$  ( $S$  = densidade de spin do espaço). Se  $\Omega_0 = 2\kappa S$ ,  $J_F^{(3)}$  para neutrinos tem o mesmo módulo e mesmo sentido que  $J_F^{(3)}$  para antineutrinos: se  $k_3 < 0$  essas componentes da corrente têm o mesmo sentido que a rotação e, se  $k_3 > 0$ , estão no sentido contrário ao da rotação. Se  $\Omega_0 \neq 2\kappa S$ , essas simetrias desaparecem e, para um dado valor de  $k_3$  (exceto  $k_3 = 0$ ) o módulo da corrente de antineutrinos é diferente do módulo da cor-

rente de neutrinos. Encontramos (veja os gráficos do Cap. 6):

a) Para  $-\left|\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right| < k_3 < \left|\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right|$  e  $\Omega_0 > 2\kappa S$ , a componente  $J_F^{(3)}$  da corrente de neutrinos é antiparalela à rotação e a de antineutrinos é paralela; se  $\Omega_0 < 2\kappa S$ , os sentidos se invertem.

b) Para  $k_3 = \pm \left|\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right|$ , a componente  $J_F^{(3)}$  para neutrinos ou a componente  $J_F^{(3)}$  para antineutrinos se anula.

c) Para  $k_3 < -\left|\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right|$ , as correntes de neutrinos e antineutrinos têm o mesmo sentido que a rotação: se  $\Omega_0 > 2\kappa S$ , a corrente de antineutrinos é maior que a de neutrinos; se  $\Omega_0 < 2\kappa S$  a corrente de neutrinos é maior que a de antineutrinos.

d) Para  $k_3 > \left|\frac{\Omega_0 - 2\kappa S}{2}\right|$ , ambas as correntes são antiparalelas à rotação. Se  $\Omega_0 > 2\kappa S$  a corrente de neutrinos é maior que a de antineutrinos e, se  $\Omega_0 < 2\kappa S$ , acontece o contrário.

Para finalizar, vamos mencionar alguns problemas que poderiam dar continuidade ao nosso trabalho. Um destes problemas seria o estudo do acoplamento de partículas de teste com o campo eletromagnético de origem cosmológica nos universos do tipo Gödel, com torção ou sem ela. Os seguintes tópicos poderiam ser discutidos:

(a) Campo escalar.

(b) Campo espinorial.

(c) Trajetórias de partículas clássicas sem "spin".

(d) Trajetórias de partículas clássicas com "spin".

Os problemas (c) e (d) estão relacionados com o tema deste trabalho na medida que poderiam constituir os análogos clássicos dos problemas (a) e (b), respectivamente. O estudo da interação

de partículas de teste carregadas com campo eletromagnético se faz necessário porque os modelos do tipo Gödel podem incluir o campo eletromagnético em sua fonte de curvatura. No Apêndice A, discutimos o acoplamento do campo escalar com um campo eletromagnético constante, para a métrica de Som-Raychaudhuri. Vimos que esse acoplamento é responsável por uma assimetria entre os espectros de energias positivas e os espectros de energias negativas. Esse estudo deve ser estendido para todas as classes de métricas do tipo Gödel e para o campo espinorial. Podemos também considerar o caso em que o campo eletromagnético é função periódica da coordenada  $z$  (campo sem fonte).

Uma outra linha de pesquisas poderia dar prosseguimento às investigações do presente trabalho. Usando o aparato matemático que desenvolvemos para campos escalares e espinoriais, poderíamos examinar processos da física de partículas elementares nos espaços curvos com vorticidade e/ou torção, como o decaimento de um méson. É possível que a presença da vorticidade e/ou torção dê origem a assimetrias nesses processos, assimetrias estas que devem ser calculadas.

## APÊNDICE A

### ACOPLAMENTO DO CAMPO ESCALAR COM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

#### (MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI)

##### A.1 - GENERALIDADES

Nos Capítulos 4 e 5, para simplificar nosso trabalho, não permitimos que as partículas escalares e espinoriais interagissem com qualquer campo eletromagnético. No entanto, o campo eletromagnético pode fazer parte da fonte de curvatura dos espaços do tipo Gödel e, em consequência, para partículas de teste carregadas, aquela restrição deve ser removida. Neste Apêndice, vamos acoplar o campo escalar com o potencial (3.47a), que resulta da rotação de um fluido de Weyssenhoff carregada e não depende da coordenada  $z$ . Primeiramente vamos estabelecer as soluções gerais da equação de Klein-Gordon e, a seguir, vamos analisar os espectros de energias somente para as soluções referentes à métrica de Som-Raychaudhuri. A extensão dessa análise para as outras classes de métricas do tipo Gödel e para o campo espinorial, bem como para potenciais dependentes de  $z$  (campo sem fonte), será efetuada posteriormente.

