

JOSE SOARES BARBOSA

MECÂNICA QUÂNTICA EM REFERENCIAIS ACELERADOS  
NA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN

Tese de  
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
Rio de Janeiro

Ao meu pai,  
à minha irmã e  
à Zette.

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor J.A. Mignaco, pela pessoa humana e científica e pelo muito que me ensinou durante o nosso trabalho, todo o meu apreço.
- Ao Tião, pela colaboração no esclarecimento das dúvidas.
- Aos colegas: Henrique, Sonia, Chagas, Lillian, Dora, Maurício, Armando, Gilvan, João, Rubens, Laudo, Romeu, Sasse, Hector, Pedrão, Santiago, Regina, Farina e um mundo de gente.
- À Myriam, pela paciência hieroglífica e a boa datilografia.
- Aos funcionários Vera, Elias, Rosângela e Fátima.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Estudamos, na Mecânica Quântica, os dois tipos de transformações de sistemas de coordenadas que são de interesse na Mecânica Clássica. Sabemos que é possível uma relação entre a aceleração linear de um sistema de referência e aceleração devido a uma força externa atuando sobre o sistema físico. Obtivemos o operador deslocamento temporal em tal situação e, no caso de um referencial girante, estabelecemos uma relação entre as equações de movimento de uma partícula num campo magnético e num campo elétrico e a equação de movimento da mesma, vista em um referencial girante; verificamos que os campos introduzidos satisfazem as equações de Maxwell dentro de certas restrições. Calculamos, também, o operador deslocamento temporal para uma velocidade angular dependente do tempo e estabelecemos a lei de transformação entre este operador e o de um operador à velocidade angular constante.

Em síntese, mostramos que a introdução de sistemas de referências não inerciais na Mecânica Quântica (no esquema de Feynman) pode ser feita com a mesma simplicidade que se faz no caso clássico.

# SUMÁRIO

<i>AGRADECIMENTOS</i> .....	<i>iii</i>
<i>RESUMO</i> .....	<i>iv</i>
<i>SUMÁRIO</i> .....	<i>v</i>

## CAPÍTULO 1

1.1	Introdução .....	1
1.2	Dinâmica Clássica .....	1
1.2.1	Princípio de Mínima Ação .....	2
1.2.2	Momento Canônico e Hamiltoniano .....	7
1.3	Quantização de Feynman .....	7
1.4	Cálculo do Operador Deslocamento Temporal a partir da Equação de Schrödinger .....	11

## CAPÍTULO 2 - MECÂNICA QUÂNTICA EM REFERENCIAIS COM ACELERAÇÃO LINEAR A UMA DIMENSÃO .....

16

2.1	Introdução .....	16
2.2	Operador Deslocamento Temporal para Translação a uma Dimensão .....	19
2.2.1	Modificações das Funções de Onda .....	25
2.3	Aplicação ao caso $U(X) = 0$ e $U = \frac{m}{2} \omega^2 X^2$ para $a_0 = V = \text{constante}$ .....	27
2.4	Oscilador Harmônico num Referencial com Aceleração Linear .....	33

## CAPÍTULO 3 - QUANTIZAÇÃO POR INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA PARA REFERENCIAIS GIRANTES .....

36

3.1	Generalização do Teorema de Larmor .....	36
3.2	Cálculo do Operador Deslocamento Temporal Para uma Partícula num Referencial Girante .....	46

3.3	Verificação da Equivalência Referencial Girante no Campo Magnético .....	58
	DISCUSSÃO E CONCLUSÃO .....	67
	APÊNDICE A .....	70
	APENDICE B .....	71
	BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS .....	73

# CAPITULO 1

## 1.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo um estudo da mecânica quântica (em particular na visão de Feynman<sup>[1]</sup>) em referenciais acelerados.

Os conceitos de mecânica quântica, introduzidos nas primeiras décadas do século XX, têm se mostrado fundamentais para a descrição de sistemas microscópicos, sendo aplicados na física atômica, física dos sólidos, mecânica estatística, etc.

A mecânica quântica não só resolveu os problemas com que os físicos depararam no início do século (radiação de corpo negro e instabilidade do átomo de Hidrogênio) como causou profundas mudanças no pensamento científico e filosófico, introduzindo a noção de quantas de energia e a discretização dos observáveis físicos, impondo uma nova interpretação nos conceitos de matéria e onda.

Nosso particular interesse neste trabalho está relacionado com o seguinte fato: a mecânica quântica não relativística, quer seja na visão de Schrödinger, quer seja na visão de Feynman, é desenvolvida tradicionalmente em referenciais inerciais, ou seja, referenciais que apresentam invariância nas equações do sistema físico, diante de transformações de Galileu<sup>[2]</sup>. No entanto, na mecânica clássica estudamos os sistemas físicos, tanto em referenciais inerciais quanto em referenciais

não inerciais, desde que se faça uma redefinição nas leis do movimento do sistema em estudo, agora levando-se em consideração a aceleração do sistema de coordenadas em questão.

O fato de que na mecânica clássica podemos estudar os sistemas físicos em referenciais acelerados, nos motivou a fazer um estudo de tais sistemas, no contexto da mecânica quântica. Claro que vamos perder a invariância de Galileu, mas poderemos ganhar algo de novo na interpretação física dos termos que possam surgir nas equações, devido ao efeito da aceleração do sistema de referências.

Nós fizemos um estudo em dois tipos de transformações de coordenadas que são de interesse.

1. No primeiro caso, consideramos uma transformação onde vamos ter efeitos devido à aceleração linear do referencial não inercial;
2. No segundo caso, fizemos uma transformação que nos leva a um referencial girante, dando origem à efeitos devidos à velocidade e aceleração angulares do sistema de referência.

Nosso trabalho consiste em analisar, com rigor, os termos que surgem nas equações que regem a dinâmica do sistema físico, devido aos efeitos da aceleração do sistema de referência, procurando interpretar os termos adicionais e sua possível relação com campos físicos.

Pelo fato de estarmos efetuando transformações de coordenadas e não de vetores do espaço de Hilbert, nós procuramos empregar a formulação de integrais de trajetórias de Feynman<sup>[1],[3]</sup>, que permite uma ligação entre as estruturas formais



da mecânica clássica e da mecânica quântica. Originalmente, Feynman utilizou o formalismo de integrais de trajetórias para encontrar o operador de deslocamento temporal para a evolução no tempo dos estados de um sistema físico, expressos por meio de uma equação de Schrödinger.

A vantagem em usar integrais de Feynman está relacionada com o fato de que podemos escrever o operador deslocamento temporal em termos da ação clássica, pelo menos para sistemas físicos com Lagrangeanas quadráticas (tais sistemas têm solução exata). Veremos, mais à frente, que as transformações que faremos, dão origem a termos quadráticos na Lagrangeana. No caso de referenciais girantes, a transformação não afeta potenciais esfericamente simétricos, quando as origens coincidem.

O conteúdo desta tese está estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, fazemos uma revisão, a título informativo, da mecânica clássica e da mecânica quântica (esta última na visão de Feynman). Tal revisão tem finalidade didática, sem muito rigor, uma vez que existem vários textos tratando deste assunto de forma bastante completa [3], [4].

No capítulo dois, fazemos um estudo dos sistemas físicos em referenciais animados com uma aceleração linear, redefinimos a Lagrangeana, calculamos o operador deslocamento temporal e fazemos aplicações.

A última parte, que corresponde ao capítulo três, é o núcleo do trabalho. Estudamos o caso em que o sistema é colocado em referenciais girantes, onde os referenciais não inerciais são animados com uma velocidade angular  $\vec{\omega}(t)$ . Com isso,

as suas equações de movimento vão ficar modificadas pelo aparecimento de forças inerciais do tipo coriolis, forças centrífugas e um termo que depende da aceleração angular  $\dot{\vec{\omega}}(t)$ . Neste caso, a energia também vai ficar modificada por um termo que depende da velocidade angular  $\vec{\omega}(t)$ . Calculamos, também, o operador deslocamento temporal para sistemas físicos, nestes referenciais.

## 1.2 DINÂMICA CLÁSSICA

Nesta seção faremos uma breve revisão dos conceitos da mecânica clássica (é bom repetir que a faremos sem muito rigor, apenas com finalidade didática). É fácil encontrar na literatura tais conceitos descritos de forma bastante rigorosa (L.Landau e E.Lifshitz<sup>[2]</sup> e H.Goldstein<sup>[4]</sup>).

### 1.2.1 PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Na mecânica clássica, as leis do movimento de um sistema físico são dadas pelo princípio de ação mínima (Princípio de Hamilton). De acordo com ele, todo sistema físico é caracterizado por uma função  $L$  (função de Lagrange) definida por:

$$L = L(q_1, q_2 \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_s, t) = T - V \quad (1.2.1)$$
$$i = (1, 2, \dots, s)$$

ou de maneira compacta

$$L = L(q, \dot{q}, t) = T - V$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas e  $\dot{q}_i$  são as velocidades generalizadas do sistema físico, sendo  $T$  a energia cinética e  $V$ , a energia potencial de interação. Supondo que nos instantes  $t = t_1$  e  $t = t_2$  o sistema assuma as posições  $q_1$  e  $q_2$ , respectivamente, no intervalo entre estas posições, o sistema se move de tal modo que a integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad , \quad (1.2.2)$$

(sendo  $S$  a ação clássica do sistema físico)

assuma o menor valor possível. Tal afirmação é, exatamente, o Princípio de Mínima Ação.

A seguir vamos calcular as equações de movimento. E o faremos, por comodidade, apenas para um grau de liberdade, mas sabemos que é fácil generalizar para um número  $n$  de graus de liberdade. Seja  $q = q(t)$  a função para a qual  $S$  apresenta um mínimo. Isso significa que  $S$  crescerá se fizermos um acréscimo  $\delta q(t)$  à variável  $q$  (fig. 1).

$$q \rightarrow q + \delta q \quad (1.2.3a)$$

onde  $\delta q$  é tal que  $\left| \frac{\delta q}{q_0} \right|^2 \ll |\delta q|$  e  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  (1.2.3b)

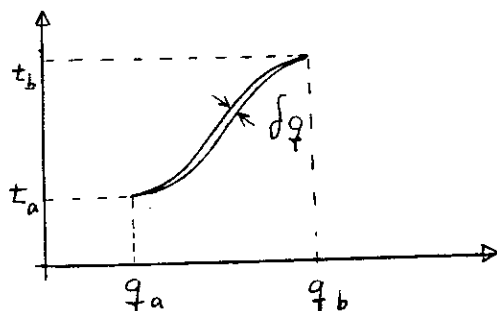


fig. 1

A variação de  $S$ , quando substituimos  $q$  por  $q + \delta q$ , é dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.2.4)$$

Desenvolvendo o primeiro termo de 1.2.4 em série, mantendo termos até 1ª ordem em  $\delta q$  e  $\delta \dot{q}$ , teremos

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.2.5)$$

Substituindo (1.2.5) em (1.2.4), teremos

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (1.2.6)$$

O primeiro termo é nulo em função da equação (1.2.3b); resta a última integral que deverá ser nula para qualquer valor de  $\delta q$ . Isto só acontece se

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.2.7)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange (Goldstein<sup>[4]</sup>).

Para o caso de  $s$  graus de liberdade, esta equação fica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.2.8)$$

Estas são as equações de movimento do sistema ou equações de Euler-Lagrange para  $s$  graus de liberdade.

### 1.2.2 MOMENTO CANÔNICO E HAMILTONIANO

O momento canonicamente conjugado à coordenada generalizada  $q_i$ , é definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.2.9)$$

Quando as coordenadas não são cartesianas, os momentos generalizados não são quantidades de movimento mas, frequentemente, têm interpretação física semelhante.

Uma outra quantidade de grande importância é a Hamiltoniana; a Hamiltoniana de um sistema físico é encontrada via uma transformação de Legendre:

$$H = p \sum_i^S \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S, t) \quad (1.2.10)$$

É fácil verificar que  $H$  não depende explicitamente de  $\dot{q}^i$ .

As equações de movimento agora, são expressas pelas equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.2.11)$$

Estas equações são obtidas via princípio de mínima ação e são completamente equivalentes às equações de Euler-Lagrange.

### 1.3 QUANTIZAÇÃO DE FEYNMAN

A mecânica quântica, na visão de Feynman<sup>[1]</sup> tem como objetivo central calcular o operador deslocamento tem-

poral  $K(b,a)$  do sistema quântico. Em seu trabalho, Feynman<sup>[1]</sup> mostra que o operador deslocamento temporal é a amplitude de probabilidade de um dado sistema quântico realizar uma transição entre estados com coordenadas  $x_a$  e  $x_b$  nos tempos  $t_a$  e  $t_b$ , respectivamente.

Explorando a analogia com o princípio de Huygens da ótica ondulatória (o qual diz que, conhecendo-se a frente de onda no instante  $t_1$ , podemos construí-la no instante posterior  $t_2$ , através de interferência construtiva da onda secundária, gerada por cada ponto da frente original), Feynman imaginou que  $K(b/a)$  pudesse ser escrito como uma soma das amplitudes onde cada uma estaria associada a uma trajetória do espaço de configuração.

Com base nas hipóteses acima ele postulou: A evolução de um sistema quântico (não relativístico) de um estado inicial A para um estado final B, ambos caracterizados por suas posições no espaço de configuração  $\vec{x}_a$  e  $\vec{x}_b$  respectivamente, é realizada por "trajetórias" ligando os pontos  $\vec{x}(\tau_i) = \vec{x}_a$  e  $\vec{x}(\tau_f) = \vec{x}_b$  no espaço de configurações, com uma amplitude de probabilidade proporcional ao fator  $\Phi[\vec{x}(\tau)]$ , onde  $\Phi$  seria a amplitude escrita em função da ação clássica  $S[\vec{x}(\tau)]$  do sistema físico calculada ao longo desta trajetória.

Postula-se que a amplitude total de probabilidade para a propagação acima,  $K(b/a)$  é dada pela soma de todas as amplitudes de probabilidade, definidas pelas suas respectivas trajetórias que ligam os estados a e b:

$$K(b/a) = \sum_{\{\vec{x}(\tau)\}} \Phi[\vec{x}(\tau)] \quad (1.3.1)$$

$$\vec{x}(\tau_i) = \vec{x}_a, \quad \vec{x}(\tau_f) = \vec{x}_b$$

$$t_a = \tau_i \leq \tau \leq \tau_f = t_b$$

Feynman<sup>[3]</sup> deu um significado preciso para a expressão (1.3.1) que consiste em introduzir "trajetórias poligonais"  $\vec{x}^{(\epsilon, N)}(\tau)$  que se aproximam das trajetórias  $\vec{x}(\tau)$  no limite de  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow \infty$

$$\vec{x}^{(\epsilon, N)}(\tau) = \frac{\vec{x}(\tau_j) - \vec{x}(\tau_{j-1})}{\epsilon} (\tau - \tau_{j-1}) + \vec{x}(\tau_{j-1}) \quad (1.3.2)$$

onde faz-se uma partição do intervalo  $[\tau_i, \tau_f]$  em N partes iguais de comprimento  $\epsilon$ , ( $N\epsilon = \tau_f - \tau_i$  e  $\Delta\tau = \epsilon$ ) A figura 2 ilustra como as poligonais varrem todas as trajetórias.

