

*HENRIQUE PEREIRA DE OLIVEIRA*

UM ESTUDO EM COSMOLOGIA E TERMODINÂMICA CAUSAL

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1986

*A meus pais e  
à Tânia.*

## AGRADECIMENTOS

A José Martins Salim, pela orientação sempre empolgante que permitiu-me trilhar por novos caminhos na pesquisa científica, e pela sua infinita paciência para com minhas deficiências e boa vontade no auxílio da eliminação das mesmas.

A Mario Novello pelas discussões, sugestões sempre bem-vindas e pelo seu interesse no andamento do trabalho.

A Ívano Damião Soares pela orientação durante os anos de iniciação científica.

Aos colegas José Soares, Maurício, Gilvan, Sasse, Rubens, Whashington, Hilário, João Torres, Renato Pires, André, Nelson, Ademir, Bartô, Assad e Isaias, sobretudo pelo companheirismo, pelo espírito de solidariedade do grupo e principalmente pelas discussões e conversas nas quais sempre pude aprender um pouco mais. Ao colega Renato Portugal pela ajuda durante minha iniciação científica.

A Maria Auxiliadora pelo incentivo e apoio nos momentos de desânimo.

A Marilene e Myrian pela paciência e boa vontade na dactilografia desta tese.

A Myrian e Aroldo pela imensa boa vontade e solicitude na resolução de ocasionais problemas.

Ao Elias e Laerte do serviço de xerografia, bem como aos demais funcionários da biblioteca.

Ao CNPq pela bolsa concedida, sem a qual seria difícil a realização deste trabalho.

## RESUMO

Na primeira parte fazemos uma abordagem em Relatividade Especial das teorias termodinâmicas para processos reversíveis e irreversíveis num meio contínuo. Tratamos inicialmente do formalismo referente às configurações de equilíbrio e, depois, as de não-equilíbrio. Nesta última destaca-se a descrição feita com a hipótese do equilíbrio local e aquela sem a hipótese do equilíbrio local (termodinâmica causal). Na última parte rediscutimos as teorias apresentadas quando campos gravitacionais se fazem presentes.

Em seguida analisamos termodinamicamente um modelo que pode ser entendido como sendo uma nebulosa em contração apresentando processos dissipativos identificados por fluxo de calor e viscosidade volumar. Este modelo é representado por uma métrica conformalmente plana. Inicialmente, calculamos quantidades tais como temperatura, pressão, entropia e produção de entropia dentro de um formalismo termodinâmico que admite a hipótese do equilíbrio local. Em seguida, a mesma análise é realizada dentro do quadro de uma termodinâmica causal (estendida), que parte do estabelecimento de uma entropia local de não equilíbrio.

Na terceira e última parte investigamos possíveis modelos cos

mológicos homogêneos e isotrópicos com viscosidade volumar. Nesses modelos levamos em consideração a nova equação fenomenológica para viscosidade volumar proveniente da termodinâmica causal. Os modelos encontrados possuem seção espacial plana ( $k=0$ ) e alguns não possuem singularidade. São verificadas as condições de energia e a seguir calcula-se a produção de entropia para os modelos fisicamente razoáveis.

LISTA DE FIGURAS

Figs.	Pág.
1.2.1. - Variação da entropia de um sistema .....	23
1.4.1. - Oscilações irreversíveis do modelo de Tolman ..	59
1.4.2. - Hipersuperfície tipo-espaço $\Sigma$ juntamente com as variáveis que possuem eqs. de evolução .....	61
1.4.3. - Hipersuperfície tipo-espaço $\Sigma$ juntamente com variáveis que possuem eqs. de evolução. Nota mos a presença de novas variáveis $q^\mu$ , $\pi$ e $\pi^{\mu\nu}$ ..	62
3.1.1. - (a) Gráfico de $R(t)$ dado pela eq. 3.48 .....	111
(b) Gráfico da expansão $\theta(t)$ .....	111
3.1.2. - (a) Gráfico de $\rho(t)$ .....	114
(b) Gráfico de $\pi(t)$ .....	115
3.2.1. - Gráfico de $R(t)$ dado pela eq. 3.99 .....	123
3.2.2. - Gráfico da expansão $\theta(t)$ .....	123
3.2.3. - Gráfico de $R(t)$ dado pela eq. 3.102 .....	124
3.2.4. - Gráfico da expansão $\theta(t)$ .....	125
3.2.5. - (a) Gráfico de $R(t)$ dado pela eq. 3.106 .....	127
(b) Gráfico da expansão $\theta(t)$ .....	127
3.2.6. - Gráfico de $\theta(t)$ para o modelo expresso pela 3.106 .....	130
3.2.7. - (a) Gráfico de $\theta(t)$ .....	131
(b) Gráfico de $\pi(t)$ .....	132
E.1 - (a) Gráfico de $F(t)$ quando $\dot{F}(t) < 0$ para todo $t > 0$ .	159
(b) Gráfico de $F(t)$ quando $\dot{F}(t)$ pode assumir va lores positivos .....	159

## Convenções

Os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3.

A métrica do espaço-tempo de Minkowski (Relatividade Especial) será representado por:

$$\eta^{\alpha\beta} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1)$$

Na presença de campos gravitacionais, o espaço-tempo será Riemanniano cuja métrica  $g_{\alpha\beta}(x)$  terá assinatura (+, -, -, -).

O campo de velocidades tipo-tempo  $U^\alpha(x)$  será normalizado por  $U^\alpha U_\alpha = 1$ .

O tensor de projeção no espaço perpendicular a  $U^\mu(x)$  é definido por

$$h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta,$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$h^{\alpha\beta} h_\alpha^\lambda = h^{\beta\lambda}$$

$$h^{\alpha\beta} U_\beta = h^{\alpha\beta} U_\alpha = 0$$

$$h^{\alpha\beta} = h^{\beta\alpha}$$

Qualquer campo vetorial  $A^\mu(x)$  pode ser escrito como:

$$A^\mu(x) = A_{||}^\mu(x) + A_{\perp}^\mu(x)$$

sendo  $A_{||}^\mu(x) = (A^\alpha U_\alpha) U^\mu$  sua parte temporal, paralela a  $U^\mu(x)$ , e

$A_{\perp}^\mu(x) = h^{\mu\alpha} A_\alpha(x)$  a sua parte espacial, perpendicular a  $U^\mu(x)$ .

Para um campo tensorial de 2ª ordem  $A_{\alpha\beta}(x)$ , temos:

$$A_{\alpha\beta}(x) = AU_{\alpha}U_{\beta} + |A_{\alpha\beta}|_{\perp} + A'_{\alpha}U_{\beta} + A''_{\beta}U_{\alpha}$$

onde  $A = A_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}$

$$|A_{\alpha\beta}|_{\perp} = h_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} A^{\mu\nu}(x)$$

$$A'_{\alpha} = h_{\alpha}^{\mu}A_{\mu\lambda}U^{\lambda}$$

$$A''_{\beta} = h_{\beta}^{\mu}A_{\lambda\mu}U^{\lambda}$$

A derivada covariante de um campo vetorial  $A^{\mu}(x)$  é dada por

$$A^{\mu}{}_{;\nu}(x) = A^{\mu}{}_{,\nu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}(x)$$

onde  $A^{\mu}{}_{,\nu}(x) = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}(x)$

A derivada covariante do campo vetorial  $A^{\mu}(x)$  ao longo da li nha de universo cuja tangente em cada ponto é  $U^{\alpha}(x)$ , é dada por:

$$\dot{A}^{\mu}(x) = A^{\mu}{}_{;\nu}(x) U^{\nu}(x)$$

As equações de Einstein são dadas por:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = - T^{\mu\nu}$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$  e

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} A^{\beta} = A^{\alpha}{}_{;\mu\nu} - A^{\alpha}{}_{;\nu\mu}$$

que são o tensor de Ricci e o tensor de curvatura, respectivamente.

## SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	ii
LISTA DE FIGURAS .....	iv
CONVENÇÕES .....	v
INTRODUÇÃO .....	01
CAPÍTULO 1 - TEORIAS TERMODINÂMICAS RELATIVISTAS PARA PROCESSOS REVERSÍVEIS E IRREVERSÍVEIS....	08
1.1 - Fluido Perfeito - Termodinâmica do Equilíbrio	09
1.1.1 - Descrição Hidrotermodinâmica do Fluido ..	13
1.2 - Fluidos Imperfeitos - Termodinâmica Fora do <u>E</u> quilíbrio .....	18
1.3 - Fluidos Imperfeitos - Termodinâmica Estendida	30
1.3.1 - Introdução	30
1.3.2 - Termodinâmica Estendida - Versão <u>Relati</u> vista .....	35
1.4 - Termodinâmica e Gravitação .....	52
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE TERMODINÂMICA DE UMA NEBULOSA EM CONTRAÇÃO .....	63
2.1 - Análise com Termodinâmica de 1ª Ordem .....	64
2.1.1 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis - Hipótese do Equilíbrio Local .....	69
2.1.2 - Cálculo da Produção de Entropia .....	73
2.1.3 - Cálculo da Entropia por Partícula e <u>Consi</u> derações Finais .....	76

	Pág.
2.2 - Análise com Termodinâmica Causal .....	81
2.2.1 - Introdução .....	81
2.2.2 - Cálculo dos Coeficientes de Viscosidade Vo lumar e de Condução de Calor .....	82
2.2.3 - Cálculo da Produção de Entropia .....	85
2.2.4 - Entropia por Partícula e Considerações Fi nais .....	91
 CAPÍTULO 3 - MODELOS COSMOLÓGICOS COM VISCOSIDADE VOLUMAR	 97
3.1 - Modelos Cosmológicos Fora do Equilíbrio I - Ter modinâmica Causal .....	100
3.1.1 - Resolução da Eq. 3.26 .....	104
3.1.2 - Condições de Energia .....	112
3.1.3 - Produção de Entropia .....	115
3.2 - Modelos Cosmológicos Fora do Equilíbrio II - Termodinâmica Causal .....	118
3.2.1 - Condições de Energia .....	128
3.2.2 - Produção de Entropia .....	132
 CONCLUSÃO .....	 136
 APÊNDICE A - FORMULAÇÃO DE LANDAU-LIFSCHITZ PARA TERMODI NÂMICA RELATIVISTA IRREVERSÍVEIS DE 1ª ORDEM	 138
 APÊNDICE B .....	 142
 APÊNDICE C .....	 145
 APÊNDICE D .....	 152
 APÊNDICE E .....	 156
 REFERÊNCIAS .....	 162

## INTRODUÇÃO

Após o advento da Teoria da Relatividade Especial, tentativas foram feitas no sentido de adaptar a Termodinâmica ao Princípio de Relatividade (especial). Objetivava-se, então, a procura de leis de transformação para quantidades termodinâmicas (entropia, temperatura, etc) com relação a referenciais de Lorentz em movimento relativo e de possíveis correções nas duas leis da termodinâmica, tal qual ocorreu em mecânica newtoniana. É interessante assinalar que essas investigações à época (por volta de 1907 a 1913) tinham apenas um caráter formal, pois não se imaginava um sistema físico existente na natureza que fosse denso ou quente o suficiente de modo a necessitar de um tratamento relativista de termodinâmica. Entretanto, após a descoberta da densidade da estrela acompanhante de Sirius, que é de aproximadamente  $50.000 \text{ g/cm}^3$ , o estudo em termodinâmica relativista ganhou a devida importância como uma teoria que pudesse ser aplicável a uma situação física real.

Posteriormente, foi mostrado que as duas leis da termodinâmica não necessitavam de modificações, enquanto que as leis da transformação das grandezas termodinâmicas, tais como quantidade de calor e temperatura, tiveram versões distintas de acordo com os trabalhos de Planck (1909) e Ott (1963).

Nas primeiras décadas do século XX, a termodinâmica de processos reversíveis era bem estabelecida ao contrário de uma teoria termodinâmica para processos irreversíveis ou dissipativos.\* Então, a nível não relativista, Onsager (1931) publicou um trabalho no

---

\* Na verdade, podemos considerar a termodinâmica de processos irreversíveis como sendo uma teoria de campo macroscópica, onde as variáveis termodinâmicas, são funções da posição e do tempo.

qual estabelece as "relações recíprocas" que envolvem os coeficientes que ocorrem nas leis fenomenológicas lineares. E o acabamento de uma teoria consistente de processos irreversíveis em situações não muito distante do equilíbrio foi alcançado graças aos trabalhos de Meixner (1940) e Prigogine (1947).

A primeira teoria termodinâmica relativista para processos irreversíveis num meio contínuo deve-se a Carl Eckart (1940). Em seu trabalho foi explicitada a forma do tensor momento-energia para um fluido cujos processos dissipativos são identificados por fluxo de calor e viscosidade. Foram obtidas equações fenomenológicas relativistas para os fluxos dissipativos (fluxo de calor e viscosidade). Destacamos a equação fenomenológica do fluxo de calor, onde se observa a presença de um termo sem análogo clássico oriundo da inércia do calor. Foi explicitado também o quadri-vetor fluxo de entropia e a produção de entropia. Mais tarde, foi mostrado que a descrição dada por Eckart não era única, uma vez que a escolha de uma única quadri-velocidade hidrodinâmica (como no equilíbrio) para fluidos dissipativos é ambígua. A nova descrição se deve a Landau e Lifschitz (1959) e é completamente idêntica a de Eckart em situações que não se desviam muito do equilíbrio termodinâmico.

Nas teorias de Landau-Lifschitz e Eckart é válida a hipótese do equilíbrio local. A hipótese do equilíbrio local vai estabelecer que a equação de Gibbs, que é definida para estados de equilíbrio, permanece válida localmente. Conseqüentemente, as definições locais de temperatura, pressão e potencial químico (para o caso da existência de mais de uma espécie química no fluido) permanecem inalteradas. A grande dificuldade apresentada por essas teorias é a predição da propagação de sinais térmicos e viscosos com veloci-

dade infinita. Na verdade, as teorias de Eckart e Landau-Lifschitz (conhecidas também como teorias termodinâmicas de primeira ordem) são aplicáveis somente em situações quasi-estacionárias sendo inadequadas quando processos não-estacionários estão presentes.

Para superar essas dificuldades e limitações, foi proposta inicialmente por Müller (1967) uma teoria termodinâmica não-estacionária (causal) não relativista. Israel (1976), sem o prévio conhecimento do trabalho de Müller, formulou o que é considerado como a extensão relativista da teoria de Müller. Nessas duas teorias é garantida a propagação de sinais térmicos e viscosos com velocidade finita, via equações hiperbólicas.

Por outro lado, Pavon et al (1982) desenvolveram uma teoria termodinâmica relativista não-estacionária. Esta teoria difere da teoria de Israel pelo estabelecimento de uma entropia de não equilíbrio, e de uma equação de Gibbs generalizada. Na teoria de Pavon, há um aumento dos graus de liberdade dinâmico do sistema com a inclusão dos fluxos dissipativos como variáveis fundamentais. Não podemos deixar de ressaltar que tanto Israel quanto Pavon introduziram em suas teorias novos coeficientes fenomenológicos, tais como os tempos de relaxação envolvidos nos processos de fluxo de calor e viscosidade.

Por volta de 1929, Tolman formulou a primeira teoria termodinâmica em Relatividade Geral e da qual inúmeros resultados novos foram obtidos. Basicamente, a teoria de Tolman, que é fenomenológica e de caráter macroscópico, consiste nas duas leis da termodinâmica, estendidas para espaços curvos. A primeira lei da termodinâmica na mais é que a lei de conservação da energia no espaço-tempo curvo. A segunda lei da termodinâmica vai referir-se a entropia, ou mais precisamente, a lei de variação da entropia. Tolman inicial-

mente definiu o quadrivetor fluxo de entropia  $S^\mu$  num dado ponto do espaço-tempo por

$$S^\mu = \phi_0 \frac{dx^\mu}{ds}$$

onde  $\phi_0$  é a densidade própria da entropia no ponto em consideração medida por um observador local e  $\frac{dx^\mu}{ds}$  é a velocidade da matéria no dado ponto. Então, para a segunda lei da termodinâmica foi estabelecido que

$$S^\mu_{;\mu} \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \geq \frac{dQ_0}{T_0}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \phi_0 \sqrt{-g} \frac{dx^\mu}{ds} \right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \geq \frac{dQ_0}{T_0}$$

Nesta expressão  $dQ_0$  é o calor (medido por um observador local) que flui para o elemento de volume em consideração e  $T_0$  é a temperatura absoluta do elemento de volume medida por um observador local. É frisado ainda, que as quantidades  $dQ_0$  e  $T_0$  mantêm o caráter macroscópico do calor e temperatura em termodinâmica não-relativista. Fazendo análises termodinâmicas em sistemas materiais em espaço-tempo curvo, Tolman chegou, como dissemos, a inúmeros resultados novos. Podemos citar a condição de equilíbrio térmico de fluido em repouso num campo gravitacional estático. Tal condição já não é mais caracterizado pela temperatura constante em qualquer parte do fluido, mas sim pela constância do "pacote da temperatura"  $T\sqrt{g_{00}}$ . Temos que destacar a possibilidade de processos que ocorrem a uma taxa finita evoluírem reversivelmente, ao contrário do que estabelecido pela termodinâmica não relativista. Outro resultado novo é aquele que

se refere a sistemas materiais sob processos irreversíveis no espaço-tempo curvo que nunca chegam a um estado terminal de entropia máxima e mínima energia livre. Este último resultado diz respeito a modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos oscilantes. Nesses modelos, o raio de universo cresce a cada ciclo, e esta evolução é irreversível e interminável.

Atualmente as teorias termodinâmicas em espaços curvos são aquelas resultantes do acoplamento mínimo das teorias de Eckart (ou Landau-Lifschitz) e Pavon et al já estabelecidas em Relatividade Especial. Operacionalmente isso significa que todas as derivadas simples serão substituídas pelas derivadas covariantes e o tensor de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  será substituído pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$ . Essa modificação irá alterar a lei de conservação do tensor momento-energia de tal forma que não teremos mais uma lei de conservação. Devemos ainda salientar que o termo não conservativo depende da afinidade e, conseqüentemente, não é invariante por transformação de coordenadas. Essa dificuldade da teoria será abordada com mais detalhe na seção 1.4 do texto. Assim, estamos prontos para analisar termodinamicamente sistemas sob processos dissipativos em Relatividade Geral. Além disso, podemos investigar a evolução de modelos cosmológicos com fluidos dissipativos resolvendo as equações de Einstein juntamente com equações adicionais, que são as equações de estado e as equações fenomenológicas. Como exemplo, podemos citar os modelos cosmológicos com viscosidade volumar, cuja primeira solução homogênea e isotrópica sem singularidade foi obtida por Murphy em 1973. Desde então, tais modelos tem atraído a atenção de inúmeros pesquisadores pela razoável simplicidade das equações e a possibilidade de existência de um mecanismo efetivo (viscosidade volumar) que possa evitar a singularidade. Chamamos a atenção ainda para o

fato da viscosidade volumar em cosmologia representar o efeito macroscópico de criação de partículas pelo campo gravitacional <sup>(94)</sup>.

No decorrer deste trabalho, utilizamos teorias termodinâmicas para processos reversíveis no espaço-tempo curvo para analisarmos sistemas dissipativos. Investigaremos também novas soluções das equações de Einstein para fluidos fora do equilíbrio, em especial com viscosidade volumar, dentro do quadro da termodinâmica causal.

A presente tese é então dividida em três capítulos e cinco apêndices. No primeiro capítulo desenvolvemos a termodinâmica para processos reversíveis e irreversíveis. Esta última tratará do formalismo de Eckart e da termodinâmica estendida. Na última seção faremos algumas considerações acerca da extensão da termodinâmica em espaços-curvos.

No capítulo II analisamos termodinamicamente um modelo que podemos entender como sendo uma nebulosa em contração. Na primeira parte utilizamos o formalismo de Eckart e, na segunda, o formalismo da termodinâmica estendida.

No capítulo III, novos modelos homogêneos e isotrópicos com viscosidade volumar são propostos dentro do quadro da termodinâmica estendida. Modelos com e sem singularidade são obtidos e verificamos as condições de energia dos mesmos, além do cálculo da produção de entropia.

No apêndice A a teoria de Landau-Lifschitz é brevemente desenvolvida. No apêndice B é explicitada a expansão em série da temperatura na termodinâmica estendida. No apêndice C calculamos os tensores de Riemann, de Ricci e de Einstein para uma métrica do tipo

$$ds^2 = A^2(r, t) dt^2 - B^2(r, t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Os apêndices D e E são referentes aos modelos com viscosidade volu-

mar. No primeiro, explicitamos algumas relações de vínculo e outras constantes provenientes da solução das equações de campo. E no segundo, são explicitados os cálculos referentes às condições de energia.

1. TEORIAS TERMODINÂMICAS RELATIVISTAS PARA PROCESSOS REVERSÍVEIS E IRREVERSÍVEIS

Neste capítulo desenvolveremos as teorias termodinâmicas relativistas para processos reversíveis e irreversíveis num meio contínuo. Iniciamos com a definição de fluido perfeito em Relatividade Especial estabelecendo seu tensor momento-energia e leis de conservação. Para uma completa descrição do fluido, lançamos mão da termodinâmica definindo a equação fundamental e introduzindo parâmetros como temperatura absoluta e pressão termodinâmica. Na seção seguinte consideraremos o formalismo desenvolvido por Eckart (1940) para processos irreversíveis com fluido de uma única componente química. Nesta descrição, a hipótese do equilíbrio local é válida, e com auxílio da segunda lei da termodinâmica equações fenomenológicas para o fluxo de calor e viscosidade são estabelecidas. Na seção 1.3 é feita uma pequena introdução onde são colocadas as dificuldades oriundas do formalismo desenvolvido anteriormente quando desejamos analisar a propagação de sinais térmicos e viscosos. A solução de tais problemas vem com as teorias termodinâmicas de Müller-Israel (a qual apenas citamos) e da versão relativista da termodinâmica estendida devido a D.Pavon et al (1982) que encontra-se exposta com detalhes.

Finalmente na seção 1.4 todo formalismo desenvolvido nas seções anteriores é reconsiderado de modo a ser compatível com a Relatividade Geral. Para tal, lançamos mão do acoplamento mínimo entre gravitação e matéria. Fazemos uma exposição dos principais resultados de termodinâmica em espaços curvos, dando ênfase àqueles obtidos por Tolman. Na parte final desta seção tecemos algumas con

siderações sobre a possível influência da curvatura no quadro de descrição do meio contínuo quando na formulação da termodinâmica causal.

### 1.1 - Fluido Perfeito - Termodinâmica do Equilíbrio

De acordo com a hidrodinâmica clássica, um fluido perfeito é um sistema contínuo que é incapaz de suportar tensões de cisalhamento (shear stresses) e onde a lei de Pascal é válida. Podemos, utilizando esse critério, construir o tensor momento-energia de tal sistema material em relatividade especial e assim obtermos mais adiante as equações relativistas do movimento do fluido. Vamos considerar um elemento de volume do fluido em movimento. O fluxo do impulso através da superfície  $d\vec{s}$  do elemento do fluido é exatamente a força exercida nesta superfície<sup>(1)</sup>; assim se  $T^{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia do fluido,  $T^{ij}ds_j$  é a  $i$ -ésima componente da força exercida no elemento de superfície  $ds_j$ . Tomemos agora o elemento de volume visto do referencial próprio do elemento, ou seja, o referencial onde o elemento encontra-se em repouso. Nesse referencial é válida a lei de Pascal, isto é, a força exercida em cada superfície é normal a mesma e isotrópica (igual em todas as direções). Desse modo

$$T^{ij}ds_j = pds^i \quad (1.1)$$

onde  $p$  é a pressão hidrostática medida por um observador comovente com o fluido. De (1.1), vem

$$T^{ij} = p \eta^{ij} \quad (1.2)$$

\* É sempre possível encontrar um mapeamento local tal que a velocidade  $U$  do elemento do fluido tem componentes  $U^\mu = (1, 0)$ .

sendo  $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1)$ . Com relação as outras componentes de  $T^{\mu\nu}$ , temos que  $T^{i0}$  (densidade de impulso) são iguais a zero visto que há ausência de fluxo de energia, isto é, não existe fluxo de calor. A componente  $T^{00}$  é a densidade de energia total  $\rho$  do elemento considerado.

Assim o tensor momento-energia do elemento do fluido em coordenadas locais tais que  $U^\mu = (1, 0)$  é dado por:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Convém ressaltar que (1.3) é a expressão do tensor momento-energia no referencial local em que o fluido encontra-se em repouso.

O próximo passo é determinarmos  $T^{\mu\nu}$  para um referencial inercial qualquer. Para tal, realizaremos as transformações de Lorentz para as componentes do tensor momento-energia dadas em (1.3).

Assim:

$$T^{ij} = a^i_{\alpha} a^j_{\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} = p \delta_{ij} + (p + \rho) \frac{v_i v_j}{1 - v^2} \quad (1.4a)$$

$$T^{i0} = (\rho + p) \frac{v_i}{1 - v^2} \quad (1.4b)$$

$$T^{00} = \frac{\rho + p v^2}{1 - v^2} \quad (1.4c)$$

Podemos então escrever  $T^{\mu\nu}$  numa forma mais compacta:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^{\mu} U^{\nu} - p \eta^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

$U^{\alpha}$  é a quadrivelocidade com as seguintes componentes:

$$\left. \begin{aligned} U^i &= \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2}} \\ U^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Ademais, este valor é normalizado por:

$$\eta^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} = U^{\alpha} U_{\alpha} = 1 .$$

### 1.1.1 - Descrição Hidrotermodinâmica do fluido

A dinâmica dos fluidos é descrita pelas equações

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (1.7)$$

Essas são as equações de conservação da energia e de momento escritas de uma forma unificada. Em adição a essas leis de conservação, a hidrodinâmica clássica estabelece a conservação da massa inercial do fluido. Tal lei, entretanto, está contida em (1.7) devido a equivalência entre a massa inercial e energia estabelecida em relatividade especial. Então, vamos supor que o fluido contém mais uma quantidade conservada que genericamente entendemos como número de partículas<sup>\*(1,4,5)</sup>. Designaremos  $n$  como sendo o número de partículas por unidade de volume próprio. Essa grandeza é um escalar e, juntamente com a quadrivelocidade hidrodinâmica  $U^\alpha$ , podemos definir o quadrivetor corrente de partículas  $N^\alpha$  :

$$N^\alpha \equiv n U^\alpha \quad (1.8)$$

A equação de continuidade que expressa a conservação do número de partículas é:

$$N^\alpha_{,\alpha} = 0 \quad (1.9)$$

---

\* Dixon (1976) tem considerado uma lei de conservação de massa que ele denomina massa inerte, ao invés da conservação do número de partículas. A massa inerte seria a porção de massa de repouso do sistema que não se converteria em alguma forma de energia nos processos a que se submete o sistema.

Explicitando essa expressão, vem

$$nU^{\alpha}_{,\alpha} + \dot{n} = 0 \quad (1.9')$$

Em situações muito afastadas do equilíbrio onde altas temperaturas estão presentes, há a criação de novas partículas de modo que o número total de partículas varia. Neste caso,  $n$  pode ser considerado como sendo a densidade do número de bárions ou a densidade de carga.

