

RENATO PIRES DOS SANTOS

O MÉTODO DE SUPERCAMPOS PARA O CÁLCULO DE  
POTENCIAL EFETIVO EM MODELOS COM SUPERCAMPOS  
QUIRAIS: OS MODELOS DE WESS E ZUMINO E DE  
O'RAIFEARTAIGH

Tese de DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF/CNPq

RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1986

## DEDICATÓRIA

à minha mãe

“Bei seinem Schein wirst du die Muetter  
sehns;

Die einen sitzen, andre stehn und gehn,  
Wie's eben kommt. Gestaltung, Umgestaltung,  
Des ewigen Sinnes ewige Unterhaltung,  
Umschwebt von Bildern aller Kreatur;”

(Na sua claridade, verá as Mães;  
umas sentadas, outras de pé, andando,  
como for. Formação, Transformação,  
do Eterno Pensar, o entretenimento,  
pairando em torno, imagens de todas as  
criaturas)

FAUSTO II, I, 5

## AGRADECIMENTOS

À Prem Prakash Srivastava, pelas orientação capaz, dedicação, amizade e apoio nos momentos de desânimo.

Aos professores e colegas do CBPF e do LNCC pelo convívio, estímulo e companheirismo.

Aos funcionários do CBPF e do LNCC pelo apoio e serviço dedicado.

Aos meus familiares que sempre me estimularam e de quem a física tomou tanto do meu tempo.

Aos meus amigos em geral (muitos, felizmente, para serem citados individualmente).

Ao CNPq pela bolsa.

## RESUMO

Aplicamos o método de supercampos ao cálculo do potencial efetivo em modelos supersimétricos. Discutimos os métodos de Weinberg e de Jackiw no contexto de teorias de campo supersimétricas, ressaltando a maior simplicidade obtida quando se faz uso de superdiagramas de Feynman. Derivamos os propagadores de supercampos quirais e comentamos sua relação com propagadores de campos componentes. Calculamos, então, o potencial efetivo até 2-loop para o modelo geral com supercampos quirais e regularizamo-lo, usando regularização dimensional e o esquema de renormalização por subtração mínima. Verificamos que o potencial efetivo não é positivo definido e comenta-se o esquema de Amati e Chou. Trata-se, então, em particular do modelo de Wess e Zumino com um único supercampo. Constatamos, gráficamente, neste modelo, o potencial tornar-se multivalente e negativo. Analisamos, em seguida, o modelo de O'Raifeartaigh, com 3 supercampos e que apresenta quebra espontânea de supersimetria. Analisando o potencial efetivo, neste modelo, a 1-loop, verificamos a aquisição de massa pelo boson não-goldstone de spin zero e alterações em seus mínimos.

“Está a verdade naquilo que sucede todos os dias, nos quotidianos acontecimentos, na mesquinhez e chatice da vida da imensa maioria dos homens ou reside a verdade no sonho que nos é dado sonhar para fugir de nossa triste condição? Como se elevou o homem em sua caminhada pelo mundo: através do dia-a-dia de misérias e fútricas, ou pelo livre sonho, sem fronteiras nem limitações? Quem levou Vasco da Gama e Colombo ao convés das caravelas? Quem dirige as mãos dos sábios a mover as alavancas na partida dos esputiniques, criando novas estrelas e uma lua nova no céu desse subúrbio do universo? Onde está a verdade, respondam-me por favor: na pequena realidade de cada um ou no imenso sonho humano? Quem a conduz pelo mundo afora, iluminando o caminho do homem? O meritíssimo juiz ou o paupérrimo poeta? Chico Pacheco, com sua integridade, ou o Comandante Vasco Moscoso de Aragão, capitão-de-longo-curso?”

Jorge Amado

## SUMÁRIO

|  |     |
|--|-----|
| DEDICATÓRIA .....  | ii  |
| AGRADECIMENTOS .....   | iii |
| RESUMO .....   | iv  |
| SUMÁRIO .....  | vi  |
| LISTA DE FIGURAS .....   | vii |
| CAPÍTULO 1 SUPERSIMETRIA .....   | i   |
| 1.1 Introdução .....   | 1   |
| 1.2 Espinores Na Representação De Weyl .....                             | 2   |
| 1.3 Superespaço E Supercampos .....                                      | 8   |
| 1.4 A Ação Supersimétrica .....  | 15  |
| CAPÍTULO 2 O POTENCIAL EFETIVO .....                                     | 21  |
| 2.5 Introdução .....   | 21  |
| 2.6 O Método De Weinberg (ou De Tadpole) .....                           | 22  |
| 2.7 O Método De Jackiw (ou De Bolha De Vácuo) .....                      | 29  |
| 2.8 O Potencial Efetivo Em Teorias Supersimétricas .....                 | 34  |
| CAPÍTULO 3 DERIVAÇÃO DOS PROPAGADORES DE SUPERCAMPOS .....               | 37  |
| CAPÍTULO 4 O POTENCIAL EFETIVO NOS MODELOS COM N CAMPOS<br>QUIRAIS ..... | 49  |
| 4.9 O Potencial Ao Nível De Árvore (zero-loop) .....                     | 49  |
| 4.10 O Potencial Ao Nível 1-loop .....                                   | 50  |
| 4.11 O Potencial Ao Nível 2-loop .....                                   | 58  |
| CAPÍTULO 5 MODELOS PARTICULARES .....                                    | 61  |
| 5.12 O Modelo De Wess E Zumino .....                                     | 61  |
| 5.13 Modelo De O'Raifeartaigh .....                                      | 70  |
| CONCLUSÕES .....   | 82  |

|   |     |
|---|-----|
| APÊNDICE A ALGUMAS IDENTIDADES ÚTEIS EM SUPERSIMETRIA ..... | 83  |
| APÊNDICE B ALGUMAS ÚTEIS IDENTIDADES MATRICIAIS .....       | 93  |
| APÊNDICE C PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES GAMA E BETA .....       | 95  |
| C.14 As Funções Gama E Beta .....                           | 95  |
| C.15 Expansões Em Série Para A Função Gama .....            | 97  |
| APÊNDICE D ALGUMAS INTEGRAIS DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL   | 102 |
| BIBLIOGRAFIA .....  | 115 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Fig.2.4.1 TADPOLE DE 1-LOOP .....   | 35 |
| Fig.2.4.2 SUPERBOLHAS DE 2-LOOP .....   | 36 |
| Fig.4.3.1 CONTRIBUIÇÃO DE 2-LOOP AO POTENCIAL EFETIVO ...   | 58 |
| Fig.5.1.1 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO .....                  | 62 |
| Fig.5.1.2 CAMPO AUXILIAR AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>PARTE REAL .....       | 62 |
| Fig.5.1.3 CAMPO AUXILIAR AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>PARTE IMAGINÁRIA ..... | 62 |
| Fig.5.1.4 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>.....                  | 65 |
| Fig.5.1.5 CAMPO AUXILIAR AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>.....                     | 65 |
| Fig.5.1.6 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>.....                  | 65 |
| Fig.5.1.7 CAMPO AUXILIAR AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO<br>.....                     | 65 |
| Fig.5.1.8 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 2-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO                           |    |



|  |    |
|--|----|
| .....  | 70 |
| Fig.5.1.9 CAMPO AUXILIAR $\Upsilon$ AO NIVEL 2-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO  |    |
| .....  | 70 |
| Fig.5.1.10 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 2-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO         |    |
| .....  | 70 |
| Fig.5.1.11 CAMPO AUXILIAR $\Upsilon$ AO NIVEL 2-LOOP<br>NO MODELO DE WESS E ZUMINO |    |
| .....  | 70 |
| Fig.5.2.1 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH      |    |
| .....  | 75 |
| Fig.5.2.2 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH      |    |
| .....  | 75 |
| Fig.5.2.3 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH      |    |
| .....  | 75 |
| Fig.5.2.4 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL DE ARVORE<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH      |    |
| .....  | 75 |
| Fig.5.2.5 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH         |    |
| .....  | 80 |
| Fig.5.2.6 POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 1-LOOP<br>NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH         |    |
| .....  | 80 |

## CAPÍTULO 1

## SUPERSIMETRIA

## 1.1 Introdução

"Superspace is the greatest invention since the wheel. It far surpasses all other approaches to supersymmetry"

V. Gates (1)

Supersimetria é a única extensão não-trivial da simetria do espaço-tempo de Poincaré que consegue incorporar, em um mesmo (super)multiplete, partículas com spins, estatísticas e números quânticos internos diferentes.

Relacionando bósons e férmions, os geradores da simetria são, por conseguinte, fermiônicos e obedecem a relações de anticomutação.

Tentativas anteriores conseguiam relacionar partículas de spins diferentes mas mesma estatística e apresentavam porisso geradores bosônicos.

Vários teoremas "no-go" foram demonstrados provando que nenhuma unificação relativística não-trivial seria possível com tais geradores. A introdução dos geradores fermiônicos na forma de uma álgebra graduada de Lie contornou esses teoremas.

Outra propriedade surpreendente das teorias de campo supersimétricas é que, devido ao cancelamento das

divergências ultravioletas dos "loops" fermiônicos com as dos "loops" bosônicos, essas teorias tornam-se menos divergentes que as correspondentes não-supersimétricas.

Os modelos com mais de uma supersimetria exibem uma convergência ultravioleta ainda maior. Por exemplo, a teoria de Yang-Mills supersimétrica  $N=4$  foi demonstrada recentemente ser uma teoria finita.

Quando a Supersimetria é elevada à condição de teoria local, a gravitação é, automaticamente, introduzida e isto leva à possibilidade de unificarem-se as interações forte, fraca e eletromagnética com a gravitacional.

Os primeiros exemplos de simetria de Fermi-Bose apareceram no modelo de "string" de Neveu, Schwarz e Ramond (2) com partículas de spin semi-inteiro e na extensão da álgebra de Poincaré por Gol'fand e Likhtman (3) seguida pela realização não-linear da álgebra da Supersimetria por Volkov e Akulov (4)

A introdução de representações lineares da Supersimetria no contexto da Teoria Quântica de Campos foi apresentada, pela primeira vez, por Wess e Zumino (5). Logo depois, Salam e Strathdee e Ferrara encontraram sua realização num superespaço de coordenadas e introduziram supercampos sobre ele para descrever um multiplete de Supersimetria. Isto levou a um rápido desenvolvimento na obtenção de extensões supersimétricas de teorias de campo ordinárias e no estudo de suas propriedades miraculosas.

## 1.2 Espinores na representação de Weyl

Vamos trabalhar num espaço de Minkowski tetradimensional com métrica  $\eta_{em} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , onde  $l, m = 0, 1, 2, 3$  denota os índices de espaço-tempo. O grupo de transformações homogêneas de Lorentz (grupo de Lorentz) é induzido nas coordenadas do espaço-tempo  $x'^l = \Lambda^l_m x^m$  pelo grupo  $SO(1,3)$  de matrizes reais  $4 \times 4$   $\Lambda = (\Lambda^l_m)$  satisfazendo

$$\eta_{pq} \Lambda^p_e \Lambda^q_m = \eta_{em}$$

Os geradores infinitesimais  $M_{em}$  são dados por

$$(M^{lm})^p_q = -i \left( \eta^{lp} \delta_q^m - \eta^{mp} \delta_q^l \right) \quad (1.1)$$

e a álgebra de Lie

$$\begin{aligned} [M_{em}, M_{pq}] = & i \left( \eta_{ep} M_{mq} - \eta_{mp} M_{eq} \right) \\ & + \eta_{mq} M_{ep} - \eta_{eq} M_{mp} \end{aligned} \quad (1.2)$$

pode ser realizada, em termos dos elementos  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  da álgebra de Clifford sobre o espaço quadridimensional de Minkowsky, os quais satisfazem

$$\{ \gamma^e, \gamma^m \} = 2 \eta^{em} I \quad (1.3)$$

através de

$$M_{em} = \frac{1}{4i} [\gamma^e, \gamma^m] \quad (1.4)$$

Os elementos do grupo de Lie  $S(\Lambda)$  são então parametrizados como

$$S(\Lambda) = \exp \frac{i}{2} \lambda_{em} M^{em} = \exp \frac{1}{8} \lambda_{em} [\gamma^e, \gamma^m] \quad (1.5)$$

Uma representação irredutível para  $\gamma^e$  pode ser obtida em termos de matrizes complexas  $4 \times 4$ . A representação matricial  $S(\Lambda)$  age, então, num espaço espinorial complexo gerado pelos quadriespinores de Dirac

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} (x) \xrightarrow{\Lambda} \Psi'(x') = S(\Lambda) \Psi(x) \quad (1.6)$$

Vamos trabalhar numa representação tal que

$$\gamma^0 \gamma^e \gamma^0 = \gamma^{e\dagger} \quad \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (1.7)$$

onde  $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ . O adjunto definido por  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$  transforma-se segundo  $\bar{\Psi} \xrightarrow{\Lambda} \bar{\Psi} S^{-1}(\Lambda)$ .

Definimos também um espinor conjugado de carga  $\Psi_c = C \bar{\Psi}^T$  onde  $C$  é a matriz de conjugação de carga que satisfaz

$$C^{-1} \gamma^\ell C = -\gamma^{\ell T} \quad (1.8)$$

Podemos também definir em quatro dimensões um espinor de Majorana com metade das componentes independentes impondo a condição  $\Psi_c = \Psi$  que em quatro dimensões é consistente com  $(\Psi_c)_c = \Psi$ .

Na representação de Weyl das matrizes gama

$$\gamma^\ell = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\ell \\ \bar{\sigma}^\ell & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

onde  $\sigma^\ell$ ,  $\bar{\sigma}^\ell$  são matrizes  $2 \times 2$ ,  $S(\Lambda)$  toma forma de blocos em diagonal. Podemos então trabalhar em termos de uma formulação de biespinores.

Usaremos

$$\sigma^\ell = (\mathbf{I}, \vec{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\ell = (\mathbf{I}, -\vec{\sigma}) \quad (1.10)$$

onde  $\vec{\sigma}$  são as matrizes de Pauli, resultando

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} S_1(\Lambda) & 0 \\ 0 & S_1^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$S_1(\Lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_{em} \sigma^{em}\right)$$

$$S_1^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_{em} \bar{\sigma}^{em}\right)$$

(1.12)

e

$$\sigma^{em} = \frac{1}{4} (\sigma^e \bar{\sigma}^m - \sigma^m \bar{\sigma}^e)$$

$$\bar{\sigma}^{em} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^e \sigma^m - \bar{\sigma}^m \sigma^e)$$

(1.13)

O espinor de Dirac assume agora a forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi_c \end{pmatrix} \quad \bar{\Psi} = i (\bar{\chi}_c^\dagger, \chi^\dagger)$$

(1.14)

e transforma-se segundo

$$\Psi'(x') = S_1(\Lambda) \Psi(x) \quad \bar{\Psi}'(x) = S_1^{-1\dagger}(\Lambda) \bar{\Psi}(x)$$

(1.15)

O espinor de carga conjugada é

$$\psi_c = -\gamma^2 \psi^* = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \bar{\chi}_c^* \\ i\sigma_2 \chi^* \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

e transforma-se da mesma forma que  $\Psi$ . Introduzimos índices de biespinores

$$\chi = (\chi_\alpha) = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\chi} = (\chi^{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \chi_{\dot{1}} \\ \chi_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

definimos

$$(\chi^\alpha) = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \chi \quad (\chi_{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \chi_{\dot{1}} \\ \chi_{\dot{2}} \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \bar{\chi} \quad (1.18)$$

e as transformações resultam

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha &= (S_1)_\alpha{}^\beta \chi_\beta & \chi'^{\dot{\alpha}} &= (S_1^{-1T})^{\dot{\alpha}}{}_\beta \chi^{\dot{\beta}} \\ \bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} &= (S_1^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} & \bar{\chi}'^{\dot{\alpha}} &= (S_1^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Escrevemos os invariantes como  $\chi^\alpha \eta_\alpha$  e  $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ , i.e., contraímos um índice superior com um índice inferior do mesmo tipo.

Introduzindo tensores métricos para levantar e abaixar os índices

$$(\epsilon^{\alpha\beta}) = (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = i\sigma_2 \quad (\epsilon_{\alpha\beta}) = (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -i\sigma_2$$



$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\rho\gamma} = \delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\gamma} \quad \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\rho}\dot{\sigma}} = \delta_{\dot{\rho}}^{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\sigma}}^{\dot{\beta}} \quad (1.20)$$

temos

$$\chi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^{\beta} \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \chi_{\dot{\beta}} \quad (1.21)$$

etc..

Identificamos então  $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$  com o complexo conjugado  $\chi_{\alpha}^* = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$  e  $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^*$  com  $\chi_{\alpha}$ . A conjugação complexa é definida tal que a ordem dos fatores fermiônicos é invertida

$$\begin{aligned} (\chi\eta)^* &= \eta_{\alpha}^* \chi^{*\alpha} = \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\eta} \bar{\chi} = \bar{\chi} \bar{\eta} \\ (\chi \sigma^{\ell} \bar{\eta})^* &= \eta^{\beta} (\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\ell})^* \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \eta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\ell} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \eta \sigma^{\ell} \bar{\chi} \end{aligned} \quad (1.22)$$

### 1.3 Superespaço e supercampos

Definimos as transformações de Supersimetria através de

$$\delta(\text{campo}) = -i (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) (\text{campo}) \quad (1.23)$$

com  $\xi, \bar{\xi}$  parâmetros espinoriais constantes e  $Q, \bar{Q}$  geradores

infinitesimais da transformação.

Temos que, para uma Supersimetria local, os geradores satisfazem as seguintes relações de anticomutação

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2i \sigma_{\alpha\beta}^e \partial_e \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0 \quad (1.24)$$

Temos, também,

$$[P_e, Q_\alpha] = [P_e, \bar{Q}_\alpha] = 0 \quad (1.25)$$

onde  $P_e$  é o gerador das translações do espaço-tempo, definido como  $P_e = -i\partial_e$ . Os geradores de rotações de Lorentz satisfazem

$$\begin{aligned} [M^{lm}, Q_\alpha] &= -i (\sigma^{lm} Q)_\alpha \\ [\bar{M}^{lm}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= -i (\bar{\sigma}^{lm} \bar{Q})^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Temos da eqn.24 o importante resultado

$$\begin{aligned} P^0 &= -\frac{1}{4} (Q_1 Q_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2) \\ &= -\frac{1}{4} (Q_1 (Q_1)^* + (Q_1)^* Q_1 + Q_2 (Q_2)^* + (Q_2)^* Q_2) \end{aligned} \quad (1.27)$$

que demonstra que a energia em qualquer estado é positiva definida e que um estado fundamental supersimétrico tem energia nula.

Um artifício muito útil para se trabalhar com teorias de campo supersimétricas é o de representar-se um supermultiplete por um supercampo definido num superespaço de coordenadas geradas por

$$z^A : (\chi^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \quad (1.28)$$

onde o índice  $A$  varia sobre índices bosônicos  $m$  e fermiônicos  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$ . As transformações de Supersimetria são, pois, realizadas como supertranslações sobre pontos do superespaço

$$\begin{aligned} \chi'^l &= \chi^l + i(\theta\sigma^l\xi - \xi\sigma^l\bar{\theta}) + a^l \\ \theta'_\alpha &= \theta_\alpha + \xi_\alpha \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Os operadores diferenciais são, então, definidos através de

$$D_{z^A} = i(a \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) z^A \quad (1.30)$$

e, de

$$\partial_e x^m = \delta_e^m \quad \partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (1.31)$$

temos

$$i Q_\alpha = \partial_\alpha - i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^l \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_l$$

$$i \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \partial^{\dot{\alpha}} + i \theta^\beta \sigma_\beta^{l\dot{\alpha}} \partial_l$$

$$P_e = -i \partial_e$$

(1.32)

Note-se que  $\partial_e$  comuta com  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  e  $Q_\alpha$  e é, portanto, uma derivada covariante com relação a estas transformações; por outro lado,  $\partial_\alpha$  e  $\partial_{\dot{\alpha}}$  não são. As derivadas espinoriais covariantes devem satisfazer

$$\delta(D_\alpha S) = -i (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})(D_\alpha S) = -i D_\alpha [(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})S] \quad (1.33)$$

Em vista das expressões explícitas para  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  na eqn.32, podemos defini-las como

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^l \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_l$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \partial^{\dot{\alpha}} - i \theta^\beta \sigma_\beta^{l\dot{\alpha}} \partial_l$$

(1.34)

As derivadas covariantes são necessárias para

impõem-se vínculos covariantes sobre supercampos, bem como na construção de Lagrangianas invariantes sob transformações de Supersimetria. No Apêndice A apresentamos algumas propriedades e identidades úteis das derivadas covariantes.

