

FERNANDO DEEKE SASSE

SIMETRIAS, PROBLEMAS DE CAUSALIDADE E  
CAMPOS DE NEUTRINOS EM UNIVERSOS ANTÍPODAS

Tese de MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, Setembro de 1986

À memória de  
Udo Deeke

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao Prof. Ivano Damião Soares, pela seriedade dedicada à minha orientação, e ao Prof. Jayme Tiomno pelas críticas e esclarecimentos, indispensáveis a este trabalho.

Sou grato, também

- Aos meus amigos e companheiros, Mestrandos, Doutorandos e Pesquisadores do Departamento de Relatividade e Partículas do CBPF, pelo ambiente de camaradagem e de bom nível profissional que me proporcionaram até aqui.
- Aos amigos, Mestrandos e Doutorandos dos outros Departamentos do CBPF, pelo apoio.
- À Myriam Simões Coutinho e ao Aroldo Ferreira Vieira que, na Secretaria de Ensino do CBPF, sempre mostraram total disponibilidade e boa vontade para ajudar-me na solução de todos os tipos de problemas.
- Aos meus amigos progressistas do Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina, pelo continuado apoio que tenho recebido.
- À Elisa, Martha Helena, pais, sogros e amigos distantes (mas presentes), pelo incentivo.
- À Helena de Souza Ferreira, pela eficiência na datilografia deste trabalho e boa vontade na decifração do manuscrito.
- Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

Caracterizamos os grupos de Lie  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  e, por de formações contínuas das álgebras dos subgrupos  $S^3$  e  $H^3$ , introduzimos métricas de espaços-tempos Lorentzianos, invariantes à esquerda  $g_E$  e invariantes à direita  $g_D$ . A topologia de secções destes espaços-tempos é examinada e mostramos sua relação com problemas globais de causalidade. No exame das isometrias de  $g_E$  e  $g_D$ , mostramos que na classe de métricas associadas à topologia  $H^3 \times R$ , existe um caso particular que admite um grupo  $G_7$  de isometrias. Mostramos que as métricas  $g_E$  e  $g_D$  caracterizam universos nos quais as vorticidades do fluido cosmológico (quando presente), em relação à bússola inercial, são opostas. No particular sistema de coordenadas que utilizamos, estas métricas diferem somente por uma transformação de inversão de coordenadas. Consideramos em seguida neutrinos em interação com a geometria destes espaços-tempos. Mostramos, então, que a transformação física que consiste em inverter a rotação do universo e inverter uma determinada componente de momentum dos neutrinos, leva um universo com métrica  $g_E$  ( $g_D$ ) contendo neutrinos, com uma dada helicidade, a outro com métrica  $g_D$  ( $g_E$ ) contendo neutrinos, agora com helicidade oposta à original. Assim, neutrinos podem ser utilizados para distinguir fisicamente estes dois universos, supondo que num dado universo neutrinos tenham sempre um tipo de helicidade.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - CONSTRUÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES DE HOMOGENEIDADE $S^3$ E $H^3$ ..	6
1.1 - Quatêrnions .....	6
1.2 - Campos de Isometrias Sobre os Grupos de Lie $S^3$ e $H^3$ .....	10
1.3 - Novas Cartas Sobre $S^3$ e $H^3$ . Representação Matricial de Quatêrnions .....	1B
<u>CAPÍTULO 2</u> - GEOMETRIAS DE ESPAÇO-TEMPO COM ESTRUTURA TOPOLÓGICA $S^3 \times R$ e $H^3 \times R$ .....	27
2.1 - Grupos de Lie $S^3 \times R$ , $H^3 \times R$ e o Tensor Métrico .....	27
2.2 - Espaços-Tempos Hiperbólicos $H^3 \times R$ . Uma Geometria que Ad- mite um Grupo $G_7$ de Movimentos .....	34
2.3 - Espaços-Tempos Hiperbólicos. Topologia e Problemas de Causalidade .....	35
2.3.1 - O Caso $\alpha^2 > \beta^2$ .....	3B
2.3.2 - O Caso $\alpha^2 < \beta^2$ .....	40
2.3.3 - O Caso $\alpha^2 = \beta^2$ .....	41
2.4 - Espaços-Tempos Esféricos, Topologia e Problemas de Causa- lidade .....	42
2.5 - Sistema de Coordenadas Cilíndrico .....	46
2.6 - Fontes de Curvatura .....	48
<u>CAPÍTULO 3</u> - TRANSFORMAÇÕES DE PARIDADE SOBRE OS ESPAÇOS-TEMPOS ESFÉ- RICOS E HIPERBÓLICOS. CAMPO DE NEUTRINOS .....	51
3.1 - Espinores e Matrizes de Dirac no Espaço-Tempo Riemanniano. ....	52

3.2 - Derivada Covariante do Espinor .....	61
3.3 - Coeficientes de Fock-Ivanenko. Equação de Dirac .....	64
3.4 - Equação de Dirac para o Neutrino nos Espaços-Tempos Es- férico e Hiperbólico .....	68
CONCLUSÃO .....	81
<u>APÊNDICE A</u> - UM MODELO COSMOLÓGICO COM GEOMETRIA HIPERBÓLICA INOMO - GÊNEA .....	B5
A.1 - O Caso $\Lambda < 0$ .....	93
A.2 - O Caso $\Lambda > 0$ .....	95
A.3 - O Caso $\Lambda = 0$ .....	96
<u>APÊNDICE B</u> - ROTAÇÃO NOS UNIVERSOS ESFÉRICOS E HIPERBÓLICOS .....	98
BIBLIOGRAFIA .....	101

LISTA DE FIGURAS

<u>FIGS.</u>	<u>Pág.</u>
2.3.1 - Hiperbolóide de uma folha correspondente à secção $\eta = \text{const.}$ de $H^3$ .....	37
2.3.2 - Hiperbolóide de duas folhas correspondente à secção $\chi = \text{const.}$ de $H^3$ .....	38
2.4.1 - Octante da superfície correspondente à secção $\eta = \text{const.}$ de $S^3$ .....	44

LISTA DE TABELAS

<u>TABS.</u>	<u>Pág.</u>
2.3.1 - Carãter do campo vetorial $\partial/\partial\eta$ em termos de $r$ , com $\alpha^2 > \beta^2$ ...	39
2.3.2 - Carãter do campo vetorial $\partial/\partial X$ em termos de $r$ , com $\alpha^2 < \beta^2$ ...	40
2.4.1 - Carãter do campo vetorial $\partial/\partial X$ em termos de $r$ .....	45
2.4.2 - Carãter do campo vetorial $\partial/\partial\eta$ em termos de $r$ .....	45

## INTRODUÇÃO

Em 1949 Gödel <sup>(1)</sup> propôs uma solução exata muito simples para as equações do campo gravitacional de Einstein com constante cosmológica, tendo fluido perfeito incoerente (poeira) como fonte de curvatura. Uma das características peculiares deste modelo cosmológico está ligada ao fato de que nele o conteúdo material ~~rotaciona~~ <sup>rota</sup> em relação à bússola de inércia definida, por exemplo, através de giroscópios ou pêndulos de Foucault. Gödel mostrou com isso que a teoria da gravitação de Einstein é mais abrangente que o princípio de Mach, naquela versão segundo a qual os referenciais inerciais no universo são determinados como sendo aqueles que não giram, em média, relativamente a todas as outras massas do universo.

De fato, a primeira solução cosmológica exata das equações de Einstein, em que o conteúdo material (poeira inhomogeneamente distribuída) rotaciona em relação à bússola de inércia, foi proposta por Lanczos <sup>(2)</sup> em 1924. Tal solução, entretanto, por ter sido pouco conhecida, pouco contribuiu ao desenvolvimento do estudo de soluções cosmológicas que descrevem espaços-tempos com rotação <sup>(3)</sup>.

Outra característica interessante do modelo de Gödel, até então praticamente não considerada na Cosmologia, é aquela relativa à existência de curvas tipo tempo fechadas — o que implica em violação de causalidade por parte de partículas que descrevam tais trajetórias. Conforme demonstraram várias outras so-

luções cosmológicas com rotação propostas posteriormente ao modelo de Gödel, em geral as propriedades de rotação e causalidade parecem estar estreitamente ligadas <sup>(5)</sup>.

Evitando propositadamente deter-nos em questões históricas e fundamentais sobre este assunto, vamos introduzir e examinar, pela parte da lógica, alguns aspectos relativos a certas classes de modelos cosmológicos espaço-temporalmente homogêneos, com rotação, que contêm o modelo de Gödel como caso particular. Construiremos as geometrias destes modelos não a partir de uma determinada forma geral de métricas, impondo certas condições sobre elas, como usualmente, mas sim a partir de estruturas topológicas globais. Mais precisamente, definiremos os grupos de Lie  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  — os quais serão denominados esféricos e hiperbólicos, respectivamente —, sendo caracterizados pelos campos vetoriais, geradores de transformações à esquerda e à direita sobre estes grupos. Uma vez caracterizados estes grupos de Lie, através de deformações contínuas dos subgrupos  $S^3$  e  $H^3$ , construiremos famílias de métricas Lorentzianas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$ , denominadas esféricas ou hiperbólicas, conforme a estrutura global associada.

A partir deste ponto podemos explicitar duas metas fundamentais a serem atingidas ao longo deste trabalho. A primeira consistirá no estudo da topologia destes espaços-tempos e suas consequências em questões relacionadas com simetrias e problemas globais de causalidade. A segunda está relacionada ao fato de que sobre um dado grupo  $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ , para uma dada carta sobre eles, podemos construir métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$ , as quais, a princípio, têm relação desconhecida entre si. Mostraremos que é possível encontrar uma carta sobre  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$

na qual  $g_E$  e  $g_D$  diferem somente por uma transformação de inversão e que neutrinos podem ser utilizados para determinar uma distinção física entre estes dois universos.

No Capítulo 1, apresentaremos a construção matemática de hipersuperfícies 3-dimensionais, denominadas  $S^3$  e  $H^3$ , a partir de sua imersão num espaço Euclidiano de quatro dimensões  $E^4$ . Realizaremos tal construção utilizando o formalismo de quaternions, mencionado por Gödel em seu artigo original <sup>(1)</sup>, e aplicado explicitamente na Cosmologia, pela primeira vez, por Ozsváth e Schücking <sup>(5)</sup> em 1969. Mostraremos, então, que as variedades  $S^3$  e  $H^3$  (respectivamente a 3-esfera e o 3-hiperbolóide) constituem, cada uma, um grupo de Lie, podendo portanto serem representadas pelas álgebras de Lie univocamente associadas. Em seguida, determinaremos para  $S^3$  e  $H^3$  os campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita que, sob a operação de comutação, formam a álgebra de Lie característica dos respectivos grupos. Definiremos então, a partir de coordenadas Cartesianas de  $E^4$ , novas cartas sobre  $S^3$  e  $H^3$ . Nestas cartas determinaremos as bases de campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita, juntamente com suas bases de 1-formas duais. Teremos então implicitamente determinadas, nestas cartas, todas as métricas compatíveis com as variedades  $S^3$  e  $H^3$ , juntamente com os respectivos grupos de isometrias associados, que têm  $S^3$  ou  $H^3$  como órbita.

No Capítulo 2, introduziremos os grupos de Lie  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , ou seja, o produto topológico de uma 3-esfera e um 3-hiperbolóide, respectivamente, com uma reta. Em seguida, através das álgebras de Lie associadas, definiremos deformações contínuas destes grupos, dependentes de dois parâmetros constantes. A partir das bases de 1-formas invariantes à esquerda e à direita sobre

os grupos  $S^3$  e  $H^3$ , mais a 1-forma associada ao grupo  $R$ , definiremos famílias de métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$ , de tal modo que as secções de homogeneidade associadas a  $S^3$  ou  $H^3$  tenham caráter espaço-temporal. Tais métricas irão caracterizar geometrias, por construção espaço-temporalmente homogêneas, de classe esférica ou hiperbólica, conforme sua estrutura topológica seja esférica ( $S^3 \times R$ ) ou hiperbólica ( $H^3 \times R$ ). Em particular, mostraremos que, dentro da família de espaços-tempos hiperbólicos, existe um espaço-tempo que admite um grupo  $G_7$  de movimentos, sendo que a secção correspondente ao 3-hiperbolóide  $H^3$  é então não deformada e maximalmente simétrica. Mostraremos ainda que os espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, assim definidos, são isométricos aos espaços-tempos do tipo de Gödel com homogeneidade espaço-temporal, determinados por Rebouças e Tiomno<sup>(6)</sup>. Finalmente, faremos um comentário a respeito das possíveis fontes de curvatura para as geometrias consideradas.

No Capítulo 3, consideraremos o fato de que, no particular sistema de coordenadas introduzido no Capítulo 1 sobre  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , as métricas  $g_E$  e  $g_D$  diferem somente por uma inversão. Iremos, então, abordar o problema concernente a uma possível distinção física entre universos com métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$ , definidas sobre um dado grupo  $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ . Para este fim, faremos uma breve introdução ao formalismo da equação de Dirac no espaço curvo Riemanniano. Em seguida, utilizando este formalismo, consideraremos um campo de neutrinos sobre espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , mostrando como ele pode determinar uma distinção física entre universos com estes dois tipos de métrica.

No Apêndice A, trataremos de um modelo - hiperbólico segundo nossa designação - inomogêneo, que generaliza Soares <sup>(45)</sup>.

No Apêndice B determinaremos, com relação aos modelos esféricos e hiperbólicos, a vorticidade associada a um campo de velocidades que é comovente com o fluido perfeito, fonte de curvatura, quando este estiver presente.

Neste trabalho, muitos cálculos foram efetuados através do programa REDUCE 3.1, de computação algébrica.

## CAPÍTULO 1

### CONSTRUÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES DE HOMOGENEIDADE $S^3$ E $H^3$

Nosso objetivo aqui será descrever variedades de topologia  $S^3$  e  $H^3$  como grupos de Lie e determinar conjuntos de campos vetoriais, geradores de isometrias sobre estes grupos.

#### 1.1 - QUATÉRNIONS

Com a finalidade de caracterizar as variedades  $S^3$  e  $H^3$  e os geradores de movimentos próprios sobre elas, vamos definir um espaço Euclideano de quatro dimensões  $E^4$ , com coordenadas Cartesianas, denotadas por  $a^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Designemos por  $\{\vec{e}_\mu\}$  o conjunto de vetores unitários dirigidos ao longo de cada eixo Cartesiano. Este espaço vetorial pode ser convertido em uma determinada álgebra, se definirmos explicitamente uma conveniente lei de multiplicação entre cada um dos elementos do conjunto  $\{\vec{e}_\mu\}$ . Os vetores unitários  $\vec{e}_\mu$  serão agora denominados quatérnions de base.

Quatérnions de base esféricos e hiperbólicos são definidos através das leis de multiplicação dadas a seguir:

a) Quatérnions esféricos

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 \vec{e}_\mu &= \vec{e}_\mu \vec{e}_0 = \vec{e}_\mu, & (\mu = 0, 1, 2, 3) \\ \vec{e}_i \vec{e}_i &= -\vec{e}_0, & (i = 1, 2, 3) \\ \vec{e}_i \vec{e}_k &= \varepsilon_{ikl} \vec{e}_l, & (i \neq k) \end{aligned} \quad (1.1.1a)$$

onde  $\epsilon_{ikl}$  é totalmente antissimétrico, sendo  $\epsilon_{123} = 1$ .

b) Quatérnions hiperbólicos

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_0 \vec{e}_\mu &= \vec{e}_\mu \vec{e}_0 = \vec{e}_\mu & , \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \\
 \vec{e}_0 \vec{e}_0 &= -\vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_0 & , \\
 \vec{e}_2 \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \vec{e}_3 = \vec{e}_0 & , \\
 \vec{e}_3 \vec{e}_1 &= -\vec{e}_1 \vec{e}_3 = \vec{e}_2 & , \\
 \vec{e}_3 \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & , \\
 \vec{e}_1 \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \vec{e}_1 = \vec{e}_3 & .
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1b}$$

Os vetores  $\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$ ,  $a^\mu \in \mathbb{R}$ , são denominados simplesmente quatérnions. Eles formam um espaço vetorial  $V$  de quatro dimensões, com as operações de soma,  $V \times V \rightarrow V$ , e multiplicação por escalar,  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , para  $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definidas por

$$\vec{a} + \vec{b} = (a^\mu + b^\mu) \vec{e}_\mu \quad , \quad (a, b \in V) \tag{1.1.2a}$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a^\mu) \vec{e}_\mu \quad , \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{1.1.2b}$$

já que todas as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas para estas operações.

Também valem para quatérnions  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  as propriedades associativa e distributiva em relação às operações de álgebra definidas por (1.1.1):

$$\begin{aligned}
 (\vec{a}\vec{b})\vec{c} &= \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) & , \\
 (\vec{a}+\vec{b})\vec{c} &= \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c} & , \\
 \vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) &= \vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{b} & .
 \end{aligned}
 \tag{1.1.3}$$

O conjugado de um quatérnion  $\vec{a} = a^0 \vec{e}_0 + a^i \vec{e}_i$  é definido

por

$$\vec{a}^* = a^0 \vec{e}_0 - a^i \vec{e}_i \quad . \quad (1.1.4)$$

A norma  $N(\vec{a})$  de um quatérnion  $\vec{a}$  é então definida como

$$N(\vec{a}) = \vec{a}\vec{a}^* = \vec{a}^*\vec{a} \quad . \quad (1.1.5)$$

De acordo com as leis de álgebra (1.1.1), a norma de um quatérnion é dada pela expressão

$$\begin{aligned} N(\vec{a}) &= [(a^0)^2 + (a^1)^2 - (\epsilon a^2)^2 - (\epsilon a^3)^2] \vec{e}_0 = \\ &= (a^0)^2 + (a^1)^2 - (\epsilon a^2)^2 - (\epsilon a^3)^2 \quad , \quad (1.1.6) \end{aligned}$$

onde tomamos  $\epsilon = i$  para a norma de quatérnions esféricos e  $\epsilon = 1$  para quatérnions hiperbólicos. A última igualdade em (1.1.6) decorre do fato de que os múltiplos de quatérnions  $\vec{e}_0$  são elementos de um campo isomórfico ao campo dos números reais.

A expressão (1.1.6) mostra que o conjunto de todos os quatérnions esféricos ou hiperbólicos com uma mesma norma dada, pode definir hipersuperfícies tridimensionais, imersas em  $E^4$ . Tomemos, por conveniência, quatérnions de norma unitária definidos em  $E^4$ .

A hipersuperfície tridimensional definida por quatérnions esféricos de norma unitária é definida, em termos de coordenadas Cartesianas de  $E^4$ , de acordo com (1.1.6), pela relação

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1 \quad . \quad (1.1.7)$$

Esta equação representa uma 3-esfera imersa em  $E^4$ , que constitui

uma generalização natural da expressão da 2-esfera imersa em  $E^3$ .

Quatérnions hiperbólicos unitários de  $E^4$  definem, segundo (1.1.6), a hipersuperfície dada por

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = 1 \quad . \quad (1.1.8)$$

Esta equação define um 3-hiperbolóide imerso em  $E^4$ , sendo que suas secções bidimensionais são hiperbolóides de revolução, de uma folha e duas folhas.

Daqui em diante vamos designar a 3-esfera e a 3-hiperbolóide, definidos em coordenadas Cartesianas de  $E^4$  por (1.1.7) e (1.1.8) pelos símbolos  $S^3$  e  $H^3$ , respectivamente.

O grupo de movimentos próprios sobre  $S^3$  e  $H^3$  pode ser expresso através da associação multiplicativa entre quatérnions. Sejam  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  quatérnions sobre  $S^3$  ou  $H^3$ , ou seja,  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  são tais que

$$\vec{V}\vec{V}^* = 1 \quad , \quad \vec{W}\vec{W}^* = 1 \quad (1.1.9)$$

Um movimento próprio arbitrário de translação sobre  $S^3$  ou  $H^3$  é definido por

$$\vec{a} \rightarrow \vec{a}' = \vec{V}\vec{a}\vec{W} \quad . \quad (1.1.10)$$

Da definição de norma (1.1.5), segue-se que para dois quatérnions arbitrários vale a relação

$$(\vec{c}\vec{b})^* = \vec{b}^*\vec{c}^* \quad , \quad (1.1.11)$$

de modo que

$$\vec{a}'\vec{a}'^* = (\vec{V}\vec{a}\vec{W})(\vec{V}\vec{a}\vec{W})^* = 1 \quad , \quad (1.1.12)$$

ou seja, a transformação (1.10) leva um ponto  $\vec{a}$  sobre a variedade  $S^3$  ou  $H^3$  até outro ponto  $\vec{a}'$  também sobre  $S^3$  ou  $H^3$ .

As variedades  $S^3$  e  $H^3$  formam grupos de Lie atuando sobre si mesmos sob as operações de translação à esquerda e à direita,

$$\vec{a}' = \vec{V}\vec{a} \quad ; \quad \vec{a}'' = \vec{a}\vec{W} \quad , \quad (1.1.13)$$

pois as propriedades de grupo são satisfeitas para estas operações:

- (i) Se  $\vec{a}\vec{a}^* = 1$ , então  $\vec{a}'\vec{a}'^* = 1$ ,  $\vec{a}''\vec{a}''^* = 1$ .
- (ii) Existe uma identidade para as transformações de translação:  $I = \vec{e}_0$ .
- (iii) Existe um elemento inverso para as transformações de translação:

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{V}\vec{a} \quad , \quad \vec{a} = \vec{V}^{-1}\vec{a}' \quad , \quad \vec{V}^{-1} = \vec{V}^* \quad , \\ \vec{a}'' &= \vec{a}\vec{W} \quad , \quad \vec{a} = \vec{a}''\vec{W}^{-1} \quad , \quad \vec{W}^{-1} = \vec{W}^* \quad , \end{aligned}$$

e, as aplicações  $\mu_1: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$  ( $H^3 \times H^3 \rightarrow H^3$ ), definidas por (1.1.13), e  $\mu_2: S^3 \rightarrow S^3$  ( $H^3 \rightarrow H^3$ ) definida por  $\mu_2(a) = a^{-1} = a^*$ , são reais e analíticas<sup>(15)</sup>. A propriedade associativa de grupo também é obedecida (cf. eqs. (1.1.3)).

## 1.2 - CAMPOS DE ISOMETRIAS SOBRE OS GRUPOS DE LIE $S^3$ E $H^3$

Devemos agora determinar os geradores dos movimentos de translação à esquerda e à direita sobre  $S^3$  e  $H^3$ . Para isso devemos propagar o espaço tangente a  $S^3$  ou  $H^3$  da identidade até outro ponto arbitrário sobre a variedade, através de uma translação à esquerda e outra à direita. Como os quatérnions  $\vec{e}_i$  ( $i=1,2,3$ )

geram o espaço tangente a  $S^3$  ou  $H^3$  na identidade obtemos, para translações arbitrárias deste espaço tangente à esquerda e à direita, respectivamente

$$\vec{a}(\vec{e}_0 + \kappa \vec{e}_i) = \vec{a} + \kappa \vec{a} \vec{e}_i, \quad (1.2.1)$$

$$(\vec{e}_0 + \kappa \vec{e}_i) \vec{a} = \vec{a} + \kappa \vec{e}_i \vec{a}, \quad (1.2.2)$$

onde  $\kappa$  é infinitesimal. Os quatérnions

$$\vec{\omega}_i = \vec{a} \vec{e}_i = \omega_i^\mu \vec{e}_\mu \quad (i=1,2,3; \mu=0,1,2,3) \quad (1.2.3)$$

e

$$\vec{\rho}_i = \vec{e}_i \vec{a} = \rho_i^\mu \vec{e}_\mu, \quad (1.2.4)$$

são vetores tangentes a  $S^3$  ou  $H^3$  no ponto  $\vec{a}$ , constituindo, respectivamente, as denominadas bases vetoriais invariantes à direita e à esquerda sobre estes grupos de Lie.