Considerando o potencial (3.47a),

$$A_2 = - \frac{B}{2\Omega} H \quad , \quad (A.1)$$

e efetuando a substituição mínima  $\partial_i \rightarrow \partial_i - iqA_i$ , onde  $q$  é a carga do campo escalar, a eq. (4.1) se escreve como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{D'}{D} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{H^2 - D^2}{D^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{2H}{D} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial t} - M^2 \Phi + \frac{1}{D^2} \left[ -\frac{iqB}{\Omega} H^2 \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{iqB}{\Omega} H \frac{\partial}{\partial t} + \frac{q^2 B^2}{4\Omega^2} H^2 \right] \Phi = 0 \quad (A.2)$$

Substituindo  $H$  e  $D$  pelas expressões (4.2) e fazendo a separação de variáveis (4.13), obtemos

$$4\ell^2 (x^2 - 1) \frac{d^2 R}{dx^2} + 8\ell^2 x \frac{dR}{dx} + 4\ell^2 \left[ \frac{\frac{1}{\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})^2 + 2m(\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})}{2\ell^2 (x+1)} - \frac{m^2}{x^2 - 1} - P \right] R = 0 \quad (A.3a)$$

com

$$P = \frac{1}{4\ell^2} \left[ M^2 + k_3^2 + \frac{1}{\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})^2 - \epsilon^2 \right] \quad (A.3b)$$

A diferença fundamental desta equação em relação à eq. (4.6) é que agora temos  $\Omega\epsilon + qB/2$  onde antes aparecia o produto  $\Omega\epsilon$ . Então, as suas soluções podem ser obtidas das soluções (4.17) através da simples substituição

$$\Omega\epsilon \rightarrow \Omega\epsilon + \frac{qB}{2} \quad (A.4)$$

ou seja,

$$\Phi^I \sim (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})} F(a, b, c; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad m \geq 0 \quad (4.5a)$$

$$\Phi^{II} \sim (x^2 - 1)^{-\frac{m}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})} F(a', b', c'; \frac{1-x}{2}) e^{-i(m\phi + k_3 z + \epsilon t)} \quad m < 0 \quad (4.5b)$$

onde  $a$  e  $b$  ou  $a'$  e  $b'$  são dados por

$$a = m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}) + \frac{n}{2} \quad ; \quad b = m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}) - \frac{n}{2} \quad ; \quad (\text{A.6a})$$

$$a' = -m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}) + \frac{n}{2} \quad ; \quad b' = -m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ell^2} (\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}) - \frac{n}{2} \quad ; \quad (\text{A.6b})$$

$$c = 1+m \quad , \quad c' = 1-m \quad (\text{A.6c})$$

$$n := \left\{ \frac{1}{\ell^4} [(\Omega\epsilon + \frac{qB}{2})^2 - \ell^2 \epsilon^2] + \frac{1}{2} (M^2 + k_3^2 + \ell^2) \right\}^{1/2} . \quad (\text{A.6d})$$

As soluções  $\Phi^I$  e  $\Phi^{II}$  estão relacionadas através

$$\Phi^I(m, k_3, \epsilon, q) \sim \Phi^{II}(-m, -k_3, -\epsilon, -q)^* \quad , \quad (\text{A.7})$$

e para  $m = 0$ , temos  $\Phi^I(m=0) \sim \Phi^{II}(m=0)$ . Os operadores  $K_{(\pm)}$ , de finidos por

$$K_{(\pm)}^I = K_{(\pm)}^{II} = e^{\mp i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mp \left( \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{H}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right) \pm \frac{qA_2}{D} \right] \quad , \quad (\text{A.8})$$

quando aplicados às soluções (A.5), reproduzem formalmente as equações (4.21), mas com  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  e  $b'$  definidos em (A.6). Estes operadores, bem como a sua álgebra, podem ser obtidos dos operadores que havíamos encontrado para o caso sem acoplamento eletromagnético por meio da substituição de  $i\Omega \frac{\partial}{\partial t}$  por  $i\Omega \frac{\partial}{\partial t} + \frac{qB}{2}$ .

Deveríamos agora extrair as consequências da imposição de que as soluções (A.6) sejam finitas em qualquer ponto do espaço-tempo, para cada uma das classes de métricas do tipo Gödel. Ao invés disso, vamos nos limitar ao espaço de Som-Raychau-



dhuri, pois o que pretendemos é tão somente ilustrar as alterações que o acoplamento eletromagnético introduz em nossa análise anterior.