São úteis, também, os operadores de projeção

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{D^\alpha \bar{D}^2}{16 \square} & P_2 &= \frac{\bar{D}^2 D^\alpha}{16 \square} \\
 P_T &= -\frac{1}{8 \square} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = -\frac{1}{8 \square} \bar{D}_\alpha D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} & (1.35)
 \end{aligned}$$

que satisfazem  $P_1 + P_2 + P_T = 1$ . Estes operadores serão utilizados para se definirem partes irredutíveis de um supercampo geral. No apêndice A, incluímos algumas identidades contendo esses operadores.

Um supercampo, definido em um ponto do superespaço, tem uma expansão em série de Taylor que, devido à anticomutação das coordenadas  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , termina após um número finito de termos e tem a forma geral

$$\begin{aligned}
 F(z) &= f(x) + \theta \varphi(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) \\
 &+ \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \nu_\mu(x) + \theta^2 \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2 \theta \psi(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 d(x) & (1.36)
 \end{aligned}$$

onde  $f, \varphi, \bar{\chi}, \dots, d$  denotam campos componentes do supermultiplete correspondente ao supercampo em questão.

A soma de dois supercampos é um supercampo, bem

como seu produto. A variação infinitesimal do supercampo é definida em termos das variações dos campos componentes

$$\delta F = \delta f(x) + \theta \delta \varphi(x) + \dots + \theta^2 \bar{\theta}^2 \delta d(x) \quad (1.37)$$

e a forma de  $F$  em pontos infinitesimalmente próximos é dada por

$$\begin{aligned} F(z + \delta z) &= F(z) + (\delta z^A) \partial_A F(z) + \dots \\ &= F(z) + (\delta x^\ell) \partial_\ell F(z) + (\delta \theta^\alpha) \partial_\alpha F(z) + \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

Sob uma transformação de supersimetria, o supercampo  $F(z)$  é mapeado em  $F'(z')$ . Um supercampo escalar pode ser definido requerendo-se que permaneça invariante sob supertranslações

$$S'(z) = S(z) \quad (1.39)$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} \delta S(z) &= S'(z) - S(z) = -(\delta z^A) \partial_A S + \dots \\ &= -i(a \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) S \end{aligned}$$

Os supercampos são representações lineares da álgebra de Supersimetria, mas essas representações são em geral redutíveis. Podem-se porém usar as derivadas covariantes para imporem-se vínculos diferenciais sobre esses supercampos, os quais serão preservados por transformações de Supersimetria. Teremos, então,

supercampo escalar quiral  $\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = P_2 S(x, \theta, \bar{\theta})$

ou  $\bar{D}_\alpha \bar{\Phi} = 0$

supercampo escalar antiquiral  $\bar{\bar{\Phi}}(x, \theta, \bar{\theta}) = P_1 S(x, \theta, \bar{\theta})$

ou  $D^\alpha \bar{\bar{\Phi}} = 0$

(1.41)

Os vínculos diferenciais acima podem ser facilmente resolvidos, resultando

$$\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(\theta \sigma^\ell \bar{\theta} \partial_\ell)} [A(x) + \sqrt{2} \theta \Psi(x) + \theta^2 F(x)]$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i(\theta \sigma^\ell \bar{\theta} \partial_\ell)} [\bar{A}(x) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\Psi}(x) + \bar{\theta}^2 \bar{F}(x)]$$

(1.42)

Esses supercampos contêm, pois, espinores de

majorana  $\Psi(x)$  e  $\bar{\Psi}(x)$ , campos escalares complexos  $A(x)$  e  $\bar{A}(x)$  e campos escalares complexos auxiliares  $F(x)$  e  $\bar{F}(x)$ .

Esses campos componentes transformam-se por Supersimetria como

$$\delta A(x) = -\sqrt{2} \xi \Psi(x)$$

$$\delta \Psi_\alpha(x) = -\sqrt{2} [\xi_\alpha F(x) + i(\sigma^\mu \bar{\xi})_\alpha \partial_\mu A(x)]$$

$$\delta F(x) = i\sqrt{2} \partial_\mu \Psi(x) \sigma^\mu \bar{\xi}$$

(1.43)

#### 1.4 A ação supersimétrica

A construção de uma ação invariante por transformações de Supersimetria é fácil fazendo-se uso de supercampos. De vez que o produto de supercampos é um supercampo e que a componente de mais alta ordem em  $\theta$  de um supercampo quiral transforma-se numa divergência (vide eqn.1.43), segue-se que a integral da componente mais alta ordem de  $(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \dots)$  sobre todo o espaço-tempo

$$-\frac{1}{4} \int d^4x \left. D^2(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \dots) \right|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad (1.44)$$

é um invariante. Em termos de campos componentes, por exemplo,



$$\int d^4x (A_i F_j + A_j F_i - \Psi_i \Psi_j)$$

$$\int d^4x (A^2 F - A \Psi \Psi)$$
(1.45)

são invariantes por supersimetria.

Note-se que eqn.44 dá origem a termos de potencial, não envolvendo derivadas espaço-temporais.

Para obterem-se termos cinéticos, faz-se uso, também, do supercampo antiquiral. Assim,

$$\frac{1}{16} \int d^4x D^2 \bar{D}^2 (\bar{\Phi} \Phi) \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0}$$

$$= \int d^4x \left\{ -(\partial_e A)(\partial^e \bar{A}) + \frac{i}{2} [(\partial_e \Psi) \sigma^e \bar{\Psi} - \Psi \sigma^e \partial_e \bar{\Psi}] + \bar{F} F \right\}$$
(1.46)

é um invariante. Note-se que além dos termos cinéticos usuais para os campos de matéria, obtém-se também um termo potencial para o campo auxiliar.

Assim, a ação mais geral para  $n$  campos quirais  $\Phi_i$  pode ser escrita como

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{16} \int d^4x D^2 \bar{D}^2 (\bar{\Phi}_i \Phi_i) \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0} - \frac{1}{4} \int d^4x D^2 W(\Phi) \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0}$$

$$- \frac{1}{4} \int d^4x \bar{D}^2 \bar{W}(\bar{\Phi}) \Big|_{\theta = \bar{\theta} = 0}$$
(1.47)

onde  $W(\Phi)$  é um polinômio em supercampos quirais chamado

Superpotencial.

É conveniente introduzir a notação

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} D^2 \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \int d^2\theta & -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \int d^2\bar{\theta} \\
 \frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \int d^4\theta & \int d^4x d^2\theta &= \int d^6s \\
 \int d^4x d^2\bar{\theta} &= \int d^6\bar{s} & \int d^4x d^4\theta &= \int d^8z
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Podemos expressar eqn.47 em termos de campos componentes. Temos

$$-\frac{1}{4} D^2 W(\Phi) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} F_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i \partial A_j} \psi_i^\alpha \psi_{j\alpha} \tag{1.49}$$

onde  $W(A) = W(\Phi_i \rightarrow A_i)$  depende apenas do campo escalar  $A_i$  do multiplete  $(A_i, \psi_i, F_i)$ . Temos então a Lagrangiana para supercampos quirais em interação como

$$\mathcal{L} = -(\partial_e A_i)(\partial^e A_i) + \frac{1}{2} [(\partial_e \psi_i) \sigma^e \bar{\psi}_i - \psi_i \sigma^e \partial_e \bar{\psi}_i] - V \tag{1.50}$$

onde o potencial  $V$  é dado por

$$V = - \left[ \bar{F}_i F_i + F_i \frac{\partial W}{\partial A_i} + \bar{F}_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \Psi_i \Psi_j + \text{c.c.} \right] \quad (1.51)$$

O último termo representa uma interação de Yukawa com campos espinoriais, enquanto o potencial escalar  $U$ , relevante para o estudo de quebra espontânea de Supersimetria é

$$U(A_i, \bar{A}_i, F_i, \bar{F}_i) = - \left[ \bar{F}_i F_i + F_i \frac{\partial W}{\partial A_i} + \bar{F}_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i} \right] \quad (1.52)$$

Podemos eliminar o campo auxiliar  $F_i$  usando sua equação de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial F_i} &= 0 & \frac{\partial U}{\partial \bar{F}_i} &= 0 \\ \bar{F}_i &= - \frac{\partial W}{\partial A_i} & F_i &= - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i} \end{aligned} \quad (1.53)$$

resultando

$$U = \bar{F}_i F_i \quad (1.54)$$

A Lagrangiana toma então a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{CIN}} + \mathcal{L}_{\text{YUK}} + \mathcal{L}_{\text{AUTO}} \\ \mathcal{L}_{\text{YUK}} &= - \frac{1}{2} M_{ij} \Psi_j \Psi_i + \text{c.c.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{AUTO}} = -U(A_i, \bar{A}_i) = -\bar{F}_i F_i \quad (1.55)$$

$M_{ij} = \partial^2 W(A)/\partial A_i \partial A_j$  fornece a matriz de massa fermiônica quando calculada no mínimo do potencial escalar. A matriz de massa bosônica é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial A_i \partial A_j} & \frac{\partial^2 U}{\partial A_i \partial \bar{A}_j} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{A}_i \partial A_j} & \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Seus elementos não-diagonais têm a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial A_i \partial \bar{A}_j} &= (M\bar{M})_{ij} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{A}_i \partial A_j} &= (M\bar{M})_{ij} \end{aligned} \quad (1.57)$$

enquanto os elementos diagonais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial A_i \partial A_j} &= -\frac{\partial^3 U}{\partial A_i \partial A_j \partial A_k} F_k \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} &= -\frac{\partial^3 U}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j \partial \bar{A}_k} \bar{F}_k \end{aligned} \quad (1.58)$$

Para o estado fundamental supersimétrico,  $U=0$  implica que  $F_i = \bar{F}_i = 0$  e portanto bósons e férmions têm a

mesma massa. No caso de quebra espontânea de simetria, devemos diagonalizar a matriz de massa bosônica e encontramos, então, massas diferentes para os diferentes campos componentes do supermultiplete

Uma ação renormalizável é obtida para

$$U(\Phi) = \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (1.59)$$

onde  $m_{ij}$  e  $g_{ijk}$  são tensores completamente simétricos nos índices. Temos então

$$\mathcal{Y} = \int d^4z \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left\{ \int d^4x \left( \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) + c.c. \right\} \quad (1.60)$$

O modelo com  $n$  campos quirais definido por eqn.59 será estudado em detalhe nos capítulos 3 e 4 seguintes.

## CAPÍTULO 2

## O POTENCIAL EFETIVO

"O Grande Vácuo não pode consistir senão em ch'í; este ch'í não pode condensar-se senão para formar todas as coisas; e essas coisas não podem senão dispersar-se de modo a formar (uma vez mais) o Grande Vácuo."

Chang Tsai (6)

## 2.1 Introdução

É comum estudar-se a quebra espontânea de simetria na chamada aproximação semiclássica, isto é, investigando-se o mínimo do potencial, definido como o oposto da soma de todos os termos não-derivativos na densidade de Lagrangiana.

O potencial efetivo para uma teoria de campos foi introduzido por Euler, Heisenberg e Schwinger e estendido ao estudo da quebra espontânea de simetria por Jona-Lasinio e permite estender-se até ordens superiores essa análise.

Por exemplo, na aproximação clássica, o estado fundamental é dado pelo mínimo do potencial  $U(\phi)$ . Analogamente, os mínimos do potencial efetivo fornecem, sem qualquer aproximação, os vácuos verdadeiros da teoria.

Essa abordagem permite ainda estudar casos em que

as correcções radiativas alteram a estrutura da teoria, transformando um mínimo do potencial efetivo em um máximo. Além disso, existe uma expansão diagramática tal que o seu primeiro termo reproduz a aproximação semiclássica.

Inicialmente, o cálculo era feito somando-se uma série infinita de diagramas de Feynman com momentos externos nulos. Isso constituía-se, obviamente, numa tarefa extremamente trabalhosa e impraticável, acima de 1-loop.

Entretanto, as contribuições de ordens maiores de loop são importantes, pois se uma analogia com a aproximação WKB tiver sentido, a contribuição de 2-loop deve ser a primeira puramente quântica. A aproximação de 1-loop é muito simples, o que não ocorre para os termos de ordem superior; portanto pode acontecer que efeitos relevantes não apareçam até 2-loop.

Acima de 1-loop são geralmente empregados métodos funcionais como o de Jackiw (7). Aqui, no entanto, faremos uso também de um método primeiramente observado por Weinberg (8) e demonstrado de forma funcional por Lee e Sciacaluga (9).

## 2.2 O método de Weinberg (ou de tadpole)

Considere-se inicialmente um modelo simples com campos bosônicos, descrito por uma ação

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\phi) &= \int d^4x \mathcal{L}[\phi_i(x)] \\ &= \int dx \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi_i)(\partial^\nu \phi_i) - U(\phi) \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $U(\phi)$  é um polinômio quártico em  $\phi$  para ser renormalizável. Introduzimos agora uma quebra espontânea de

simetria, considerando que o campo  $\phi(x)$  tenha um valor esperado  $v$  no vácuo

$$\langle 0 | \phi_i(x) | 0 \rangle = v_i \quad (2.2)$$

onde  $v_i$  é dado ao nível de árvore por

$$\left. \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_i} \right|_{\phi_i = v_i} = 0 \quad (2.3)$$

Para fazer-se a expansão perturbativa em torno de um vácuo estável (mínimo absoluto de  $U(\phi)$ ), trasladamos o campo como  $\phi_i \rightarrow \phi_i + v_i$  na eqn.1 e expandimos em  $\phi_i$  em série de Taylor em torno de  $v_i$ . Obtemos, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi + v) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi_i) (\partial^\nu \phi_i) - U(v) - \Xi \phi \right. \\ \left. - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{1}{3!} G \phi^3 - \frac{1}{4!} \Lambda \phi^4 \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

com

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \left. \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_i} \right|_{\phi = v} & (M^2)_{ij} &= \left. \frac{\partial^2 U(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi = v} \\ G_{ijk} &= \left. \frac{\partial^3 U(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \right|_{\phi = v} & \Lambda_{ijkl} &= \left. \frac{\partial^4 U(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k \partial \phi_l} \right|_{\phi = v} \text{ coef} \end{aligned} \quad (2.5)$$



Note-se que da eq.3, o primeiro termo na eqn.5 anula-se.

Acrescentando um termo de interação linear do campo  $\phi$  com um campo externo (fonte)  $J(x)$ , temos

$$\left. \frac{\delta \mathcal{Y}(\phi)}{\delta \phi_i(x)} \right|_{\phi=\nu} = -J_i(x) \quad (2.6)$$

e

$$i \Delta_{ij}^{-1}(\nu; x, y) = \left. \frac{\delta^2 \mathcal{Y}(\phi)}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} \right|_{\phi=\nu} \quad (2.7)$$

onde  $\Delta^{-1}$  é o propagador inverso do campo.

Definimos agora o gerador das funções de Green conexas  $W(J)$  através de

$$\exp i W(J) = \int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi) + \int d^4x \phi \cdot J \right\} \quad (2.8)$$

Tem-se em particular que

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J_i(x)} = \frac{\langle 0_{+\infty} | \phi_i(x) | 0_{-\infty} \rangle}{\langle 0_{+\infty} | 0_{-\infty} \rangle} = \phi_{i_c}(x) \quad (2.9)$$

sendo  $\phi_c$ , valor esperado no vácuo do campo  $\phi(x)$  na presença da fonte  $J(x)$ , chamado campo clássico e

$$\frac{\delta^2 W(\mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}_i(x) \delta \mathcal{J}_j(x)} = \Delta_{ij}(x, y) \quad (2.10)$$

com  $\Delta(x, y)$ , propagador completo (soma das funções de dois pontos)

Definimos, agora, o gerador funcional das funções de Green irredutíveis por uma partícula (IiP)  $\Gamma(\phi_c)$ , através da transformação de Legendre:

$$\Gamma(\phi_c) \equiv W(\mathcal{J}) - \int d^4x \phi \cdot \mathcal{J} \quad (2.11)$$

É um funcional de  $\phi_c$  após a eliminação de  $\mathcal{J}$  através da eqn.9.

Temos

$$\left. \frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_{ic}} \right|_{\phi_c = \nu} = -\mathcal{J}_i \quad (2.12)$$

e desta forma a condição para quebra espontânea de simetria consiste em

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{ic}} \right|_{\phi_c = \nu} = 0 \quad (2.13)$$

para  $\nu$  não nulo. Temos também

$$\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{ic}(x) \delta \phi_{kc}(z)} \frac{\delta^2 W}{\delta \mathcal{J}_k(z) \delta \mathcal{J}_j(y)} = -\delta(x, y) \delta_{ij} \quad (2.14)$$

e, assim, em vista da eqn.10,

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{ic}(x) \delta \phi_{jc}(x)} \right|_{\phi_c = \nu} = \Delta_{ij}^{-1}(x, y) \quad (2.15)$$

Isso justifica o nome Ação Efetiva dado a  $\Gamma(\phi_c)$ .

Mostra-se, em geral, que

$$\left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi_{i_1 c}(x_1) \dots \delta \phi_{i_n c}(x_n)} \right|_{\mathcal{J}=0} = \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \nu) \quad (2.16)$$

onde  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  é a função de Green de  $n$  pontos conexa, também chamada vértice próprio de  $n$  pernas. Podemos, portanto, escrever

$$\Gamma(\phi_c) = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \nu) \times \\ \times [\phi_{i_1 c}(x_1) - \nu_{i_1}] \dots [\phi_{i_n c}(x_n) - \nu_{i_n}] \quad (2.17)$$

É especialmente interessante o caso em que o campo clássico assume uma configuração constante  $\phi_{ic}(x) = \bar{\Phi}_i$ ; neste caso, podemos escrever

$$\Gamma(\bar{\Phi}) = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \left[ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \nu) \right] \times$$

$$\times (\Phi_{i_1} - \nu_{i_1}) \cdots (\Phi_{i_n} - \nu_{i_n}) \quad (2.18)$$

e fazendo-se definir a transformada de Fourier de  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4 x_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 x_n}{(2\pi)^4} \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; \nu) \exp[-i k \cdot x] \quad (2.19)$$

Assumindo-se a invariância translacional do modelo, temos

$$\Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n; \nu) = (2\pi)^4 \delta(\sum k_i) \tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; \nu) \quad (2.20)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \tilde{\Gamma}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(0, \dots, 0; \nu) (\Phi_{i_1} - \nu_{i_1}) \cdots (\Phi_{i_n} - \nu_{i_n}) (2\pi)^4 \delta(0) \\ &\equiv - (2\pi)^4 \delta(0) V(\Phi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

, onde  $V(\Phi)$ , função do campo clássico, é o chamado Potencial Efetivo. O fator  $(2\pi)^4 \delta(0)$  indica que  $\Gamma(\Phi)$  é proporcional ao volume do sistema.

Esta relação foi utilizada por Coleman e Weinberg para o cálculo do potencial efetivo.

Da eqn.13, vê-se que podemos estudar a quebra espontânea de simetria procurando-se mínimos de  $V(\Phi)$  para  $\Phi$  não-nulo.

No caso em que  $\phi_c$  não é constante, pode-se expandir  $\Gamma(\phi_c)$  em série de Taylor em potências do momento canônico  $\partial_\mu \phi_c$  obtendo-se

$$\Gamma(\phi_c) = \int d^4x \left\{ -V(\phi_c) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_c)^2 Z(\phi_c) + \dots \right\} \quad (2.22)$$

Tomando-se, agora, a derivada da eqn.21 com relação a  $\Phi$  e fazendo-se  $\Phi = \nu$ , obtém-se

$$\frac{\partial V(\nu)}{\partial \nu_i} = - \tilde{\Gamma}_i^{(1)}(0; \nu) \quad (2.23)$$

e, desta forma, a soma infinita na eqn.21 é substituída pela integração em  $\nu_i$  na eqn.23

Assim, o potencial efetivo é obtido da integração em  $\nu$  da soma dos vértices próprios de 1 perna ("tadpoles") com momento externo nulo.

Esta relação é válida ordem a ordem de loop. Assim, para se calcular o potencial efetivo até uma certa ordem de loop, calculam-se os tadpoles (usando-se as regras de Feynman e os propagadores da teoria transladada) até esta ordem de loop, obtendo-se, para mais de um campo, um sistema de equações diferenciais parciais em  $\nu_i$ , o qual deve ser, então, resolvido. Naturalmente, o resultado da soma dos tadpoles deve ser regularizado e o método de 't Hooft e Veltman pode ser utilizado, levando a uma expressão que pode ser facilmente integrada.

### 2.3 O método de Jackiw (ou de bolha de vácuo)

Da eqn.21, fazendo-se  $\tilde{\phi} = \mathcal{V}$ , temos também que

$$V(\mathcal{V}) = - \tilde{\Gamma}^{(0)}(\mathcal{V}) = - \Gamma(\mathcal{V}) \quad (2.24)$$

, isto é, o potencial efetivo pode ser também obtido da soma dos vértices próprios sem pernas externas ("bolhas de vácuo").