Determinemos a forma explícita destes campos sobre  $S^3$  e  $H^3$ .

#### a) Variedade $S^3$

Como

$$\vec{\omega}_i = a^\mu \vec{e}_\mu \vec{e}_i = \omega_i^\mu \vec{e}_\mu, \quad (1.2.5)$$

$$\vec{\rho}_i = a^\mu \vec{e}_i \vec{e}_\mu = \rho_i^\mu \vec{e}_\mu, \quad (1.2.6)$$

obtemos, utilizando as leis de associação de quatérnions esféricos dadas por (1.1.1a), que as componentes da base do campo de vetores invariantes à esquerda são dadas por

$$\begin{aligned}
 \omega_1^\mu &= (-a^1, a^0, a^3, -a^2) \quad , \\
 \omega_2^\mu &= (-a^2, -a^3, a^0, a^1) \quad , \\
 \omega_3^\mu &= (-a^3, a^2, -a^1, a^0) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{1.2.7}$$

Para a base de campos invariantes à direita temos

$$\begin{aligned}
 \rho_1^\mu &= (-a^1, a^0, -a^3, a^2) \quad , \\
 \rho_2^\mu &= (-a^2, a^3, a^0, a^1) \quad , \\
 \rho_3^\mu &= (-a^3, -a^2, a^1, a^0) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{1.2.8}$$

Como  $S^3$  é grupo de Lie simplesmente conexo, ele pode ser univocamente caracterizado pela álgebra de Lie formada pelos geradores do grupo de translações, sob a operação de comutação <sup>(7)</sup>:

$$[\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \vec{\omega}_k \quad , \quad [\rho_i, \rho_j] = -2\varepsilon_{ijk} \rho_k \quad . \tag{1.2.9}$$

Uma outra representação para esta álgebra de Lie pode ser feita através dos operadores lineares, definidos em termos das coordenadas cartesianas  $a^\mu$ :

$$\tilde{E}_i = \omega_i^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \quad , \quad \tilde{D}_i = \rho_i^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \quad , \tag{1.2.10}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_1 &= -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^3} \quad , \\
 \tilde{E}_2 &= -a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} \quad , \\
 \tilde{E}_3 &= -a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{1.2.11}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^3} , \\ \tilde{D}_2 &= -a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} , \quad (1.2.12) \\ \tilde{D}_3 &= -a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3} , \end{aligned}$$

de modo que

$$[E_i, E_j] = 2\varepsilon_{ijk} E_k \quad , \quad [D_i, D_j] = -2\varepsilon_{ijk} D_k \quad . \quad (1.2.13)$$

A álgebra de Lie dada por (1.2.9) ou (1.2.13), satisfeita pelos geradores de translações sobre  $S^3$ , caracteriza  $S^3$  como uma variedade tipo IX na classificação de Bianchi (8,9).

b) Variedade  $H^3$

Utilizando um procedimento análogo àquele utilizado em (a), e empregando agora as leis de multiplicação para quatérnions hiperbólicos dadas por (1.1.1b), obtemos as bases de campos vetoriais invariantes à esquerda  $\bar{E}_i$  e à direita  $\bar{D}_i$ , sobre  $H^3$ , dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^3} , \\ \bar{E}_2 &= a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} , \quad (1.2.14) \\ \bar{E}_3 &= a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{D}_1 &= -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3} , \\ \bar{D}_2 &= a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} , \\ \bar{D}_3 &= a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3} .\end{aligned}\tag{1.2.15}$$

O grupo de Lie  $H^3$  pode ser univocamente caracterizado através da álgebra de Lie destes campos vetoriais:

$$[\bar{E}_1, \bar{E}_2] = 2\bar{E}_3 , \quad [\bar{E}_3, \bar{E}_1] = 2\bar{E}_2 , \quad [\bar{E}_2, \bar{E}_3] = -2\bar{E}_1 ,\tag{1.2.16}$$

$$[\bar{D}_1, \bar{D}_2] = -2\bar{D}_3 , \quad [\bar{D}_3, \bar{D}_1] = -2\bar{D}_2 , \quad [\bar{D}_2, \bar{D}_3] = 2\bar{D}_1 .\tag{1.2.17}$$

Esta álgebra de Lie caracteriza  $H^3$  como uma variedade tipo VIII na classificação de Bianchi (8,9).

Outras relações importantes satisfeitas pelas bases de campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita sobre  $S^3$  e  $H^3$  são dadas por

$$[E_i, D_j] = 0 , \quad [\bar{E}_i, \bar{D}_j] = 0 .\tag{1.2.18}$$

Estas relações são fundamentais para que possamos determinar a forma de todas as métricas compatíveis com a estrutura topológica dos grupos  $S^3$  e  $H^3$ . Além disso, os respectivos campos de Killing, geradores dos grupos de isometrias que atuam simplesmente transitivamente (8,9) sobre  $S^3$  ou  $H^3$ , estarão determinados por construção.

Para mostrar como tais resultados são obtidos, conside

remos de início um caso geral. Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional, que é um grupo de Lie. Seja  $\{X_i | i=1, \dots, n\}$  um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes, geradores de um grupo de transformações que atua simplesmente transitivamente sobre  $M$ .

Examinaremos como, a partir de um tal conjunto de campos vetoriais, é possível determinar uma métrica  $g$  sobre  $M$ , admitindo estes campos vetoriais como campos de Killing. Para isso, definamos sobre  $M$  uma base de campos vetoriais  $\{Y_i\}$ , invariante <sup>(9,10)</sup> em relação à base formada pelos campos  $X_i$ . Os campos  $Y_i$  são então obtidos integrando-se as equações

$$L_{X_i} Y_j = [X_i, Y_j] = 0, \quad (1.2.19)$$

onde  $L$  denota a derivada de Lie <sup>(9,10,11)</sup>.

Seja  $\{\sigma^k | k=1, \dots, n\}$  uma base de 1-formas, dual à base de campos vetoriais  $\{Y_i\}$ , sendo definida a partir da relação de dualidade <sup>(9,10,11)</sup>

$$\langle \sigma^k, Y_i \rangle = \delta^k_i. \quad (1.2.20)$$

Seja  $g$  uma métrica sobre  $M$  que, na base  $\langle \sigma^k \rangle$ , expressa-se pela relação

$$g = g_{kl} \sigma^k \sigma^l, \quad (1.2.21)$$

onde as quantidades  $g_{kl}$  são funções escalares componentes de uma matriz simétrica  $n \times n$ . Determinaremos agora quais condições  $g_{kl}$  deve satisfazer, supondo, por hipótese, que  $g$  admita os campos  $X_i$

como vetores de Killing. Esta hipótese expressa-se pela relação

$$L_{X_i} g = L_{X_i} (g_{kl} \sigma^k \sigma^l) = 0 \quad . \quad (1.2.22)$$

Seja  $\{\partial/\partial x^i\}$  uma base coordenada sobre  $M$ . Decompondo os campos  $X_i$  e  $Y_i$  em termos de componentes  $e_{(i)}^k$  nesta base, obtemos

$$X_i = e_{(i)}^k \partial/\partial x^k \quad , \quad (1.2.23)$$

$$Y_i = \bar{e}_{(i)}^k \partial/\partial x^k \quad . \quad (1.2.24)$$

Sendo  $\{dx^k\}$  a base de 1-formas dual à base  $\{\partial/\partial x^k\}$ , sobre  $M$ , ou seja

$$\langle dx^k, \partial/\partial x^i \rangle = \delta_i^k \quad , \quad (1.2.25)$$

temos que as 1-formas  $\sigma^k$  nesta base são expressas por

$$\sigma^k = \bar{e}_{(k)}^i dx^i \quad , \quad (1.2.26)$$

onde as componentes  $\bar{e}_{(k)}^i$  são elementos de uma matriz  $n \times n$  inversa àquela formada por  $\bar{e}_{(k)}^i$ , isto é,

$$\bar{e}_{(k)}^i \bar{e}_{(l)}^j = \delta_{kl}^i \quad . \quad (1.2.27)$$

Desenvolvendo as equações (1.2.22) obtemos

$$L_{X_i} g = e_{(i)}^j g_{pq,j} \sigma^p \sigma^q + 2g_{pq} (L_{X_i} \sigma^p) \sigma^q = 0 \quad , \quad (1.2.28)$$

onde a vírgula denota derivada ordinária.

Em termos de componentes na base  $\{\partial/\partial x^i\}$ , esta equação toma a forma

$$(L_{X_i} g)_{kl} = L_{X_i} g(\partial/\partial x^k, \partial/\partial x^l) = 0 \quad , \quad (1.2.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (L_{X_i} g)_{kl} &= e_{(i)}^j g_{pq,j} \bar{e}^{(p)}_k \bar{e}^{(q)}_l + 2g_{pq} \bar{e}^{(q)}_l \\ &\times \langle L_{X_i} \sigma^p, \partial/\partial x^k \rangle = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

De (1.2.19) e (1.2.20) temos

$$L\langle \sigma^p, Y_1 \rangle = \langle L_{X_i} \sigma^p, Y_1 \rangle = e_{(1)}^k \langle L_{X_i} \sigma^p, \partial/\partial x^k \rangle = 0 \quad ,$$

ou

$$\langle L_{X_i} \sigma^p, \partial/\partial x^k \rangle = 0 \quad . \quad (1.2.31)$$

A equação (1.2.30) torna-se então

$$e_{(i)}^j g_{pq,j} \bar{e}^{(p)}_k \bar{e}^{(q)}_l = 0 \quad , \quad (1.2.32)$$

de modo que

$$g_{pq,j} = 0 \quad , \quad (1.2.33)$$

ou seja, a matriz de elementos  $g_{pq}$  é constante sobre M.

Podemos agora aplicar este resultado ao caso das variedades  $S^3$  e  $H^3$ . Consideremos, por exemplo,  $S^3$ . Sejam  $\{\omega^i\}$  e  $\{\rho^i\}$  bases de 1-formas duais às bases de campos vetoriais invariantes

à esquerda e à direita, respectivamente, sobre  $S^3$ . Isto pode ser expresso pelas relações de dualidade

$$\langle \omega^i, E_l \rangle = \delta^i_l, \quad \langle \rho^i, D_l \rangle = \delta^i_l \quad (i, l=1, 2, 3) . \quad (1.2.34)$$

As bases  $\langle \omega^i \rangle$  e  $\{\rho^i\}$  são denominadas bases de 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. A partir destas bases podemos definir sobre  $S^3$  as métricas

$$g_E = g_{kl} \omega^k \omega^l, \quad g_D = g_{kl} \rho^k \rho^l, \quad (1.2.35)$$

onde as quantidades  $g_{kl}$  são constantes sobre a variedade. As métricas  $g_E$  e  $g_D$  serão denominadas métricas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. De acordo com o que foi mostrado no parágrafo anterior, as métricas  $g_E$  devem admitir, por construção, os campos vectoriais  $D_i$  como vetores de Killing. Similarmente, as métricas  $g_D$  admitem os campos vectoriais  $E_i$  como vetores de Killing.

Para a variedade  $H^3$  uma análise similar é válida. Na próxima secção construiremos explicitamente as bases de campos vectoriais invariantes à esquerda e à direita, juntamente com as bases de 1-formas associadas, sobre  $S^3$  e  $H^3$ . Isto determinará, implicitamente, as métricas compatíveis com estes grupos, que admitem um grupo de isometrias simplesmente transitivo.

### 1.3 - NOVAS CARTAS SOBRE $S^3$ E $H^3$ . REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE QUATÉRNIONS

As quatro coordenadas Cartesianas  $a^\mu$  do espaço Euclídeo

ano  $E^4$  constituem, naturalmente, uma carta sobre os grupos de Lie  $S^3$  e  $H^3$ , com a condição de vínculo dada por  $N(a) = \vec{a}\vec{a}^* = 1$ , onde  $\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$  é um quatérnion esférico (para  $S^3$ ) ou hiperbólico (para  $H^3$ ). A vantagem desta carta é que as transformações finitas de grupo são dadas em forma simples, através da multiplicação de quatérnions. Entretanto, ela não é apropriada para outros fins, como para a expressão do tensor métrico, devido ao vínculo  $\vec{a}\vec{a}^* = 1$ . É portanto indispensável, do ponto de vista prático, a introdução de novas cartas sobre  $S^3$  e  $H^3$ , nas quais somente três coordenadas aparecem, sendo a relação  $aa^* = 1$  identicamente satisfeita.

Pontos sobre  $S^3$  e  $H^3$  em termos de coordenadas Cartesianas de  $E^4$ , são dados pela relação (1.1.6):

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 - (\epsilon a^2)^2 - (\epsilon a^3)^2 = 1, \quad (1.3.1)$$

onde, para  $\epsilon = i$  esta relação descreve o grupo  $S^3$  e, para  $\epsilon = 1$ , descreve  $H^3$ . A relação (1.3.1) é identicamente satisfeita, se introduzirmos sobre  $S^3$  e  $H^3$  os seguintes sistemas de coordenadas, definidos em termos das coordenadas Cartesianas de  $E^4$ ,  $a^\mu$ :

$$\begin{aligned} a^0 &= \cosh \frac{\epsilon r}{2} \cos \chi \\ a^1 &= \cosh \frac{\epsilon r}{2} \sin \chi \\ a^2 &= \frac{1}{\epsilon} \sinh \frac{\epsilon r}{2} \cos \eta \\ a^3 &= \frac{1}{\epsilon} \sinh \frac{\epsilon r}{2} \sin \eta, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

onde para  $\epsilon = i$  temos uma carta definida para  $S^3$  e, para  $\epsilon = 1$ , outra para  $H^3$ .

A tarefa de expressar os campos vetoriais  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $\bar{E}_i$  e  $\bar{D}_i$  nas coordenadas  $(\chi, \eta, r)$ , através da substituição direta de (1.3.2) em (1.2.11), (1.2.12), (1.2.14) e (1.2.15), é penosa e pouco prática do ponto de vista metodológico da investigação. Um caminho mais simples pode ser tomado, adotando-se uma representação matricial para a álgebra de quatérnions esféricos e hiperbólicos, que será mostrada explicitamente a seguir. Com este método determinaremos diretamente bases de 1-formas invariantes à esquerda e à direita, sobre  $S^3$  e  $H^3$ , na carta definida por (1.3.2).

Na representação matricial que adotaremos, cada quatérnion esférico ou hiperbólico está associado a uma matriz  $2 \times 2$  não singular. A operação de grupo, antes expressa pela multiplicação de quatérnions, é agora dada pela operação de multiplicação de matrizes, sendo que as matrizes de base são definidas de modo a obedecerem às mesmas operações de álgebra, definidas para quatérnions de base esféricos e hiperbólicos. A norma de um quatérnion é representada pelo determinante da matriz correspondente. Tomaremos, particularmente, a seguinte representação para quatérnions de base:

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{e}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \Gamma(\vec{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Para  $\varepsilon = i$ , estas matrizes satisfazem às operações de álgebra definidas em (1.1.1a), para quatérnions de base esféricos, constituindo assim uma base para a representação matricial da álgebra de quatérnions esféricos. Para  $\varepsilon = 1$ , as operações de álgebra (1.1.1b), definidas para quatérnions de base hiperbólicos, são satisfeitas,

de modo que estas matrizes constituem, neste caso, uma base para a representação matricial da álgebra de quatérnions hiperbólicos.

Um quatérnion arbitrário sobre  $S^3$  ou  $H^3$  pode então ser representado matricialmente, em coordenadas Cartesianas  $a^\mu$  de  $E^4$ , por

$$A \equiv \Gamma(\vec{a}) = \Gamma(a^\mu \vec{e}_\mu) = a^\mu \Gamma(\vec{e}_\mu) \quad ,$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} a^0 - \epsilon a^3 & a^1 - \epsilon a^2 \\ -a^1 - \epsilon a^2 & a^0 + \epsilon a^3 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.3.4)$$

com a condição de vínculo

$$\det A = (a^0)^2 + (a^1)^2 - (\epsilon a^2)^2 - (\epsilon a^3)^2 = 1. \quad (1.3.5)$$

Nas cartas sobre  $S^3$  e  $H^3$  definidas por (1.3.2), como já afirmamos, a relação (1.3.5) passa a ser uma identidade. A representação matricial de um quatérnion arbitrário, neste sistema de coordenadas, é então dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\epsilon r/2) \cos \chi - \sinh(\epsilon r/2) \operatorname{sen} \eta & \cosh(\epsilon r/2) \operatorname{sen} \chi - \sinh(\epsilon r/2) \cos \eta \\ -\cosh(\epsilon r/2) \operatorname{sen} \chi - \sinh(\epsilon r/2) \cos \eta & \cosh(\epsilon r/2) \cos \chi + \sinh(\epsilon r/2) \operatorname{sen} \eta \end{pmatrix} \quad (1.3.6)$$

Em um grupo de matrizes, as 1-formas  $\omega = A^{-1} dA$  e  $\rho = dAA^{-1}$ , onde  $A$  é um elemento arbitrário do grupo, são 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. De fato, sendo  $X$  um elemento fixo do grupo, translações à esquerda e à direita são dadas respectivamente por

$$\bar{A} = XA \quad , \quad \bar{\bar{A}} = AX \quad ,$$

de modo que

$$\bar{\omega} = (XA)^{-1} d(XA) = A^{-1} X^{-1} (XdA) = A^{-1} dA = \omega \quad , \quad (1.3.7a)$$

$$\bar{\rho} = d(AX) (AX)^{-1} = (dAX) X^{-1} A^{-1} = dAA^{-1} = \rho \quad . \quad (1.3.7b)$$

Flanders <sup>(12)</sup> mostra que os elementos das matrizes  $\omega$  e  $\rho$  são 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente.

As 1-formas invariantes à esquerda e à direita sobre  $S^3$  e  $H^3$ , podem então ser obtidas das relações

$$\omega = A^{-1} dA = \omega^i \Gamma(\vec{e}_i) \quad , \quad (1.3.8a)$$

$$\rho = dAA^{-1} = \rho^i \Gamma(\vec{e}_i) \quad . \quad (1.3.8b)$$

Utilizando A dada por (1.3.6), obtemos

$$\omega = \left[ \begin{array}{ll} -(\epsilon/2) \text{sen}(\chi-\eta) dr & \cosh^2(\epsilon r/2) d\chi + \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta \\ -(1/2) \cos(\chi-\eta) \text{senh}(\epsilon r) (d\chi+d\eta) & -(\epsilon/2) \cos(\chi-\eta) dr - (1/2) \text{sen}(\chi-\eta) \\ & \text{senh}(\epsilon r) (d\chi+d\eta) \\ -\cosh^2(\epsilon r/2) d\chi - \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta - & (\epsilon/2) \text{sen}(\chi-\eta) dr + (1/2) \cos(\chi-\eta) \\ -(\epsilon/2) \cos(\chi-\eta) dr - (1/2) \text{sen}(\chi-\eta) & \times \text{senh}(\epsilon r) (d\chi+d\eta) \\ \times \text{senh}(\epsilon r) (d\chi+d\eta) & \end{array} \right] \quad (1.3.9)$$

$$\rho = \left[ \begin{array}{ll} -(\epsilon/2) \text{sen}(\chi+\eta) dr & \cosh^2(\epsilon r/2) d\chi - \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta \\ + (1/2) \cos(\chi+\eta) \text{senh}(\epsilon r) (d\chi-d\eta) & -(\epsilon/2) \cos(\chi+\eta) dr - (1/2) \\ & \times \text{sen}(\chi+\eta) \text{senh}(\epsilon r) (d\chi-d\eta) \\ -\cosh^2(\epsilon r/2) d\chi + \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta - & (\epsilon/2) \text{sen}(\chi+\eta) dr - \\ -(\epsilon/2) \cos(\chi+\eta) dr - (1/2) \text{sen}(\chi+\eta) & - (1/2) \cos(\chi+\eta) \text{senh}(\epsilon r) (d\chi-d\eta) \\ \times \text{senh}(\epsilon r) (d\chi-d\eta) & \end{array} \right] \quad (1.3.10)$$

Das relações (1.3.8), utilizando a base de matrizes definida em (1.3.3), obtemos então as bases de 1-formas invariantes à esquerda  $\{\omega^i\}$  e à direita  $\{\rho^i\}$  sobre  $S^3$  ( $\epsilon = i$ ) e  $H^3$  ( $\epsilon = 1$ ):

(a) base de 1-formas invariantes à esquerda

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \cosh^2(\epsilon r/2) d\chi + \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta \quad , \\ \omega^2 &= (1/2) \cos(\chi-\eta) dr + (1/2\epsilon) \sin(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi+d\eta) \quad , \\ \omega^3 &= -(1/2) \sin(\chi-\eta) dr + (1/2\epsilon) \cos(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi+d\eta) \quad ,\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

(b) base de 1-formas invariantes à direita

$$\begin{aligned}\rho^1 &= \cosh^2(\epsilon r/2) d\chi - \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta \quad , \\ \rho^2 &= (1/2) \cos(\chi+\eta) dr + (1/2\epsilon) \sin(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi-d\eta) \quad , \\ \rho^3 &= (1/2) \sin(\chi+\eta) dr - (1/2\epsilon) \cos(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi-d\eta)\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

As 1-formas  $\omega^i$  e  $\rho^i$  constituem representações da álgebra de Lie de  $S^3$  e  $H^3$ , expressa por (1.2.13) e (1.2.16). De fato, sejam  $X_i$  geradores de um grupo de Lie. A álgebra de Lie associada a este grupo é caracterizada pelas relações de comutação

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k \quad ,\tag{1.3.13}$$

onde as quantidades  $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$  são denominadas constantes de estrutura do grupo de Lie. Então, se  $\{\sigma^i\}$  é uma base de 1-formas

dual à base  $\{X_i\}$ , então a seguinte equação é válida

$$d\sigma^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k, \quad (1.3.14)$$

onde  $d\sigma^i$  é a derivada exterior <sup>(13)</sup> da 1-forma  $\sigma^i$  e o símbolo " $\wedge$ " denota produto exterior de 1-formas. A álgebra de Lie de  $S^3$  e  $H^3$ , em termos de 1-formas de base invariantes à esquerda ou à direita, pode então ser expressa por

$$d\omega^1 = 2\varepsilon^2 \omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = -2\omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = -2\omega^1 \wedge \omega^2, \quad (1.3.15)$$

ou

$$d\rho^1 = -2\varepsilon^2 \rho^2 \wedge \rho^3, \quad d\rho^2 = 2\rho^3 \wedge \rho^1, \quad d\rho^3 = 2\rho^1 \wedge \rho^2. \quad (1.3.16)$$

Os campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita sobre  $S^3$  e  $H^3$ , geradores de grupos de transformações de isometrias, podem agora ser explicitamente determinados nas coordenadas definidas em (1.3.2). Decompondo as 1-formas  $\omega^i$  e  $\rho^i$  em termos das 1-formas da base de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3) = (\chi, \eta, r)$ , obtemos

$$\omega^i = \omega^{(i)}_j dx^j, \quad \rho^i = \rho^{(i)}_j dx^j, \quad (1.3.17)$$

de modo que, de acordo com (1.3.11) e (1.3.12), as componentes  $\omega^{(i)}_j$  e  $\rho^{(i)}_j$  formam as matrizes <sup>(\*)</sup>