## A.2 - MÉTRICA DE SOM-RAYCHAUDHURI

A fim de completar a demonstração da Seção 4.4, vamos construir explicitamente as soluções da eq. (A.2) para a métrica de Som-Raychaudhuri, ao invés de obtê-las como limites das soluções (A.6), quando  $\ell \rightarrow 0$ . Usando a separação de variáveis (4.13) e fazendo  $H = \Omega r^2$  e  $D = r$  em (A.2), encontramos

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left[ \left( \Omega \epsilon + \frac{qB}{2} \right)^2 r^2 + \frac{m^2}{r^2} - 2m \left( \Omega \epsilon + \frac{qB}{2} \right) + M^2 + k_3^2 - \epsilon^2 \right] R = 0 \quad . \quad (A.9)$$

O potencial (A.1) se escreve como

$$A_2 = - \frac{Br^2}{2} \quad , \quad (A.10)$$

sendo  $B$  o campo magnético cosmológico, que, para o fluido carregado do Capítulo 3, é dado por

$$2\Omega B = \sigma \quad . \quad (A.11)$$

Para  $\Omega = 0$  ( $\sigma = 0$ ), nada impede que interpretemos (A.9) como a equação, em coordenadas cilíndricas, que descreve, no espaço de Minkowski, a interação de um campo escalar carregado com um campo magnético constante na direção do eixo  $z$ . Com efeito, para esta situação, o potencial também é dado por (A.10), sendo  $B$  inter-

pretado como o campo do laboratório. Por esse motivo, devemos esperar que as soluções da equação (A.10) forneçam as soluções para o caso da relatividade restrita, quando tomarmos o limite  $\Omega \rightarrow 0$ , mantendo B fixo.

Definindo agora  $\xi$  e  $d$  por

$$\xi = \left(\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}\right)r^2, \quad d = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2 - M^2 - k_3^2}{4\left(\Omega\epsilon + \frac{qB}{2}\right)}, \quad (\text{A.12})$$

encontramos que as soluções independentes da equação (A.9), finitas em  $r = 0$ , podem ser escritas como

$$R^{\text{I}} = \xi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(d, m+1; \xi), \quad m \geq 0, \quad (\text{A.13a})$$

$$R^{\text{II}} = \xi^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(d-m, 1-m; \xi), \quad m < 0, \quad (\text{A.13b})$$

onde  $F(a, c; \xi)$  são as funções hipergeométricas confluentes <sup>(29)</sup>. As soluções  $R^{\text{II}}$  também são válidas para  $m = 0$ , mas, neste caso, são linearmente dependentes de  $R^{\text{I}}(m=0)$ . Por outro lado,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} F(d, c; \xi) = \begin{cases} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)} e^{\xi} \xi^{d-c}, & \text{se } \xi > 0 \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-d)} (-\xi)^{-d}, & \text{se } \xi < 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Exigindo, então, que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} R = \text{finito}, \quad (\text{A.15})$$

encontramos

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} R^I \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(d)} e^{\frac{\xi}{2}} \xi^{d - \frac{m}{2} - 1} & , \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \quad (\text{A.16a}) \\ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-d)} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{-d + \frac{m}{2}} & , \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \quad (\text{A.16b}) \end{cases}$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} R^{II} \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(1-m)}{\Gamma(d-m)} e^{\frac{\xi}{2}} \xi^{-\frac{m}{2} - 1 + d} & , \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \quad (\text{A.17a}) \\ \frac{\Gamma(1-m)}{\Gamma(1-d)} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{m}{2} - d} & , \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \quad (\text{A.17b}) \end{cases}$$

A presença do fator exponencial em (A.16) e (A.17) indica que a condição (A.15) será satisfeita somente se fizermos os argumentos das funções gamas que aparecem nos denominadores de (A.16-17) iguais a zero ou a um inteiro negativo. Assim, se  $j$  simboliza o zero ou um inteiro positivo, devemos tomar, em (A.16),

$$d = \text{zero ou inteiro negativo} = -j = 0, -1, -2, \dots, \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \quad (\text{A.18a})$$

$$m+1-d = \text{zero ou inteiro negativo} = m-j, \quad j \geq m \geq 0, \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \quad (\text{A.18b})$$

Analogamente, em (A.17),

$$d-m = -m-j, \quad -j \leq m < 0, \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \quad (\text{A.19a})$$

$$1-d = -j, \quad \text{se } \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \quad (\text{A.19b})$$