Considere-se agora o gerador funcional da teoria transladada como  $\phi \rightarrow \phi + \phi^0$ ,

$$\exp i W(\mathcal{J}) = \int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi + \phi^0) + \int d^4x (\phi + \phi^0) \cdot \mathcal{J} \right\} \quad (2.25)$$

que podemos escrever como

$$\exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi^0) + \int d^4x \phi^0 \cdot \mathcal{J} \right\} \exp i W_1(\mathcal{J}) \quad (2.26)$$

com

$$\exp i W_1(\mathcal{J}) = \int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi + \phi^0) - \mathcal{Y}(\phi^0) + \int d^4x \phi \cdot \mathcal{J} \right\} \quad (2.27)$$

resultando, assim,

$$\begin{aligned}
 W(\mathcal{J}') &= \mathcal{Y}(\phi^0) + \int d^4x \phi^0 \cdot \mathcal{J}' + W_1 \\
 \Gamma(\phi^0) &= \mathcal{Y}(\phi^0) + W_1
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

onde  $W$  é calculado no valor  $\mathcal{J}'$  de  $\mathcal{J}$  tal que

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \mathcal{J}} \right|_{\mathcal{J}=\mathcal{J}'} = \phi^0
 \tag{2.29}$$

O termo  $\mathcal{Y}(\phi^0)$  é, naturalmente, o nível de árvore, e  $W_1$  contém os termos de ordem superior.

Calculamos, agora,  $\phi_c$ . Tem-se

$$\phi_c = \frac{\delta W(\mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}} = \phi^0 + \int d^4x \left[ \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \phi^0} + \frac{\delta W_1}{\delta \phi^0} + \mathcal{J} \right] \frac{\delta \phi^0}{\delta \mathcal{J}}
 \tag{2.30}$$

e impondo-se que  $\phi_c = \phi^0$  temos, portanto, da eqn.28,

$$\mathcal{J} = - \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \phi^0} - \frac{\delta W_1}{\delta \phi^0}
 \tag{2.31}$$

Substituindo, então,  $\mathcal{J}$  obtido de eqn.31 na eqn.27, resulta

$$\begin{aligned}
 \exp i W(\mathcal{J}) &= \int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi + \phi^0) - \mathcal{Y}(\phi^0) \right. \\
 &\quad \left. - \int d^4x \phi \cdot \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \phi^0} + \int d^4x \phi \cdot k \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Introduzindo, agora, o objeto

$$\exp i W(\phi^0; k) = \int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left\{ \mathcal{Y}(\phi + \phi^0) - \mathcal{Y}(\phi^0) - \int d^4x \phi \cdot \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \phi^0} + \int d^4x \phi \cdot k \right\} \quad (2.33)$$

vê-se que

$$W_1 = W(\phi^0; k) \Big|_{k = -\delta W_1 / \delta \phi^0} \quad (2.34)$$

Considere-se, agora, a ação

$$\mathcal{Y}(\phi + \phi^0) - \mathcal{Y}(\phi^0) - \int d^4x \phi \cdot \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \phi^0} \quad (2.35)$$

que tem a mesma forma que  $\mathcal{Y}(\phi)$ , com parâmetros que dependem de  $\phi^0$ . Veja-se que ela corresponde a eqn.35 sem o termo  $U(v)$ .

Os termos quadráticos em  $\phi$  definem o propagador correspondente para o campo e os demais, constituem numa interação

$$\int d^4x d^4y \frac{1}{2} \phi(x) i \mathcal{D}^{-1}(\phi^0; x, y) \phi(y) + \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi^0; \phi) \quad (2.36)$$



Na teoria dada pela ação  $\mathcal{J}(\phi)$ , com  $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0$ , as bolhas de vácuo IiP são dadas por  $\Gamma(0)$ , isto é,  $W(\mathcal{J})$  calculado em um  $\mathcal{J}'$  tal que

$$\left. \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}} \right|_{\mathcal{J} = \mathcal{J}'} = 0 \quad (2.37)$$

ou, o que é equivalente,

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta \mathcal{J}} \right|_{\mathcal{J} = \mathcal{J}'} = 0 \quad (2.38)$$

Desta forma, as bolhas de vácuo IiP para a teoria dada pela eqn.35 são dadas, a menos de um fator de normalização, por  $W(\phi^0; k)$  calculado em  $k'$  tal que

$$\left. \frac{\delta Z(\phi^0; k)}{\delta k} \right|_{k = k'} = 0 \quad (2.39)$$

Mostra-se porém que

$$\left. \frac{\delta Z(\phi^0; k)}{\delta k} \right|_{k = -\delta W_1 / \delta \phi^0} = 0 \quad (2.40)$$

Portanto,

$$W_1 = W(\phi^0; k) \Big|_{k=0} - \delta W_1 / \delta \phi^0 \quad (2.41)$$

é a soma de todas as bolhas de vácuo 1iP da teoria governada pela ação eqn.35, a menos de um fator de normalização.

A normalização da eqn.33 é obtida, considerando-se que um termo cinético (ação quadrática) na expansão perturbativa não leva a transições vácuo-vácuo. Dividimos, então, eqn.33 por

$$\int \mathcal{D}[\phi] \exp i \left[ \int d^4x \int d^4y \phi(x) i \mathcal{D}^{-1} \phi(y) \right] \quad (2.42)$$

e, conseqüentemente,  $\Gamma(\phi^0)$  adquire o termo adicional

$$-\frac{i}{2} \ln \text{Det } i \mathcal{D}^{-1} \quad (2.43)$$

que é de 1-loop Temos, assim,

$$\Gamma(\phi^0) = \mathcal{Y}(\phi^0) + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln i \mathcal{D}^{-1} + W_1 \quad (2.44)$$

Para obter-se o potencial efetivo, fazemos  $\phi^0 = v$  resultando finalmente

$$V(v) = V(0) - \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \det i \mathcal{D}^{-1}(v; k) +$$

$$+ i \left\langle \exp i \int d^4x \mathcal{L}_I(\nu; \Phi) \right\rangle \quad (2.45)$$

onde o último termo representa a soma das bolhas de vácuo 1iP, calculadas com a Lagrangiana de interação dada na eqn.36, de ordem superior a 1-loop.

#### 2.4 O potencial efetivo em teorias supersimétricas

Para calcularmos o potencial efetivo em teorias de campo supersimétricas, de vez que Srivastava (10) obteve uma expressão para o gerador funcional para supercampos quirais, poderíamos tentar desenvolver para supercampos uma formulação análoga á feita nas seções anteriores.

Ao invés disso, simplesmente consideraremos os campos componentes de um supermultiplete como campos independentes no tocante às expressões anteriormente obtidas eqn.2.23 e eqn.2.45. Faremos uso, porém, da técnica de supergráficos para calcular os gráficos necessários.

Assim, considerando-se a ação para campos quirais eqn.1.47

$$\int d^8z \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left\{ \int d^6s \left[ \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right] + h.c. \right\}$$

atribuiremos valor esperado não nulo no vácuo aos campos

$$\langle 0 | A_i | 0 \rangle = a_i$$

$$\langle 0 | \Psi_i | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | F_i | 0 \rangle = f_i$$

Como o vácuo deve ser invariante de Lorentz, mantemos o campo  $\Psi$  com valor esperado nulo.

Transladamos, então, os supercampos como

$$\begin{aligned}\Phi_i &\rightarrow \Phi_i + a_i + f_i \theta^2 \\ \bar{\Phi}_i &\rightarrow \bar{\Phi}_i + \bar{a}_i + \bar{f}_i \bar{\theta}^2\end{aligned}$$

(2.47)

obtendo para a ação,

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} = & \int d^2z \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left\{ \int d^3s \left[ \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right] + c.c. \right\} \\ & + \left\{ \int d^3s \Lambda_i \Phi_i + c.c. \right\} \\ & + \int d^4x \left\{ \bar{f}_i f_i + \left[ \left( \xi_i + m_{ij} a_j + g_{ijk} a_j a_k \right) f_i + c.c. \right] \right\}\end{aligned}\quad (2.48)$$

com

$$\begin{aligned}M_{ij} &= m_{ij} + 2g_{ijk} a_k + 2g_{ijk} f_k \theta^2 \\ \Xi_i &= \bar{f}_i + \left( \xi_i + m_{ij} a_j + 2g_{ijk} a_j a_k + \right. \\ & \quad \left. + (m_{ij} + 2g_{ijk} a_k) f_j \theta^2 \right)\end{aligned}\quad (2.49)$$

Dos termos quadráticos obtém-se o propagador dos supercampos (o que será feito no próximo capítulo) e os supergráficos de Feynman serão calculados com a Lagrangiana de interação.

Temos, por exemplo, na fig.1, o tadpole de 1-loop.

De acordo com a eqn.2.23, o tadpole com perna externa  $\tilde{A}(0)$  fornece a derivada do potencial com relação a  $\mathbf{a}$  e

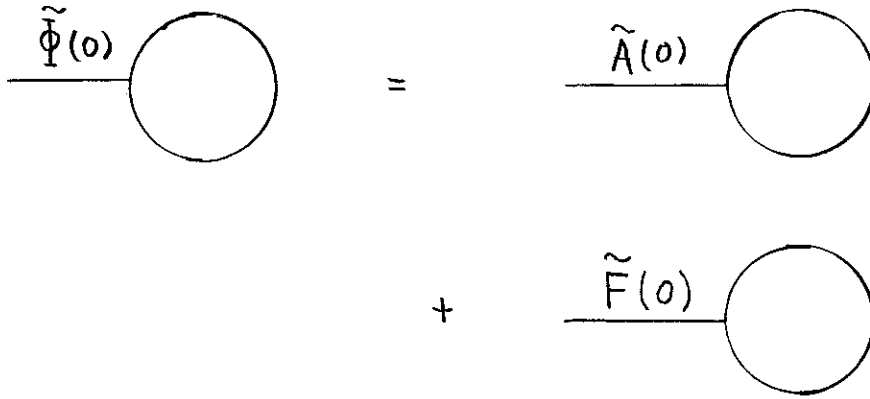
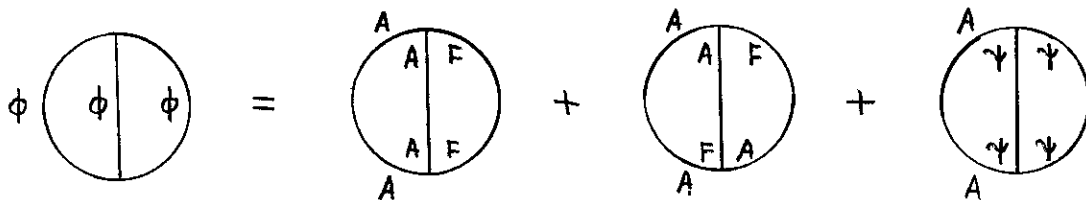


Figura 2.4.1  
TADPOLE DE 1-LOOP  
o com perna  $\tilde{F}(0)$ , a derivada com relação a  $f$ .

No caso das bolhas de vácuo (sem pernas externas), a soma das superbolhas 11P a 2 ou mais loops (vide fig.2) é a soma das bolhas 11P dos campos componentes e, portanto, segundo



*etc.*

Figura 2.4.2  
SUPERBOLHAS DE 2-LOOP  
eqn.2.45, fornecem o potencial à mesma ordem de loop.

## CAPÍTULO 3

## DERIVAÇÃO DOS PROPAGADORES DE SUPERCAMPOS

Derivemos agora os propagadores de supercampos para o modelo envolvendo campos quirais.

Considerando-se a lagrangiana do modelo com  $n$  campos quirais eqn.1.47 transladada segundo eqn.2.47, eqn.2.48, com  $m_{ij}$  e  $g_{ijk}$  simétricos nos índices, temos então, a lagrangiana livre

$$\mathcal{L}_0 = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left\{ \int d^2\theta \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + h.c. \right\} \quad (3.1)$$

e a de interação

$$\mathcal{L}_{INT} = \int d^2\theta \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (3.2)$$

Devido ao vínculo a que  $\bar{\Phi}$  está sujeito, (vide eqn.1.41) define-se um supercampo "potencial" através de

$$\Phi_i = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 S(x, \theta, \bar{\theta}) \quad \bar{\Phi}_i = -\frac{1}{4} D^2 \bar{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.3)$$

, o qual realiza os vínculos

$$\bar{D}_\alpha \bar{\Phi}_i = 0 \quad D^\alpha \bar{\Phi}_i = 0 \quad (3.4)$$

Temos a variação funcional

$$\frac{\delta S(x', \theta', \bar{\theta}')}{\delta S(x, \theta, \bar{\theta})} = \delta^4(x-x') \delta^2(\theta-\theta') \delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}') = \delta^8(z-z') \quad (3.5)$$

Acrescentando-se os termos de fixação de gauge (10)

e de fonte

$$\mathcal{Y}_{FG} = \xi^{-1} \int d^8z \bar{S}_i (1-P_1) \square S_i$$

$$\mathcal{Y}_{FONTE} = \int d^8z (J, \bar{J}) \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

à ação livre obtida da eqn.1 e variando-se com relação aos campos  $S$  temos então as equações

$$\mathcal{D}^{-1} \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{4} \bar{D}^2 & [P_2 + \xi^{-1}(1-P_2)] \square \\ [P_1 + \xi^{-1}(1-P_1)] \square & -\frac{\bar{M}}{4} D^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J \\ \bar{J} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

ou

$$-\frac{M}{4} \bar{D}^2 \Delta_{SS} + [P_2 + \xi^{-1}(1-P_2)] \square \Delta_{\bar{S}S} = i \delta^8(z-z')$$

$$[P_1 + \xi^{-1}(1-P_1)] \square \Delta_{S\bar{S}} - \frac{\bar{M}}{4} D^2 \Delta_{\bar{S}\bar{S}} = i \delta^8(z-z')$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{M}}{4} D^2 \Delta_{\bar{s}s} &= [P_1 + \xi^{-1}(1-P_1)] \square \Delta_{ss} \\
 -\frac{M}{4} \bar{D}^2 \Delta_{s\bar{s}} &= [P_2 + \xi^{-1}(1-P_2)] \square \Delta_{\bar{s}\bar{s}}
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Das duas primeiras, obtemos

$$\begin{aligned}
 \{[P_2 + \xi^{-1}(1-P_2)] \square - MP_2 \bar{M}\} \Delta_{\bar{s}s} &= i \delta^8(z-z') \\
 \{[P_1 + \xi^{-1}(1-P_1)] \square - \bar{M}P_1 M\} \Delta_{s\bar{s}} &= i \delta^8(z-z')
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

e das duas últimas,

$$\Delta_{ss} = \frac{\bar{M}}{4\square} D^2 \Delta_{\bar{s}s} \quad , \quad \Delta_{\bar{s}\bar{s}} = \frac{M}{4\square} \bar{D}^2 \Delta_{s\bar{s}}
 \tag{3.10}$$

Escrevendo a última equação como

$$\Delta_{s\bar{s}} = i \left\{ \frac{\xi}{\square} (P_2 + P_T) + P_1 (\square - \bar{M}P_1 M)^{-1} \right\} \delta^8(z-z')
 \tag{3.11}$$

Impondo-se

$$(\square - \bar{M}P_1 M) = (\square - \bar{a}a - \bar{f}a\theta^2)P_1 + \frac{(\bar{a} + \bar{f}\theta^2)\bar{f}D^2\theta^2\bar{D}^2}{16\square}
 \tag{3.12}$$



e considerando-se as expansões

$$P_1 (\square - \bar{M} P_1 M)^{-1} \delta^8(z-z')$$

$$[A \bar{\theta}^2 \theta'^2 + B + C \bar{\theta}^2 + D \theta'^2] e^{-i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{-i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$+ E P_1 \delta^8(z-z')$$

(3.13)

e resolvendo-a para os coeficientes A, B, C, D e E, obtemos

$$A = [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1}f]^{-1} - (\square - \bar{a}a)^{-1}$$

$$\square^2 B = \bar{a} [(\square - a\bar{a}) - f(\square - \bar{a}a)^{-1}\bar{f}]^{-1} a - (\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{a} a$$

$$\square C = [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1}f]^{-1} \bar{f} a (\square - \bar{a}a)^{-1}$$

$$\square D = (\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{a} f [(\square - \bar{a}a)^{-1} - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1}f]^{-1}$$

(3.14)

Temos assim

$$\begin{aligned} \Delta_{S\bar{S}} &= \frac{i\xi}{\square} (P_2 + P_T) \delta^8(z-z') + i P_1 (\square - \bar{a}a)^{-1} \delta^8(z-z') \\ &+ i [A \bar{\theta}^2 \theta'^2 + B + C \bar{\theta}^2 + D \theta'^2] e^{-i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{-i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x') \end{aligned}$$

(3.15)

com  $A, B, C$  e  $D$  dados acima.

Da mesma forma, escrevemos  $\Delta_{\bar{s}s}$  como

$$\Delta_{\bar{s}s} = i \left\{ \frac{\bar{E}}{D} (P_1 + P_T) + P_2 (D - M P_2 M^{-1}) \right\} S^8(z-z') \quad (3.16)$$

e por processo idêntico obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{s}s} = & \frac{i\bar{E}}{D} (P_1 + P_T) S^8(z-z') + i P_2 (D - a\bar{a})^{-1} S^8(z-z') \\ & + i [\bar{A} \theta^2 \bar{\theta}'^2 + \bar{B} + \bar{C} \theta^2 + \bar{D} \bar{\theta}'^2] e^{i\theta\bar{\theta}} e^{i\theta'\bar{\theta}'} S^4(x-x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= [(D - a\bar{a}) - f (D - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} - (D - a\bar{a})^{-1} \\ D^2 \bar{B} &= a [(D - \bar{a}a) - \bar{f} (D - a\bar{a})^{-1} f]^{-1} \bar{a} - (D - a\bar{a})^{-1} a\bar{a} \\ D C &= [(D - a\bar{a}) - f (D - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} f \bar{a} (D - a\bar{a})^{-1} \\ D D &= (D - a\bar{a})^{-1} a \bar{f} [(D - a\bar{a}) - f (D - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} \end{aligned}$$

(3.17)

Podemos agora obter  $\Delta_{ss}$  e  $\Delta_{\bar{s}\bar{s}}$  das equações eqn.8

como

$$\Delta_{\bar{S}\bar{S}} = i \left[ \bar{F} \bar{\theta}^2 \bar{\theta}'^2 + \bar{G} + \bar{H} \bar{\theta}^2 + \bar{I} \bar{\theta}'^2 + \bar{J} \bar{\theta} \bar{\theta}' \right] e^{-i\theta\bar{\theta}} e^{i\theta'\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

(3.18)

e

$$\Delta_{\bar{S}\bar{S}} = i \left[ F \theta^2 \theta'^2 + G + H \theta^2 + I \theta'^2 + J \theta \theta' \right] e^{i\theta\bar{\theta}} e^{-i\theta'\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

(3.19)

com

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= - (\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{f} [(\square - a\bar{a}) - f(\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} \\
\square^2 \bar{G} &= - \bar{a} [(\square - a\bar{a}) - f(\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} \bar{f} \bar{a} (\square - a\bar{a})^{-1} \\
\square \bar{H} &= - [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1} f]^{-1} \bar{a} \\
\square \bar{I} &= - \bar{a} [(\square - a\bar{a}) - f(\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} \\
\square \bar{J} &= 2 \bar{a} (\square - a\bar{a})^{-1}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$\begin{aligned}
F &= - (\square - a\bar{a})^{-1} f [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1} f]^{-1} \\
\square^2 G &= - a [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1} f]^{-1} \bar{f} a (\square - \bar{a}a) \\
\square H &= - [(\square - a\bar{a}) - f(\square - \bar{a}a)^{-1} \bar{f}]^{-1} a \\
\square I &= - a [(\square - \bar{a}a) - \bar{f}(\square - a\bar{a})^{-1} f]^{-1} \\
\square J &= 2a (\square - \bar{a}a)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Para o modelo de Wess e Zumino, com um único campo quiral, temos

$$\begin{aligned}
A = \bar{A} &= \frac{|\tilde{f}|^2}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2](\square - |\tilde{\alpha}|^2)} \\
\square^2 B = \square^2 \bar{B} &= \frac{|\tilde{\alpha}|^2 |\tilde{f}|^2}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2](\square - |\tilde{\alpha}|^2)} \\
\square C = \square \bar{D} = \square D^* &= \frac{\tilde{\alpha} \tilde{f}^*}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2](\square - |\tilde{\alpha}|^2)} \\
F = -\frac{\tilde{f}}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]} & \quad \square^2 G = \frac{\tilde{\alpha}^2 \tilde{f}^*}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]} \\
\square H = \square I = -\frac{\tilde{\alpha}(\square - |\tilde{\alpha}|^2)}{[(\square - |\tilde{\alpha}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]} & \quad \square J = \frac{2\tilde{\alpha}}{(\square - |\tilde{\alpha}|^2)} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Dos "propagadores" dos supercampos "potenciais"  $S$  e  $\bar{S}$  podemos obter os propagadores dos supercampos quirais  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  através das relações