(\*)

Na nossa notação matricial índices superiores referem-se a linhas e os inferiores a colunas.

$$(\omega^{(i)}_j) = \begin{pmatrix} \cosh^2(\epsilon r/2) & \sinh^2(\epsilon r/2) & 0 \\ (1/2\epsilon) \sin(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2\epsilon) \sin(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2) \cos(\chi-\eta) \\ (1/2\epsilon) \cos(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2\epsilon) \cos(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) & -(1/2) \sin(\chi-\eta) \end{pmatrix} \quad (1.3.18)$$

$$(\rho^{(i)}_j) = \begin{pmatrix} \cosh^2(\epsilon r/2) & -\sinh^2(\epsilon r/2) & 0 \\ (1/2\epsilon) \sin(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) & -(1/2\epsilon) \sin(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2) \cos(\chi+\eta) \\ -(1/2\epsilon) \cos(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2\epsilon) \cos(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) & (1/2) \sin(\chi+\eta) \end{pmatrix} \quad (1.3.19)$$

Campos vetoriais invariantes à esquerda  $E_i$  e à direita  $D_i$  devem satisfazer às relações de dualidade

$$\langle \omega^i, E_j \rangle = \delta^i_j, \quad \langle \rho^i, D_j \rangle = \delta^i_j. \quad (1.3.20)$$

Em termos da base vetorial de coordenadas  $\{\partial/\partial x^i\}$  temos

$$E_i = \omega_{(i)}^j \partial/\partial x^j, \quad D_i = \rho_{(i)}^j \partial/\partial x^j, \quad (1.3.21)$$

de modo que as relações de dualidade podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle \omega^i, E_j \rangle &= \langle \omega^{(i)}_l dx^l, \omega_{(j)}^k \partial/\partial x^k \rangle \\ &= \omega^{(i)}_l \omega_{(j)}^k \langle dx^l, \partial/\partial x^k \rangle = \omega^{(i)}_k \omega_{(j)}^k = \delta^i_j. \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

$$\langle \rho^i, D_j \rangle = \langle \rho^{(i)}_l dx^l, \rho_{(j)}^k \partial/\partial x^k \rangle = \rho^{(i)}_k \rho_{(j)}^k = \delta^i_j. \quad (1.3.23)$$

As componentes  $\omega_{(i)}^j$  e  $\rho_{(i)}^j$  são obtidas invertendo-se as matrizes (1.3.18) e (1.3.19). Obtemos então

$$(\omega_{(i)}^j) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi-\eta) \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} & -\frac{2\epsilon \cos(\chi-\eta) \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \\ -1 & \frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi-\eta) \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} & \frac{2\epsilon \cos(\chi-\eta) \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \\ 0 & 2\cos(\chi-\eta) & -2\operatorname{sen}(\chi-\eta) \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

$$(\rho_{(i)}^j) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi+\eta) \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} & \frac{2\epsilon \cos(\chi+\eta) \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \\ 1 & \frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi+\eta) \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} & \frac{2\epsilon \cos(\chi+\eta) \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \\ 0 & -2\cos(\chi+\eta) & 2\operatorname{sen}(\chi+\eta) \end{pmatrix} \quad (1.3.25)$$

As bases de campos vetoriais invariantes à esquerda  $\{E_i\}$  e à direita  $\{E_i\}$ , sobre  $S^3$  ( $\epsilon = i$ ) e  $H^3$  ( $\epsilon = 1$ ), são então dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} E_1 &= \partial/\partial\chi - \partial/\partial\eta \quad , \\ E_2 &= 2\cos(\chi-\eta) \partial/\partial r + \frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi-\eta)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \left[ -\operatorname{senh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\chi + \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\eta \right] \quad , \\ E_3 &= -2\operatorname{sen}(\chi-\eta) \partial/\partial r + \frac{2\epsilon \cos(\chi-\eta)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \left[ -\operatorname{senh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\chi + \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\eta \right] \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

e

$$\begin{aligned} D_1 &= \partial/\partial\chi + \partial/\partial\eta \quad , \\ D_2 &= -2\cos(\chi+\eta) \partial/\partial r + \frac{2\epsilon \operatorname{sen}(\chi+\eta)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \left[ \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\chi + \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\eta \right] \quad , \\ D_3 &= 2\operatorname{sen}(\chi+\eta) \partial/\partial r + \frac{2\epsilon \cos(\chi+\eta)}{\operatorname{senh}(\epsilon r)} \left[ \operatorname{senh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\chi + \operatorname{cosh}^2(\epsilon r/2) \partial/\partial\eta \right] \quad . \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

## CAPÍTULO 2

### GEOMETRIAS DE ESPAÇO-TEMPO COM ESTRUTURA TOPOLÓGICA $S^3 \times R$ E $H^3 \times R$

No capítulo anterior caracterizamos  $S^3$  e  $H^3$  como grupos de Lie e, sobre estes grupos, definimos sistemas de coordenadas e determinamos campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita. Neste capítulo introduziremos a Física. Definiremos variedades de espaço-tempo com métricas Lorentzianas e com estruturas topológicas  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , isto é, o produto topológico da 3-esferas e do 3-hiperbolóide com a reta real. Os tensores métricos serão definidos de tal modo que as secções correspondentes às subvariedades de estrutura topológica  $S^3$  ou  $H^3$  tenham caráter espaço-temporal. Isto, como veremos, implicará em rotação e problemas globais de causalidade nestes espaços-tempos. Na última secção comentaremos a respeito de possíveis fontes de curvatura para estas geometrias.

#### 2.1 - GRUPOS DE LIE $S^3 \times R$ , $H^3 \times R$ E O TENSOR MÉTRICO

Vamos definir agora novos grupos de Lie, através do produto direto <sup>(11,15)</sup> entre os grupos  $S^3$  e  $H^3$  e o grupo de translação de uma linha aberta  $R$ , que denotaremos respectivamente por  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ . Seja  $\partial/\partial z$  o campo vetorial associado ao mo-

vimento próprio em  $R$ , sendo  $dz$  sua 1-forma dual. Os grupos  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  são então univocamente determinados pelas álgebras Lie definidas pelo conjunto de vetores de base  $\{E_i, \partial/\partial z\}$  ou  $\{D_i, \partial/\partial z\}$ , onde os campos  $E_i$  e  $D_i$  são geradores de translações à esquerda e à direita, respectivamente, sobre  $S^3$  ou  $H^3$ , sendo dados respectivamente por (1.3.26) e (1.3.27). As álgebras de Lie associadas a estes grupos são então dadas por (cf. (1.3.16), (1.3.15), (1.3.14) (1.3.13)):

$$[E_1, E_2] = 2E_3, \quad [E_3, E_1] = 2E_2, \quad [E_2, E_3] = -2\varepsilon^2 E_1, \quad [E_i, \partial/\partial z] = 0, \quad (2.1.1)$$

ou

$$[D_1, D_2] = -2D_3, \quad [D_3, D_1] = -2D_2, \quad [D_2, D_3] = 2\varepsilon^2 D_1, \quad [D_i, \partial/\partial z] = 0, \quad (2.1.2)$$

onde, para  $\varepsilon = i$ , (2.1.1) e (2.1.2) referem-se ao grupo  $S^3 \times R$  e, para  $\varepsilon = 1$ , ao grupo  $H^3 \times R$ . Alternativamente, estas álgebras de Lie podem ser representadas pelas 1-formas que compõem as bases  $\{\omega^i, dz\}$  ou  $\{\rho^i, dz\}$ , duais às bases  $\{E_i, \partial/\partial z\}$  e  $\{D_i, \partial/\partial z\}$  respectivamente, dadas por (1.3.11) e (1.3.12). Temos então

$$d\omega^1 = -2\omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = -2\omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = 2\varepsilon^2 \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d(dz) = 0, \quad (2.1.3)$$

$$d\rho^1 = 2\rho^2 \wedge \rho^3, \quad d\rho^2 = 2\rho^3 \wedge \rho^1, \quad d\rho^3 = -2\varepsilon^2 \rho^1 \wedge \rho^2, \quad d(dz) = 0, \quad (2.1.4)$$

onde para  $\varepsilon = i$  esta álgebra está associada ao grupo  $S^3 \times R$  e para  $\varepsilon = 1$  ao grupo  $H^3 \times R$ .

Vamos agora definir métricas sobre as variedades. Antes disso, porém, definiremos variedades cujas secções  $z = \text{const.}$

correspondam não exatamente a 3-esferas ou a 3-hiperbolóides, mas a 3-elipsóides ou a 3-hiperbolóides deformados <sup>(14)</sup>. Para isso vamos definir novas bases de 1-formas  $\{\theta^A\}$  e  $\{\check{\theta}^A\}$  ( $A = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\theta^0 = \alpha \omega^1, \quad \theta^1 = \beta \omega^2, \quad \theta^2 = \beta \omega^3, \quad \theta^3 = dz, \quad (2.1.5)$$

$$\check{\theta}^0 = \alpha \rho^1, \quad \check{\theta}^1 = \beta \rho^2, \quad \check{\theta}^2 = \beta \rho^3, \quad \check{\theta}^3 = dz, \quad (2.1.6)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Por extensão natural, referir-nos-emos a  $\theta^A$  e  $\check{\theta}^A$  como sendo 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. As álgebras de Lie associadas às variedades  $S^3 \times R$  ( $\epsilon = i$ ) e  $H^3 \times R$  ( $\epsilon = 1$ ) deformadas são expressas por

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= -\frac{2\alpha}{\beta^2} \theta^1 \wedge \theta^2, & d\theta^1 &= -\frac{2}{\alpha} \theta^2 \wedge \theta^0, & d\theta^2 &= -\frac{2\epsilon^2}{\alpha} \theta^0 \wedge \theta^1, \\ d\theta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} d\check{\theta}^0 &= \frac{2\alpha}{\beta^2} \check{\theta}^1 \wedge \check{\theta}^2, & d\check{\theta}^1 &= \frac{2}{\alpha} \check{\theta}^2 \wedge \check{\theta}^0, & d\check{\theta}^2 &= \frac{2\epsilon^2}{\alpha} \check{\theta}^0 \wedge \check{\theta}^1, & d\check{\theta}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Como tais deformações não alteram a topologia dos grupos  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  originariamente definidos, seguiremos nos referindo aos grupos definidos pelas álgebras de Lie (2.1.7) ou (2.1.8) por  $S^3 \times R$  ( $\epsilon = i$ ) e  $H^3 \times R$  ( $\epsilon = 1$ ).

Sejam  $\{X_A\}$  e  $\{\check{X}_A\}$  as bases de campos vetoriais duais às bases de 1-formas  $\{\theta^A\}$  e  $\{\check{\theta}^A\}$ , respectivamente, ou seja,

$$\langle \theta^A, X_B \rangle = \delta^A_B, \quad \langle \check{\theta}^A, \check{X}_B \rangle = \delta^A_B. \quad (2.1.9)$$

Então os campos vetoriais  $X_A$  e  $\check{X}_A$ , que denominaremos campos inva

riantes à esquerda e à direita, sobre  $S^3 \times R$  ( $\epsilon = i$ ) ou  $H^3 \times R$  ( $\epsilon = 1$ ), respectivamente, devem ser dados por

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\alpha} E_1, & X_1 &= \frac{1}{\beta} E_2, & X_2 &= \frac{1}{\beta} E_3, & X_3 &= \partial/\partial z, \\ \tilde{X}_0 &= \frac{1}{\alpha} D_1, & \tilde{X}_1 &= \frac{1}{\beta} D_2, & \tilde{X}_2 &= \frac{1}{\beta} D_3, & \tilde{X}_3 &= \partial/\partial z, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

onde os campos vetoriais  $E_i$  e  $D_i$  são dados por (1.3.26) e (1.3.27), respectivamente.

Sobre os grupos  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  vamos agora definir métricas Lorentzianas, prescrevendo regras de produto escalar para os campos vetoriais  $X_A$  e  $\tilde{X}_A$ :

$$g_E(X_A, X_B) = \eta_{AB}, \quad g_D(\tilde{X}_A, \tilde{X}_B) = \eta_{AB}, \quad (2.1.11)$$

onde  $\eta_{AB}$  é o tensor de Minkowski:  $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . As métricas  $g_E$  e  $g_D$  serão denominadas métricas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente, sobre  $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ . De acordo com (2.1.9) estas métricas podem ser expressas por

$$g_E = \eta_{AB} \theta^A \theta^B, \quad g_D = \eta_{AB} \tilde{\theta}^A \tilde{\theta}^B. \quad (2.1.12)$$

A partir de (1.3.11), (1.3.12), (2.1.5) e (2.1.6) podemos obter a forma explícita das 1-formas invariantes à esquerda  $\theta^A$  e à direita  $\tilde{\theta}^A$ , definidas sobre  $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ :

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \alpha [\cosh^2(\epsilon r/2) d\chi + \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta] \quad , \\ \theta^1 &= \beta [(1/2) \cos(\chi-\eta) dr + (1/2\epsilon) \sin(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi+d\eta)] \quad , \\ & \hspace{15em} (2.1.13) \\ \theta^2 &= -\beta [(1/2) \sin(\chi-\eta) dr - (1/2\epsilon) \cos(\chi-\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi+d\eta)] \quad , \\ \theta^3 &= dz \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \alpha [\cosh^2(\epsilon r/2) d\chi - \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta] \quad , \\ \gamma^1 &= \beta [(1/2) \cos(\chi+\eta) dr + (1/2\epsilon) \sin(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi-d\eta)] \quad , \\ & \hspace{15em} (2.1.14) \\ \gamma^2 &= \beta [(1/2) \sin(\chi+\eta) dr - (1/2\epsilon) \cos(\chi+\eta) \sinh(\epsilon r) (d\chi-d\eta)] \quad , \\ \gamma^3 &= dz \quad .\end{aligned}$$

De (2.1.12) temos então

$$g_E = A(r) d\chi^2 + B(r) d\eta^2 + C(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2 \quad , \quad (2.1.15a)$$

$$g_D = A(r) d\chi^2 + B(r) d\eta^2 - C(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2 \quad , \quad (2.1.15b)$$

onde

$$\begin{aligned}A(r) &= \alpha^2 \cosh^4(\epsilon r/2) - (\beta^2/4\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r) \quad , \\ B(r) &= \alpha^2 \sinh^4(\epsilon r/2) - (\beta^2/4\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r) \quad , \\ & \hspace{15em} (2.1.16) \\ C(r) &= (1/2) (\alpha^2 - \beta^2/\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r) \quad .\end{aligned}$$

Com a definição (2.1.9) de  $g_E$  e  $g_D$  estamos impondo que as secções  $z = \text{const.}$ , correspondentes às hipersuperfícies  $S^3$  e  $H^3$ , têm caráter espaço-temporal, enquanto que a linha  $z$ , corres -

pondente à variedade  $R$ , tem caráter espacial.

Consideremos agora as simetrias destes espaços-tempos de estrutura topológica  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , dotados das métricas pseudo-Riemannianas  $g_E$  e  $g_D$ . Para encontrar os  $n'$  vetores de Killing, associados a  $g_E$  e  $g_D$ , não teremos necessidade de integrar a equação de Killing

$$L_{K_a} g = 0 \quad , \quad (a = 0, 1, \dots, n')$$

pois quase todos eles já estão determinados pela construção dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos. De acordo com o que foi discutido na secção 1.2, a métrica  $g_E$ , dada por (2.1.5a), admite os campos vetoriais invariantes à direita  $D_i$ , dados por (1.3.27), como vetores de Killing. Por outro lado, a métrica  $g_D$  dada por (2.1.5b), admite os campos vetoriais invariantes à esquerda  $E_i$ , dados por (1.3.26), como vetores de Killing. Um quarto vetor de Killing, associado aos grupos  $S^3$  e  $H^3$ , linearmente independente de  $\{E_i\}$  e  $\{D_i\}$ , pode ser escolhido como sendo  $\partial/\partial\chi$  ou  $\partial/\partial\eta$ . Obviamente um quinto vetor de Killing é aquele associado com a variedade  $R$ ,  $\partial/\partial z$ . Resumindo, para os espaços-tempos esféricos ( $\varepsilon = i$ ) e hiperbólicos ( $\varepsilon = 1$ ), temos em geral:

(a) Vetores de Killing Associados a  $g_E$

$$\hat{K}_1 = \partial/\partial\chi \quad ,$$

$$\hat{K}_2 = \partial/\partial\eta \quad ,$$

$$\hat{K}_3 = 2\cos(\chi-\eta)\partial/\partial r + \frac{2\varepsilon\sin(\chi-\eta)}{\sinh(\varepsilon r)} [-\sinh^2(\varepsilon r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(\varepsilon r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$\hat{K}_4 = -2\sin(\chi-\eta)\partial/\partial r + \frac{2\varepsilon\cos(\chi-\eta)}{\sinh(\varepsilon r)} [-\sinh^2(\varepsilon r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(\varepsilon r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$\hat{K}_5 = \partial/\partial z \quad . \quad (2.1.17)$$



(b) Vetores de Killing Associados a  $g_D$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \partial/\partial\chi \quad , \\ \tilde{K}_2 &= \partial/\partial\eta \quad , \\ \tilde{K}_3 &= -2\cos(\chi+\eta)\partial/\partial r + \frac{2\epsilon\text{sen}(\chi+\eta)}{\text{senh}(\epsilon r)} [\text{senh}^2(\epsilon r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(\epsilon r/2)\partial/\partial\eta] \quad , \\ \tilde{K}_4 &= 2\text{sen}(\chi+\eta)\partial/\partial r + \frac{2\epsilon\cos(\chi+\eta)}{\text{senh}(\epsilon r)} [\text{senh}^2(\epsilon r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(\epsilon r/2)\partial/\partial\eta] \quad , \\ \tilde{K}_5 &= \partial/\partial z \quad . \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Portanto, os espaços-tempos esféricos e hiperbólicos com topologias  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , respectivamente, dotados de métricas  $g_E$  ou  $g_D$ , dadas por (2.1.11), admitem em geral um grupo de movimentos  $G_5$ , que atua multiplamente transitivamente sobre as variedades. Tais espaços-tempos são espaço-temporalmente homogêneos, já que  $G_5$  contém um subgrupo de transformações de isometrias que atua simplesmente transitivamente sobre as variedades. Convém notar entretanto, que estes espaços não possuem homogeneidade espacial, já que neste  $G_5$  não há um subgrupo de transformações de isometrias que atue simplesmente transitivamente sobre uma 3-superfície espacial.

As métricas  $g_E$  e  $g_D$ , construídas a partir de 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente, sobre  $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ , diferem no sistema de coordenadas  $(\chi, \eta, r, z)$ , surpreendentemente, só por uma transformação imprópria de coordenadas  $\chi \rightarrow -\chi$  ou  $\eta \rightarrow -\eta$  (cf. eq. (2.1.15)). Isto significa que a questão concernente ao fato de estes universos - associados a  $g_E$  e  $g_D$  - serem ou não fisicamente distintos entre si, pode ser tratada analisando-se a natureza destas inversões de coordenadas. Este assunto será tratado no Capítulo 3.

## 2.2 - ESPAÇOS-TEMPOS HIPERBÓLICOS $H^3 \times R$ . UMA GEOMETRIA QUE ADMITE UM GRUPO $G_7$ DE MOVIMENTOS

As métricas  $g_E$  e  $g_D$ , para os espaços-tempos hiperbólicos, podem ser obtidas fazendo-se  $\epsilon = 1$  em (2.1.15)-(2.1.16). Obtemos então

$$g_E = A(r) d\chi^2 + B(r) d\eta^2 + C(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2, \quad (2.2.1a)$$

$$g_D = A(r) d\chi^2 + B(r) d\eta^2 - C(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2, \quad (2.2.1b)$$

onde

$$\begin{aligned} A(r) &= \alpha^2 \cosh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r, \\ B(r) &= \alpha^2 \sinh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r, \\ C(r) &= (1/2) (\alpha^2 - \beta^2) \sinh^2 r. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Entre os espaços-tempos hiperbólicos caracterizados através de todos os possíveis valores dos parâmetros  $\alpha^2$  e  $\beta^2$ , há um tipo particular com características notáveis. Quando  $\alpha^2 = \beta^2$  temos, de (2.2.2),  $C(r) = 0$ , de modo que a métrica resultante é dada por

$$g_E = g_D = g = \alpha^2 [\cosh^2(r/2) d\chi^2 - \sinh^2(r/2) d\eta^2 - (1/4) dr^2] - dz^2. \quad (2.2.3)$$

O número de simetrias neste caso particular foi aumentado. A métrica (2.2.3) admite agora como vetores de Killing, simultaneamente, os campos vetoriais  $\hat{K}_i$  e  $\hat{K}_i^v$ , dados por (2.1.13) e (2.1.14), respectivamente. Tomando entre estes dois conjuntos os vetores

que são linearmente independentes, obtemos os vetores de Killing  $Y_i$  associados a (2.2.3):

$$Y_1 = \partial/\partial\chi \quad , \quad Y_2 = \partial/\partial\eta \quad ,$$

$$Y_3 = 2\cos(\chi-\eta)\partial/\partial r + \frac{2\sin(\chi-\eta)}{\sinh r} [-\sinh^2(r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$Y_4 = -2\sin(\chi-\eta)\partial/\partial r + \frac{2\cos(\chi-\eta)}{\sinh r} [-\sinh^2(r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$Y_5 = -2\cos(\chi+\eta)\partial/\partial r + \frac{2\sin(\chi+\eta)}{\sinh r} [\sinh^2(r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$Y_6 = 2\sin(\chi+\eta)\partial/\partial r + \frac{2\cos(\chi+\eta)}{\sinh r} [\sinh^2(r/2)\partial/\partial\chi + \cosh^2(r/2)\partial/\partial\eta] \quad ,$$

$$Y_7 = \partial/\partial z \quad . \quad (2.2.4)$$

Portanto, os espaços-tempos hiperbólicos em que  $\alpha^2 = \beta^2$ , com métrica dada por (2.2.3), admitem um grupo  $G_7$  de movimentos. A secção  $z = \text{const.}$ , é, neste caso, maximalmente simétrica, tendo a estrutura de um grupo de Lie  $H^3$  não deformado. Este resultado foi derivado independentemente e por outros métodos, por Teixeira et al. (24,25), e por Soares e Tiomno (24).

### 2.3 - ESPAÇOS-TEMPOS HIPERBÓLICOS. TOPOLOGIA E PROBLEMAS DE CAUSALIDADE

Examinaremos agora, com relação aos espaços-tempos hiperbólicos, isto é, aqueles com estrutura global  $H^3 \times R$  e métricas dadas por (2.2.1)-(2.2.2), a estrutura topológica da secção

$z = \text{const.}$ , correspondente ao grupo  $H^3$ . Este grupo pode ser representado, sem considerar aqui deformações induzidas pelos parâmetros  $\alpha^2$  e  $\beta^2$ , por um 3-hiperbolóide imerso num espaço ~~Euclidiano~~  $E^4$ , conforme vimos no Capítulo 1, podendo ser definido, em termos de coordenadas Cartesianas de  $E^4$  por

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = 1 \quad .$$

A carta sobre  $H^3$ , definida no Capítulo 1, é obtida fazendo-se  $\varepsilon = 1$  em (1.3.2)

$$\begin{aligned} a^0 &= \cosh(r/2) \cos \chi & , \\ a^1 &= \cosh(r/2) \sin \chi & , \\ a^2 &= \sinh(r/2) \cos \eta & , \\ a^3 &= \sinh(r/2) \sin \eta & , \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

onde

$$-\infty < r < \infty \quad , \quad 0 \leq \chi, \eta \leq 2\pi \quad .$$

Consideremos agora as secções bidimensionais de  $H^3$ . Tomando inicialmente a secção  $\eta = \text{const.}$  e escolhendo, por conveniência,  $\eta = 0$ , obtemos de (2.3.1):

$$\begin{aligned} a^0 &= \cosh(r/2) \cos \chi & , \\ a^1 &= \cosh(r/2) \sin \chi & , \\ a^2 &= \sinh(r/2) & , \\ a^3 &= 0 & , \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

de modo que a 2-superfície correspondente a esta secção é dada, em termos de coordenadas ~~Cartesianas~~  $E^4$ , segundo (1.1.6), por

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 = 1 \quad . \tag{2.3.3}$$

(2.3.3) representa os pontos da superfície de um 2-hiperbolóide de uma folha, como ilustra a Figura 2.3.1.