Projetando (1.7) na direção de  $U^{\mu}$ , vamos obter a lei de conservação de energia, ou seja

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} U_{\mu} = 0 \quad (1.10)$$

Fazendo uso do tensor momento-energia dado em (1.5), (1.10) é reescrita como:

$$\dot{\rho} + (p + \rho) U^{\alpha}_{,\alpha} = 0 \quad (1.10')$$

Nessa equação  $\dot{\rho} = \rho_{,\alpha} U^{\alpha}$  é a variação de  $\rho$  ao longo da linha de universo do elemento de fluido considerado.  $U^{\alpha}_{,\alpha}$  mede a variação do volume por partícula  $v$ , como podemos inferir, se levarmos em conta que  $v = \frac{1}{n}$  e a eq. (1.9'), obtendo:

$$U^{\alpha}_{,\alpha} = - \frac{\dot{n}}{n} = \frac{\dot{v}}{v} \quad (1.11)$$

A equação de conservação do momento linear é obtida projetando (1.7) na hipersuperfície perpendicular a  $U^{\mu}$ . Então escrevemos:

$$T^{\mu\nu}_{, \nu} h_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad (1.12)$$

Utilizando (1.5) podemos explicitar esta expressão

$$(\rho + p) \dot{U}^{\alpha} - p_{, \nu} h^{\nu\alpha} = 0 \quad (1.12')$$

sendo  $\dot{U}^{\alpha} = U^{\alpha}_{, \beta} U^{\beta}$ . A eq. (1.12') é a equação de Euler relativista.

Para completar a descrição do sistema, lançamos mão da termodinâmica e conseqüentemente a introdução de novos parâmetros associados ao estado do sistema, tais como energia interna, temperatura, pressão termodinâmica, etc. Basicamente, toda a informação termodinâmica do sistema está contida na eq. fundamental:

$$s = s(\varepsilon, v) \quad (1.13)$$

Nesta expressão  $\varepsilon$  é a energia interna por partícula,  $v$  o volume por partícula e  $s$  a entropia por partícula. Os parâmetros ou variáveis  $\varepsilon$  e  $v$  são ditas extensivas. Ainda em (1.13), estamos nos restringindo a uma única componente química. Num caso mais geral, deveríamos incluir em (1.13)  $n_i$  que seria o número de partículas da  $i$ -ésima componente.

A partir a (1.13) podemos definir as equações de estado considerando variações independentes de  $\varepsilon$  e  $v$

$$\left. \begin{aligned} T^{-1} &= \left( \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_{v = \text{cte}} \\ \frac{p}{T} &= \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_{\varepsilon = \text{cte}} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

onde  $T = T(\epsilon, v)$  e  $p = p(\epsilon, v)$ . As novas variáveis  $T$  e  $p$  são a temperatura absoluta e a pressão termodinâmica, e são ditas variáveis intensivas. O número de graus de liberdade termodinâmicos de um sistema será o número de variáveis intensivas capazes de variações independentes (Callen, 1960). Da equação fundamental, temos:

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \right)_v d\epsilon + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_\epsilon dv$$

mas tendo em vista as eqs. (1.14), vem:

$$ds = \frac{1}{T} d\epsilon + \frac{p}{T} dv$$

ou ainda

$$Tds = d\epsilon + p dv \quad (1.15)$$

A equação (1.15) é conhecida como eq. de Gibbs, e uma vez conhecidas as equações de estado, a equação fundamental pode ser obtida após a integração de (1.15). Finalmente, deve ser enfatizado que os estados de equilíbrio são aqueles cujos parâmetros extensivos tornam a entropia por partícula,  $s$ , máxima.

Notemos que (1.10') pode ser reescrita de uma outra maneira. Substituindo  $U^\mu_{,\mu}$  dado em (1.11) na eq. (1.10'), encontramos:

$$\dot{\rho} - (p + \rho) \frac{n_{,\alpha} U^\alpha}{n} = 0$$

Arrumando os termos de modo mais conveniente, podemos escrever:

$$nU^\alpha \left( \frac{\rho}{n} - \frac{\rho n}{n^2} - \frac{pn}{n^2} \right) = nU^\alpha \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{,\alpha} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{,\alpha} \right] = 0 \quad (1.16)$$

No entanto,  $\rho$  pode ser ainda escrito como:

$$\rho = n (\varepsilon + a) \quad (1.17)$$

onde  $\varepsilon$  é a energia interna por partícula e  $a$  uma constante associada a massa de repouso das partículas. Daí (1.16) é reescrita como:

$$nU^\alpha (\varepsilon_{,\alpha} + p v_{,\alpha}) = 0 \quad (1.16')$$

sendo  $v = \frac{1}{n}$ , o volume por partícula. Considerando a identidade termodinâmica (1.15), esta pode ser colocada na seguinte forma

$$T s_{,\alpha} = \varepsilon_{,\alpha} + p v_{,\alpha} \quad (1.18)$$

Levando esse resultado na eq. (1.16'), obtemos:\*

$$n U^\alpha T s_{,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad n \dot{s} = 0 \quad (1.19)$$

Podemos definir o quadrivetor fluxo de entropia  $S^\mu$ , por:

$$S^\mu \equiv n s U^\mu \quad (1.20)$$

e reescrever (1.19), por uma eq. de continuidade dada por:

---

\* Note que é feita a identificação entre pressão hidrostática e pressão termodinâmica.

$$S^{\mu}_{,\mu} = (nsU^{\mu})_{,\mu} = n\dot{s} = 0 \quad (1.21)$$

As eqs. (1.19) ou (1.21) expressam que a entropia permanece constante ao longo da linha de universo do elemento de fluido considerado. Dizemos que o elemento de fluido evolui adiabaticamente, ou ainda, de (1.21) não há produção de entropia. O fato expresso por (1.21) vai, na verdade, caracterizar todos os fluidos considerados perfeitos, isto é, onde inexistem processos dissipativos.

## 1.2 - Fluidos Imperfeitos - Termodinâmica Fora do Equilíbrio

Consideremos agora fluidos onde existem procesos dissipativos como fluxo de calor e viscosidade. Para estudar tais fluidos, o tensor momento-energia (1.5) e o quadri vetor fluxo de partículas (1.8) serão modificados e escritos, respectivamente, como:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) U^{\alpha}U^{\beta} - p \eta^{\alpha\beta} + \Delta T^{\alpha\beta} \quad (1.22)$$

$$N^{\alpha} = n U^{\alpha} + \Delta N^{\alpha} \quad (1.23)$$

onde  $\Delta T^{\alpha\beta}$  e  $\Delta N^{\alpha}$  representam o efeito da dissipação presente na evolução do fluido.

Antes de prosseguirmos não podemos deixar de mencionar a ambiguidade na escolha de uma única "quadri-velocidade hidrodinâmica" (5), (6), e em consequência um único referencial de repouso com relação ao qual grandezas como  $n, \rho, p$ , etc, são definidas. Essa ambiguidade vem do fato da existência de fluxos de energia (fluxo de calor) e que de acordo com a relatividade especial, tal fluxo

corresponde a um fluxo de massa. Então a definição da quadri-velocidade do fluido em termos do fluxo de matéria, como feito em hidrodinâmica clássica fica sem sentido. Daí a existência de duas descrições distintas para fluidos imperfeitos ou fora do equilíbrio termodinâmico: uma devido a Eckart (1940) e outra devido a Landau-Lifschitz. Na presente seção consideraremos somente a descrição de Eckart, enquanto a de Landau-Lifschitz encontra-se desenvolvida no apêndice A.

Eckart definiu a quadri-velocidade  $U^\alpha$  como sendo aquela do fluxo de partículas. Consideremos o sistema de coordenadas comovetes onde  $U^\alpha = \delta^\alpha_0$  e veremos quais as imposições sobre  $\Delta T^{\alpha\beta}$  e  $\Delta N^\alpha$  nesta formulação. A densidade de energia  $\rho$  é dada pelo valor de  $T^{00}$  medido no sistema comovete, ou

$$\rho \equiv T^{00} \quad (1.24)$$

A densidade do número de partículas será o valor de  $N^0$  medido no sistema comovete, ou

$$n \equiv N^0 \quad (1.25)$$

De (1.22) e (1.24), vem

$$T^{00} \equiv \rho = \rho + p - p + \Delta T^{00}, \text{ daí segue que } \Delta T^{00} = 0 \quad (1.26)$$

De (1.23) e (1.25), vem

$$N^0 \equiv n = n + \Delta N^0 \quad \text{daí} \quad \Delta N^0 = 0 \quad (1.27)$$

Como estamos adotando a velocidade do fluxo de partículas, então no

sistema comovente, temos:

$$N^i \equiv 0 \quad (1.28)$$

ou seja, não há fluxo de partículas neste sistema.

Daí, em (1.23), temos

$$N^i \equiv 0 = 0 + \Delta N^i, \text{ então } \Delta N^i = 0 \quad (1.29)$$

A restrição (1.26) pode ser reescrita em qualquer referencial de Lorentz, sendo dada por:

$$\Delta T^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = 0 \quad (1.30)$$

Das expressões (1.27) e (1.29) notamos que todas as componentes de  $\Delta N^\alpha$  anulam-se no sistema comovente, então estas anular-se-ão em qualquer referencial de Lorentz:

$$\Delta N^\alpha = 0 \quad (1.31)$$

Desse modo todo o efeito da dissipação estará contido em  $\Delta T^{\alpha\beta}$ , que será especificado com auxílio da segunda lei da Termodinâmica e da restrição (1.30).

Vamos supor que o fluido encontra-se não muito distante do equilíbrio, e ainda as grandezas termodinâmicas e  $U^\alpha$ , variam muito pouco sobre o caminho médio livre e o tempo livre médio do fluido. Assim o termo  $\Delta T^{\alpha\beta}$  é pequeno e pode ser considerado como uma perturbação em (1.22).

A lei de conservação da energia é dada por

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} U_{\alpha} = \dot{\rho} + (p + \rho) U^{\mu}_{,\mu} + \Delta T^{\alpha\beta}_{,\beta} U_{\alpha} = 0 \quad (1.32)$$

Tendo em vista a já obtida relação (1.16), obtemos, após substituí-la em (1.32), a seguinte expressão:

$$nU^{\alpha} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)_{,\alpha} + p \left(\frac{1}{n}\right)_{,\alpha} \right] + \Delta T^{\alpha\beta}_{,\beta} U_{\alpha} = 0 \quad (1.33)$$

Seguindo os passos da termodinâmica clássica de processos irreversíveis, vamos considerar válida a hipótese do equilíbrio local <sup>(7,8)</sup>. De acordo com esta hipótese, dizemos que localmente, ou seja, em cada parte elementar do sistema, há equilíbrio termodinâmico de modo que a entropia local  $s$  é função das variáveis  $\epsilon$  e  $n$  como no caso de equilíbrio real. Em consequência disso, a temperatura absoluta e a pressão termodinâmica tem suas definições localmente inalteradas para sistemas fora do equilíbrio. É interessante notar que apesar do sistema total apresentar-se fora do equilíbrio, localmente é considerado haver equilíbrio. De um ponto de vista macroscópico, tal hipótese é justificada mais pela validade dos resultados obtidos. Para determinados modelos microscópicos pode ser mostrado que a hipótese do equilíbrio local é válida somente em situações não "muito distante" do estado de equilíbrio <sup>(17)</sup>. De um modo geral, os processos estudados com esta hipótese estão em regime quasi-estacionário.

A equação fundamental (1.13) é mantida, bem como as equações de estado (1.14) e a equação de Gibbs (1.15) ou (1.18). Devido a hipótese do equilíbrio local, a eq. (1.33) pode ser colocada na seguinte forma:

$$n s_{,\alpha} U^{\alpha} T + \Delta T^{\alpha\beta}_{,\alpha} U_{\alpha} = 0$$

ou

$$n s_{,\alpha} U^\alpha = - \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_\alpha \quad (1.34)$$

Utilizando de conservação do número de partículas (1.9), podemos escrever

$$(n s U^\alpha)_{,\alpha} = - \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_\alpha \quad (1.34')$$

Partindo dessa expressão, definimos  $S^\alpha$  o quadri-vetor fluxo de entropia como sendo:

$$S^\alpha \equiv n s U^\alpha + \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_\beta \quad (1.35)$$

A componente temporal de  $S^\alpha$ ,  $U_\alpha S^\alpha$  é a densidade de entropia do elemento do fluido considerado. A projeção de  $S^\alpha$  no tri-espaço ortogonal a  $U^\alpha$ ,  $h^\mu_\alpha S^\alpha = h^\mu_\alpha \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_\beta$  são as componentes espaciais de  $S^\alpha$ . Essas componentes espaciais formam o tri-vetor fluxo de entropia,  $I_S^\mu$ . Daí podemos escrever:

$$I_S^\mu \equiv h^\mu_\alpha \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_\beta \quad (1.36)$$

Do ponto de vista macroscópico, a todo sistema é associado uma função  $S$  denominada entropia que contém toda a informação termodinâmica do sistema. A variação da entropia de um sistema,  $dS$ , pode ser escrita como:

$$dS = d_i S + d_e S \quad (1.37)$$

onde  $d_i S$  é a produção de entropia devido a processos que ocorrem dentro do sistema e  $d_e S$  é fluxo de entropia proveniente das vizinhanças do sistema. A segunda Lei da Termodinâmica estabelece que a produção de entropia  $d_i S$  nunca é negativa, ou seja,

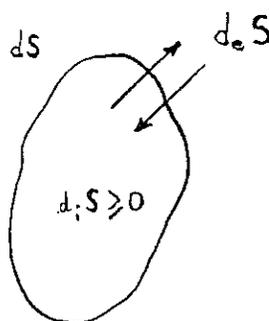
$$d_i S \geq 0 \quad (1.38)$$

se  $d_i S = 0$  o processo é dito reversível;

$d_i S > 0$  o processo é dito irreversível.

Podemos ainda classificar os sistemas termodinâmicos como isolados, fechados e abertos.<sup>(18)</sup> Sistemas isolados serão definidos como aqueles que não trocam energia e nem partículas com sua vizinhança. Sistemas fechados são aqueles onde só é permitida a troca de energia enquanto que os sistemas abertos trocam energia e partículas com sua vizinhança.

A equação de balanço de entropia pode ser localmente explicitada a partir do quadri-vetor fluxo de entropia definido em (1.35). Para isso, vamos tomar a divergência de  $nsU^\mu$



The diagram shows an irregular closed shape representing a system boundary. Two arrows originate from the boundary: one pointing outwards labeled  $d_e S$  and one pointing inwards labeled  $d_i S$ . Inside the shape, the text  $d_i S \geq 0$  is written. To the right of the diagram is the equation (1.39):

$$(nsU^\mu)_{,\mu} = nU^\mu s_{,\mu} = n\dot{s} \quad (1.39)$$

fig. 1.2.1 Variação da entropia  $S$  de um sistema

devido a conservação do número de partículas. A equação (1.39) pode ainda ser escrita como:

$$n\dot{s} = -(S^\mu - nsU^\mu)_{,\mu} + S^\mu_{,\mu} \quad (1.39')$$

ou seja, somamos e subtraímos por uma mesma quantidade.

De acordo com a definição de  $I^\mu_s$ , o tri-vetor fluxo de entropia, (1.39') é colocado na seguinte forma:

$$n\dot{s} = - I^\mu_{s,\mu} + S^\mu_{,\mu} \quad (1.40)$$

Definindo a produção de entropia  $\sigma$  por:

$$\sigma \equiv S^\mu_{,\mu} \quad (1.41)$$

vem que:

$$n\dot{s} = -I^\mu_{s,\mu} + \sigma \quad \text{ou}$$

$$\sigma = n\dot{s} + I^\mu_{s,\mu} > 0 \quad (1.42)$$

onde o primeiro termo de (1.42) é a variação de entropia do elemento de volume, enquanto o segundo representa a contribuição do fluxo de entropia, que por sua vez pode ser positivo ou negativo.

Passamos agora à efetiva procura de uma expressão mais geral possível para  $\Delta T^{\alpha\beta}$ , uma vez que estabelecemos a segunda Lei da Termodinâmica. Na definição de  $S^\alpha$ , dada por (1.35), a produção de entropia  $\sigma$  é escrita como:

$$S^\alpha_{,\alpha} = \sigma = - \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T}{}_{,\beta} U_\alpha + \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T}{}_{,\beta} U_\alpha + \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_{(\alpha,\beta)} - \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T^2} U_{(\alpha} T_{,\beta)}$$

ou

$$\sigma = \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} U_{(\beta,\alpha)} - \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T^2} U_{(\alpha, \beta)} \quad (1.43)$$

Podemos decompor  $U_{(\alpha,\beta)}$  nas suas partes espaciais, temporais e mistas. Temos então:

$$U_{(\alpha,\beta)} = (U_{\mu,\nu} U^\mu U^\nu) U_{(\alpha\beta)} + U_{\mu,\nu} h^\mu_{(\alpha} h^\nu_{\beta)} + U_{\mu,\sigma} h^\mu_{(\alpha} U_{\beta)} U^\sigma + U_{\sigma,\mu} h^\mu_{(\beta} U_{\alpha)} U^\sigma$$

sendo  $h^\mu_{\alpha} = \delta^\mu_{\alpha} - U^\mu U_{\alpha}$  o tensor de projeção no espaço perpendicular a  $U^\alpha$ . Desenvolvendo os termos acima, temos:

$$U_{(\alpha,\beta)} = h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\nu U_{\mu,\nu} + \dot{U}_{(\alpha} U_{\beta)} \quad (1.44)$$

O primeiro termo de (1.44) pode ser decomposto em suas partes irreduzíveis, como abaixo explicitamos

$$h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\nu U_{\mu,\nu} = h_{\alpha}{}^\mu h_{\beta}{}^\nu U_{(\mu,\nu)} = \frac{h_{\alpha}{}^\mu h_{\beta}{}^\nu}{2} (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\lambda}{}_{,\lambda}) + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} U^{\lambda}{}_{,\lambda} \quad (1.45)$$

onde

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{h_{\alpha}{}^\mu h_{\beta}{}^\nu}{2} (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\lambda}{}_{,\lambda})$$

O tensor  $\sigma_{\alpha\beta}$  que acabamos de definir é o parâmetro cinemático conhecido como tensor de cisalhamento.

Voltando a (1.43) e levando-se em conta os resultados (1.44) e (1.45), obtemos

$$\sigma = \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} \left[ \frac{h_\alpha^\mu h_\beta^\nu}{2} (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\lambda,\lambda}) + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} U^{\lambda,\lambda} \right] - \frac{\Delta T^{\alpha\beta} U_\beta}{T^2} (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha)$$

Vimos que  $\Delta T^{\alpha\beta}$  e  $\Delta T^{\alpha\beta} u_\beta$  são objetos perpendiculares ao campo de velocidades  $v^\mu$ . Então, podemos escrever:

$$\sigma = \frac{\Delta T^{\rho\tau}}{T} h_\rho^\alpha h_\tau^\beta \left[ \frac{h_\alpha^\mu h_\beta^\nu}{2} (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\lambda,\lambda}) + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} U^{\lambda,\lambda} \right] - \frac{\Delta T^{\mu\beta}}{T^2} h_\mu^\alpha (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) U_\beta \quad (1.46)$$

De acordo com a segunda Lei da Termodinâmica, a produção de entropia é sempre positiva para todas as configurações do fluido. Para que tal lei se verifique, impomos as seguintes relações:

$$\Delta T^{\mu\beta} U_\beta h_\mu^\alpha = X h^{\alpha\mu} (T_{,\mu} - T \dot{U}_\mu) \quad (1.47)$$

$$\Delta T^{\rho\tau} h_\rho^\alpha h_\tau^\beta = \eta h^{\alpha\lambda} h^{\beta\gamma} (U_{\lambda,\gamma} + U_{\gamma,\lambda} - \frac{2}{3} h_{\lambda\gamma} U^{\nu,\nu}) + \zeta h^{\alpha\beta} U^{\nu,\nu} \quad (1.48)$$

onde  $X > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\zeta > 0$ . Substituindo (1.47) e (1.48) em (1.46), obtemos

$$\sigma = \frac{1}{T} \left[ (\eta h^{\alpha\lambda} h^{\beta\gamma} (U_{\lambda,\gamma} + U_{\gamma,\lambda} - \frac{2}{3} h_{\lambda\gamma} U^{\tau,\tau}) + \zeta h^{\alpha\beta} U^{\tau,\tau}) \left[ \frac{h_\alpha^\mu h_\beta^\nu}{2} (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\tau,\tau}) + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} U^{\tau,\tau} \right] - \frac{X h^{\alpha\mu}}{T^2} (T_{,\mu} - T \dot{U}_\mu) (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) \right] \quad (1.49)$$

Desenvolvendo o primeiro termo do segundo membro da equação (1.49) obtemos facilmente a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{\eta}{2T} h^{\lambda\mu} h^{\gamma\nu} (U_{\gamma\lambda} + U_{\lambda\gamma} - \frac{2}{3} h_{\lambda\gamma} u^{\tau}_{,\tau}) (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} U^{\tau}_{,\tau}) + \\ & + \frac{\zeta}{T} (U^{\tau}_{,\tau})^2 - \frac{\chi h^{\alpha\mu}}{T^2} (T_{,\mu} - T \dot{U}_{\mu}) (T_{,\alpha} - T \dot{U}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Comparando (1.50) com sua análoga não relativista <sup>(1)</sup>, notamos que, a menos de um termo de correção relativista  $T \dot{U}_{\alpha}$ , elas são idênticas. Consequentemente somos levados a identificar  $\eta, \zeta$  e  $\chi$  como sendo os coeficientes de viscosidade de distorção, de viscosidade volumar e de condução de calor, respectivamente. Ainda com essa analogia em mente, definamos o vetor fluxo de calor  $q^{\mu}$  e o tensor de distorções  $\pi^{\mu\nu}$  por

$$q^{\mu} \equiv h^{\mu\alpha} \Delta T^{\mu\nu} U_{\nu} = \chi h^{\alpha\mu} (T_{,\mu} - T \dot{U}_{\mu}) \quad (1.51)$$

$$\pi^{\mu\nu} \equiv \Delta T^{\alpha\beta} h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} - \zeta h^{\mu\nu} u^{\alpha}_{,\alpha} = \eta h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} U^{\lambda}_{,\lambda}) \quad (1.52)$$

Considerando as definições estabelecidas acima, a eq. (1.50) é escrita da seguinte maneira:

$$\sigma = \frac{\pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}}{2T\eta} + \frac{\zeta (U^{\tau}_{,\tau})^2}{T} - \frac{q^{\mu} q_{\mu}}{\chi T^2} \quad (1.53)$$

Com a positividade dos coeficiente  $\zeta, \chi$  e  $\eta$  e tendo-se em vista que o vetor  $q^{\mu}$  é do tipo espaço, e portanto  $q^{\mu} q_{\mu} < 0$ , a produção de entropia é sempre positiva para todas as configurações do fluido.

Finalmente podemos explicitar o tensor  $\Delta T^{\alpha\beta}$ . Para tal fazemos sua decomposição em partes espaciais e mistas:

$$\Delta T^{\alpha\beta} = \Delta T^{\mu\nu} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} + \Delta T^{\rho\sigma} U_{\rho} h_{\sigma}^{\beta} U^{\alpha} + \Delta T^{\sigma\rho} U_{\rho} h_{\sigma}^{\alpha} U^{\beta}$$

Das definições (1.51) e (1.52), temos:

$$\Delta T^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta} + \zeta h^{\alpha\beta} U^{\tau}{}_{,\tau} + q^{\alpha} U^{\beta} + q^{\beta} U^{\alpha} \quad (1.54)$$

Desse modo, o tensor momento energia para fluidos imperfeitos é dado por:

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha} U^{\beta} - (p - \zeta U^{\mu}{}_{,\mu}) h^{\alpha\beta} + q^{\alpha} U^{\beta} + q^{\beta} U^{\alpha} + \pi^{\alpha\beta} \quad (1.55)$$

Finalmente, o quadri-vetor fluxo de entropia é dado por:

$$S^{\alpha} = nsU^{\alpha} + \frac{\Delta T^{\alpha\beta} U_{\beta}}{T} \quad \text{ou} \quad S^{\alpha} = nsU^{\alpha} + \frac{q^{\alpha}}{T} \quad (1.56)$$

Cabe aqui ressaltar que  $\pi^{\alpha\beta}$  e  $q^{\alpha}$  são objetos definidos no espaço perpendicular a  $U^{\alpha}$ .

Com (1.55) a lei de conservação de energia (1.32) (primeira Lei da Termodinâmica) é reescrita como:

$$\dot{\rho} + (p+\rho)U^{\mu}{}_{,\mu} + \dot{q}^{\alpha} U_{\alpha} + q^{\alpha}{}_{,\alpha} + (\pi^{\alpha\beta} + \zeta U^{\mu}{}_{,\mu} h^{\alpha\beta}){}_{,\beta} U_{\alpha} = 0 \quad (1.57)$$

A lei de conservação do momento dada por (1.12) é escrita, para o tensor momento-energia (1.55), por:

$$\begin{aligned}
 (\rho + p)\dot{U}_\mu - p_{, \nu} h^\nu_\mu + \dot{q}_\mu + U_\mu \dot{q}^\nu U_\nu + q_\mu U^\nu_{, \nu} + q^\nu U_{\mu, \nu} + \\
 + (\pi^{\alpha\beta} + \zeta h^{\alpha\beta})_{, \beta} h_{\alpha\mu} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.58}$$

Assim a descrição de fluidos fora do equilíbrio termodinâmico fica estabelecido com o conhecimento completo de grandezas do equilíbrio,  $\rho$ ,  $v$  (ou  $n$ ) e  $U^\mu$ . As equações de estado são as mesmas definidas nas situações de equilíbrio e as grandezas de dissipação  $q^\mu$ ,  $\pi^{\mu\nu}$  e juntamente com  $\pi$ , que denominaremos de pressão devido a viscosidade volumar, são dadas como funções daqueles parâmetros do equilíbrio, tais como gradientes de velocidade e temperatura.

Para finalizar, não podemos esquecer de ressaltar a presença de modificações nas eqs. fenomenológicas para as componentes do fluxo de calor. A expressão (1.51) é uma generalização da lei de Fourier para o fluxo de calor. Além da contribuição devido gradiente de temperatura relativista  $h^{\mu\nu} T_{, \nu}$ , há o termo  $-T \dot{U}_\mu$ , que não possui análogo clássico e vai representar um fluxo isotérmico de calor na matéria acelerada, na direção oposta a aceleração<sup>(4)</sup>. Esse termo é pequeno e pode ser explicado devido a inércia da energia.

### 1.3 - Fluidos Imperfeitos - Termodinâmica Estendida

#### 1.3.1 - Introdução

Uma das principais dificuldades oriundas das teorias termodinâmicas relativista e clássica convencionais (i.e., com hipótese do equilíbrio local) <sup>(1,4,7,8,17)</sup> para processos irreversíveis, encontra-se no caráter parabólico das equações diferenciais que regem a evolução de sinais térmicos e viscosos. Conseqüentemente há a propagação de tais sinais com velocidade infinita. Do ponto de vista clássico isso já é um fato estranho, pois esperar-se-ia que os sinais dissipativos se propagassem com uma velocidade comparável à velocidade média dos elementos do meio. Em relatividade esse fato é paradoxal, visto que nenhuma informação pode propagar-se com velocidade maior que a da luz no vácuo. Além do mais, se tal sinal existisse haveria problemas de causalidade.