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi\Phi} &= \frac{\bar{D}^2 \bar{D}'^2}{16} \Delta_{SS} & \Delta_{\Phi\bar{\Phi}} &= \frac{\bar{D}^2 D'^2}{16} \Delta_{S\bar{S}} \\
\Delta_{\bar{\Phi}\Phi} &= \frac{D^2 \bar{D}'^2}{16} \Delta_{\bar{S}S} & \Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} &= \frac{D^2 D'^2}{16} \Delta_{\bar{S}\bar{S}} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Temos, então

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi\Phi} &= i \left[ \bar{G} \theta^2 \theta'^2 \square^2 + \bar{F} + \bar{I} \theta^2 \square + \bar{H} \theta'^2 \square + \bar{J} \square \theta \theta' \right] \times \\
&\quad \times e^{i\theta \gamma \bar{\theta}} e^{-i\theta' \gamma \bar{\theta}'} \delta^4(x-x')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{\phi}\bar{\phi}} &= i \left[ G \bar{\theta}^2 \theta^2 \square^2 + F + I \bar{\theta}^2 \square + H \bar{\theta}'^2 \square + J \square \bar{\theta} \bar{\theta}' \right] \cdot \\
&\quad \cdot e^{-i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x') \\
\Delta_{\phi\bar{\phi}} &= i \left[ (B \square^2 + (\square - \bar{a}a)^{-1} \square) \theta^2 \bar{\theta}'^2 + (A + (\square - \bar{a}a)^{-1}) \right. \\
&\quad \left. + D \square \theta^2 + C \square \bar{\theta}'^2 - 2E i \theta\gamma\bar{\theta}' \right] e^{i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x') \\
\Delta_{\bar{\phi}\phi} &= i \left[ (\bar{B} \square^2 + (\square - a\bar{a})^{-1} \square) \bar{\theta}^2 \theta'^2 + (\bar{A} + (\square - a\bar{a})^{-1}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{D} \square \bar{\theta}^2 + \bar{C} \square \theta'^2 + 2E i \theta'\gamma\bar{\theta} \right] e^{-i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{-i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x') \quad (3.24)
\end{aligned}$$

É mais útil, porém a sua expressão no espaço dos momentos. Assim, com

$$\delta^4(x-x') \longrightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p \cdot (x-x')} \quad (3.25)$$

resulta

$$\begin{aligned}
\Delta_{\phi\phi} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ A(p) + B(p) \theta^2 + C(p) \theta'^2 + D(p) \theta \theta' \right. \\
&\quad \left. + E(p) \theta^2 \theta'^2 \right] e^{-\theta\gamma\bar{\theta}} e^{\theta'\gamma\bar{\theta}'} e^{i p \cdot (x-x')} \\
\Delta_{\phi\bar{\phi}} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ F(p) + G(p) \theta^2 + H(p) \bar{\theta}'^2 + I(p) \theta \bar{\theta}' \right. \\
&\quad \left. + J(p) \theta^2 \bar{\theta}'^2 \right] e^{-\theta\gamma\bar{\theta}} e^{-\theta'\gamma\bar{\theta}'} e^{i p \cdot (x-x')} \\
\Delta_{\bar{\phi}\phi} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \bar{F}(p) + \bar{G}(p) \bar{\theta}^2 + \bar{H}(p) \theta'^2 - \bar{I}(p) \theta' \bar{\theta} \right. \\
&\quad \left. + \bar{J}(p) \bar{\theta}^2 \theta'^2 \right] e^{\theta\gamma\bar{\theta}} e^{\theta'\gamma\bar{\theta}'} e^{i p \cdot (x-x')}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{\bar{\Phi}\Phi} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \bar{A}(p) + \bar{B}(p) \bar{\theta}^2 + \bar{C}(p) \bar{\theta}^{\prime 2} + \bar{D}(p) \bar{\theta} \bar{\theta}' \right. \\ \left. + \bar{E}(p) \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^{\prime 2} \right] e^{\theta' \not{p} \theta} e^{\theta' \not{p} \bar{\theta}'} e^{i p \cdot (x - x')}$$

(3.26)

com

$$A(p) = - (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1}$$

$$\bar{A}(p) = - (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1}$$

$$B(p) = \bar{a} \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1}$$

$$\bar{B}(p) = a \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1}$$

$$C(p) = \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1} \bar{a}$$

$$\bar{C}(p) = \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1} a$$

$$D(p) = - 2\bar{a} (p^2 + a\bar{a})^{-1}$$

$$\bar{D}(p) = - 2a (p^2 + \bar{a}a)^{-1}$$

$$E(p) = - \bar{a} \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1} \bar{f} \bar{a} (p^2 + a\bar{a})^{-1}$$

$$\bar{E}(p) = - a \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1} \bar{f} a (p^2 + \bar{a}a)^{-1}$$

$$F(p) = - \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1}$$

$$\bar{F}(p) = - \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1}$$

$$G(p) = (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{a} f \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}(p) &= (p^2 + a\bar{a})^{-1} a \bar{f} \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1} \\
\bar{H}(p) &= \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1} \bar{f} a (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \\
\bar{H}(p) &= \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1} f \bar{a} (p^2 + a\bar{a})^{-1} \\
\bar{I}(p) &= -2 (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \\
\bar{I}(p) &= -2 (p^2 + a\bar{a})^{-1} \\
\bar{J}(p) &= -\bar{a} \left[ (p^2 + a\bar{a}) - f (p^2 + \bar{a}a)^{-1} \bar{f} \right]^{-1} a + 1 \\
\bar{J}(p) &= -a \left[ (p^2 + \bar{a}a) - \bar{f} (p^2 + a\bar{a})^{-1} f \right]^{-1} \bar{a} + 1
\end{aligned}$$

(3.27)

que se reduzem, para um único campo quiral a

$$A(p) = - \frac{\hat{f}^*}{[(p^2 + |\hat{a}|^2)^2 - |\hat{f}|^2]} \quad D(p) = - \frac{2\hat{a}^*}{(p^2 + |\hat{a}|^2)}$$

$$B(p) = C(p) = \frac{\hat{a}^* (p^2 + |\hat{a}|^2)}{[(p^2 + |\hat{a}|^2)^2 - |\hat{f}|^2]}$$

$$E(p) = - \frac{\hat{f} \hat{a}^{*2}}{[(p^2 + |\hat{a}|^2)^2 - |\hat{f}|^2]}$$



$$\mathbb{F}(p) = -\frac{(p^2 + |\tilde{a}|^2)}{[(p^2 + |\tilde{a}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]} \quad \mathbb{H}(p) = -\frac{2}{(p^2 + |\tilde{a}|^2)} \quad (3.28)$$

$$\mathbb{G}(p) = \mathbb{H}(p) = \frac{\tilde{f} \tilde{a}^*}{[(p^2 + |\tilde{a}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]}$$

$$\mathbb{J}(p) = -\frac{|\tilde{a}|^2(p^2 + |\tilde{a}|^2)}{[(p^2 + |\tilde{a}|^2)^2 - |\tilde{f}|^2]} + 1$$

onde da eqn.2.5, temos

$$a_{ij} = m_{ij} + \mathcal{L} g_{ijk} a_k$$

$$\tilde{a} = m + \mathcal{L} g a$$

$$f_{ij} = \mathcal{L} g_{ijk} f_k$$

$$\tilde{f} = \mathcal{L} g f$$

(3.29)

## CAPÍTULO 4

## O POTENCIAL EFETIVO NOS MODELOS COM N CAMPOS QUIRAIS

Neste capítulo, fazendo uso dos métodos de Weinberg (tadpole) e de Jackiw (bolha de vácuo), calcularemos o potencial efetivo para o modelo geral supersimétrico com  $n$  campos quirais, apresentado no capítulo 1.

## 4.1 O potencial ao nível de árvore (zero-loop)

Seja a ação transladada para o modelo com  $n$  campos quirais, eqn.2.48,

Segundo o método de Jackiw, visto na seção 4 do capítulo 2, lemos da ação acima, imediatamente, o potencial efetivo ao nível de árvore como

$$V_0 = - \left[ (\xi_i + m_{ij} a_j + g_{ijk} a_j a_k) f_i + (\xi_i + m_{ij} \bar{a}_j + g_{ijk} \bar{a}_j \bar{a}_k) \bar{f}_i + \bar{f}_i f_i \right] \quad (4.1)$$

resultado que reproduz, simplesmente, o potencial escalar clássico definido na eqn.1.52.

Das equações de movimento eqn.1.53

$$F_i = - (\xi_i + m_{ij} \bar{A}_j + g_{ijk} \bar{A}_j \bar{A}_k)$$

temos que o resultado acima se reduz a

$$V_0 = |F_i|^2 \quad (4.2)$$

e também

$$V_0 = \frac{\partial W}{\partial A_i} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i} \quad (4.3)$$

e, portanto, o mínimo do potencial ocorre para  $F = \bar{F} = 0$  se  $\det M \neq 0$ . Neste caso, o potencial a nível de árvore é nulo e, conseqüentemente, a Supersimetria não é quebrada ao nível de árvore se o determinante acima não se anula (vide eqn.1.27).

Poderíamos, é claro, ter calculado o tadpole de  $\theta$ -loop e integrado, segundo o método de Weinberg. Todavia o método de Jackiw fornece o mesmo resultado de maneira mais simples.

No próximo capítulo, analisaremos a contribuição de  $\theta$ -loop, que acabamos de calcular, nos modelos particulares de Wess e Zumino e de O'Raifeartaigh.

#### 4.2 O potencial ao nível 1-loop

Para obtermos a contribuição de 1-loop ao potencial efetivo, poderíamos, ainda de acordo com o método de Jackiw, calcular o termo de 1-loop segundo a eqn.2.45. No entanto, preferimos fazer uso do método de Weinberg de vez que é mais simples calcular o tadpole de 1-loop e integrá-lo, do que inverter o propagador, calcular o determinante, etc.. Considere-se, então, a Lagrangiana de interação, eqn.3.2., e

calculemos o tadpole de 1-loop, o qual é dado por

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi} \text{---} \bigcirc_{\substack{z \\ z'}} &= \frac{i}{3} \int d^2\theta \left[ g_{ijk} \bar{\Phi}_i(0, \theta, \bar{\theta}) (\Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})_{jk} \right]_{z'=z} \\
 &= i \int d^2\theta \bar{\Phi}_i \text{Tr} g_i \Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

que, da expressão para o propagador, obtida no capítulo 3, resulta

$$\begin{aligned}
 -\hat{A}_i^*(0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} g_i (\bar{B}(k) + \bar{C}(k) + \bar{D}(k)) \\
 -\hat{F}_i^*(0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} g_i \bar{A}(k)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Temos desta forma as derivadas parciais do potencial como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_1}{\partial \bar{a}_i} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} g_i a \left\{ [(k^2 + \bar{a}a) - \bar{f}(k^2 + a\bar{a})^{-1}f]^{-1} - (k^2 + \bar{a}a)^{-1} \right\} \\
 &+ i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} g_i \left\{ [(k^2 + a\bar{a}) - f(k^2 + \bar{a}a)^{-1}\bar{f}]^{-1} - (k^2 + a\bar{a})^{-1} \right\} a \\
 \frac{\partial V_1}{\partial \bar{f}_i} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} g_i (k^2 + a\bar{a})^{-1} f [(k^2 + \bar{a}a) - \bar{f}(k^2 + a\bar{a})^{-1}f]^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para  $F=0$ , ambas derivadas se anulam, indicando um mínimo do potencial.

Podemos integrar agora esse resultado, usando as identidades do apêndice B como

$$V_1 = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln (\mathbf{I} - \bar{H}H) \quad (4.7)$$

com

$$H = \int (k^2 + \bar{a}a)^{-1} \quad (4.8)$$

Podemos ainda reescrever este como

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{i}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln [(\mathbf{I} - H\bar{H})(\mathbf{I} - \bar{H}H)] \\ &= -\frac{i}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - H\bar{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - \bar{H}H \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln (\mathbf{I} - C^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & H \\ \bar{H} & 0 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} H\bar{H} & 0 \\ 0 & \bar{H}H \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Temos ainda

$$\text{Tr} \ln (\mathbf{I} + C) = \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & H \\ \bar{H} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \ln \text{Det} (\mathbf{I} - C)$$

$$\text{Tr} \ln (\mathbf{I} - C^2) = \text{Tr} [\ln (\mathbf{I} + C) + \ln (\mathbf{I} - C)] = 2 \text{Tr} \ln (\mathbf{I} + C)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & f(k^2 + \bar{a}a)^{-1} \\ \bar{f}(k^2 + a\bar{a})^{-1} & 0 \end{pmatrix} = B(k^2 + Y^2)^{-1} \quad (4.11)$$

com

$$B = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \bar{f} & 0 \end{pmatrix} \quad Y^2 = \begin{pmatrix} a\bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a}a \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

e desta forma resulta o potencial como

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln [I + B(k^2 + Y^2)^{-1}] \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln [(k^2 + Y^2 + B)(k^2 + Y^2)^{-1}] \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\ln(k^2 + X^2) - \ln(k^2 + Y^2)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

com

$$X^2 = B + Y^2 = \begin{pmatrix} a\bar{a} & f \\ \bar{f} & \bar{a}a \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Se  $F = 0$  (mínimo do potencial), o potencial se anula, de forma que a Supersimetria não é quebrada também a 1-loop, nesta situação.

Agora a derivada parcial com relação a  $\bar{f}_i$  pode ser regularizada usando-se as integrais do apêndice D como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \bar{f}_i} &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{\partial X^2}{\partial \bar{f}_i} (k^2 + X^2)^{-1} \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\partial X^2}{\partial \bar{f}_i} \right) X^2 \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln(X^2/\mu^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Da mesma forma, a derivada parcial com relação a  $\bar{a}_i$  regularizada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \bar{a}_i} &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{\partial X^2}{\partial \bar{a}_i} (k^2 + X^2)^{-1} - \frac{\partial Y^2}{\partial \bar{a}_i} (k^2 + Y^2)^{-1} \right] \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\partial X^2}{\partial \bar{a}_i} \right) X^2 \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln(X^2/\mu^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial Y^2}{\partial \bar{a}_i} \right) Y^2 \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln(Y^2/\mu^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

e a contribuição regularizada a 1-loop ao potencial efetivo é dada por

$$V_1 = \frac{1}{64\pi^2} \left[ -\left( \frac{4}{\epsilon} + 3 - 2\gamma \right) \text{Tr}(\bar{f}f) + \text{Tr} X^4 \ln(X^2/\mu^2) - \text{Tr} Y^4 \ln(Y^2/\mu^2) \right] \quad (4.17)$$

Partindo de uma lagrangiana regularizada

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i z_{ij} \Phi_j + \left\{ \int d^4\theta \left[ \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right] + \text{c.c.} \right\} \quad (4.18)$$

encontramos para o potencial efetivo ao nível de árvore

$$V_0 = - \left[ (m_{ij} a_j + g_{ijk} a_j a_k) \bar{f}_i + (m_{ij} \bar{a}_j + g_{ijk} \bar{a}_j \bar{a}_k) \bar{f}_i + \bar{f}_i Z_{ij} f_j \right] \quad (4.19)$$

Sendo

$$Z = 1 + \hbar Z_1 + \hbar^2 Z_2 \quad (4.20)$$

identificamos, então, o contratermo de 1-loop, 2-loop, etc., como

$$V_0^{(1)} = -\hbar \bar{f}_i Z_{1ij} f_j$$

$$V_0^{(2)} = -\hbar^2 \bar{f}_i Z_{2ij} f_j \quad (4.21)$$

De vez que

$$\text{Tr}(\bar{f}f) = \bar{f}_k f_{ek} = 4 \bar{f}_i g_{ike} g_{ekj} f_j = 4 \bar{f}_i (g_e^2)_{ij} f_j$$

vemos que podemos renormalizar o potencial efetivo a 1-loop fazendo

$$Z_1 = -\frac{g_e^2}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} + 3 \cdot 2\gamma \right) \quad (4.22)$$

resultando a contribuição renormalizada de 1-loop como



$$V_{1R} = \frac{1}{64\pi^2} \left[ \text{Tr} X^4 \ln(X^2/\mu^2) - \text{Tr} Y^4 \ln(Y^2/\mu^2) \right] \quad (4.23)$$

Este esquema de renormalização é comumente chamado Esquema de Subtração Mínima Modificado (subtraindo não só o polo dimensional mas todo o coeficiente de  $\bar{f}f$ ).

Note-se porém que

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 (V_0 + V_{1R})}{\partial \bar{f}_i \partial f_j} \Big|_{\bar{f} = f = 0} &= 1 - \frac{1}{64\pi^2} \text{Tr} \left[ (2 \ln(X^2/\mu^2) + 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4g_i g_j \end{pmatrix} \right] \Big|_{\bar{f} = f = 0} \\ &= 1 - \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} \left[ g_i g_j (3 + 2 \ln(\bar{a}a/\mu^2)) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Portanto, comparando-se este resultado com a eqn.1, vê-se que para  $\alpha$  grande, podemos ter uma inversão de sinal no termo cinético da ação efetiva.

Para remediar isto, seguindo Amati e Chou (11) podemos impor que a constante de renormalização seja obtida através da condição

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \bar{f}_i \partial f_j} \Big|_{\bar{f} = f = 0} \quad (4.25)$$

Com isto, obtemos

$$(Z_1)_{ij} = - \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} g_i g_j \left( \frac{4}{\epsilon} - 2\gamma - 2 \ln(\bar{a}a/\mu^2) \right) \quad (4.26)$$

e a contribuição de 1-loop ao potencial efetivo como

$$V_{1R} = \frac{1}{64\pi^2} \left[ \text{Tr } X^4 \ln(X^2/\mu^2) - \text{Tr } Y^4 \ln(Y^2/\mu^2) \right. \\ \left. - 3 \text{Tr}(\bar{f}f) - 2 \text{Tr} \bar{f}f \ln(\bar{a}a/\mu^2) \right] \quad (4.27)$$

Note-se que  $X^2$ ,  $Y^2$  e  $\bar{a}a$  são matrizes hermitianas, como se vê de eqn.4.14 e eqn.12, e, desta forma, diagonalizáveis.

Podemos, então, escrever cada termo envolvendo seus logaritmos, na eqn.23 e na eqn.27, em termos dos seus respectivos autovalores.

Por exemplo,

$$\text{Tr } X^4 \ln(X^2/\mu^2) = \text{Tr} (U X^2 U^{-1})^2 U \ln(X^2/\mu^2) U^{-1} \\ = \text{Tr } X_D^4 \ln(X_D^2/\mu^2) \\ = \sum_i \lambda_i^2 \ln(\lambda_i/\mu^2) \quad (4.28)$$

onde  $U$  é a matriz que diagonaliza  $X^2$ ,  $X_D^2$  é  $X^2$  diagonalizada e  $\lambda_i$  são seus autovalores.

Vale assim ressaltar que se algum dos autovalores de  $X^2$ ,  $Y^2$  ou  $\bar{a}a$  for negativo em alguma região de valores dos  $A_s$ , a contribuição de 1-loop ao potencial efetivo será, em geral, aí complexa.

No próximo capítulo, analisaremos a contribuição de 1-loop, que acabamos de calcular, nos modelos particulares de Wess e Zumino, de O'Raifeartaigh e num modelo com simetria interna.