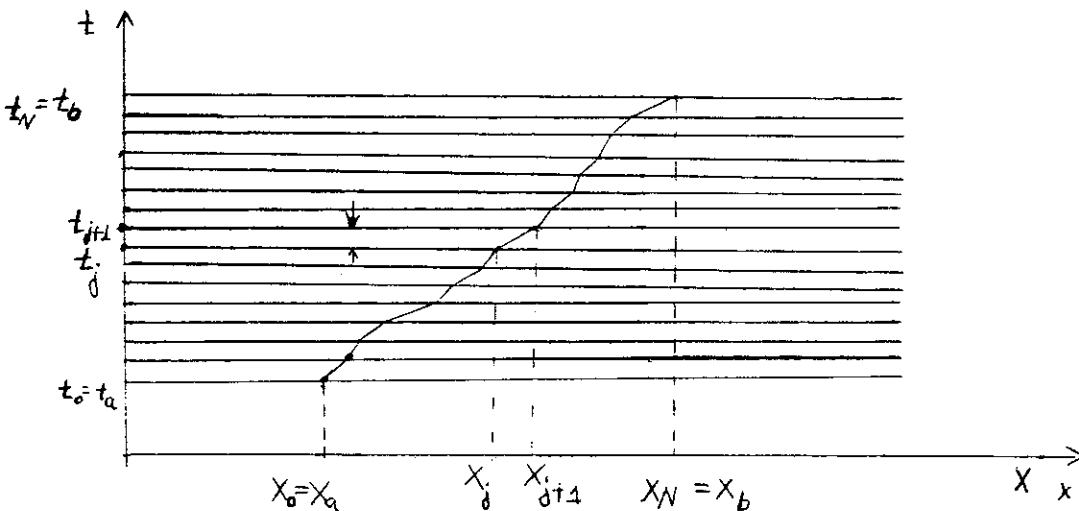


fig.2: Procedimento da subdivisão em intervalos  $\tau_j - \tau_{j-1}$ .

O operador deslocamento temporal  $K(b/a)$  no limite do contínuo é definido por:

$$K(b/a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{N} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{x}(\tau_j) e^{\frac{i}{\hbar} \{S^{(\epsilon, N)}[\vec{x}^{(\epsilon, N)}(\tau)]\}} \quad (1.3.3)$$

onde  $S^{(\epsilon, N)}[\vec{x}^{(\epsilon, N)}(\tau)]$  é a ação clássica convenientemente discretizada e  $\bar{N}$  é um fator de normalização.

Vamos considerar, como exemplo, uma partícula movendo-se num potencial  $V(x)$ . A ação clássica discretizada toma a forma

$$S = \sum_{j=1}^N \epsilon \left[ \frac{m}{2} \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1})^2}{\epsilon^2} - v\left(\frac{\vec{x}_j + \vec{x}_{j-1}}{2}\right) \right] \quad (1.3.4)$$

A equação (1.3.3) permite fazer uma análise geométrica das trajetórias. Caso os pontos  $\vec{x}_j$  e  $\vec{x}_{j-1}$  não estejam suficientemente próximos para que a contribuição correspondente ao termo  $S^{(\epsilon, N)}[\vec{x}(\tau)]$  seja menor ou igual a  $\pi$ , o termo correspondente em (1.3.3) será rapidamente oscilante e as integrações sobre  $dx_j$  e  $dx_{j-1}$  cancelam-se por interferência destrutiva. Portanto, as trajetórias que efetivamente contribuem para (1.3.3) devem satisfazer a condição

$$\frac{m}{2\hbar\epsilon} (\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1})^2 \leq \pi \quad (1.3.5)$$

ou

$$|\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1}| \leq \left(\frac{2\hbar\epsilon\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.6)$$

Introduzindo a medida de Feynman

$$D[\vec{x}(\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{x}(\tau_j) \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} \quad (1.3.7)$$

onde  $\bar{N} = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right]^{N/2}$



Substituindo em (1.3.3) e fazendo o limite  $N \rightarrow \infty$ , o operador  $K(b/a)$  fica:

$$K(b/a) = \int D[\vec{x}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}(\tau)]} \quad (1.3.8)$$

onde  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S^{(\epsilon, N)}[\vec{x}^{(\epsilon, N)}(\tau)]$  são escritos em termos das trajetórias poligonais.

#### 1.4 CÁLCULO DO OPERADOR DESLOCAMENTO TEMPORAL A PARTIR DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Seja  $|\Psi(t_a)\rangle$  um estado de um sistema físico no instante  $t_a$ , o operador evolução temporal  $U(t_b, t_a)$  é definido de tal modo que um vetor de estado no instante  $t_b$  tem a forma:

$$|\Psi(t_b)\rangle = U(t_b, t_a) |\Psi(t_a)\rangle \quad (1.4.1)$$

É claro que

$$|U(t_a, t_a)| = \mathbb{1} \quad (1.4.2)$$

A norma do vetor de estado não muda. Logo, na evolução temporal:

$$\langle \Psi(t_b) | \Psi(t_b) \rangle = \langle \Psi(t_a) | \Psi(t_a) \rangle \quad (1.4.3)$$

A conclusão a partir da equação (1.4.3) é que o operador  $U(t_b, t_a)$  é unitário

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \quad (1.4.4)$$

Substituindo (1.4.1) na equação de Schrödinger

$$i \hbar \frac{d}{dt_b} |\Psi(t_b)\rangle = H(t_b) |\Psi(t_b)\rangle \quad (1.4.5)$$

vamos encontrar a equação de evolução temporal

$$i \hbar \frac{d}{dt_b} U(t_b, t_a) = H(t_b) U(t_b, t_a) \quad (1.4.6)$$

Vamos resolvê-la apenas para  $H$  constante. O caso com dependência temporal pode ser encontrado<sup>[1]</sup> nos livros textos.

Dáí,  $U$  fica:

$$U(t_b, t_a) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)\right] \quad (1.4.7)$$

O operador deslocamento temporal corresponde ao elemento de matriz  $\langle x_b | U(t_b, t_a) | x_a \rangle$ , ou seja, se calcularmos a função de onda  $\Psi(x_b, t_b)$  usando o vetor de estado  $|\Psi(t_b)\rangle$ , sai, automaticamente para um sistema unidimensional,

$$\Psi(x_b, t_b) = \langle x_b | \Psi(t_b) \rangle = \int \langle x_b | U(t_b, t_a) | x_a \rangle \langle x_a | \Psi(t_a) \rangle dx_a \quad (1.4.8)$$

onde usamos a completeza

$$\int |x_a\rangle \langle x_a| dx_a = \mathbb{1} \quad (1.4.9)$$

Desta forma, o operador de deslocamento temporal fica definido por

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle \equiv \langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)} | x_a \rangle \quad (1.4.10)$$

Usando a propriedade de grupo do operador  $U$ :

$$\begin{aligned} U(t, t'') &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t'')\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t' + t' - t'')\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t')\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t' - t'')\right] = U(t, t') U(t', t'') \end{aligned} \quad (1-4-11)$$

vamos dividir o intervalo  $t_b - t_a$  em  $N$  intervalos iguais  $\epsilon$

$$t_b - t_a = N\epsilon \quad (1.4.12)$$

e, introduzindo a completeza nos  $n$  estados  $|x\rangle$ , podemos escrever:

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_b \rangle =$$

$$= \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_b | \exp -\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | \exp -\frac{i}{\hbar} H(t_{N-1} - t_{N-2}) | x_{N-2} \rangle \dots$$

$$\dots \langle x_1 | \exp -\frac{i}{\hbar} H(t_1 - t_a) | x_a \rangle \quad (1.4.13)$$

Se N é muito grande,  $\epsilon \rightarrow 0$  para  $t_b - t_a$  finito; usando apenas o i-ésimo termo da equação (1.4.13) e, substituindo (1.4.12) para  $\epsilon \rightarrow 0$ , teremos

$$\langle x_i | \exp -\frac{i}{\hbar} \epsilon H | x_{i-1} \rangle = \langle x_i | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon H | x_{i-1} \rangle \quad (1.4.14)$$

Seja

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad (1.4.15)$$

substituindo (1.4.15) em (1.4.14), a expressão fica

$$\langle x_i | \frac{\epsilon}{\hbar} H | x_{i-1} \rangle = \frac{\epsilon}{\hbar} \langle x_i | \frac{p^2}{2} | x_{i-1} \rangle + \frac{\epsilon}{\hbar} V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \delta(x_i - x_{i-1}) \quad (1.4.16)$$

Escrevendo  $\delta(x)$  na representação de momentos,

$$\delta(x_i - x_{i-1}) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(x_i - x_{i-1})}$$

e substituindo em (1.4.16)

$$\langle x_i | \frac{\epsilon}{\hbar} H | x_{i-1} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(x_i - x_{i-1})} \frac{\epsilon}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} p^2 + V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right] \quad (1.4.17)$$

Substituindo (1.4.17) em (1.4.10), teremos

$$\langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)} | x_a \rangle = \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} dx_1 \dots dx_{N-1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [p_j(x_j - x_{j-1}) - \epsilon H(p_j, x_j, x_{j-1})]\right] + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (1.4.18)$$

Fazendo o quadrado perfeito na expressão dentro do somatório da equação (1.4.18), encontra-se

$$\begin{aligned} p_i(x_i - x_{i-1}) - \epsilon\left(\frac{1}{2} p_i^2 + V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\right) = \\ = -\frac{\epsilon}{2} \left[ \left[ p_i - \frac{1}{\epsilon}(x_i - x_{i-1}) \right]^2 - \frac{1}{\epsilon^2} (x_i - x_{i-1})^2 \right] - \epsilon V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Substituindo (1.4.19) em (1.2.18), teremos

$$\begin{aligned} \langle x_b | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (t_b - t_a) H\right\} | x_a \rangle = \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} dx_1 \dots dx_{N-1} \cdot \\ \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\epsilon}{2\hbar} \left( p_i - \frac{1}{\epsilon}(x_i - x_{i-1}) \right)^2 \right] \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\epsilon} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - \epsilon V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right] \right] \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

A integral em  $p$  é equivalente a uma integral de Fresnel, cujo resultado já é conhecido. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle x_b | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)\right\} | x_a \rangle = \\ = \int \frac{dx_1}{(2\pi\hbar\epsilon)^{1/2}} \dots \frac{dx_{N-1}}{(2\pi\hbar\epsilon)^{1/2}} \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\epsilon} \right)^2 + \epsilon V\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

A expressão (1.4.21) pode ser escrita na forma compacta abaixo:

$$\langle x_b | \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (t_b - t_a) H\right\} | x_a \rangle = \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \quad (1.4.22)$$

onde

$$D[x(t)] = \prod_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{dx_j}{(2\pi i h \epsilon)^{1/2}} \right] \quad (1.4.23)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_i + x_{i-1}) \right] \epsilon = \int_{t_a}^{t_b} L dt = S \quad (1.4.24)$$

sendo  $S$  a ação e  $D[x(t)]$  é a "medida" infinita de Feynman, significa integral sobre as trajetórias.

Observando-se as equações (1.4.22) e (1.3.8), verificamos a equivalência dos dois formalismos.

## CAPITULO 2

### MECÂNICA QUÂNTICA EM REFERENCIAIS COM ACELERAÇÃO LINEAR A UMA DIMENSÃO

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Iniciaremos, neste capítulo, o estudo de sistemas físicos quantizados em referenciais acelerados. No capítulo 1 vimos que, de posse do princípio de ação mínima, seremos capaz de calcular todas as equações de movimento (clássicas) de um sistema físico, bastando, para isso, conhecer a sua lagrangeana.

Por exemplo; a lagrangeana de uma partícula de massa  $m$  num campo externo, cujo potencial é  $U(\vec{r}')$ , pode ser escrita como:

$$L' = \frac{m}{2} v'^2 - U(\vec{r}') \quad (2.1.1)$$

sendo  $\vec{r}'$  a posição da partícula.

A equação de movimento da partícula cuja lagrangeana é dada na equação (2.1.1) será:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = - \vec{\nabla} U \quad (2.1.2)$$

onde

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (2.1.3)$$

e

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'}$$

Vejamos qual a forma das equações de movimento de uma partícula, vista por um observador num referencial não inercial. Para resolver este problema, vamos lançar mão do princípio de ação mínima (cuja validade independe da escolha do sistema de referenciais<sup>[5]</sup>) a partir do qual chegaremos às equações de Euler-Lagrange.

Antes, porém, temos que lembrar que a função de Lagrange não tem mais a forma da equação (2.1.1). Para encontrar a nova lagrangeana, precisamos efetuar a transformação que nos leve do referencial inercial ao referencial não inercial e substituí-la na lagrangeana L. Vamos considerar a seguinte transformação: seja k um referencial não inercial, animado por uma velocidade  $\vec{V}(t)$  em relação a um outro referencial inercial k'. A velocidade  $\vec{V}(t)$  não é necessariamente constante. A velocidade  $\vec{v}'$  de uma partícula de massa m em k', relaciona-se com a velocidade  $\vec{v}$  desta em k, da seguinte maneira:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{h}(t), t' = t \quad (2.1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{\vec{r}}', \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{V} = \int_0^t \vec{a}_0(t') dt' \text{ e } \vec{h}(t) = \\ &= \int \vec{V}(t) dt \end{aligned}$$

sendo  $\vec{a}(t)$  a aceleração do sistema de referências e  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}$ , são os vetores posição da partícula nos referenciais k' e k, respectivamente.

Substituindo (2.1.4) em (2.1.1), vamos encontrar:

$$\begin{aligned} \hat{L}' &= \frac{m}{2} v'^2 - U = \frac{m}{2} (\vec{v} + \vec{V})^2 - U = \frac{m}{2} v^2 + m\vec{v} \cdot \vec{V} + \frac{m}{2} V^2 - U \\ U &= U(\vec{r} + \vec{h}) = U'(\vec{r}') \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Podemos escrever o termo  $m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$  de um modo mais conveniente<sup>[2]</sup>:

$$m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = m\dot{\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}) - m\vec{r} \cdot \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} \quad (2.1.6)$$

onde

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

O penúltimo termo da equação (2.1.5) pode ser escrito como uma derivada total em relação ao tempo:

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \int v^2 dt \quad (2.1.7)$$

Substituindo (2.1.6) e (2.1.7) em (2.1.5), teremos:

$$\dot{L} = \frac{m}{2} v^2 - m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r} + \frac{d}{dt} \left[ m(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{2} \int v^2 dt \right] - U$$

$$\Rightarrow \dot{L} = L + \frac{dF}{dt} \quad (2.1.8a)$$

onde

$$L = \frac{m}{2} v^2 - m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r} - U \quad (2.1.8b)$$

L é a lagrangeana do sistema físico no referencial acelerado e

$$F = m(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{2} \int v^2 dt$$

F é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo. A derivada total de F na equação (2.1.8a) não afeta as equações de movimento<sup>[2]</sup>, [4]

As equações de movimento para a lagrangeana (2.1.8b) são:



$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x} - m\dot{v}_x \quad (2.1.9a)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial y} - m\dot{v}_y \quad (2.1.9b)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial z} - m\dot{v}_z \quad (2.1.9c)$$

sendo  $\dot{\vec{v}} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = \vec{a}_0 = (a_{0x}, a_{0y}, a_{0z})$  a aceleração entre o referencial inercial  $k'$  e o referencial não inercial  $k$ . Vemos, portanto, que a equação de movimento apresenta um termo adicional  $m\dot{\vec{v}}$ . Tal termo tem origem no fato do referencial  $k$  estar acelerado com relação ao referencial inercial  $k'$ .