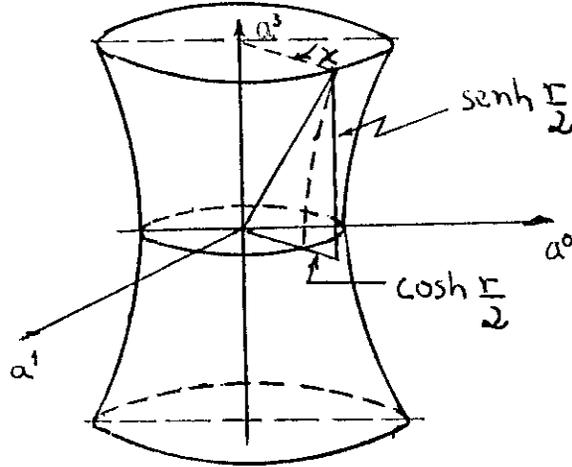


Figura 2.3.1 - Hiperbolóide de uma folha correspondente à secção  $\eta = \text{const.}$  de  $H^3$ .

Para a secção  $\chi = \text{const.}$ , escolhendo  $\chi = 0$ , temos de

(2.3.1)

$$\begin{aligned}
 a^0 &= \cosh(r/2) \quad , \\
 a^1 &= 0 \quad , \\
 a^2 &= \sinh(r/2) \cos \eta \quad , \\
 a^3 &= \sinh(r/2) \sin \eta \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2.3.4}$$

de modo que a 2-superfície resultante, em termos de coordenadas Cartesianas de  $E^4$ , é descrita pela relação

$$(a^0)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = 1 \quad .
 \tag{2.3.5}$$

Esta equação descreve, em  $E^4$ , pontos da superfície de um 2-hiperbolóide de duas folhas, como ilustrado na Figura 2.3.2.

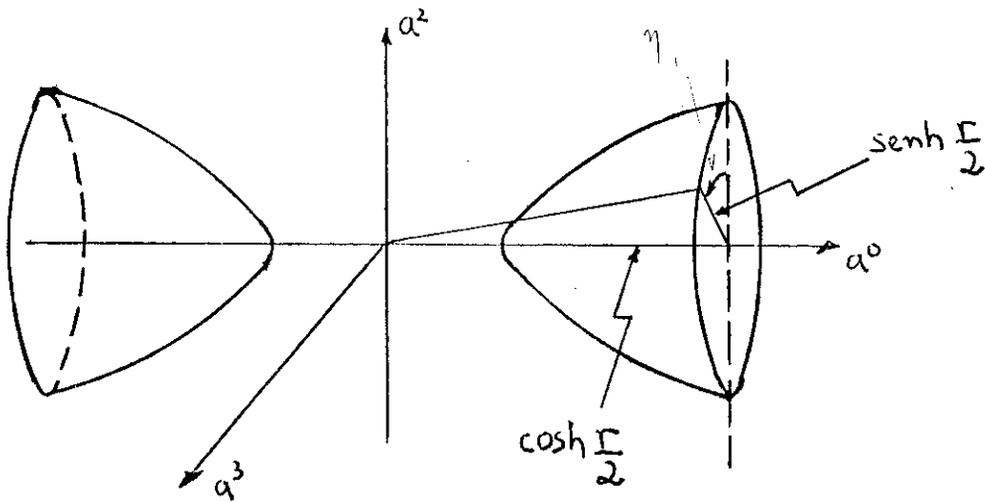


Figura 2.3.2 - Hiperbolóide de duas folhas correspondente à secção  $\chi = \text{const.}$  de  $H^3$ .

Para examinar como a estrutura <sup>Topológica</sup> ~~topológica~~ destas secções está relacionada com problemas de causalidade nestes espaços-tempos, tomemos a métrica  $g_E$  ou  $g_D$ , sobre a variedade  $H^3 \times R$ , dada por (2.2.1)-(2.2.2).

Consideraremos separadamente os casos  $\alpha^2 > \beta^2$ ,  $\alpha^2 < \beta^2$ ,  $\alpha^2 = \beta^2$ . Também, na análise que se segue, é suficiente considerarmos somente as secções espaço-temporais correspondentes às variedades  $S^3$  e  $H^3$ .

### 2.3.1 - O CASO $\alpha^2 > \beta^2$

(a) Secção  $\eta = \text{const.}$  Neste caso teremos, para qualquer  $r \neq 0$ ,

$$A(r) = \alpha^2 \cosh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r > 0 \quad , \quad (2.3.6)$$

pois

$$\tanh^2(r/2) < \alpha^2/\beta^2 \quad .$$

Portanto, em qualquer região destes espaços-tempos (aqueles para os quais a desigualdade  $\alpha^2 > \beta^2$  é satisfeita) a linha coordenada que é curva integral de  $\partial/\partial\chi$ , é tipo tempo e fechada sobre o 2-hi

perbolóide de uma folha. Um observador que seguisse esta trajetória chegaria, depois de um tempo próprio finito, ao mesmo ponto do espaço-tempo do qual ele partiu, podendo influenciar seu passado.

Convém notar que, a um dado tensor métrico que descreve uma variedade de espaço-tempo numa vizinhança finita de um dado ponto, podemos associar diferentes estruturas globais <sup>(23)</sup>. O 2-hiperbolóide de uma folha é homeomorfo ao cilindro, o qual, por sua vez, pode ser desdobrado sobre o plano. Assim, em lugar de tomarmos a topologia desta secção como sendo a do 2-hiperbolóide de uma folha, podemos escolher outra tal que os pontos  $\eta + 2n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) não estejam mais identificados. Ou seja, podemos evitar curvas tipo tempo nesta secção, se abrirmos o 2-hiperbolóide.

(b) Secção  $\chi = \text{const.}$  Aqui o caráter (nulo, espacial ou temporal) da linha coordenada definida por  $\partial/\partial\eta$ , depende da relação entre  $r$  e  $\alpha^2/\beta^2$ , dada por

$$B(r) = \alpha^2 \sinh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r \quad (2.3.7)$$

A situação pode ser resumida segundo a Tabela 2.3.1.

$\tanh^2(r/2)$	$> \beta^2/\alpha^2$	$< \beta^2/\alpha^2$	$= \beta^2/\alpha^2$
$B(r)$	$> 0$	$< 0$	$= 0$
$\partial/\partial\eta$	tipo tempo	tipo espaço	tipo nulo

Tabela 2.3.1 - Caráter do campo vetorial  $\partial/\partial\eta$  em termos de  $r$ , com  $\alpha^2 > \beta^2$ .

Assim, para aqueles valores de  $r$  tais que  $\tanh^2(r/2) > \beta^2/\alpha^2$ , a linha coordenada definida por  $\partial/\partial\eta$  sobre o hiperbolóide de duas folhas é tipo tempo fechada. O 2-hiperbolóide de duas folhas só é homeomorfo ao cilindro pela exclusão de um ponto da variedade (16). Portanto, a desidentificação dos pontos  $\eta+2n\pi$ , sobre a linha coordenada  $\eta$ , com o fim de evitar curvas tipo tempo fechadas nesta secção, é problemática.

### 2.3.2 - O CASO $\alpha^2 < \beta^2$

(a) Secção  $\eta = \text{const.}$  O caráter do vetor  $\partial/\partial\chi$  agora é dado pela função

$$A(r) = \alpha^2 \cosh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r, \quad (2.3.8)$$

cujo comportamento é dado pela Tabela 2.3.2.

$\tanh^2(r/2)$	$< \alpha^2/\beta^2$	$> \alpha^2/\beta^2$	$= \alpha^2/\beta^2$
$A(r)$	$> 0$	$< 0$	$= 0$
$\partial/\partial\chi$	tipo tempo	tipo espaço	tipo nulo

Tabela 2.3.2 - Caráter do campo vetorial  $\partial/\partial\chi$  em termos de  $r$ , com  $\alpha^2 < \beta^2$ .

Portanto, aqui a linha coordenada definida por  $\partial/\partial\chi$ , que é fechada sobre o hiperbolóide de uma folha, é tipo tempo para uma dada região em  $r$ . O problema de causalidade pode aqui ser novamente evitado, abrindo-se o hiperbolóide.

(b) Secção  $\chi = \text{const.}$  Neste caso, o campo vetorial  $\partial/\partial\eta$  tem caráter espacial para todo espaço-tempo, já que para qualquer  $r$  a seguinte desigualdade é válida:

$$\tanh^2(r/2) < \beta^2/\alpha^2 \quad .$$

Ou seja,

$$B(r) = \alpha^2 \sinh^4(r/2) - (\beta^2/4) \sinh^2 r < 0 \quad . \quad (2.3.9)$$

### 2.3.3 - O CASO $\alpha^2 = \beta^2$

(a) Secção  $\eta = \text{const.}$  O campo vetorial  $\partial/\partial\chi$ , neste caso, é tipo tempo para todo  $\alpha$ , pois para qualquer  $r$  temos

$$A(r) = \alpha^2 (\cosh^4(r/2) - (1/4) \sinh^2 r) = \alpha^2 \cosh^2(r/2) > 0. \quad (2.3.10)$$

Novamente, abrindo o hiperbolóide de uma folha evitamos as linhas coordenadas  $\chi$  tipo tempo fechadas.

(b) Secção  $\eta = \text{const.}$  O vetor  $\partial/\partial\chi$  é tipo espaço para qualquer valor do parâmetro  $\alpha$ , já que para qualquer  $r$  temos

$$B(r) = \alpha^2 [\sinh^4(r/2) - (1/4) \sinh^2 r] = -\alpha^2 \sinh^2(r/2) < 0. \quad (2.3.11)$$

Assim, no caso dos espaços-tempos hiperbólicos, somente aqueles para as quais a desigualdade  $\alpha^2 \leq \beta^2$  é satisfeita po

dem ser tomados como sendo causais, nas secções  $X = \text{const.}$  e  $\eta = \text{const.}$  Para isso, entretanto, como vimos, devemos "abrir" o 2-hiperbolóide de uma folha correspondente à secção  $\eta, z = \text{const.}$  Caso mantivéssemos estritamente a topologia  $H^3 \times R$  original, teríamos que admitir a existência de curvas tipo-tempo fechadas, para qualquer espaço-tempo de classe hiperbólica.

#### → 2.4 - ESPAÇOS-TEMPOS ESFÉRICOS, TOPOLOGIA E PROBLEMAS DE CAUSALIDADE

Faremos aqui uma análise similar àquela feita na secção anterior, para os espaços-tempos esféricos, isto é, aqueles com topologia  $S^3 \times R$  e dotados de métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$  dadas por (2.1.15)-(2.1.16), com  $\epsilon = i$ :

$$g_E = \bar{A}(r) d\chi^2 + \bar{B}(r) d\eta^2 + \bar{C}(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2 \quad (2.4.1a)$$

$$g_D = \bar{A}(r) d\chi^2 + \bar{B}(r) d\eta^2 - \bar{C}(r) d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2, \quad (2.4.1b)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}(r) &= \alpha^2 \cos^4(r/2) - (\beta^2/4) \text{sen}^2 r, \\ \bar{B}(r) &= \alpha^2 \text{sen}^4(r/2) - (\beta^2/4) \text{sen}^2 r, \\ \bar{C}(r) &= -(1/2) (\alpha^2 + \beta^2) \text{sen} r. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Neste caso, ao contrário do que acontecia para o espaço-tempo hiperbólico, não é possível fazer-se  $\bar{C}(r) = 0$ , de modo

que  $g_E = g_D$ .

Com relação a estes espaços-tempos, a hipersuperfície correspondente à secção  $z = \text{const.}$  pode ser representada, a menos da deformação induzida pelos parâmetros  $\alpha^2$  e  $\beta^2$ , por uma  $\rightarrow$  3-esfera  $S^3$  imersa no espaço ~~Euclidiano~~ de quatro dimensões  $E^4$ .  
 $\rightarrow$  Em termos de coordenadas ~~Cartesianas~~ de  $E^4$ ,  $a^\mu$ , essa 3-esfera é definida pela relação

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1 \quad .$$

A forma explícita da carta sobre  $S^3$ , definida no Capítulo 1, é obtida fazendo-se  $\epsilon = i$  em (1.3.2). Temos então

$$\begin{aligned} a^0 &= \cos(r/2) \cos \chi \quad , \\ a^1 &= \cos(r/2) \operatorname{sen} \chi \quad , \\ a^2 &= \operatorname{sen}(r/2) \cos \eta \quad , \\ a^3 &= \operatorname{sen}(r/2) \operatorname{sen} \eta \quad , \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

onde

$$0 \leq r/2 \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \chi, \eta \leq \pi \quad .$$

Tomando a secção  $\eta = \text{const.}$  de  $S^3$  e escolhendo  $\eta = 0$ , temos de (2.4.3):

$$\begin{aligned} a^0 &= \cos(r/2) \cos \chi \quad , \\ a^1 &= \cos(r/2) \operatorname{sen} \chi \quad , \\ a^2 &= \operatorname{sen} r/2 \quad , \\ a^3 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Portanto, a 2-superfície correspondente a esta secção é a super-

fície de uma 2-esfera, como aquela representada na Figura 2.4.1.

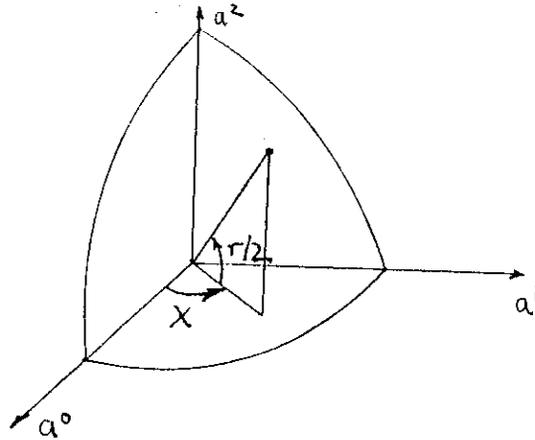


Figura 2.4.1 - Octante da superfície correspondente à secção  $\eta = \text{const.}$  de  $S^3$ .

A estrutura da secção  $\chi = \text{const.}$  é obviamente similar.

Examinaremos agora a relação entre a estrutura topológica destas secções e problemas globais de causalidade sobre os espaços-tempos esféricos. A análise aqui é mais simples do que aquela na secção anterior, já que os casos  $\alpha^2 > \beta^2$ ,  $\alpha^2 < \beta^2$  e  $\alpha^2 = \beta^2$  podem, neste caso, ser tratados de uma só vez.

(a) Secção  $\eta = \text{const.}$  Para determinar o caráter de campo vetorial  $\partial/\partial\chi$  devemos analisar o comportamento da função

$$\bar{A}(r) = \alpha^2 \cos^4(r/2) - (\beta^2/4) \text{sen}^2 r \quad . \quad (2.4.5)$$

Como

$$2\cos^2(r/2) = 1 + \cos r \quad ,$$

podemos escrever (2.4.5) na seguinte forma

$$\bar{A}(r) = (\alpha^2/4) (1 + \cos r)^2 - (\beta^2/4) (1 + \cos r) (1 - \cos r) . \quad (2.4.6)$$

Obtemos então os resultados mostrados na Tabela 2.4.1.

$\frac{1+\cos r}{1-\cos r}$	$> \frac{\beta^2}{\alpha^2}$	$< \frac{\beta^2}{\alpha^2}$	$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}$
$\bar{A}(r)$	$> 0$	$< 0$	$= 0$
$\partial/\partial\chi$	tipo tempo	tipo espaço	tipo nulo

Tabela 2.4.1 - Caráter do campo vetorial  $\partial/\partial\chi$  em termos de  $r$ .

Neste caso temos, portanto, uma região dada em termos de  $r$ , na qual as linhas coordenadas fechadas sobre a 2-esfera, definidas por  $\partial/\partial\chi$  são tipo tempo. Tal domínio de  $r$ , contém o ponto  $r = 0$ .

(b) Secção  $\chi = \text{const.}$  O caráter do campo vetorial  $\partial/\partial\eta$  é dado pela função  $\bar{B}(r)$ :

$$\bar{B}(r) = \alpha^2 \text{sen}^4(r/2) - (\beta^2/4) \text{sen}^2 r \quad (2.4.7)$$

ou, usando a identidade

$$2\text{sen}^2(r/2) = 1 - \cos r \quad ,$$

$$\bar{B}(r) = (\alpha^2/4) (1 - \cos r)^2 - (\beta^2/4) (1 + \cos r) (1 - \cos r) \quad . \quad (2.4.8)$$

Obtemos então os resultados mostrados na Tabela 2.4.2.

$\frac{1-\cos r}{1+\cos r}$	$> \frac{\beta^2}{\alpha^2}$	$< \frac{\beta^2}{\alpha^2}$	$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}$
$\bar{B}(r)$	$> 0$	$< 0$	$= 0$
$\partial/\partial\eta$	tipo tempo	tipo espaço	tipo nulo

Tabela 2.4.2 - Caráter do campo vetorial  $\partial/\partial\eta$  em termos de  $r$ .

Portanto, similarmente ao que ocorre para a outra secção, existem curvas tipo-tempo fechadas sobre a 2-esfera definidas por  $\partial/\partial\eta$ , para uma dada região em  $r$ . Tal região é finita e envolve o ponto  $r = \pi$ .

Podemos então concluir que as variedades de espaço-tempo que têm topologia  $S^3 \times R$ , equipadas com métricas  $g_E$  ou  $g_D$  das por (2.4.1), admitem curvas tipo tempo fechadas, definidas pelos campos vetoriais  $\partial/\partial\chi$  e  $\partial/\partial\eta$ , para determinadas regiões em  $r$ , qualquer que seja a relação entre  $\alpha^2$  e  $\beta^2$  ( $\alpha^2 > \beta^2$ ,  $\alpha^2 < \beta^2$ ,  $\alpha^2 = \beta^2$ ).

## 2.5 - SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICO

Consideremos um novo sistema de coordenadas  $(t, \phi, \bar{r}, z)$  sobre os espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, definidos por

$$r = \frac{m}{\epsilon} \bar{r} \quad , \quad \eta = \frac{m^2}{4\Omega} t - \phi \quad , \quad \chi = \frac{m^2}{4\Omega} t \quad , \quad z = \bar{z} \quad , \quad (2.5.1)$$

onde novamente para  $\epsilon = i$  estamos nos referindo a espaços-tempos esféricos e para  $\epsilon = 1$  a hiperbólicos. Os novos parâmetros  $\Omega$  e  $m$  são definidos em termos dos antigos  $\alpha$  e  $\beta$  pelas relações:

$$\Omega = \frac{\epsilon^2}{\beta^2} \alpha \quad , \quad m = \frac{2\epsilon}{\beta} \quad . \quad (2.5.2)$$

Notemos que para a família esférica,  $\epsilon = i$  e  $m^2 < 0$ , e para a hiperbólica,  $\epsilon = 1$  e  $m^2 > 0$ , sendo a quantidade  $\Omega$  sempre real.

Neste sistema de coordenadas, denominado cilíndrico, a

métrica  $g_D$ , dada por (2.1.15b)-(2.1.16), é escrita como

$$g_D = [dt + H(\bar{r})d\phi]^2 - D(\bar{r})^2 d\phi^2 - d\bar{r}^2 - dz^2, \quad (2.5.3)$$

onde

$$H(\bar{r}) = (4\Omega/m^2) \sinh^2(m\bar{r}/2), \quad D(\bar{r}) = (1/m) \sinh m\bar{r}. \quad (2.5.4)$$

A métrica  $g_E$ , dada por (2.1.15a)-(2.1.16), não assume no sistema coordenado  $(t, \phi, \bar{r}, z)$  definido por (2.5.1), uma forma simples como aquela dada para  $g_D$  em (2.5.3)-(2.5.4). Ou seja,  $g_E$  e  $g_D$  não têm, neste sistema de coordenadas, uma forma simétrica como aquela no sistema de coordenadas  $(\chi, \eta, r, z)$ . Obviamente, uma transformação que leva a métrica  $g_D$  do sistema de coordenadas  $(\chi, \eta, r, z)$  a um sistema de coordenadas cilíndricas, tal que ela assuma uma forma idêntica a (2.5.3)-(2.5.4), é obtida a partir de (2.5.1), somente substituindo-se  $\eta$  por  $-\eta$  ou  $\chi$  por  $-\chi$ .

Os espaços-tempos localmente (numa vizinhança finita da variedade) caracterizados por uma métrica do tipo (2.5.3), sem especificar as funções  $H(\bar{r})$  e  $D(\bar{r})$ , são conhecidas na literatura como espaços-tempos tipo Gödel. Quando  $H(\bar{r})$  e  $D(\bar{r})$  são dados por (2.5.4), temos caracterizados os chamados espaços-tempos tipo Gödel homogêneos (isto é, com homogeneidade espaço-temporal), obtidos por Rebouças e Tiomno <sup>(6,4)</sup>. Nós, neste trabalho, determinamos estes espaços-tempos como sendo homogêneos por construção. Por outro lado, Rebouças e Tiomno impuseram sobre a forma geral da métrica tipo Gödel dada por (2.5.3), que ela deveria admitir um grupo de isometrias atuando simplesmente transitivamente sobre a variedade (que significa homogeneidade espaço-temporal). Com isso eles mostraram que  $H(\bar{r})$  e  $D(\bar{r})$  deveriam ter a forma dada por (2.5.4).

A métrica correspondente à solução de Gödel <sup>(1)</sup> pode ser reconhecida no sistema de coordenadas cilíndrico, tomando-se o caso particular  $m^2 = 2\Omega^2$  em (2.5.3)-(2.5.4) ou,  $\alpha^2 = 2\beta^2$ ,  $\epsilon = 1$  em (2.1.15)-(2.1.16). Se assumirmos que para  $\epsilon = 1$  (ou  $m^2 > 0$ ) a estrutura topológica de nossas variedades é sempre  $H^3 \times R$ , então o espaço-tempo obtido fazendo-se  $\alpha^2 = 2\beta^2$  é somente localmente isométrico àquele proposto originalmente por Gödel <sup>(1)</sup>, já que este adotou para seu modelo a topologia  $R^4$  <sup>(17,18)</sup>.

## 2.6 - FONTES DE CURVATURA

Além de estarem relacionados a problemas globais de causalidade, os parâmetros  $\alpha^2$  e  $\beta^2$  — mais exatamente a relação entre eles — determinam, através das equações de campo gravitacional, as possíveis fontes de curvatura compatíveis com as geometrias dadas por (2.1.11)-(2.1.12).