Daí e de (A.19) decorrem, respectivamente

$$\begin{cases} \varepsilon = \Omega s \pm [\Omega^2 s^2 + q_B s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \\ d = -j, \quad j \geq 0, \quad m \geq 0, \quad \Omega\varepsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.20a})$$

$$\begin{cases} \epsilon = -\Omega s \pm [\Omega^2 s^2 - q_B s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \\ d = j+1, \quad j \geq m \geq 0, \quad \Omega \epsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \end{cases} \quad (\text{A.20b})$$

$$\begin{cases} \epsilon = \Omega s \pm [\Omega^2 s^2 + q_B s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \\ d-m = -m-j, \quad -j \leq m < 0, \quad \Omega \epsilon + \frac{q_B}{2} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.21a})$$

$$\begin{cases} \epsilon = -\Omega s \pm [\Omega^2 s^2 - q_B s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \\ d-m = j+1-m, \quad j \geq 0, \quad m < 0, \quad \Omega \epsilon + \frac{q_B}{2} < 0 \end{cases}, \quad (\text{A.21b})$$

onde

$$s := 2j + 1.$$

A escolha dos sinais que antecedem os radicais, bem como do sinal de  $q_B$ , em cada um dos casos acima, deve ser feita de forma que  $\Omega \epsilon + \frac{q_B}{2} > 0$  em (A.20a) e (A.21a), e  $\Omega \epsilon + \frac{q_B}{2} < 0$  em (A.20b) e (A.21b). Para o caso particular  $q_B = 0$ , devemos escolher o sinal "+" em (A.20a) e (A.21a) e o sinal "-" em (A.20b) e (A.21b), uma vez que estamos supondo que  $\Omega > 0$ ; então, levando os parâmetros dados em (A.20) a (A.13a), e os parâmetros dados em (A.21) a (A.13b), recaímos nas soluções que obtivemos na Seção 3.4. Assim, para  $q_B = 0$ , devemos escolher somente um dos sinais antes de cada radical. Porém para  $\Omega = 0$   $q_B \neq 0$ , ambos os sinais são admissíveis e devemos ter  $q_B > 0$  em (A.20a) e (A.21a) e  $q_B < 0$  em (A.20b) e (A.21b). Substituindo, então, (A.20a) e (A.21a) em (A.13a) e (A.13b), respectivamente, obtemos as soluções de energias negativas e positivas  $(\phi^{(-)}, \phi^{(+)})$  para  $q_B > 0$ :

$$\Phi^{I(\pm)} \sim y^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{Y}{2}} F(-j, m+1; Y) e^{-i(m\phi + k_3 z \pm |\epsilon|t)} \quad , \quad m \geq 0, j \geq 0 \quad (A.22a)$$

$$\Phi^{II(+)} \sim y^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{Y}{2}} F(-m-j, 1-m; Y) e^{-i(m\phi + k_3 z \pm |\epsilon|t)} \quad , \quad -j \leq m < 0 \quad (A.22b)$$

onde

$$|\epsilon| = [ |q_B| (2j+1) + M^2 + k_3^2 ]^{1/2} \quad e \quad Y = \left| \frac{q_B}{2} \right| r^2 \quad . \quad (A.23)$$

Para esse conjunto de soluções

$$m \in [-j, \infty) \quad , \quad (A.24)$$

tanto para energias positivas quanto para energias negativas, ao contrário do que ocorre com as soluções de energias discretas dos espaços curvos do Capítulo 4. Para  $q_B < 0$ , o argumento das funções hipergeométricas torna-se negativo, isto é,

$$\xi = \frac{q_B}{2} r^2 = - \left| \frac{q_B}{2} \right| r^2 \equiv -Y \quad .$$

Usando a transformação

$$F(d, c; -Y) = e^{-Y} F(c-d, c; Y) \quad ,$$

encontramos, de forma análoga ao caso anterior, que as soluções para  $q_B < 0$  são dadas por

$$\Phi^{I(\pm)} \sim y^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{Y}{2}} F(m-j, m+1; Y) e^{-i(m\phi + k_3 z \pm |\epsilon|t)} \quad , \quad 0 \leq m \leq j \quad (A.25a)$$

$$\Phi^{II(\pm)} \sim y^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{Y}{2}} F(-j, 1-m; Y) e^{-i(m\phi + k_3 z \pm |\epsilon|t)} \quad , \quad j \geq 0, m < 0 \quad (A.25b)$$

Para estas soluções, com energias positivas ou negativas, temos

$m \in (-\infty, j]$ .

Supondo que B em (A.25) tem o mesmo sinal que em (A.22), devemos interpretar as soluções (A.25) como descrevendo partículas com carga de sinal oposto ao da carga das partículas descritas por (A.22).

Para o caso geral, em que  $\Omega$  e  $q_B$  são diferentes de zero, qualquer dos sinais antes dos radicais e qualquer sinal para  $q_B$  em (A.20-21) podem ser escolhidos, mas os espectros de energias obtidos, a partir de cada uma dessas escolhas, estará sujeito a certas restrições decorrentes das condições  $\pm (\Omega\epsilon + \frac{q_B}{2}) > 0$  e da exigência de que a energia seja uma quantidade real. As expressões para os espectros de energias são dadas por

$$\pm |\epsilon_1|, \quad \pm |\epsilon_2|, \quad \pm |\epsilon_3|, \quad \pm |\epsilon_4|, \quad (A.26)$$

onde:

$$(i) \quad |\epsilon| = \Omega s + [\Omega^2 s^2 + |q_B|s + M^2 + k_3^2]^{1/2}. \quad (A.27)$$