Para mostrar um exemplo concreto das dificuldades apontadas acima, vamos considerar um condutor de calor rígido. Sua única variável termodinâmica é  $U$ , a energia interna. Sendo  $S$  a entropia do condutor, então a equação fundamental é dada por

$$S = S(U) \quad (1.59)$$

Considerando a hipótese do equilíbrio local, a equação fundamental é válida em cada parte elementar do sistema (macroscopicamente pequeno mas microscopicamente grande). Isso nos permite escrever:

$$s = s(u) \quad (1.59')$$

sendo  $s$  e  $u$  a entropia e a energia interna específicas, respectivamente. A equação de conservação de energia nos fornecerá a

equação de evolução de  $u$ , e é dada por:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (1.60)$$

Nesta expressão  $\rho$  é a densidade de massa e  $\vec{q}$  o fluxo de calor. Além da equação de conservação de massa, é necessário mais uma relação envolvendo o fluxo de calor. Tal relação, conhecida como lei de Fourier, é obtida fenomenologicamente das teorias termodinâmicas convencionais, e se escreve como:

$$\vec{q} = - X \vec{\nabla} T \quad (1.61)$$

Substituindo (1.61) em (1.60) vem:

$$-XV^2T - (\vec{\nabla}X) \cdot (\vec{\nabla}T) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.62)$$

No entanto, sabendo que  $u = u(T)$ , podemos escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.63)$$

onde  $C_v$  é o coeficiente de calor específico. Se considerarmos  $X$  constante por simplicidade e o resultado expresso pela eq.(1.63), a eq. (1.62) pode ser reescrita como:

$$XV^2T - C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.64)$$

A eq. (1.64) é uma equação diferencial parabólica. Consequentemente a propagação de perturbações ou sinais térmicos se fará com velocidade infinita. Isso significa que a transferência

irreversível de energia entre pontos onde haja gradiente de temperatura se faz de maneira instantânea. De modo análogo, se considerarmos a viscosidade de cisalhamento, teremos que a transferência irreversível de momentum entre partes do fluido que apresentam gradientes de velocidade ocorre instantaneamente.

A solução de tais problemas tem despertado a atenção de muitos pesquisadores, e várias tentativas tem sido feitas com esse objetivo. Como exemplo podemos citar a introdução de termos "ad hoc" nas equações fenomenológicas. Nos processos de condução de calor, Cattaneo (1958) propôs uma generalização da lei de Fourier\*. A novidade foi a introdução de um termo relacionado com o tempo de relaxação, resultando na seguinte equação:

$$\tau \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -X \nabla T \quad (1.65)$$

onde  $\tau$  é o tempo de relaxação envolvido no processo de condutividade térmica. A eq. (1.65) garante a propagação finita das perturbações térmicas pois, se considerarmos as eqs. (1.60), (1.63), obteremos

$$\frac{\tau \cdot \rho C_v}{X} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{C_v}{X} \frac{\partial T}{\partial t} (\rho + \tau \dot{\rho}) = \nabla^2 T \quad (1.66)$$

Nesta expressão  $\tau$ ,  $C_v$  e  $X$  foram considerados constantes. A eq. (1.66) é do tipo hiperbólico, e de acordo com a teoria desse tipo de equação diferencial, perturbações em  $T$  não poderão propagar-se

---

\* Na verdade Maxwell foi o primeiro a levantar questões acerca da lei de Fourier e da propagação de sinais térmicos com velocidade infinita. A eq. (1.65) é conhecida como eq. de Maxwell-Cattaneo.



com velocidade superior a  $V_T$ , dada por:

$$V_T = \left( \frac{\chi}{\tau \rho C_V} \right)^{1/2} \quad (1.67)$$

A grande dificuldade que apareceu com o estabelecimento da eq. (1.65) refere-se à produção de entropia. Esta fica sendo dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} = (\chi \vec{\nabla} T + \tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}) \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T^2} = \\ &= \frac{\chi (\vec{\nabla} T)^2}{T^2} + \frac{\chi \tau}{T^2} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} T \end{aligned} \quad (1.68)$$

Dessa expressão, a produção de entropia pode ser não positiva quando  $\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} T < 0$ .

Ainda na tentativa de solucionar as dificuldades anteriormente citadas, temos, além das teorias termodinâmicas com variáveis ocultas<sup>(11,12)</sup> e das teorias livres de entropia<sup>(13,14)</sup> (as quais a penas citamos), as teorias termodinâmicas estendidas. A principal característica dessas teorias é a existência de uma entropia de não-equilíbrio que é dependente tanto das variáveis dissipativas (fluxos dissipativos) quanto das variáveis termodinâmicas do equilíbrio. Estabeleceu-se uma equação de Gibbs generalizada tendo como consequência a não validade da hipótese do equilíbrio local.

Seguindo esta linha, Müller (1967) desenvolveu uma teoria termodinâmica não estacionária onde a entropia da eq. local s foram adicionados termos envolvendo as variáveis dissipativas. Ao vetor fluxo de entropia são adicionados termos não lineares nas variáveis dissipativas. Restringindo-se a estados não muito afastados do equilíbrio e juntamente com a segunda Lei da Termodinâmica foi possível a determinação de novas equações fenomenológicas lineares

res. Essas equações são hiperbólicas, garantindo a velocidade finita de propagação de sinais térmicos e viscosos.

Israel (1976), sem o prévio conhecimento do trabalho de Müller, formulou o que pode ser considerado como a extensão relativista da teoria de Müller. Sendo a teoria de Israel puramente fenomenológica, Israel e Stewart (1979) mostraram a sustentação dessa última na teoria cinética.

Por outro lado, Lebon et al (1980) e Jou et al (1979) tem formulado teorias termodinâmicas não relativistas algo diferente da teoria de Müller-Israel. Eles definem explicitamente uma entropia local de não equilíbrio que é uma função tanto das variáveis de dissipação e daquelas do equilíbrio. Consequentemente há o estabelecimento de uma equação de Gibbs generalizada bem como novas equações de estado. O vetor fluxo de entropia é também modificado. Além do termo proporcional ao fluxo de calor são adicionados termos não lineares nos fluxos dissipativos representando acoplamento do fluxo de calor com a viscosidade. Nesta formulação, o estado do sistema num dado instante será conhecido se forem especificados os valores das variáveis termodinâmicas do equilíbrio e as de dissipação no dado instante. Com isso essas últimas tem o mesmo status das variáveis do equilíbrio correspondendo a um aumento dos graus de liberdade dinâmicos do sistema. As equações fenomenológicas para as variáveis dissipativas são entendidas como equações de evolução para as variáveis dissipativas.

A extensão relativista da teoria citada acima deve-se a D. Pavon et al (1982). Esta será formulada mais adiante com mais detalhes.

1.3.2 - Termodinâmica Estendida - Versão Relativista

Um fluido que esteja sob processos de fricção interna e fluxos de calor, é caracterizado pelo seguinte tensor momento energia

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - (p + \pi) h^{\mu\nu} + q^\mu U^\nu + q^\nu U^\mu + \pi^{\mu\nu} \quad (1.69)$$

sendo  $\pi$  a pressão devido à viscosidade volumar,\*  $\pi^{\mu\nu}$  é a pressão anisotrópica e  $q^\mu$  o fluxo de calor.

A dinâmica do sistema está contida basicamente em suas leis de conservação. As leis de conservação de energia e do momento (eq. 1.10 e 1.11), quando consideramos  $T^{\mu\nu}$  dado em (1.69), resultam nas seguintes equações:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} U_\mu = \dot{\rho} + (\rho+p) U^\mu_{,\mu} - q^\mu \dot{U}_\mu + q^\mu_{,\mu} + \pi U^\mu_{,\mu} - \pi^{\mu\nu} U_{(\mu,\nu)} = 0 \quad (1.70)$$

mas de acordo com (1.17), vem:

$$n(\dot{\epsilon} + p\dot{v}) - q^\mu \dot{U}_\mu + q^\mu_{,\mu} + \pi U^\mu_{,\mu} - \pi^{\mu\nu} U_{(\mu,\nu)} = 0 \quad (1.70')$$

e, ainda temos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{,\nu} h_\mu^\alpha &= (\rho + p) \dot{U}^\alpha - p_{,\nu} h^{\nu\alpha} + \dot{q}^\alpha + U^\alpha q^\mu \dot{U}_\mu + q^\alpha U^\mu_{,\mu} + \\ &+ q^\mu U^\alpha_{,\mu} - (\pi h^{\mu\nu})_{,\nu} h_\mu^\alpha + \pi^{\mu\nu}_{,\nu} h_\mu^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

---

\* na seção anterior havíamos estabelecido que:

$$\pi = - \zeta U^\mu_{,\mu}$$

sendo  $\zeta$  o coeficiente de viscosidade volumar.

Adicionalmente estabelecemos a lei de conservação do número de partículas a partir da definição do quadri-vetor fluxo de partículas (eq. 1.8 e 1.9). Reproduzindo esta lei de conservação, temos

$$N^{\mu}_{,\mu} = \dot{n} + nU^{\mu}_{,\mu} = 0 \quad (1.72)$$

Com o intuito de obtermos uma completa descrição do fluido, levamos em conta as suas propriedades termodinâmicas. Para isso, incluímos a equação fundamental (1.13), e, em consequência, as equações de estado (1.14). Como vimos ainda, as variáveis dissipativas (ou fluxos dissipativos) são escritas em função dos gradientes do campo de velocidades e da temperatura (eqs. 1.51 e 1.52).

Na termodinâmica estendida o quadro muda consideravelmente. O estado do sistema num dado instante é especificado se conhecermos os valores de  $q^{\mu}$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\mu\nu}$  além de  $\rho$ ,  $v$  e  $U^{\alpha}$  neste instante. Como ressaltamos anteriormente, as variáveis de dissipação são quantidades independentes tal qual são as variáveis do equilíbrio. Desse modo, há a necessidade de equações de evolução para as variáveis de dissipação a fim de que obtenhamos a descrição completa do sistema.

Seguindo os passos da termodinâmica estendida (19,20,21), vamos definir uma entropia por partícula de não equilíbrio  $s$ , que será escrita como função das variáveis do equilíbrio e das variáveis dissipativas.

$$s = s(\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^{\mu}) \quad (1.73)$$

Com essa função, são estabelecidas as seguintes equações de estado.

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \right|' = \frac{1}{T} \quad ; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|' = \frac{p}{T} \quad ; \quad (1.74)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \pi} \right|' = \frac{\alpha_2 \pi}{nT} \quad ; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial q^\mu} \right|' = \frac{\alpha_1 q^\mu}{nT} \quad ; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial \pi^{\mu\nu}} \right|' = \frac{\alpha_3 \pi^{\mu\nu}}{nT} \quad . \quad (1.75)$$

onde o traço nas derivadas parciais indica que as demais variáveis são tomadas constantes. Os parâmetros  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) podem depender das variáveis do equilíbrio  $\epsilon$  e  $v$ . Devemos ressaltar que cada derivada parcial vai, em geral, depender de  $\epsilon$ ,  $v$ ,  $q^\mu$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\mu\nu}$ . As relações (1.74) são conhecidas da termodinâmica do equilíbrio como definições da pressão termodinâmica e da temperatura absoluta. No entanto, essas equações definem grandezas análogas para situações fora do equilíbrio. Então, podemos escrever

$$T = T (\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^\mu) \quad (1.76)$$

$$e \quad p = p (\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^\mu) \quad (1.77)$$

Para especificar o sentido físico dessas funções, fazemos uma expansão das mesmas numa série de potências em torno de seus valores definidos no equilíbrio local. Podemos então escrever, para  $T$ , por exemplo:

$$T (\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^\mu) = T_0 (\epsilon, v) + \left( \frac{\partial T}{\partial \pi} \right)_{\text{eq.}} \pi + \\ + \left( \frac{\partial T}{\partial q^\mu} \right)_{\text{eq.}} q^\mu + \left( \frac{\partial T}{\partial \pi^{\mu\nu}} \right)_{\text{eq.}} \pi^{\mu\nu} + 0 \quad (2) \quad (1.78)$$

onde  $T_0(\epsilon, v)$  é a temperatura definida no equilíbrio local e as derivadas parciais são calculadas no equilíbrio. Pode ser mostrado (vide apêndice 3) que os termos em primeira ordem na expansão são nulos, pois

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \pi}\right)_{\text{eq.}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q^\mu}\right)_{\text{eq.}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \pi^{\mu\nu}}\right) = 0 \quad (1.79)$$

Uma expansão análoga pode ser realizada para a pressão termodinâmica dada em (1.77).

Finalmente as relações (1.75) são equações de estado adicionais que se anulam identicamente no equilíbrio.

A eq. de evolução de  $s$  ao longo das linhas de universo dos elementos do fluido é dada por

$$\dot{s} = s_{,\mu} U^\mu = \left( \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \epsilon_{,\mu} + \frac{\partial s}{\partial v} v_{,\mu} + \frac{\partial s}{\partial \pi} \pi_{,\mu} + \frac{\partial s}{\partial q^\alpha} q^\alpha_{,\mu} + \frac{\partial s}{\partial \pi^{\alpha\beta}} \pi^{\alpha\beta}_{,\mu} \right) U^\mu$$

Tendo em vista as relações (1.74) e (1.75), podemos escrever a eq. acima do seguinte modo:

$$T \dot{s} = \dot{\epsilon} + p \dot{v} + \alpha_1 v q^\alpha \dot{q}_\alpha + \alpha_2 v \pi \dot{\pi} + \alpha_3 v \pi^{\alpha\beta} \dot{\pi}_{\alpha\beta} \quad (1.80)$$

A eq. (1.80) é uma generalização da equação de Gibbs numa versão covariante. Nela podemos notar a presença de termos em segunda ordem nos fluxos dissipativos.

Além da entropia de não equilíbrio, vamos estabelecer o vetor fluxo de entropia  $I_S^\mu$  de não equilíbrio que vai depender das variáveis dissipativas além daquelas do equilíbrio, ou seja:

$$I_S^\mu = I_S^\mu(\epsilon, v, \pi^{\mu\nu}, \pi, q^\mu) \quad (1.81)$$

Explicitamente, levando-se em conta termos em segunda ordem, essa expressão é

$$I_s^\mu = \beta_1 q^\mu + \beta_2 \pi q^\mu + \beta_3 \pi^{\mu\nu} q_\nu \quad (1.82)$$

onde os coeficientes  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), são, em geral, função das variáveis do equilíbrio:  $\beta_i = \beta_i(\epsilon, v)$ . Sendo o primeiro termo em 1ª ordem relativamente ao fluxo de calor, o coeficiente  $\beta_1$  pode ser identificado com  $T^{-1}$ , ou:

$$\beta_1 = \frac{1}{T} \quad (1.83)$$

Tal identificação surge de maneira natural se levarmos em conta a eq. (1.56), estabelecida na seção anterior.

Passemos ao cálculo da produção de entropia, que juntamente com a segunda lei da Termodinâmica, poderemos determinar as equações fenomenológicas para  $q^\mu$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\mu\nu}$ . Havíamos estabelecido, na seção 1.2, a lei de balanço para a entropia, dada por:

$$\sigma = n\dot{s} + I_{s,\mu}^\mu \quad (1.84)$$

onde  $\sigma$  é a densidade de produção de entropia,  $n\dot{s}$  refere-se à taxa de variação da densidade de entropia e  $I_{s,\mu}^\mu$  representa a contribuição devido ao fluxo de entropia. Substituindo as equações ... (1.80) e (1.82) em (1.84), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \frac{n}{T} (\dot{\epsilon} + \dot{v}p + \alpha_1 v q^\mu \dot{q}_\mu + \alpha_2 v \pi \dot{\pi} + \alpha_3 v \pi^{\mu\nu} \dot{\pi}_{\mu\nu}) + \frac{1}{T} q^\mu_{,\mu} - \frac{T_{,\mu}}{T^2} q^\mu + \\ & + \beta_{2,\mu} \pi q^\mu + \beta_2 \pi_{,\mu} q^\mu + \beta_2 q^\mu_{,\mu} \pi + \beta_{3,\mu} \pi^{\mu\nu} q_\nu + \beta_3 \pi^{\mu\nu}_{,\mu} q_\nu + \beta_3 \pi^{\mu\nu} q_{\nu,\mu} = \sigma \quad (1.85) \end{aligned}$$

Utilizando a eq. (1.70') essa expressão pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} (q^\mu \dot{U}_\mu - q^\mu_{,\mu} - \pi U^\mu_{,\mu} + \pi^{\mu\nu} U_{(\mu,\nu)} + \alpha_1 q^\mu \dot{q}_\mu + \alpha_2 \pi \dot{\pi} + \alpha_3 \pi^{\mu\nu} \dot{\pi}_{\mu\nu}) + \\
 & + \frac{1}{T} q^\mu_{,\mu} - \frac{T_{,\mu}}{T^2} q^\mu + \beta_{2,\mu} \pi q^\mu (\xi + \xi') + \beta_2 \pi_{,\mu} q^\mu + \beta_2 \pi q^\mu_{,\mu} + \\
 & + \beta_{3,\mu} \pi^\mu_{\nu} q^\nu (\gamma + \gamma') + \beta_3 \pi^\mu_{\nu,\mu} q^\nu + \beta_3 \pi^\mu_{\nu} q^\nu_{,\mu} = \sigma \quad (1.86)
 \end{aligned}$$

Fazendo as simplificações necessárias e reescrevendo (1.86) de modo a evidenciar  $q^\mu$ ,  $\pi^{\mu\nu}$  e  $\pi$ , vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{q^\mu}{T} \left[ - \frac{1}{T} (T_{,\mu} - T \dot{U}_\mu) + \alpha_1 \dot{q}_\mu + T \beta_{2,\mu} \pi \xi + \beta_2 T \pi_{,\mu} + T \beta_{3,\lambda} \pi^\lambda_{\mu} \gamma + \right. \\
 & \left. + T \beta_3 \pi^\lambda_{\mu,\lambda} \right] + \frac{\pi}{T} (- U^\mu_{,\mu} + \alpha_2 \dot{\pi} + T \beta_{2,\mu} q^\mu \xi' + \beta_2 q^\mu_{,\mu} T) + \\
 & + \frac{\pi^{\mu\nu}}{T} (U_{(\mu,\nu)} + \alpha_3 \dot{\pi}_{(\mu\nu)} + T \beta_{3,(\mu} q_{\nu)} \gamma' + T \beta_3 q_{(\nu,\mu)}) = \sigma \quad (1.87)
 \end{aligned}$$

Em (1.86) introduzimos os parâmetros  $\gamma$  e  $\gamma'$ ,  $\xi$  e  $\xi'$  devido a ambiguidade na separação dos termos  $\beta_{2,\mu} \pi q^\mu$  e  $\beta_{1,\mu} \pi^\mu_{\nu} q^\nu$ . As únicas restrições impostas a esses parâmetros são  $\xi + \xi' = 1$  e  $\gamma + \gamma' = 1$ .

Podemos escrever (1.87) de maneira mais compacta:

$$\sigma = \frac{1}{T} (q^\mu |^1 X_\mu|_\perp + \pi^0 X + \pi^{\mu\nu} |^2 X_{\mu\nu}|_\perp) \quad (1.88)$$

Os objetos  ${}^0 X$ ,  $|^1 X_\mu|_\perp$  e  $|^2 X_{\mu\nu}|_\perp$  são definidos por:

$$|{}^1X_\mu|_\perp = h_\mu^\lambda \left[ -\frac{1}{T} (T_{,\lambda} - T \dot{u}_\lambda) + \alpha_1 \dot{q}_\lambda + T\beta_{2,\lambda} \pi\xi + \beta_2 T \pi_{,\lambda} + \gamma T \beta_{3,\nu} \pi^\nu_\lambda + T \beta_3 \pi^\nu_{\lambda,\nu} \right] \quad (1.89a)$$

$${}^0X = -u^\mu_{,\mu} + \alpha_2 \dot{\pi} + T \beta_{2,\mu} q^\mu \xi' + \beta_2 q^\mu_{,\mu} T \quad (1.89b)$$

$$|{}^2X_{\mu\nu}|_\perp = h_\mu^\delta h_\nu^\lambda (u_{(\delta,\lambda)} + \alpha_3 \dot{\pi}_{(\delta\lambda)} + T \beta_{3,(\delta} q_{\lambda)} \gamma' + T \beta_3 q_{(\delta,\lambda)})$$

Está claro que  $|{}^1X_\mu|_\perp$  e  $|{}^2X_{\mu\nu}|_\perp$  são objetos perpendiculares a  $U^\mu$ .

Em termodinâmica clássica irreversível de primeira ordem (com hipótese do equilíbrio local) (7,8,17) a produção de entropia é escrita como uma forma bilinear envolvendo fluxos e forças termodinâmicas, ou seja,

$$\sigma = \sum_i J_i X_i \quad (1.90)$$

sendo respectivamente  $J_i$  e  $X_i$  as componentes cartesianas dos fluxos e das forças termodinâmicas correspondentes<sup>(17)</sup>. É um fato empírico que sob uma grande faixa de condições experimentais, os fluxos são escritos como funções lineares das forças termodinâmicas. Tais relações entre os fluxos e as forças são conhecidas como equações fenomenológicas. Podemos escrever tais equações como:

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad (1.91)$$

e conseqüentemente a produção de entropia fica sendo dada por:

$$\sigma = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k \quad (1.92)$$

Os coeficientes  $L_{ik}$  são calculados de modo que valha a segunda lei da Termodinâmica, ou seja, a produção de entropia deve ser positiva definida, e que obedecem as relações de Onsager<sup>(26)</sup>.

Na verdade, este procedimento para a determinação das equações fenomenológicas é válido somente em situações não muito afastadas do equilíbrio. Aqui desenvolveremos uma relação mais geral entre fluxos e forças de modo a levar em conta termos não lineares nos fluxos dissipativos. Isso vai nos permitir tratar de situações não muito próximas do equilíbrio termodinâmico.

A relação (1.88) é análoga a sua correspondente não relativista dada em (1.90). Na primeira identificamos  $|^0X_\mu|_\perp$ ,  $^0X$  e  $|^2X_{\mu\nu}|_\perp$  como sendo forças termodinâmicas em sua versão relativista e  $\pi^{\mu\nu}$ ,  $\pi$  e  $q^\mu$  os fluxos dissipativos. Por conveniência, vamos expandir as forças em função dos fluxos. Como dissemos no parágrafo anterior esta relação não será linear, pois serão incluídos termos quadráticos nos fluxos dissipativos. Segue então que:

$$|^1X_\mu|_\perp = a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu \quad (1.93a)$$

$$^0X = a_{00} + a_{01} \pi + a_{02} \pi^2 + a_{03} q^\mu q_\mu + a_{04} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} \quad (1.93b)$$

$$|^2X_{\mu\nu}|_\perp = a_{20} h_{\mu\nu} + a_{21} \pi_{\mu\nu} + a_{22} \pi_\mu^\lambda \pi_{\lambda\nu} + a_{23} q_\mu q_\nu \quad (1.93c)$$

onde os coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  podem ser funções das variáveis do equilíbrio. Substituindo as eqs. (1.93) na eq. (1.88) e levando-se em conta a segunda lei da Termodinâmica, algumas restrições aos coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  deverão surgir:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{T} \left[ q^\mu (a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu) + \pi (a_{00} + a_{01} \pi + \right. \\ &+ a_{02} \pi^2 + a_{03} q^\mu q_\mu + a_{04} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}) + \pi^{\mu\nu} (a_{20} h_{\mu\nu} + a_{21} \pi_{\mu\nu} + \\ &+ a_{22} \pi_\mu^\lambda \pi_{\lambda\nu} + a_{23} q_\mu q_\nu) \left. \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[ a_{10} q^\mu q_\mu + (a_{11} + a_{03}) \pi q^\mu q_\mu + (a_{12} + a_{23}) q^\mu q^\nu \pi_{\mu\nu} + \right. \\ &+ a_{00} \pi + a_{01} \pi^2 + a_{03} \pi^3 + a_{04} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} \pi + a_{21} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} + \\ &+ a_{22} \pi^{\mu\nu} \pi_\mu^\lambda \pi_{\lambda\nu} \left. \right] \end{aligned}$$

A fim de que  $\sigma \geq 0$  em todas as configurações do fluido, devemos impor as seguintes relações para os coeficientes  $a_{\alpha\beta}$

$$\left. \begin{aligned} a_{10} \leq 0, \quad a_{21} \geq 0, \quad a_{01} \geq 0 \\ a_{10} + a_{03} = 0 \\ a_{00} = a_{03} = a_{04} = a_{22} = 0 \\ |a_{12} + a_{23}| \leq \frac{1}{2} (a_{10} + a_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

Essas relações decorrem de que  $q^\mu q_\mu$  é sempre negativo,  $\pi^2$  bem como  $\pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}$  são quantidades positivas; os demais termos  $\pi$ ,  $\pi^3$ ,  $\pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} \pi$ ,  $\pi q^\mu q_\nu$  e  $\pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\lambda} \pi^\lambda_\nu$  podem ser negativos. Finalmente, temos ainda que:

$$|\pi^{\mu\nu} q_\mu q_\nu| \leq \frac{1}{2} (|q^\mu q_\mu| + \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}) \quad (1.95)$$

As relações (1.93) reduzem-se a

$$|{}^1X_\mu|_\perp = a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu \quad (1.93a')$$

$${}^0X = a_{01} \pi - a_{11} q^\mu q_\mu \quad (1.93b')$$

$$|{}^2X_{\mu\nu}|_\perp = a_{20} h_{\mu\nu} + a_{21} \pi_{\mu\nu} + a_{23} q_\mu q_\nu \quad (1.93c')$$

As equações fenomenológicas são obtidas igualando-se as equações (1.93') com aquelas correspondentes dadas em (1.89), ou seja:

$$h_\mu{}^\nu \left[ -\frac{1}{T} (T_{,\nu} - T \dot{u}_\nu) + \alpha_1 \dot{q}_\nu + T\beta_{2,\nu} \pi \xi + \beta_2 T \pi_{,\nu} + \gamma T \beta_{3,\lambda} \pi^\lambda{}_\nu + \right. \\ \left. + T\beta_3 \pi^\lambda{}_{\nu,\lambda} \right] = a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu \quad (1.96)$$

$$-U^\mu{}_{,\mu} + \alpha_2 \dot{\pi} + \beta_{2,\mu} q^\mu \xi' T + \beta_2 q^\mu{}_{,\mu} T = a_{01} \pi - a_{11} q^\mu q_\mu \quad (1.97)$$

$$\langle h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta (U_{(\alpha,\beta)} + \alpha_3 \dot{\pi}_{(\alpha\beta)} + T\gamma' \beta_{3,(\alpha\beta)} + \beta_3 T q_{(\alpha,\beta)}) \rangle = a_{21} \pi_{\mu\nu} + a_{23} \langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle \quad (1.98)$$

Na dedução de (1.98),  $a_{20}$  foi considerado nulo visto que  $\dot{\pi}_{\mu\nu}$  não possui traço. O símbolo  $\langle \rangle$  indica que deve ser retirado o traço da expressão em seu interior. Observamos que as equações fenomenológicas obtidas contém derivadas temporais das variáveis de dissipação. Sendo assim, essas equações são de natureza diferente daquelas obtidas anteriormente (eqs.1.51 e 1.52) que estabelecem apê

nas uma relação algébrica entre as variáveis de dissipação e aquelas do equilíbrio. As relações (1.96), (1.97) e (1.98) podem ser interpretadas como equações de evolução para as variáveis  $q^\mu$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\mu\nu}$ , respectivamente. Como já ressaltamos anteriormente, essas variáveis possuem o mesmo status das variáveis do equilíbrio na especificação do estado do sistema.