O modelo com geometria tipo Gödel mais simples é aquele proposto originalmente por Gödel em 1949, cuja métrica pode ser obtida fazendo-se  $\alpha^2 = 2\beta^2$ ,  $\epsilon = 1$  em (2.1.15)-(2.1.16) ou  $m^2 = 2\Omega^2$  em (2.5.3)-(2.5.4). Tal métrica é solução para as equações de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda$ , tendo poeira como fonte de curvatura (ou fluido perfeito coerente, já que podemos definir  $\rho' = \rho + p$  e  $\Lambda' = \Lambda + \kappa\rho$ ). Com relação a isso, Ozsváth <sup>(19)</sup> provou em 1965 um teorema que Gödel <sup>(1)</sup> enunciou sem prova, o qual estabelece que a métrica por ele então apresentada (solução de Gödel) e a métrica do universo estático de Einstein, são as únicas soluções espaço-temporalmente homogêneas

as das equações de campo de Einstein (com constante cosmológica) com matéria incoerente e rotação rígida ( $\Omega = 0$  para a solução de Einstein,  $\Omega \neq 0$  para a de Gödel). Em relação às chamadas soluções tipo Gödel, caracterizadas por (2.5.3), sem especificar as funções  $H(\bar{r})$  e  $D(\bar{r})$ , Bampi e Zordan<sup>(20)</sup> mostraram que, supondo que o tensor momentum-energia seja o de um fluido perfeito, todas as soluções resultantes são isométricas à solução de Gödel.

Consideremos novamente os espaços-tempos esféricos e hiperbólicos (ou tipo Gödel espaço-temporalmente homogêneos), caracterizados pelas métricas (2.1.15)-(2.1.16). Para  $\alpha^2 \leq 2\beta^2$  no caso hiperbólico ( $\epsilon = 1$ ) (ou  $0 \leq m^2 \leq 2\Omega^2$  no sistema cilíndrico), e para qualquer relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  no caso esférico ( $\epsilon = i$ ) (ou  $-\infty < m^2 < 0$ ), as classes de métricas correspondentes são soluções das equações de campo de Einstein e Einstein-Maxwell acopladas, admitindo como fontes de curvatura poeira carregada<sup>(21)</sup> ou poeira neutra mais um campo eletromagnético livre<sup>(22,6)</sup>. Rebouças e Tiomno<sup>(6)</sup> estenderam o espectro de soluções de  $-\infty < m^2 \leq 2\Omega^2$  (ou  $\alpha^2 \geq 2\beta^2$ ,  $\epsilon = 1$ ) até  $-\infty < m^2 \leq 4\Omega^2$ , (ou  $\alpha^2 \geq \beta^2$ ,  $\epsilon = 1$ ) adicionando à poeira e campo eletromagnético, um campo escalar sem massa, sendo que várias combinações com estas fontes são possíveis. Para o caso  $m^2 = 4\Omega^2$  ( $\alpha^2 = \beta^2$ ), somente um campo escalar puro é admissível ( $\rho, p, F^{AB} = 0$ ), com constante cosmológica  $\Lambda$  não nula.

Além disso, Rebouças e Tiomno<sup>(6)</sup> mostraram que qualquer solução tipo Gödel das equações de Einstein

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} = -\kappa T_{AB} - \Lambda \eta_{AB} \quad ,$$

que admita fontes de curvatura com  $T_{AB}$  independente de coordena-

das, é espaço-temporalmente homogênea.

Oliveira et al. (26), no contexto da teoria de Einstein-Cartan (27), estenderam o espectro das soluções dos modelos tipo Gödel homogêneos para  $m^2 > 4\Omega^2$  ( $\beta^2 > \alpha^2$ ,  $\epsilon = 1$ ). Como fonte eles utilizaram fluido perfeito com spin em rotação rígida, com distribuição de spin uniforme e paralela ao eixo de rotação. Tais modelos abrangem todas as soluções tipo Gödel espaço-temporalmente homogêneas ( $-\infty < m^2 < \infty$ ).

Nos modelos tipo Gödel homogêneos, o campo de velocidades comovente com o fluido perfeito (quando ele estiver presente), é dado nas coordenadas cilíndricas  $(t, \phi, \bar{r}, z)$ , por  $V^\mu = \delta^\mu_0$ . A este campo estão associados os seguintes parâmetros cinemáticos (28)

$$a^\mu = V^\mu{}_{; \nu} V^\nu = 0 \quad , \quad (2.5.1a)$$

$$\theta = V^\mu{}_{; \mu} = 0 \quad , \quad (2.5.1b)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} V^{\alpha;\beta} - \frac{1}{3} \theta h^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.5.1c)$$

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha\beta\gamma} V_\alpha h_\beta^\lambda h_\gamma^\rho V_{\lambda;\rho} = \Omega \delta^\mu_3 \quad , \quad (2.5.1d)$$

onde  $a^\mu$  é a aceleração,  $\theta$  a expansão,  $\sigma^{\mu\nu}$  o tensor de cisalhamento,  $\omega^\mu$  o vetor de rotação e  $h^{\mu\nu}$  o projetor no espaço de repouso local de  $V^\mu$ :

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu \quad . \quad (2.5.2)$$

Portanto, as partículas do fluido perfeito estão em um movimento geodésico com rotação rígida constante de magnitude  $\Omega$ , nestes modelos.

### CAPÍTULO 3

## TRANSFORMAÇÕES DE PARIDADE SOBRE OS ESPAÇOS-TEMPOS ESFÉRICOS E HIPERBÓLICOS, CAMPO DE NEUTRINOS

No capítulo anterior introduzimos sobre as variedades esféricas ( $S^3 \times R$ ) e hiperbólicas ( $H^3 \times R$ ) — definidas pelas álgebras de Lie (2.1.7) ou (2.1.8) —, uma estrutura Lorentziana de espaço-tempo através das métricas  $g_E$  e  $g_D$ . Tais métricas foram definidas de modo a satisfazerem às relações de produto escalar

$$g_E(X_A, X_B) = \eta_{AB} \quad , \quad g_D(\tilde{X}_A, \tilde{X}_B) = \eta_{AB} \quad ,$$

onde os campos vetoriais  $\tilde{X}_A$  e  $X_A$  formam bases de campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita, respectivamente, sendo definidos por (2.1.10).

Portanto, se tomarmos uma dada variedade ( $S^3 \times R$  ou  $H^3 \times R$ ), com um determinado sistema de coordenadas definido sobre ela, então podemos definir sobre esta variedade, as métricas  $g_E$  e  $g_D$ , construídas a partir de 1-formas invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. Tais métricas têm formas diferentes. Em particular, nos sistemas coordenados definidos sobre  $S^3$  e  $H^3$  através de (1.3.2), elas diferem apenas no sinal do coeficiente do termo cruzado  $C(r)$  das métricas, como é evidente de (2.1.15) — (2.1.16). Equivalentemente, podemos afirmar que as métricas in-

variantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$  diferem entre si somente por uma transformação imprópria  $\eta \rightarrow -\eta$  ou  $\chi \rightarrow -\chi$ , de coordenadas.

No Apêndice B mostramos que às métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$ , estão associados universos cujos campos de velocidades comoventes com o conteúdo material da fonte (quando este estiver presente)  $\chi$  têm vorticidades opostas em torno de  $z$ . De um ponto de vista de transformações ativas, portanto, passar de um universo a outro é equivalente a inverter a rotação do universo. Tal operação ativa de inversão, entretanto, no contexto da gravitação clássica, não introduz universos fisicamente distintos entre si, desde que para "voltar" bastaria a realização de uma transformação passiva  $\eta \rightarrow -\eta$  (ou  $\chi \rightarrow -\chi$ ) nas coordenadas.

Nosso objetivo neste Capítulo é mostrar que, quando temos neutrinos acoplados com a geometria dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, a transformação ativa que leva  $g_E$  a  $g_D$  é, ou uma transformação que liga dois universos fisicamente distintos, ou uma transformação que é proibida sobre o universo. Consideraremos neutrinos porque estes, por terem um único tipo de helicidade, permitem uma definição <sup>invariante e absoluta</sup> ~~de~~ <sup>de</sup> ~~convenções~~ entre "esquerda" e "direita".

Inicialmente, faremos uma breve introdução ao formalismo da equação de Dirac no espaço-tempo <sup>Riemanniano</sup>. Em seguida, aplicaremos especificamente este formalismo para o caso dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , e examinaremos o efeito das transformações ativas que levam  $g_E$  a  $g_D$ .

### 3.1 - ESPINORES E MATRIZES DE DIRAC NO ESPAÇO-TEMPO RIEMANNIANO

Na tentativa de unificação da teoria quântica e da teo

ria da gravitação de Einstein, podemos ter em mente dois diferentes esquemas. Num primeiro, temos teorias que quantizam o campo gravitacional, introduzindo partículas (como o gráviton) que interagem com os outros campos quantizados da natureza, de modo a não estarem em desacordo com os resultados previstos pela teoria da relatividade geral clássica. Além das dificuldades teóricas e lógicas inerentes a estas teorias quânticas de campo, este esquema não presta-se muito bem a cálculos em sistemas astrofísicos, nos quais usualmente são investigados fenômenos em escalas que são várias ordens de grandeza maiores do que o comprimento de Planck. Em tais escalas, o possível comportamento quântico da gravitação não se manifestaria. Um segundo esquema, que é aqui mais apropriado, consiste em quantizar somente o campo de matéria, mantendo a descrição clássica do campo gravitacional através do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . A interação entre campos de matéria e gravitação é então descrita, não através da adição de novos termos à Lagrangiana do sistema material e seu campo gravitacional, mas pela modificação das equações de campo da matéria, através de um acoplamento mínimo com a gravitação. Tomaremos este ponto de vista, e abordaremos aqui a generalização da equação de Dirac para um espaço-tempo ~~Riemanniano~~, já que nosso objetivo é investigar nos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, os efeitos de transformações físicas (ativas) que levam universos com métricas  $g_E$  a universos com métricas  $g_D$ , com um campo de neutrinos acoplado gravitacionalmente.

No espaço-tempo de Minkowski  $M^4$ , os campos espinoriais podem formar um espaço base para todas as representações unitárias, irredutíveis do grupo de Poincaré, que possam ter alguma relevância física. Isto sugere que os campos espinoriais possam ser o tipo mais geral de campos em  $M^4$  que podem aparecer em uma

teoria quântica especial-relativisticamente covariante <sup>(11)</sup>. Particularmente, férmions em  $M^4$  podem ser descritos através de espinores com quatro componentes, os quais são objetos do espaço base da representação  $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$  do grupo de Lorentz restrito <sup>(29,30)</sup>.

A definição da propriedade de transformação de espinores sob as isometrias de Lorentz, é essencial na definição de campos espinoriais com  $M^4$ . Entretanto, a atuação do grupo de Lorentz não está definida sobre um espaço-tempo curvo como em  $M^4$ , de modo que esta propriedade característica de campos espinoriais não pode ser transportada de um modo natural e direto para o espaço-tempo curvo <sup>(31)</sup>. Portanto, devemos reformular a noção de campos espinoriais de tal modo que ela se aplique a espaços-tempos curvos, mantendo-se a mesma para o caso de  $M^4$ .

A proposta que aqui seguiremos, conhecida desde 1928 <sup>(32,33,34,35)</sup>, com o intuito de generalizar a equação de Dirac, consiste basicamente nos seguintes pontos:

- (a) - as componentes de um espinor são consideradas como sendo invariantes sob transformações de coordenadas na variedade;
- (b) - tendo em vista que o espaço-tempo tem estrutura local <sup>m</sup>Min-kowskiana, toda a teoria de representações do grupo de Lorentz é transportada, independentemente, para cada ponto da variedade.

Tal esquema de generalização é realizado de modo mais simples, utilizando-se o formalismo de tetradas sobre a variedade de espaço-tempo <sup>(38)</sup>. Como no caso de  $M^4$ , podemos representar um observador juntamente com seus instrumentos de medida em um evento  $x$ , em um espaço-tempo curvo  $(M, g)$ , por uma base local em

$x$ , formada por quatro vetores ortonormais  $\{e_A(x) | A=0,1,2,3\}$ , sendo denominada base de tetradas em  $x$ . Tal base, que tem componentes  $e_{(A)}^\alpha(x)$  na base de coordenadas ( $e_A = e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ ), pode ser escolhida, tendo em vista o caráter <sup>M</sup>Minkowskiano local da variedade, de tal modo que

$$\begin{aligned} g(e_A, e_B) &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta (e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha, e_{(B)}^\beta \partial/\partial x^\beta) - \\ &= g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \eta_{AB} \quad . \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Portanto, associada a dois diferentes observadores  $O_1$  e  $O_2$  em  $x$ , há uma transformação de Lorentz, definida por  $l^A_B(x)$ , onde

$$l^A_D(x) \eta_{AB} l^B_F = \eta_{DF} \quad , \quad (3.1.2)$$

que rotaciona a tetrada em  $O_1$ ,  $\{e_{(A)}(x)\}$ , até a tetrada de  $O_2$ ,  $\{\bar{e}_A(x)\}$  :

$$e_A(x) \rightarrow \bar{e}_A(x) = l^B_A(x) e_B(x) \quad . \quad (3.1.3)$$

Esta transformação de Lorentz atua somente no espaço tangente  $V_x$  de um evento  $x$  arbitrário do espaço-tempo, não tendo qualquer relação com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Uma base local de tetradas sobre uma variedade de espaço-tempo está então definida a menos de uma transformação de Lorentz local, que pode ser realizada independentemente em cada ponto da variedade.

Portanto, na formulação do conceito de espinores de Dirac no espaço-tempo curvo, a ação do grupo de Lorentz se dá independentemente sobre o espaço tangente a cada ponto da variedade.

→ Espinores de Dirac  $\Psi(x)$  no espaço-tempo ~~Riemanniano~~<sup>R</sup>, são definidos como sendo objetos de 4 componentes definidos no espaço base da representação  $(1/2, 1/2)$  do grupo de Lorentz local, que sob transformações de Lorentz locais transformam-se como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S[l(x)]\Psi(x) \quad , \quad (3.1.4a)$$

sendo que seu conjugado correspondente  $\tilde{\Psi}(x)$  transforma-se como

$$\tilde{\Psi}(x) \rightarrow \tilde{\Psi}'(x) = \tilde{\Psi}(x)S^{-1}[l(x)] \quad , \quad (3.1.4b)$$

onde  $S[l(x)]$  é uma matriz  $4 \times 4$  associada com a matriz de Lorentz  $l(x)$  na representação  $(1/2, 1/2)$ , com a restrição

$$\det S = 1 \quad .$$

Em termos de componentes espinoriais podemos reescrever (3.1.4) como

$$\Psi^a(x) \rightarrow \Psi'^a(x) = S^a_b(x)\Psi^b(x) \quad , \quad (3.1.5a)$$

$$\Psi_a(x) \rightarrow \Psi'_a(x) = \Psi_b(x)(S^{-1})^b_a \quad . \quad (3.1.5b)$$

De acordo com (a), definimos que, sob transformações de coordenadas sobre a variedade  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x)$ , espinores transformam-se como escalares:

$$\Psi'(x') = \Psi(x) \quad . \quad (3.1.6)$$

A conexão fundamental entre espaço-tempo e spin é fei-

ta através da definição do campo de matrizes de Dirac  $\gamma^\mu(x)$  sobre a variedade. Do ponto de vista do formalismo de espinores numa base de tetradas, utilizando a base  $\{e_{(A)}^\alpha = e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha\}$ , definimos este campo de matrizes, pela relação

$$\gamma^\mu(x) = e_{(A)}^\mu(x) \gamma^A, \quad (\mu, A = 0, 1, 2, 3) \quad (3.1.7)$$

onde  $\gamma^A$  são as matrizes constantes de Dirac, que satisfazem à relação de anticomutação (29, 36, 37)

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\eta^{AB} I \quad . \quad (3.1.8)$$

$\eta^{AB}$  é a matriz inversa de  $\eta_{AB}$  e  $I$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ . De acordo com a relação (3.1.8) estas matrizes constituem, na base dos espinores de Dirac, uma representação para a álgebra de Clifford (39) associada à métrica de Minkowski  $\eta_{AB}$ .

De (3.1.7) e (3.1.8) temos então

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2\eta^{AB} e_{(A)}^\mu(x) \cdot e_{(B)}^\nu(x)$$

ou

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x) \quad , \quad (3.1.9)$$

de modo que as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  constituem, em cada ponto da variedade, na base dos espinores de Dirac, uma álgebra de Clifford associada à métrica  $g^{\mu\nu}(x)$ .

Sob rotações locais de Lorentz (cf. (3.1.4)), as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  transformam-se como

$$\gamma^\mu(x) \rightarrow \gamma'^\mu(x) = S(x) \gamma^\mu(x) S^{-1}(x) \quad . \quad (3.1.10)$$

No nosso formalismo de tetradas, esta transformação é gerada dando-se à base de tetradas a rotação de Lorentz local correspondente:

$$\gamma'^{\mu}(x) = l_{A}^{B}(x) e_{(B)}^{\mu} \gamma^{A} \quad , \quad (3.1.11)$$

de modo que de (3.1.10) temos

$$\gamma'^{\mu}(x) = l_{A}^{B}(x) e_{(B)}^{\mu}(x) \gamma^{A} = S(x) e_{(B)}^{\mu}(x) \gamma^{B} S^{-1}(x)$$

ou

$$l_{A}^{B}(x) \gamma^{A} = S(x) \gamma^{B} S^{-1}(x) \quad . \quad (3.1.12)$$

De (3.1.12), temos

$$S \gamma^{B} = l_{A}^{B} \gamma^{A} S \quad . \quad (3.1.13)$$

Tomando a Hermitiana conjugada desta expressão obtemos

$$(S \gamma^{B})^{\dagger} = l_{A}^{B} (\gamma^{A} S)^{\dagger}$$

ou

$$(\gamma^{B})^{\dagger} S^{\dagger} = l_{A}^{B} S^{\dagger} (\gamma^{A})^{\dagger} \quad . \quad (3.1.14)$$

Utilizaremos daqui em diante a seguinte representação para as matrizes constantes de Dirac:

$$\gamma^{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{k} \\ -\sigma^{k} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad (3.1.15)$$

onde  $\sigma^{k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.1.16)$$

Nesta representação temos então

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (3.1.17)$$

$$(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.1.18)$$

de modo que

$$(\gamma^A)^\dagger = \gamma^0 \gamma^A \gamma^0 . \quad (A = 0, 1, 2, 3) . \quad (3.1.19)$$

A expressão (3.1.14) pode então ser escrita como

$$\gamma^0 \gamma^B \gamma^0 S^\dagger = 1_A^B S^\dagger \gamma^0 \gamma^B \gamma^0 .$$

Multiplicando esta expressão à esquerda e à direita por  $\gamma^0$ , temos

$$\gamma^B \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = 1_A^B \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^A .$$

Aplicando novamente (3.1.12), temos

$$\gamma^B \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 S \gamma^B - 1$$

ou

$$\gamma^B (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 S) = (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 S) \gamma^B . \quad (3.1.20)$$

Como as únicas matrizes que comutam com todas as matrizes  $\gamma^A$  são múltiplas da identidade, devemos ter

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 S = bI \quad . \quad (3.1.21)$$

Como nos restringimos a transformações de Lorentz locais próprias e ortócronas, tomamos  $b = 1$  <sup>(36)</sup>. Assim,

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1} \quad . \quad (3.1.22)$$

Esta expressão implica que o espinor  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ , onde  $\Psi^\dagger$  é o hermitiano conjugado de  $\Psi$ , transforma-se como um espinor conjugado em (3.1.4b). Isto é, se

$$\Psi' = S\Psi \quad ,$$

então, de (3.1.22),

$$(\Psi')^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 S^{-1}$$

ou

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} S^{-1} \quad , \quad (3.1.23)$$

que constitui a definição de espinor conjugado a  $\Psi$  do ponto de vista do formalismo de tetradas.

Sob transformações gerais de coordenadas sobre a variedade, as componentes  $e_{(A)}^\mu$  de uma base de tetradas transformam-se como vetores,

$$e_{(A)}^{\prime\mu} \gamma^A = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} e_{(A)}^\nu \gamma^A \quad ,$$

de modo que

$$\gamma^{\prime\mu} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \gamma^\nu \quad . \quad (3.1.24)$$

Ou seja, as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  transformam-se como 4-vetores sob transformações gerais de coordenadas sobre a variedade.

### 3.2 - DERIVADA COVARIANTE DO ESPINOR

Sob uma rotação de Lorentz local da base de tetradas, um espinor transforma-se de acordo com a lei definida em (3.1.4a),

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S[l(x)]\Psi(x) \quad , \quad (3.2.1)$$

de modo que a derivada ordinária do espinor transforma-se como

$$\Psi'_{,\mu} = (S\Psi)_{,\mu} = S_{,\mu}\Psi + S\Psi_{,\mu} \quad , \quad (3.2.2)$$

onde  $( )_{,\mu} \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Portanto, a derivada ordinária do espinor no espaço-tempo curvo não se transforma como tal. Vamos então introduzir a derivada covariante do espinor através da relação

$$\nabla_\alpha \Psi = \Psi_{,\alpha} - \Gamma_\alpha \Psi \quad , \quad (3.2.3)$$

$$\nabla_\alpha \Psi^a = \Psi^a_{,\alpha} - \Gamma_\alpha^a{}_b \Psi^b \quad , \quad (3.2.4)$$

onde as matrizes  $\Gamma_\alpha$  são denominadas conexões espinoriais, de modo que sob o grupo de transformações (3.2.1) a derivada covariante ainda se transforme como um espinor. A conexão espinorial deve então sofrer uma transformação tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\nabla' \Psi' = S \nabla \Psi \quad (3.2.5)$$

ou

$$\Psi'_{,\alpha} - \Gamma'_{\alpha} \Psi' = S(\Psi_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha} \Psi) \quad , \quad (3.2.6)$$

onde

$$\Psi' = S\Psi \quad .$$

Expressando o lado direito da equação (3.2.6) em termos de  $\Psi'$ , obtemos

$$\begin{aligned} S(\Psi_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha} \Psi) &= S[(S^{-1}\Psi')_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha} S^{-1}\Psi'] \\ &= \Psi'_{,\alpha} - (S_{,\alpha} S^{-1} - S\Gamma_{\alpha} S^{-1})\Psi' \quad , \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

de modo que a conexão espinorial, sob uma rotação da base local de tetradas, deve transformar-se de acordo com a lei

$$\Gamma'_{\alpha} = S_{,\alpha} S^{-1} + S\Gamma S^{-1} \quad , \quad (3.2.8)$$

ou, em termos de componentes espinoriais

$$\Gamma'^a_{\alpha d} = S^a_{b,\alpha} (S^{-1})^b_d + S^a_b \Gamma^b_{\alpha c} (S^{-1})^c_d \quad . \quad (3.2.9)$$

Sob transformações gerais de coordenadas  $x \rightarrow x'$  sobre a variedade, as conexões espinoriais transformam-se como covetores

$$\Gamma'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \Gamma_{\beta} \quad . \quad (3.2.10)$$

Para determinar a expressão da derivada covariante do espinor conjugado  $\bar{\Psi}(x)$ , notemos que a quantidade  $\bar{\Psi}(x)\Psi(x) = \Psi_a(x)\Psi^a(x)$  deve transformar-se como um escalar sob rotações da tetrada, de modo que

$$\nabla_{\alpha}(\bar{\Psi}\Psi) = (\bar{\Psi}\Psi)_{,\alpha} \quad . \quad (3.2.11)$$

Aplicando a regra de Leibnitz para a derivada covariante  $\nabla_{\alpha}$ , obtemos de (3.2.11)

$$(\nabla_{\alpha}\bar{\Psi})\Psi + \bar{\Psi}\nabla_{\alpha}\Psi = \bar{\Psi}\Psi_{,\alpha} + \bar{\Psi}_{,\alpha}\Psi \quad ,$$

ou seja,

$$(\nabla_{\alpha}\bar{\Psi})\Psi - \bar{\Psi}\Gamma_{\alpha}\Psi = \bar{\Psi}_{,\alpha}\Psi \quad ,$$

de modo que a derivada covariante do espinor conjugado  $\bar{\Psi}$  é dada por

$$\nabla_{\alpha}\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{,\alpha} + \bar{\Psi}\Gamma_{\alpha} \quad (3.2.12)$$

ou

$$\nabla_{\alpha}\Psi_a = \Psi_{a,\alpha} + \Psi_b\Gamma_{\alpha}^b{}_a \quad . \quad (3.2.13)$$

Se em lugar da base de coordenadas  $\{\partial/\partial x^{\mu}\}$  utilizarmos uma base de tetradas  $\{e_A = e_{(A)}^{\mu}\partial/\partial x^{\mu}\}$ , as expressões (3.2.3) e (3.2.12) assumirão respectivamente a forma

$$\nabla_A\Psi = e_A\Psi - \Gamma_A\Psi \quad , \quad (3.2.14)$$

$$\nabla_A\bar{\Psi} = e_A\bar{\Psi} + \bar{\Psi}\Gamma_A \quad , \quad (3.2.15)$$

onde

$$\Gamma_A = e_{(A)}^{\alpha}\Gamma_{\alpha} \quad (3.2.16)$$

e

$$\nabla_A = e_{(A)}^{\mu}\nabla_{\mu} \quad . \quad (3.2.17)$$

Assim, de acordo com as regras acima, podemos estender a noção de derivada covariante para objetos com índices tensoriais e espinoriais. Para um objeto  $B^{\lambda a}_b(x)$  arbitrário,

$$\nabla_{\alpha} B^{\lambda a}_b = (B^{\lambda a}_b)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} B^{\beta a}_b - \Gamma_{\alpha d}^a B^{\lambda d}_b + \Gamma_{\alpha b}^d B^{\lambda a}_d, \quad (3.2.18)$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  é a conexão do espaço-tempo. Analogamente ao caso da derivada covariante de um vetor, existe uma interpretação geométrica para a derivada covariante de um espinor <sup>(40,41)</sup>.