As equações (2.1.9a, b, c) são equivalentes à equação de movimento de uma partícula em um referencial inercial, sujeita à ação de um campo externo, cuja força atuante seja igual ao produto de sua massa pela grandeza  $\dot{\vec{v}}$ . Em outras palavras, observar uma partícula do ponto de vista de um referencial não inercial com uma aceleração  $\dot{\vec{v}} = \vec{a}_0$  é equivalente a observá-la em referencial inercial. Porém, sob ação de um campo externo  $\lambda \vec{f}(t)$ , onde  $\lambda$  é uma constante que depende do sistema de unidades e  $\vec{f}(t)$  é o campo de forças. Na seção 2.2 falamos sobre energia e momento.

## 2.2 OPERADOR DESLOCAMENTO TEMPORAL PARA TRANSLAÇÃO A UMA DIMENSÃO

Vimos, no capítulo 1, que o operador deslocamento temporal pode ser escrito em termos da ação do sistema físico<sup>[3]</sup>. Vamos então escrever tal operador para uma ação cuja lagrangeana é dada pela equação (2.1.8).

$$\begin{aligned}
 K(x'_b, t'_b, x'_a, t'_a) \equiv K(b'/a') &= \int D[x'(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'_a}^{t'_b} L dt} = \\
 &= \int D[x'(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x'(t)]} = \int JD[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} (L + \frac{dF}{dt}) dt}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.10}$$

onde J é o jacobiano da transformação da medida  $D[x'(t)]$ .

$$J = \det \left\{ \frac{\partial x'}{\partial x} \right\}$$

Integrando a equação (2.1.4) apenas a uma dimensão, teremos:

$$x' = x + h(t) \tag{2.1.11}$$

onde

$$h = \int_0^t v(t) dt$$

Usando a equação (2.1.11) para calcular o jacobiano J, vemos que este é unitário. Como a medida  $D[x']$  é escrita em termos de  $dx_i$  (sendo que  $x_i$  corresponde ao valor de x no tempo  $t_i$ ), temos:

$$D[x'(t)] = \prod_{i=1}^N dx'_i = \prod_{i=1}^N J dx_i = \prod_{i=1}^N dx_i = D[x] \tag{2.1.12}$$

vemos, portanto, que a medida não muda.

Substituindo (2.1.12) em (2.1.10) e efetuando a integração em  $\hat{F}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 K(x'_b, t'_b, x'_a, t'_a) &= \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} + \frac{i}{\hbar} [F(x_b, t_b) - F(x_a, t_a)] = \\
 &= e^{\frac{i}{\hbar} F(x_b, t_b)} \left[ \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} F(x_a, t_a)} =
 \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} F(x_b, t_b)} K(x_b, t_b, x_a, t_a) e^{-\frac{i}{\hbar} F(x_a, t_a)} \quad (2.1.13a)$$

onde

$$K(x_b, t_b, x_a, t_a) = \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \quad (2.1.13b)$$

e  $K(x_b, t_b, x_a, t_a)$  é o operador deslocamento temporal no referencial acelerado. A equação (2.1.13a) mostra como se transforma o operador deslocamento temporal  $K(b'/a') \rightarrow K(b/a)$ .

Escrevendo o operador  $K(b/a)$  em termos da lagrangeana  $L$  (equação (2.1.8a)),

$$L = \frac{m}{2} v^2 - m\dot{\vec{V}} \cdot \vec{r} - U \quad (2.1.8a)$$

o operador  $K(b/a)$  fica escrito da seguinte forma:

$$K(b/a) = \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} [v^2 - 2\dot{\vec{V}} \cdot \vec{x} - U] dt} \quad (2.1.14)$$

Comparando o operador  $K(b'/a')$  no referencial inercial com o operador  $K(b/a)$  no referencial não inercial, vemos que eles diferem por uma fase  $\frac{i}{\hbar} F \Big|_{t_a}^{t_b}$  e um termo adicional que a parece na lagrangeana  $L$ , proporcional a  $\dot{\vec{V}} = \vec{a}_0$ , onde  $\vec{a}_0$  é definido como a aceleração do sistema de coordenadas. É importante notar que, pelo menos para lagrangeana quadrática, não causa nenhum efeito.

Como houve mudança na lagrangeana e portanto, na ação  $S[q]$ , somos obrigados a suspeitar que houve mudança no fator pré-exponencial  $K(t_b, t_a)$ . Para verificar, usaremos a equação (2.1.13b):

$$\begin{aligned}
 K(x_b, t_b, x_a, t_a) &= \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} = \\
 &= \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (2.1.13b)
 \end{aligned}$$

onde

$$S[x] = \int_{t_a}^{t_b} L dt \quad (2.1.15)$$

Neste caso podemos fazer uma aproximação semi-clássica, que consiste em expandir o funcional ação em uma série de Volterra em torno das trajetórias clássicas e truncar esta série, tomando até os termos quadráticos nas variações  $\delta q(t)$  (inclusive) [8]. Esta expansão é dada por:

$$S[x(t)] = S[x(t)_c] + \delta S \Big|_{x=x_c} + \frac{1}{2} \delta^2 S \Big|_{x=x_c} + \dots \quad (2.1.16)$$

onde  $x_c$  é a trajetória clássica e  $\delta S \Big|_{x=x_c} = 0$ , devido às equações de Euler-Lagrange.

É óbvio que (2.1.16) é exata para lagrangeana quadrática. A substituição de (2.1.16) na expressão (2.1.13b)

$$K(b/a) = \int D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$$

leva a

$$K(b/a) = \exp \frac{i}{\hbar} S[x_c] \int_0^1 D[\eta(t)] \exp \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \delta^2 S[x(t)] \Big|_{x=x_c} \quad (2.1.17)$$

onde  $\eta(t)$  é a flutuação da trajetória clássica.

$$\eta(t) = x(t) - x_c(t) \quad (2.1.18)$$

sujeita à condição

$$\eta(t_b) = 0 = \eta(t_a) \quad (2.1.19)$$

e pelo fato do jacobiano de tais transformações ser unitário, substituímos em (2.1.17),  $D[x(t)]$  por  $D[\eta(t)]$ .

O fator pré-exponencial é dado por:

$$K(t_b, t_a) \equiv \int_0^1 D[\eta(t)] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \delta^2 S[x]\right] \Big|_{x=x_c} \quad (2.1.20)$$

Vamos calcular  $\delta^2 S = \delta^2 \int L(x, \dot{x}) dt$ :

$$\begin{aligned} \delta^2 S = \int_{t_a}^{t_b} & \left[ \left( \frac{\delta^2 L}{\delta x^2} \right)_{x=x_c} \eta^2(t) + 2 \left( \frac{\delta^2 L}{\delta x \delta \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_c \\ \dot{x}=\dot{x}_c}} \eta(t) \dot{\eta}(t) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{x}^2} \right)_{x=\dot{x}_c} \eta^2(t) \right] dt \quad (2.1.21) \end{aligned}$$

Na equação (2.1.21), vemos que só os termos quadráticos contribuem para o fator pré-exponencial. Logo, para a lagrangeana  $L$ , temos:

$$L = \frac{m}{2} v^2 - m\vec{a} \cdot \vec{x} \quad (2.1.22)$$

onde fizemos

$U(x) = 0$ , porque é importante para nós, neste ponto o efeito da transformação, sendo  $v = \dot{x}$ .

Substituindo (2.1.22) na equação (2.1.21), temos:

$$\delta^2 S = \int_{t_a}^{t_b} m \dot{\eta}^2 dt \quad (2.1.23)$$

O fator pré-exponencial assume a forma

$$K(t_b/t_a) = \int_0^1 D[\eta(t)] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} \dot{\eta}^2 dt\right] \quad (2.1.24)$$

Esta é a expressão de  $K(t_b/t_a)$  para a partícula livre e já foi calculada por Feynman [1].

$$K(t_b/t_a) = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.25)$$

Vemos, na equação (2.1.25), que o fator pré-exponencial não mudou. Podemos mostrar que a probabilidade  $P'dx'$ , também não mudou. A probabilidade do sistema físico realizar transição de  $x'_a$  para  $x'_b$ , é

$$P'dx' = |K(b'/a')|^2 dx' = \left| e^{\frac{i}{\hbar} F_b} K(b/a) e^{-\frac{i}{\hbar} F_a} \right|^2 dx \quad (2.1.26a)$$

onde usamos a equação (2.1.13) e  $dx' = dx$ .

Mas

$$\left| e^{\frac{i}{\hbar} F_b} K(b/a) e^{-\frac{i}{\hbar} F_a} \right|^2 dx = |K(b/a)|^2 dx \quad (2.1.26b)$$

A equação (2.1.26b) nada mais é que a probabilidade do sistema físico realizar transição entre  $x_a$  e  $x_b$ .

Logo

$$|K(b/a)|^2 dx = Pdx \quad (2.1.27)$$

Comparando (2.1.27) com (2.1.26), chegamos a conclusão de que:

$$P'dx = Pdx \quad (2.1.28)$$

Portanto, a probabilidade permanece inalterada para transformações que nos levam a referenciais com aceleração linear, o que mostra um efeito puramente cinemático.

### 2.2.1 MODIFICAÇÕES DAS FUNÇÕES DE ONDA

Vamos ver, agora, como ficam modificadas as funções de onda. Substituindo a equação (2.1.12) na equação de transformação da função de onda,

$$\begin{aligned} \psi(x'_b, t'_b) &= \int K(x'_b, t'_b, x'_a, t'_a) \psi(x'_a, t'_a) dx'_a = \\ &= \int e^{\frac{i}{\hbar}F(x_b, t_b)} K(x_b, t_b, x_a, t_a) e^{-\frac{i}{\hbar}F(x_a, t_a)} dx'_a \psi(x'_a, t'_a) = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}F(x_b, t_b)} \int K(x_b, t_b, x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Uma vez que  $dx' = dx$ , podemos definir, a partir da eq. 2.2.1, que:

$$\psi(x_a, t_a) = e^{-\frac{i}{\hbar}F(x_a, t_a)} \psi(x'_a, t'_a) \quad (2.2.2)$$

Logo, a função de onda transformada, é:

$$\psi(x'_b, t'_b) = e^{\frac{i}{\hbar}F(x_b, t_b)} \psi(x_b, t_b) \quad (2.2.3)$$

sendo

$$\psi(x_b, t_b) = \int K(x_b, t_b, x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a \quad (2.2.4)$$

As equações concordam com o resultado de G. Bruno Schmid<sup>[6]</sup>.

A lei de transformação para o momento, é:

$$P' \Psi(x', t) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) + P \right) \Psi(x', t) \quad (2.2.5)$$

ou ainda,

$$\vec{P}' = \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(x, t) + \vec{P} \quad (2.2.6)$$

A Hamiltoniana pode ser obtida da lagrangeana (2.1.8b):

$$H = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{P} - L \quad (2.2.7)$$

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} \implies \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{P}}{m} \quad (2.2.8)$$

Substituindo a equação (2.2.8) em (2.2.7), encontraremos a seguinte expressão:

$$H = \frac{P^2}{2m} + m \dot{V}x + U(x) \quad (2.2.9)$$

Vemos, portanto, que a Hamiltoniana ficou modificada por um termo do tipo  $m\dot{V}x$ , ou seja, a energia não se conserva. A Hamiltoniana tem uma dependência temporal.

Aqui vemos que, conhecendo a transformação dos sistemas de referências e a Hamiltoniana num referencial inercial, conheceremos a evolução do sistema no referencial acelerado.



2.3 APLICAÇÃO AOS CASOS  $U(x) = 0$  E  $U = m/2 \omega^2 x^2$  PARA  $a_0 = \dot{V} =$   
 $=$  CONSTANTE.

Para  $U = 0$  e  $\dot{V} = a_0$ , o operador  $K(b/a)$  eq. (2.1.14) assume a forma

$$K(x_b, t_b, x_a, t_a) = \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int (\frac{m}{2} v^2 - mxa) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m(x_b - x_a)^2}{\tau} - \frac{1}{2} a_0 \tau (x_b + x_a) - \frac{ma^2 \tau^3}{24} \right]$$

(2.3.1)

Mostraremos como se chega a equação (2.3.1):

Para  $\dot{V} = \vec{a}$ , constante, a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo. Logo, o operador evolução temporal  $U(\tau)$ , onde  $\tau = t_b - t_a$ , é:

$$U(\tau) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{p^2 \tau}{2m} + xf \cdot \tau \right] \right\} \text{ onde usamos a eq. (1.4.7)}$$

$$\text{e } H = \frac{p^2}{2m} + xf, \tag{2.3.2}$$

onde  $f = ma_0$  é a força devido à aceleração do sistema de referencia. Da equação (1.4.10) vemos que o "propagador" é:

$$K(x_b, \tau, x_a) = \langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{p^2}{2m} \tau + xf \tau \right]} | x_a \rangle = \langle x_b | U(t_b, t_a) | x_a \rangle$$

onde  $\frac{p^2}{2m} + xf = H.$  (2.3.3)

Para resolver este problema vamos usar a fórmula de Zassenhauss.

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{\lambda^2 C_2} e^{\lambda^3 C_3} \tag{2.3.4}$$

onde

$$C_2 = -\frac{1}{2}[A, B]$$

e

$$C_3 = \frac{1}{3}[B, [A, B]] + \frac{1}{6}[A, [A, B]] \quad (2.3.5)$$

são válidas para operadores A e B, tais que  $[B, [A, B]]$  e  $[A, [A, B]]$  são proporcionais ao operador Identidade.