#### 4.3 O potencial ao nível 2-loop

A 2-loop, vê-se da eqn.2.45 que o método de Jackiw volta a ser mais simples que o método de Weinberg e por isso faremos uso dele aqui. Calculamos, então, os diagramas apresentados na fig.1, que fornecem, respectivamente,

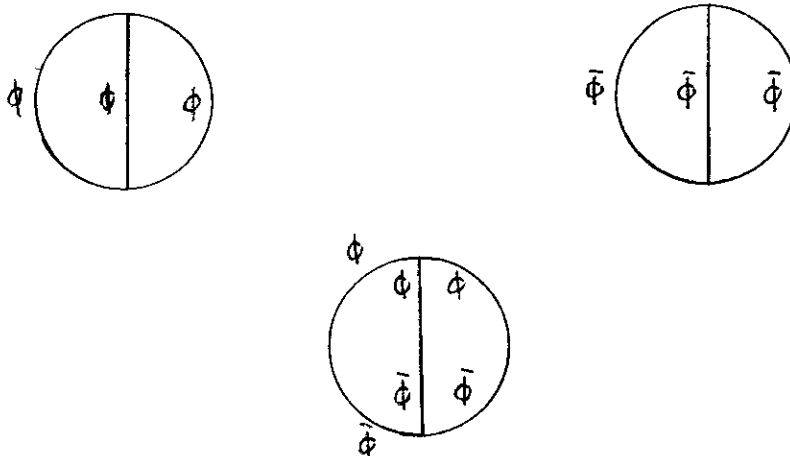


Figura 4.3.1  
CONTRIBUIÇÃO DE 2-LOOP AO POTENCIAL EFETIVO

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{3}\right)^2 3! \int d^2\theta d^2\theta' g_{ijk} g_{lmn} (\Delta_{\phi\phi})_{ie} (\Delta_{\phi\phi})_{jm} (\Delta_{\phi\phi})_{kn}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{3}\right)^2 3! \int d^2\bar{\theta} d^2\bar{\theta}' g_{ijk} g_{lmn} (\Delta_{\bar{\phi}\bar{\phi}})_{ie} (\Delta_{\bar{\phi}\bar{\phi}})_{jm} (\Delta_{\bar{\phi}\bar{\phi}})_{kn}$$

$$\frac{2}{2} \left(\frac{i}{3}\right)^2 3! \int d^2\theta d^2\bar{\theta}' g_{ijk} g_{lmn} (\Delta_{\phi\bar{\phi}})_{ie} (\Delta_{\phi\bar{\phi}})_{jm} (\Delta_{\phi\bar{\phi}})_{kn}$$

e, das expressões dos propagadores,

$$\frac{i}{3} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \bar{E}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e A^T(p_1+p_2) \\ & + A_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i E(p_2) g_e A^T(p_1+p_2) \\ & + A_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e E^T(p_1+p_2) \\ & + A_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i B(p_2) g_e C^T(p_1+p_2) \\ & + A_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i C(p_2) g_e B^T(p_1+p_2) \\ & + B_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e C^T(p_1+p_2) \\ & + C_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e B^T(p_1+p_2) \\ & + B_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i C(p_2) g_e A^T(p_1+p_2) \\ & + C_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i B(p_2) g_e A^T(p_1+p_2) \\ & - \frac{1}{2} A_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i D(p_2) g_e D^T(p_1+p_2) \\ & - \frac{1}{2} D_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e D^T(p_1+p_2) \\ & - \frac{1}{2} D_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i A(p_2) g_e D^T(p_1+p_2) \\ & - \frac{1}{2} D_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i D(p_2) g_e A^T(p_1+p_2) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{i}{3} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \bar{E}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{A}^T(p_1+p_2) \\ & + \bar{A}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{E}(p_2) g_e \bar{A}^T(p_1+p_2) \\ & + \bar{A}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{E}^T(p_1+p_2) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{A}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{B}(p_2) g_e \bar{C}^T(p_1+p_2) \\
& + \bar{A}_{ie}(p_2) \text{Tr } g_i \bar{C}(p_2) g_e \bar{B}^T(p_1+p_2) \\
& + \bar{B}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{C}^T(p_1+p_2) \\
& + \bar{C}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{B}^T(p_1+p_2) \\
& + \bar{B}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{C}(p_2) g_e \bar{A}^T(p_1+p_2) \\
& + \bar{C}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{B}(p_2) g_e \bar{A}^T(p_1+p_2) \\
& - \frac{1}{2} \bar{A}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{D}(p_2) g_e \bar{D}^T(p_1+p_2) \\
& - \frac{1}{2} \bar{D}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{D}^T(p_1+p_2) \\
& - \frac{1}{2} \bar{D}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{D}^T(p_1+p_2) \\
& - \frac{1}{2} \bar{D}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{A}(p_2) g_e \bar{D}^T(p_1+p_2) \\
& - \frac{1}{2} \bar{D}_{ie}(p_1) \text{Tr } g_i \bar{D}(p_2) g_e \bar{A}^T(p_1+p_2) \} , \text{ etc.}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Devido á complexidade deste resultado, não faremos a substituição dos coeficientes do propagador no caso geral de  $N$  supercampos, mas apenas no modelo de Wess e Zumino, com um único supercampo, no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 5

## MODELOS PARTICULARES

Neste capítulo, aplicaremos os resultados gerais, obtidos anteriormente, para o potencial efetivo, aos modelos de Wess e Zumino e de O'Raifeartaigh

## 5.1 O modelo de Wess e Zumino

A ação do modelo de Wess e Zumino (5) é dada por

$$\int d^4x \bar{\Phi} \Phi + \left\{ \int d^4x \left( \frac{m}{2} \Phi^2 + \frac{g}{3} \Phi^3 \right) + c.c. \right\} \quad (5.1)$$

e o potencial efetivo ao nível de árvore resulta, de eqn.4.1,

$$V_0 = - \left[ (mA_c + gA_c^2) F_c + (mA_c^* + gA_c^{*2}) F_c^* + |F_c|^2 \right] \quad (5.2)$$

Temos das equações de movimento para e da matriz de massa fermiônica

$$F_c^* = - (mA_c + gA_c^2) \\ M = (m + 2ga) + 2g\phi^2 = \hat{a} + \hat{\phi}^2 \quad (5.3)$$

As soluções de  $F=0$  (as quais não anulam  $\hat{a}$ ) fornecem vácuos

da teoria em termos do campo  $A$  como

$$\langle 0|A|0\rangle = \begin{cases} 0 \\ -m/g \end{cases}$$

(5.4)

Apresentamos, na fig.1, gráficos do potencial efetivo, ao nível de árvore, para  $g = \pi/2$ , em função de

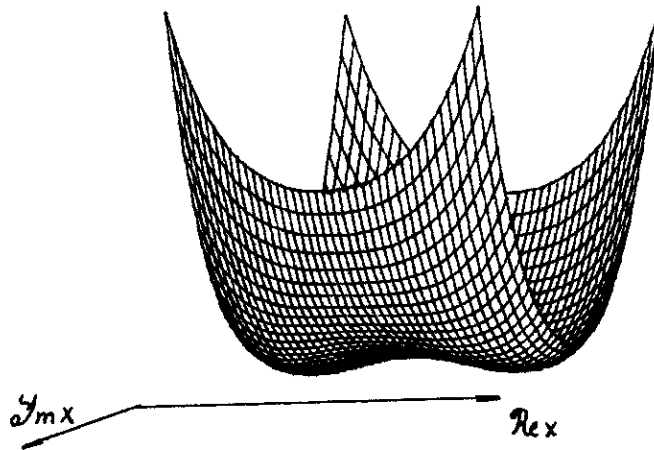


Figura 5.1.1  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
 NO MODELO DE WESS E ZUMINO

$x = \tilde{a}/m$ . A dependência em  $F$  foi eliminada através da sua equação de movimento. Nas figs. 2 e 3 apresentamos os gráficos de  $\text{Re}(F)$  e de  $\text{Im}(F)$  em função de  $x$ , segundo essa equação.

Temos agora, a 1-loop,

da teoria em termos do campo  $A$  como

$$\langle 0|A|0\rangle = \begin{cases} 0 \\ -m/g \end{cases}$$

(5.4)

Apresentamos, na fig.1, gráficos do potencial efetivo, ao nível de árvore, para  $g = \pi/2$ , em função de

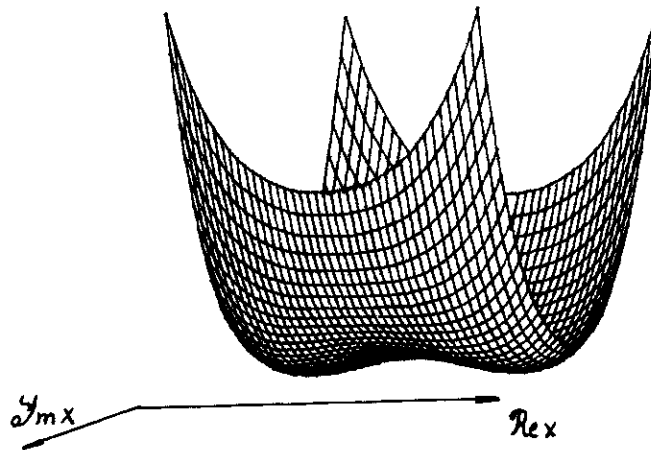


Figura 5.1.1  
POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

$x = \tilde{a}/m$ . A dependência em  $F$  foi eliminada através da sua equação de movimento. Nas figs. 2 e 3 apresentamos os gráficos de  $\Re(F)$  e de  $\Im(F)$  em função de  $x$ , segundo essa equação.

Temos agora, a 1-loop,



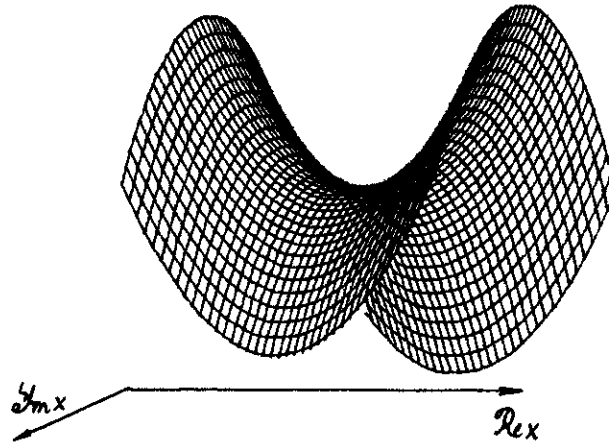


Figura 5.1.2  
CAMPO AUXILIAR  $F$  AO NÍVEL DE ÁRVORE  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO  
PARTE REAL

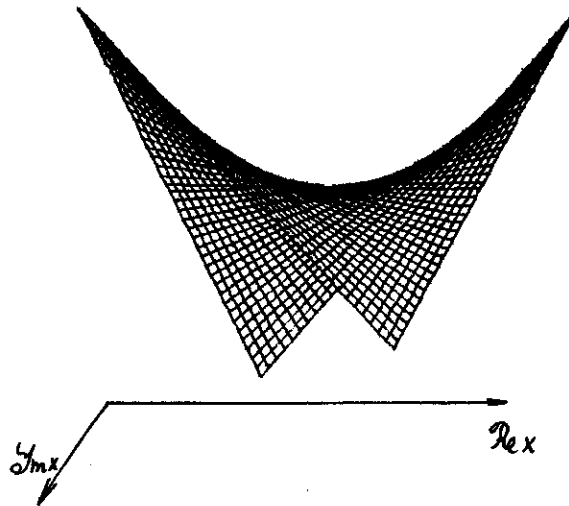


Figura 5.1.3  
CAMPO AUXILIAR  $F$  AO NÍVEL DE ÁRVORE  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO  
PARTE IMAGINÁRIA

$$X^2 = \begin{pmatrix} |a|^2 & \tilde{f} \\ \tilde{f}^* & |a|^2 \end{pmatrix}$$

(5.5)

com autovalores

$$\begin{aligned} a_+^2 &\equiv |\tilde{a}|^2 + |\tilde{f}| \\ a_-^2 &\equiv |\tilde{a}|^2 - |\tilde{f}| \end{aligned}$$

(5.6)

e o potencial efetivo a 1-loop regularizado, de eqn.4.17,

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{1}{64\pi^2} &\left[ -\left(\frac{4}{\epsilon} + 3 - 2\delta\right) |\tilde{f}|^2 + a_+^4 \ln(a_+^2/\mu^2) \right. \\ &\left. + a_-^4 \ln(a_-^2/\mu^2) - 2|\tilde{a}|^4 \ln(|\tilde{a}|^2/\mu^2) \right] \end{aligned}$$

(5.7)

Assim, a 1-loop, o potencial efetivo renormalizado e a constante de renormalização são dados, no esquema de subtração mínima, da eqn.4.23, por

$$V_{1R} = \frac{1}{64\pi^2} \left[ a_+^4 \ln(a_+^2/\mu^2) + a_-^4 \ln(a_-^2/\mu^2) - 2|\tilde{a}|^4 \ln(|\tilde{a}|^2/\mu^2) \right]$$

(5.8)

e

$$\mathcal{Z} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} + 3 - 2\delta \right)$$

(5.9)

e, no esquema de Amati e Chou, da eqn.4.27, por

$$V_{1R}' = \frac{1}{64\pi^2} \left[ a_+^4 \ln(a_+^2/\mu^2) + a_-^4 \ln(a_-^2/\mu^2) - 2|\hat{a}|^4 \ln(|\hat{a}|^2/\mu^2) \right. \\ \left. - 3|\tilde{f}|^2 - 2|\tilde{f}|^2 \ln(|\hat{a}|^2/\mu^2) \right] \quad (5.10)$$

e

$$Z = - \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} - 2\gamma - 2 \ln(|\hat{a}|^2/\mu^2) \right) \quad (5.11)$$

Temos nas figs. 3, 4, 5 e 6 os gráficos do potencial efetivo e de  $\gamma$  nos esquemas de subtração mínima e de

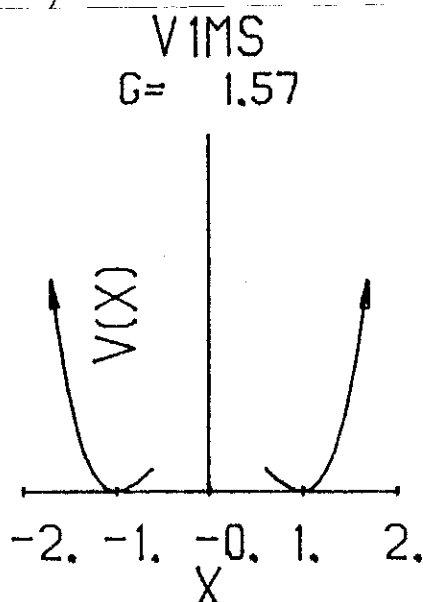


Figura 5.1.4  
POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL 1-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

Amati e Chou, respectivamente. Consideramos, por simplicidade,  $A$  e  $F$  reais.

Conforme mencionado no final da seção 4.2, temos que, quando  $a_-^2$  torna-se negativo, a contribuição de 1-loop ao potencial efetivo torna-se complexa. Isso corresponde à região

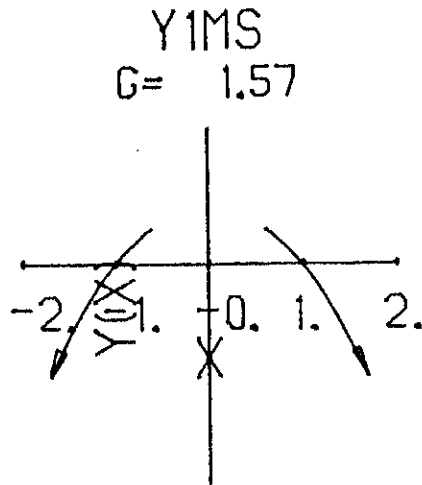


Figura 5.1.5  
CAMPO AUXILIAR  $Y$  AO NÍVEL 1-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

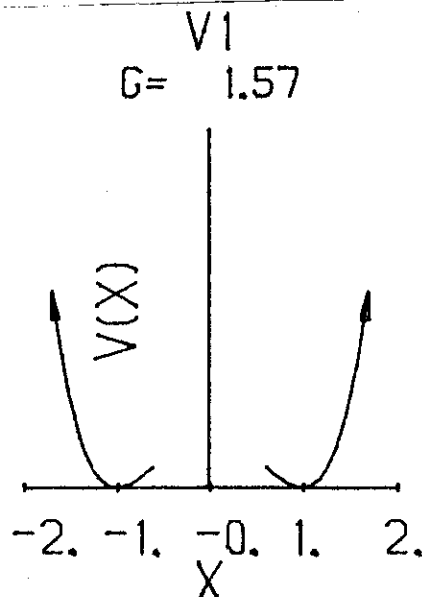


Figura 5.1.6  
POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL 1-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

de  $X$ , em torno da origem, em que a curva não foi traçada.

Temos ainda, da eqn.4.30, a contribuição de 2-loop ao potencial efetivo como

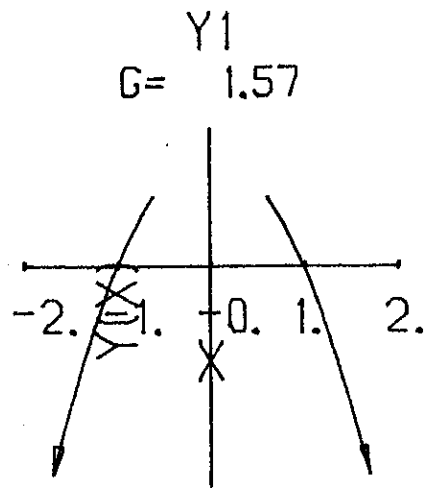


Figura 5.1.7  
CAMPO AUXILIAR AO NÍVEL 1-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

$$\begin{aligned}
V_2 = & \frac{4g^2}{(16\pi^2)^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} |\tilde{f}|^2 + \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( \frac{3}{2} - \gamma \right) |\tilde{f}|^2 - a_+^4 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} - a_-^4 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} \right. \right. \\
& + 2|\tilde{a}|^4 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} + \frac{1}{2} |\tilde{f}| \left( a_+^2 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} - a_-^2 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} \right) \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \left( a_+^2 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} + a_-^2 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} - 2|\tilde{a}|^2 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right)^2 \\
& - \frac{3-2\gamma}{2} \left( a_+^4 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} + a_-^4 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} - 2|\tilde{a}|^2 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right) \\
& - \frac{3-2\gamma}{2} |\tilde{a}|^2 \left( a_+^2 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} + a_-^2 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} - 2|\tilde{a}|^2 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right) \\
& - \frac{3}{4} \left( \tilde{a}^2 \tilde{f} + \tilde{a}^{*2} \tilde{f}^* - 2|\tilde{a}|^4 \right) J(1) \\
& - \frac{1}{8} \left( -2|\tilde{a}|^2 + \tilde{a}^2 \sqrt{\tilde{f}/\tilde{f}^*} + \tilde{a}^{*2} \sqrt{\tilde{f}^*/\tilde{f}} \right) a_+^2 J(a_+^2/a_-^2) \\
& - \frac{1}{8} \left( -2|\tilde{a}|^2 - \tilde{a}^2 \sqrt{\tilde{f}/\tilde{f}^*} - \tilde{a}^{*2} \sqrt{\tilde{f}^*/\tilde{f}} \right) a_-^2 J(a_-^2/a_+^2) \\
& - \left( a_-^2 - \tilde{a}^2 \sqrt{\tilde{f}/\tilde{f}^*} - \tilde{a}^{*2} \sqrt{\tilde{f}^*/\tilde{f}} \right) a_+^2 J(a_+^2/|\tilde{a}|^2) \\
& - \left. \left( a_+^2 + \tilde{a}^2 \sqrt{\tilde{f}/\tilde{f}^*} + \tilde{a}^{*2} \sqrt{\tilde{f}^*/\tilde{f}} \right) a_-^2 J(a_-^2/|\tilde{a}|^2) \right\}
\end{aligned}
\tag{5.12}$$

Tal resultado foi obtido, calculando-se as bolhas de vácuo da fig.4.3.1 com os superpropagadores eqn.3.28, em computador, fazendo uso do sistema algébrico REDUCE (12). Todos os cálculos analíticos, deste ponto do trabalho em diante, foram, também, realizados com o auxílio do REDUCE.

Para renormalizar  $V_2$ , consideraremos não só o

contratermo provindo do potencial ao nível de árvore,  $V_0^{(2)}$ , dado na eqn.4.21, mas também o provindo da contribuição de 1-loop acima, quando considerada a Lagrangiana regularizada eqn.4.18,

$$V_0^{(2)} = -\frac{A^2}{h^2} Z_2 |\tilde{f}|^2 \quad (5.13)$$

$$V_1^{(2)} = \frac{Z_1}{16\pi^2} \left[ 2 \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \right) |\tilde{f}|^2 - a_+^4 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} - a_-^4 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} \right. \\ \left. + 2 |\tilde{a}|^4 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} + \frac{1}{2} |\tilde{f}| \left( a_+^2 \ln \frac{a_+^2}{\nu^2} - a_-^2 \ln \frac{a_-^2}{\nu^2} \right) \right] \quad (5.14)$$

Obtemos, no esquema de subtração mínima,

$$Z_1 = -\frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} + 3 - 2\gamma \right)$$

$$Z_2 = -\left( \frac{4g^2}{16\pi^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1-\gamma}{\epsilon} - \frac{1+\gamma}{4} - \frac{\pi^2}{24} \right]$$

(5.15)

e, no esquema de Amati e Chou,

$$Z_1 = -\frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} - 2\gamma - 2 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right)$$

$$Z_2 = -\left( \frac{4g^2}{16\pi^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{\epsilon^2} - \left( \frac{1}{2} + \gamma + \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right) \frac{1}{\epsilon} + 2 \ln \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{|\tilde{a}|^2}{\nu^2} \right]$$

$$\left. -\frac{1}{2}J(1) - \frac{1}{4}J''(1) + \frac{1}{8}J''(1) + \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{24} \right] \quad (5.16)$$

Nas figuras 7, 8, 9 e 10, apresentamos gráficos do potencial efetivo e de  $\gamma$ , em ambos os esquemas, considerando, novamente,  $A$  e  $F$  reais.