Voltemos agora às eqs. (1.96), (1.97) e (1.98). Na primeira eq., tomemos a definição do projetor  $h_\mu^\nu$  e o apliquemos ao segundo termo, obtendo assim a seguinte expressão:

$$h_\mu^\nu \alpha_1 \dot{q}_\nu = \alpha_1 (\delta_\mu^\nu - U_\mu U^\nu) \dot{q}_\nu = \alpha_1 \dot{q}_\mu + \alpha_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu$$

Substituindo essa eq. em (1.96), obtemos:

$$\alpha_1 \dot{q}_\mu = -h_\mu^\nu \left[ -\frac{1}{T} (T_{,\nu} - T\dot{U}_\nu) + T\beta_{2,\nu} \pi^\xi + \beta_2 T \pi_{,\nu} + \gamma T\beta_{3,\lambda} \pi^\lambda_{,\nu} + \right. \\ \left. + T\beta_3 \pi^\lambda_{,\nu,\lambda} \right] + a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu - \alpha_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu$$

ou ainda

$$\alpha_1 \dot{q}_\mu = a_{10} q_\mu + a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu + Q_\mu - \alpha_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu \quad (1.96')$$

O termo  $Q_\mu$  é definido por:

$$Q_\mu \equiv -h_\mu^\nu \left[ -\frac{1}{T} (T_{,\nu} - T\dot{U}_\nu) + T\beta_{2,\nu} \pi^\xi + \beta_2 T \pi_{,\nu} + \gamma T\beta_{3,\lambda} \pi^\lambda_{,\nu} + \right. \\ \left. + T\beta_3 \pi^\lambda_{,\nu,\lambda} \right] \quad (1.99)$$

Em (1.99) podemos notar o gradiente relativista de temperatura  $h_{\mu}^{\nu} (\pi_{,\nu} - T \dot{U}_{\nu})$  obtido na seção anterior, e termos adicionais oriundos da generalização do vetor fluxo de entropia (eq. 1.82) e da generalização da equação de Gibbs (eq. 1.80). Devemos ressaltar que  $\alpha_1 \dot{q}_{\mu}$  como mostrado acima, é formado de duas partes distintas: uma paralela a  $U^{\mu}$  dada por  $-\alpha_1 \dot{U}^{\nu} q_{\nu} U_{\mu}$  e outra perpendicular a  $U_{\mu}$ , dada por  $a_{10} q_{\mu} + a_{11} \pi q_{\mu} + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^{\nu} + Q_{\mu}$ . A equação (1.96') é também uma generalização daquela obtida por D. Pavon et al. (1980).

Rearranjando alguns termos da eq. (1.97), obtemos:

$$\alpha_2 \dot{\pi} = a_{01} \pi - a_{11} q^{\mu} q_{\mu} + U^{\mu}_{,\mu} - \beta_{2,\mu} q^{\mu T} \xi - \beta_2 q^{\mu}_{,\mu T} \quad (1.97')$$

Na eq. (1.98) consideremos o segundo termo do primeiro membro:

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \alpha_3 \dot{\pi}_{\alpha\beta} &= \alpha_3 (\delta_{\mu}^{\alpha} - U_{\mu} U^{\alpha}) (\delta_{\nu}^{\beta} - U_{\nu} U^{\beta}) \dot{\pi}_{\alpha\beta} = \\ &= \alpha_3 (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha} U_{\nu} U^{\beta} - \delta_{\nu}^{\beta} U_{\mu} U^{\alpha} + U_{\mu} U^{\alpha} U_{\nu} U^{\beta}) \dot{\pi}_{\alpha\beta} = \\ &= \alpha_3 (\dot{\pi}_{\mu\nu} - \dot{\pi}_{\mu\beta} U_{\nu} U^{\beta} - \dot{\pi}_{\alpha\nu} U_{\mu} U^{\alpha} + \dot{\pi}_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} U_{\mu} U_{\nu}) \end{aligned}$$

No entanto,  $\pi_{\alpha\beta} U^{\alpha} = 0$ , de modo que  $\dot{\pi}_{\alpha\beta} U^{\alpha} = -\pi_{\alpha\beta} \dot{U}^{\alpha}$ , logo:

$$h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \alpha_3 \dot{\pi}_{\alpha\beta} = \alpha_3 (\dot{\pi}_{\mu\nu} - \dot{\pi}_{\mu\beta} U_{\nu} U^{\beta} - \dot{\pi}_{\alpha\nu} U_{\mu} U^{\alpha} - \pi_{\alpha\beta} \dot{U}^{\alpha} U^{\beta} U_{\mu} U_{\nu})$$

ou

$$h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \alpha_3 \dot{\pi}_{\alpha\beta} = \alpha_3 (\dot{\pi}_{\mu\nu} + \pi_{\mu\beta} U_{\nu} \dot{U}^{\beta} + \pi_{\alpha\nu} U_{\mu} \dot{U}^{\alpha}) \quad (1.100)$$

Substituindo (1.100) em (1.98), resulta em:

$$\alpha_3 \dot{\pi}_{\mu\nu} = \langle -h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (U_{(\alpha,\beta)} + T\gamma^\beta{}_\alpha q_\beta + \beta_3 T q_{(\beta,\alpha)}) \rangle + \\ + a_{21} \pi_{\mu\nu} + a_{23} \langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle - \alpha_3 \langle \pi_{\beta(\mu} U_{\nu)} \dot{U}^\beta + \pi_{\alpha(\nu} U_{\mu)} \dot{U}^\alpha \rangle$$

Introduzindo  $Z_{\mu\nu}$  definido por:

$$Z_{\mu\nu} \equiv -h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (U_{\alpha,\beta} + T\gamma^\beta{}_\alpha q_\beta + \beta_3 T q_{\beta,\alpha}) \quad (1.101)$$

temos:

$$\alpha_3 \dot{\pi}_{\mu\nu} = \langle Z_{(\mu\nu)} \rangle + a_{21} \pi_{\mu\nu} + a_{23} \langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle - \\ - \alpha_3 \langle \pi_{\beta(\mu} U_{\nu)} \dot{U}^\beta + \pi_{\alpha(\nu} U_{\mu)} \dot{U}^\alpha \rangle \quad (1.98')$$

Podemos notar na eq. acima termos puramente espaciais e termos mistos. Esses últimos não possuem análogos clássicos significando e feitos relativistas.

Nas eqs. (1.96'), (1.97') e (1.98') notamos a presença de vários coeficientes fenomenológicos tais como  $a_{\alpha\beta}$ ,  $\beta_i$  e  $\alpha_i$ , todos eles podendo depender das variáveis  $\varepsilon$  e  $v$ . Alguns desses coeficientes podem ser identificados com os coeficientes de viscosidade volumar, de condução de calor de viscosidade de cisalhamento além dos tempos de relaxação envolvidos nos processos. Para fazer esta identificação, devemos encontrar o limite clássico das eqs.(1.96'), (1.97') e (1.98') e comparar com aquelas estabelecidas na termodinâmica estendida clássica<sup>(22)</sup>. Iniciamos por considerar  $\pi^{\mu\nu}$  e  $\pi$  nulos na eq. (1.96'):

$$\alpha_1 \dot{q}_\mu = a_{10} q_\mu - \alpha_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu + \frac{h_{\mu\nu}}{T} (T_{,\nu} - T \dot{U}_\nu) \quad (1.102)$$

No referencial local comovente com o fluido, temos:

$$U^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (1.103a)$$

$$e \quad h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - U^\mu U_\nu = \text{diag} (0, 1, 1, 1) \quad (1.103b)$$

Neste referencial, o fluxo de calor  $q^\mu$  é dado por:

$$q^\mu = (0, \vec{q}) \quad (1.103c)$$

A parte temporal da eq. (1.102) reduz-se a uma identidade. Concentremo-nos então na sua parte espacial no limite não relativista.

Como neste limite,  $\dot{U}^i \rightarrow 0$  ( $\dot{U}^0 = 0$ , pois  $\dot{U}^\alpha U_\alpha = 0$ ), de modo que (1.102) se escreve como:

$$- \alpha_1 \dot{\vec{q}} = - a_{10} \vec{q} + \frac{\vec{\nabla} T}{T} \quad (1.104)$$

Devemos nos lembrar que  $\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}$  e  $T_{,\nu} = \frac{\partial T}{\partial X^\nu} = \left( \frac{\partial T}{\partial t}, \vec{\nabla} T \right)$ . Para determinarmos  $\alpha_1$  e  $a_{10}$ , lançaremos mão da equação:

$$\tau_1 \dot{\vec{q}} + \vec{q} = - \chi \vec{\nabla} T \quad (1.105)$$

que é estabelecida na termodinâmica estendida clássica<sup>(22)</sup>. Comparando a eq. (1.104) com a eq. (1.105), obtemos:

$$a_{10} = - \frac{1}{\chi T} \quad (1.106a)$$

$$e \quad \alpha_1 = \frac{\tau_1}{\chi T} \quad (1.106b)$$

Nessas equações  $\chi$  é o coeficiente de condução térmica e  $\tau_1$  é o tempo de relaxação envolvido no processo de condução de calor.

Fazendo  $q^\mu = 0$  na eq. (1.97'), obtemos:

$$\alpha_2 \dot{\pi} = a_{01} \pi + U^\mu_{,\mu} \quad (1.107)$$

No referencial local de repouso,  $U^\mu_{,\mu}$  é dado por:

$$U^\mu_{,\mu} = U^0_{,0} + U^i_{,i} = U^i_{,i} = \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (1.108)$$

Voltando a (1.107), vem:

$$\alpha_2 \dot{\pi} - a_{01} \pi = \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (1.107')$$

Comparando esta última equação com a equação fenomenológica obtida da termodinâmica clássica estendida<sup>(22)</sup>, dada por:

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = - \zeta \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (1.109)$$

podemos concluir que:

$$a_{01} = \frac{1}{\zeta} \quad (1.110a)$$

$$\alpha_2 = - \frac{\tau_0}{\zeta} \quad (1.110b)$$

Nestas relações  $\zeta$  e  $\tau_0$  são os coeficientes de viscosidade volumar e o tempo de relaxação, respectivamente.

Finalmente, fazendo  $q^\mu = 0$  em (1.98'), obtemos

$$\alpha_2 \dot{\pi}_{\mu\nu} = - \langle h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} U_{\alpha,\beta} \rangle + a_{21} \pi_{\mu\nu} - \alpha_3 \langle \pi_{\beta(\mu} U_{\nu)} \dot{U}^{\beta} + \pi_{\alpha(\nu} U_{\mu)} \dot{U}^{\alpha} \rangle \quad (1.111)$$

Novamente se considerarmos o referencial local de repouso, temos as seguintes relações:

$$\alpha_3 \dot{\pi}_{00} = 0 \quad (1.112a)$$

$$e \quad \alpha_3 \dot{\pi}_{0i} = 0 \quad (1.112b)$$

Essas equações implicam que  $\pi_{00}$  e  $\pi_{0i}$  são constantes. Entretanto sabemos que  $\pi_{00} = \pi_{0i} = 0$  devido ao fato de que  $\pi^{\alpha\beta} U_{\beta} = 0$ . A eq. (1.111) fica sendo dada por

$$\alpha_3 \dot{\pi}_{ij} = - \langle h_i^{\alpha} h_j^{\beta} U_{(\alpha,\beta)} \rangle + a_{21} \pi_{ij} \quad (1.113)$$

ou ainda

$$\alpha_3 \dot{\pi}_{ij} - a_{21} \pi_{ij} = - \langle U_{(i,j)} \rangle = - \sigma_{ij} \quad (1.113')$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de cisalhamento. Comparando (1.113') com a eq. obtida na termodinâmica estendida clássica<sup>(22)</sup>, dada por:

$$\tau_2 \dot{\pi}_{ij} + \pi_{ij} = \eta \sigma_{ij} \quad (1.114)$$

obtemos:

$$a_{21} = \frac{1}{\eta} \quad (1.115a)$$

$$\alpha_3 = - \frac{\tau_2}{\eta} \quad (1.115b)$$

Abaixo escrevemos a forma final das equações fenomenológicas levando-se em conta as relações (1.106), (1.110) e (1.115):

$$\tau_1 \dot{q}_\mu + q_\mu = \chi T (a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu + Q_\mu) - \tau_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu \quad (1.116)$$

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = - \zeta U^\mu_{,\mu} + (a_{11} q^\mu q_\mu + \beta_{2,\mu} q^\mu \xi T + \beta_2 q^\mu_{,\mu} T) \quad (1.117)$$

$$\tau_2 \dot{\pi}_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} = - \eta \langle Z_{(\mu\nu)} \rangle - \eta a_{23} \langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle - \tau_2 \langle \pi_{\beta(\mu} U_{\nu)} \dot{U}^\beta + \pi_{\alpha(\nu} U_{\mu)} \dot{U}^\alpha \rangle \quad (1.118)$$

Podemos observar que as equações fenomenológicas (1.116), (1.117) e (1.118) apresentam termos não lineares nas variáveis dissipativas, tais como  $\pi q_\mu$ ,  $\pi_{\mu\nu} q^\nu$ ,  $q^\mu q_\mu$  e  $\langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle$ . Em situações onde o sistema encontra-se afastado do equilíbrio, tais termos tornam-se importantes nas equações fenomenológicas. Não podemos deixar de ressaltar que a propagação de sinais térmicos e viscosos ocorrerá com velocidade finita quando levamos em consideração as eqs. (1.116), (1.117) e (1.118). Os tempos de relaxação  $\tau_i$  podem ser considerados da mesma ordem do tempo médio livre. Sendo assim a velocidade de propagação dos sinais térmicos e viscosos serão comparáveis à velocidade do som no fluido em consideração.

Temos então desenvolvido uma teoria termodinâmica para processos irreversíveis não estacionária e não-linear. A hipótese do equilíbrio local foi deixada de lado. Definimos uma entropia de não equilíbrio e um vetor fluxo de entropia de não equilíbrio. Vimos ainda que as variáveis dissipativas  $q^\mu$ ,  $\pi^{\mu\nu}$  e  $\pi$  estão no mesmo status que as variáveis  $\varepsilon$ ,  $v$  e  $U^\alpha$  na caracterização do estado do fluido. As equações de evolução para essas últimas são as leis de conservação de energia, do número de partículas e do momentum,

respectivamente. Para as variáveis dissipativas, as eqs. de evolução são as equações fenomenológicas (1.116), (1.117) e (1.118). Nesta teoria a temperatura e pressão são quantidades definidas fora do equilíbrio, podendo ser escritas como uma série de potências em torno de seus valores definidos no equilíbrio (vide apêndice B, para maiores detalhes).

#### 1.4 - Termodinâmica e Gravitação

Nas seções anteriores desenvolvemos teorias termodinâmicas de processos reversíveis e irreversíveis em Relatividade Especial. É de grande interesse para estudos futuros, principalmente em Astrofísica e Cosmologia, o estabelecimento das teorias termodinâmicas anteriormente desenvolvidas em Relatividade Geral, bem como a análise de algumas novidades quando a gravitação se faz presente nos processos termodinâmicos. Vamos, então, utilizar o Princípio de Acoplamento Mínimo de modo a incluir o campo gravitacional nos processos físicos em questão. Operacionalmente isso significa que o tensor de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu}$ , será substituído pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$  e as derivadas simples pelas derivadas covariantes em todas as equações desenvolvidas nas seções anteriores. Notamos que a função entropia (eqs. (1.13) e (1.73)) permanecerá inalterada.

Consideremos  $T^{\mu\nu}$  o tensor momento-energia de qualquer sistema material\* no espaço-tempo curvo. A lei de conservação da energia e do momento é dada por:

---

\* Por sistema material entendemos toda distribuição não identificável com qualquer tipo de campo.

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = T^{\mu}_{\nu,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} T^{\mu}_{\lambda} \quad (1.119)$$

ou ainda:

$$(T^{\mu}_{\nu} \sqrt{-g})_{,\mu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\nu} \quad (1.120)$$

De um modo geral, o sistema em questão não pode ser considerado estritamente como um sistema fechado<sup>(51)</sup>. Podemos notar a não conservação da energia e do momento ao meio material. O termo do lado direito da eq. (1.120) vai representar a densidade de força externa atuando sobre o sistema, apesar da possibilidade de sempre anulá-lo um sistema de coordenadas localmente inercial. Sabemos, no entanto, que a termodinâmica vai associar ao sistema em consideração a função entropia  $S$  cuja variação pode ser escrita como:

$$dS = d_i S + d_e S \quad (1.121)$$

onde, como vimos na seção 1.2,  $d_i S$  é a produção de entropia e  $d_e S$  é a contribuição à variação de entropia devido a trocas de entropia com as vizinhanças do sistema. Se o sistema é aberto, pode ocorrer que

$$dS \leq 0 \quad (1.122)$$

i.e., a entropia do sistema pode diminuir ou permanecer constante. Desse modo, para sistemas materiais na presença de campos gravitacionais e em especial o próprio cosmos, essa peculiaridade pode se concretizar.

Na verdade, devemos ressaltar a dificuldade do estabelecimen

de uma teoria termodinâmica para um sistema material contínuo num campo gravitacional que possa englobar este último tal qual é realizada num meio contínuo polarizável no campo eletromagnético. Essencialmente a dificuldade reside na maneira que o campo gravitacional acopla-se com a matéria e pela não definição de um tensor momento-energia para o campo gravitacional. Se tal fosse possível, poderíamos escrever

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(\text{matéria})} + T^{\mu\nu}_{(\text{campo grav.})} \quad (1.123)$$

onde  $T^{\mu\nu}$  seria o tensor momento-energia total do sistema. A entropia do sistema poderia ser escrita como uma função de parâmetros associados ao fluido (energia interna, volume) e elementos do campo gravitacional. Consequentemente a definição de grandezas termodinâmicas como temperatura e pressão levariam consigo a contribuição do campo.

Nos parágrafos seguintes abordaremos algumas modificações que a maneira usual de acoplar o campo gravitacional com a matéria proporciona quando estamos fazendo uma descrição hidrotérmica do sistema.

De início, devemos estabelecer as condições sob as quais um fluido num campo gravitacional esteja em equilíbrio termodinâmico. Basicamente, se o fluido está em equilíbrio termodinâmico, a produção de entropia será sempre nula, ou seja:

$$\sigma = S^{\mu}_{;\mu} = \frac{(S^{\mu} \sqrt{-g})_{;\mu}}{\sqrt{-g}} = 0 \quad (1.124)$$

onde  $S^{\mu}$  é dado por:

$$S^{\mu} = nsU^{\mu} \quad (1.125)$$

sendo  $n$  a densidade do nº de partículas e  $s$  a entropia por partículas, que satisfaz a equação de Gibbs no espaço-tempo curvo:

$$ds = \frac{1}{T} d \left( \frac{\rho}{n} \right) + \frac{p}{T} d \left( \frac{1}{n} \right) \quad (1.126)$$

O campo de velocidade  $U^\mu$  normalizado por  $g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = 1$  pode ser sempre escolhido tal que  $S^\mu$  seja dado pela eq. (1.125), o quadri-vetor fluxo de partículas e o tensor momento-energia sejam escritos por:

$$N^\mu = nU^\mu \quad (1.127)$$

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - p h^{\mu\nu} \quad (1.128)$$

sendo

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu$$

Consideremos agora um fluido perfeito em repouso num campo gravitacional estático cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - g_j dx^i dx^j \quad (1.129)$$

O campo de velocidades é escrito a seguir:

$$U^\alpha = \frac{\delta^\alpha_0}{\sqrt{g_{00}}} \quad (1.130)$$

O tensor momento-energia do fluido é dado pela eq. (1.128) e a equação de conservação do momento estabelece que:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} h_{\alpha\mu} = 0 \quad (1.131)$$

$$\text{ou } (\rho + p) \dot{U}_\mu - h_\mu^\alpha p_{,\alpha} = 0 \quad (1.132)$$

No entanto:

$$\dot{U}_\mu = U_\mu{}^{;\alpha} U_\alpha = (U_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda U_\lambda) \frac{\delta^\alpha_0}{\sqrt{g_{00}}} = -\Gamma_{\mu 0}^\lambda \frac{g_{\lambda 0}}{g_{00}}$$

$$\text{mas } \Gamma_{\mu 0}^\lambda \frac{g_{\lambda 0}}{g_{00}} = \Gamma_{\mu 0}^0 = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \mu = 0 \\ \frac{(\sqrt{g_{00}})_{,i}}{\sqrt{g_{00}}} & , \text{ se } \mu = i \end{cases} \quad (1.133a)$$

$$\frac{(\sqrt{g_{00}})_{,i}}{\sqrt{g_{00}}} & , \text{ se } \mu = i \quad (1.133b)$$

Logo, a aceleração  $\dot{U}_\mu$  fica sendo escrita como:

$$\dot{U}_0 = 0 \quad (1.134a)$$

$$\dot{U}_i = -\frac{(\sqrt{g_{00}})_{,i}}{\sqrt{g_{00}}} \quad (1.134b)$$

Voltando a eq. (1.7), vem:

$$p_{,0} = 0 \quad (1.135a)$$

$$p_{,i} + (\rho + p) \frac{(\sqrt{g_{00}})_{,i}}{\sqrt{g_{00}}} = 0 \quad (1.135b)$$

A eq. (1.135a) expressam a condição de equilíbrio mecânico do fluido no campo gravitacional. Identificando a pressão hidrostática

ca com a pressão termodinâmica, notamos que no equilíbrio o gradiente de pressão é não nulo, ao contrário do resultado já conhecido classicamente.

Como segundo exemplo consideremos novamente um fluido em repouso num campo estático. Verificamos sob que condição há inexistência de fluxo de calor. Sendo assim utilizemos a lei de Fourier relativista:

$$q^\mu = \chi h^{\mu\nu} (T_{,\nu} - T \dot{U}_\nu) \quad (1.136)$$

A aceleração  $\dot{U}_\nu$  é dada pela eq. (1.10), enquanto que o projetor  $h^{\mu\nu}$  é escrito como:

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\delta^\mu_0 \delta^\nu_0}{g_{00}} \quad (1.137)$$

Substituindo (1.134) e (1.137) em (1.136), vem:

$$q^0 = 0 \quad (1.138)$$

$$q^i = \chi h^{i\nu} (T_{,\nu} + T \Gamma^0_{\nu 0}) = \chi h^{ij} \left( T_{,j} + \frac{(\sqrt{g_{00}})_{,j} T}{\sqrt{g_{00}}} \right)$$

ou 
$$q^i = \frac{\chi h^{ij}}{\sqrt{g_{00}}} (T \sqrt{g_{00}})_{,j} \quad (1.139)$$

A inexistência de fluxo de calor está ligada ao fato de  $T \sqrt{g_{00}} = \text{cte}$  e não simplesmente  $T = \text{cte}$  como estabelecido em termodinâmica não relativista. Na verdade o "pacote" de temperatura  $T \sqrt{g_{00}}$  deve ser constante em qualquer parte do fluido. Esse resultado foi obtido primeiramente por Tolman em 1930.

O modelo padrão é caracterizado por um espaço-tempo homogêneo e isotrópico e cujo conteúdo material é representado pelo tensor momento-energia dado pela eq. (1.5). A métrica é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1+kr^2/4)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.140)$$

onde  $k = +1, 0$  e  $-1$  caso a tri-seção tenha curvatura positiva, nula ou negativa, respectivamente, e  $R(t)$  é o raio do universo. De acordo com o critério adotado anteriormente, é facilmente verificado que não há produção de entropia e conseqüentemente cada parte elementar do sistema evolui reversivelmente tanto para o caso de expansão como o de contração do cosmos. Tolman chama atenção para essa característica por se constituir um exemplo concreto de um sistema cujos processos se realizam a uma taxa finita\* e são reversíveis. Esse resultado é uma novidade, pois de acordo com a termodinâmica clássica todo processo que se realiza a uma taxa finita conduz forçosamente a produção de entropia e portanto é irreversível.

Outra interessante consequência da termodinâmica em espaços curvos apontada por Tolman é a possibilidade da evolução de universos homogêneos e isotrópicos fora do equilíbrio se fazer através de ciclos com fases de expansão e compressão. Tais ciclos possuem a amplitude crescente significando que a energia de cada elemento de volume está crescendo. Tolman apontou que as expansões e com

---

\* Os processos que ocorrem a uma taxa finita são aqueles onde há variação não infinitesimal do volume e demais parâmetros termodinâmicos. É bom lembrar ainda que do ponto de vista clássico, um processo é reversível quando se realiza a uma taxa infinitesimalmente lenta. Tais processos são ditos quasi-estáticos.

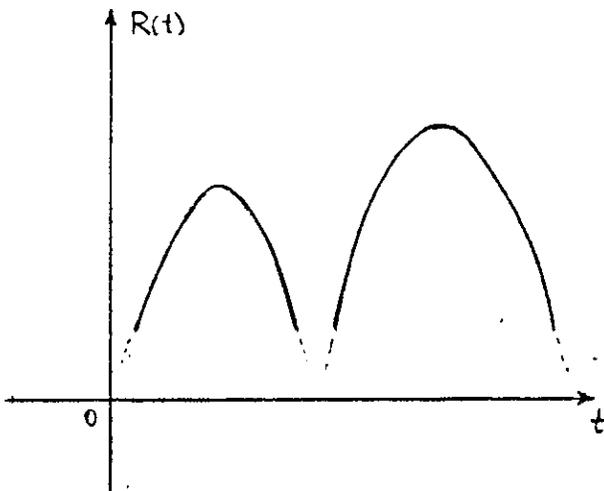


fig. 1.4.1 Oscilações irreversíveis do modelo de Tolman

pressões se faziam as custas da "energia externa proveniente da energia potencial do campo gravitacional associado com a densidade pseudo-tensorial de Einstein  $t^{\mu}_{\nu}$ ". Atualmente os modelos com essa característica são identificados com os modelos cosmológicos com viscosidade volu

mar. Devemos ainda ressaltar que esta situação constitui um exemplo concreto de um sistema sob ação de processos irreversíveis que nunca chega a um estado terminal de entropia máxima.

No desenvolvimento de uma teoria termodinâmica causal estabeleceu-se uma função entropia de não equilíbrio e conseqüentemente uma equação de Gibbs generalizada (vide eq. (1.130)). No espaço-tempo curvo, esta equação é escrita como:

$$T\dot{s} = \dot{\epsilon} + p\dot{v} + \alpha_0 v \pi \dot{\pi} + \alpha_1 v q^{\mu} \dot{q}_{\mu} + \alpha_2 v \pi^{\mu\nu} \dot{\pi}_{\mu\nu} \quad (1.141)$$

No entanto, temos de acordo com o acoplamento mínimo o seguinte:

$$\dot{q}_{\mu} = q_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\beta} U^{\beta} = (q_{\mu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} q_{\nu}) U^{\beta} \quad (1.142)$$

$$\dot{\pi}_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} U^{\beta} = (\pi_{\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} \pi_{\lambda\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \pi_{\mu\lambda}) U^{\beta} \quad (1.143)$$

Substituindo (1.143) e (1.142) em (1.141), vem:

$$T\dot{s}_{,\beta} = \epsilon_{,\beta} + p v_{,\beta} + \alpha_0 v \pi_{,\beta} + \alpha_1 v q^{\mu} q_{\mu,\beta} + \alpha_2 v \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu,\beta} - \alpha_1 v q^{\mu} q_{\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} - \alpha_2 v \pi^{\mu\nu} (\pi_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} + \pi_{\mu\lambda} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}) \quad (1.144)$$

Na eq.(1.144) os efeitos do campo gravitacional estão se fazendo sentir através dos símbolos de Christoffel oriundos do acoplamento entre matéria e gravitação usualmente estabelecido. Entretanto é sempre possível elegermos um sistema de coordenadas no qual os símbolos de Christoffel são nulos e em consequência (1.144) reduz-se aquela expressão dada em espaços planos.