### 3.3 - COEFICIENTES DE FOCK-IVANENKO. EQUAÇÃO DE DIRAC

Por hipótese, consideraremos aqui somente espaços-tempos curvos que sejam ~~Riemannianos~~, de modo que a métrica deva satisfazer à relação

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.1)$$

De (3.1.9) temos então

$$\nabla_{\alpha} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) = 0. \quad (3.3.2)$$

Uma condição suficiente <sup>(13)</sup> para que (3.3.2) seja satisfeita é dada por

$$\nabla_{\alpha} \gamma^{\mu a}_b = 0. \quad (3.3.3)$$

A partir da condição (3.3.3) podemos agora determinar uma forma  $\rightarrow$  explícita para as conexões espinoriais no espaço-tempo ~~Riemanni~~

ano. De acordo com (3.2.18), podemos escrever (3.3.3) como

$$\nabla_{\alpha} \gamma^{\mu a}_{\ b} = \gamma^{\mu a}_{\ b, \alpha} + \{\alpha\beta\}^{\mu} \gamma^{\beta a}_{\ b} - \Gamma_{\alpha}^a \gamma^{\mu c}_{\ b} + \gamma^{\mu a}_{\ c} \Gamma_{\alpha}^c = 0, \quad (3.3.4)$$

onde

$$\{\alpha\beta\}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$$

são os símbolos de Christoffel associados à métrica  $g$  do espaço-tempo. Empregando (3.1.7), podemos reescrever (3.3.4) como

$$(e_{(A)}^{\mu})_{, \alpha} + e_{(A)}^{\beta} \{\alpha\beta\}^{\mu} \gamma^A - [\Gamma_{\alpha}^A, \gamma^A] e_{(A)}^{\mu} = 0. \quad (3.3.5)$$

Os coeficientes de rotação de Ricci são dados por

$$\Gamma_{AC}^D = e_{(A)}^{\alpha} e_{\mu}^{(D)} (e_{(A), \alpha}^{\mu} + e_{(A)}^{\beta} \{\beta\alpha\}^{\mu}) \quad , \quad (3.3.6)$$

de modo que (3.3.5) também pode ser escrita como

$$e_{\alpha}^{(C)} e_{(A)}^{\mu} \Gamma_{BC}^A \gamma^B - [\Gamma_{\alpha}^A, \gamma^A] e_{(A)}^{\mu} = 0 \quad ,$$

ou

$$\Gamma_{A\alpha}^B \gamma^A - [\Gamma_{\alpha}^B, \gamma^B] = 0 \quad , \quad (3.3.7)$$

onde

$$\Gamma_{A\alpha}^B = e_{\alpha}^{(C)} \Gamma_{AC}^B \quad .$$

Multiplicando a equação (3.3.7) à direita por  $\gamma_B = \gamma^A \eta_{AB}$ , obtemos

$$\Gamma_{BA\alpha}^B \gamma^A - \gamma^B \Gamma_{\alpha}^B \gamma_B + 4\Gamma_{\alpha} = 0 \quad , \quad (3.3.8)$$

onde utilizamos o fato de que

$$\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{BAC}$$

e

$$\gamma^A \gamma_A = 4 \quad .$$

A solução para a equação (3.3.8) é única, a menos de um vetor múltiplo da matriz identidade, sendo dada por

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} \Gamma_{BA\alpha} \gamma^B \gamma^A + A_\alpha I \quad , \quad (3.3.9)$$

onde  $A^\alpha$  é um campo vetorial real arbitrário, que pode eventualmente incorporar um campo eletromagnético externo, acoplado minimalmente com o campo  $\Psi$ . Como trataremos de neutrinos, cuja carga elétrica é zero, podemos tomar  $A_\alpha = 0$ , de modo que a conexão espinorial fica sendo dada por

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} \Gamma_{BA\alpha} \gamma^B \gamma^A \quad (3.3.10)$$

ou, numa base de tetradas  $\{e_A = e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha\}$  ,

$$\Gamma_C = e_{(C)}^\alpha \Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} \Gamma_{BAC} \gamma^B \gamma^A \quad . \quad (3.3.11)$$

As afinidades espinoriais expressas nesta forma são denominadas coeficientes de Fock-Ivanenko. Convém mencionar que esta forma da afinidade espinorial é consequência da escolha da solução da equação (3.3.2) dada por (3.3.3). Tal escolha não é única, sendo no entanto a mais simples no tratamento da interação neutrino-gravitação — por exemplo, o tensor momentum-energia do campo de Dirac em interação com a gravitação tem para (3.3.3) a sua forma da relatividade restrita, a menos da substituição  $\partial/\partial x^\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$ .

→ A equação de Dirac é então generalizada para o espaço-tempo Riemanniano, a partir de sua forma usual, através das substituições

$$\partial/\partial x^\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial/\partial x^\mu - \Gamma_\mu \quad , \quad \gamma^\mu = \text{const.} \rightarrow \gamma^\mu(x) \quad (3.3.12)$$

ou seja,

$$[i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m]\Psi(x) = 0 \quad , \quad (3.3.13)$$

ou

$$[i\gamma^\mu(\partial/\partial x^\mu - \Gamma_\mu) - m]\Psi = 0 \quad . \quad (3.3.14)$$

Esta equação de Dirac generalizada é portanto covariante sob

(i) rotação da tetrada

$$\Psi \rightarrow S\Psi \quad , \quad \gamma^\mu \rightarrow S\gamma^\mu S^{-1} \quad , \quad \Gamma_\mu \rightarrow (S\Gamma_\mu + S_{,\mu})S^{-1} \quad ; \quad (3.3.15)$$

(ii) transformação geral de coordenadas

$$\Psi \rightarrow \Psi \quad , \quad \gamma^\mu \rightarrow (\partial x'^\mu / \partial x^\nu) \gamma^\nu \quad , \quad \Gamma_\mu \rightarrow (\partial x^\nu / \partial x'^\mu) \Gamma_\nu \quad . \quad (3.3.16)$$

Para o neutrino <sup>(42)</sup>, temos  $m = 0$ , de modo que a equação de Dirac torna-se

$$\gamma^\mu(\partial/\partial x^\mu - \Gamma_\mu)\Psi = 0 \quad , \quad (3.3.17)$$

ou, numa base de tetradas  $\{e_{(A)}^\alpha \partial/\partial x^\alpha\}$ ,

$$\gamma^A(e_{(A)}^\mu \partial/\partial x^\mu - \Gamma_A)\Psi = 0 \quad . \quad (3.3.18)$$

Apresentamos assim o formalismo essencial, que representa uma proposta para descrição da interação entre férmions e

o campo gravitacional, que será utilizado na descrição de neutrinos nos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos. Uma excelente revisão sobre formalismos de descrição de espinores em espaços curvos, seguida de uma aplicação ao caso de neutrinos, nos é dada por Brill e Wheeler <sup>(42)</sup>.

### 3.4 - EQUAÇÃO DE DIRAC PARA O NEUTRINO NOS ESPAÇOS-TEMPOS ESFÉRICO E HIPERBÓLICO

Vamos agora aplicar o formalismo exposto nas secções anteriores para examinar a forma da equação de Dirac para neutrinos nos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, com métricas  $g_E$  e  $g_D$  dadas por (2.1.15)-(2.1.16). Reescrevendo-as de uma forma unificada, temos

$$\begin{aligned}
 g(e) = & [\alpha^2 \cosh^4(\epsilon r/2) - (\beta^2/4\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r)] d\chi^2 + \\
 & + [\alpha^2 \sinh^4(\epsilon r/2) - (\beta^2/4\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r)] d\eta^2 + \\
 & + e[(1/2)(\alpha^2 - \beta^2/\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r)] d\chi d\eta - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2 \quad , \quad (3.4.1)
 \end{aligned}$$

onde

$$g(e=-1) = g_D \quad , \quad g(e=1) = g_E \quad , \quad (3.4.2)$$

sendo que para  $\epsilon = i$  estas métricas referem-se a espaços-tempos esféricos e, para  $\epsilon = 1$ , a espaços-tempos hiperbólicos.

No que se segue, vamos considerar regiões dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos tais que as linhas coordenadas

associadas aos campos vetoriais  $\partial/\partial X$  e  $\partial/\partial \eta$ , tenham caráter temporal e espacial, respectivamente.

Em lugar de utilizarmos para estes espaços-tempos as bases de 1-formas locais  $\{\theta^A\}$  e  $\{\theta^{\lambda A}\}$ , dadas por (2.1.5)-(2.1.6), de modo que

$$g_E = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad , \quad g_D = \eta_{AB} \theta^{\lambda A} \theta^{\lambda B} \quad ,$$

tomaremos outra,  $\{\hat{\theta}^A(e)\}$ , que contenha o parâmetro "e" de modo mais simples (isto é, fora dos argumentos), tal que

$$g(e) = \eta_{AB} \hat{\theta}^A \hat{\theta}^B \quad . \quad (3.4.3)$$

Para isso, definimos um novo parâmetro  $\lambda$ , e novas coordenadas  $\bar{\chi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,

$$\lambda = (\alpha^2 - \epsilon^2 \beta^2) / \beta^2 \quad , \quad \bar{\chi} = \beta \chi \quad , \quad \bar{\eta} = \beta \eta \quad , \quad (3.4.4)$$

de modo que (3.4.1) torna-se

$$g = (\lambda \cosh^2(\epsilon r/2) + \epsilon^2) \cosh^2(\epsilon r/2) d\bar{\chi}^2 + [(\lambda/\epsilon^2) \sinh^2(\epsilon r/2) - 1] (1/\epsilon^2) \\ \times \sinh^2(\epsilon r/2) d\bar{\eta}^2 + (e\lambda/2) \sinh^2(\epsilon r) d\bar{\chi} d\bar{\eta} - (\beta^2/4) dr^2 - dz^2 \quad . \quad (3.4.5)$$

Podemos então escolher a seguinte base local de 1-formas, tal que (3.4.3) seja satisfeita:

$$\hat{\theta}^0 = \sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)} \cosh(\epsilon r/2) d\bar{\chi} + \frac{e\lambda \sinh^2(\epsilon r)}{4\sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)} \cosh(\epsilon r/2)} d\bar{\eta} \quad ,$$

$$\hat{\theta}^1 = \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \lambda} \sinh(\epsilon r/2)}{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)}} d\bar{\eta} \quad ,$$

$$\hat{\theta}^2 = (\beta/2) dr \quad ,$$

$$\hat{\theta}^3 = dz \quad . \tag{3.4.6}$$

Esta base de tetradas também pode ser expressa em termos da matriz  $(e^{(A)}_{\alpha})$ , cujos componentes são definidos pela relação

$$\theta^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha} \tag{3.4.7}$$

e pela escolha  $x^{\alpha} = (X, \eta, r, z)$ . Considerando o índice de tetradas como índice de linhas e o de coordenadas como sendo o de colunas, obtemos de (3.4.6)

$$(e^{(A)}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)} \cosh(\epsilon r/2) & \frac{\epsilon^2 e \lambda \sinh^2(\epsilon r)}{4 \sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)} \cosh(\epsilon r/2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \lambda} \sinh(\epsilon r/2)}{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 + \lambda \cosh^2(\epsilon r/2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.8}$$

A base vetorial de tetradas  $\{e_A = e^{(A)}_{\alpha} \partial/\partial x^{\alpha}\}$ , dual à base de 1-formas  $\{\hat{\theta}^A\}$ , pode ser obtida a partir da relação

$$\langle \hat{\theta}^B, e_A \rangle = \delta_A^B \tag{3.4.9}$$

ou, em termos de componentes

$$e^{(B)}_{\alpha} e^{(A)\alpha} = \delta^B_A, \quad (3.4.10)$$

de modo que  $e^{(A)\alpha}$  forma a matriz  $(e^{(A)\alpha}) = (e^{(A)}_{\alpha})^{-1}$ , ou seja,

$$(e^{(A)\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda \cosh^2(\varepsilon r/2)} \cosh(\varepsilon r/2)} & \frac{-\varepsilon^3 e \lambda \sinh(\varepsilon r/2) \cosh^{-2}(\varepsilon r/2)}{4 \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda} \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda \cosh^2(\varepsilon r/2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda \cosh^2(\varepsilon r/2)}}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1} \sinh(\varepsilon r/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

Os coeficientes de rotação de Ricci  $\Gamma^A_{BC}$ , não nulos, computados para estas tetradas são dados, com  $\Gamma_{ABC} = \eta_{AD} \Gamma^D_{BC}$ , por

$$\begin{aligned} \Gamma_{020} &= \frac{\varepsilon [2\lambda \cosh^2(\varepsilon r/2) + \varepsilon^2] \sinh(\varepsilon r/2)}{[\lambda \cosh^2(\varepsilon r/2) + \varepsilon^2] \beta \cosh(\varepsilon r/2)}, \\ \Gamma_{121} &= \frac{-\varepsilon (\lambda + \varepsilon^2) \cosh(\varepsilon r/2)}{[\lambda \cosh^2(\varepsilon r/2) + \varepsilon^2] \beta \sinh(\varepsilon r/2)}, \\ \Gamma_{120} &= \frac{\varepsilon \lambda \sqrt{\lambda + \varepsilon^2} \cosh^2(\varepsilon r/2)}{[1 + \varepsilon^2 \lambda \cosh^2(\varepsilon r/2)] \beta}, \\ \Gamma_{102} &= \Gamma_{021} = \Gamma_{120}, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

sendo que as demais componentes estão determinadas através da

relação de antissimetria  $\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{BAC}$ .

Os coeficientes de Fock-Ivanenko não nulos, definidos por (3.3.11), são então dados na base de tetradas  $\{e_{(A)}^\alpha\}$  por

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= -\frac{1}{2} [\Gamma_{020} \gamma^0 \gamma^2 + \Gamma_{120} \gamma^1 \gamma^2] \quad , \\ \Gamma_1 &= -\frac{1}{2} [\Gamma_{121} \gamma^1 \gamma^2 + \Gamma_{021} \gamma^0 \gamma^2] \quad , \\ \Gamma_2 &= -\frac{1}{2} \Gamma_{102} \gamma^1 \gamma^0 \quad .\end{aligned}\tag{3.4.13}$$

Em termos de funções de  $r$ ,  $\bar{a}(r)$ ,  $\bar{b}(r)$  e  $\bar{c}(r)$  definidas por

$$\begin{aligned}\Gamma_{102} &= \Gamma_{021} = \Gamma_{120} = 2e\bar{a}(r) \quad , \\ \Gamma_{020} &= 2\bar{b}(r) \quad , \\ \Gamma_{121} &= 2\bar{c}(r) \quad ,\end{aligned}\tag{3.4.14}$$

os coeficientes de Fock-Ivanenko (3.4.13) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \bar{b} \gamma^2 \gamma^0 + e\bar{a} \gamma^2 \gamma^1 \quad , \\ \Gamma_1 &= \bar{c} \gamma^2 \gamma^1 + e\bar{a} \gamma^2 \gamma^0 \quad , \\ \Gamma_2 &= e\bar{a} \gamma^0 \gamma^1 \quad ,\end{aligned}\tag{3.4.15}$$

onde utilizamos a propriedade das matrizes constantes de Dirac  $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^k)^2 = I$ , decorrente da relação de anticomutação (3.1.8).

A expressão da equação de Dirac para o neutrino, numa base de tetradas é dada por (3.3.18):

$$\gamma^A (e_{(A)}^\mu \partial_\mu - \Gamma_A) \Psi = 0$$

onde

$$\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu} \quad , \quad x^{\mu} = (x, \eta, r, z) \quad .$$

Para este caso temos

$$\begin{aligned} \gamma^0 e_{(0)}^0 \partial_0 \Psi = & [\gamma^0 \Gamma_0 - \gamma^1 (e_{(1)}^0 \partial_0 + e_{(1)}^1 \partial_1 - \Gamma_1) - \gamma^2 (e_{(2)}^2 \partial_2 - \Gamma_2) - \\ & - \gamma^3 e_{(3)}^3 \partial_3] \Psi \quad , \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma^0 \partial_0 \Psi = & [(\bar{b}/e_{(0)}^0) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 + e(\bar{a}/e_{(0)}^0) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 - \gamma^1 (e_{(1)}^0/e_{(0)}^0) \partial_0 - \\ & - \gamma^1 (e_{(1)}^1/e_{(0)}^0) \partial_1 + (\bar{c}/e_{(0)}^0) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^1 + e(\bar{a}/e_{(0)}^0) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0 - \\ & - \gamma^2 (e_{(2)}^2/e_{(0)}^0) \partial_2 + e(\bar{a}/e_{(0)}^0) \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 - \gamma^3 (e_{(3)}^3/e_{(0)}^0) \partial_3] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Para facilitar a notação, vamos definir as seguintes funções de  $r$ :

$$\begin{aligned} a = \bar{a}/e_{(0)}^0 \quad , \quad b = \bar{b}/e_{(0)}^0 \quad , \quad c = \bar{c}/e_{(0)}^0 \quad , \\ l = e(e_{(1)}^0/e_{(0)}^0) \quad , \quad m = e_{(1)}^1/e_{(0)}^0 \quad , \quad n = e_{(2)}^2/e_{(0)}^0 \\ q = 1/e_{(0)}^0 \quad . \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Multiplicando (3.4.17) por  $i\gamma^0$ , rearranjando as matrizes de Dirac de acordo com a propriedade de anticomutação (3.1.8) e utilizando (3.4.15), obtemos

$$i\partial_0\Psi = i[b\gamma^2\gamma^0 - ea\gamma^2\gamma^1 - e\gamma^0\gamma^1\partial_0 - m\gamma^0\gamma^1\partial_1 + c\gamma^0\gamma^2 - n\gamma^0\gamma^2\partial_2 - q\gamma^0\gamma^3\partial_3]\Psi \quad , \quad (3.4.19)$$

onde as quantidades  $a, b, c, l, m, n, q$  são funções somente de  $r$  e não contêm o parâmetro "e".

Como as métricas  $g(e)$  admitem os campos vetoriais  $\partial/\partial\chi, \partial/\partial\eta$  e  $\partial z$  como vetores de Killing, podemos expressar o espinor  $\Psi$  em termos de modos globais invariantes <sup>(43,44)</sup>  $\xi, \kappa$  e  $v$  :

$$\Psi(\chi, \eta, r, z) = \phi(r) e^{-i\xi\chi} e^{-i\kappa\eta} e^{-ivz} \quad , \quad (3.4.20)$$

onde  $\phi(r)$  é um espinor que depende só de  $r$ . A equação de Dirac pode agora ser escrita como uma equação de autovalores:

$$\xi\phi(r) = [\gamma^2\gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) - \gamma^0\gamma^1 (el\xi+m\kappa) - \gamma^2\gamma^1 iea + \gamma^0\gamma^3 qv]\phi(r) \quad . \quad (3.4.21)$$

Por hipótese,  $\chi$  é uma coordenada temporal,  $\eta$  e  $z$  coordenadas espaciais. Podemos então interpretar  $\xi$  como um modo invariante de energia, sendo  $v$  e  $\kappa$  modos de momentum. Portanto, o operador no lado direito da equação (3.4.21) pode ser identificado como o operador Hamiltoniano do campo de neutrinos, tendo autovalores  $\xi$ . Ou seja,

$$H = \gamma^2\gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) - \gamma^0\gamma^1 (el\xi+m\kappa) - \gamma^2\gamma^1 iea + \gamma^0\gamma^3 qv \quad . \quad (3.4.22)$$

As matrizes de spin são definidas por

$$\Sigma^i = \gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j \quad . \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4.23)$$

Na representação (3.1.15)-(3.1.16), temos

$$\Sigma^i = \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} , \quad (3.4.24)$$

com

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.4.25)$$

Os operadores de spin  $\Sigma^i$  são geradores, no espaço de espinores de Dirac, de uma representação das rotações em torno dos eixos espaciais determinados pelos vetores tipo espaço da base de tetradas, atuando na parte independente do tempo do espinor de Dirac.

O operador Hamiltoniano (3.4.22), escrito em termos destes operadores de spin, assume a forma

$$H = -\gamma^5 \Sigma^2 i(b-c+n\partial/\partial r) - \gamma^5 \Sigma^1 (e\ell\xi+m\kappa) + \gamma^5 \Sigma^3 (\gamma^5 ea+qv) , \quad (3.4.26)$$

ou

$$H = \gamma^5 \vec{\Sigma} [\vec{n}_1 (-e\ell\xi-m\kappa) + \vec{n}_2 i(-b+c-n\partial/\partial r) + \vec{n}_3 (\gamma^5 ea+qv)] , \quad (3.4.27)$$

onde

$$\vec{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3) , \quad \vec{n}_1 = (1, 0, 0) , \quad \vec{n}_2 = (0, 1, 0) , \quad \vec{n}_3 = (0, 0, 1) . \quad (3.4.28)$$

Definindo o operador generalizado de momentum  $\vec{\pi}$  por

$$\vec{\pi} = \vec{n}_1 (-e\ell\xi-m\kappa) + \vec{n}_2 i(-b+c-n\partial/\partial r) + \vec{n}_3 (\gamma^5 ea+qv) , \quad (3.4.29)$$

podemos reescrever (3.4.27) como

$$H = \gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi} \quad (3.4.30)$$

Como o operador  $\gamma^5$  comuta com H, podemos tomar autoestados de H

que sejam simultaneamente autoestados  $\gamma^5$ . Ou seja,

$$H\phi(r) = \xi\phi(r) \quad , \quad (3.4.31)$$

$$\gamma^5\phi(r) = L\phi(r) \quad , \quad (3.4.32)$$

com  $L^2 = 1$ .