Além da região em que o potencial torna-se complexo, nota-se, no primeiro esquema, que o potencial torna-se multivalente e negativo, de acordo com a análise feita na seção 4.2.

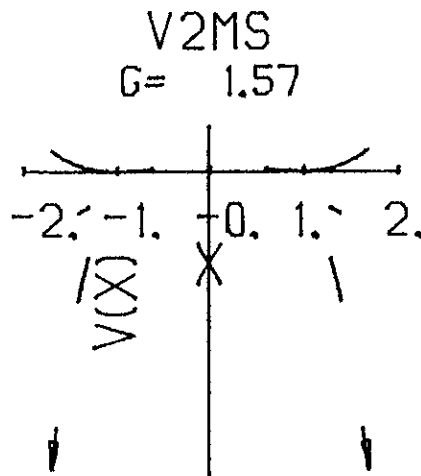


Figura 5.1.8  
POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL 2-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

## 5.2 Modelo de O'Raiifeartaigh

Este modelo contém três supercampos quirais com interação dada pelo superpotencial



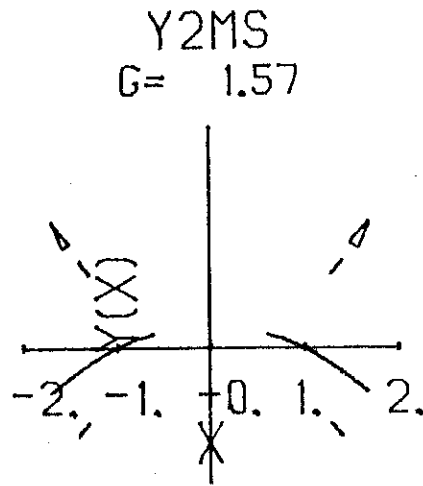


Figura 5.1.9  
CAMPO AUXILIAR Y AO NIVEL 2-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

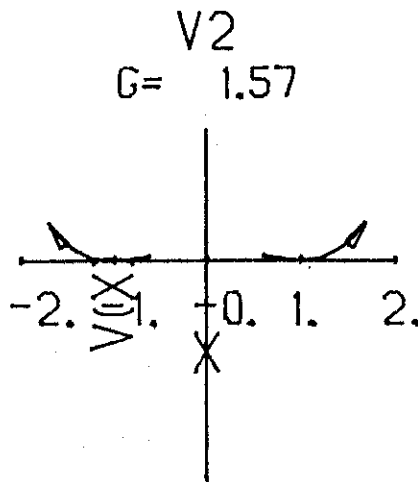


Figura 5.1.10  
POTENCIAL EFETIVO AO NIVEL 2-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

$$W(\Phi) = \xi \Phi_1 + m \Phi_2 \Phi_3 + g \Phi_1 \Phi_2^2 \quad (5.17)$$

Temos, então, da eqn.2.5,

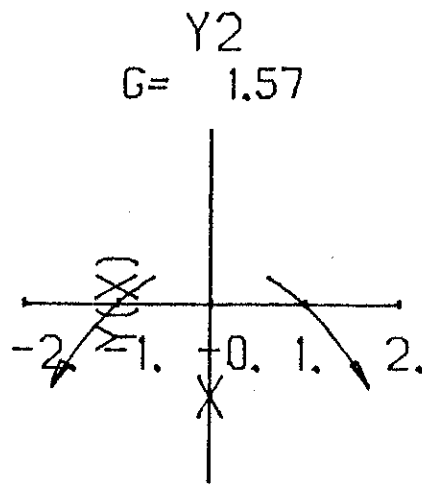


Figura 5.1.11  
CAMPO AUXILIAR AO NÍVEL 2-LOOP  
NO MODELO DE WESS E ZUMINO

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} \quad (\xi_i) = (\xi, 0, 0)$$

$$(g_{1ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{2ij}) = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

e

$$a = (a_{ij}) = (m_{ij} + 2g_{ijk} a_k) = \begin{pmatrix} 0 & 2ga_2 & 0 \\ 2ga_2 & 2ga_1 & m \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = (f_{ij}) = (2g_{ijk} f_k) = \begin{pmatrix} 0 & 2gf_2 & 0 \\ 2gf_2 & 2gf_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5.19)

Temos as equações de movimento para F

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -(\xi + g A_2^{*2}) \\
 F_2 &= -(m A_3 + 2g A_1^* A_2^*) \\
 F_3 &= -(m A_2^*)
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

Note-se que neste modelo o sistema de equações  $F=0$  não tem solução e desta forma, da eqn.4.54, este modelo apresenta quebra espontânea de supersimetria.

Temos ainda

$$a\bar{a} = \begin{pmatrix} 4g^2 |a_2|^2 & 4g^2 a_1^* a_2 & 2mg a_2 \\ 4g^2 a_1 a_2^* & 4g^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) + m^2 & 2mg a_1 \\ 2mg a_2^* & 2mg a_1^* & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}a = \begin{pmatrix} 4g^2 |a_2|^2 & 4g^2 a_1 a_2^* & 2mg a_2^* \\ 4g^2 a_1^* a_2 & 4g^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) + m^2 & 2mg a_1^* \\ 2mg a_2 & 2mg a_1 & m^2 \end{pmatrix}$$

(5.21)

Da eqn.4.1, resulta o potencial efetivo ao nível de árvore como

$$\begin{aligned}
 V_0 &= - \left[ (\xi + g A_2^2) F_1 + (m A_3 + 2g A_1 A_2) F_2 \right. \\
 &\quad \left. + m A_2 F_3 + c.c. \right] - |F_1|^2 - |F_2|^2 - |F_3|^2
 \end{aligned}$$

(5.22)

Utilizando-se as equações de movimento para F resulta

$$\begin{aligned}
 V_0 = & \xi^2 + m^2 |A_2|^2 + g\xi (A_2^2 + A_2^{*2}) + m^2 |A_3|^2 + \\
 & + 2mg (A_1 A_2 A_3^* + A_1^* A_2^* A_3) + g^2 |A_2|^4 + 4g^2 |A_1|^2 |A_2|^2
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Derivando-se com relação a  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  e igualando-se a zero para localizar-se o mínimo do potencial

$$\frac{\partial V_0}{\partial A_1} = 2g A_2 (m A_3^* + 2g A_1^* A_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial A_2} = m^2 A_2^* + 2g\xi A_2 + 2g A_2^* |A_2|^2 + 2g A_1 (m A_3^* + 2g A_1^* A_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial A_3} = m (m A_3^* + 2g A_1^* A_2^*) = 0
 \tag{5.24}$$

obtemos

$$\langle A_3 \rangle = - \frac{2g}{m} \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle
 \tag{5.25}$$

Substituindo-se esse resultado na derivada com relação a  $A_2$  verifica-se que  $\langle A_1 \rangle$  é indeterminado e que  $\langle A_2 \rangle$  é real, obedecendo a

$$\langle A_2 \rangle (m^2 + 2g\xi + 2g^2 \langle A_2 \rangle^2) = 0 \quad (5.26)$$

Temos, portanto, duas fases distintas:

i) simétrica:  $|2g\xi|/m^2 < 1 \quad \langle A_2 \rangle = 0$

ii) assimétrica:  $2g\xi/m^2 < -1 \quad \langle A_2 \rangle = \pm \sqrt{-(2g\xi + m^2)/2g^2}$

Apresentamos na figuras 1, 2, 3 e 4, gráficos do potencial ao nível de árvore para as duas fases. Como não

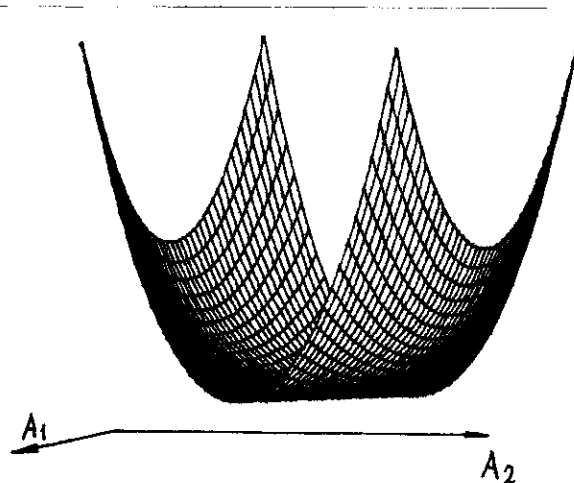


Figura 5.2.1  
POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH

podemos representar a variação do potencial nos três campos, apresentamos os casos  $A_3=0$  e  $A_1=0$ .

A matriz de massa fermionica vista na seção 1.4 resulta de  $a_{ij}$

Vemos, da eqn.22, que o campo  $A_1$  não tem massa, que o campo  $A_3$  tem massa  $m$  e o campo complexo  $A_2$  apresenta "splitting" de massa.

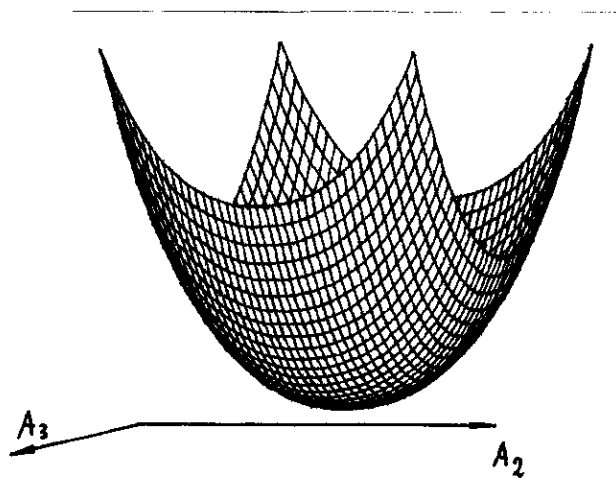


Figura 5.2.2  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
 NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH

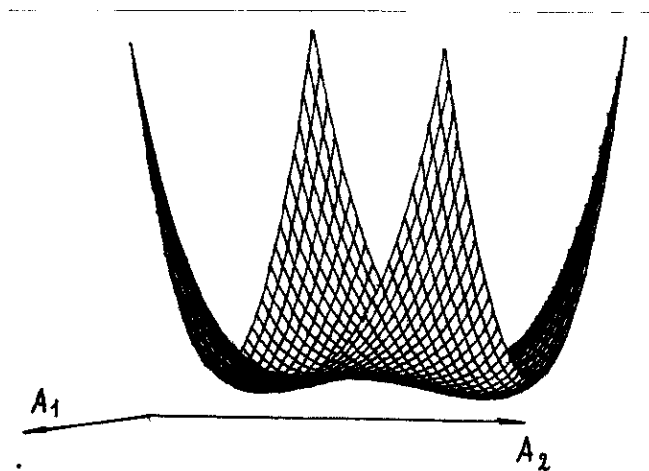


Figura 5.2.3  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
 NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH  
 Escrevendo  $A_2 = A_+ + iA_-$  temos

$$U = (m^2 + 2g\xi)A_+^2 + (m^2 - 2g\xi)A_-^2 + m^2|A_3|^2$$

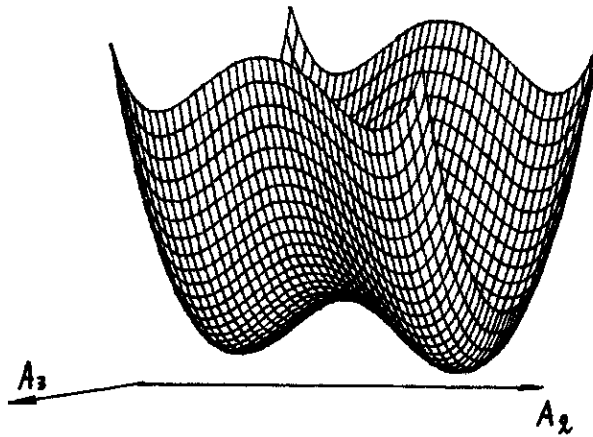


Figura 5.2.4  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL DE ÁRVORE  
 NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH  
 Consideremos, agora, a contribuição de i-loop dada  
 pela eq.4.21

$$V_1 = \frac{1}{64\pi^2} \left[ \text{Tr } X^4 \ln(X^2/\mu^2) - \text{Tr } Y^4 \ln(Y^2/\mu^2) \right] \quad (5.28)$$

com

$$X^2 = \begin{pmatrix} a\bar{a} & f \\ \bar{f} & \bar{a}a \end{pmatrix} \quad Y^2 = \begin{pmatrix} a\bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a}a \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Temos o polinômio característico de  $Y^2$ ,

$$\begin{aligned} \det(Y^2 - \lambda I) &= [\det(a\bar{a} - \lambda I)]^2 \\ &= \lambda^2 [\lambda^2 - 2\lambda(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2) + \end{aligned}$$

$$+ (4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 \Big]^2 \quad (5.30)$$

Conclui-se de imediato que  $a\bar{a}$  tem um autovalor nulo e dois positivos e que  $Y^2$  tem dois autovalores nulos e dois pares de autovalores iguais e positivos.

Seja, agora, o polinômio característico de  $X^2$ ,

$$\begin{aligned} \det(X^2 - \lambda I) = & \lambda^6 - 4\lambda^5(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2) + \\ & + 2\lambda^4[2(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 2g^2 |f_1|^2 + \\ & + (4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 4g^2 |f_2|^2] - 4\lambda^3[(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + \\ & + m^2)[(4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 4g^2 |f_2|^2] - 2g^2 |f_1|^2(4g^2 |a_2|^2 + m^2) \\ & + 8g^4(f_1 f_2^* a_1^* a_2 + f_1^* f_2 a_1 a_2^*) - 2g^2 m^2 |f_2|^2] \\ & + \lambda^2\{[(4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 4g^2 |f_2|^2]^2 - 4g^2 |f_1|^2(4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 \\ & + 32g^4(f_1 f_2^* a_1^* a_2 + f_1^* f_2 a_1 a_2^*)(4g^2 |a_2|^2 + m^2) \\ & - 256g^6 |f_2|^2 |a_1|^2 |a_2|^2 - 16g^2 m^2 |f_2|^2(2g^2 |a_1|^2 + \\ & + 4g^2 |a_2|^2 + m^2)\} + 8\lambda g^2 m^2 |f_2|^2[(4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - \\ & - 4g^2 |f_2|^2] + 16g^4 m^4 |f_2|^4 \end{aligned}$$

(5.31)

No caso mais simples em que  $A_1, A_2, F_1$  e  $F_2$  são



reais, o polinômio acima se fatora como

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda^3 - 2\lambda^2 [2g^2 a_1^2 + 4g^2 a_2 + m^2 + g f_1] + \lambda [(4g^2 a_2^2 + m^2)^2 \right. \\ & \left. - 4g^2 f_2^2 + 2g f_1 (4g^2 a_2^2 + m^2) - 16g^3 f_2 a_1 a_2] + 4g^2 m^2 f_2^2 \right\} \times \\ & \left\{ \lambda^3 - 2\lambda^2 [2g^2 a_1^2 + 4g^2 a_2 + m^2 - g f_1] + \lambda [(4g^2 a_2^2 + m^2)^2 \right. \\ & \left. - 4g^2 f_2^2 - 2g f_1 (4g^2 a_2^2 + m^2) + 16g^3 f_2 a_1 a_2] + 4g^2 m^2 f_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

e, sendo o termo independente de mesmo sinal que o em  $\lambda^3$ , conclui-se que, neste caso,  $\chi^2$  terá pelo menos dois autovalores não positivos.

Por outro lado, para  $F_2 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \det(\chi^2 - \lambda I) &= \lambda^2 \left\{ \lambda^4 - 4\lambda^3 (2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2) \right. \\ &+ 2\lambda^2 [2(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 2g^2 |f_1|^2 + (4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2] \\ &- 4\lambda [(2g^2 |a_1|^2 + 4g^2 |a_2|^2 + m^2)(4g^2 |a_2|^2 + m^2) - 2g^2 |f_1|^2] \times \\ &\left. \times (4g^2 |a_2|^2 + m^2) \right] + [(4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 - 4g^2 |f_1|^2] (4g^2 |a_2|^2 + m^2)^2 \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

e, portanto, dois autovalores nulos para  $\chi^2$ . Além disso, considerando-se a equação de movimento para  $F_1$ , ao nível de árvore,  $F_1$  e  $A_2$  reais, temos

$$(4g^2|a_2|^2+m^2)^2 - 4g^2|f_1|^2 = m^2 - 4g^2\xi^2 + 8g^2A_2^2(m^2 - g\xi) + 12g^4A_2^4 \quad (5.34)$$

e, portanto, na fase simétrica, nessa aproximação,  $\chi^2$  não teria autovalores negativos.

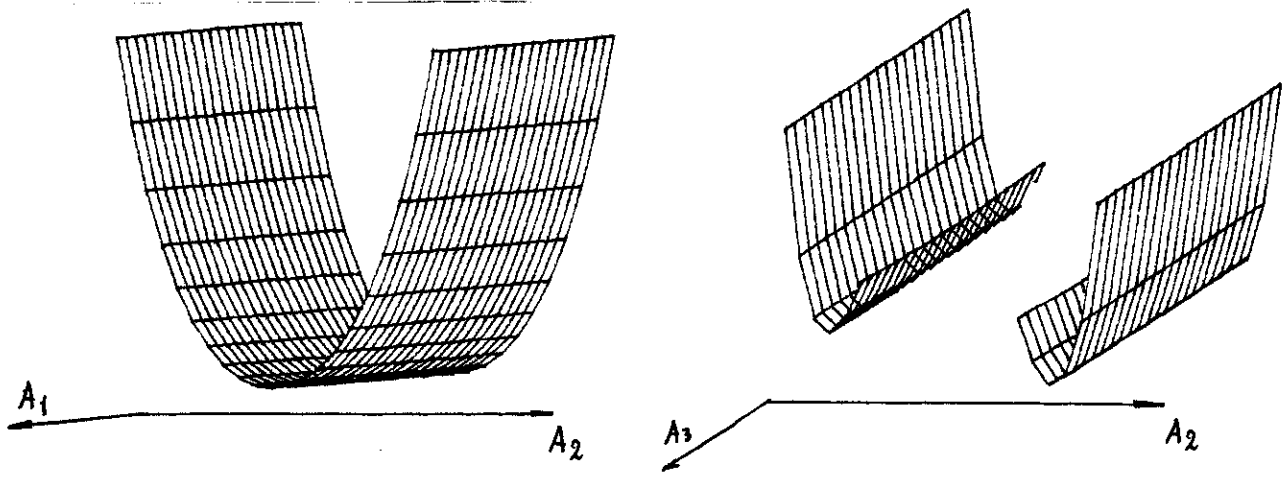
Como  $F_2$  se anula no mínimo do potencial ao nível de árvore, mais precisamente satisfazendo  $\partial V_0/\partial A_3 = 0$ , concluímos que podemos esperar, impondo o mínimo do potencial com relação a  $A_3$ , se os valores dos mínimos dos campos não se afastarem muito dos de árvore, uma região em que os seis autovalores de  $\chi^2$  sejam não-negativos.

Apresentamos nas figs. 5 e 6 gráficos do potencial efetivo a  $i$ -loop com  $A_3 = \langle A_3 \rangle$ . No referente à fase assimétrica, nota-se uma região (não traçada) em que o potencial se torna complexo.