Para finalizar, façamos algumas considerações acerca do quadro montado para uma descrição hidrotermodinâmica do fluido imperfeito no campo gravitacional. Sabemos que a especificação do estado dinâmico local do fluido vai depender do conhecimento de grandezas como  $\epsilon$  e  $v$  que são a energia interna e volume por partícula, respectivamente e do campo de velocidades  $U^\alpha$ . Como vimos, isso é válido quando a descrição é feita com a hipótese do equilíbrio local. Temos então estabelecida equações de evolução para as grandezas  $\epsilon$ ,  $v$  e  $U^\alpha$ , que permitem, a partir de dados iniciais especificados numa hipersuperfície tipo-espaço, a propagação das mesmas para qualquer outra hipersuperfície tipo espaço vizinha no futuro. Vimos também que as variáveis dissipativas eram expressas por relações algébricas com os gradientes de velocidade e temperatura. A equação de evolução da entropia por partícula (eq. de Gibbs) é inalterada. No entanto, cabe ressaltar que o espaço-tempo sendo curvo, o campo de velocidades obedece a seguinte relação:

$$U_{\alpha;\mu\nu} - U_{\alpha\nu;\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} U^\beta \quad (1.145)$$

onde  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  é o tensor de Riemann. Desta relação podemos deduzir as equações de evolução<sup>(50)</sup> dos parâmetros cinemáticos expansão ( $\theta$ ), cizalhamento ( $\sigma_{\mu\nu}$ ) e rotação ( $\omega_{\mu\nu}$ ). Nessas equações de evolução, utilizando as eqs. de Einstein, notamos a presença de ter

mos ligados a distribuição local de matéria (traços do tensor de Riemann) e termos puramente gravitacionais identificados com as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl,  $E^{\mu\nu}$  e  $H^{\mu\nu}$ , respectivamente, e que por sua vez também possuem equações de evolução. Convém lembrar que os dados iniciais definidos nas hipersuperfícies tipo espaço obedecem ainda equações de vínculo<sup>(50)</sup>.

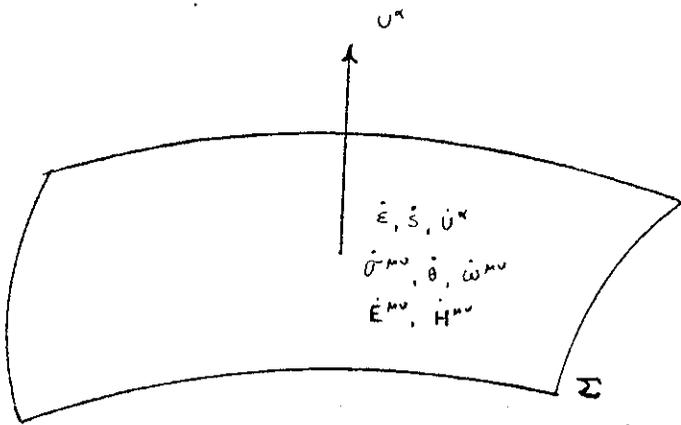


fig. 1.4.2 Hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$  juntamente com as variáveis que possuem eqs. de evolução.

Com o estabelecimento da termodinâmica estendida, o quadro muda consideravelmente. As variáveis dissipativas  $q^\mu$ ,  $\pi^{\mu\nu}$  e  $q^\mu$  passam a possuir equações de evolução (i.e., ganham dinâmica) e tem o mesmo status das variáveis do equilíbrio na especificação do estado local do sistema. É definido então uma entropia local de não-equilíbrio que é função das variáveis do equilíbrio e das variáveis dissipativas. A equação de evolução da entropia local (eq. de Gibbs generalizada) é modificada como mostrado em (1.141). Devemos notar que as eqs. de evolução para  $\pi^{\mu\nu}$ ,  $\pi$  e  $q^\mu$  escritas abaixo.

$$\tau_2 \dot{\pi}_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} = -\eta \langle Z_{(\mu\nu)} \rangle - \eta a_{23} \langle q_{(\mu} q_{\nu)} \rangle - \tau_2 \langle \pi_{\beta(\mu} U_{\nu)} \dot{U}^\beta + \pi_{\alpha(\nu} U_{\mu)} \dot{U}^\alpha \rangle \quad (1.146a)$$

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = -\zeta\theta + \zeta(a_{11} q^\mu q_\mu + \beta_{2,\mu} q^\mu T \xi + \beta_2 T q^\mu_{,\mu}) \quad (1.146b)$$

$$\tau_1 \dot{q}_\mu + q_\mu = \chi T (a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu + Q_\mu) - \tau_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu \quad (1.146c)$$

onde  $Z_{\mu\nu}$  e  $Q_\mu$  são dados pelas eqs. (1.99) e (1.101), contêm termos envolvendo as quantidades cinemáticas  $\sigma^{\mu\nu}$  (contida em  $Z_{\mu\nu}$ ),  $\theta$  e  $\dot{U}^\alpha$ . No entanto, vimos que para a completa especificação desses parâmetros há a necessidade do conhecimento de termos puramente gravitacionais ( $E_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$ ). Então, podemos afirmar que as variáveis dissipativas conterão a influência desses termos puramente gravitacionais. Em consequência disso, a evolução da entropia, vai, pelo menos de um modo indireto, sofrer influência do campo não anulável por uma escolha de coordenadas, sendo esta influência representada por  $E_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$ .

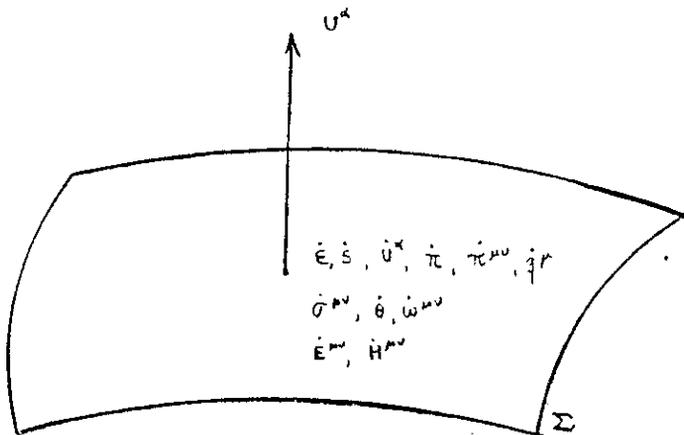


fig. 1.4.3 Hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$  juntamente com variáveis que possuem eqs. de evolução. Nota mos a presença de novas variáveis  $q^\mu$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\mu\nu}$

Entretanto, como nas futuras aplicações da termodinâmica entendida em espaços curvos utilizaremos sempre espaços-tempos conformalmente planos, não nos preocuparemos com essa contribuição do campo gravitacional.

## 2 - ANÁLISE TERMODINÂMICA DE UMA NEBULOSA EM CONTRAÇÃO

No presente capítulo analisaremos sob o ponto de vista termodinâmico uma nebulosa que é descrita por uma métrica conformalmente plana e com simetria esférica. O conteúdo material é constituído por um fluido apresentando processos dissipativos representados por fluxo de calor e viscosidade volumar. A nebulosa é não homogênea no sentido de apresentar distribuições de energia, pressão, temperatura, etc..., diferentes em cada ponto de uma hipersuperfície tipo espaço, locus dos observadores comoventes com o fluido. Outro dado a ser explicitado mais adiante é o fato da nebulosa encontrar-se em contração. Isso significa que no passado distante a densidade de energia é praticamente nula, bem como outros parâmetros ligados ao fluido (pressão, temperatura, etc). A medida que o tempo passa, a nebulosa vai se contraindo até degenerar-se numa singularidade.

Como ressaltamos na última seção do capítulo anterior, sendo o espaço-tempo conformalmente plano ( $C^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ ), a influência da curvatura via partes elétrica e magnéticas do tensor de Weyl na eq. de evolução de entropia deixa de existir, o que torna a descrição mais simplificada.

Dividiremos a análise em duas partes. Na primeira, a nebulosa é analisada utilizando-se uma termodinâmica irreversível com a hipótese do equilíbrio local. Na segunda parte o mesmo é feito levando-se em conta a termodinâmica estendida desenvolvida na seção 1.3, sendo que utilizaremos uma aproximação linear desta última.

## 2.1 - Análise com Termodinâmica de 1ª Ordem

Vamos considerar a nebulosa descrita brevemente na introdução cuja métrica conformalmente plana é dada por:

$$ds^2 = \left( \frac{bt + c}{\cos \chi + 1} \right)^2 \left[ dt^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

onde as coordenadas "esféricas"  $\chi$ ,  $\theta$  e  $\phi$  podem assumir os seguintes valores:

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$0 \leq \gamma \leq 2\pi \quad (2.2)$$

$$0 \leq \chi \leq \pi$$

Desejamos trabalhar com coordenadas cartesianas por julgá-las algo mais conveniente. Realizemos as seguintes transformações de coordenadas.

$$\bar{r} = \text{sen } \chi \quad (2.3a)$$

e

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4} \quad (2.3b)$$

Após algum algebrismo, a métrica (2.1) é reescrita como:

$$ds^2 = \frac{(bt+c)^2 (1+r^2/4)^2}{4} dt^2 - \frac{(bt+c)^2}{4} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.4)$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

A fonte de curvatura é um fluido caracterizado pelo seguinte tensor momento energia:

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - P h^{\alpha\beta} + q^\alpha U^\beta + q^\beta U^\alpha \quad (2.5)$$

Nesta expressão  $\rho$  é a densidade de energia,  $P = p + \pi$ , i.e., a pressão efetiva expressa como a soma de pressão hidrostática e da pressão devido à viscosidade volumar.  $q^\alpha$  é o fluxo de calor e  $U^\alpha(x)$  o campo de velocidades. No espaço-tempo curvo, o projetor  $h^{\alpha\beta}$  é dado por:

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(x) - U^\alpha U^\beta \quad (2.6)$$

sendo  $g^{\alpha\beta}(x)$  o tensor métrico. O campo de velocidade é normalizado por:

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1 \quad (2.7)$$

Utilizando um sistema de coordenadas comoventes tal que  $U^\alpha = (U^0, 0, 0, 0)$ , obtemos de (2.7), o seguinte resultado:

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.8)$$

$$\text{ou } U^0 = \frac{\delta^\alpha_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{2\delta^\alpha_0}{(bt+c)(1+r^2/4)} \quad (2.9)$$

As equações do campo gravitacional são dadas por:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - T^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Estamos utilizando um sistema de unidades tal que  $c = 1$  e  $8\pi G = 1$ .

Calculemos inicialmente os parâmetros cinemáticos associados à congruência de curvas identificadas com as linhas de universo das partículas do fluido. A expansão  $\theta$  é dada por:

$$\theta = U^\alpha{}_{;\alpha} \quad (2.11)$$

Explicitando (2.11), vem:

$$\theta = \frac{(U^\alpha \sqrt{-g})_{;\alpha}}{\sqrt{-g}} = \frac{6b}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \quad (2.12)$$

O parâmetro  $\sigma_{\alpha\beta}$ , conhecido como cizalhamento<sup>(28)</sup>, é dado por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^\mu{}_{(\alpha} h_{\beta)}{}^\nu U_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

Para simplificar os cálculos, podemos utilizar uma base de tetradas<sup>(29)</sup>, de modo que (2.13), é escrito como:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} (-\gamma_{AB}^O - \gamma_{BA}^O + \gamma_{AO}^O \eta_{BO} + \gamma_{BO}^O \eta_{AO}) - \frac{1}{3} h_{AB} \theta \quad (2.14)$$

onde  $\gamma_{BC}^A$  são os coeficientes de rotação de Ricci. No apêndice (C), obtemos:

$$\sigma_{AB} = 0 \quad , \quad \text{portanto}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.15)$$

A rotação  $\omega_{\alpha\beta}$  é escrita como:

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{[\alpha}{}^{\mu} h_{\beta]}{}^{\nu} U_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Utilizando uma base de tetradas, vem:

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} (-\gamma^O{}_{AB} + \gamma^O{}_{BA} + \gamma^O{}_{AO} \eta_{Bo} - \gamma^O{}_{Bo} \eta_{Ao}) \quad (2.17)$$

Podemos constatar (vide apêndice C) que  $\omega_{AB} = 0$ , e portanto:

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.18)$$

A aceleração da congruência de curvas é calculada no apêndice C, e o resultado é reproduzido abaixo:

$$\dot{U}^A = \left( 0, \frac{x^i}{(bt+c)(1+r^2/4)} \right) \quad (2.19)$$

Utilizando agora as eqs. de campo (2.10), a métrica (2.4) e o campo de velocidade especificado em (2.9), poderemos calcular  $\rho$ ,  $P$  e  $q^\alpha$  que aparecem no tensor momento energia (2.5). As relações abaixo vão relacionar as projeções do tensor-momento energia com  $\rho$ ,  $P$  e  $q^\alpha$  (28):

$$\rho = T^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta \quad (2.20)$$

$$P = -\frac{1}{3} T^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

$$q^\alpha = h^{\alpha\mu} T_{\mu\beta} U^\beta \quad (2.22)$$

Numa base de tetradas, podemos escrever:

$$\rho = T^{AB} U_A U_B = \frac{12 b^2}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^2} \quad (2.23)$$

$$P = -\frac{1}{3} T^{AB} h_{AB} = \frac{4 b^2}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^2} + \frac{4}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \quad (2.24)$$

Finalmente, (2.22) é escrito como:

$$q_A = h_A^B T_{BC} U^C \quad (2.25)$$

Segue então que:

$$q_{(0)} = 0 \quad (2.26a)$$

$$q_{(i)} = \frac{4 x^i b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^2} \quad (2.26b)$$

Da equação de conservação do número partículas (eq. 1.9'), podemos calcular  $n$ , a densidade do número de partículas:

$$N^{\alpha}_{\alpha} = n U^{\alpha}_{\alpha} + n_{\alpha} U^{\alpha}$$

de onde tiramos:

$$n(r, t) = \frac{n_0(r)}{(bt+c)^3} \quad (2.27)$$

Na eq. (2.27)  $n_0(r)$  é uma função de  $r$  a ser determinada.

### 2.1.1 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis - Hipótese do Equilíbrio Local

Vamos utilizar a termodinâmica de processos irreversíveis onde a hipótese do equilíbrio local é válido. Como vimos no capítulo anterior, esta formulação é aplicável somente em situações quasi-estacionárias, caracterizadas pelos fracos gradientes espaço-temporais das variáveis dissipativas. Sendo assim, as eqs. fenomenológicas para  $\pi$  e  $q^\mu$  são reproduzidas a seguir:

$$\pi = - \zeta U^\mu{}_{,\mu} \quad (2.28)$$

$$q^\mu = \chi h^{\mu\alpha} (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) \quad (2.29)$$

onde  $\chi$  e  $\zeta$  são os coeficientes de condução de calor e de viscosidade volumar, respectivamente.

Tendo em vista que  $P = p + \pi$  e que vale a seguinte equação de estado

$$p = \lambda \rho \quad (2.30)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ , a eq. (2.30) juntamente com (2.28) nos dá condições de calcular  $\lambda$  e  $\zeta$  a partir de (2.24). Temos então que:

$$P = \frac{4 b^2}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)} + \frac{4}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} = \lambda \rho - \zeta U^\mu{}_{,\mu}$$

Utilizando as eqs. (2.23) e (2.12), vem:

$$\lambda = \frac{1}{3} \quad (2.31)$$

$$e \quad \zeta = - \frac{2}{3b} \quad (2.32)$$

A relação (2.31) indica que o conteúdo material do fluido é constituído de radiação. O coeficiente de viscosidade volumar dado por (2.32) deverá ser sempre positivo (vide cap. 1, sec. 1.2). Para tal é necessário que

$$b < 0 \quad (2.33)$$

Em consequência disso, a expansão dada por (2.12) será sempre negativa indicando que a nebulosa encontra-se em contração.

Como hipótese do equilíbrio local é válida, podemos escrever a eq. de Gibbs

$$T ds = d \left( \frac{\rho}{n} \right) + p d \left( \frac{1}{n} \right) \quad (2.34)$$

onde  $s$  é a entropia por partícula,  $\frac{1}{n}$  é o volume por partícula,  $\frac{\rho}{n}$  é a energia por partícula e  $T$  a temperatura absoluta. Como foi estabelecido na eq.(1.17), cap. 1,  $\rho = n(\epsilon + a)$ , então  $d(\rho/n) = d\epsilon$  que é a variação da energia interna por partícula. Considerando as eqs. (2.23), (2.27), (2.30) e substituindo em (2.34), vem:

$$T ds = d \left[ \frac{12b^2}{(1+r^2/4)^2 (bt+c)n_o(r)} \right] + \frac{4b^2}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^2} d \left[ \frac{(bt+c)^3}{n_o(r)} \right]$$

Desenvolvendo esta expressão, e após algumas simplificações, vem:

$$ds = \frac{-4b^2}{T(r,t)(bt+c)(1+r^2/4)^2 n_o(r)} \left( \frac{4n_o'}{n_o} + \frac{3r}{1+r^2/4} \right) dr \quad (2.35)$$

onde  $n_o' = \frac{dn_o}{dr}$ . De (2.35) notamos que  $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ , portanto  $s$  s $\grave{o}$  depende da coordenada  $r$ . Para que  $s = s(r)$ , devemos impor que:

$$T(r,t) = \frac{f_o(r)}{(bt+c)} \quad (2.36)$$

onde  $T_o(r)$  é função apenas de  $r$ . Para um completo conhecimento da distribuição de temperatura, é necessário a determinação de  $T_o(r)$ . Na verdade, a equação de Gibbs não é suficiente para a completa especificação de  $T(r,t)$ , sendo portanto necessário lançarmos mão de alguma outra expressão. De acordo com Eckart (1940), a eq. (2.29) vai fixar a definição de temperatura. Então é razoável que utilizemos para a determinação de  $T_o(r)$  em (2.36).

Escrevamos inicialmente (2.29) uma base de tetradas:

$$q_A = \chi h_A^B (T_{,B} - T \dot{U}_B)$$

Como  $q_{(0)} = 0$ , façamos  $A = i$

$$q_{(i)} = \chi h_{(i)}^B (T_{,B} - T \dot{U}_B) = \chi (\delta_i^B - U_{(i)} U^B) (T_{,B} - T \dot{U}_B)$$

$$\text{ou } q_{(i)} = \chi (T_{,(i)} - T \dot{U}_{(i)}) \quad (2.37)$$

Calculemos cada termo de (2.37) separadamente

$$T_{,(i)} = e_{(i)}^\mu T_{,\mu} = \frac{2\delta_i^j}{(bt+c)} T_{,j} \quad , \text{ então}$$

$$T_{, (i)} = \frac{2T_{, i}}{(bt+c)} \quad (2.38a)$$

Temos ainda que  $\dot{U}_{(i)}$  é dado por:

$$\dot{U}_{(i)} = \eta_{iA} \dot{U}^A = \frac{-x_i}{(bt+c)(1+r^2/4)} \quad (2.38b)$$

Substituindo as eqs. (2.26b), (2.36), (2.38a) e (2.38b) em (2.37), vem:

$$\frac{4 x^i b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^2} = \chi \left[ \frac{2}{(bt+c)^2} \frac{df_o}{dr} \frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{f_o(r) x^i}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right]$$

Fazendo as simplificações necessárias e isolando  $\chi(r,t)$ , obtemos:

$$\chi(r,t) = \frac{4 b}{(bt+c)(1+r^2/4)^2} \left[ \frac{2}{r} \frac{df_o}{dr} + \frac{f_o(r)}{(1+r^2/4)} \right]^{-1} \quad (2.39)$$

Da eq. (2.32) vimos que  $b$  é negativo. Sendo assim, a expressão entre os colchetes deve ser sempre negativa, ou

$$\frac{2}{r} \frac{df_o}{dr} + \frac{f_o(r)}{(1+r^2/4)} < 0 \quad (2.40)$$

Esta inequação admite soluções do tipo:

$$f_o(r) < \frac{T_o}{(1+r^2/4)} \quad (2.41)$$

onde  $T_o$  é uma constante. Vamos então supor que:

$$f_o(r) = \frac{T_o}{(1+r^2/4)^v} \quad (2.42)$$

sendo  $v > 1$ . Desse modo a distribuição de temperatura fica completamente determinada. Substituíamos (2.42) em (2.39) de modo a explicitar  $\chi(r,t)$ , temos como resultado:

$$\chi(r,t) = \frac{-4b}{(bt+c)(1+r^2/4)^{1-v} T_o (v-1)} \quad (2.43)$$

### 2.1.2 - Cálculo da Produção de Entropia

De acordo com a eq. (1.53), do capítulo 1, a produção de entropia é dada por:

$$\sigma = \frac{\zeta (U^\mu{}_{;\mu})^2}{T} - \frac{q^\mu q_\mu}{\chi T^2} \quad (2.44)$$

Nesta expressão, o primeiro termo refere-se a contribuição da produção entropia devido à viscosidade volumar, e o segundo devido ao fluxo de calor. Tendo em vista que:

$$q^\mu q_\mu = q^A q_A = \frac{-16b^2 r^2}{(bt+c)^6 (1+r^2/4)^4}$$

e as eqs. (2.12), (2.32), (2.36), (2.42) e (2.43), a eq. (2.44) é escrita como:

$$\sigma = \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-v} T_o} - \frac{4br^2(v-1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-v} T_o} \quad (2.45)$$

Façamos

$$\sigma = \sigma_o + \sigma_1 \quad (2.46)$$

onde 
$$\sigma_0 = \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_0} \quad (2.47a)$$

e 
$$\sigma_1 = \frac{-4br^2(\nu - 1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} \quad (2.47b)$$

Consideremos  $\sigma_0$  e calculemos o limite para certas condições assintóticas. Iniciemos considerando o limite quando  $r$  é infinitamente grande:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_0(r,t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_0} \quad (2.48)$$

Existem três possibilidades a serem consideradas:

a)  $2 - \nu < 0$ ;

Neste caso, a produção de entropia vai a infinito. Isso significa que apesar da viscosidade nula há produção considerável de entropia.

b)  $2 - \nu = 0$  ;

Observando (2.48) vemos que há produção finita de entropia mesmo em regiões onde a viscosidade é nula.

c)  $2 - \nu > 0$

A produção de entropia devido à viscosidade volumar é nula para regiões infinitamente afastadas da origem do sistema de coordenadas

considerado. Esta possibilidade parece ser mais razoável pois, sendo a viscosidade volumar nula nessas regiões, isto significa que o sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico. Então:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_o(r,t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_o} = 0 \quad (2.48')$$

se  $2 - \nu > 0$  ou  $\nu < 2$ . Como  $\nu > 1$ , segue que

$$1 < \nu < 2 \quad (2.49)$$

Para  $r = 0$ , temos que

$$\sigma_o(o,t) = \frac{-24b}{(bt+c)^3 T_o} \quad (2.50)$$

Anteriormente constatamos que o modelo em estudo se encontra em contração devendo degenerar-se numa singularidade. Aí as grandezas tais como  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ , etc..., tornam-se infinitas. A produção de entropia nesta situação é dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{c}{|b|}} \sigma_o = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_o} = \infty \quad (2.51)$$

Concentremo-nos na produção de entropia devido ao fluxo de calor. Se observarmos a expressão para  $q^\mu q_\mu$  verificaremos que esta se anula para pontos infinitamente distantes da origem do sistema de coordenadas utilizado. Isso significa que nessas regiões o fluxo de calor é nulo, ( $q^\mu q_\mu$  é um escalar). O mesmo ocorre para  $r = 0$ , ou seja, a origem do sistema de coordenadas. Portanto,

para um dado  $t \neq c/|b|$ , a produção de entropia devido ao fluxo de calor deve se anular quando  $r \rightarrow \infty$  e  $r = 0$ . Então, para  $r = 0$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_1(r,t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-4 b r^2 (\nu - 1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} = 0 \quad (2.52)$$

E para  $r \rightarrow \infty$ , vem:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1(r,t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-4 b r^2 (\nu - 1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} = 0 \quad (2.53)$$

A equação (2.53) é verificada se  $3-\nu < 0$  ou  $\nu < 3$ . De (2.49), vemos que esta condição é inteiramente satisfeita.

Finalmente, na singularidade, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{c}{|b|}} \sigma_1 = \lim_{t \rightarrow \frac{c}{|b|}} \frac{-4 b r^2}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} = \infty \quad (2.54)$$

Este resultado era esperado, visto que  $q^\mu q_\mu$  vai a infinito na singularidade muito mais rapidamente que  $\chi T^2$ .

### 2.1.3 - Cálculo da Entropia por Partícula e Considerações Finais

A entropia por partícula  $s$  pode ser calculada se levarmos em conta a expressão (2.35) juntamente com a distribuição de temperatura dada por (2.36) e (2.42). Então

$$ds = \frac{-4b^2}{(1+r^2/4)^{2-\nu} n_0(r) T_0} \left( \frac{4n_0'}{n_0} + \frac{3r}{1+r^2/4} \right) dr \quad (2.56)$$

Nesta expressão,  $n_0(r)$  é uma função de  $r$  ainda desconhecida. No entanto, antes de passarmos adiante verifiquemos um fato curioso apresentado por este modelo.

Como podemos notar diretamente da eq. (2.56), a entropia por partícula não dependerá da coordenada  $t$ , conseqüentemente, temos

$$\dot{s} = s_{, \mu} U^\mu = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{2}{(bt+c)(1+r^2/4)} = 0$$

ou seja, a entropia permanece constante durante a evolução sistema. Ora, essa característica é esperada ocorrer quando o sistema está no equilíbrio termodinâmico, i.e., quando é nula a produção de entropia. Entretanto veremos que o fato da entropia permanecer constante concomitantemente com a produção de entropia não é contraditório. Tomando a eq. (1.42), a produção de entropia é dada por:

$$\sigma = n\dot{s} + I_{S^\mu}^\mu \quad (2.57)$$

No presente modelo  $n\dot{s} = 0$ , conseqüentemente a produção de entropia será devida tão unicamente à divergência do fluxo de calor. Podemos interpretar essa peculiaridade se considerarmos que toda a entropia produzida em cada parte elementar do sistema é escoada para fora do mesmo. De outro modo, poderíamos entender que cada elemento de volume do sistema está recebendo um fluxo de entropia negativa de modo que  $n\dot{s} = \sigma - I_{S^\mu}^\mu = 0$ . Na verdade, qualquer sistema termodinâmico que apresente esta peculiaridade é dito ser termodinamicamente aberto. Na próxima seção faremos uma explanação algo mais detalhada.

Para completar o cálculo da entropia por partícula  $s$ , devemos determinar  $n_0(r)$ . Vamos então supor que esta função seja dada por

$$n_o(r) = \frac{N_o}{(1+r^2/4)^\alpha} \quad (2.58)$$

onde  $N_o$  e  $\alpha$  são constantes positivas. Substituindo a eq.(2.58) em (2.56) obtemos:

$$ds = \frac{-4b^2(3-2\alpha)r}{(1+r^2/4)^{3-\alpha-\nu} N_o T_o} dr \quad (2.59)$$

A integração de (2.59) é imediata, fornecendo-nos os seguintes resultados:

$$s = \begin{cases} s_o + \frac{8 b^2 (3-2\alpha)}{N_o T_o (2-\alpha-\nu) (1+r^2/4)^{2-\alpha-\nu}} , & \text{se } \alpha+\nu \neq 2 \quad (2.60a) \\ s_o + \frac{8b^2(2\alpha-3)}{N_o T_o} \ln (1+r^2/4) , & \text{se } \alpha+\nu = 2 \quad (2.60b) \end{cases}$$

Para decidirmos qual das duas expressões (2.60) é mais conveniente, devemos escolher aquela segundo qual sempre podemos obter

$$s = s(\epsilon, \nu) \quad (2.61)$$

Sendo esta a relação fundamental onde toda a informação termodinâmica do sistema está contida.