O operador  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi}$  pode ser interpretado como sendo um operador de "projeção" do spin sobre o momentum  $\vec{\pi}$ , associado ao neutrino. Como

$$\gamma^5\phi(r) = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi}}{\xi} \phi(r) \quad , \quad (3.4.33)$$

o operador  $\gamma^5$  pode ser considerado um operador de helicidade , sendo a quantidade L um autovalor associado ao autoestado de helicidade do neutrino. Portanto, os espinores

$$\Psi(L, \xi, \kappa, \nu) = \phi(L) e^{-i\xi\chi} e^{-i\kappa\eta} e^{-i\nu z} \quad , \quad (3.4.34)$$

são autoestados de energia  $\xi$ , momentum  $\kappa$ ,  $\nu$ , e helicidade L, para neutrinos nos espaços-tempos esféricos ou hiperbólicos.

Sejam  $\Psi(L, \xi, \kappa, \nu)$  autoestados que descrevem um campo de neutrinos em um espaço-tempo esférico ou hiperbólico ( para regiões em  $r$  e relações de  $\alpha^2/\beta^2$  tais que  $\chi$  seja uma coordenada temporal, e  $\eta$  uma espacial) que, no sistema de coordenadas  $x^\mu = (\chi, \eta, r, z)$ , tem métrica na forma  $g_D$  (cf. (3.4.1)). A correspondente equação de Dirac para o neutrino é obtida fazendo-se  $\epsilon = -1$  em (3.4.21). Ou seja,

$$\xi\phi(L) = [\gamma^2\gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) - \gamma^0\gamma^1(-l\xi+m\kappa) + \gamma^2\gamma^1 ia + \gamma^0\gamma^3 q\nu] \phi(L) \quad . \quad (3.4.35)$$

Consideremos agora as seguintes transformações "físicas" (ou ativas) sobre o sistema físico constituído pelo espaço-tempo com métrica  $g_D$ , mais neutrinos:

- (i) inversão da rotação<sup>(\*)</sup> da matéria do universo;
- (ii) inversão do momentum  $\kappa$ , associado à coordenada  $\eta$ , dos neutrinos.

O efeito da inversão da rotação na equação de Dirac (3.4.35) é obtido fazendo-se  $e = +1$  em (3.4.21), levando a métrica da forma  $g_D$  à forma  $g_E$ . Como é mostrado no Apêndice B, para um mesmo sistema de coordenadas,  $g_E$  e  $g_D$  descrevem universos com rotações opostas. Por outro lado, o efeito da inversão de momentum é obtido somente fazendo-se a substituição  $\kappa \rightarrow -\kappa$  em (3.4.35). Depois destas transformações, a equação de Dirac assume a forma

$$\xi \phi'(L') = [\gamma^2 \gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) + \gamma^0 \gamma^1 (-l\xi + m\kappa) - \gamma^2 \gamma^1 i a + \gamma^0 \gamma^3 qv] \phi'(L') . \quad (3.4.36)$$

O novo espinor  $\phi'(L')$  está relacionado com  $\phi(L)$ , através de uma transformação de simetria no espaço base da representação  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  do grupo de Lorentz local, determinada por uma matriz constante não-singular C:

$$\phi'(L') = C\phi(L) . \quad (3.4.37)$$

Substituindo (3.4.37) em (3.4.36) obtemos

$$\xi \phi(L) = C^{-1} [\gamma^2 \gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) + \gamma^0 \gamma^1 (-l\xi + m\kappa) - \gamma^2 \gamma^1 i a + \gamma^0 \gamma^3 qv] C\phi(L) . \quad (3.4.38)$$

---

(\*) Rotação associada a um referencial comoviente com o fluido cosmológico, quando ele estiver presente.

Portanto, comparando (3.4.38) com (3.4.35), vemos que a matriz C deve ser tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\begin{aligned}
 C^{-1} [\gamma^2 \gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) + \gamma^0 \gamma^1 (-l\xi+m\kappa) - \gamma^2 \gamma^1 ia \\
 + \gamma^0 \gamma^3 qv] C = \gamma^2 \gamma^0 i(b-c+n\partial/\partial r) - \gamma^0 \gamma^1 (-l\xi+m\kappa) + \\
 + \gamma^2 \gamma^1 ia + \gamma^0 \gamma^3 qv \quad . \quad (3.4.39)
 \end{aligned}$$

Uma solução não singular para esta equação é dada por

$$C = \gamma^1 \quad , \quad (3.4.40)$$

de modo que

$$\phi'(L') = \gamma^1 \phi(L) \quad . \quad (3.4.41)$$

Como  $\gamma^1$  anticomuta com  $\gamma^5$ , temos

$$\gamma^1 \gamma^5 \phi(L) = L \gamma^1 \phi(L) \quad ,$$

e

$$\gamma^5 (\gamma^1 \phi(L)) = -L \gamma^1 \phi(L) \quad , \quad L' = -L \quad . \quad (3.4.42)$$

Portanto, as transformações físicas que consistem em inverter a rotação da matéria do universo e inverter o momentum  $\kappa$  (associado à coordenada  $\eta$ ) de neutrinos, invertem a helicidade destes neutrinos, no sentido de que estados de neutrinos  $\phi(L)$  são levados em estados de neutrinos  $\phi'(L')$  (cf. eqs. (3.4.41)) de helicidade oposta. Se num dado universo, esférico ou hiperbólico, admitirmos a existência de neutrinos com um tipo de helicidade somente, então, após as transformações acima mencionadas, obtemos um outro universo em que neutrinos têm sua helicidade opos-

ta.

Por exemplo, consideremos um universo com métrica  $g_D$  no qual autoestados  $\Psi_L$  associados aos neutrinos deste universo satisfazem à condição  $\Psi_L = (1/2)(1-\gamma^5)\Psi$ , sendo  $\Psi$  um espinor de quatro componentes, solução da equação de Dirac para o neutrino, de modo que  $\gamma^5\Psi_L = -\Psi_L$  (helicidade negativa). Então, no universo antípoda, com vorticidade da matéria em relação à bússola de inércia e momentum  $\kappa$  dos neutrinos invertidos, os autoestados associados aos neutrinos, por sua vez, deverão ser dados por  $\Psi_R = (1/2)(1+\gamma^5)\Psi$ , de modo a termos sempre  $\gamma^5\Psi_R = \Psi_R$  (helicidade positiva). Entretanto, caso admitamos que neutrinos em qualquer tipo de universo devam ter sempre o mesmo tipo de helicidade, para uma dada convenção, então deveremos excluir estas transformações físicas nestes universos.

Mostramos assim que universos esféricos ou hiperbólicos, contendo neutrinos com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , para o mesmo sistema de coordenadas, podem ser considerados fisicamente distintos, pois a transformação considerada aqui, que leva um a outro, leva um estado de neutrinos a outro de helicidade oposta.

De um ponto de vista que não leva em conta, nestes espaços-tempos, os processos de interação fraca, convém notar que os universos antípodas, com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , não diferem fisicamente entre si. Isto, porque neste contexto, transformações ativas e passivas, que relacionam  $g_E$  e  $g_D$ , são completamente equivalentes. Ou seja, neste caso as operações físicas que consistem em inverter a vorticidade da matéria do universo e inverter o momentum  $\kappa$  dos neutrinos, levam um estado de universo a outro, que difere do original somente por uma transformação passiva  $\eta \rightarrow -\nu$  - isto é, por uma mudança de "rótulo". Uma situação

distinta ocorre quando consideramos neutrinos acoplados gravitacionalmente nestes universos. Para este caso, uma transformação passiva  $\eta \rightarrow -\eta$ , por exemplo, somente muda convenções como a da definição do sinal da helicidade dos neutrinos, não levando a uma situação fisicamente distinta. Transformações ativas sobre o universo com neutrinos, entretanto, como aquelas que estamos considerando aqui, realmente relacionam estados físicos de universos distintos. Tais transformações, como vimos, efetivamente invertem a helicidade dos neutrinos, na passagem de um universo esférico ou hiperbólico com métrica  $g_D$  a outro com métrica  $g_E$ , para o mesmo sistema de coordenadas.

Em regiões dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos onde a coordenada  $\chi$  passa a ser espacial e  $\eta$  temporal, a situação é similar, com relação à troca de papéis entre  $\chi$  e  $\eta$  na equação de Dirac para o neutrino.

As métricas de classe hiperbólica com  $\alpha^2 < \beta^2$  podem ser soluções somente para as equações de Einstein-Cartan <sup>(26)</sup>. Neste caso, a análise precedente continua válida, já que os coeficientes de Fock-Ivanenko, calculados no contexto da teoria de Einstein-Cartan diferem daqueles dados por (3.4.10), somente por termos adicionais constantes nos coeficientes que multiplicam as matrizes <sup>(\*)</sup>.

---

<sup>(\*)</sup> Informação particular fornecida por B. Donatilla.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho, começamos por definir espaços-tempos não a partir da métrica, como usualmente, mas a partir de estruturas topológicas globais, que foram caracterizadas como grupos de Lie. Só posteriormente definimos métricas Lorentzianas sobre estes grupos. Mais precisamente, definimos os grupos de Lie  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , onde os grupos  $S^3$  e  $H^3$  podiam ser sempre visualizados como sendo 3-esferas e 3-hiperbólóides, respectivamente, imersos em um espaço Euclídeo  $E^4$ . Definimos então famílias de grupos  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$ , deformando  $S^3$  e  $H^3$  continuamente através de dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$ . Sobre estes grupos construímos então as métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e invariantes à direita  $g_D$ , as quais formam famílias, com relação aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , de classes esférica e hiperbólica.

Esta maneira de definir estes espaços-tempos revelou-se útil, porque os grupos de isometrias que atuam sobre as variedades tornaram-se, por construção, determinados. Ou seja, por construção estes espaços-tempos, de classe esférica ou hiperbólica, ficaram caracterizados como sendo espaço-temporalmente homogêneos, admitindo em geral um grupo  $G_5$  de movimentos. Em particular, pudemos mostrar que, na classe hiperbólica, é possível obter um espaço-tempo que admite um grupo  $G_7$  de movimentos, sendo a secção espaço-temporal tridimensional, correspondente ao subgrupo  $H^3$ , maximalmente simétrica.

Outra vantagem resultante deste processo de construção, decorreu do fato de que, desde o princípio, estávamos assu

minho determinadas estruturas topológicas globais  $S^3 \times R$  e  $H^3 \times R$  para os espaços-tempos. Problemas de causalidade global, associados à existência de linhas coordenadas tipo tempo fechadas puderam então ser facilmente examinadas. Isto, graças ao fato de que as topologias assumidas forneciam um prévio conhecimento acerca da natureza das coordenadas - em particular se estas eram ou não angulares. Assim, aproveitamos o fato de que o 2-hiperbolóide de uma folha é naturalmente homeomorfo ao cilindro - o qual pode ser desdobrado sobre o plano -, para desidentificar pontos sobre o primeiro. Pudemos então evitar linhas tipo tempo fechadas nas correspondentes secções dos espaços-tempos hiperbólicos, sem introduzir singularidades. Por outro lado, consideramos não ser possível evitar curvas fechadas sobre um 2-hiperbolóide de duas folhas, já que cada uma destas folhas só é homeomorfa ao cilindro pela exclusão de um ponto. Similarmente, sobre um 2-elipsóide, dois pontos deveriam ser excluídos. Utilizando estes critérios, concluímos de nossa análise que todos os espaços-tempos de classe esférica apresentam problemas de causalidade global, associados à existência de curvas tipo tempo fechadas sobre as secções de topologia  $S^2$ . No caso da classe hiperbólica, concluímos que todos aqueles espaços-tempos para os quais  $\alpha^2 > \beta^2$ , têm problemas de causalidade, associados à existência, em certas regiões, de trajetórias tipo tempo fechadas sobre as secções hiperbólicas de duas folhas. Quando  $\alpha^2 \leq \beta^2$ , pudemos evitar problemas de causalidade, que só ocorriam em  $\eta = \text{const}$ , desdobrando o 2-hiperbolóide de uma folha em uma superfície homeomorfa ao plano  $R^2$ .

No sistema de coordenadas que utilizamos, mostramos que as métricas invariantes à esquerda  $g_E$  e à direita  $g_D$  diferem, em termos de coordenadas, somente por transformações impróprias

$\chi \rightarrow -\chi$  ou  $\eta \rightarrow -\eta$ .

Em seguida, mostramos que os espaços-tempos esféricos e hiperbólicos são isométricos aos modelos tipo Gödel, espaço -temporalmente homogêneos, dados pela métrica de Rebouças-Tiomno <sup>(6)</sup>

Na segunda parte deste trabalho, analisamos a questão concernente ao fato de os universos com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , para um mesmo sistema de coordenadas, serem ou não fisicamente distinguíveis. Para um mesmo sistema de coordenadas, universos com métricas  $g_E$  e  $g_D$  têm rotações de mesma magnitude e opostas, em relação ao campo de velocidades comovente com o fluido perfeito (quando ele estiver presente). Assim, uma transformação física que leva um universo de métrica  $g_D$  a outro de métrica  $g_E$  foi determinada como sendo aquela que consiste em inverter a rotação do universo (o que pode ser feito invertendo-se o momentum das partículas do fluido cosmológico, associado com a coordenada  $\eta$ , por exemplo).

Do ponto de vista puramente gravitacional, esta transformação ativa de inversão da rotação é equivalente a uma transformação de coordenadas (passiva)  $\eta \rightarrow -\eta$  (ou  $\chi \rightarrow -\chi$ ), de modo que, neste contexto, não há diferença física entre os dois universos. Analisamos então o efeito desta transformação ativa sobre o mesmo universo, agora contendo neutrinos acoplados com a gravitação. Especificamente, as operações ativas de transformação consistiram, além da inversão da rotação do universo, também da inversão do momentum associado à coordenada espacial  $\eta$  (ou  $\chi$ ). Verificamos então que tal transformação leva estados de neutrino em um universo a outros de helicidade oposta, no outro universo. Tal transformação ativa, portanto, não é equivalente a

uma inversão  $\eta \rightarrow -\eta$  (ou  $X \rightarrow -X$ ), que é uma mera troca de convenção: neutrinos têm sua helicidade trocada para uma mesma convenção.

Admitindo que num dado universo, esférico ou hiperbólico, neutrinos possuem somente um tipo de helicidade, então podemos concluir que os universos com métricas  $g_E$  e  $g_D$ , relacionados pelas transformações ativas mencionadas, são fisicamente distintos, pois ambos contêm neutrinos que têm helicidades opostas.

## APÊNDICE A

### UM MODELO COSMOLÓGICO COM GEOMETRIA HIPERBÓLICA INOMOGÊNEA

Para estender o trabalho de construção de métricas realizado no Capítulo 2, consideraremos neste Apêndice um espaço-tempo de topologia  $H^3 \times R$  (hiperbólico), caracterizado pelo seguinte tensor métrico

$$g = \alpha^2 (\omega^1)^2 - \beta^2(z) [(\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] - dz^2, \quad (A.1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante real,  $\beta(z)$  uma função real de  $z$  duas vezes diferenciável e as 1-formas  $\omega^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são dadas por (1.3.11), com  $\epsilon = 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cosh^2(r/2) d\chi + \sinh^2(r/2) d\eta \\ \omega^2 &= (1/2) \cos(\chi - \eta) dr + (1/2) \sin(\chi - \eta) \operatorname{senhr}(d\chi + d\eta) \\ \omega^3 &= -(1/2) \cos(\chi - \eta) dr + (1/2) \cos(\chi - \eta) \operatorname{senhr}(d\chi + d\eta) \end{aligned} \quad (A.2)$$

Determinaremos a única possível forma de  $\beta(z)$ , através das equações de campo de Einstein, impondo que as fontes de curvatura da geometria (A.1) consistam de um fluido perfeito, distribuído inhomogeneamente ao longo de  $z$  ( $\rho = \rho(z)$ ), mais um eventual campo eletromagnético livre de cargas, dirigido ao long

go do eixo coordenado  $z$ . Este modelo generaliza Soares <sup>(45)</sup>.

Tomaremos as equações de Einstein na seguinte forma numa base de coordenadas:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

com  $\kappa > 0$ . O tensor momentum-energia  $T_{\mu\nu}$  é resultado da contribuição do tensor momentum-energia do fluido perfeito,  $T_{\mu\nu}^{(F)}$  e daquele do campo eletromagnético  $T_{\mu\nu}^{(EM)}$ :

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(F)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} \quad (\text{A.4})$$

Para o fluido perfeito temos

$$T_{\mu\nu}^{(F)} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - P (g_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu}) \quad , \quad (\text{A.5})$$

onde  $P$  é a pressão termostática,  $\rho = \rho(z)$  a densidade própria do fluido e  $V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu}$  um campo de velocidades do fluido. O tensor momentum-energia do campo eletromagnético é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \quad , \quad (\text{A.6})$$

onde o tensor  $F_{\mu\nu}$  deve satisfazer às equações de Einstein-Maxwell:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = j^{\alpha} \quad , \quad (\text{A.7a})$$

$$F_{[\alpha\beta, \rho]} = 0 \quad , \quad (\text{A.7b})$$

sendo que  $j^{\alpha}$  é o vetor de corrente e os colchetes denotam antisimetriação total.

Numa base local de tetradas  $\{X_A = e_{(A)}^\alpha \partial_\alpha\}$ , as expressões (A.3), (A.5) e (A.6) assumem, respectivamente, a forma

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} = \kappa T_{AB} - \Lambda \eta_{AB} \quad , \quad (A.8)$$

$$T_{AB}^{(F)} = \rho V_A V_B - P(\eta_{AB} - V_A V_B) \quad , \quad (A.9)$$

$$T_{AB}^{(EM)} = \frac{1}{4} \eta_{AB} F_{CD} F^{CD} - \eta_{AC} F_{BD} F^{BD} \quad . \quad (A.10)$$

As equações de Einstein-Maxwell (A.7), projetadas nesta base são dadas por

$$F^{AB} |B + F^{CB} \Gamma^A_{CB} + F^{AC} \Gamma^B_{CB} = j^A \quad , \quad (A.11)$$

$$F_{[AB|C]} + 2F^E_{[C} \Gamma^E_{AB]} = 0 \quad , \quad (A.12)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{AB|C} &= (F_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta)_{;\mu} e_{(C)}^\mu = \\ &= (F_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta)_{,\mu} e^\mu_{(C)} \quad . \end{aligned} \quad (A.13)$$

Para o espaço-tempo descrito por (A.1) podemos escolher a base local de tetradas  $\theta^A = e_{(A)}^\alpha dx^\alpha$ , tal que  $g = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$  dada por

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \alpha \omega^1 = \alpha \cosh^2(r/2) d\chi + \alpha \sinh^2(r/2) d\eta \quad , \\ \theta^1 &= \beta(z) \omega^2 = \frac{\beta}{2} \cos(\chi-\eta) dr + \frac{\beta}{2} \sin(\chi-\eta) \operatorname{senhr}(d\chi+d\eta) \quad , \\ \theta^2 &= \beta(z) \omega^3 = -\frac{\beta}{2} \sin(\chi-\eta) dr + \frac{\beta}{2} \cos(\chi-\eta) \operatorname{senhr}(d\chi+d\eta) \quad , \\ \theta^3 &= dz \quad . \end{aligned} \quad (A.14)$$

Tomando  $x^\mu = (\chi, \eta, r, z)$ , as componentes  $e^{(A)}_\alpha$  são dadas pela matriz

$$e^{(A)}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \cosh^2 \frac{r}{2} & \alpha \sinh^2 \frac{r}{2} & 0 & 0 \\ (\beta/2) \sin(\chi-\eta) \operatorname{senhr} & (\beta/2) \sin(\chi-\eta) \operatorname{senhr} & (\beta/2) \cos(\chi-\eta) & 0 \\ (\beta/2) \cos(\chi-\eta) \operatorname{senhr} & (\beta/2) \cos(\chi-\eta) \operatorname{senhr} & -(\beta/2) \sin(\chi-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Os coeficientes de rotação de Ricci são dados por

$$\Gamma^A_{BC} = -e^{(A)}_{\alpha;\beta} e^{(B)\alpha} e^{(C)\beta} = -[\nabla_\beta (e^A_\rho dx^\rho)]_\alpha e^{(B)\alpha} e^{(C)\beta}, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$e^{(A)}_\alpha e^{(B)\alpha} = \delta^A_B, \quad (\text{A.17})$$

de modo que na base local definida por (A.15), temos os elementos não nulos dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{120} &= \frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta^2}, & \Gamma_{131} &= -\frac{\beta'}{\beta}, \\ \Gamma_{012} &= \frac{\alpha}{\beta^2}, & \Gamma_{232} &= -\frac{\beta'}{\beta}, \\ \Gamma_{201} &= \Gamma_{012}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde  $\beta'$  denota derivada de  $\beta$  em relação a  $z$ .

Para obtermos o tensor momento-energia do campo eletromagnético  $T_{AB}^{(EM)}$ , devemos antes determinar  $F^{AB}$  de modo que as equações de Einstein-Maxwell (A.11) e (A.12) sejam satisfeitas. Admitiremos, por hipótese, que os campos elétrico e magnético têm componentes não-nulas na base de tetradas dadas por

$$F_{03} = E(z) \quad , \quad (A.19a)$$

$$F_{21} = H(z) \quad , \quad (A.19b)$$

de modo que estes campos estão dirigidos ao longo da linha coordenada  $z$ .