Substituindo na equação (2.1.23):

$$A = \frac{p^2}{2m}, \quad B = fx \quad \lambda = -\frac{i\tau}{\hbar} \quad (2.3.6)$$

obtemos, a partir das regras de comutação de p e x, que:

$$[A, B] = -i \frac{\hbar fp}{m}$$

$$[B, [A, B]] = \hbar^2 \frac{f^2}{m}$$

$$[A, [A, B]] = 0 \quad (2.3.7)$$

logo,

$$C_2 = i \frac{\hbar fp}{2m}, \quad C_3 = \frac{\hbar^2 f^2}{3m} \quad (2.3.8)$$

Substituindo (2.3.7) e (2.3.8) na equação (2.3.3), encontraremos

$$K(x_b, \tau, x_a) = \langle x_b | e^{-i \frac{p^2 \tau}{2\hbar m}} e^{-\frac{i}{\hbar} fx_b \tau} e^{i \frac{f\tau^2 p}{2\hbar m}} e^{i \frac{f^2 \tau^3}{3\hbar m}} | x_a \rangle \quad (2.3.9)$$

Introduzindo uma completeza,

$$\int |p\rangle \langle p| dp = \mathbb{1} \quad (2.3.10)$$

Usando a função

$$\langle x|p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \quad (2.3.11)$$

Substituindo (2.3.11) em (2.3.9), teremos:

$$K(b/a) = C \int dp dp' dx'' \left[ e^{\frac{-ip^2 \tau}{2m\hbar}} \cdot e^{ipx_a} \cdot \frac{e^{\frac{i}{\hbar} x'' (p' - p - f\tau)}}{2\pi\hbar} \cdot e^{\frac{-i f p'^2}{2\hbar m}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p' x_b} \right] \quad (2.3.12)$$

onde

$$C = \frac{1}{2\hbar} e^{\frac{if^2 \tau^3}{3m\hbar}} \quad (2.3.13)$$

Rearrmando os termos e usando

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{\frac{i}{\hbar} x (p - p')} = \delta(p - p') \quad (2.3.14)$$

temos que

$$K(b/a) = C \int dp e^{\frac{-ip^2 \tau}{2m\hbar}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} px_a} \int dp' e^{-\frac{i}{\hbar} p' (x_b + \frac{f\tau^2}{2m})} \cdot \delta(p' - p - f\tau) \quad (2.3.15)$$

Integrando em  $p'$ , teremos:

$$K(b/a) = C' \int dp \exp \left[ \frac{-ip^2 \tau}{2m\hbar} - \frac{i}{\hbar} px^* \right] \quad (2.3.16)$$

onde

$$x^* = (x_b - x_a) + \frac{f\tau^2}{2m} \quad (2.3.17)$$

$$C' = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{-if^2 \tau^3}{6m\hbar} - \frac{-ifx_b \tau}{\hbar} \right]$$

Completando o quadrado na equação (2.3.16), teremos:

$$p^2 + \frac{2m}{\tau} x^* p = \left( p + \frac{m}{\tau} x^* \right)^2 - \left( \frac{mx^*}{\tau} \right)^2 \quad (2.3.18)$$

Substituindo (2.3.18) em (2.3.16), teremos:

$$\begin{aligned}
 K(b/a) &= C' e^{\frac{im}{2\hbar\tau} (x^*)^2} \int dp e^{-\frac{i\tau}{2m\hbar} (p + \frac{mx^*}{\tau})^2} \\
 &= C' e^{\frac{imx^{*2}}{2\hbar\tau}} \sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{i\tau}} \quad (2.3.19)
 \end{aligned}$$

onde usamos o resultado da integral de Fresnel

Substituindo o valor de  $C'$  e  $x^*$  em (2.3.19), obtemos a expressão do propagador (2.3.1) se  $f = a$ .

$$\begin{aligned}
 K(b,a) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m(x'_b - x'_a)^2}{2\tau} - \frac{1}{24} f^2 \frac{\tau^3}{m} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} f\tau (x'_b + x'_a) \right] \quad (2.3.20)
 \end{aligned}$$

Para verificar a validade da expressão de transformação do operador de deslocamento temporal  $K(b,a) \rightarrow K(b',a')$  na equação (2.1.13), vamos admitir que temos uma partícula de massa  $m$  sob ação de uma força  $mg$  ou um potencial  $U = mgx$ , a sua lagrangeana é:

$$L = \frac{m}{2} v^2 + mgx \quad (2.3.21)$$

o operador deslocamento temporal já calculado é:

$$\begin{aligned}
 K(b/a) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{\tau} - \frac{1}{24} mg^2 \tau^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} mg\tau (x_b + x_a) \right] \quad (2.3.22)
 \end{aligned}$$

onde

$$\tau = t_b - t_a$$

Fazendo agora uma transformação do tipo (2.1.13a)

$$K(b'/a') = d^{\frac{i}{\hbar} F(b)} K(b/a) e^{-\frac{i}{\hbar} F(a)} \quad (2.3.23)$$

$$F(t) = m \left[ -Vx + \frac{1}{2} \int V^2 dt \right]. \quad (2.3.24)$$

Como

$$V = \int_{t_a}^t a_0(t) dt$$

fazendo  $a_0 = g$  e substituindo na equação acima.

$$V = g \int_{t_a}^t dt = g(t - t_a) \quad (2.3.25)$$

Substituindo (2.1.45) em (2.3.24), encontraremos:

$$\begin{aligned} F(t) &= m \left[ -g(t - t_a)x + \frac{1}{2} \int_{t_a}^t g^2 (t - t_a)^2 dt \right] = \\ &= m \left[ -g(t - t_a)x + \frac{1}{2} g^2 \frac{(t - t_a)^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Substituindo (2.3.26) e (2.3.22) em (2.3.23), teremos:

$$\begin{aligned} K(b'/a') &= e^{\frac{i}{\hbar} m \left[ -g(t_b - t_a)x_b + \frac{1}{2} g^2 \left( \frac{(t_b - t_a)^3}{3} \right) \right]} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} - \right. \\ &- \frac{1}{24} mg^2 (t_b - t_a)^3 + \frac{mg}{2} (t_b - t_a) (x_b + x_a) \left. \right] \cdot \\ &\cdot e^{\frac{i}{\hbar} m \left[ -g(t_a - t_a)x_a + \frac{1}{2} g^2 \frac{(t_a - t_a)^3}{3} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{mg}{2} (t_b - t_a) (x_b + x_a) + mg(t_b - t_a)x_b +$$

$$- \frac{mg^2}{2} \frac{(t_b - t_a)^3}{3} - \frac{mg^2}{24} (t_b - t_a)^3].$$

Reagrupando os termos semelhantes, teremos:

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} - g(t_b - t_a)(x_b - x_a) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} g^2 (t_b - t_a)^3 \right]$$

A expressão dentro das chaves é um quadrado perfeito. Logo, podemos escrever:

$$K(b'/a') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{((x_b - x_a) - \frac{1}{2} g(t_b - t_a))^2}{t_b - t_a} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{(x'_b - x'_a)^2}{t_b - t_a} \right] \quad (2.3.27)$$

onde

$$x'_b = x_b - \frac{1}{2} g(t_b - t_a)^2 \quad \text{e} \quad x'_a = x_a$$

A equação (2.3.27) mostra que uma partícula de massa  $m$  que está sob a ação de uma força  $mg$ , vista por um observador que está acelerado com uma aceleração  $g$ , este vê uma partícula livre.

De posse dos operadores  $K'(b', a')$  e  $K(b, a)$ , podemos verificar que a probabilidade não muda, ou seja

$$|K'|^2 dx' = |K|^2 dx \quad (2.3.28)$$

A equação (2.3.28) deixa claro que as contribuições devido as flutuações em torno das trajetórias clássicas não



são afetadas pela aceleração do sistema de referências e, consequentemente, a probabilidade quântica.

2.4 OSCILADOR HARMÔNICO NUM REFERENCIAL COM ACELERAÇÃO LINEAR

Seja

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 - \omega^2 x'^2) , \tag{2.4.1}$$

a lagrangeana de um oscilador harmônico num referencial  $k'$  inercial. Este oscilador visto de um referencial não inercial cujas transformações das coordenadas e das velocidades foram feitas na seção anterior ( $x' = x + h(t)$  e  $\dot{x}' = \dot{x} + \dot{h}$  onde  $\dot{h} = \int a_c(t) dt$  e  $a(t)$  a aceleração do referencial), tem como lagrangeana

$$L = \frac{m}{2} [ (\dot{x} + \dot{h})^2 - \omega^2 (x + h)^2 ]$$
$$= \frac{m}{2} [ \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2 - \omega^2 (x^2 + 2xh + h^2) ] \tag{2.4.2}$$

o termo  $\dot{x}\dot{h}$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\dot{x}\dot{h} = \frac{d}{dt} (x\dot{h}) - x\ddot{h} \tag{2.4.3}$$

Substituindo (2.4.3) em (2.4.2) e agrupando os termos semelhantes

$$L' = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - mx(\ddot{h} + \omega^2 h) + m \frac{d}{dt} (x\dot{h}) + \frac{m}{2} (\dot{h}^2 + \omega^2 h^2) \tag{2.4.4}$$

logo,

$$L' = L + \dot{F} \tag{2.4.5}$$

onde

$$L \equiv \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - xI(t) \tag{2.4.6}$$

L é a lagrangeana da partícula vista do referencial não inercial e

$$\dot{F} = \frac{d}{dt} \left[ m(x\dot{h} + \frac{1}{2}) \right] (\dot{h}^2 + \omega^2 h^2) \quad (2.4.7)$$

$\dot{F}$  é uma função arbitrária do tempo e coordenadas e, portanto, não afeta as equações de movimento.

Finalmente

$$I \equiv m(\ddot{h} + \omega^2 h) \quad (2.4.8)$$

A grandeza I que aparece na lagrangeana L pode ser interpretada como uma força externa, de modo análogo ao que já foi feito para partícula livre na seção anterior.

Desta forma podemos concluir que um oscilador harmônico simples visto de um referencial não inercial, torna-se um oscilador harmônico forçado.

O operador deslocamento temporal tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} K(b'/a') &= \int D[x'] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \\ &= \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} + \frac{i}{\hbar} (F_b - F_a) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} F_b} \left\{ \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} F_a} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} F_a} K(b/a) e^{\frac{i}{\hbar} F_a} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

onde

$$K(b/a) = \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt} \quad (2.4.10)$$



O operador  $K(b/a)$  com uma lagrangeana do tipo  $L$  definida na equação (2.4.6) já foi calculado por Feynman<sup>[1]</sup> a menos dos termos que dependem de  $I(t)$ , cujas integrais ficam indicadas

$$K(b/a) = \left[ \frac{m\omega}{2\hbar\pi i \operatorname{sen}\omega\tau} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S_c} \quad (2.4.11)$$

Sendo  $S_c$  a ação clássica dada por:

$$\begin{aligned} S_c = & \frac{m\omega}{2 \operatorname{sen}\omega\tau} [\cos\omega\tau (x_b^2 + x_a^2) - 2x_b x_a + \\ & + \frac{2x_b}{m\omega} \int_{t_a}^{t_b} I(t) \operatorname{sen}\omega(t - t_a) dt \\ & + \frac{2x_a}{m\omega} \int_{t_a}^{t_b} I(t) \operatorname{sen}\omega(t_b - t) dt \\ & + \frac{2}{m^2\omega^2} \int_{t_a}^{t_b} dt' \int_{t_a}^t I(t) I(t') \operatorname{sen}\omega(t_b - t) \operatorname{sen}\omega(t' - t_a) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

com

$$\tau = t_b - t_a$$

Portanto, a equação (2.4.11) é o operador deslocamento temporal para um oscilador num referencial não inercial; a sua solução exata depende apenas de conhecer a transformação (da aceleração) do sistema de referência.

## CAPITULO 3

### QUANTIZAÇÃO POR INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA PARA REFERENCIAIS GIRANTES

#### 3.1

#### GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE LARMOR

Vimos, no capítulo anterior, que quando observamos um sistema físico num referencial acelerado, com uma aceleração linear ao longo de uma direção qualquer, este se comporta de forma equivalente ao mesmo sistema físico num referencial inercial, porém, sob ação de um campo externo, dependendo da lei que relaciona os dois referenciais. Neste capítulo trataremos do caso em que o sistema físico está colocado num referencial  $K$  que gira com uma velocidade angular  $\vec{\omega}(t)$  em relação a um referencial  $K'$  inercial.

Seja  $K$  um referencial não inercial, cuja origem coincide com a origem de um referencial inercial  $K'$ . O referencial  $K$  gira com uma velocidade angular  $\vec{\omega}(t)$ ; os raios vetores da partícula  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}$  (têm mesmo módulo) nos referenciais  $K'$  e  $K$  (fig. 2), são os mesmos nos dois referenciais; apenas suas componentes são diferentes).

A velocidade  $\vec{v}$  da partícula em relação ao sistema  $K$ , se compõe da sua velocidade  $\vec{v}'$  (em relação ao referencial  $K'$ ) e da sua velocidade  $\vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}$ , devido ao movimento de rotação  $\omega$  do sistema  $K'$ .

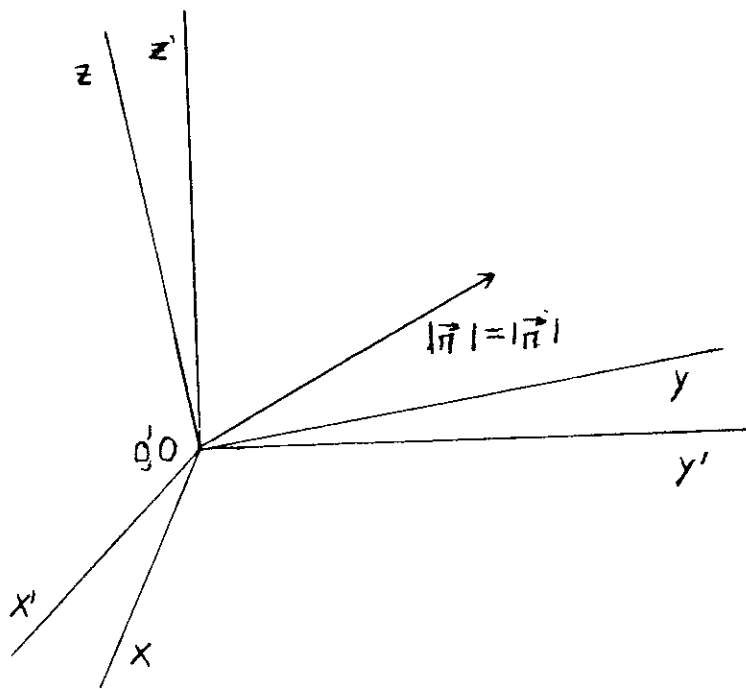


fig. 3

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r} \quad (3.1.1)$$

Vamos agora ver como fica modificada a lagrangeana do sistema físico em questão, substituindo a equação (3.1.1) em (1.2.1), obteremos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\vec{v} + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r})^2 - U(|\vec{r}|) \\ &= \frac{m}{2} v^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 - U(|\vec{r}|) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

onde  $U(|\vec{r}'|) = U(|\vec{r}|)$  devido ao fato de que  $|\vec{r}'| = |\vec{r}|$ .

As equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana (3.1.2) são dadas por:

$$m \frac{d}{dt} (\vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m \vec{\nabla} [\vec{v} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2] \quad (3.1.3)$$

onde, por comodidade, escolhemos  $U(|\vec{r}|) = 0$  e, além do que,  $U(|\vec{r}|)$  não é afetado pela transformação aqui discutida.

Definindo a grandeza  $\vec{T}$ :

$$\vec{T} \equiv \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r} \quad (3.1.4)$$

Substituindo (3.1.4) em (3.1.3) e efetuando a derivada, teremos:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m \frac{d\vec{T}}{dt} = m \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{T}) + \frac{m}{2} \vec{\nabla} (T^2) \quad (3.1.5)$$

usando as relações<sup>[5]</sup>.

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} \quad (3.1.6a)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{T}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{T}). \quad (3.1.6b)$$

Substituindo (3.1.6a e b) na equação (3.1.5):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} + m \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = m (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} + m \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{T}) + \frac{m}{2} \vec{\nabla} (T^2) \quad (3.1.7)$$

Reagrupando os termos da equação de movimento (3.1.7)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + m \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{T}) + \frac{m}{2} \vec{\nabla} (T^2) \quad (3.1.8)$$

Voltando à equação (3.1.4) para calcular a expressão  $\vec{\nabla} \wedge \vec{T}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{T} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} + \\ &\quad - (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde usamos a identidade vetorial

$$\vec{v} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\vec{v} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{v} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{b} \quad (3.1.9a)$$

Como  $\vec{\omega}(t)$  não depende da posição, o segundo e o terceiro termo do lado direito da equação (3.1.9) são nulos.

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \text{e} \quad (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{\omega} = 0 \quad (3.1.9b)$$

usando ainda as relações

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 3 \quad \text{e} \quad (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{v})\vec{r} = \vec{\omega} \quad (3.1.9c)$$

substituindo as relações (3.1.9b) e (3.1.9c) na equação (3.1.9), teremos:

$$\vec{v} \wedge \vec{T} = 2\vec{\omega}(t) \quad (3.1.9d)$$

substituindo (3.1.9d) em (3.1.8),

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + 2m \vec{v} \wedge \vec{\omega}(t) + \frac{m}{2} \vec{v}(\vec{T}^2) \quad (3.1.10)$$

Esta é, portanto, a forma da equação de movimento para uma partícula de massa  $m$  vista em um referencial girante. O segundo termo do lado direito é a força de Coriolis e o último termo, a força centrífuga. O primeiro termo é a variação no tempo da velocidade angular.

Neste ponto gostaríamos de enfatizar sobre a semelhança existente entre a equação (3.1.10) e a força de Lorentz<sup>[10]</sup> ou equação de movimento de uma partícula de massa  $m$  e carga elétrica  $e$ , sob ação de um campo elétrico  $E$  e um campo magnético  $\vec{B}(t)$ , sendo  $B(t)$  uniforme espacialmente.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}) \quad (3.1.11)$$

Comparando (3.1.10) e (3.1.11) e identificando os termos seme-

lhantes  $\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}(t)$  e  $2m \vec{v} \wedge \vec{\omega}(t)$ , o campo magnético fica:

$$\vec{B} \equiv \frac{2mc}{e} \vec{\omega}(t) \quad (3.1.12)$$

Podemos, em princípio, definir o campo  $\vec{E}$  como sendo:

$$e\vec{E} \equiv -m \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + \frac{m}{2} \vec{v} (\vec{T}^2) = -m\dot{\vec{w}}(t) \wedge \vec{r} + m\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) \quad (3.1.13)$$

Esta analogia pode ser feita entre as lagrangeanas da partícula acima mencionada com a lagrangeana (3.1.2) (lagrangeana da partícula num referencial girante).

A lagrangeana de uma partícula carregada num potencial vetor  $\vec{A}$  e potencial escalar  $\phi(r)$  é:

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi(r) \quad (3.1.14)$$

O vetor potencial para um campo magnético  $\vec{B}(t)$  uniforme pode ser escrito, a partir da sua definição  $\vec{v} \wedge \vec{A} = \vec{B}$ .

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2} \quad (3.1.15)$$

substituindo na equação (3.1.14),

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{2c} \vec{v} \cdot \vec{B} \wedge \vec{r} - e\phi(r) \quad (3.1.16)$$

Comparando a equação (3.1.14) com (3.1.2), podemos identificar o seguinte:

$$m\dot{\vec{T}} = \frac{e}{c} \vec{A} \quad (3.1.17)$$

e

$$-\frac{m}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 + U(\vec{r}) = e\phi(\vec{r}) \quad (3.1.18)$$

Voltando às equações (3.1.12) e (3.1.13), vemos que o campo magnético  $\vec{B}$  fica definido como sendo proporcional à  $\vec{\omega}(t)$  (velocidade angular do sistema de referências) e o campo elétrico é definido pela soma de um termo proporcional à derivada parcial de  $\omega$  em relação ao tempo, mais um termo quadrático em  $\vec{\omega}(t)$  ou em termos de  $\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}$  e do gradiente de  $T^2$ . Estas relações são válidas para quaisquer sistemas de partículas, desde que seja preservada a relação  $\frac{e_i}{m_i}$  onde  $e_i$  e  $m_i$  são carga e massa da iésima partícula do sistema físico em estudo.

A partir das equações (3.1.12) e (3.1.13), podemos afirmar que:

*"Um sistema de partículas carregadas, colocado num referencial girante, se comporta de forma equivalente a submetê-lo a um campo magnético e um campo elétrico cuja forma é dada nas equações (3.1.12) e (3.1.13), respectivamente"*

Um passo importante para a nossa proposta é verificar se os campos definidos nas equações (3.1.12) e (3.1.13), satisfazem as equações de Maxwell.

A lei de Gauss para o campo magnético  $\vec{B}$  é verificada usando a equação (3.1.12).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 2 \frac{mc}{e} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}(t)$$

Usando o fato de  $\vec{\omega}(t)$  não depender da posição,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}$  é nulo e, como consequência,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3-1-19}$$

A lei de Gauss para o campo  $\vec{E}$  é verificada usando as equações (3.1.13) e (3.1.4).

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= - \vec{\nabla} \cdot \frac{m}{e} \left[ \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{T}^2) \right] \\
 &= - \frac{m}{e} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) \right] \\
 &= - \frac{m}{e} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) - \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) \right] + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) + \right. \\
 &\quad \left. - \vec{\omega} \cdot \nabla \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right\}
 \end{aligned}$$

logo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = - \frac{m}{e} [- \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})]$$

da equação (3.1.9),

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = 2\vec{\omega}$$

logo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2m}{e} \omega^2 \quad (3.1.20)$$

Usando a definição do vetor deslocamento elétrico  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e substituindo em (3.1.20), onde  $\epsilon$  é constante do vácuo.

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 2 \frac{m\epsilon}{e} \omega^2 = 4\pi\rho \quad (3.1.21)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga.

Da equação (3.1.21) podemos afirmar que  $\omega$  se comporta como uma fonte de campo.

Lei de Ampère - Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = 2 \frac{m\epsilon}{e\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(t) = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

onde  $\vec{J}$  é o vetor densidade de corrente.



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \quad (3.1.22)$$

O rotacional de  $\vec{H}$  é nulo porque  $\vec{\omega}(t)$  não depende da posição. Isso traz algum problema porque o lado direito da equação (3.1.22) fica nulo.

$$\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

Não podemos dizer que não há corrente porque ficaria inconsistente com a equação de continuidade, uma vez que  $\rho$ , como mostra a equação (3.1.21) depende do tempo. Logo sua derivada é não nula e, portanto, para compatibilizar as equações (3.1.20), (3.1.22) e a equação de continuidade, só nos resta uma opção: definir  $\vec{J}$  da seguinte forma:

$$\vec{J} \equiv - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.1.23)$$

Lei de Faraday

$$e \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - m \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + \frac{m}{2} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}^2)$$

O termo  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}^2)$  é nulo porque rotacional de gradiente de uma função qualquer é nulo. Isto implica em:

$$e \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - m \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{T}^2) \quad (3.1.14a)$$

Da equação (3.1.9):

$$e \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - 2m \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega}(t) \quad (3.1.24b)$$

Usando a equação (3.1.12)

$$e \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1.24c)$$

Fisicamente a equação (3.1.24b) diz que se  $\vec{\omega}$  varia no tempo, esta induz uma corrente que cria um campo elétrico  $\vec{E}$ .

Vamos analisar a equação (3.1.24c) com mais cuidado:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - 2 \frac{m}{e} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega}(t)$$

Colocando esta equação na forma integral, teremos:

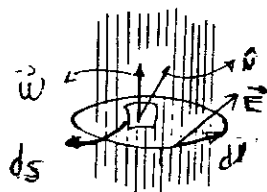
$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - 2 \frac{m}{e} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega}(t) \cdot d\vec{s}$$

Usando o teorema de Stoke na integral do lado esquerdo, este fica da seguinte forma:

$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2 \frac{m}{e} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\omega}(t) \cdot d\vec{s}$$

Isto significa que uma variação do fluxo de  $\vec{\omega}$  através da superfície  $s$  no tempo, gera um campo elétrico  $\vec{E}$  ao longo de um circuito fechado  $c$  (fig. 4)



$\hat{n}$  é o vetor unitário na direção normal a  $d\vec{s}$

fig. 4

Este é o que se pode chamar de enunciado equivalente ao da Lei de Faraday para o caso de um sistema físico num referencial girante. Este enunciado é uma analogia; não se trata portanto, de campos verdadeiros.

Agora vamos fazer uma análise de como se comporta a Hamiltoniana  $H$  para o sistema transformado.

$$H = \vec{p}\vec{q} - L$$

$$\vec{P} = m(\vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad , \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$H = \vec{P}_0 \left( \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) - \frac{m}{2} \left( \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right)^2 + U(|\vec{r}|)$$

$$= \frac{p^2}{m} - \vec{P} \wedge \vec{\omega} \cdot \vec{r} - \frac{p^2}{2m} + U(|\vec{r}|)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \vec{\omega} \cdot \vec{r} \wedge \vec{p} + U(|\vec{r}|)$$

$$\Rightarrow H = H_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad , \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(|\vec{r}|)$$

onde  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$  é o momento angular da partícula.

e

$$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z} \quad , \quad \omega_0 = \text{constante}$$

$$H = H_0 + \omega_0 L_z$$

O termo  $\omega_0 L_z$  é idêntico ao acréscimo na energia de um sistema físico, quando calculamos o efeito Zeeman normal<sup>[7]</sup>.

Se calcularmos os auto-estados  $|\psi\rangle$  do operador  $H$  com o auto valores  $E_i$ , estes auto-estados formam um conjunto completo  $\{|\psi_i\rangle\}$  de auto-estados não degenerados em momento angular  $\vec{L}$ . Isto equivale dizer que, ao colocar o sistema físico num referencial girante com velocidade angular constante, estamos levantando sua degenerescência ou seja, o auto valor de energia depende dos auto va-

lores da terceira componente do momento angular  $L_z$  [7].

### 3.2 CÁLCULO DO OPERADOR DESLOCAMENTO TEMPORAL PARA UMA PARTÍCULA NUM REFERENCIAL GIRANTE

Para obter o operador  $k(b/a)$  de uma partícula num referencial girante devemos substituir a lagrangeana  $L$  (equação 3.1.2) na expressão (1.2.22).

$$\begin{aligned} k(b/a) &= \int D[\vec{r}(t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L dt \right\} \\ &= \int D[\vec{r}(t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} (v^2 + 2\vec{V}_p(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Onde fizemos  $U(|\vec{r}|) = 0$ , uma vez que  $U$  não é afetado pela rotação do sistema de referências.

Escrevendo o vetor posição  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$  em termos de suas componentes cartesianas e, substituindo em (3-2-1),

$$k(b/a) = \int D[x(t)] D[y(t)] D[z(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t), y(t), z(t)]} \quad (3.2.2)$$

onde  $S$  é ação do sistema físico, sendo escrita como:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\omega(t)(x\dot{y} - y\dot{x}) + \omega^2(t)(x^2 + y^2)] dt \quad (3.2.3)$$

e, substituimos:

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2(t)(x^2 + y^2)$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega(t)(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (\text{ver apêndice A}).$$

e escolhemos a direção do vetor  $\vec{\omega}$  paralelo ao eixo  $z$  do sistema

de referências.

Substituindo a equação (3.2.3) na equação (3.2.2) podemos escrever o operador  $k(b/a)$  como um produto de dois operadores (pela simetria do problema).

$$k(b/a) = k(x_b, y_b, t_b, x_a, y_a, t_a) k(z_b, t_b, z_a, t_a) \quad (3.2.4)$$

onde

$$k(x_b, y_b, t_b, x_a, y_a, t_a) = \int D[x(t)] D[y(t)] \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\omega(t) (x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega^2(t) (x^2 + y^2) \right] dt} \quad (3.2.5)$$

e

$$k(z_b, t_b, z_a, t_a) = \int D[z(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \dot{z}^2 dt} \quad (3.2.6)$$

e esta integral já está calculada<sup>[3]</sup>.