Passemos para a determinação explícita de (2.61), escrevendo inicialmente as equações de estado:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \right)_\nu = \frac{1}{T} \quad (2.62a)$$

$$\left( \frac{\partial s}{\partial \nu} \right)_\epsilon = \frac{p}{T} \quad (2.62b)$$

Das expressões para  $p$  e  $T$  obtidas anteriormente (eqs. 2.30, 2.36 e 2.42), temos em (2.62b):

$$\frac{p}{T} = \frac{4b^2}{T_0 (bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu}} \quad (2.63)$$

Fazendo o mesmo em (2.62a), vem:

$$\frac{1}{T} = \frac{(bt+c) (1+r^2/4)^\nu}{T_0} \quad (2.64)$$

Devemos expressar as eqs. (2.63) e (2.64) em função de  $\epsilon$  e  $\nu$  a fim de que possamos integrar as eqs. (2.62) e em consequência de terminarmos  $s$ . Com esse objetivo em mente, façamos na eq. (2.63)  $2 - \nu = \alpha$  e tendo em vista que:

$$\nu = \frac{1}{n} = \frac{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^\alpha}{N_0} \quad (2.65)$$

obtemos:

$$\frac{p}{T} = \frac{4b^2}{T_0 N_0^\nu} \quad (2.66)$$

Tomando as expressões para  $\rho$  e  $n$ , façamos:

$$\frac{\rho}{n} = \frac{12b^2}{N_0 (bt+c) (1+r^2/4)^{2-\alpha}} \quad (2.67)$$

ou ainda

$$\frac{\rho}{n} = \frac{12b^2}{N_0 (bt+c) (1+r^2/4)^\nu} = \frac{12b^2 T}{N_0 T_0} \quad (2.67')$$

Como  $\rho = n (\epsilon + a)$ , (2.67') pode ser ainda reescrita por:

$$\frac{1}{T} = \frac{12b^2}{N_0 T_0 (\epsilon + a)} \quad (2.68)$$

Voltando às equações de estado, e tendo em vista as eqs.(2.66) e (2.68), temos:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \right)_v = \frac{12b^2}{N_0 T_0 (\epsilon + a)}$$

de onde tiramos:

$$s(\epsilon, v) = \frac{12b^2}{N_0 T_0} \ln (\epsilon + a) + C(v) \quad (2.69)$$

Entretanto:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_\epsilon = \frac{dC(v)}{dv} = \frac{4b^2}{T_0 N_0 v}$$

ou seja:

$$C(v) = \frac{4b^2}{T_0 N_0} \ln v + S_0 \quad (2.70)$$

$S_0$  é uma constante de integração. Assim a equação fundamental é obtida ao substituirmos (2.70) em (2.69):

$$s(\epsilon, v) = S_0 + \frac{12b^2}{N_0 T_0} \ln [v^{1/3} (\epsilon + a)] \quad (2.71)$$

Como utilizamos o fato de que  $\alpha = 2 - v$  ou  $\alpha + v = 2$ , então devemos considerar a eq. (2.60b).

## 2.2 - Análise com Termodinâmica Causal

### 2.2.1 - Introdução

Na seção anterior exibimos a métrica para uma nebulosa em contração e que apresenta processos dissipativos tais como fluxo de calor e viscosidade volumar. Utilizamos todo o formalismo desenvolvido na seção 1.2 para o cálculo da produção de entropia. Consideramos válida a hipótese do equilíbrio local, significando que o modelo encontrava-se em regime quasi-estacionário durante toda a sua evolução.

A seguir, consideramos a nebulosa em contração e a analisamos à luz de uma formulação não-estacionária (causal) da termodinâmica, (vide seção 1.3). Como principais modificações, além de garantida a propagação de sinais viscosos e térmicos com velocidade finita, temos a introdução de novos coeficientes de acoplamento (tempos de relaxação e termos de acoplamento entre os fluxos dissipativos) e o estabelecimento de novas equações fenomenológicas. No entanto, por simplicidade, utilizaremos uma aproximação linear<sup>(22,30)</sup> da teoria desenvolvida na seção 1.3. Isso significa que as equações fenomenológicas serão lineares, oriundas do fato de considerarmos uma relação linear entre fluxos e forças termodinâmicas ao invés da relação geral dada pela eq. (1.93). Ainda na aproximação linear, temos que o fluxo de entropia é dado pela eq. (1.82) quando  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são nulos. Finalmente, não podemos deixar de destacar que nesta aproximação, a pressão termodinâmica e a temperatura absoluta serão dadas pelos seus valores definidos no equilíbrio local (vide apêndice B).

Calcularemos os coeficientes de viscosidade volumar e condu

ção de calor por intermédio das novas equações fenomenológicas, e em seguida a produção de entropia. Nesta expressão, os tempos de relaxação podem desempenhar um papel importante dependendo de sua forma funcional. Faremos algumas hipóteses referentes a forma funcional dos tempos de relaxação para em seguida verificarmos os limites assintóticos da produção de entropia.

### 2.2.2 - Cálculo dos Coeficientes de Viscosidade Volumar e de Condução de Calor

A equação fenomenológica para a viscosidade volumar (eq.1.118 sec. 1.3) quando escrita no espaço-tempo curvo é dada por:

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = -\zeta U^{\mu}{}_{;\mu} + \zeta (a_{11} q_{\mu} q^{\mu} + \beta_2 q^{\mu} \xi T + \beta_2 q^{\mu}{}_{;\mu} T) \quad (2.72)$$

Fazendo  $a_{11} = \beta_2 = 0$ , devido a aproximação linear, vem:

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = -\zeta U^{\mu}{}_{;\mu} \quad (2.73)$$

Sendo  $(t)$  dado pela eq.(2.28), podemos então calcular  $\dot{\pi}$  facilmente:

$$\dot{\pi} = \pi_{;\mu} U^{\mu} = \frac{\pi_{;0}{}^2}{(bt+c)(1+r^2/4)} \quad \text{ou seja}$$

$$\dot{\pi} = \frac{-16b}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^2} \quad (2.74)$$

Como  $\theta = U^{\alpha}{}_{;\alpha}$  é dado pela eq.(2.12), façamos sua substituição em (2.73), bem como  $\dot{\pi}(t)$  e  $\pi(t)$  :

$$\frac{-16 \tau_0 b}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^2} + \frac{4}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} = \frac{-6 \zeta b}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)}$$

Simplificando e explicitando  $\zeta$ , obtemos:

$$\zeta = \frac{-2}{3b} + \frac{8\tau_0}{3(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \quad (2.75)$$

Novamente  $b < 0$  de modo que  $\zeta > 0$  para quaisquer valores de  $t$  e  $r$ , visto que  $\tau_0$  é sempre positivo. Quando  $\tau_0 = 0$ , a eq. (2.75) volta a sua expressão dada pela eq. (2.32).

Tomemos agora a eq. fenomenológica para o fluxo de calor:

$$\tau_0 \dot{q}_\mu + q_\mu = \chi T (a_{11} \pi q_\mu + a_{12} \pi_{\mu\nu} q^\nu + Q_\mu) - \tau_1 \dot{U}^\nu q_\nu U_\mu. \quad (2.76)$$

Nesta expressão  $Q_\mu = -h_\mu^\alpha \left[ -\frac{1}{T} (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) + T \beta_{2,\alpha} \pi^\alpha + \right.$

$$\left. + \beta_2 T \pi_{,\alpha} + T \beta_{3,\lambda} \pi^\lambda_{\alpha\gamma} + T \beta_3 \pi^\lambda_{\alpha,\lambda} \right]$$

No entanto,  $\pi^{\mu\nu}$  bem como  $\beta_2$  e  $a_{11}$  são nulos. Logo (2.76) é reescrita por:

$$\tau_1 \dot{q}_\mu + q_\mu = \chi h_\mu^\alpha (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) - \tau_1 U_\mu q_\alpha \dot{U}^\alpha \quad (2.77)$$

Com as componentes do fluxo de calor dadas pelas eqs. (2.26),  $\dot{q}_\mu$  pode ser calculado facilmente:

$$\dot{q}_\mu = q_{\mu\alpha} U^\alpha = (q_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda q_\lambda) U^\alpha \quad (2.78)$$

Desenvolvendo esta expressão, obtemos:

$$\dot{q}_0 = \frac{-6br^2}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^2} \quad (2.79a)$$

$$q_i = \frac{-12 x^i b^2}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^3} \quad (2.79b)$$

Pode ser facilmente constatado que ao fazermos  $\mu = 0$  em (2.77), obteremos uma identidade. Não podemos esquecer que estamos num sistema de coordenadas tal que  $U^\alpha = (U^0, 0, 0, 0)$ . Fazendo  $\mu = i$  na eq. (2.77), vem:

$$\tau_2 \dot{q}_i + q_i = \chi h_i^\alpha (T_{,\alpha} - T \dot{U}_\alpha) \quad (2.80)$$

Substituindo as expressões correspondentes de  $\dot{q}_i$  e  $q_i$ , obtemos:

$$\frac{-12 b^2 x^i \tau_1}{(bt+c)^4 (1+r^2/4)^3} + \frac{2x^i b}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)^2} = \chi (T_{,i} - T \dot{U}_i) \quad (2.81)$$

Tendo em vista que a temperatura é aquela do equilíbrio local, i.e.,

$$T = \frac{T_0}{(bt+c) (1+r^2/4)^v}, \quad v > 1 \quad (2.82)$$

e que a aceleração é dada por:

$$\dot{U}_i = \frac{-x^i}{2(1+r^2/4)} \quad (2.83)$$

podemos substituí-los em (2.81), e após algum algebrismo, obtemos

$$\chi(r,t) = \frac{-4b}{T_0 (v-1) (bt+c) (1+r^2/4)^{1-v}} \left[ \frac{-6b \tau_1}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} + 1 \right] \quad (2.84)$$

Novamente observamos que  $\chi(r,t) \geq 0$  para quaisquer  $t$  e  $r$ . Se  $\tau_1 = 0$  a eq. (2.84) reduz-se a sua forma dada pela eq. (2.43).

### 2.2.3 - Cálculo da Produção de Entropia

Com os novos coeficientes de viscosidade volumar e de condução de calor dados respectivamente pelas eqs. (2.75) e (2.84), podemos calcular a produção de entropia cuja expressão é dada abaixo:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{\zeta T} - \frac{q^\mu q_\mu}{\chi T^2} \quad (2.85)$$

Substituindo  $\pi^2$ ,  $q^\mu q_\mu$ ,  $\zeta$ ,  $\chi$  e  $T$  pelas suas expressões correspondentes, em (2.85), obtemos:

$$\sigma = \frac{-24b}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-v} T_0} \left[ 1 + \frac{4 \tau_0}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right]^{-1} + \frac{4br^2 (v-1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-v} T_0} \left[ 1 - \frac{6b \tau_1}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right]^{-1} \quad (2.86)$$

Como  $b < 0$ , a produção de entropia é sempre positiva. Na eq. (2.86) ficam em aberto os tempos de relaxação  $\tau_0$  e  $\tau_1$ . Então, para o co

nhecimento completo da produção de entropia é necessário o conhecimento do comportamento dos tempos de relaxação  $\tau_0$  e  $\tau_1$  durante a evolução do sistema. A seguir faremos algumas hipóteses acerca desse comportamento e a devida análise.

1ª Hipótese:  $\tau_0$  e  $\tau_1$  são constantes

Supondo que os tempos de relaxação sejam constantes durante toda a evolução do sistema, vamos calcular a produção de entropia nos limites estabelecidos anteriormente. Antes de tudo, façamos:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (2.87)$$

onde  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  são as contribuições à produção de entropia devido a viscosidade volumar e o fluxo de calor, respectivamente.

Consideremos inicialmente o limite de  $\sigma_0$  quando é infinitamente grande:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{24 |b|}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_0} \left[ 1 + \frac{4\tau_0}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right]^{-1} = 0 \quad (2.88)$$

O resultado mostrado acima somente é válido se  $2-\nu > 0$ . Na verdade, essa escolha é sugerida pelo fato de que neste limite o efeito da viscosidade volumar é nulo. Então, como anteriormente obtido, temos:

$$1 < \nu < 2 \quad (2.89)$$

Na singularidade final, i.e., no limite de  $t \rightarrow c/|b|$ , vem

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \sigma_0 = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{24|b| T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-v} + 4\tau_0 (bt+c) (1+r^2/4)^{1-v}} = \infty \quad (2.90)$$

Como antes, a produção de entropia devido a viscosidade volumar é infinita na singularidade.

Tomamos os mesmos limites para  $\sigma_1$  que é a produção de entropia devido ao fluxo de calor. Então:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4|b|r^2(\nu-1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} \left[ 1 + \frac{6|b|\tau_0}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right]^{-1} = 0 \quad (2.91)$$

Este resultado ocorre devido a restrição a  $\nu$  dada por (2.89).

Na singularidade final, temos:

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \sigma_1 = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} + (bt+c) (1+r^2/4)^{2-\nu}} = \infty \quad (2.92)$$

De certo modo esse resultado já era esperado. Para finalizar, é facilmente verificado que em  $r = 0$ , a produção de entropia devido ao fluxo de calor é nula, uma vez que  $q^\mu q_\mu$  torna-se nulo.

Para os tempos de relaxação  $\tau_0$  e  $\tau_1$  tomado como constantes não há mudanças no que tange a produção de entropia nos limites considerados. Destacamos somente o fato da produção de entropia dada pela eq. (2.86) é menor que aquela dada pela eq. (2.45) para um mesmo ponto do espaço tempo.

2ª Hipótese:  $\tau_0$  e  $\tau_1$  não são constantes

Pode ocorrer que os tempos de relaxação variem durante a evolução do sistema. Daí é de interesse na presente análise explicitar

tar a influência desses tempos de relaxação na produção de entropia. De acordo com Belinskii et al (1979), os tempos de relaxação podem ser expressos fenomenologicamente por uma dependência do tipo:

$$\tau_0 = \alpha \rho^n \quad (2.93a)$$

$$\tau_1 = \beta \rho^m \quad (2.93b)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $m$  e  $n$  são números reais.

Substituindo as eqs. (2.93) em (2.86) e tendo em vista que  $\rho$  é dado pela eq. (2.23), vem:

$$\begin{aligned} \sigma_s = & \frac{24 |b| T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} + 4\alpha (12b^2)^n (bt+c)^{1-4m} (1+r^2/4)^{1-\nu-2m}} + \\ & + \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} + 6|b|\beta(12b^2)^m (bt+c)^{1-4m} (1+r^2/4)^{2-2m-\nu}} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Mais uma vez façamos  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$  e calculemos separadamente cada um dos termos nos limites considerados anteriormente. Então para  $\sigma_0$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{24|b|T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} + 4\alpha(12b^2)^n (bt+c)^{1-4n} (1+r^2/4)^{1-\nu-2n}} = 0 \quad (2.95)$$

É facilmente constatado que para qualquer  $n$ , a produção de en

tropia devido a viscosidade volumar é nula quando  $r \rightarrow \infty$ . Na singularidade final, temos:

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \sigma_0 = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{24|b| T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} + 4\alpha (12b^2)^n (bt+c)^{1-4n} (1+r^2/4)^{1-\nu-2n}} \quad (2.96)$$

O valor deste limite vai depender de  $n$ , de modo que consideraremos os seguintes casos:

a)  $1 - 4n > 0$

Neste caso, quando  $t \rightarrow \frac{c}{|b|}$  o denominador vai a zero e consequentemente  $\sigma_0 \rightarrow \infty$ . Este resultado é o mesmo obtido de análises anteriores.

b)  $1 - 4n = 0$

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{c}{|b|}} \sigma_0 &= \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{24|b| T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} + 4\alpha (12b^2)^{1/4} (1+r^2/4)^{-\nu+1/2}} \\ &= \frac{6|b| T_0^{-1}}{(12b^2)^{1/4} (1+r^2/4)^{-\nu+1/2}} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Vemos então que a produção de entropia assume um valor finito na singularidade. Podemos observar que a medida que o modelo se aproxima da singularidade,  $\sigma_0$  vai crescendo e chega a um máximo na singularidade.

c)  $1 - 4n < 0$

Neste último caso, temos:

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \sigma_0 = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{24|b| T_0 (bt+c)^{4n-1}}{(bt+c)^{4+4n} (1+r^2/4)^{2-\nu} + 4\alpha (12b^2)^n (1+r^2/4)^{1-\nu-2n}} = 0 \quad (2.98)$$

Então, da eq. (2.98) vemos que a produção de entropia devido à viscosidade volumar é nula na singularidade. Esta situação parece ser não física uma vez que a viscosidade volumar é infinita na singularidade.

Consideremos agora a contribuição devido ao fluxo de calor.

Quando  $r \rightarrow \infty$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} + 6|b|\beta (12b^2)^m (bt+c)^{1-4m} (1+r^2/4)^{2-2m-\nu}} = 0 \quad (2.99)$$

Facilmente se verifica que a eq. (2.99) vale para qualquer valor de  $m$ .

Na singularidade, temos:

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \sigma_1 = \lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} + 6|b|\beta (12b^2)^m (bt+c)^{1-4m} (1+r^2/4)^{2-2m-\nu}} \quad (2.100)$$

Temos que considerar três casos distintos, analogamente ao limite dado pela eq. (2.96)

a)  $1 - 4m > 0$

Vemos sem dificuldades que  $\sigma_1 \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow c/|b|$ , ou seja,

a produção de entropia devido ao fluxo de calor é infinita.

b)  $1 - 4m = 0$

Da eq. (2.100), temos:

$$\lim_{t \rightarrow c/|b|} \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{(bt+c)^3(1+r^2/4)^{3-\nu} + 6|b|\beta(12b^2)^{1/4}(1+r^2/4)^{3/2-\nu}} =$$

$$= \frac{4|b|r^2(\nu-1)T_0^{-1}}{6|b|\beta(12b^2)^{1/4}(1+r^2/4)^{3/2-\nu}} \quad (2.101)$$

A produção de entropia  $\sigma_1$  tem um valor finito na singularidade, que é seu valor máximo.

c)  $1 - 4m < 0$

O resultado obtido neste caso é idêntico aquele dado pela eq. (2.98) i.e., a produção de entropia  $\sigma_1$  vai a zero na singularidade.

#### 2.2.4 - Entropia por Partícula e Considerações Finais

De acordo com a eq. (2.57) a produção de entropia é dada por:

$$\sigma = \dot{n}\dot{s} + I_{S^{\mu\nu}}^{\mu} \quad (2.102)$$

Estamos considerando  $I^{\mu} = \frac{q^{\mu}}{T}$ , de modo que a partir de (2.102) podemos calcular  $\dot{n}\dot{s}$ . Calculando a divergência do vetor fluxo de en

tropia e juntamente com a eq. (2.86), temos:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}s = \sigma - I_{S^{\mu}}^{\mu} &= \frac{4|b|r^2(\nu - 1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} \left[ \frac{6|b|\tau_1}{(c+bt)^2 (1+r^2/4)} + 1 \right]^{-1} + \\
 &+ \frac{24|b|}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_0} \left[ \frac{4\tau_0}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} + 1 \right]^{-1} - \\
 &- \frac{24|b|}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{2-\nu} T_0} - \frac{4|b|r^2(\nu - 1)}{(bt+c)^3 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} \quad (2.103)
 \end{aligned}$$

Realizando os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}s &= - \frac{96|b|\tau_0}{(bt+c)^5 (1+r^2/4)^{3-\nu} T_0} \left[ 1 + \frac{4\tau_0}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right] - \\
 &- \frac{24|b|^2 r^2 (\nu - 1) \tau_1}{(bt+c)^5 (1+r^2/4)^{4-\nu} T_0} \left[ 1 + \frac{6|b|\tau_1}{(bt+c)^2 (1+r^2/4)} \right] \quad (2.104)
 \end{aligned}$$

A eq. (2.104) significa, que cada parte elementar do sistema evolui de modo que sua entropia decresce. Mais tarde teremos algumas considerações acerca deste fato.

Passemos ao cálculo da entropia por partícula  $s$ . A partir da eq. (2.104) e das eqs. (2.27) e (2.58) que definem  $n(r,t)$ , vem:

$$\dot{s} = \frac{2}{(bt+c)(1+r^2/4)} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{-96|b|_0}{(bt+c)^2(1+r^2/4)^{3-\nu-\alpha} T_0 \left[ 1 + \frac{4\tau_0}{(bt+c)^2(1+r^2/4)} \right]} - \frac{24|b|r^2(\nu-1)\tau_1}{(bt+c)^2(1+r^2/4)^{4-\nu-\alpha} T_0 \left[ 1 + \frac{6|b|\tau_1}{(bt+c)^2(1+r^2/4)} \right]} \quad (2.105)$$

Integrando a eq. (2.105), vem:

$$s(r,t) = \frac{6}{(1+r^2/4)^{2-\nu-\alpha} N_0 T_0} \left\{ 4 \tau_0 \ln \left[ (bt+c)^2(1+r^2/4) + 4\tau_0 \right] + \frac{|b|r^2(\nu-1)\tau_1}{(1+r^2/4)} \ln \left[ (bt+c)^2(1+r^2/4) + 6|b|\tau_1 \right] \right\} + \phi(r) + s_0 \quad (2.106)$$

onde  $\phi(r)$  é uma função de  $r$  que aparece como constante de integração juntamente com o fator constante  $s_0$ . A entropia por partícula (2.36) é de não-equilíbrio que é proveniente da eq. de Gibbs generalizada. Notemos que ao tomarmos  $\tau_0$  e  $\tau_1$  nulos devemos obter a entropia definida no equilíbrio local. Então, podemos escrever:

$$\lim_{\tau_0, \tau_1 \rightarrow 0} s(r,t) = s_{eq}(r) + s_0 \quad (2.107)$$

Juntando as eqs. (2.106) e (2.107) identificamos  $\phi(r)$  com  $s_{eq}(r)$ .

Finalmente (2.106) é escrita como:

$$\begin{aligned}
 s(r,t) = s_0 + \frac{8b^2(2\alpha-3)}{N_0 T_0} \ln(1+r^2/4) + \\
 + \frac{6}{N_0 T_0} \left\{ 4\tau_0 \ln \left[ (bt+c)^2(1+r^2/4) + 4\tau_0 \right] + \right. \\
 \left. \frac{|b|r^2(v-1)\tau_1}{(1+r^2/4)} \ln \left[ (bt+c)^2(1+r^2/4) + 6|b|\tau_1 \right] \right\} \quad (2.108)
 \end{aligned}$$

Fixemos nossa atenção na eq. (2.104). Nesta equação é indicado que a entropia de cada elemento de volume do sistema está de crescendo ao longo de sua evolução. Consequentemente a entropia do sistema material dada por

$$S = \int_{\Sigma} ns U^\mu dS_\mu \quad (2.109)$$

sendo  $\Sigma$  a hipersuperfície tipo espaço e  $U^\mu$  o campo de velocidades paralelo à normal a esta hipersuperfície, também está diminuindo, apesar da produção de entropia devido aos processos irreversíveis. Notamos também que essa peculiaridade está diretamente ligada aos tempos de relaxação presentes na eq. (2.104).

Para uma melhor compreensão do que está ocorrendo retornemos à sec. 1.2 onde estabelecemos a seguinte expressão:

$$dS = d_i S + d_e S \quad (2.110)$$

onde  $dS$  é a variação da entropia do sistema,  $d_i S$  é a produção de

entropia e  $d_e S$  é a variação de entropia devido a trocas de entropia com as vizinhanças do sistema. Na presente análise e na anterior, temos que:

$$e \left. \begin{array}{l} dS < 0 \\ dS = 0 \end{array} \right\} \quad (2.111)$$

A primeira vista isso poderia parecer contraditório pois sempre associamos a idéia que um sistema sob processos irreversíveis deve evoluir de tal modo que sua entropia sempre aumente. No entanto, essa assertiva só é válida para sistemas termodinâmicos isolados e fechados. Na verdade somente os sistemas termodinamicamente abertos possuem a característica dada pela eq. (2.111). Voltando a essa eq. juntamente com a eq. (2.110), temos:

$$(18) \quad dS = d_i S + d_e S \leq 0 \quad \text{ou seja}$$

$$d_e S \leq - d_i S \quad (2.112)$$

De (2.112) conclui-se que um sistema aberto pode receber entropia negativa de suas vizinhanças ou escoar a entropia produzida para as mesmas em iguais quantidades ou maiores que a entropia produzida. Logo, podemos entender a nebulosa em contração como um sistema termodinâmico aberto. Interpretamos que o sistema está recebendo uma quantidade negativa de entropia proveniente do campo gravitacional variável. Infelizmente não existe ainda uma expressão explícita para a entropia produzida pelo campo gravitacional bem como de uma equação de balanço de entropia para sistemas termodinâmicos na presença de campos gravitacionais.

Finalizando, é interessante citar Landau- Lifschitz (Statistical

Physics, 1959 ) que considera o universo como sendo um sistema a berto sujeito a "condições externas variáveis". Essas condições ex ternas variáveis são identificadas como sendo as propriedades mé tricas do espaço-tempo. Desse modo, a lei do aumento de entropia não é válida em sistemas na presença de campos gravitacionais va riáveis, deixando assim de modo implícito uma possível contribui ção deste campo na entropia do sistema.

### 3. MODELOS COSMOLÓGICOS COM VISCOSIDADE VOLUMAR

A introdução de viscosidade volumar como único processo dissipativo em Cosmologia tem atraído o interesse de inúmeros pesquisadores. Dentre as principais motivações, podemos citar: a explicação da alta entropia por barion associada a radiação de  $3^{\circ}\text{K}$  hoje constatada; algum mecanismo eficaz que pudesse evitar a singularidade cosmológica; estudar as modificações na evolução cósmica provocadas pela viscosidade volumar. Várias linhas de pesquisas foram exploradas, principalmente nos últimos 15 anos.

Weinberg (1971) fez uma estimativa da produção de entropia devido a viscosidade volumar em universos homogêneos e isotrópicos. Para essa estimativa, ele utilizou o coeficiente de viscosidade volumar calculado via equação de transporte relativista para um fluido com caminho médio livre e tempo médio livre muito pequenos, juntamente com radiação (fótons, neutrinos ou grávitons) com um tempo médio livre finito  $\tau$ . O valor encontrado não corresponde aquele atualmente calculado. Então concluiu-se que a viscosidade volumar não poderia ser responsável pela alta entropia do universo.

Heller et al (1973), Murphy (1973), Heller et al (1974), Suszycki (1978) e Souza Dias (1984) dedicaram-se à procura de soluções exatas das equações de Einstein para universos homogêneos e isotrópicos. De um modo geral, o efeito da viscosidade volumar é o mesmo de uma pressão negativa, cuja eq. fenomenológica é dada por

$$\pi = - \zeta U^{\mu}_{\mu} \quad (3.1)$$

onde  $\zeta$  é o coeficiente de viscosidade volumar. Foram encontradas soluções com a suposição de  $\zeta$  ser constante durante toda a evolução cosmológica. Apesar de desta hipótese simplificadora, modelos interessantes surgiram tais como os não singulares e do tipo oscilante. Estes últimos são identificados como universos de Tolman<sup>(33)</sup>. Alguns modelos eram não fisicamente razoáveis por apresentarem densidade de energia negativa durante toda ou parte da cosmológica<sup>(35,37,38)</sup>. Murphy (1973) considerou o coeficiente variável através de uma relação do tipo:

$$\zeta = \alpha \rho \quad (3.2)$$

A solução encontrada era não singular. Já Souza Dias (1984) utilizou uma relação mais geral, dada por:

$$\zeta = \alpha \rho^\nu \quad (3.3)$$

onde a  $\nu$  foram atribuídos os seguintes valores:  $\nu = \frac{1}{2}$ ;  $\nu > \frac{1}{2}$  e  $0 \leq \nu < 1/2$ . Neste trabalho as soluções encontradas vão corresponder a modelos abertos, fechados e planos, enquanto que Murphy limitou-se aos modelos planos.