Este espectro vale sem nenhuma restrição adicional sobre os valores de  $j$ .

$$(ii) \quad |\epsilon_2| = -\Omega s + [\Omega^2 s^2 + |q_B|s + M^2 + k_3^2]^{1/2}, \quad (A.28a)$$

com

$$j \geq 0, \quad e \quad (M^2 + k_3^2)\Omega^2 < \left(\frac{q_B}{2}\right)^2. \quad (A.28b)$$

Para  $\Omega \rightarrow 0$  ( $q_B \neq 0$ ) esta condição é sempre válida, mas nunca po

de ser satisfeita para  $q_B \rightarrow 0$  ( $\Omega \neq 0$ ).

$$(iii) \quad |\epsilon_3| = \Omega s + [\Omega^2 s^2 - |q_B|s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \quad (A.29a)$$

com

$$j \geq 0, \quad \text{se} \quad (M^2 + k_3^2)\Omega^2 > \left(\frac{q_B}{2}\right)^2 \quad (A.29b)$$

$$2j+1 \geq \left\lfloor \frac{|q_B|}{2\Omega^2} \right\rfloor + \left[ \left(\frac{|q_B|}{2\Omega^2}\right)^2 - \frac{M^2+k_3^2}{\Omega^2} \right]^{1/2}, \quad \text{se} \quad (M^2+k_3^2)\Omega^2 \leq \left(\frac{q_B}{2}\right)^2 \quad (A.29c)$$

Para  $\Omega \rightarrow 0$  ( $q_B \neq 0$ ), nem (A.29b) nem (A.29c) pode ser satisfeita, para  $q_B \rightarrow 0$  ( $\Omega \neq 0$ ), mas a condição (A.28a) é satisfeita porém  $|\epsilon_3| = |\epsilon_1|$ .

$$(iv) \quad |\epsilon_4| = \Omega s - [\Omega^2 s^2 - |q_B|s + M^2 + k_3^2]^{1/2} \quad (A.30)$$

com as seguintes condições para serem satisfeitas simultaneamente

$$(M^2 + k_3^2)\Omega^2 < \left(\frac{q_B}{2}\right)^2 \quad (A.30b)$$

$$2j+1 \geq \left\lfloor \frac{|q_B|}{2\Omega^2} \right\rfloor + \left[ \left(\frac{|q_B|}{2\Omega^2}\right)^2 - \frac{M^2+k_3^2}{\Omega^2} \right]^{1/2} \quad (A.30c)$$

Quando  $q_B \rightarrow 0$  ou quando  $\Omega \rightarrow 0$  nenhuma das condições acima é satisfeita, isto é, não ocorre solução com o espectro  $\epsilon = \pm |\epsilon_4|$  nesses limites.

Podemos agora reescrever as quatro possibilidades as-

sociadas a cada uma das equações (A.20-21):

$$(A.20a): \Omega\epsilon + \frac{q_B}{2} > 0, \quad d = -j \quad \text{em } R^I$$

$$(i) \quad \epsilon = |\epsilon_1|, \quad q_B > 0, \quad (ii) \quad \epsilon = -|\epsilon_2|, \quad q_B > 0$$

$$(iii) \quad \epsilon = |\epsilon_3|, \quad q_B < 0, \quad (iv) \quad \epsilon = |\epsilon_4|, \quad q_B < 0$$

$$(A.20b): \Omega\epsilon + \frac{q_B}{2} < 0, \quad \bar{d} = j+1 \quad \text{com } j \geq m \quad \text{em } R^I$$

$$(i) \quad \epsilon = -|\epsilon_1|, \quad q_B < 0, \quad (ii) \quad \epsilon = |\epsilon_2|, \quad q_B < 0$$

$$(iii) \quad \epsilon = -|\epsilon_3|, \quad q_B > 0, \quad (iv) \quad \epsilon = -|\epsilon_4|, \quad q_B > 0$$

$$(A.21a): \Omega\epsilon + \frac{q_B}{2} > 0, \quad \bar{d}-m = -m-j \quad \text{com } -j \leq m \quad \text{em } R^{II}$$

$$(i) \quad \epsilon = |\epsilon_1|, \quad q_B > 0, \quad (ii) \quad \epsilon = -|\epsilon_2|, \quad q_B > 0$$

$$(iii) \quad \epsilon = |\epsilon_3|, \quad q_B < 0, \quad (iv) \quad \epsilon = |\epsilon_4|, \quad q_B < 0$$

$$(A.21b): \Omega\epsilon + \frac{q_B}{2} < 0, \quad \bar{d}-m = j+1-m \quad \text{em } R^{II}$$

$$(i) \quad \epsilon = -|\epsilon_1|, \quad q_B < 0, \quad (ii) \quad \epsilon = |\epsilon_2|, \quad q_B < 0$$

$$(iii) \quad \epsilon = -|\epsilon_3|, \quad q_B > 0, \quad (iv) \quad \epsilon = -|\epsilon_4|, \quad q_B > 0$$