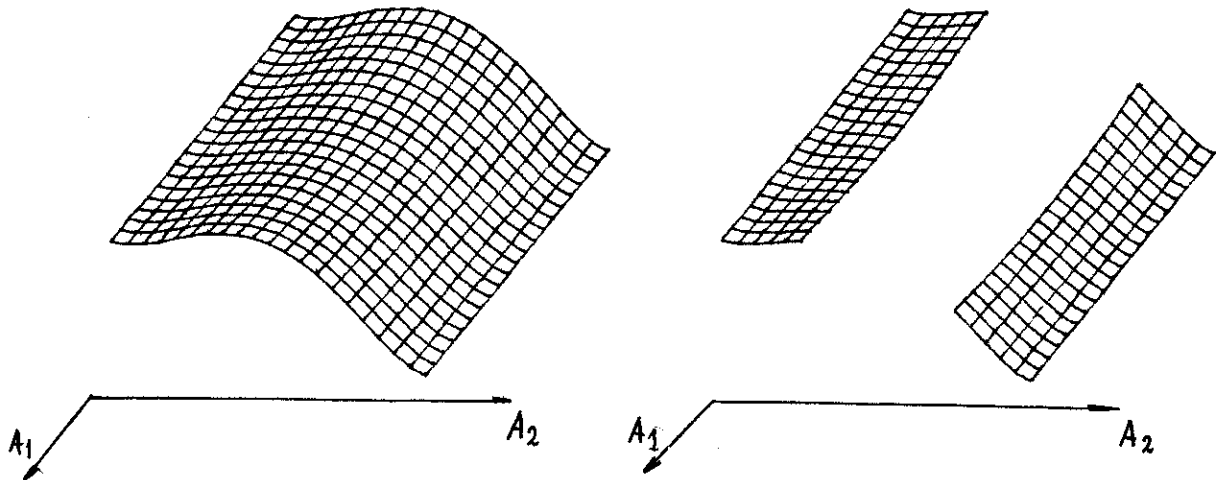
Para maior percepção das características da contribuição de  $i$ -loop, apresentamos, seus gráficos nas figuras 7 e 8.

Observamos que, na fase simétrica, a correção favorece uma situação assimétrica, com o aparecimento de mínimos com relação a  $A_2$  e a transformação do mínimo na origem em máximo local.

Em ambos os casos, nota-se também que o mínimo já



Figuras 5.2.5 e 5.2.6  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL 1-LOOP  
 NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH



Figuras 5.2.7 e 5.2.8  
 POTENCIAL EFETIVO AO NÍVEL 1-LOOP  
 NO MODELO DE O'RAIFEARTAIGH

não é independente de  $A_1$ , surgindo um mínimo para  $A_1=0$ , o que indica que esse campo adquiriu massa por correção radiativa.

## CONCLUSÕES

O método do potencial efetivo mostrou-se eficiente para o estudo de modelos com supercampos quirais, permitindo discutir o efeito de correções quânticas sobre os vácuos desses modelos, verificando quebra espontânea de supersimetria, aquisição de massa, etc.

O método de supercampos, na forma de superdiagramas de Feynman e de superpropagadores, demonstrou-se bastante conveniente pela maior simplicidade nos cálculos, mesmo a nível de 2-loop, onde se necessita, na prática, calcular apenas dois superdiagramas.

A Computação Algébrica foi de inestimável utilidade nos cálculos em geral, dando maior confiança e permitindo análises dos resultados obtidos que seriam muito mais difíceis sem ela.

Também a Computação Gráfica se mostrou útil, especialmente na análise da correção quântica ao espectro de massa no modelo de O'Raiheartaigh.

Nesta tese, além dos resultados interessantes encontrados, tais como a não-positividade do potencial efetivo, no modelo de Wess e Zumino, no esquema de subtração mínima, e a aquisição de massa pelo bóson não-goldstone, no modelo de O'Raiheartaigh, mostrou-se a eficiência dos recursos, acima mencionados, de que o pesquisador dispõe e que podem ser aplicados, com vantagem, a outros modelos que os aqui discutidos.

## APÊNDICE A

## ALGUMAS IDENTIDADES ÚTEIS EM SUPERSIMETRIA

Considerando-se a representação de Weyl para as matrizes de Pauli,

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A.1}$$

com

$$\sigma^l = \eta_{lm} \sigma^m\tag{A.2}$$

onde

$$\eta_{lm} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\tag{A.3}$$

e

$$\bar{\sigma}^l = \sigma_2 \sigma^{lx} \sigma_2\tag{A.4}$$

tal que

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^0 &= \sigma^0 \\ \bar{\sigma}_i &= -\sigma_i \quad (i=1,2,3)\end{aligned}\tag{A.5}$$

temos

$$(\sigma^l \bar{\sigma}^m)_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} -(\sigma^m \bar{\sigma}^l)_{\beta}^{\alpha} & l \neq m \\ -\eta^{lm} \delta_{\beta}^{\alpha} & l = m \end{cases}\tag{A.6}$$

e também

$$(\bar{\sigma}^l \sigma^m)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \begin{cases} -(\bar{\sigma}^m \sigma^l)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} & l \neq m \\ -\eta^{lm} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} & l = m \end{cases}\tag{A.7}$$

Mais ainda,

$$(\sigma^l \bar{\sigma}^m)_{\alpha}^{\alpha} = (\bar{\sigma}^l \sigma^m)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} = -2\eta^{lm}\tag{A.8}$$

Sejam agora os bispinores

$$\chi^\alpha \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (A.9)$$

com contrações

$$\chi\chi = \chi^\alpha \chi_\alpha \quad \bar{\psi}\bar{\psi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (A.10)$$

onde

$$\chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta \quad \chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad (A.11)$$

com

$$(\epsilon^{\alpha\beta}) = (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.12)$$

e

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \quad (A.13)$$

Temos, então que

$$\chi^\alpha \chi^\beta = \begin{cases} 0 & \alpha = \beta \\ \chi^1 \chi^2 & \alpha = 1 \quad \beta = 2 \\ -\chi^1 \chi^2 & \alpha = 2 \quad \beta = 1 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

mas

$$\chi \chi = \chi^\alpha \chi_\alpha = \chi^\alpha \chi^\beta \epsilon_{\alpha\beta} = -2 \chi^1 \chi^2 \quad (\text{A.15})$$

e desta forma,

$$\chi^\alpha \chi^\beta = -\frac{1}{2} (\chi \chi) \epsilon^{\alpha\beta} \quad (\text{A.16})$$

e como

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = \begin{cases} 0 & \dot{\alpha} = \dot{\beta} \\ \bar{\psi}^{\dot{1}} \bar{\psi}^{\dot{2}} & \dot{\alpha} = \dot{1} \quad \dot{\beta} = \dot{2} \\ -\bar{\psi}^{\dot{1}} \bar{\psi}^{\dot{2}} & \dot{\alpha} = \dot{2} \quad \dot{\beta} = \dot{1} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

com



$$\bar{\Psi} \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \bar{\Psi}^{\dot{\beta}} = \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = 2 \bar{\Psi}^{\dot{1}} \bar{\Psi}^{\dot{2}} \quad (\text{A.18})$$

resulta

$$\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \bar{\Psi}) \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (\text{A.19})$$

Da mesma forma,

$$\chi_{\alpha} \chi_{\beta} = \frac{1}{2} (\chi \chi) \epsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{A.20})$$

e

$$\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2} (\bar{\Psi} \bar{\Psi}) \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (\text{A.21})$$

Vale, então, a propriedade

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}\beta} &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^e \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial_e \partial_m \\ &= -\eta^{em} \delta_{\alpha}^{\beta} \partial_e \partial_m \\ &= -\delta_{\alpha}^{\beta} \square \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e, da mesma forma,

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}\alpha} \partial^{\alpha\dot{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \square$$

(A.23)

São úteis, também, as propriedades

$$(\theta\theta')(\theta\gamma\bar{\theta}') = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\theta'\gamma\bar{\theta}')$$

(A.24)

$$(\bar{\theta}\bar{\theta}')(\theta'\gamma\bar{\theta}') = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}'\bar{\theta}')(\theta'\gamma\bar{\theta})$$

(A.25)

$$(\theta\theta')(\theta\gamma\bar{\theta}) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\theta'\gamma\bar{\theta})$$

(A.26)

$$(\bar{\theta}\bar{\theta}')(\theta\gamma\bar{\theta}') = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}'\bar{\theta}')(\theta\gamma\bar{\theta}')$$

(A.27)

Tem-se, ainda, que

(A.28)

$$(\theta \not{\chi} \bar{\theta})(\theta' \not{\chi} \bar{\theta}) = -\frac{1}{2}(\theta\theta')(\bar{\theta}\bar{\theta}) \square \quad (\text{A.29})$$

e, é claro,

$$(\theta \not{\chi} \bar{\theta})(\theta \not{\chi} \bar{\theta}) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \square \quad (\text{A.30})$$

Com relação à derivada espinorial, verificam-se as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha &= -\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta & \partial_\alpha &= -\epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta \\ \partial^{\dot{\alpha}} &= -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \partial_{\dot{\beta}} & \partial_{\dot{\alpha}} &= -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \partial^{\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Derivam-se, então

$$(\theta \not{\chi} \bar{\theta})(\theta' \not{\chi} \bar{\theta}) = (\theta\theta') \square \quad (\bar{\theta} \not{\chi} \partial)(\theta \not{\chi} \bar{\theta}') = -(\bar{\theta}\bar{\theta}') \square \quad (\text{A.32})$$

Introduzindo-se a derivada covariante com relação a transformações globais de supersimetria  $D_\alpha$ , tem-se as relações muito úteis

$$D^2 (\theta - \theta')^2 \delta^4(x-x') = -4 e^{-i(\theta - \theta') \not{x} \bar{\theta}} \delta^4(x-x')$$

$$D^2 e^{i(\theta - \theta') \not{x} \bar{\theta}} \delta^4(x-x') = -4 (\bar{\theta} \bar{\theta}) \square \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^2 (\bar{\theta} - \bar{\theta}') \delta^4(x-x') = -4 e^{i\theta \not{x} (\bar{\theta} - \bar{\theta}')} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^2 e^{-i\theta \not{x} (\bar{\theta} - \bar{\theta}')} \delta^4(x-x') = -4 (\theta \theta) \square \delta^4(x-x')$$

(A.33)

Pela troca de  $x$  por  $x'$ , obtêm-se igualmente

$$D'^2 (\theta - \theta') \delta^4(x-x') = -4 e^{-i(\theta - \theta') \not{x} \bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$D'^2 e^{i(\theta - \theta') \not{x} \bar{\theta}'} \delta^4(x-x') = -4 (\bar{\theta}' \bar{\theta}') \square \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}'^2 (\bar{\theta} - \bar{\theta}')^2 \delta^4(x-x') = -4 e^{i\theta \not{x} (\bar{\theta} - \bar{\theta}')} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}'^2 e^{-i\theta \not{x} (\bar{\theta} - \bar{\theta}')} \delta^4(x-x') = -4 (\theta' \theta') \square \delta^4(x-x')$$

(A.34)

Têm-se também

$$D^2 (2\theta\theta' e^{i\theta \not{x} \bar{\theta}}) \delta^4(x-x') = 8i \theta' \not{x} \bar{\theta} e^{-i\theta \not{x} \bar{\theta}} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^2 (2\bar{\theta}\bar{\theta}' e^{-i\theta \not{x} \bar{\theta}}) \delta^4(x-x') = -8i \theta \not{x} \bar{\theta}' e^{i\theta \not{x} \bar{\theta}} \delta^4(x-x')$$

$$D'^2 (2\theta\theta' e^{-i\theta' \not{x} \bar{\theta}'}) \delta^4(x-x') = -8i \theta \not{x} \bar{\theta}' e^{i\theta' \not{x} \bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^{\prime 2} (2\bar{\theta}\bar{\theta}' e^{i\theta'\chi\bar{\theta}'} ) \delta^4(x-x') = 8i \theta'\chi\bar{\theta} e^{-i\theta'\chi\bar{\theta}'} \delta^4(x-x') \quad (\text{A.35})$$

e, ainda,

$$D^2 [(i\theta\chi\bar{\theta}) e^{i\theta\chi\bar{\theta}}] \delta^4(x-x') = -4(\bar{\theta}\bar{\theta}) \square \delta^4(x-x')$$

$$D^2 [(i\theta\chi\bar{\theta}') e^{i\theta\chi\bar{\theta}'}] \delta^4(x-x') = -4(\bar{\theta}\bar{\theta}') \square e^{-i\theta\chi\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^2 [(i\theta'\chi\bar{\theta}) e^{i\theta'\chi\bar{\theta}}] \delta^4(x-x') = 4(\theta\theta') \square e^{i\theta\chi\bar{\theta}} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^2 [(i\theta\chi\bar{\theta}') e^{i\theta\chi\bar{\theta}'}] \delta^4(x-x') = 4(\theta\theta) \square e^{i\theta\chi\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$D^{\prime 2} [(i\theta'\chi\bar{\theta}) e^{-i\theta'\chi\bar{\theta}'}] \delta^4(x-x') = 4(\bar{\theta}\bar{\theta}') \square e^{i\theta'\chi\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$\bar{D}^{\prime 2} [(i\theta\chi\bar{\theta}') e^{i\theta\chi\bar{\theta}'}] \delta^4(x-x') = -4(\theta\theta') \square e^{-i\theta\chi\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

(A.36)

Definindo-se os operadores de projecção

$$P_1 = \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \square} \quad P_2 = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16 \square}$$

(A.37)

têm-se, então, as relações

$$\begin{aligned} \square P_1 \delta^8(\bar{z}-z') &= \square P_2' \delta^8(\bar{z}-z') \\ &= e^{-i(\theta\chi\bar{\theta} + \theta'\chi\bar{\theta}' - 2\theta'\chi\bar{\theta})} \delta^4(x-x') \end{aligned}$$

$$= (1 + 2i\theta'\gamma\bar{\theta} + (\theta'\theta')(\bar{\theta}\bar{\theta}')\square) e^{-i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{-i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$\square P_2 \mathcal{S}^8(z-z') = \square P_1' \mathcal{S}^8(z-z')$$

$$= e^{i(\theta\gamma\bar{\theta} + \theta'\gamma\bar{\theta}' - 2\theta\gamma\bar{\theta}')} \delta^4(x-x')$$

$$= (1 - 2i\theta\gamma\bar{\theta}' + (\theta\theta)(\bar{\theta}'\bar{\theta}'))\square e^{i\theta\gamma\bar{\theta}} e^{i\theta'\gamma\bar{\theta}'} \delta^4(x-x')$$

$$\frac{\bar{D}^2 D^2}{16} \mathcal{S}^8(z-z') = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} \mathcal{S}^8(z-z') = \square P_2 \mathcal{S}^8(z-z')$$

$$\frac{D^2 \bar{D}^2}{16} \mathcal{S}^8(z-z') = \frac{D^2 \bar{D}^2}{16} \mathcal{S}^8(z-z') = \square P_1' \mathcal{S}^8(z-z')$$

(A.38)

## APÊNDICE B

## ALGUMAS ÚTEIS IDENTIDADES MATRICIAIS

Colecinaremos aqui algumas identidades matriciais, menos comuns, utilizadas em nosso trabalho.

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  matrizes gerais, porém de ordem tal que o produto e a soma entre elas, onde aparecer, seja definido.

Temos, então, as seguintes identidades

$$\partial(A^{-1}) = A^{-1}(\partial A)A^{-1} \quad (B.1)$$

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} \partial \operatorname{Tr} \ln(I + AB) = & \operatorname{Tr} [(\partial A)(I + BA)^{-1}B + \\ & + (\partial B)(I + AB)^{-1}A] \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\operatorname{Tr} \ln(I + AB) = \operatorname{Tr} \ln(I + BA) \quad (B.4)$$

$$\text{Tr}(\ln A + \ln B) = \text{Tr} \ln(AB) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = (\text{Det } A)(\text{Det } B) = \text{Det}(AB) \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= (\text{Det } A) \text{Det}(D - CA^{-1}B) \quad (\text{Det } A \neq 0) \quad (\text{B.7}) \\ &= (\text{Det } D) \text{Det}(A - BD^{-1}C) \quad (\text{Det } D \neq 0) \end{aligned}$$

$$\ln \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln A & O \\ O & \ln B \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$



## APÊNDICE C

## PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES GAMA E BETA

## C.1 As funções gama e beta

Vejamos agora algumas propriedades da função gama.

Ela pode ser definida através da fórmula de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (\text{C.1})$$

Fazendo-se a mudança de variável

$$t \rightarrow kt$$

temos uma expressão equivalente

$$\Gamma(z) = k^z \int_0^{\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} k > 0) \quad (\text{C.2})$$

Temos, também, a definição

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \quad (\text{C.3})$$

Esta forma é conhecida como de produto infinito de Euler, da qual decorre

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{C.4})$$

e

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (\text{C.5})$$

Em particular, da eqn.1,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) \quad (\text{C.6})$$

A função beta é definida por

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (\text{C.7})$$

ou, equivalentemente, por

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0) \quad (\text{C.8})$$

e relaciona-se com a função gama através de

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\text{C.9})$$

Define-se, ainda, a função psi ou digama

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (\text{C.10})$$

com a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \psi(n+1) &= \left[ -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \\ \psi(1) &= -\gamma \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

com

$$\gamma = 0,5772156649\dots \quad (\text{C.12})$$

e derivadas

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(n+1) &= (-1)^m m! \left[ -\zeta(m+1) + 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{n^{m+1}} \right] \\ \psi^{(m)}(1) &= (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1) \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

São úteis algumas expansões em série da função gama quando o seu argumento se aproxima de um número inteiro.

Inicialmente, de

$$\Gamma(n \pm \epsilon) \underset{\epsilon \ll 1}{=} \Gamma(n) \pm \Gamma'(n)\epsilon + \frac{1}{2}\Gamma''(n)\epsilon^2 \pm \frac{1}{3!}\Gamma'''(n)\epsilon^3 + \dots \quad (\text{C.14})$$

temos

$$\Gamma(n \pm \epsilon) \underset{\epsilon \ll 1}{=} \Gamma(n) \left\{ 1 \pm \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}\epsilon + \frac{1}{2}\frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)}\epsilon^2 \pm \frac{1}{3!}\frac{\Gamma'''(n)}{\Gamma(n)}\epsilon^3 + \dots \right\} \quad (\text{C.15})$$

Usando-se agora a relação

$$\Psi(n) = \Gamma'(n) / \Gamma(n) \quad (\text{C.16})$$

resulta

$$\Gamma(n \pm \epsilon) \underset{\epsilon \ll 1}{=} \Gamma(n) \left\{ 1 \pm \Psi(n)\epsilon + \frac{1}{2}[\Psi^2(n) + \Psi'(n)]\epsilon^2 \right. \\ \left. \pm \frac{1}{3!}[\Psi^3(n) + 3\Psi(n)\Psi'(n) + \Psi''(n)]\epsilon^3 + \dots \right\} \quad (\text{C.17})$$

Em particular, fazendo uso das expressões para  $\Psi$ ,  $\Psi'$  e  $\Psi''$  vistas no apêndice C.1, tem-se

$$\Gamma(1 \pm \epsilon) = 1 \mp \gamma \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \mp \frac{\epsilon^3}{6} \left( \frac{\gamma^3}{2} + \frac{\gamma \pi^2}{4} + \zeta(3) \right) + \dots \quad (\text{C.18})$$

Tem-se, também,

$$\frac{1}{\Gamma(n \pm \epsilon)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \left\{ 1 \mp \psi(n) \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} [\psi^2(n) - \psi'(n)] \mp \frac{\epsilon^3}{3!} [\psi^3(n) - 3\psi(n)\psi'(n) + \psi''(n)] + \dots \right\} \quad (\text{C.19})$$

Em particular,

$$\frac{1}{\Gamma(1 \pm \epsilon)} = 1 \pm \gamma \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \left( \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6} \right) \pm \frac{\epsilon^3}{3} \left( \frac{\gamma^2}{2} - \gamma \frac{\pi^2}{4} + \zeta(3) \right) \quad (\text{C.20})$$

Da mesma forma, a partir da relação

$$\begin{aligned} \Gamma(-n \pm \epsilon) &= - \frac{\Gamma(1-n \pm \epsilon)}{(n \mp \epsilon)} = \frac{\Gamma(2-n \pm \epsilon)}{(n \mp \epsilon)(n-1 \mp \epsilon)} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\pm \epsilon)}{(n \mp \epsilon)(n-1 \mp \epsilon) \dots (1 \mp \epsilon)} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(1 \pm \epsilon) \Gamma(1 \mp \epsilon)}{\epsilon \Gamma(n+1 \mp \epsilon)} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

tem-se

$$\Gamma(-n \pm \epsilon) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} \left\{ \pm \frac{1}{\epsilon} + \Psi(n+1) \pm \frac{\epsilon}{2} [\Psi^2(n+1) - \Psi'(n+1) + \frac{\pi^2}{3}] + \frac{\epsilon^2}{3!} \left[ \frac{\pi^2}{6} \Psi(n+1) + \Psi^3(n+1) - 3\Psi(n+1)\Psi'(n+1) + \Psi''(n+1) \right] + \dots \right\} \quad (C.22)$$

Em particular,

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{\epsilon}{2} \left[ \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \right] - \frac{\epsilon^2}{3!} \left[ \frac{\pi^2}{2} \gamma + \gamma^3 + 2\zeta(3) \right] + \dots \quad (C.23)$$

e também

$$\Gamma(-1 \pm \epsilon) = - \left\{ \pm \frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma \pm \frac{\epsilon}{2} \left[ \frac{\pi^2}{6} + (1-\gamma)^2 + 1 \right] - \frac{\epsilon^2}{3} \left[ \frac{\pi^2}{2} (\gamma-1) - 3(1-\gamma^2) + \gamma^3 + 2\zeta(3) \right] + \dots \right\} \quad (C.24)$$

E ainda, a partir de

$$\frac{1}{\Gamma(-n \pm \epsilon)} = \pm \frac{(-1)^n \epsilon \Gamma(n+1 \mp \epsilon)}{\Gamma(1 \pm \epsilon) \Gamma(1 \mp \epsilon)}$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n \pm \epsilon)} = \pm \epsilon (-1)^n \Gamma(n+1) \left\{ 1 \mp \epsilon \Psi(n+1) + \frac{\epsilon^2}{2} [\Psi^2(n+1) + \Psi'(n+1) - \frac{\pi^2}{3}] \right\}$$

$$\mp \frac{\epsilon^3}{3!} \left[ \psi^3(n+1) + 3 \psi(n+1) \psi'(n+1) + \psi''(n+1) - \psi(n+1) \pi^2 \right] + \dots \left. \right\}$$

(C.25)

Em particular,

$$\frac{1}{\Gamma(\epsilon)} = \epsilon \left\{ 1 + \epsilon \gamma + \frac{\epsilon^2}{2} \left[ \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6} \right] + \frac{\epsilon^3}{3!} \left[ \gamma^3 - \frac{\gamma \pi^2}{2} + 2 \zeta(3) \right] \right\} \quad (\text{C.26})$$

## APÊNDICE D

## ALGUMAS INTEGRAIS DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Derivemos agora algumas integrais úteis para regularização dimensional.