Modelos homogêneos e anisotrópicos com fluidos viscosos foram estudados por Maiti (1982), Banerjee (1983,1984), Santos (1981) e Novello et D'Olival (1979).

Seguindo uma linha diferente, Belinskii et Khalatnikov (1975, 1977) lançaram mão da análise qualitativa do sistema de equações diferenciais resultante das equações de campo. Nestes trabalhos, a eq. fenomenológica do tipo (3.1) com relações adicionais (3.2) e

(3.3) foram consideradas. Podemos citar, como resultado de grande interesse, o efeito de criação de partículas pelo campo gravitacional (estágios superviscosos). Já Novello et Araújo (1981) generalizaram a análise para um caso mais realista, onde o fluido viscoso é considerado em regime não linear. A eq. fenomenológica utilizada era dada por:

$$\pi = -\zeta U^\alpha_{;\alpha} - \beta (U^\alpha_{;\alpha})^2 \quad (3.4)$$

Neste trabalho é ressaltado que a introdução de viscosidade volumar em cosmologia nada mais é que a descrição fenomenológica do efeito de criação de partículas pelo campo gravitacional não estacionário do cosmos em expansão.

No capítulo primeiro vimos as dificuldades e limitações da termodinâmica de processos irreversíveis quando a hipótese do equilíbrio local é tida como válida. As dificuldades são levantadas no estabelecimento de novas equações fenomenológicas oriundas do abandono da hipótese do equilíbrio local. Segue, então nossa proposta de investigar as equações de campo para um fluido com viscosidade volumar no contexto da termodinâmica estendida. Desse modo a eq. (3.1) é substituída por:

$$\dot{\pi} + \pi = -\zeta U^\alpha_{;\alpha} \quad (3.5)$$

Tal relação fenomenológica como vimos, é entendida como uma eq. de evolução para  $\pi^*$ . Devemos ainda ressaltar que a variável de dis

---

\* Na verdade, é garantida a causalidade, pois os sinais viscosos propagar-se-ão com velocidade finita, via eq. hiperbólicas.

sipação  $\pi$  é tão fundamental quando as variáveis do equilíbrio na caracterização do estado do fluido.

A eq. (3.5) não possui termos quadráticos relativamente a  $\pi$ , mas nota-se a presença de derivada temporal da viscosidade evidenciando um regime não estacionário do processo dissipativo.

Na primeira parte consideraremos o caso mais simples que é o de supor  $\zeta$  e  $\tau_0$  constantes. Na segunda parte  $\zeta$  é dado por (3.2) e  $\tau_0$  considerado como constante. O parâmetro  $\tau_0$  foi mantido constante nos dois casos por simplicidade, e ainda por este mesmo motivo os modelos são de seção plana. Em alguns casos, após a verificação das condições de energia, é feito o cálculo da produção de entropia.

### 3.1 - Modelos Cosmológicos fora do Equilíbrio I - Termodinâmica Causal

Vamos considerar um fluido imperfeito, cujo tensor momento é dado por:

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - (p + \pi) h^{\alpha\beta} \quad (3.6)$$

onde  $\pi$  é a pressão devido a viscosidade volumar,  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  a pressão hidrostática. Supondo um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, cuja fonte de curvatura é dada por (3.6), a métrica é escrita como:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1+kr^2/4)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.7)$$

Nesta expressão  $R(t)$  é o fator de escala e  $k$  assume valores de

- 1,0 e +1 no caso de seções tridimensionais abertas, planas e fechadas, respectivamente. Para a determinação de  $R(t)$ , dada a distribuição de matéria (3.6), vamos utilizar as equações do campo gravitacional:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} = - T^{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

sendo  $\Lambda$  a constante cosmológica. Escrevendo as equações (3.8) para a métrica (3.7) e o tensor momento energia (3.6), e ainda incluindo um sistema de coordenadas comoventes com o fluido tal que:

$$U^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (3.9)$$

obtemos:

$$T^0_0 = \rho = 3 \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda \quad (3.10)$$

$$T^i_j = \begin{cases} - (p + \pi) = \frac{2\ddot{R}R + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.11)$$

$$T^0_i = 0 \quad (3.12)$$

Por simplicidade, vamos considerar somente modelos com seção plana, ou seja, com  $k = 0$ . As eqs. de campo se reescrevem como:

$$\rho = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda \quad (3.13)$$

$$-p - \pi = \frac{2\ddot{R}R + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda \quad (3.14)$$

Podemos observar que  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $R$  e  $p$  são funções desconhecidas e possuímos apenas duas equações. Necessitamos de equações adicionais que relacionem entre si algumas grandezas, tais como  $\rho$ ,  $p$  e  $\pi$ . Vamos considerar a equação de estado relativista dada por:

$$p = \lambda\rho \quad (3.15)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Uma outra equação é a relação fenomenológica para  $\pi$ , fornecida pela termodinâmica estendida:

$$\dot{\pi} \tau_0 + \pi = -\zeta U^\mu{}_{,\mu} \quad (3.16)$$

onde  $\tau_0$  é o tempo de relaxação e  $\zeta$  o coeficiente de viscosidade volumar. Como hipótese final, consideraremos uma situação um tanto idealizada, quando  $\zeta$  e  $\tau_0$  são constantes durante toda a evolução cosmológica. Temos, então:

$$\zeta = \frac{2}{3} \alpha \quad (3.17)$$

$$\tau_0 = c \frac{te}{c} \quad (3.18)$$

Não podemos esquecer que  $\zeta \geq 0$  e  $\tau_0 \geq 0$ .

Introduzamos  $H(t)$ , definido por:

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} \quad (3.19)$$

Podemos, depois de uma pequena manipulação algébrica, reescrever as eqs. (3.13) e (3.14) em função de  $H(t)$  e  $\dot{H}(t)$ :

$$\rho = 3H^2 - \Lambda \quad (3.20a)$$

$$-(p+\pi) = 2\dot{H} + 3H^2 - \Lambda \quad (3.20b)$$

Utilizando a eq. de estado (3.15) e juntamente com (3.20a), reescrevemos a eq. (3.20b) na seguinte forma:

$$-\lambda(3H^2 - \Lambda) - \pi = 2\dot{H} + 3H^2 - \Lambda \quad (3.21)$$

Isolando  $\pi(t)$ , obtemos:

$$\pi(t) = -2\dot{H} - 3H^2(\lambda+1) + \Lambda(\lambda+1) \quad (3.22)$$

Derivando (3.22) relativamente ao tempo próprio, obtemos:

$$\dot{\pi}(t) = -2\ddot{H} - 6H\dot{H}(\lambda+1) \quad (3.23)$$

A partir das eqs. (3.22) e (3.23) juntamente com a equação fenomenológica (3.16), podemos escrever:

$$\left[ -2\ddot{H} - 6H\dot{H}(\lambda+1) \right] \tau_0 - 2\dot{H} - 3H^2(\lambda+1) + \Lambda(\lambda+1) = -\zeta U^\mu{}_{,\mu} \quad (3.24)$$

No entanto:

$$U^\mu{}_{,\mu} = \frac{(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}}, = \frac{3\dot{R}}{R} = 3H \quad (3.25)$$

e ainda com  $\zeta$  dado pela eq. (3.17) podemos reescrever a eq. (3.24) por:

$$\tau_0 \ddot{H} + \dot{H} \left[ 1 + 3\tau_0 H(\lambda+1) \right] + \frac{3}{2} H^2(\lambda+1) - \alpha H - \frac{\Lambda}{2} (\lambda+1) = 0 \quad (3.26)$$

Podemos observar que se  $\tau_0 = 0$ , a eq. (3.26) reduz-se a

$$\dot{H} + \frac{3}{2} H^2(\lambda+1) - \alpha H - \frac{\Lambda}{2} (\lambda+1) = 0 \quad (3.27)$$

Esta equação foi obtida por Heller et al (1973).

### 3.1.1 - Resolução da eq. (3.26)

A eq. (3.26) é do tipo  $f = f(H, \dot{H}, \ddot{H}) = 0$  onde a variável independente não aparece explicitamente. Podemos inicialmente reduzir sua ordem supondo que:

$$\dot{H} = \dot{H}(H) \quad (3.28)$$

Daí, segue que:

$$\ddot{H} = \frac{d\dot{H}}{dt} = \frac{d\dot{H}}{dH} \frac{dH}{dt} = \frac{d\dot{H}}{dH} \dot{H} \quad (3.28')$$

Substituindo (3.28') em (3.26), obtemos:

$$\tau_0 \dot{H} \frac{d\dot{H}}{dH} + \dot{H} \left[ 1 + 3\tau_0 H(\lambda+1) \right] + \frac{3H^2}{2}(\lambda+1) - \alpha H - \frac{\Lambda}{2}(\lambda+1) = 0 \quad (3.29)$$

Façamos:

$$e \left. \begin{array}{l} y = \dot{H} \\ x = H \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Então (3.29) é reescrita por:

$$\tau_0 Y \frac{dy}{dx} + Y \left[ 1 + 3\tau_0 x(\lambda+1) \right] + \frac{3x^2}{2} (\lambda+1) - \alpha x - \frac{\Lambda}{2} (\lambda+1) = 0 \quad (3.31)$$

Notemos que os três últimos termos de (3.31) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} x^2 (\lambda+1) - \alpha x - \frac{\Lambda}{2} (\lambda+1) &= \frac{3}{2} (\lambda+1) \left( x - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} \right)^2 - \\ &- \frac{(\lambda+1)}{2} \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\lambda+1)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Isso nos sugere introduzir a variável  $\mu$ , expressa por:

$$\mu = x - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} \quad (3.33)$$

de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{dy}{d\mu}$$

A eq. (3.31) é por fim escrita como:

$$\tau_0 Y \frac{dy}{d\mu} + Y \left[ 1 + \tau_0 \alpha + 3\tau_0 (\lambda+1)\mu \right] + \frac{3}{2} (\lambda+1) \mu^2 - \frac{(\lambda+1)}{2} \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\mu+1)^2} \right) = 0 \quad (3.34)$$

Suponhamos uma solução do tipo:

$$y(\mu) = a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 \quad (3.35)$$

Introduzindo (3.25) em (3.24), obtemos:

$$\tau_0 (a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2) (a_1 + 2a_2 \mu) + (a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2) \left( 1 + \alpha \tau_0 + 3\tau_0 \mu (\lambda + 1) \right) + \frac{3}{2} (\lambda + 1) \mu^2 - \frac{(\lambda + 1)}{2} \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\lambda + 1)^2} \right) = 0$$

Separando os termos semelhantes, obteremos as seguintes equações:

$$\tau_0 a_0 a_1 + a_0 (1 + \alpha \tau_0) - \frac{(\lambda + 1)}{2} \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\lambda + 1)^2} \right) = 0 \quad (3.36a)$$

$$2\tau_0 a_0 a_2 + a_1^2 \tau_0 + a_1 (1 + \alpha \tau_0) + 3\tau_0 a_0 (\lambda + 1) = 0 \quad (3.36b)$$

$$3\tau_0 a_2 a_1 + (1 + \tau_0 \alpha) a_2 + 3\tau_0 a_1 (\lambda + 1) + \frac{3}{2} (\lambda + 1) = 0 \quad (3.36c)$$

$$2a_2^2 \tau_0 + 3\tau_0 (\lambda + 1) a_2 = 0 \quad (3.36d)$$

Observemos que são quatro equações para a determinação de  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ . Vamos impor que uma das equações, será uma relação de vínculo entre as constantes  $\Lambda$ ,  $\tau_0$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ , de modo que efetivamente temos três equações independentes. Iniciando pela eq. (3.26d), podemos facilmente determinar  $a_2$ :

$$a_2 = 0 \quad (3.37)$$

$$a_2 = -\frac{3}{2} (\lambda+1) \quad (3.37')$$

Consideremos inicialmente  $a_2 = 0$ . Substituindo (3.37) em (3.36c), segue:

$$3\tau_0 a_1 (\lambda+1) + \frac{3}{2} (\lambda+1) = 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2\tau_0} \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) e (3.37) em (3.36b), obtemos para  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1 + 2\tau_0 \alpha}{12\tau_0^2 (\lambda+1)} \quad (3.39)$$

Para obtermos a relação de vínculo mencionada anteriormente, devemos considerar a eq. (3.36a) juntamente com (3.39) e (3.38). Desse modo, após algum algebrismo, temos:

$$(1 + 2\tau_0 \alpha)^2 = 12\tau_0^2 (\lambda+1)^2 \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\lambda+1)^2} \right) \quad (3.40)$$

Podemos simplificar (3.40) e obter:

$$\Lambda = \frac{1 + 4\alpha\tau_0}{12\tau_0^2 (\lambda+1)^2} \quad (3.40')$$

Notamos uma dependência entre a constante cosmológica e o tempo de relaxação envolvido no processo de viscosidade volumar.

Como  $\alpha, \tau_0 > 0$  segue que  $\Lambda$  é sempre positivo. Finalmente  $y(\mu)$  é escrito como:

$$y(\mu) = a_0 - \frac{\mu}{2\tau_0} \quad (3.41)$$

onde  $a_0$  é dado por (3.39). Antes de passarmos adiante, considere-  
mos  $a_2$  dado por (3.37'). Realizando o mesmo procedimento para a de-  
terminação de  $a_1$ ,  $a_0$  e da relação de vínculo, obtemos, respectiva-  
mente:

$$a_1 = -\alpha \quad (3.42)$$

$$a_0 = \frac{\Lambda+1}{2} \left( \Lambda + \frac{\alpha^2}{3(\lambda+1)^2} \right) \quad (3.43)$$

$$\alpha = 0 \quad (3.44)$$

Neste caso o coeficiente de viscosidade volumar é nulo, enquanto  
que o tempo de relaxação envolvido no processo é não nulo. A equa-  
ção (3.16) fica reduzida a:

$$\dot{\pi} \tau_0 + \pi = 0$$

No entanto, como, ainda neste caso, temos:

$$\dot{H} = 3 \frac{(\lambda+1)}{2} \left( \frac{\Lambda}{3} - H^2 \right)$$

e tendo em vista que  $\pi(t)$  é dado pela equação (3.22), segue que:

$$\pi(t) = -3(\lambda+1) \left( \frac{\Lambda}{3} - H^2 \right) - 3H^2(\lambda+1) + \Lambda(\lambda+1) = 0$$

Logo a viscosidade volumar é nula. Portanto, para os coeficien-  
tes dados por (3.42), (3.43) e (3.44), recuperamos o modelo pa-  
drão (modelo de Friedmann) com seção plana.

Concentremo-nos, então, em (3.41). Tendo em vista (3.33) e (3.30), podemos escrever:

$$\dot{H} = a_0 - \frac{1}{2\tau_0} \left[ H - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} \right] \quad (3.45)$$

de modo que esta equação é facilmente integrada. Arrumando os termos convenientemente, vem:

$$\left[ \frac{dH}{H - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} - 2\tau_0 a_0} = - \frac{1}{2\tau_0} dt \right]$$

E finalmente:

$$H - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} - 2\tau_0 a_0 = C_1 e^{-t/2\tau_0} \quad (3.46)$$

Tomando a definição de H, escrevemos:

$$\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} - 2\tau_0 a_0 = C_1 e^{-t/2\tau_0}$$

Integrando novamente, obteremos R(t):

$$R(t) = R_0 e^{\left[ \frac{\alpha}{3(\lambda+1)} + 2\tau_0 a_0 \right] t - 2\tau_0 C_1 e^{-t/2\tau_0}} \quad (3.47)$$

onde  $R_0$  e  $C_1$  são constantes. O coeficiente de t na exponencial da eq. (3.47) pode ser reescrito por:

$$\frac{\alpha}{3(\lambda+1)} + 2\tau_0 a_0 = \frac{1 + 4\alpha\tau_0}{6\tau_0(\lambda+1)} \quad (3.47)$$

quando tomamos  $a_0$  dado por (3.39). Da equação de vínculo (3.40'), vem:

$$\frac{\alpha}{3(\lambda+1)} + 2\tau_0 a_0 = 2\tau_0 \Lambda (\lambda+1) \quad (3.47')$$

Então (3.47) é colocado na seguinte forma:

$$R(t) = R_0 e^{2\tau_0(\lambda+1) \left[ \Lambda t - \frac{C_1}{(\lambda+1)} e^{-t/2\tau_0} \right]} \quad (3.48)$$

Da eq. (3.48) observamos que o raio do universo  $R(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Na verdade não existe um momento de criação (big bang) Desse modo, podemos considerar a solução apresentada como sendo não singular. O modelo tem expansão não nula visto que o parâmetro cinemático  $\theta$ , sendo dado por:

$$\theta = U^\mu{}_{;\mu} = \frac{3\dot{R}}{R} \quad (3.49)$$

assume a seguinte forma para  $R(t)$  dado pela eq. (3.48):

$$\theta = 6\tau_0(\lambda+1) \Lambda + 3C_1 e^{-t/2\tau_0} \quad (3.50)$$

Logo a expansão é sempre positiva para qualquer tempo  $t$ . Da eq. (3.50) observamos que se  $t$  é muito grande o termo exponencial desaparece e conseqüentemente  $\theta$  torna-se constante. Neste limite o modelo se aproxima a um modelo estacionário tipo de de Sitter.

A seguir temos os gráficos  $R(t)$  versus  $t$  e  $\theta(t)$  versus  $t$

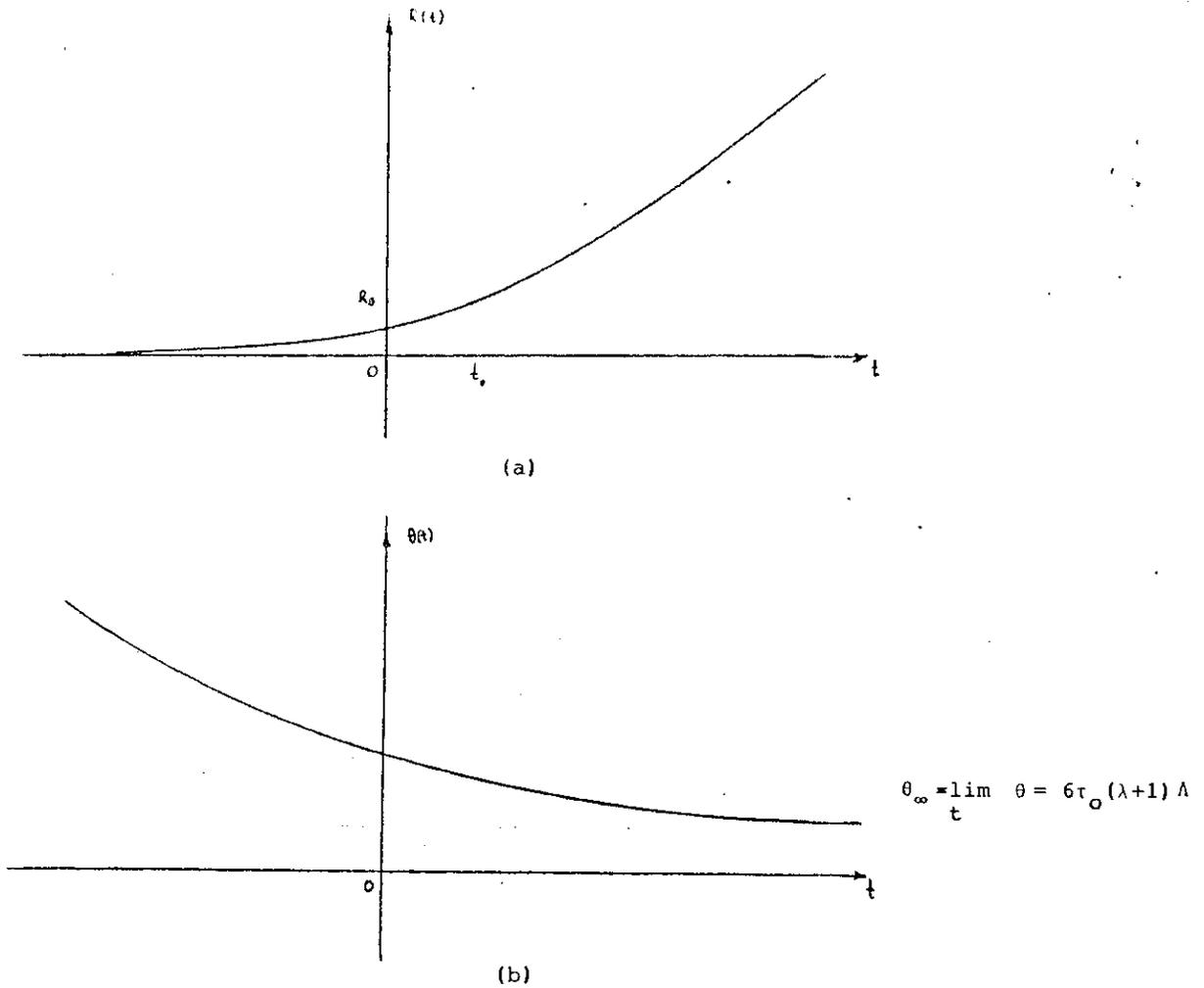


fig. 3.1.1 a) Gráfico de  $R(t)$  dado pela eq. 3.48; b) Gráfico da expansão  $\theta(t)$

Das equações (3.20a), (3.15) e (3.20b) podemos calcular  $\rho(t)$ ,  $p(t)$  e  $\pi(t)$ , respectivamente.  $H(t)$  dado pela eq. (3.46) é reescrito a baixo.

$$H(t) = 2\tau_0(\lambda+1)\Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.20a) obtemos:

$$\rho(t) = 3 \left[ 2\tau_0(\lambda+1) \Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \right]^2 - \Lambda \quad (3.52)$$

De (3.15), segue:

$$p(t) = 3\lambda \left[ 2\tau_0(\lambda+1) \Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \right]^2 - \Lambda \lambda \quad (3.53)$$

Substituindo (3.51) em (3.20b), obtemos:

$$\pi(t) = \frac{C_1}{\tau_0} e^{-t/2\tau_0} - 3(\lambda+1) \left[ 2\tau_0(\lambda+1) \Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \right]^2 + \Lambda(\lambda+1) \quad (3.54)$$

### 3.1.2 - Condições de Energia

Vamos submeter o modelo encontrado às condições de energia<sup>(34)</sup>, uma vez que toda forma de matéria fisicamente razoável deve satisfazer tais condições. A condição de energia fraca estabelece que a densidade local de energia medida por qualquer observador é não negativa. Para observadores dotados de velocidade  $U^\alpha(x)$ , temos:

$$T^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta \geq 0 \quad (3.55)$$

Considerando a expressão do tensor momento energia (3.6), e que  $U^\alpha$  é normalizado por  $U^\alpha U_\alpha = 1$ , (3.55) se reduz a

$$\rho \geq 0 \quad (3.56)$$

Devemos verificar se a eq. (3.56) é satisfeita para  $\rho(t)$  da

do por (3.52). Nesta expressão, notamos que o termo exponencial entre colchetes vai a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste limite  $\rho(t)$  atinge seu valor mínimo. Então se  $\rho(t = \infty) \geq 0$ , este será sempre positivo para qualquer tempo  $t$ . Voltando a (3.52) e fazendo  $t \rightarrow \infty$ , vem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 12\tau_0^2 (\lambda+1)^2 \Lambda^2 - \Lambda = \Lambda \left[ 12\tau_0^2 (\lambda+1)^2 \Lambda - 1 \right] \quad (3.57)$$

Lançando mão da equação de vínculo (3.40') e voltando para a eq. anterior, vem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \Lambda (1 + 4\alpha\tau_0 - 1) = 4\alpha\tau_0 \Lambda \geq 0 \quad (3.58)$$

De imediato constatamos que  $\rho(t = \infty)$  é positivo e conseqüentemente está garantida a positividade de  $\rho(t)$  para qualquer tempo  $t$ .

A condição de energia dominante estabelece que, além da positividade da densidade local de energia, o fluxo de energia é do tipo-tempo. Isso significa que o transporte de energia associado com o processo de dissipação se faz com velocidade menor que a da luz<sup>(46)</sup>. Para o tensor momento-energia dado pela eq. (3.6), temos:

$$\rho \geq |P| = |p + \pi| \quad (3.59)$$

Utilizando as eqs. de campo (3.20) em (3.59), extraímos a seguinte relação a ser satisfeita por  $H(t)$ :

$$-\rho \leq \dot{H} \leq 0 \quad (3.60)$$

Sendo  $H(t)$  dado pela eq. (3.51), podemos facilmente calcular  $\dot{H}(t)$ :

$$\dot{H}(t) = - \frac{c_1}{2\tau_0} e^{-t/2\tau_0} \quad (3.61)$$

De imediato, vemos que  $\dot{H}(t) < 0$  para qualquer tempo  $t$ . Falta ainda mostrar que  $\dot{H} + \rho(t) \geq 0$ . Utilizando as eqs. (3.52) e (3.61), podemos escrever:

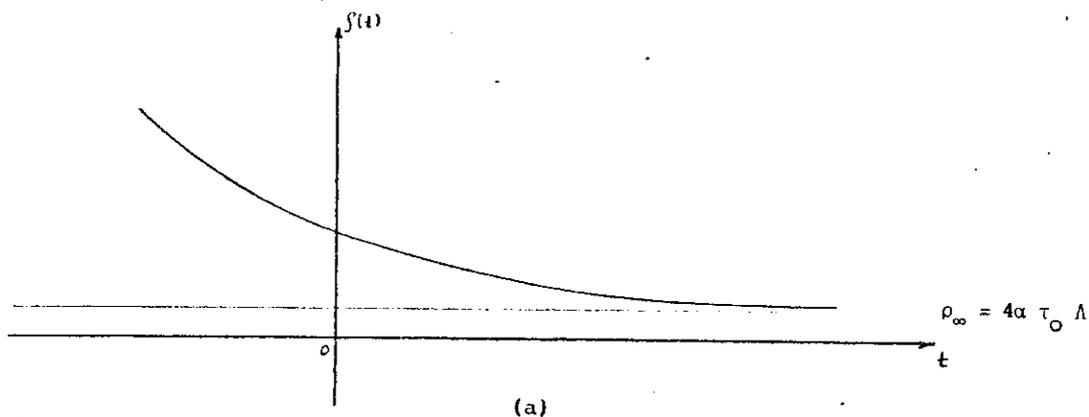
$$\begin{aligned} \dot{H} + \rho = \Lambda \left[ 12\tau_0^2 (\lambda+1)^2 \Lambda - 1 \right] + 3c_1^2 e^{-t/\tau_0} + \\ + \frac{c_1}{\tau_0} e^{-t/2\tau_0} \left[ 12\tau_0^2 (\lambda+1) \Lambda - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

O primeiro termo é positivo como vimos anteriormente. Destacando no último termo a parte dentro dos colchetes, e tendo em vista a relação (3.40'), segue:

$$- \frac{1}{2} + 12\tau_0^2 (\lambda+1) \Lambda = - \frac{1}{2} + \frac{1 + 4\alpha\tau_0}{(\lambda+1)} = \frac{8\alpha\tau_0 + 1 - \lambda}{(\lambda+1)} \quad (3.63)$$

Como  $\alpha\tau_0 \geq 0$ , este termo é sempre positivo visto que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Portanto a condição de energia dominante é inteiramente satisfeita.

A seguir são mostrados os gráficos referentes ao comportamento de  $\rho(t)$  e  $\pi(t)$ .