Substituindo os parâmetros acima em (A.20) e (A.21a), obtemos as soluções de energias positivas e negativas para  $q_B > 0$  e para  $q_B < 0$ . Definindo as variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $u$  e  $v$  por

$$x = (\Omega|\epsilon_1| + \frac{|q_B|}{2})r^2, \quad y = (-\Omega|\epsilon_2| + \frac{|q_B|}{2})r^2 > 0$$



$$u = (\Omega |\varepsilon_3| - \frac{|qB|}{2}) r^2 > 0 \quad , \quad v = (\Omega |\varepsilon_4| - \frac{|qB|}{2}) r^2 > 0$$

podemos expressar as soluções de energias positivas, para  $qB > 0$ , como

$$\Phi^{I(+)}(y) \sim x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} F(-j, m+1; x) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_1| t)} \quad j \geq 0, m \geq 0 \quad (A.31a)$$

$$\Phi^{II(+)}(x) \sim x^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} F(-m-j, 1-m; x) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_1| t)}$$

$$-\frac{(\varepsilon_1)^2 - M^2 - k_3^2}{\Omega |\varepsilon_1| + \frac{|qB|}{2}} + \frac{1}{2} = -j \leq m < 0 \quad . \quad (A.31b)$$

As soluções com energias positivas, para  $qB < 0$ , são dadas por

$$\Phi^{I(+)}(y) \sim y^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{y}{2}} F(m-j, 1+m; y) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_2| t)} \quad (A.32a)$$

$$0 \leq m \leq j = \frac{(\varepsilon_2)^2 - M^2 - k_3^2}{-\Omega |\varepsilon_2| + \frac{|qB|}{2}} - \frac{1}{2} \quad , \quad (M^2 + k_3^2) \Omega^2 < \left(\frac{qB}{2}\right)^2$$

$$\Phi^{II(+)}(y) \sim y^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{y}{2}} F(-j, 1-m; y) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_2| t)} \quad (A.32b)$$

$$m < 0 \quad , \quad j \geq 0 \quad , \quad (M^2 + k_3^2) \Omega^2 < \left(\frac{qB}{2}\right)^2$$

$$\Phi^{I(+)}(u) \sim u^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{u}{2}} F(-j, m+1; u) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_3| t)} \quad (A.33a)$$

$j \geq 0 \quad , \quad m \geq 0$ , mais condições (A.29b,c)

$$\Phi^{II(+)}(u) \sim u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{u}{2}} F(-m-j, 1-m; u) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_3| t)}$$

$$-\frac{(\varepsilon_3)^2 - M^2 - k_3^2}{\Omega |\varepsilon_3| - \frac{|qB|}{2}} + \frac{1}{2} = -j \leq m < 0, \text{ mais condições (A.29b,c)} \quad (A.33b)$$

$$\Phi^{I(+)}(v) \sim v^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{v}{2}} F(-j, 1-m; v) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_4| t)} \quad (\text{A.34a})$$

$j \geq 0$  ,  $m \geq 0$  , mais condições (A.30b,c)

$$\Phi^{II(+)}(v) \sim v^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{v}{2}} F(-m-j, 1-m; v) e^{-i(m\phi + k_3 z + |\varepsilon_4| t)} \quad (\text{A.34b})$$

$$\frac{1}{2} - \frac{(\varepsilon_4)^2 - M^2 - k_3^2}{\Omega |\varepsilon_4| - \frac{|qB|}{2}} = -j \leq m < 0, \text{ mais condições (A.30b,c)}$$

As soluções para energias negativas podem ser obtidas a partir das soluções (A.31-35) por meio das operações

$$\Phi^{(-)}(m, k_3, qB < 0) \sim \Phi^{(+)}(-m, -k_3, qB > 0)^* \quad (\text{A.35a})$$

$$\Phi^{(-)}(m, k_3, qB > 0) \sim \Phi^{(+)}(-m, -k_3, qB < 0)^* \quad (\text{A.35b})$$

Quando  $\Omega \rightarrow 0$  ( $qB \neq 0$ ), as soluções acima reproduzem as soluções (A.22) para o campo escalar no espaço de Minkowski. Para  $qB \rightarrow 0$  ( $\Omega \neq 0$ ), reincidimos nas soluções da Seção 4.4, para a métrica de Som-Raychaudhuri sem acoplamento eletromagnético.