Partindo da integral básica,

$$I_{m,r} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k}^2)^r}{(\tilde{k}^2 + M^2)^m} \quad (D.1)$$

onde

$$\tilde{k}^2 = -k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

definindo

$$k_0 = i k_0' \quad k^2 = k_0'^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

temos

$$\tilde{k}^2 = k^2 \quad d^4 \tilde{k} = i d^4 k$$

resultando

$$I_{m,r} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2)^r}{(k^2 + M^2)^m} \quad (D.2)$$

Passando para  $2n$  dimensões



$$I_{m,r} = i (\nu^2)^{2-n} \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \frac{(k^2)^r}{(k^2 + M^2)^m} \quad (D.3)$$

onde  $\nu$  é um parâmetro com dimensão de massa.

A parte angular pode ser integrada resultando

$$I_{m,r} = i \frac{(\nu^2)^{2-n}}{(2\pi)^{2n}} \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int d(k^2) \frac{(k^2)^{r+n-1}}{(k^2 + M^2)} \quad (D.4)$$

que, em vista da expressão integral da função beta vista na seção 1 do apêndice C, resulta, finalmente,

$$\begin{aligned} I_{m,r} &= \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k}^2)^r}{(\tilde{k}^2 + M^2)^m} \\ &= i \frac{(\nu^2)^{2-n}}{(4\pi)^n} (M^2)^{r+n-m} \frac{\Gamma(r+n)\Gamma(m-r-n)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \end{aligned} \quad (D.5)$$

Considere-se, agora, o caso particular

$$I_{1,0} = \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{k}^2 + M^2} = \frac{i}{(4\pi)^n} \frac{(M^2)^{n-1}}{(\nu^2)} \Gamma(1-n) \quad (D.6)$$

Fazendo-se o limite  $n \rightarrow 2 - \epsilon/2$ , temos

$$I_{1,0} = i \frac{M^2}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi\nu^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(-1 + \epsilon/2) \quad (D.7)$$

e usando a expansão

$$a^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^j}{j!} \quad (\text{D.8})$$

e a da função gama eqn.C.24, temos

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1,0} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{k}^2 + M^2} = -i \frac{M^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma \right. \\ &\quad \left. - \ln(M^2/\mu^2) + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{2} \ln^2(M^2/\mu^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-\gamma) \ln(M^2/\mu^2) + \delta + \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

onde

$$\delta = \frac{\pi^2}{12} + \frac{(1-\gamma)^2}{2} \quad \mu^2 = 4\pi\mu^2 \quad (\text{D.10})$$

No caso em que  $M$  é uma matriz quadrada, temos

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1,0} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} (\tilde{k}^2 + M^2)^{-1} = -i \frac{M^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma \right. \\ &\quad \left. - \ln(M^2/\mu^2) + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{2} \ln^2(M^2/\mu^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-\gamma) \ln(M^2/\mu^2) + \delta + \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Considere agora

$$\int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m_1^2)(\tilde{k}^2 + m_2^2)} = \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{\tilde{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{\tilde{k}^2 + m_1^2} \right) \quad (D.12)$$

Do resultado anterior temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m_1^2)(\tilde{k}^2 + m_2^2)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma - \right. \\ &- \frac{m_1^2 \ln(m_1^2/\mu^2) - m_2^2 \ln(m_2^2/\mu^2)}{m_1^2 - m_2^2} \\ &+ \frac{\epsilon}{4} \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \left( m_2^2 \ln^2 \frac{m_2^2}{\mu^2} - m_1^2 \ln^2 \frac{m_1^2}{\mu^2} - 2(1-\gamma) m_2^2 \ln \frac{m_2^2}{\mu^2} \right. \\ &\left. \left. - 2(1-\gamma) m_1^2 \ln \frac{m_1^2}{\mu^2} - 2(m_1^2 - m_2^2)(2\delta + 2) \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

(D.13)

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{p}^2 + m_1^2} \int \frac{d^4 \tilde{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_2^2} &= \frac{m_1^2 m_2^2}{(16\pi^2)^2} \left[ \frac{4}{\epsilon^2} + \right. \\ &+ \frac{2}{\epsilon} \left( 2 - 2\gamma - \ln \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu^4} \right) + 1 + 2\alpha + 2(1-\gamma) \ln \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu^4} \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu^4} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

(D.14)

$$\alpha = \frac{\pi^2}{12} + (1-\gamma)^2$$

$$\int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{p}^2 + m^2} = i \frac{m^4}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 - \ln(m^2/\mu^2) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{2} \ln^2(m^2/\mu^2) - \ln(m^2/\mu^2) + \delta + 1 \right) + \dots \right]$$

(D.15)

$$\int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{p}^2 + m^2)^2} = i \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(m^2/\mu^2) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{2} \ln^2(m^2/\mu^2) + \delta \right) + \dots \right]$$

(D.16)

$$\int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{p}^2 + m_1^2)^2} \int \frac{d^4 \tilde{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{q}^2 + m_2^2)} = \frac{m_2^2}{16\pi^2} \left[ \frac{4}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} (1 - \ln(m_1^2 m_2^2/\mu^4)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln^2(m_1^2 m_2^2/\mu^4) - \ln(m_1^2 m_2^2/\mu^4) + 2\delta + 1 + \dots \right]$$

(D.17)

$$\int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)} \int \frac{d^4 \tilde{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p \pm q)^2 + m^2)} = -\frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[ \frac{4}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \left[ -\frac{m^4}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + m_1^2 m_2^2 \left( 2 - \ln \left( \frac{m_1^2 m_2^2}{\nu^4} \right) \right) \right] - \frac{m_1^4}{2} \left( 1 - \ln \left( \frac{m_1^2}{\nu^2} \right) \right) + m_1^2 m_2^2 \left( 3 + 2\delta \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \ln \left( \frac{m_1^2 m_2^2}{\nu^4} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{m_1^2 m_2^2}{\nu^4} \right) \right) + \dots \right] \quad (D.18)$$

Calculemos agora a integral de 2-loop

$$\mathcal{Y} = \int \frac{d^4 \tilde{p}_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{p}_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{p}_3}{(2\pi)^4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 + p_3)}{(\tilde{p}_1^2 + m_1^2)(\tilde{p}_2^2 + m_2^2)(\tilde{p}_3^2 + m_2^2)} \\ = \int \frac{d^4 \tilde{p}_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{p}_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{p}_1^2 + m_1^2)(\tilde{p}_2^2 + m_2^2)((\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 + m_2^2)} \quad (D.19)$$

Combinando os dois denominadores em  $\tilde{p}_2$  usando-se a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(Ax + B(1-x))^{\alpha+\beta}} \quad (D.20)$$

temos

$$\mathcal{Y} = \int \frac{d^4 \tilde{p}_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{p}_2}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 dx \frac{1}{[\tilde{p}_2^2 + m_2^2 + 2\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_1 x + \tilde{p}_1^2 x]^2} \\ \frac{1}{(\tilde{p}_1^2 + m_1^2)} \quad (D.21)$$

Fazendo-se a translação de momento  $\tilde{p}_2 \rightarrow p_2 + p_1 x$ , resulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y} = & -(\omega^2)^{4-2n} \int_0^1 \frac{d^{2n} p_1}{(2\pi)^{2n}} \int_0^1 dx \int \frac{d^{2n} p_2}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{[p_2^2 + m_2^2 + p_1^2 x(1-x)]^{2-n}} \\
 & \times \frac{1}{(p_1^2 + m_1^2)}
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

e usando a fórmula D.5, integramos em  $p_2$

$$\mathcal{Y} = - \frac{(\omega^2)^{4-2n}}{(4\pi)^n} \Gamma(2-n) \int_0^1 dx \int \frac{d^{2n} p_1}{(2\pi)^{2n}} \frac{x^{n-2} (1-x)^{n-2}}{(p_1^2 + m_1^2) [p_1^2 + m_2^2/x(1-x)]^{2-n}}$$

(D.23)

Integrando agora a parte angular de  $p_1$ , fazendo uso da fórmula

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{(x+\beta)^\mu (x+\gamma)^\rho} = \frac{1}{\beta^\mu \gamma^\rho e^{-\nu}} B(\nu, \mu-\nu+e) F(\nu, \nu; \mu+e; 1-\frac{\gamma}{\beta})$$

(D.24)

tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y} = & - \frac{(\omega^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \frac{\Gamma(3-2n)}{2-n} (m_1^2)^{n-1} (m_2^2)^{n-2} x \\
 & \times \int_0^1 dx F(2-n, n; 3-n; 1-x(1-x)m_1^2/m_2^2)
 \end{aligned} \tag{D.25}$$

Para  $m_1^2/m_2^2 \leq 4$  temos fazendo uso de

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a; b; a+b-c+1; 1-z) \\
 &+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)
 \end{aligned}
 \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
 y &= - \frac{(\nu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \frac{\Gamma(3-2n)}{2-n} (m_1^2)^{n-1} (m_2^2)^{n-2} x \\
 &\times \int_0^1 dx \left\{ \left( x(1-x) \frac{m_1^2}{m_2^2} \right)^{1-n} \frac{\Gamma(3-n) \Gamma(n-1)}{\Gamma(2-n) \Gamma(n)} F\left(1, 3-2n, 2-n; x(1-x) \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) \right. \\
 &\left. + \frac{\Gamma(3-n) \Gamma(1-n)}{\Gamma(1) \Gamma(3-2n)} F\left(2-n, n; n; x(1-x) \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{D.27}$$

Expandindo a função hipergeométrica em série e integrando-se em  $x$  resulta

$$y = \frac{(\nu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \Gamma(1-n) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^j (m_2^2)^{2n-j-3} \frac{\Gamma(j+3-2n) \Gamma(j+2-n)}{\Gamma(2j+4-2n)} - \right.$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{j+n-1} (m_2^2)^{n-j-2} \frac{\Gamma(j+2 \cdot n) \Gamma(j+1)}{\Gamma(2j+2)} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (D.28)$$

Fazendo-se o limite  $n \rightarrow 2 - \epsilon/2$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = & \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} (m_1^2 + 2m_2^2) + \frac{1}{\epsilon} \left[ (3-2\gamma) (m_1^2 + 2m_2^2) \right. \right. \\ & - 2(m_1^2 \ln(m_1^2/\mu^2) + 2m_2^2 \ln(m_2^2/\mu^2))] + (m_1^2 \ln^2(m_1^2/\mu^2) + \\ & + 2m_2^2 \ln^2(m_2^2/\mu^2)) - (3-2\gamma) (m_1^2 \ln(m_1^2/\mu^2) + \\ & + 2m_2^2 \ln(m_2^2/\mu^2)) + \left( \frac{\gamma}{2} - 3\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{12} \right) (m_1^2 + 2m_2^2) \\ & \left. + m_1^2 \mathcal{J}(m_1^2/m_2^2) \right\} \end{aligned}$$

(D.29)

com

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) = & -4 + 2 \ln(x) - \frac{1}{2} \ln^2(x) \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+3/2)} \left(\frac{x}{4}\right)^j \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+3/2)} \left(\frac{x}{4}\right)^j \left(\psi(j) - \right. \end{aligned}$$



$$- \Psi(j+3/2) - 2 \ln 2 \quad (D.30)$$

Por outro lado, combinando-se, na eqn.18, os denominadores em  $p_1$  tem-se

$$\begin{aligned} y &= \left( \frac{d^4 \tilde{p}_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{p}_2}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \right) \int_0^1 dx \frac{1}{[p_1^2 + (m_1^2(1-x) + m_2^2 x) + 2p_1 \cdot p_2 x + p_2^2 x]^2} \\ &\quad \times \frac{1}{(p_2^2 + m_2^2)} \\ &= - \frac{(\nu^2)^{4-2n}}{(4\pi)^n} \frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(n)} \int_0^1 dx \left( \frac{d^{2n} p_1}{(2\pi)^{2n}} \frac{x^{n-2} (1-x)^{n-2}}{[p_2^2 + m_1^2/x + m_2^2/(1-x)]^{2 \cdot n} (p_2^2 + m_2^2)} \right) \\ &= - \frac{(\nu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-2} (1-x)^{n-2} \left( \frac{x(1-x)}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x} \right)^{2-n} \times \\ &\quad \frac{1}{(m_2^2)^{1-n}} \frac{\Gamma(n)\Gamma(3-2n)}{\Gamma(3-n)} F\left(2-n, n; 3-n; \frac{(1-x)(1-x)m_2^2}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x}\right) \end{aligned} \quad (D.31)$$

Verifica-se, porém, que

$$\frac{x(1-x)m_2^2}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x} \quad (D.32)$$

tem um máximo para  $x = 1/(1 + (m_2/m_1))$  variando, entretanto, entre 0 e 1

Desta forma, temos usando eqn.23

$$\begin{aligned}
 y &= - \frac{(\mu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \frac{\Gamma(3-2n)}{2-n} (m_2^2)^{n-1} \int_0^1 dx (m_1^2(1-x) + m_2^2 x)^{n-2} x \\
 &\left\{ \left( \frac{x(1-x)m_2^2}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x} \right)^{1-n} \frac{\Gamma(3-n)\Gamma(n-1)}{\Gamma(2-n)\Gamma(n)} F\left(1, 3-2n; 2-n; \frac{x(1-x)m_2^2}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x}\right) \right. \\
 &+ \frac{\Gamma(3-n)\Gamma(1-n)}{\Gamma(1)\Gamma(3-2n)} F\left(2-n, n; n; \frac{x(1-x)}{m_1^2(1-x) + m_2^2 x}\right) \\
 &\qquad\qquad\qquad (D.33)
 \end{aligned}$$

Expandindo as funções hipergeométricas em série,

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(\mu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \Gamma(1-n) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{2n-j-3} (m_2^2)^j \frac{\Gamma(j+3-2n)}{\Gamma(j+2-n)} x \right. \\
 &\int_0^1 dx (x(1-x))^{j-n+1} \left[ 1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)x \right]^{2n-j-3} \\
 &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{n-j-2} (m_2^2)^{j+n-1} \frac{\Gamma(j+2-n)}{j!} \\
 &\left. \int_0^1 dx (x(1-x))^j \left[ 1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)x \right]^{n-j-2} \right\} \\
 &\qquad\qquad\qquad (D.34)
 \end{aligned}$$

e integrando em  $x$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(\mu^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \Gamma(1-n) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{2n-j-3} (m_2^2)^j \frac{\Gamma(j+3-2n)\Gamma(j-n+2)}{\Gamma(2j-2n+4)} x \right. \\
 &x F\left(j-2n+3, j-n+2; 2j-2n+4; 1 - m_2^2/m_1^2\right) -
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{n-j-2} (m_2^2)^{j+n-1} \frac{\Gamma(j+2-n)\Gamma(j+1)}{\Gamma(2j+2)},$$

$$\times \left. F(j-n+2, j+1; 2j+2; 1-m_2^2/m_1^2) \right\}$$

(D.35)

Para  $m_2^2/m_1^2 < 1$ , usamos novamente eqn.23 e expandimos em série

$$y = \frac{(\omega^2)^{4-2n}}{(16\pi^2)^n} \Gamma(1-n) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{2n-j-3} (m_2^2)^j \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(2-n)}{\Gamma(j-n+2)j!}, \right.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j-2n+3)\Gamma(k+j-n+2)}{\Gamma(k-n+2)k!} \left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^k + \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{n-j-2} (m_2^2)^{j+n-1},$$

$$\times \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(j-n+2)j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j+1)\Gamma(k+j-n+2)}{\Gamma(k+n)k!} \left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^k -$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{n-j-2} (m_2^2)^{j+n-1} \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(2-n)}{\Gamma(j+n)j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j-n+2)\Gamma(k+j+1)}{\Gamma(k-n+2)k!} \left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^k$$

$$- \left. \sum_{j=0}^{\infty} (m_1^2)^{-1-j} (m_2^2)^{j+2n-2} \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(j+n)j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j+n)\Gamma(k+j+1)}{\Gamma(k+n)k!} \left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^k \right\}$$

(D.36)

Fazendo-se o limite  $n \rightarrow 2 - \epsilon/2$  resulta a mesma expressão eqn.28, agora com

$$\begin{aligned}
J(x) &= \frac{\pi^2}{6} - \left(2 + \frac{\pi^2}{3}\right) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \ln x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+2)} x^{-j} \\
&+ \frac{2}{x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+2)} (\Psi(j+2) - \Psi(j)) x^{-j} + \\
&+ \frac{1}{x} \ln^2 x \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+k-1) \Gamma(j+k)}{\Gamma(j) \Gamma(k) j! k!} \left( 2\Psi(j+k-1) + 2\Psi(j+k) \right. \\
&- \Psi(j+1) - \Psi(k+1) - \Psi(j) - \Psi(k) \left. \right) x^{-j-k} \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+k-1) \Gamma(j+k)}{\Gamma(j) \Gamma(k) j! k!} \left[ (\Psi(j+k-1) + \Psi(j+k)) (\Psi(j+k-1) \right. \\
&+ \Psi(j+k) - \Psi(k) - \Psi(k+1) - \Psi(j) - \Psi(j+1)) \\
&+ (\Psi(j) + \Psi(j+1)) (\Psi(k) + \Psi(k+1)) - \Psi'(j+k-1) + \Psi'(j+k) \left. \right] x^{-j-k}
\end{aligned}$$

(D.37)

## BIBLIOGRAFIA

- (1) V. GATES Et Allii, Physica 15D(1985)289 1
- (2) A. NEVEU, J. H. SCHWARZ, Nucl. Phys. B31(1971)86 2
- (3) Yu A. GOL'FAND, E. P. JIKHTMAN, JETP Lett. 13(1971)323  
2
- (4) D. V. VOLKOV E A. P. AKULOV, Phys. Lett 46B(1973)109 2
- (5) J. WESS E B. ZUMINO, Nucl. Phys. B70(1974)39;B.  
ZUMINO, Nucl. Phys. B89(1975)535 2
- (6) Cit. In Fritjof Capra, "O Tao Da Física", P. 163,  
Cultrix, São Paulo, 1984 21
- (7) R. JACKIW, Phys. Rev. D9(1974)1686 22
- (8) S. WEINBERG, Phys. Rev. D7(1973)2887 22
- (9) S.Y. LEE E A.M. SCIACCALUGA, Nuc. Phys B96(1975)435 22
- (10) P. P. SRIVASTAVA, Phys. Lett. 149B(1984)135 34
- (11) D. AMATI E Kuang-chao CHOU, Phys. Lett. 114B(1982)129  
56
- (12) R. P. Dos SANTOS, "Using Reduce In Supersymmetry",  
Cbpf, 1987 68

**“O MÉTODO DE SUPERCAMPOS PARA CÁLCULO DE POTENCIAL EFETIVO EM MODELOS COM SUPERCAMPOS QUIRAIS : OS MODELOS DE WESS E ZUMINO DE O’RAIFEARTAIGH ”**

**RENATO PIRES DOS SANTOS**

Tese de doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Prem Prakash Srivastava/CBPF

Abraham Hirszt Zimmerman/IFT-USP

João Barcelos Neto/UFRJ

João Carlos Costa dos Anjos/CBPF

Takeshi Kodama/CBPF