Vamos calcular a integral de trajetória (equação 3.2.5). Para isso, vamos usar as trajetórias poligonais de Feynman. Assim, a equação (3.2.5) fica:

$$k(x_b, y_b, t_b, x_a, y_a, t_a) = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon_j} \right)^N \int \dots \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N S(x_j, y_j, x_{j-1}, y_{j-1}, \epsilon_j) \right\} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j dy_j \quad (3.2.7)$$

sendo

$$\epsilon_j = t_j - t_{j-1}$$

onde substituímos  $D[x]D[y]$  por

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon_j} \right)^N \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j dy_j \quad (3.2.8)$$

e

$$\int_{t_a}^{t_b} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N S(x_j, y_j, x_{j-1}, y_{j-1}, \epsilon_j) \quad (3.2.9)$$

com

$$S(x_j, y_j, x_{j-1}, y_{j-1}, \epsilon_j) = \frac{m}{2\epsilon_j} \{ (x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + 2\epsilon_j \omega_j \left[ \frac{(x_j + x_{j-1})}{2} (y_j - y_{j-1}) - \frac{(y_j + y_{j-1})}{2} (x_j - x_{j-1}) \right] + \epsilon_j^2 (\omega_j^2 (\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2)) \} \quad (3.2.10)$$

onde

$$\frac{x_j + x_{j-1}}{2} = \bar{x}_j$$

$$\frac{y_j + y_{j-1}}{2} = \bar{y}_j$$

Para simplificar a equação (3.2.10) e colocá-la numa forma mais simples, vamos introduzir uma transformação dependente do tempo e linear no espaço. Uma discussão mais detalhada desta transformação foi feita por Nassar<sup>[11]</sup> e outros.

$$x(t) = \lambda_x(t) X(\tau) , y(t) = \lambda_y(t) Y(\tau) \quad (3.2.11)$$

e

$$d\tau = U(t) dt \quad (3.2.12)$$

A equação (3.2.11) pode ser escrita em termos de tempos discretizados:

$$x_j = x(t_j) = \lambda_x(t_j) X(\tau_j) = \lambda_x(t_j) X_j \quad (3.2.13a)$$

$$y_j = y(t_j) = \lambda_y(t_j) Y(\tau_j) = \lambda_y(t_j) Y_j \quad (3.2.13b)$$

Expandindo  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  em termos do tempo médio  $\bar{t}_j$  no intervalo de tempo  $[t_{j-1}, t_j]$  (uma discussão mais acurada desta expansão está na ref. [13]).

$$\bar{t}_j = \frac{t_j + t_{j-1}}{2} = t_j - \frac{1}{2} \epsilon_j ;$$

logo

$$t_j = \bar{t}_j + \frac{1}{2} \epsilon_j ; \quad (3.2.14)$$

Substituindo (3.2.14) em (3.2.13) e expandindo até primeira ordem de  $\epsilon_j$ ,  $x_j$  e  $y_j$  assumem a forma:

$$x_j = \lambda_x(\bar{t}_j + \frac{1}{2} \epsilon_j) X_j = (\lambda_x(\bar{t}_j) + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_x(\bar{t}_j) \epsilon_j) X_j \quad (3.2.15)$$

e

$$y_j = \lambda_y(\bar{t}_j + \frac{1}{2} \epsilon_j) Y_j = (\lambda_y(\bar{t}_j) + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_y(\bar{t}_j) \epsilon_j) Y_j \quad (3.2.16)$$

enquanto

$$x_{j-1} = \lambda_x(\bar{t}_j - \frac{1}{2} \epsilon_j) X_{j-1} = (\lambda_x(\bar{t}_j) - \frac{1}{2} \dot{\lambda}_x(\bar{t}_j) \epsilon_j) X_{j-1} \quad (3.2.17)$$

e

$$y_{j-1} = \lambda_y(\bar{t}_j - \frac{1}{2} \epsilon_j) Y_{j-1} = (\lambda_y(\bar{t}_j) - \frac{1}{2} \dot{\lambda}_y(\bar{t}_j) \epsilon_j) Y_{j-1} \quad (3.2.18)$$

das equações (3.2.15) e (2.2.17)

$$x_j - x_{j-1} = \bar{\lambda}_{xj} \Delta X_j + \dot{\lambda}_{xj} \epsilon_j \bar{X}_j \quad (3.2.19)$$

onde

$$\Delta X_j = X_j - X_{j-1} \quad e \quad \bar{X}_j = \frac{X_j + X_{j-1}}{2} \quad e$$

$$\bar{\lambda}_{xj} = \lambda_x (\bar{t}_j)$$

do mesmo modo para y teremos:

$$y_j - y_{j-1} = \bar{\lambda}_{yj} \Delta Y_j + \dot{\lambda}_{yj} \epsilon_j \bar{Y}_j \quad (3.2.20)$$

e

$$\begin{aligned} x_j + x_{j-1} &= \bar{\lambda}_{xj} (X_j + X_{j-1}) + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_{xj} \epsilon_j (X_j - X_{j-1}) = \\ &= 2\lambda_{xj} \bar{X}_j + \frac{1}{2} \epsilon_j \dot{\lambda}_{xj} \Delta X_j \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

e, da mesma forma para y, teremos:

$$y_j + y_{j-1} = 2\lambda_{yj} \bar{Y}_j + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_{yj} \epsilon_j \Delta Y_j \quad (3.2.22)$$

Substituindo agora, as equações (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21) e (3.2.22), na equação (3.2.10), vamos encontrar:

$$\begin{aligned} S(j/j-1) &\equiv S(s_j, s_{j-1}, y_j, y_{j-1}, \epsilon_j) = \\ &= \frac{m}{2\epsilon_j} \{ (\bar{\lambda}_{xj} \Delta X_j + \dot{\lambda}_{xj} \epsilon_j \bar{X}_j)^2 + (\bar{\lambda}_{yj} \Delta Y_j + \dot{\lambda}_{yj} \epsilon_j \bar{Y}_j)^2 + \\ &- 2\epsilon_j \omega_j [ (\bar{\lambda}_{xj} \bar{X}_j + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_{xj} \epsilon_j \Delta X_j) (\bar{\lambda}_{yj} \Delta Y_j + \epsilon_j \dot{\lambda}_{yj} \bar{Y}_j) + \\ &- (\bar{\lambda}_{yj} \bar{Y}_j + \frac{1}{4} \dot{\lambda}_{yj} \epsilon_j \Delta Y_j) (\bar{\lambda}_{xj} \Delta X_j + \dot{\lambda}_{xj} \epsilon_j \bar{X}_j) ] \} + \end{aligned}$$



$$+ \epsilon_j^2 \omega_j^2 (\bar{\lambda}_{xj}^2 \bar{x}_j^2 + \bar{\lambda}_{yj}^2 \bar{y}_j^2) \quad (3.2.23)$$

efetuando as operações nos parenteses:

$$\begin{aligned} S(j/j-1) = & \frac{m}{2\epsilon_j} \{ \bar{\lambda}_{xj}^2 \Delta x_j^2 + 2\epsilon_j \bar{\lambda}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{xj} \Delta x_j \bar{x}_j + \epsilon_j^2 \dot{\bar{\lambda}}_{xj}^2 \bar{x}_j^2 + \\ & + \bar{\lambda}_{yj}^2 \Delta y_j^2 + 2\epsilon_j \bar{\lambda}_{yj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj} \Delta y_j \bar{y}_j + \epsilon_j^2 \dot{\bar{\lambda}}_{yj}^2 \bar{y}_j^2 + \\ & + 2\epsilon_j \omega_j [ (\bar{\lambda}_{xj} \bar{\lambda}_{yj} \bar{x}_j \Delta y_j + \epsilon_j \bar{\lambda}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj} \bar{x}_j \bar{y}_j + \frac{\epsilon_j}{4} \dot{\bar{\lambda}}_{xj} \bar{\lambda}_{yj} \Delta x_j \Delta y_j + \\ & + \frac{1}{4} \epsilon_j^2 \dot{\bar{\lambda}}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj} \Delta x_j \bar{y}_j) - (\bar{\lambda}_{yj} \bar{\lambda}_{xj} \bar{y}_j \Delta x_j + \epsilon_j \bar{\lambda}_{yj} \dot{\bar{\lambda}}_{xj} \bar{y}_j \bar{x}_j + \\ & + \frac{1}{4} \epsilon_j \bar{\lambda}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj} \Delta y_j \Delta x_j + \frac{1}{4} \epsilon_j^2 \dot{\bar{\lambda}}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj} \Delta y_j \bar{x}_j) ] + \\ & + \epsilon_j^2 \omega_j^2 (\bar{\lambda}_{xj}^2 \bar{x}_j^2 + \bar{\lambda}_{yj}^2 \bar{y}_j^2) \} \quad (3.2.24) \end{aligned}$$

Reescrevendo o termo  $\dot{\bar{\lambda}}_{xj}^2$  e  $\dot{\bar{\lambda}}_{yj}^2$  como uma derivada total com relação ao tempo,

$$\dot{\bar{\lambda}}_{xj}^2 = \frac{d}{dt} (\bar{\lambda}_{xj} \dot{\bar{\lambda}}_{xj}) - \bar{\lambda}_{xj} \ddot{\bar{\lambda}}_{xj} \quad (3.2.25)$$

$$\dot{\bar{\lambda}}_{yj}^2 = \frac{d}{dt} (\bar{\lambda}_{yj} \dot{\bar{\lambda}}_{yj}) - \bar{\lambda}_{yj} \ddot{\bar{\lambda}}_{yj} \quad (3.2.26)$$

Usando a definição de derivada de uma função para parâmetros discretos em intervalos fixos  $\epsilon_j = t_j - t_{j-1}$ ,

$$\frac{df_j}{dt_j} = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\epsilon_j} \quad (3.2.27)$$

Logo, fazendo uso desta equação no primeiro termo do lado direi-

to das equações (3.2.25) e (3.2.26), fica:

$$\frac{d}{dt_j} (\bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{xj}) = \frac{\bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{xj} - \bar{\lambda}_{xj-1} \dot{\lambda}_{xj-1}}{\epsilon_j} \quad (3.2.28)$$

e

$$\frac{d}{dt_j} (\bar{\lambda}_{yj} \dot{\lambda}_{yj}) = \frac{\bar{\lambda}_{yj} \dot{\lambda}_{yj} - \bar{\lambda}_{yj-1} \dot{\lambda}_{yj-1}}{\epsilon_j} \quad (3.2.29)$$

Substituindo as equações (3.2.28) e (3.2.29) em (3.2.25) e (3.2.26) e estas em (3.2.24) e, agrupando os termos semelhantes, teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S(j/j-1) = & \frac{m}{2\epsilon_j} \{ \bar{\lambda}_{xj}^2 \Delta X_j^2 + \lambda_{xj} \Delta Y_j^2 + 2\epsilon_j \bar{\lambda}_{yj} \bar{\lambda}_{xj} \omega_j \cdot \\ & \cdot (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j) + 2\epsilon_j^2 \omega_j \bar{Y}_j \bar{X}_j (\bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{yj} - \dot{\lambda}_{xj} \bar{\lambda}_{yj}) + \frac{2\epsilon_j^2}{4} j \cdot \\ & \cdot \omega_j \Delta X_j \Delta Y_j (\dot{\lambda}_{xj} \bar{\lambda}_{yj} - \bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{yj}) + \frac{2}{4} \epsilon_j^3 \dot{\lambda}_{yj} \dot{\lambda}_{xj} (\Delta X_j \bar{Y}_j - \Delta Y_j \bar{X}_j) - \\ & - \epsilon_j^2 [\bar{\lambda}_{xj} (\ddot{\lambda}_{xj} - \omega_j^2 \lambda_{xj}) X_j^2 + \bar{\lambda}_{yj} (\ddot{\lambda}_{yj} - \omega_j^2 \lambda_{yj}) \bar{Y}_j^2] + \epsilon_j \cdot \\ & \cdot (\bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{xj} X_j^2 - \bar{\lambda}_{xj-1} \dot{\lambda}_{xj-1} X_{j-1}^2 + \bar{\lambda}_{yj} \dot{\lambda}_{yj} Y_j^2 - \bar{\lambda}_{yj-1} \dot{\lambda}_{yj-1} Y_{j-1}^2) \} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

desprezando o termo  $\epsilon_j^3$  em relação aos demais e impondo a condição

$$\bar{\lambda}_{xj} \dot{\lambda}_{yj} - \dot{\lambda}_{xj} \bar{\lambda}_{yj} = 0 \quad (3.2.31)$$

e escolhendo

$$\ddot{\bar{\lambda}}_{xj} - \omega_{xj}^2 \bar{\lambda}_{xj} = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\bar{\lambda}}_{yj} - \omega_{yj}^2 \bar{\lambda}_{yj} = 0 \quad (3.2.32)$$

Para que as equações (3.2.31) e (3.2.32) sejam satisfeitas, temos que considerar o seguinte caso especial:

$$\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}_{xj} = \bar{\lambda}_{yj} \quad (3.2.33a)$$

e usando a equação (3.2.12) ou  $\sigma_j = \tau_j - \tau_{j-1} = \bar{u}_j \varepsilon_j$  (3.2.33b)

substituindo (3.2.31), (3.2.32) e (3.2.33a e b) em (3.2.30), teremos

$$S(j/j-1) = \frac{m}{2} \frac{\bar{u}_j}{\sigma_j} [\bar{\lambda}_j^2 (\Delta X_j)^2 + \bar{\lambda}_j^2 (\Delta Y_j)^2 + \frac{2\sigma_j}{\bar{u}_j} \bar{\omega} \lambda_j^2 \cdot (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j)] + \Delta F_{j,j-1} \quad (3.2.34)$$

onde

$$\Delta F_{j,j-1} = \frac{m}{2} \left\{ \frac{\dot{\bar{\lambda}}_{xj}}{\bar{\lambda}_{xj}} x_j^2 + \frac{\dot{\bar{\lambda}}_{yj}}{\bar{\lambda}_{yj}} y_j^2 - \left( \frac{\dot{\bar{\lambda}}_{xj-1}}{\bar{\lambda}_{xj-1}} x_{j-1}^2 + \frac{\dot{\bar{\lambda}}_{yj-1}}{\bar{\lambda}_{yj-1}} y_{j-1}^2 \right) \right\} \quad (3.2.35)$$

ou

$$S(j/j-1) = \frac{m}{2} \frac{\bar{u}_j}{\sigma_j} \bar{\lambda}^2 [(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + 2\omega_j \frac{\sigma_j}{\bar{u}_j} (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j)] + \Delta F_{j,j-1} \quad (3.2.36)$$

sendo

$$\Delta F_{j,j-1} = \frac{m}{2} \left\{ \frac{\dot{\bar{\lambda}}_j}{\bar{\lambda}_j} (x_j^2 + y_j^2) - \frac{\dot{\bar{\lambda}}_{j-1}}{\bar{\lambda}_{j-1}} (x_{j-1}^2 + y_{j-1}^2) \right\} \quad (3.2.37)$$

fazendo a seguinte escolha para  $\bar{\lambda}_j$ ,  $U_j$  e  $\omega_j$ ,

$$\bar{\lambda}_j^2 U_j = 1 \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}_j^2 \bar{\omega}_j = \omega_0 \quad (3.2.38)$$

com  $\omega_0$  sendo constante, substituindo na equação (3.2.36),

$$S(j/j-1, \sigma_j) = \Delta F_{j,j-1} + \frac{m}{2\sigma_j} \{ (\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + 2\sigma_j \omega_0 \cdot (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j) \} \quad (3.2.39)$$

O último termo do lado direito da equação (3.2.39) é a ação calculada em um referencial onde a velocidade angular é constante e ela tem a forma da ação de uma partícula num campo magnético

$$B_0 = \frac{2mc\omega_0}{e}$$

vemos, portanto, que conhecendo-se a transformação, conheceremos o operador deslocamento temporal para uma velocidade angular qualquer.