Nas soluções (A.31-35), devemos destacar a ocorrência de assimetrias entre os espectros de energias para partículas com cargas de sinais opostos. Este fato não se verifica em teorias de campos no espaço de Minkowski. Nas soluções (A.25), para o espaço plano, por exemplo, as energias (A.23) são válidas tanto para  $qB > 0$  quanto para  $qB < 0$ . Já no espaço de Som-Raychaudhuri, as energias positivas são dadas por  $\varepsilon = |\varepsilon_1|$ , se  $qB > 0$ , e por  $\varepsilon = |\varepsilon_2|$ ,  $\varepsilon = |\varepsilon_3|$ ,  $\varepsilon = |\varepsilon_4|$ , se  $qB < 0$ . Para soluções com energias negativas a situação se inverte, como podemos ver por (A.35): se  $qB < 0$ , temos  $\varepsilon = -|\varepsilon_1|$ ; se  $qB > 0$ ,

temos  $\varepsilon = -|\varepsilon_2|$ ,  $\varepsilon = -|\varepsilon_3|$  e  $\varepsilon = -|\varepsilon_4|$ .

Poderíamos ainda discutir as assimetrias introduzidas pelo parâmetro  $\Omega$  nos intervalos de variação para  $m$ . Porém, talvez seja mais interessante estabelecer, antes disso, as possíveis relações entre as soluções escalares e as trajetórias para partículas clássicas aceleradas pelo potencial (A.10). De fato, na ausência de interação eletromagnética, o intervalo para a quantidade clássica  $p_\phi$ , correspondente a  $m$ , é obtido exigindo -se que  $(\dot{r})^2 \geq 0$  em (11)

$$(\dot{r})^2 = (p_t^2 - M^2 - p_z^2) - (\Omega p_t r - \frac{p_\phi}{r})^2, \quad (\text{A.36})$$

onde  $\dot{r}$  representa a derivada da coordenada  $r$  em relação ao parâmetro afim,  $p_t$  é a energia clássica e  $p_z$  é o momentum associado à coordenada  $z$ . Esperamos que, na presença do campo eletromagnético, a equação correspondente a (36) seja naturalmente modificada para [ver eq. (A.4)]

$$(\dot{r})^2 = (p_t^2 - M^2 - p_z^2) - [(\Omega p_t + \frac{qB}{2})r - \frac{p_\phi}{r}]^2. \quad (\text{A.37})$$

Da exigência de que  $(\dot{r})^2 \geq 0$ , decorre de (A.36-37) que

$$p_t^2 \geq M^2 + p_z^2. \quad (\text{A.38})$$

Todas as soluções escalares do Capítulo 4, satisfazem uma condição análoga a (A.38), isto é,

$$\varepsilon^2 \geq M^2 + k_3^2. \quad (\text{A.39})$$

Esta condição também é satisfeita pelas energias dadas em (A.27-30). Para (A.27), a verificação desse enunciado é imediata. Para os outros casos, encontramos que:

$$(i) \quad |\varepsilon_2| \geq \sqrt{M^2+k_3^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se } \Omega^2(M^2+k_3^2) \leq \left(\frac{\alpha_B}{2}\right)^2 .$$

Esta condição é assegurada por (A.28b).

$$(ii) \quad |\varepsilon_3| \geq \sqrt{M^2+k_3^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se}$$

$$j \geq 0 \quad , \quad \text{quando } \Omega^2(M^2+k_3^2) \geq \left(\frac{\alpha_B}{2}\right)^2$$

$$e \quad 2j+1 \geq \frac{\sqrt{M^2+k_3^2}^{\frac{1}{2}}}{\Omega} \quad , \quad \text{quando } \Omega^2(M^2+k_3^2) < \left(\frac{\alpha_B}{2}\right)^2 .$$

Estas condições são garantidas por (A.29b) e por (A.29c), respectivamente.

$$(iii) \quad |\varepsilon_4| \geq \sqrt{M^2+k_3^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se}$$

$$\Omega^2(M^2+k_3^2) < \left(\frac{\alpha_B}{2}\right)^2$$

$$e \quad 2j+1 \geq \frac{\sqrt{M^2+k_3^2}^{\frac{1}{2}}}{\Omega} .$$

Estas últimas exigências estão de acordo com as condições (A.30b,c).

Portanto, as nossas soluções não contradizem a condição clássica (A.38). Uma comparação mais detalhada com os resultados clássicos se encontra em andamento.