Notando que

$$F_{AB}|_3 = F_{AB,\alpha} e^{(3)\alpha} = F_{AB,3} \quad , \quad (A.20)$$

vemos que em (A.11) somente a componente  $A = 0$  contribui:

$$F^{03}_{,3} + \Gamma^0_{12} F^{12} + \Gamma^0_{21} F^{21} + \Gamma^1_{31} F^{03} + \Gamma^2_{32} F^{03} = 0 \quad (A.21)$$

ou, utilizando (A.18) e (A.19),

$$E' - \frac{2\alpha}{\beta} H + \frac{2\beta'}{\beta} E = 0 \quad , \quad (A.22)$$

onde

$$E' = dE/dz \quad .$$

Como  $F_{AB}$  é antissimétrico, (A.12) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (F_{AB}|_C + F_{BC}|_A + F_{CA}|_B) + \frac{2}{6} [F_{EC} (\Gamma^E_{AB} - \Gamma^E_{BA}) + F_{EB} (\Gamma^E_{CA} - \Gamma^E_{AC}) + \\ + F_{EA} (\Gamma^E_{BC} - \Gamma^E_{CB})] = 0 \quad . \quad (A.23) \end{aligned}$$

Tomando  $A = 1, B = 2, C = 3$ , temos

$$\frac{1}{3} F_{12,3} + \frac{1}{3} [F_{03} (\Gamma^0_{12} - \Gamma^0_{21}) + F_{12} (\Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{13}) + F_{21} (\Gamma^2_{23} - \Gamma^2_{32})] = 0 , \quad (A.24)$$

ou

$$H' + 2E \frac{\alpha}{\beta^2} - 2H \frac{\beta'}{\beta} = 0 . \quad (A.25)$$

A solução geral para o sistema de equações formado por (A.22) e (A.25), é dada por

$$H = - \frac{A}{\beta^2} \text{sen}(2\bar{z}) , \quad (A.26)$$

e

$$E = \frac{A}{\beta^2} \text{cos}(2\bar{z}) , \quad (A.27)$$

onde A é uma constante e  $\bar{z}$  é definido por

$$d\bar{z} = \frac{\alpha}{\beta^2} dz . \quad (A.28)$$

O tensor momentum-energia do campo eletromagnético assume então a forma

$$T_{AB}^{(EM)} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\beta^2}\right)^2 \text{diag}(+1, +1, +1, -1) . \quad (A.29)$$

Vamos tomar o campo de velocidades associado ao fluido como sendo aquele dado, na base de tetradas (A.14), por  $V^A = \delta^A_0$ . Supondo que para o fluido seja válida uma equação de estado do tipo  $p = \lambda\rho$ , onde  $\lambda$  é uma constante, então em relação ao referencial comovente, (A.9) pode ser escrita como

$$T_{AB}^{(F)} = \rho \delta^0_A \delta^0_B - \lambda\rho (\eta_{AB} - \delta^0_A \delta^0_B) ,$$

ou

$$T_{AB}^{(F)} = \rho(\lambda+1) \delta^0_A \delta^0_B - \lambda\rho \eta_{AB} . \quad (A.30)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= T_{AB}^{(F)} + T_{AB}^{(EM)} \\
 &= \rho(\lambda+1) \delta_A^0 \delta_B^0 - \lambda \rho \eta_{AB} + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{\beta^2} \right)^2 \text{diag}(+1, +1, +1, -1) \quad . \quad (A.31)
 \end{aligned}$$

O tensor de Einstein, determinado a partir dos coeficientes de rotação de Ricci (A.18), tem as seguintes componentes não nulas

$$G_{00} = \frac{2\beta''}{\beta} + \frac{(\beta')^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta^2} - \frac{3\alpha^2}{\beta^4} \quad , \quad (A.32a)$$

$$G_{11} = G_{22} = -\frac{\beta''}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^4} \quad , \quad (A.32b)$$

$$G_{33} = \frac{(\beta')^2}{\beta^2} - \frac{4}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^4} \quad . \quad (A.32c)$$

As equações de Einstein (A.3), portanto, assumem a forma

$$\frac{2\beta''}{\beta} + \frac{(\beta')^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta^2} - \frac{3\alpha^2}{\beta^4} = -\kappa\rho - \frac{1}{2} \frac{\kappa A^2}{\beta^4} - \Lambda \quad (A.33a)$$

$$-\frac{\beta''}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^4} = -\kappa\lambda\rho - \frac{1}{2} \frac{\kappa A^2}{\beta^4} + \Lambda \quad (A.33b)$$

$$-\frac{(\beta')^2}{\beta^2} - \frac{4}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^4} = -\kappa\lambda\rho + \frac{1}{2} \frac{\kappa A^2}{\beta^4} + \Lambda \quad (A.33c)$$

Para integrar este sistema de equações, notemos que (A.33b) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dz} \left[ -\frac{(\beta')^2}{2} - \frac{1}{2\beta^2} \left( \frac{\kappa A^2}{2} - \alpha^2 \right) - \frac{\Lambda \beta^2}{2} \right] = -\kappa\lambda\rho\beta\beta' \quad (A.34)$$

Mas, de (A.33c) temos

$$-\frac{(\beta')^2}{2} - \frac{1}{2\beta^2} \left( \frac{\kappa A^2}{2} - \alpha^2 \right) - \frac{\Lambda \beta^2}{2} = 2 - \frac{\kappa \lambda \rho}{2} \beta^2 \quad . \quad (\text{A.35})$$

Inserindo (A.35) em (A.34) temos

$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{\kappa \lambda \rho}{2} \beta^2 \right) = -\kappa \lambda \rho \beta \beta' \quad (\text{A.36})$$

ou, supondo  $\lambda$  constante,

$$\frac{\kappa \lambda}{2} \beta^2 \rho' + \kappa \lambda \rho \beta \beta' = \kappa \lambda \rho \beta \beta' \quad , \quad (\text{A.37})$$

o que implica, quando  $\lambda \neq 0$ , em  $\rho' = 0$  ou  $\rho = \text{const.}$  Inserindo as equações (A.33b) e (A.33c) em (A.33a), obtemos

$$\beta^4 = \frac{\kappa A^2 - 4\alpha^2}{2\Lambda - \kappa \rho (3\lambda + 1)} \quad , \quad (\text{A.38})$$

de modo que  $\beta$  é constante, recaindo no resultado obtido por Re - bouças-Tiomno <sup>(6)</sup>, para modelos tipo Gödel espaço-temporalmente ho mogêneos.

Para encontrar uma solução não homogênea, devemos então considerar o fluido como sendo incoerente ( $\lambda = 0$ ). De (A.34) temos agora

$$-\frac{1}{2}(\beta')^2 - \frac{1}{2\beta^2} \left( \frac{\kappa A^2}{2} - \alpha^2 \right) - \frac{\Lambda \beta^2}{2} = C \quad , \quad (\text{A.39})$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Comparando (A.39) com (A.35) constatamos que  $C = 2$ . Podemos obter a relação entre  $\rho(z)$  e  $\beta(z)$  fazendo  $\lambda = 0$  em (A.38):

$$\kappa\rho = \frac{1}{\beta^4} (4\alpha^2 - \kappa A^2) + 2\Lambda \quad . \quad (\text{A.40})$$

Para encontrar  $\beta(z)$  explicitamente, devemos integrar (A.39) (com  $C = 2$ ):

$$\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 = -4 + \frac{1}{\beta^2} \left(\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2}\right) - \Lambda\beta^2 \quad , \quad (\text{A.41})$$

ou

$$z - z_0 = \pm \int \frac{d\beta}{\sqrt{-4 + \frac{1}{\beta^2} \left(\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2}\right) - \Lambda\beta^2}} \quad . \quad (\text{A.42})$$

Definindo uma nova variável  $y = \rho^2$ , (A.42) torna-se

$$z - z_0 = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2}\right) - 4y - \Lambda y^2}} \quad , \quad (\text{A.43})$$

onde  $z_0$  é uma constante de integração.

A forma do resultado desta integral depende das constantes  $\alpha$ ,  $A$  e  $\Lambda$  <sup>(46)</sup>. Vamos então considerar os casos  $\Lambda < 0, \Lambda > 0, \Lambda = 0$ , examinar se resultam ou não em  $\beta^2(z) > 0$  e se satisfazem à condição  $\rho(z) \geq 0$  (condição de energia fraca).

#### A.1 - O Caso $\Lambda < 0$

Definindo com relação ao integrando em (A.43),

$$\Delta = -\Lambda \left(\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2}\right) - 4 \quad , \quad (\text{A.44})$$

consideraremos separadamente os casos  $\Delta > 0, \Delta < 0, \Delta = 0$ .

(a)  $\Lambda > 0$ . Temos então

$$z-z_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{-\Lambda}} \operatorname{arsenh} \left[ \frac{(-\Lambda\beta^2-2)}{\sqrt{-\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2})-4}} \right], \quad (\text{A.45})$$

Para que tenhamos  $\beta^2 > 0$ , combinamos as duas soluções para  $z$  convenientemente a uma condição inicial  $z_0$  dada. Assim,

$$\beta^2 = \frac{1}{\Lambda} \left[ -\sqrt{-\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2})-4} \operatorname{senh}[(z-z_0)2\sqrt{-\Lambda}]-2 \right], \quad (\text{A.46})$$

onde

$$z - z_0 \geq 0 \quad .$$

Entretanto, como  $\beta^2$  não tem limite superior, vemos de (A.40) que a condição de energia é violada a partir de um determinado valor de  $z-z_0$ .

(b)  $\Lambda < 0$ . Temos então

$$z-z_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{-\Lambda}} \operatorname{arcosh} \left[ \frac{-\Lambda\beta^2-2}{\sqrt{\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2})+4}} \right]. \quad (\text{A.47})$$

Para que tenhamos  $\beta^2 > 0$ ,

$$\beta^2 = \frac{1}{\Lambda} \left[ -\sqrt{\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2})+4} \operatorname{cosh}[(z-z_0)2\sqrt{-\Lambda}]-2 \right]. \quad (\text{A.48})$$

Novamente, a condição de energia aqui é violada (cf.(A.40)) a partir de um determinado valor de  $z-z_0$ .

c)  $\Delta = 0$ . Temos agora

$$\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2} = -\frac{4}{\Lambda} \quad , \quad (\text{A.49})$$

e

$$z - z_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{-\Lambda}} \ln [-2\Lambda\beta^2 - 4] \quad . \quad (\text{A.50})$$

Combinando convenientemente as duas soluções para  $z$ , obtemos

$$\beta^2 = -\frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{-\Lambda}(z-z_0)} + 2 \right] \quad , \quad (\text{A.51})$$

com  $z - z_0 \geq 0$ , de modo que temos  $\beta^2(z)$  limitada ao intervalo

$$\beta^2(z) \in \left[ -\frac{2}{\Lambda}, -\frac{5}{2\Lambda} \right] \quad (\text{A.52})$$

de modo que  $\beta^2(z) > 0$ . Também a condição de energia  $\kappa\rho \geq 0$  é satisfeita para todo  $z - z_0 \geq 0$ . De fato, substituindo (A.49) em (A.40) obtemos

$$\kappa\rho = \frac{1}{\beta^4} \left( -\frac{16}{\Lambda} + \kappa A^2 \right) + 2\Lambda \quad , \quad (\text{A.53})$$

de modo que quando  $\beta^2$  atinge seu máximo  $-5/2\Lambda$ , em  $z = z_0$ ,  $\kappa\rho$  é ainda positivo, sendo dado por

$$\kappa\rho = -\frac{14}{25} \Lambda + \kappa A^2 \left( \frac{2\Lambda}{5} \right)^2 > 0 \quad . \quad (\text{A.54})$$

## A.2 - O Caso $\Lambda > 0$

Temos então, quando  $\Delta < 0$ ,

$$z-z_0 = \mp \frac{1}{2\sqrt{\Lambda}} \operatorname{arsen} \left[ \frac{(-\Lambda\beta^2-2)}{\sqrt{\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2}) + 4}} \right], \quad (\text{A.55})$$

de modo que

$$\beta^2 = -\frac{1}{\Lambda} \left[ \pm \sqrt{\Lambda(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2}) + 4} \operatorname{sen} (z-z_0) 2\sqrt{\Lambda} + 2 \right], \quad (\text{A.56})$$

ou  $\beta^2 < 0$ . Quando  $\Delta > 0$  ou  $\Delta = 0$ , não temos soluções reais para (A.43).

### A.3 - O Caso $\Lambda = 0$

A integral (A.43) é então dada por

$$z-z_0 = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2}) - 4y}}, \quad (\text{A.57})$$

ou seja,

$$z-z_0 = \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2}) - 4\beta^2}. \quad (\text{A.58})$$

Temos então

$$\beta^2 = \frac{1}{4} (\alpha^2 - \frac{\kappa\Lambda^2}{2}) - 4(z-z_0)^2, \quad (\text{A.59})$$

de modo que  $\beta^2 < 0$ , a partir de determinado valor de  $(z-z_0)$ .

Portanto, a métrica dada por (A.1) é uma solução fisicamente compatível com as equações de Einstein (A.3), se o fluido for incoerente ( $P = 0$ ), se  $\Lambda < 0$ , e se a relação (A.49),

$$\alpha^2 - \frac{\kappa A^2}{2} = -\frac{4}{\Lambda} \quad ,$$

for satisfeita.

A distribuição de matéria é dada por (A.53):

$$\begin{aligned} \kappa \rho(z) &= \frac{1}{\beta^4(z)} \left( -\frac{16}{\Lambda} + \kappa A^2 \right) + 2\Lambda \quad , \\ \beta^2 &= \beta^2(z) = -\frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{-\Lambda}(z-z_0)} + 2 \right] \quad , \end{aligned} \tag{A.60}$$

sendo  $z_0$  uma constante de integração escolhida de modo que  $z-z_0 \geq 0$ .

É interessante observar que, como  $\beta^2$  está limitado entre  $-2/\Lambda(z-z_0 = \infty)$  e  $-5/2\Lambda(z-z_0 = 0)$ , teremos sempre

$$\beta^2(z) < -\frac{4}{\Lambda} + \frac{\kappa A^2}{2} = \alpha^2 \quad . \tag{A.61}$$

Portanto, a estrutura causal das secções  $\chi = \text{const.}$  e  $\eta = \text{const.}$  deste espaço-tempo é aquela que foi analisada na sub-secção 2.2.1, de modo que o campo vetorial  $\partial/\partial\eta$  muda de caráter a partir de um raio crítico  $r_c(z)$ , dado por (cf. Tab. 2.3.1)

$$\tanh^2(r_c/2) = \beta^2(z)/\alpha^2 \quad . \tag{A.62}$$

## APÊNDICE B

### ROTAÇÃO NOS UNIVERSOS ESFÉRICOS E HIPERBÓLICOS

Neste Apêndice, determinaremos, relativamente às geometrias dos espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, dadas por (2.1.15)–(2.1.16), a vorticidade associada ao campo de velocidades que é comoviente com o fluido perfeito que gera a curvatura, quando este estiver presente.

Tomaremos para as métricas esféricas e hiperbólicas, invariantes à esquerda  $g_E$  e invariantes à direita  $g_D$ , bases de tetradas ortonormais que têm a forma

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \alpha [\cosh^2(\epsilon r/2) d\chi + \epsilon \sinh^2(\epsilon r/2) d\eta] \quad , \\ \theta^1 &= \beta [(1/2)\cos(\chi - \epsilon\eta) dr + (1/2\epsilon)\sinh\epsilon r \sin(\chi - \epsilon\eta) (d\chi + \epsilon d\eta)], \\ \theta^2 &= \beta [-(1/2)\sin(\chi - \epsilon\eta) dr + (1/2\epsilon)\sinh\epsilon r \cos(\chi - \epsilon\eta) (d\chi + \epsilon d\eta)], \\ \theta^3 &= dz \quad ,\end{aligned}\tag{B.1}$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes reais. Para  $\epsilon = i$ , estas 1-formas estão definidas sobre  $S^3 \times R$  e, para  $\epsilon = 1$ , sobre  $H^3 \times R$ ; quando  $\epsilon = 1$ , temos 1-formas invariantes à esquerda e, quando  $\epsilon = -1$ , 1-formas à direita. Ou seja,

$$g_E = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (e=1) \quad , \quad g_D = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (e=-1) \quad . \tag{B.2}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci não nulos, calculados na base local (B.1), são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_{201} &= e\epsilon^2 \frac{\alpha}{\beta^2} \quad , \\ \Gamma_{102} &= -e\epsilon^2 \frac{\alpha}{\beta^2} \quad , \\ \Gamma_{210} &= e\left(\epsilon^2 \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{2}{\alpha}\right) \quad .\end{aligned}\tag{B.3}$$

A rotação associada a um campo de velocidades, dado em relação a uma base coordenada  $\{x^\mu\}$  por  $V^\mu$ , é expressa através do tensor de rotação  $\omega_{\mu\nu}$  (8,28):

$$\omega_{\mu\nu} = h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} \quad ,\tag{B.4}$$

onde

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad ,\tag{B.5}$$

e os colchetes indicam antissimetrização nos índices. Numa base de tetradas, (B.4) pode ser escrita como

$$\omega_{AB} = h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} e_{(A)}{}^\alpha e_{(B)}{}^\beta \quad .\tag{B.6}$$

O referencial que é comoviente com o fluido perfeito, quando este estiver presente, para espaços-tempos esféricos e hiperbólicos, é dado em relação à base de tetradas (B.1) por

$$V^A = e_{\mu}{}^{(A)} V^\mu = \delta^A_0 \quad .\tag{B.7}$$

Em relação a este campo de velocidades, (B.6) pode ser escrita

como (28)

$$2\omega_{AB} = -\Gamma_{OAB} + \Gamma_{OBA} + \Gamma_{OAO}\delta^0_B - \Gamma_{OEO}\delta^0_A \quad . \quad (B.8)$$

Utilizando (B.3), temos de (B.8)

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -e\varepsilon^2 \frac{\alpha}{\beta^2} \quad . \quad (B.9)$$

O vetor de rotação, que numa base de coordenadas é definido por

$$\omega^\tau = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\tau} \omega_{\alpha\beta} V_\rho \quad , \quad (B.10)$$

assume na base (B.1), para  $V^A = \delta^A_0$ , a forma

$$\omega^A = \frac{1}{2} \varepsilon^{ABC} \omega_{BC} \quad . \quad (B.11)$$

Para  $\omega_{AB}$  dado por (B.9) temos

$$\omega^3 = -e\varepsilon^2 \frac{\alpha}{\beta^2} \quad , \quad (B.12)$$

ou seja,

$$\omega^\mu = (0, 0, 0, -e\varepsilon^2 \alpha/\beta^2) \quad . \quad (B.13)$$

Isto mostra que os espaços-tempos descritos por  $g_E$  ( $e = 1$ ) e  $g_D$  ( $e = -1$ ), de classe esférica ( $\varepsilon=i$ ) ou hiperbólica ( $\varepsilon=1$ ), definidos para um dado sistema de coordenadas  $(\chi, \eta, r, z)$ , podem ser interpretados como universos com rotações opostas. Ou seja, os campos de velocidade da matéria que gera curvatura, quando esta estiver presente, têm vorticidades opostas nos universos  $g_E$  e  $g_D$ , no mesmo sistema de coordenadas.

REFERÊNCIAS

- (1) - Gödel, K. - Rev. Mod. Phys., 21, 447(1949).
- (2) - Lanczos, K. - Zeits. Phys., 21, 73(1924).
- (3) - Maitra, S.C. - J. Math. Phys., 7, 1025(1966).
- (4) - Calvão, M.O., "Geodésicas em Universos do Tipo de Gödel". Tese de Mestrado, CBPF, 1985.
- (5) - Schücking, E.; Oszváth I. - Ann. Phys., 55, 166(1969).
- (6) - Rebouças, M.J.; Tiomno, J. - Phys. Rev., D19, 1850(1983).
- (7) - Spivak, M. - "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Vol. 1, Publish Perisch, Inc. Boston(1970).
- (8) - Ryan Jr., M.P.; Shepley, L.C. - "Homogeneous Relativistic Cosmologies", Princeton University Press (1975).
- (9) - Soares, I.D., "Notas de Aula", CBPF (1984).
- (10) - Schutz, B.F., "Geometrical Methods of Mathematical Physics", Cambridge University Press (1980).
- (11) - Wald, R.M., "General Relativity", The University of Chicago Press (1984).
- (12) - Flanders, H., "Differential Forms", Academic Press (1963).
- (13) - Soares, I.D., - "Cálculo de Formas Diferenciais e Equação de Dirac em Espaços Curvos", em "II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF", Vol. I, p. 477, M. Novello (ed.)(1980).
- (14) - Assad, M.J.D. - "Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético". Tese de Mestrado, CBPF (1980).
- (15) - Cohn, P.M. - "Lie Groups", Cambridge University Press(1957).
- (16) - Borisovich, Y.; Bliznyakov, N.; Izrailevich, Y.; Fomenko, T. - "Introduction to Topology" (Trad. O. Efimov) MIR Publishers (1985).
- (17) - Hawking, S.W.; Ellis G.F.R - "The Large Scale Structure of Space-Time", Cambridge University Press (1973).

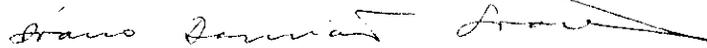
- (18) - Stein, H. - Phil. Sci., 37, 589 (1970).
- (19) - Ozsváth, I. - J. Math. Phys., 6, 590 (1965).
- (20) - Bampi, F.; Zordan, C. - Gen. Rel. Grav., 9, 393 (1978).
- (21) - Banerjee A.; Banerji, S - J. Phys., A1, 188 (1918).
- (22) - Novello, M.; Rebouças, M.J. - Phys. Rev., D28, 1251 (1983).
- (23) - Geroch, R.; Horowitz, G.T. - "Global Structure of Space-times" em Hawking, S.W. - Israel, W. (eds.) - General Relativity: An Einstein Centenary Survey, Cambridge University Press (1979).
- (24) - Teixeira, A.F.F.; Rebouças, M.J.; <sup>O</sup>Aman, J.E. - Phys. Rev. D32, 3309 (1985).
- (25) - Rebouças, M.J.; Teixeira, A.F.F. - Notas de Física do CBPF, NF06/86 (1986).
- (26) - Oliveira, J.D.; Teixeira, A.F.F.; Tiomno, J. - Notas de Física do CBPF, NF02/86 (1986).
- (27) - Schweber, S.S. - "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Harper & Row, John Weatherhill Inc. (1966).
- (28) - Novello, M. - "Cosmologia Relativística", em "II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF", vol. I, p. 201, M. Novello (ed.) (1980).
- (29) - Sakurai, J.J. - "Advanced Quantum Mechanics", Addison-Wesley Pub. Co. (1967).
- (30) - Lopes, J.L. - "Lectures on Relativistic Wave Equations" , Monografia - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - Faculdade Nacional de Filosofia, Rio de Janeiro (1962).
- (31) - Cartan, E. - "The Theory of Spinors", The MIT Press, Cambridge Massachusetts (1966).
- (32) - Tetrode, H. - Z. Phys. 50, 336 (1928).
- (33) - Fock, V.; Ivanenko, D. - Z. Phys. 57, 261 (1929).
- (34) - Schrödinger, E. - Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Physik-Math. Kl., 105 (1932).
- (35) - Bargmann, V. - Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Physik-Math. Kl., 346 (1932).

- (36) - Lopes, J.L. - "Introducción a la Electrodinámica Cuántica", Editorial Trillas, Mexico (1977).
- (37) - Bjorken, J.D.; Drell, S.D. - "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill Inc. (1964).
- (38) - Dirac, P.A.M. - "Recent Developments in General Relativity", Pergamon Press, N.Y. (1962), p. 191.
- (39) - Amáral, C.M. do - "Quatêrnions e Espaços-Tempos Riemannianos e Não Riemannianos" - CBPF - Tese de Doutorado (1971).
- (40) - Weyl, H. - Proc. Natl. Acad. Sci. (U,S.) 15, 323 (1929).
- (41) - Jhangiani V. - Found. Phys. 7, 111 (1975).
- (42) - Brill, D.R.; Wheeler, J.A. - Rev. Mod. Phys., 29, 465 (1957).
- (43) - Gibbons, G.W. - Comm. Math. Phys., 44, 245 (1975).
- (44) - Henneaux, M. - Gen. Rel. Grav. 12, 137 (1980).
- (45) - Soares, I.D. - J. Math. Phys., 21(3), 521 (1980).
- (46) - Capellen, W. M.zur - "Integraltafeln", Springer-Verlag (1959).

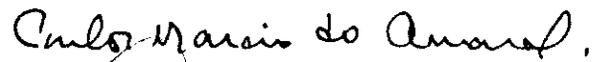
"SIMETRIAS, PROBLEMAS DE CAUSALIDADE E NEUTRINOS  
EM UNIVERSOS ANTÍPODAS"

*FERNANDO DEEKE SASSE*

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



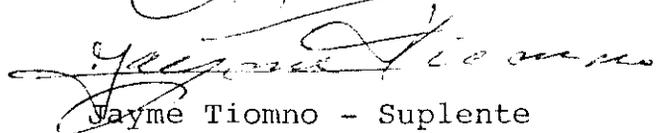
Ívano Damião Soares - Presidente



Carlos Marcio do Amaral



Patricio Anibal Letelier Sotomayor



Jayme Tiomno - Suplente

Rio de Janeiro, 06 de outubro de 1986