Usando agora as transformações (3.2.11), (3.2.12) e (3.2.33a e b) na média da integral de trajetória e escrevendo aqui o resultado do cálculo feito por Namik K.Pak e I.Sokmen<sup>[13]</sup> ou Christopher C.Gerry<sup>[14]</sup>, onde eles fazem uma simetrização de  $dx_j$  em torno de  $x_j$  e  $x_{j-1}$  obtem-se

$$\prod_{j=1}^{N-1} dx_j = [\lambda_b \lambda_a]^{-1/2} \prod_{j=1}^N [\lambda_j] \prod_{j=1}^{N-1} dx_j$$

repetindo o processo para  $dy_j$  e  $dY_j$ ,

$$\prod_{j=1}^{N-1} dy_j = [\lambda_b \lambda_a]^{-1/2} \prod_{j=1}^N [\lambda_j] \prod_{j=1}^{N-1} dY_j$$

Substituindo na expressão da medida,

$$\begin{aligned}
 & \prod_{j=1}^N \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon_j} \right)^N \prod_{j=1}^{N-1} \pi \, dX_j dY_j = \\
 & = (\lambda_b \lambda_a)^{-1} \prod_{j=1}^N \left[ \frac{mU}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right]^N \lambda_j^{2N} \prod_{j=1}^{N-1} \pi \, dX_j dY_j = \\
 & = (\lambda_b \lambda_a)^{-1} \prod_{j=1}^N \left[ \frac{m\lambda_j^2 U_j}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right]^N \prod_{j=1}^{N-1} \pi \, dX_j dY_j \quad (3.2.40)
 \end{aligned}$$

Levando em consideração a expressão (3.2.40) e a equação (3.2.38)

$$\lambda_j^2 U_j = 1$$

Substituindo as equações (3.2.39) e (3.2.40) na equação (3.2.7), teremos:

$$\begin{aligned}
 k(x_b, y_b, t_b, x_a, y_a, t_a) &= \lim_{\sigma_j \rightarrow 0} \int \dots \int \\
 & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{j=1}^N \Delta F_{j,j-1} + \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\sigma_j} [(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + 2\sigma_j \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j) \right] \right\} (\lambda_b \lambda_a)^{-1} \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right]^N \prod_{j=1}^{N-1} \pi \, dX_j dY_j \quad (3.2.41)
 \end{aligned}$$

O termo  $F_{j,j-1}$  não depende de  $X_j$  e  $Y_j$ , logo, sai da integral e desta forma,  $k(b/a)$  fica:

$$\begin{aligned}
 k(b/a) &\equiv k(x_b, y_b, t_b, x_a, y_a, t_a) = \\
 &= \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{j=1}^N \Delta F_{j,j-1} \right\} \lim_{\sigma_j \rightarrow 0} (\lambda_a \lambda_b)^{-1} \int \dots \int \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right]^N \prod_{j=1}^{N-1} \pi \, dX_j dY_j \\
 & \cdot \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\sigma_j} [(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + \sigma_j \omega_0 (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j)] \right\} \quad (3.2.42)
 \end{aligned}$$

O termo da soma em  $\Delta F_{j,j-1}$  pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \Delta F_{j,j-1} &= \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\dot{\lambda}_j}{\lambda_j} (x_j^2 + y_j^2) - \frac{\dot{\lambda}_{j-1}}{\lambda_{j-1}} (x_{j-1}^2 + y_{j-1}^2) \right] = \\ &= \frac{m}{2} \left[ \frac{\dot{\lambda}_N}{\lambda_N} (x_N^2 + y_N^2) - \frac{\dot{\lambda}_0}{\lambda_0} (x_0^2 + y_0^2) \right] \end{aligned} \quad (3-2.43)$$

porque os termos intermediários se cancelam. Definindo a função  $G(x_b, y_b, x_a, y_a)$  como sendo

$$G(x_b, y_b, x_a, y_a) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \Delta F(b/a)} \quad (3.2.44)$$

onde

$$\Delta F(b/a) = \frac{m}{2} \left[ \frac{\dot{\lambda}_b}{\lambda_b} (x_b + y_b) - \frac{\dot{\lambda}_a}{\lambda_a} (x_a^2 + y_a^2) \right]$$

sendo

$$\begin{aligned} x_b &= x_N & y_b &= y_N \\ & & e & \\ x_a &= x_0 & y_a &= y_0 \end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.2.42),

$$K(b/a) = (\lambda_a \lambda_b)^{-1} G(x_b, y_b, x_a, y_a) K_0(x_b, y_b, \tau_b, x_a, y_a, \tau_a) \quad (3.2.45)$$

o operador  $K_0(x_b, y_b, \tau_b, x_a, y_a, \tau_a)$  é escrito como sendo:

$$K_0(b/a) \equiv K_0(x_b, y_b, \tau_b, x_a, y_a, \tau_a) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right]^N \prod_{j=1}^{N-1} dx_j dy_j \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\sigma_j} [(\Delta X_j)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (\Delta Y_j)^2 + \sigma_j \omega_0 (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j) \right\} \quad (3.2.46)
 \end{aligned}$$

Vamos escrever novamente a ação na forma contínua. Para isto, é necessário fazer o limite de  $N \rightarrow \infty$  na exponencial da equação (3.2.46):

$$\begin{aligned}
 &\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\sigma_j} [(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + 2\sigma_j \omega_0 (\bar{X}_j \Delta Y_j - \bar{Y}_j \Delta X_j)] \\
 &\equiv \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{m}{2} [\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\omega_0 (X\dot{Y} - Y\dot{X})] d\tau \\
 &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} L_0 d\tau \quad (3.2.47a)
 \end{aligned}$$

onde

$$L_0 = \frac{m}{2} [X^2 + Y^2 + 2\omega_0 (X\dot{Y} - Y\dot{X})] \quad (3.2.47b)$$

Introduzindo a medida de Feynman  $D[X], D[Y]$  mencionada anteriormente, o operador  $K_0(b/a)$  (sendo  $k_0(b/a)$  correspondente a  $\omega_0$ ) assume a forma:

$$\begin{aligned}
 K_0(b/a) &= \int D[X(\tau)] D[Y(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_a}^{\tau_b} L_0 d\tau} = \\
 &= \int D[X(\tau)] D[Y(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[ \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\omega_0 (X\dot{Y} - Y\dot{X})) \right] d\tau} \quad (3.2.48)
 \end{aligned}$$

A equação (3.2.48) é equivalente ao operador de deslocamento temporal para uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$  sob a ação de um campo magnético constante  $B_0$  definido da seguinte forma:

$$B_0 = \frac{2mc}{e} \omega_0$$

A equação (3.2.48) tem solução conhecida<sup>[3]</sup> sendo dada por:

$$\begin{aligned} K_0(X_b, Y_b, \tau_b, X_a, Y_a, \tau_a) &= \\ &= \left[ \frac{m\omega_0}{2\pi i\hbar \operatorname{sen}\omega_0\tau} \right] \exp \frac{i}{\hbar} \{ S_c(b/a) \} \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

onde

$$\begin{aligned} S_c[b/a] &= \frac{m}{2} \omega_0 \left[ \frac{1}{2} (\cotg \frac{\omega_0\tau}{2}) [(X_b - Y_a)^2 + (Y_b - X_a)^2] + \right. \\ &\quad \left. 2(Y_b X_a - X_b Y_a) \right] \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

Portanto, conhecendo-se as leis de transformação das coordenadas e do tempo, (3.2.11) e (3.2.12), respectivamente, podemos obter soluções exatas para o operador  $K(b/a)$  num referencial acelerado qualquer, desde que satisfaçam as restrições das equações (3.2.32) e (3.2.32a).

### 3.3 VERIFICAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL GIRANTE, CAMPO MAGNÉTICO

Vamos mostrar que observar uma partícula num referencial girante (com velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ , para  $\omega_0$  pequeno) é equivalente a submetê-lo a um campo magnético constante  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .



Para isso vamos calcular o operador deslocamento temporal  $K(b/a)$  definido na equação (3.2.5) com  $\omega_0$  paralelo ao eixo  $z$ .

$$\begin{aligned}
 K_0(b/a) &= k_0(X_b, Y_b, \tau_b, X_a, Y_a, \tau_a) = \\
 &= \int D[X]D[Y] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[ \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\omega_0 (X\dot{Y} - Y\dot{X}) + \omega_0^2 (X^2 + Y^2)) \right] dt}
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

onde

$$S[X, Y] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[ \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\omega_0 (X\dot{Y} - Y\dot{X}) + \omega_0^2 (X^2 + Y^2)) \right] dt \tag{3.3.3}$$

Podemos escrever a ação  $S$  como uma expansão em série de potências em torno das trajetórias clássicas, ou seja

$$X = X_c + \eta \quad e \quad Y = Y_c + \xi \tag{3.3.4}$$

onde

$$\eta(t_b) = 0 = \eta(t_a) \quad e \quad \xi(t_b) = 0 = \xi(t_a) \tag{3.3.5}$$

Substituindo em  $S$ , considerando apenas até termos de 2ª ordem:

$$S[X, Y] = S[X_c, Y_c] + \delta S[X, Y] \Big|_{\substack{X_c \\ Y_c}} + \delta^2 S[x, y] \Big|_{\substack{X_c \\ Y_c}} + \dots \tag{3.3.6}$$

o termo  $\delta S = 0$ , devido a condição de extremos; logo,

$$S[X, Y] = S_c + \delta^2 S[X, Y] \tag{3.3.7}$$

(esta discussão esta na referência [9]).

Substituindo no operador  $k_0(b/a)$ :

$$K_0(b/a) = \int D[\eta] D[\xi] e^{\frac{i}{\hbar} S_c + \delta^2 S} \Big|_{\substack{X_c \\ Y_c}} = e^{\frac{i}{\hbar} S_c} k(\tau_b, \tau_a) \quad (3.3.8)$$

onde

$K(\tau_b, \tau_a)$  é o fator pré-exponencial.

$$K(\tau_b, \tau_a) = \int D[\eta] D[\xi] e^{\frac{i}{\hbar} \delta^2 S[X, Y]} \quad (3.3.9)$$

Escrevendo  $\delta^2 S[X, Y]$  em termos da soma de todas as trajetórias:

$$\begin{aligned} \delta^2 S[X, Y] = & \frac{1}{2!} \sum_{i, j=1}^N \left[ \left( \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \right) \Big|_{\substack{X_{ci} \\ X_{cj}}} (X - X_i) (X - X_j) + \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial Y_j} \right) \Big|_{\substack{X_{ci} \\ Y_{cj}}} (X - X_{ci}) (Y - Y_{cj}) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Y_i \partial X_j} \right) \Big|_{\substack{X_{cj} \\ Y_{ci}}} (Y - Y_{cj}) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (X - X_{cj}) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Y_i \partial Y_j} \right) \Big|_{\substack{Y_{ci} \\ Y_{cj}}} (Y - Y_i) (Y - Y_j) \right] \quad (3.3.10) \end{aligned}$$

Substituindo por  $\eta$  e  $\xi$   $X - X_j$ ,  $Y - Y_j$ , teremos:

$$\begin{aligned} \delta^2 S[X, Y] = & \frac{1}{2!} \sum_{i, j}^N \left[ \left( \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \right) \Big|_{\substack{X_{ci} \\ X_{cj}}} \eta^2 + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial Y_j} \right) \Big|_{\substack{X_{ci} \\ Y_{cj}}} \eta \xi \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Y_i \partial X_j} \right) \Big|_{\substack{X_{ci} \\ X_{cj}}} \xi \eta + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Y_i \partial Y_j} \right) \Big|_{\substack{Y_{ci} \\ Y_{cj}}} \xi^2 \right] \quad (3.3.11) \end{aligned}$$

Substituindo em  $k(\tau_b, \tau_a)$  e usando a integral de Fresnel, este operador assume a forma:

$$K(\tau_b, \tau_a) = (2\pi\hbar)^{-n/2} |\det D|^{-1/2} \quad (3.3.12)$$

onde  $n$  é o número de graus de liberdade e  $D$  é o determinante de van Vleck<sup>[9]</sup>.

onde

$$\det D = \begin{vmatrix} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \\ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 S}{\partial Y_i \partial Y_j} \end{vmatrix} \begin{matrix} X_{ci} \\ X_{cj} \end{matrix} \begin{matrix} Y_{ci} \\ Y_{cj} \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S_c}{\partial X_a \partial X_b} & \frac{\partial^2 S_c}{\partial Y_a \partial Y_b} \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Portanto, o operador deslocamento temporal é:

$$K(X_b, Y_b, \tau_b, X_a, Y_a, \tau_a) =$$

$$= (2\pi\hbar)^{-N/2} \left| \frac{\partial^2 S_c}{\partial X_a \partial Y_b} \quad \frac{\partial^2 S_c}{\partial X_a \partial Y_b} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_c} \quad (3.3.14)$$

Basta conhecer a ação clássica para obter o operador deslocamento temporal.

Passemos agora ao cálculo da ação clássica  $S_c$ .

$$S_c = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[ \frac{m}{2} (\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 + 2\omega_0 (X_c \dot{Y}_c - Y_c \dot{X}_c) + \omega_0^2 (X_c^2 + Y_c^2)) \right] d\tau \quad (3.3.15)$$

Integrando por partes os dois primeiros termos de (3.3.2), teremos:

$$S_c = \frac{m}{2} [X_c \dot{X}_c \Big|_{\tau_a}^{\tau_b} + Y_c \dot{Y}_c \Big|_{\tau_a}^{\tau_b} - \int_{\tau_a}^{\tau_b} [X_c (\ddot{X}_c - 2\omega_0 \dot{Y}_c - \omega_0^2 X_c) +$$

$$Y_c (\ddot{Y}_c + 2\omega_0 \dot{X}_c - \omega_0^2 Y_c)] d\tau] \quad (3.3.16)$$

Os dois últimos termos são nulos, devido às equações de Euler -  
- Lagrange. Logo,

$$S_c = \frac{m}{2} [X_c \dot{X}_c \begin{bmatrix} \tau_b \\ \tau_a \end{bmatrix} + Y_c \dot{Y}_c \begin{bmatrix} \tau_b \\ \tau_a \end{bmatrix}] \quad (3.3.17)$$

Para conhecer a ação  $S_c$ , teremos que resolver as equações de Euler-Lagrange:

$$\ddot{X}_c - 2\omega_0 \dot{Y}_c - \omega^2 X_c = 0 \quad (3.3.18)$$

$$\ddot{Y}_c + 2\omega_0 \dot{X}_c - \omega^2 Y_c = 0 \quad (3.3.19)$$

Multiplicando a equação (3.3.19) por  $\pm i$  e somando à (3.3.18), teremos

$$\ddot{X}_c \pm i \ddot{Y}_c \pm 2\omega_0 i (\dot{X}_c \pm i \dot{Y}_c) - \omega^2 (X_c \pm i Y_c) = 0 \quad (3.3.20)$$

escrevendo  $J_{\pm} = X_c \pm i Y_c$ , teremos:

$$\text{ou} \quad \ddot{J}_{\pm} \pm 2\omega_0 i \dot{J}_{\pm} - \omega^2 J_{\pm} = 0 \quad (3.3.21)$$

$$\text{ou} \quad \ddot{J}_{+} + 2\omega_0 i \dot{J}_{+} - \omega^2 J_{+} = 0 \quad (3.3.22)$$

$$\ddot{J}_{-} - 2\omega_0 i \dot{J}_{-} - \omega^2 J_{-} = 0 \quad (3.3.23)$$

esta equação tem como solução:

$$J_{+} = A_{+} e^{-i\omega_0 t} + B_{+} t e^{-i\omega_0 t} \quad (3.3.24)$$

e

$$J_{-} = A_{-} e^{i\omega_0 t} + B_{-} t e^{i\omega_0 t} \quad (3.3.25)$$

onde  $A_{+}, A_{-}$  e  $B_{+}, B_{-}$  são constantes de integração e podem ser cal-

culadas a partir das condições iniciais.