## REFERÊNCIAS

- (1) - REBOUÇAS, M. e TIOMNO, J., Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type. Phys. Rev. D28, 1251 (1983).
- (2) - NOVELLO, M., Stokesian fluids and cosmology. Nucleonika, Vol. 25, no. 11-12, 1405 (1980).
- (3) - NOVELLO, M. e REBOUÇAS, M., Rotating universe with successive causal and non causal regions. Phys. Rev. D 19, 2850 (1979).
- (4) - REBOUÇAS, M. A rotating universe with violation of causality. Phys. Letters, 70A, 161 (1978).
- (5) - GÖDEL, K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein field equation of gravitation. Rev. Mod. Phys., 21, 447 (1949).
- (6) - SOM, M.M. e RAYCHAUDHURI, A.K. Cylindrically symmetric charge dust distribution in rigid rotation in general relativity. Proc. Roy. Soc. A, 304, 81 (1968).
- (7) - HEHL, F. Spin and torsion in general relativity: I. Foundations. II. Geometry and field equations. GRG, 4, 333 (1973); GRG, 5, 491 (1973).
- (8) - DUARTE DE OLIVEIRA, J., TEIXEIRA, A.F.F. e TIOMNO, J. Homogeneous cosmos of Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan space. Phys. Rev. D 34, 3661 (1986).
- (9) - PEEBLES, P.J. The large scale structure of the universe. Princeton University Series, New Jersey (1980).
- (10) - WEISS, R.. Cosmic background radiation. Ann. Rev. Astron. Astrophys., 18, 489 (1980).
- (11) - CALVÃO, M.O. Geodésicas em universos do tipo Gödel. Tese de Mestrado, CBPF (1986).
- (12) - DAMIÃO SOARES, I. e RODRIGUES, L.M.C.S. Gravitational coupling of neutrinos to matter vorticity II: Microscopic asymmetries in angular momentum modes. III School of gravitation and cosmology (ed. Soc. Ast. Brasileira).

- (13) - DAMIÃO SOARES, I. e TIOMNO, J. Gravitational coupling of scalar and fermion fields to matter vorticity: microscopics asymmetries. Rev. Bras. de Física, Volume Especial (1984).
- (14) - TRAUTMANN, A. On the Einstein-Cartan equations I, II, III, IV. Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math. astr. phys. 20, 185 (1972), 20, 503 (1972), 20, 895 (1972), 21, 345 (1973).
- (15) - KUHOWICS, B. The Einstein-Cartan equations in astrophysically interesting situations. I: The case of spherical symmetry. Acta Phys. Pol. B6, 555 (1975).
- (16) - GALVÃO, C.A.P. Gravitação e cosmologia em espaços com torção. Tese de Doutorado, CBPF (1976).
- (17) - FONSECA Jr., C.L. da. Modelos estelares na teoria gravitacional de Einstein-Cartan. Tese de Mestrado, CBPF (1979).
- (18) - DATTA, B.K. Spinor field in general relativity. I. Noether's theorem and conservation laws in Riemann-Cartan space. II. Generalized field equations and applications to the Dirac field. Nuovo Cimento, B6, 1, B6, 16 (1971).
- (19) - SCHOUTEN, J.A. Ricci calculus. 2nd ed., Spring Verlag (1954).
- (20) - CORSON, W.M. Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equations. 2nd ed. Chaser Publ., New York (s.d.).
- (21) - WEINBERG, S. Gravitation and cosmology. John Wiley & Sons, New York (1972).
- (22) - HEHL, F. e DATTA, B.K. Nonlinear spinor equation and asymmetric connection in general relativity. J. Math. Phys., 1334 (1971).
- (23) - NOVELLO, M. Cosmologia relativística. II Escola de Gravitação e Cosmologia, vol. 1, CBPF (1980).
- (24) - WEYSSENHOFF, J. e RAABE, A. Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles. Acta Phys. Pol., 9, 7 (1947).

- (25) - MAITRA, S.C. Stationary dust-filled cosmological solution with  $\lambda = 0$  and closed timelike lines. J. Math.Phys. 7, 1025 (1966).
- (26) - RAYCHAUDHURI, A.K. e THAKURTA, S.N.G. Homogeneous space-times of Gödel type. Phys. Rev. D22, 802 (1980).
- (27) - HENNEAUX, M. Gravitational fields, spinor fields, and group of motions. GRG, 12, 137 (1980).
- (28) - ERDELLI, A. et al. Higher transcendental functions. Vol. 1, McGraw Hill, New York (1960).
- (29) - ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I.A. (eds.). Handbook of mathematical functions. Dover, New York (1965).
- (30) - NOVELLO, M., DAMIÃO SOARES, I. e TIOMNO, J. Geodesic motion and confinement in Gödel's universe. Phys. Rev. D27, 779 (1983).
- (31) - CALVÃO, M.O., DAMIÃO SOARES, I. e TIOMNO, J. Geodesics in Gödel like space-times. A ser publicado.
- (32) - BJORKEN, J.D. e DRELL, S.D. Relativistic quantum fields. McGraw Hill, New York (1965).
- (33) - JOHNSON, M.H. e LIPPMANN, B.A. Relativistic motion in a magnetic field. Phys. Rev., 77, 702 (1950).
- (34) - SAKURAI, J.J. Advanced quantum mechanics. Addison-Wesley (1967).