$$x_c(t_b) = X_b, \quad x_c(t_a) = X_a \quad (3.3.26)$$

$$Y_c(t_b) = Y_b, \quad X(t_a) = Y_a \quad (3.3.27)$$

Com as condições (3.3.26) e (3.3.27), podemos encontrar os valores das constantes A+, A-, B+ e B- :

$$A_+ = \frac{(X_a + Y_a) \tau_b e^{i\omega_0 \tau_a} - (X_b + iY_b) \tau_a e^{i\omega_0 \tau_b}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.28)$$

$$B_+ = \frac{(X_b + iY_b) e^{i\omega_0 \tau_b} - (X_a + iY_a) e^{i\omega_0 \tau_a}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.29)$$

$$A_- = \frac{(X_a - iY_a) \tau_b e^{-i\omega_0 \tau_a} - (X_b - iY_b) \tau_a e^{-i\omega_0 \tau_b}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.30)$$

$$B_- = \frac{(X_b - iY_b) e^{-i\omega_0 \tau_b} - (X_a - iY_a) e^{-i\omega_0 \tau_a}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.31)$$

Substituindo as equações (3.3.(28, 29, 30 e 31)) nas equações (3.3.(24 e 25)). teremos:

$$J_+ = \frac{[(X_a + iY_a) \tau_b e^{i\omega_0 \tau_a} - (X_b + iY_b) \tau_a e^{i\omega_0 \tau_b}] e^{-i\omega_0 \tau}}{\tau_b - \tau_a} + \frac{[(X_a - iY_a) \tau_b e^{i\omega_0 \tau_b} - (X_b + iY_b) \tau_a e^{i\omega_0 \tau_a}] \tau e^{-i\omega_0 \tau}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.32a)$$

$$J_- = \frac{[(X_a - iY_a)\tau_b e^{-i\omega_0\tau_a} - (X_b - iY_b)\tau_a e^{-i\omega_0\tau_b}] e^{i\omega_0\tau}}{\tau_b - \tau_a} + \frac{[(X_b - iY_b) e^{i\omega_0\tau_b} - (X_a - iY_a) e^{-i\omega_0\tau_a}] \tau e^{i\omega_0\tau}}{\tau_b - \tau_a} \quad (3.3.32b)$$

uma vez que

$$J_+ = X_c - iY_c \quad (a) \quad e \quad J_- = X_c - iY_c \quad (b) \quad (3.3.34a,b)$$

$$X_c = \frac{1}{2} [J_+ + J_-] \quad e \quad Y_c = \frac{1}{2i} [J_+ - J_-] \quad (3.3.35a,b)$$

Substituindo (3.3.32a e b) em (3.3.35a e b), encontraremos:

$$X_c = \frac{1}{\tau_b - \tau_a} [X_a(\tau_b - \tau) \cos \omega_0(\tau - \tau_a) + X_b(\tau - \tau_a) \cos \omega_0(\tau - \tau_b) + Y_a(\tau_b - \tau) \operatorname{sen} \omega_0(\tau - \tau_a) + Y_b(\tau - \tau_a) \operatorname{sen} \omega_0(\tau - \tau_b)] \quad (3.3.36)$$

e para  $y_c$ :

$$Y_c = \frac{1}{\tau_b - \tau_a} [Y_a(\tau_b - \tau) \cos \omega_0(\tau - \tau_a) + Y_b(\tau - \tau_a) \cos \omega_0(\tau - \tau_b) + X_a(\tau - \tau_b) \operatorname{sen} \omega_0(\tau - \tau_a) + X_b(\tau_b - \tau) \operatorname{sen} \omega_0(\tau - \tau_b)] \quad (3.3.37)$$

a partir de (3.3.36 e 37) podemos calcular:

$$\dot{X}_c(\tau_b), \dot{X}_c(\tau_a), \dot{Y}_c(\tau_b) \quad e \quad \dot{Y}_c(\tau_a) \quad \text{onde teremos:}$$

$$\dot{X}_c(\tau_b) = \frac{1}{\sigma} [X_b - X_a \cos(\omega_0 \sigma) + Y_b \omega_0 \sigma - Y_a \sin(\omega_0 \sigma)] \quad (3.3.38)$$

$$\dot{X}_c(\tau_a) = \frac{1}{\sigma} [X_b \cos(\omega_0 \sigma) - X_a + Y_a \omega_0 \sigma - Y_b \sin(\omega_0 \sigma)] \quad (3.3.39)$$

$$\dot{Y}_c(\tau_b) = \frac{1}{\sigma} [Y_b - Y_a \cos(\omega_0 \sigma) + X_a \sin \omega_0 \sigma - X_b (\omega_0 \sigma)] \quad (3.3.40)$$

$$\dot{Y}_c(\tau_a) = \frac{1}{\sigma} [X_b \cos(\omega_0 \sigma) - Y_a + X_b \sin \omega_0 \sigma - X_a (\omega_0 \sigma)] \quad (3.3.41)$$

(as passagens estão feitas no Apendice B), onde  $\sigma = \tau_b - \tau_a$ .

Calculemos, agora, as expressões  $X_c(\tau_b)\dot{X}_c(\tau_b) - X_c(\tau_a)\dot{X}_c(\tau_a)$  e  $Y_c(\tau_b)\dot{Y}_c(\tau_b) - Y_c(\tau_a)\dot{Y}_c(\tau_a)$ :

$$\begin{aligned} X_c(\tau_b)\dot{X}_c(\tau_b) - X_c(\tau_a)\dot{X}_c(\tau_a) &= \\ &= \frac{1}{\tau} [X_b^2 + X_a^2 - 2X_b X_a \cos(\omega_0 \sigma) + (X_b Y_b - X_a Y_a) \omega_0 \sigma + (X_a Y_b - X_b Y_a) \cdot \\ &\cdot \sin(\omega_0 \sigma)] \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

$$\begin{aligned} Y_c(\tau_b)\dot{Y}_c(\tau_b) - Y_c(\tau_a)\dot{Y}_c(\tau_a) &= \\ &= \frac{1}{\sigma} [Y_b^2 + Y_a^2 - 2Y_b Y_a \cos(\omega_0 \sigma) + (Y_b X_a - Y_a X_b) \sin(\omega_0 \sigma) - \\ &(Y_b X_b - Y_a X_a) (\omega_0 \sigma)] \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Substituindo as equações (3.3.42 e 43) na equação (3.3.17) a ação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_c = \frac{m}{2\sigma} [X_b^2 + X_a^2 - 2X_b X_a \cos(\omega_0 \sigma) + Y_b^2 + Y_a^2 - 2Y_b Y_a \cos(\omega_0 \sigma) + \\ + 2(Y_b X_a - Y_a X_b) \sin(\omega_0 \sigma) + \omega_0 \sigma (X_b Y_b - X_a Y_a) - (X_b Y_b - X_a Y_a) \omega_0 \sigma] \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

ou

$$S_c = \frac{m}{2\sigma} [X_b^2 + X_a^2 + Y_b^2 + Y_a^2 - 2(X_b X_a + Y_b Y_a) \cos \omega_0 \sigma + 2(Y_b X_a - Y_a X_b) \sin \omega_0 \sigma] \quad (3.3.45)$$

Esta é a forma da ação no referencial acelerado. O operador deslocamento temporal  $K_0(b/a)$ , equação (3.3.14), assume a forma:

$$K_0(b/a) = \left[ \frac{+m \cos \omega_0 \sigma}{2\hbar\pi i \sigma} \right] e^{\frac{i}{\hbar} S_c} \quad (3.3.46)$$

Este operador não satisfaz a equação de Schrödinger, pré-requisito fundamental para a formulação de Feynman. A condição imprescindível para  $K_0(b/a)$ , coerente com a formulação acima mencionada, e satisfaça a equação de Schrödinger, é que  $\omega_0$  seja pequeno.

Impondo na equação (3.3.45) as condições

$$\cos \omega_0 \sigma \sim 1 \quad \text{e} \quad \sin \omega_0 \sigma \sim \omega_0 \sigma$$

ou seja  $\omega_0$  pequeno, a ação assume a forma:

$$S_c = \frac{m}{2} \omega_c \left[ \frac{1}{2} \cotg \frac{\omega_0 \sigma}{2} (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + 2(Y_b X_a - Y_a X_b) \right] \quad (3.3.47)$$

A ação  $S_c$  (3.3.47) é idêntica a de uma partícula carregada com carga  $e$  e massa  $m$ , sob a ação de um campo  $B_0$  pequeno, sendo  $B_0 = 2 \frac{m}{e} c \omega$ , onde  $c$  é a velocidade da luz.

O operador  $K_0(b/a)$  fica:

$$K_0(b/a) = \left[ \frac{m \omega_c}{2\hbar\pi i \sigma \sin \omega_0 \sigma} \right] e^{\frac{i}{\hbar} S_c} \quad (3.3.48)$$

onde  $S_c$  é definida na equação (3.3.47).



## DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Nos dois últimos capítulos, esclarecemos alguns aspectos do procedimento de quantização de sistemas de uma partícula por integrais de trajetórias em referenciais não inerciais com aceleração arbitrária. Esta versão consiste de três etapas distintas:

Em primeiro lugar, efetua-se as transformações de sistemas de referências inerciais para referenciais não inerciais (equações (2.1.4) e (3.1.1)). Neste caso temos duas transformações de interesse: translação, cuja aceleração é linear e rotação, onde o referencial gira em torno de um eixo fixo com relação a um referencial inercial. Nesta etapa discutimos as modificações na lagrangeana, nas equações de movimento e na Hamiltoniana. Estas modificações, como já se sabe podem ser associadas a campos externos.

Em segundo lugar, na associação entre os termos adicionais que surgem nas equações de movimento devido a aceleração do sistema de referência com possíveis campos externos (equações (2.1.9 a, b, c) e (3.1.10)). Fazendo uma analogia com campos verdadeiros, chegamos a resultados bastante interessantes. No caso da translação, os resultados já eram conhecidos (por exemplo, para aceleração constante, a partícula se comporta como se estivesse caindo num campo gravitacional uniforme temporal e espacialmente); para aceleração dependente do tempo, nosso resultado é equivalente ao de G.B. Schmid (este o fez na visão de

Schrödinger). Para referenciais girantes, vimos que os termos adicionais tanto na lagrangeana quanto nas equações de movimento, podem ser associados a um campo eletromagnético com características especiais cuja forma é dada nas equações (3.1.12) e (3.1.13). Verificamos, ainda, que tais campos satisfazem as equações de Maxwell.

Em terceiro lugar, na obtenção da amplitude de transição (operador deslocamento temporal) para um sistema de referência acelerado em relação a um referencial inercial, estabelecendo a lei de transformação entre as duas amplitudes.

Vale a pena salientar que as modificações na amplitude, devido à aceleração do sistema de referência quer seja por aceleração linear quer seja devido a rotação deste, não afeta a probabilidade quântica da partícula, mesmo nos referenciais girantes quando as mudanças são sentidas tanto na ação funcional quanto no fator pré-exponencial (eq. 3.2.49).

É importante salientar que toda essa analogia é feita no limite de  $\omega_0$  pequeno porque, caso contrário, o operador deslocamento temporal não satisfaz a equação de Schrödinger. No entanto, da equação (3.2.45), vimos que, conhecido o operador  $K_0(b/a)$  no referencial que gira com velocidade angular  $\omega_0$ , podemos conhecê-lo para um certo referencial desde que se conheça a lei de transformação das coordenadas e do tempo (equações 3.2.11 e 3.2.12), além das condições (3.2.31), (3.2.32) e (3.2.33a).

Neste contexto, vemos que um sistema quântico simples, pode ser perfeitamente estudado em referenciais acelerados com a mesma simplicidade do caso clássico. Além disso, agora temos mais esta opção de transformação do operador deslocamento

temporal na busca de uma solução exata, ou seja, quando o operador deslocamento temporal  $K'(b/a)$  não tiver solução exata num referencial inercial, podemos tentar encontrar uma solução exata  $K(b/a)$ , num referencial não inercial, se conhecermos sua lei de transformação  $K'(b/a)$ .  $K(b/a)$  teremos, então, encontrado uma solução para  $K'(b/a)$ .

## APÊNDICE A

Neste apêndice, faremos a verificação das equações

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2(t) (X^2 + Y^2) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega(t) (X\dot{Y} - Y\dot{X}).$$

Do cálculo vetorial, sabemos que

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \sum_i \epsilon_{ijk} \omega_j X_k \quad i = (1, 2, 3)$$

O produto do termo  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$  por ele mesmo é:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) &= \sum_i \epsilon_{ijk} \omega_j X_k \sum_i \epsilon_{ilm} \omega_l X_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \omega_j X_k \omega_l X_m \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Usando a relação  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl})$ , teremos:

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \delta_{jl} \delta_{kn} \omega_j X_k \omega_l X_n - \delta_{jn} \delta_{kl} \omega_j X_k \omega_l X_n \quad (\text{A.2})$$

$$= \omega^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) - (\vec{\omega}_0 \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_0 \vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

Como escolhemos o vetor  $\vec{\omega}$  paralelo a Z,  $\vec{\omega}_0 \vec{r} = \omega Z$  isto implica em

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) - \omega^2 Z^2$$

Colocando os termos semelhantes, teremos:

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2 (X^2 + Y^2) \quad (\text{A.4})$$

Vamos agora calcular  $\vec{v}_0(\vec{\omega} \wedge \vec{r})$  do cálculo vetorial:

$$\vec{v}_0(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = v_2 \omega_3 X_1 - v_1 \omega_3 X_2 = \omega (X\dot{Y} - Y\dot{X}) \quad (\text{A.6})$$

onde  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$  e  $v_i = \dot{X}_i$

$$\dot{X}_c(\tau_a) = \frac{1}{\sigma} [ X_b \cos(\omega_0 \sigma) - X_a + Y_a \omega_0 \sigma - Y_b \text{sen}(\omega_0 \sigma) ] \quad (\text{B.5})$$

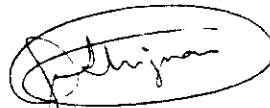
e

$$\dot{Y}_c(\tau_a) = \frac{1}{\sigma} [ Y_b \cos(\omega_0 \sigma) - Y_a + Y_b \text{sen} \omega_0 \sigma - X_a (\omega_0 \sigma) ] \quad (\text{B.6})$$

"MECÂNICA QUÂNTICA EM REFERENCIAIS ACELERADOS  
NA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN"

JOSÉ SOARES BARBOSA

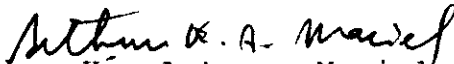
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Juan Alberto Mignaco - Presidente



~~Bruto Max PIMENTEL Escobar~~



Arthur Kôs Antunes Maciel

Rio de Janeiro, 13 de novembro de 1987