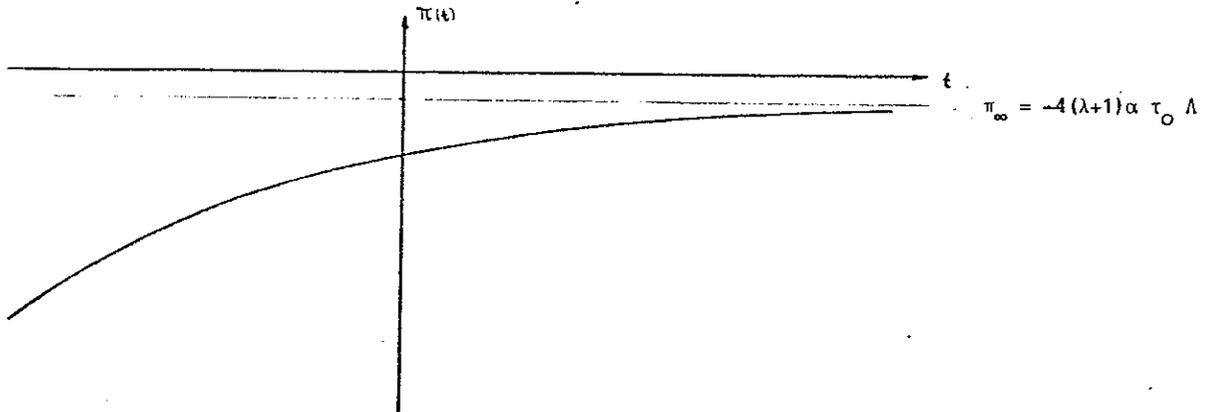


fig. 3.1.2 - (a) Gráfico de  $\rho(t)$   
 (b) Gráfico de  $\pi(t)$

Notamos que, para um tempo suficientemente longo  $\rho$  e  $\pi$  tendem a um valor constante, apesar da expansão do universo ( $\theta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \text{cte}$ ). Podemos interpretar esta peculiaridade como sendo resultado da criação de matéria pelo campo gravitacional. Tal característica é esperada ocorrer em universos viscosos, pois esta pode ser entendida como sendo a descrição fenomenológica da criação de matéria pelo campo gravitacional, fato este já frisado anteriormente.

### 3.1.3 - Produção de Entropia

A produção de entropia devido a viscosidade volumar é dada por

$$\sigma = \frac{\pi^2}{\zeta T} \quad (3.64)$$

Ainda de acordo com o cap. 1, a produção de entropia pode ser escrita como:

$$\sigma = n\dot{s} + I_{S^{\mu}}^{\mu}$$

No entanto  $I_{S^{\mu}}^{\mu} = 0$ , devido a ausência do fluxo de calor. Assim a equação (3.64) pode ser expressa por:

$$n\dot{s} = \frac{\pi^2}{\zeta T} \quad (3.65)$$

explicitando  $s$ , vem:

$$\dot{s} = \frac{\pi^2}{\zeta n T} \geq 0 \quad (3.66)$$

A eq. (3.66) nos informa acerca da taxa de variação da entropia por partícula. Substituindo  $\pi$  dado por (3.51) em (3.66) e sabendo que  $n$  pode ser calculado através da lei de conservação do número de partículas, obtemos para  $n(t)$  e  $\dot{s}$  as seguintes expressões:

$$n(t) = n_0 R^{-3}(t) \quad (3.67)$$

$$\dot{s}(t) = \frac{\left\{ \frac{c_1 e^{-t/2\tau_0}}{\tau_0} - 3(\lambda+1) \left[ 2\tau_0(\lambda+1)\Lambda + c_1 e^{-t/2\tau_0} \right]^2 + \Lambda(\lambda+1) \right\}^2}{\frac{2}{3} \alpha n_0 T(t)} e^{6\tau_0(\lambda+1) \left[ \Lambda t - \frac{c_1 e^{t/2\tau_0}}{(\lambda+1)} \right]} \quad (3.68)$$

Como estamos utilizando uma aproximação linear, a temperatura será a mesma daquela definida no equilíbrio local. Seguindo Heller (1983), temos que

$$T(t) = T_0 R^{-2}(t) \quad (3.69)$$

para  $\lambda = 0$ , ou seja, o caso em que haja poeira; e

$$T(t) = T_0 R^{-1}(t) \quad (3.70)$$

para  $\lambda = 1/3$ , ou seja, o caso em que haja radiação. A seguir vamos calcular  $\dot{s}$  para esses dois casos.

1ª) Poeira ( $\lambda = 0$ ):

Substituindo (3.69) em (3.68), obtemos:

$$\dot{s}(t) = \left[ \frac{C_1 e^{-t/2\tau_0}}{\tau_0} - 3 \left( 2\tau_0 \Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \right)^2 + \Lambda \right]^2 \frac{10\tau_0 \left( \Lambda t - C_1 e^{-t/2\tau_0} \right)}{\frac{e}{\frac{2n_0}{3} \alpha T_0}} \quad (3.71)$$

Em (3.71) notemos que no limite  $t \rightarrow -\infty$  segue que  $\dot{s} \rightarrow 0$  e para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\dot{s} \rightarrow \infty$ . Desse modo, o universo no passado estava em equilíbrio termodinâmico (sem produção de entropia). No decorrer de sua evolução, processos dissipativos tomam lugar fazendo com que a entropia do universo aumentasse gradativamente.

2ª) Radiação ( $\lambda = 1/3$ )

Substituindo (3.70) em (3.68), obtemos:

$$\dot{s}(t) = \left[ \frac{C_1 e^{-t/2\tau_0}}{\tau_0} - 4 \left( \frac{8\tau_0}{3} \Lambda + C_1 e^{-t/2\tau_0} \right)^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right]^2 \frac{32\tau_0 \left( \Lambda t - \frac{3C_1}{4} e^{-t/2\tau_0} \right)}{\frac{2}{3} \alpha n_0 T_0} \quad (3.72)$$

Novamente para  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\dot{s} \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow \infty$ ,  $\dot{s} \rightarrow \infty$ .

Em ambos os casos a expansão se faz de maneira irreversível pois, de acordo com a eq. (3.66), a entropia  $s(t)$  é uma função crescente. Temos então definida a direção relativamente ao qual o tempo deve ser tomado, que é aquela que proporcione sempre o aumento da entropia  $S$  do conteúdo material definida por:

$$S(\Sigma) = \int_{\Sigma} nsu^{\mu} ds_{\mu} \quad (3.73)$$

onde  $\Sigma$  representa uma hipersuperfície tipo espaço caracterizada pelo tempo  $t = cte$ .

### 3.2 - Modelos Cosmológicos Fora do Equilíbrio II - Termodinâmica Causal

Consideraremos aqui basicamente a mesma situação da seção anterior. O tensor momento-energia é dado por (3.6), sendo a métrica tipo Robertson-Walker com seção plana. Adotamos as eqs. de Einstein com termo cosmológico dadas por (3.8). A diferença fundamental reside na escolha do valor do coeficiente de viscosidade volumar  $\zeta$ , que anteriormente foi tido como constante durante toda a evolução cosmológica. Nesta seção vamos supor que este coeficiente seja variável e descrito como:

$$\zeta = \beta \rho \tag{3.74}$$

onde  $\beta$  é uma constante e  $\rho$  é densidade de energia. A relação (3.74) foi inicialmente utilizada por Murphy no sentido de obter uma descrição algo mais realista do que a resultante da escolha anterior. Por simplicidade tomaremos o tempo de relaxação como sendo constante tal qual na situação anterior.

Definido  $H(t)$  por:

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} \tag{3.75}$$

e escrevendo as equações de campo (3.8) para a métrica (3.7) com  $k = 0$  e o tensor momento-energia (3.6), temos:

$$\rho = 3H^2 - \Lambda \tag{3.76a}$$

$$-p - \pi = 2\dot{H} + 3H^2 - \Lambda \tag{3.76b}$$

Como antes, podemos escrever:

$$p = \lambda \rho \tag{3.77}$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  e

$$\dot{\pi} \tau_0 + \pi = - \zeta U_{\alpha}^{\alpha} \quad (3.78)$$

Substituindo (3.77) e (3.76a) em (3.76b) e explicitando  $\pi(t)$ , obtemos:

$$\pi = - 2\dot{H} - 3H^2(\lambda+1) + \Lambda(\lambda+1) \quad (3.79)$$

Derivando (3.79) relativamente ao tempo próprio, vem:

$$\dot{\pi} = - 2\ddot{H} - 6\dot{H}H(\lambda+1) \quad (3.80)$$

Substituindo (3.79), (3.80) e (3.74) em (3.78) e tendo em vista que  $U_{\alpha}^{\alpha} = 3H$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \tau_0 \ddot{H} + \dot{H}[3\tau_0(\lambda+1)H+1] - \frac{9}{2} H^3 \beta + \frac{3}{2} H^2(\lambda+1) + \frac{3\beta}{2} \Lambda H - \\ - \frac{\Lambda}{2}(\lambda+1) = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Façamos como antes, a suposição de que:

$$\dot{H} = \dot{H}(H) \quad (3.82)$$

Segue, então, que

$$\ddot{H} = \dot{H} \frac{d\dot{H}}{dH} \quad (3.83)$$

Definamos  $x$  e  $y$ , por:

$$y = \dot{H} \quad (3.84a)$$

$$x = H \quad (3.84b)$$

De (3.84a) e (3.84b), (3.81) é reescrita por:

$$\begin{aligned} \tau_0 y \frac{dy}{dx} + y[3\tau_0(\lambda+1)x+1] - \frac{9\beta}{2} x^3 + \frac{3x^2}{2}(\lambda+1) + \frac{3}{2} \beta \Lambda x - \\ - \frac{\Lambda}{2}(\lambda+1) = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Suponhamos uma solução do tipo

$$y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (3.86)$$

Substituindo (3.86) em (3.85), obtemos:

$$\begin{aligned} & \tau_0 (A_0 + A_1x + A_2x^2) (A_1 + 2A_2x) + (A_0 + A_1x + A_2x^2) [3x(\lambda+1)\tau_0 + 1] - \\ & - \frac{9\beta}{2} x^3 + \frac{3}{2}(\lambda+1)x^2 + \frac{3}{2}\beta\lambda x - \frac{\lambda}{2}(\lambda+1) = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Separando os termos semelhantes vamos obter o seguinte sistema de equações:

$$\tau_0 A_0 A_1 + A_0 - \frac{\lambda}{2}(\lambda+1) = 0 \quad (3.88a)$$

$$2\tau_0 A_0 A_2 + A_1^2 \tau_0 + 3\tau_0 (\lambda+1)A_0 + A_1 + \frac{3}{2}\lambda\beta = 0 \quad (3.88b)$$

$$3\tau_0 A_1 A_2 + 3\tau_0 (\lambda+1)A_1 + A_2 + \frac{3}{2}(\lambda+1) = 0 \quad (3.88c)$$

$$2\tau_0 A_2^2 + 3\tau_0 (\lambda+1)A_2 - \frac{9}{2}\beta = 0 \quad (3.88d)$$

Novamente observamos que obtivemos quatro equações para a determinação de  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$ . Uma das equações nos fornecerá uma relação entre as constantes  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda$  e  $\tau_0$ . Iniciemos por (3.88d). Resolvendo esta equação obtemos  $A_2$  que é dado por:

$$A_2 = \frac{3}{4}(\lambda+1) (\eta-1) \quad (3.89a)$$

$$e \quad A_2 = -\frac{3}{4}(\lambda+1) (\eta+1) \quad (3.89b)$$

$$\text{onde } \eta = \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\tau_0^2 (\lambda+1)^2}} \quad (3.90)$$

Consideremos inicialmente  $A_2$  dado por (3.89a). Substituindo (3.89a) em (3.88c), obtemos:

$$A_1 = -\frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\eta+1}{3\eta+1} \right) \quad (3.91a)$$

$A_0$  é obtido quando substituímos (3.91a) em (3.88a).

$$A_0 = \frac{\Lambda}{4\eta} (\lambda+1) (3\eta+1) \quad (3.92a)$$

A relação de vínculo entre as constantes  $\beta$ ,  $\tau_0$ ,  $\Lambda$  e  $\lambda$  é obtida quando substituímos (3.89a), (3.91a) e (3.92a) em (3.88b). Após esta substituição, explicita-se  $\Lambda$  e obtem-se a seguinte expressão:

$$\Lambda = \frac{4\eta(\eta+1)}{3\tau_0(3\eta+1)^2 \left[ \beta + \frac{\tau_0(\lambda+1)^2}{4\eta} (3\eta+1)(\eta+1) \right]} \quad (3.93a)$$

Notamos que na equação (3.93a)  $\Lambda$  é sempre positivo.

Consideremos agora  $A_2$  dado por (3.89b). Lançando mão do mesmo procedimento utilizado anteriormente, podemos calcular  $A_1$ ,  $A_0$  e a relação de vínculo, dados respectivamente por:

$$A_1 = -\frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\eta-1}{3\eta-1} \right) \quad (3.91b)$$

$$A_0 = \frac{\Lambda(\lambda+1)}{4\eta} (3\eta-1) \quad (3.92b)$$

$$\Lambda = \frac{4\eta(\eta-1)}{3\tau_0(3\eta-1)^2 \left[ \beta - \frac{\tau_0}{4\eta} (\lambda+1)^2 (3\eta-1)(\eta-1) \right]} \quad (3.93b)$$

Voltemos à equação (3.86) e a reescrevamos de uma maneira mais conveniente, de modo que obtemos:

$$y(x) = A_2 \left[ \left( x + \frac{A_1}{2A_2} \right)^2 + \frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2} \right] \quad (3.94)$$

Tendo em vista (3.84a) e (3.84b), vem:

$$\dot{H} = A_2 \left[ \left( H + \frac{A_1}{2A_2} \right)^2 + \frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2} \right] \quad (3.95)$$

Integrando esta expressão, obtemos:

$$\int \frac{dH}{\left( H + \frac{A_1}{2A_2} \right)^2 + \frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2}} = A_2 t + C_1 \quad (3.96)$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração. Vamos considerar  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  dados por (3.92a), (3.91a) e (3.89a), respectivamente e integrar o primeiro membro de (3.96). Devemos primeiramente calcular o sinal do termo  $\frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2}$  que é determinado no apêndice D. Neste apêndice, essa expressão é reescrita abaixo:

$$B = \frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_2^2} = \frac{4\eta(\eta-1)(3\eta+1) - (\eta+1)^4}{\frac{9}{4} \tau_0^2 (3\eta+1)^2 (\eta^2-1)^2 (\lambda+1)^2} \quad (3.97)$$

Podemos inferir que  $B$  é sempre negativo para qualquer  $\eta$  e, aproximadamente nulo para  $\eta = 4,24$ . Consideremos então os seguintes casos:

1º)  $B \neq 0$ . A expressão (3.96) fica sendo escrita por:

$$\int \frac{dH}{\left(H + \frac{A_1}{2A_2}\right)^2 - |B|} = A_2 t + C_1$$

Integrando o primeiro membro com a suposição de que

$$\left| \frac{H + \frac{A_1}{2A_2}}{\sqrt{|B|}} \right| < 1 \quad \text{vem:}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{|B|}} \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{H + \frac{A_1}{2A_2}}{\sqrt{|B|}} \right) = A_2 t + C_1$$

Após alguma manipulação,  $H(t)$  é explicitado e escrito por:

$$H(t) = + \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tgh} [\sqrt{|B|} (A_2 t + C_2)] \quad (3.98)$$

Utilizando a definição de  $H(t)$ , podemos calcular facilmente

R(t) a partir da equação (3.98). Após a integração e algum algebrismo, obtemos:

$$R(t) = R_0 e^{\frac{|A_1| t}{2A_2}} \operatorname{sech} \frac{1}{A_2} (\sqrt{|B|} A_2 t) \quad (3.99)$$

sendo  $R_0$  uma constante e  $C_2$  considerado nulo. O comportamento de  $R(t)$  pode ser aferido através do gráfico mostrado a seguir.

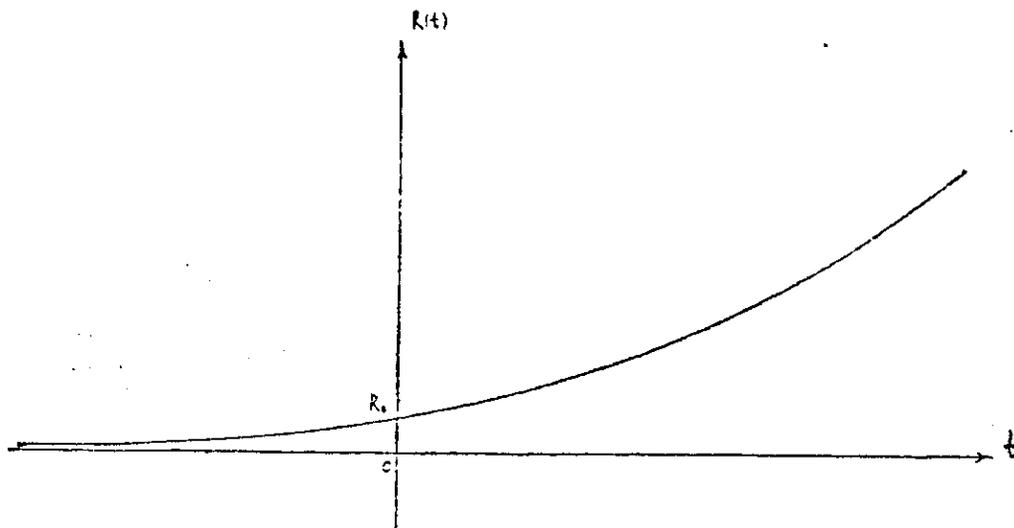


Fig.3.2.1. - Gráfico de  $R(t)$  dado pela eq. 3.99

A expansão  $\theta$  é dada por

$$\theta = 3H = 3 \left[ \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|} A_2 t) \right] \quad (3.100)$$

O gráfico abaixo mostra a variação de  $\theta$  com o tempo  $t$ .

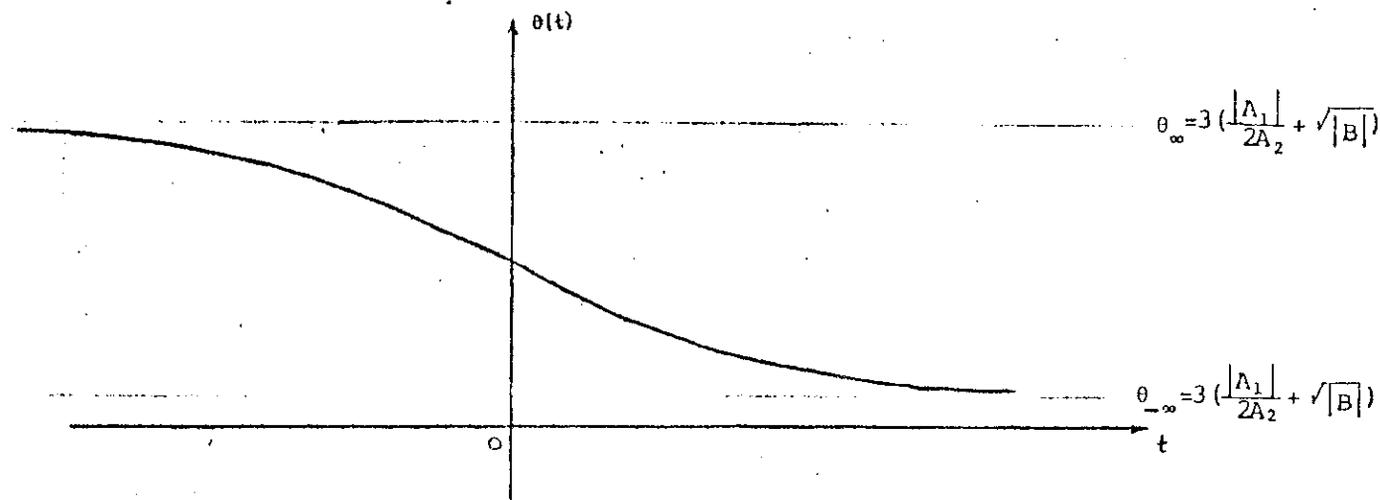


Fig.3.2.2.- Gráfico da expansão  $\theta(t)$

2º)  $B = 0$ . A expressão (3.96) fica sendo escrita por:

$$\int \frac{dH}{\left(H + \frac{A_1}{2A_2}\right)^2} = A_2 t + C_1$$

Após a integração e alguns cálculos, vem:

$$H(t) = \frac{-1}{A_2 t + C_1} + \frac{|A_1|}{2A_2} \quad (3.101)$$

A partir da definição de  $H(t)$  podemos facilmente calcular  $R(t)$ . Este é dado por:

$$R(t) = R_0 \frac{e^{\frac{|A_1|t}{2A_2}}}{(A_2 t + C_1)^{\frac{1}{A_2}}} \quad (3.102)$$

O gráfico  $R(t)$  versus  $t$  é mostrado abaixo.

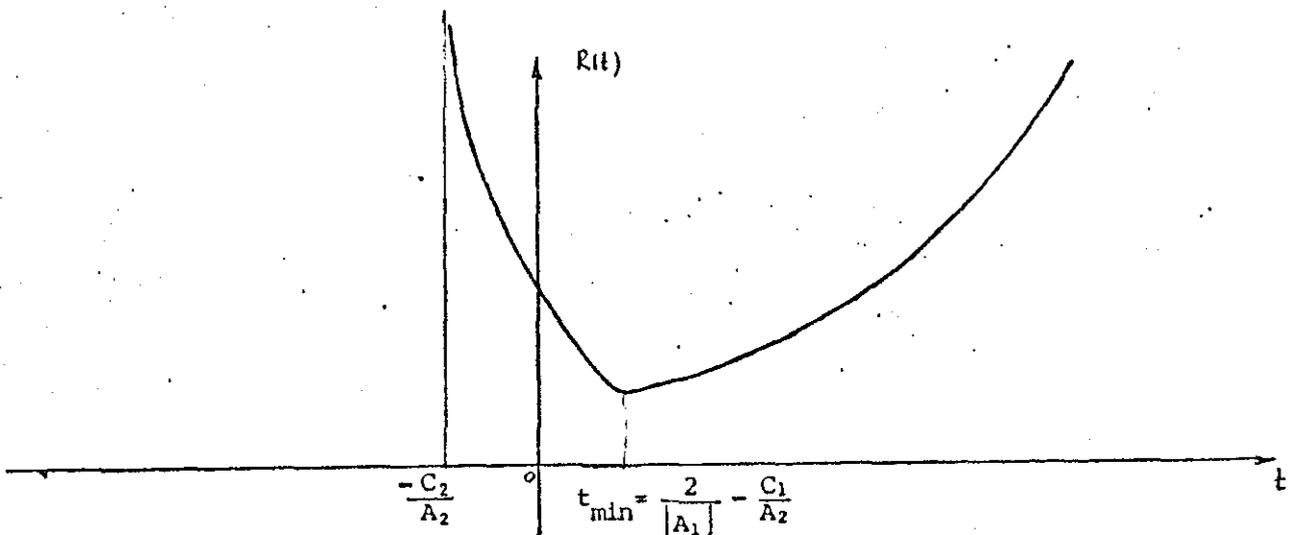


Fig. 3.2.3. - Gráfico de  $R(t)$  dado pela eq. 3.102

O gráfico da expansão  $\theta$  é mostrado a seguir.

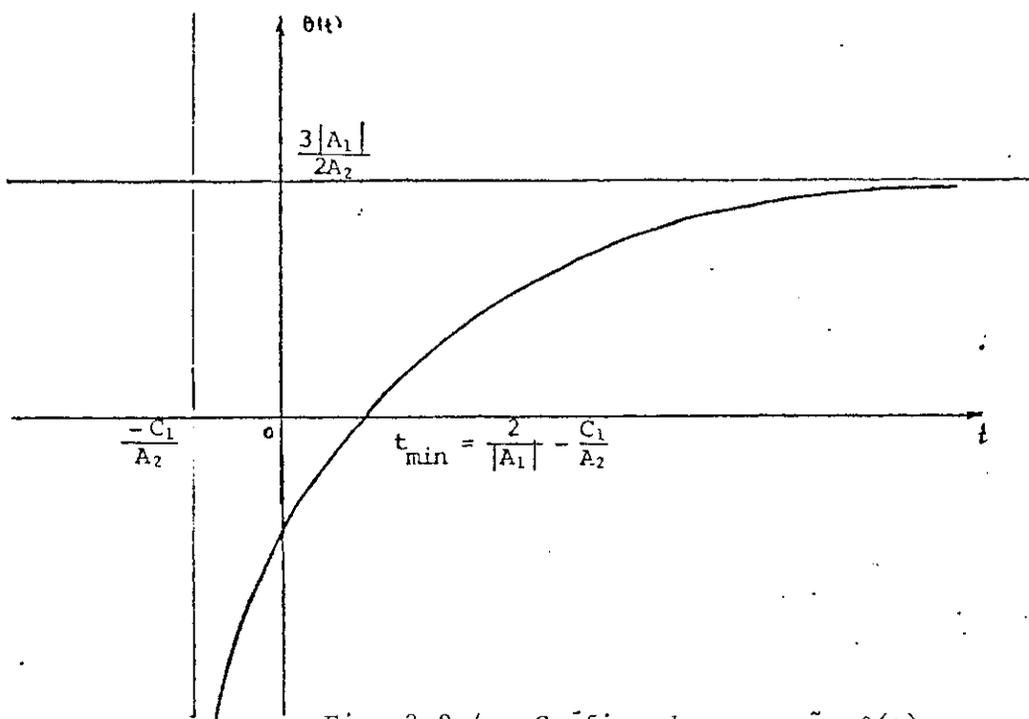


Fig. 3.2.4.- Gráfico da expansão  $\theta(t)$

Os dois modelos encontrados são não singulares. Falta a verificação das condições de energia para esses modelos que será realizada mais adiante.

Vamos considerar (3.96) utilizando os valores de  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  dados pelas equações (3.92b), (3.91b) e (3.89b), respectivamente. Como antes, devemos conhecer o sinal do termo  $\frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2}$ . Aqui  $A_2$  é negativo, então seguem as possibilidades:

- se  $A_0 > 0$ , então  $\frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2}$  é negativo;

- se  $A_0 < 0$ , então  $\frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2}$  pode ser negativo, positivo ou nu-

lo. No entanto, da equação (3.92b) vemos que o sinal de  $A_0$  vai ser determinado pelo sinal da constante cosmológica  $\Lambda$ . Este, por sua vez é determinado após algum algebrismo (vide apêndice D). A expressão para  $\Lambda$  é dada por:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3\eta-1)^2(\eta-1)^2} \quad (3.103)$$

sendo  $\Lambda > 0$ ,  $A_0 > 0$  e  $\frac{4A_2A_0 - A_1^2}{4A_2^2} < 0$ . Façamos:

$$G = \frac{-4|A_2|A_0 - A_1^2}{4A_2^2} \quad (3.104)$$

Voltando à equação (3.96), temos:

$$\int \frac{dH}{\left(H + \frac{A_1}{2A_2}\right)^2 - |G|} = A_2 t + C_1$$

Integrando o primeiro membro com a suposição de que

$$\left| \frac{H + \frac{A_1}{2A_2}}{\sqrt{|G|}} \right| > 1, \text{ vem:}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{|G|}} \operatorname{cotg} h^{-1} \left( \frac{H + \frac{A_1}{2A_2}}{\sqrt{|G|}} \right) = -|A_2|t + C_1$$

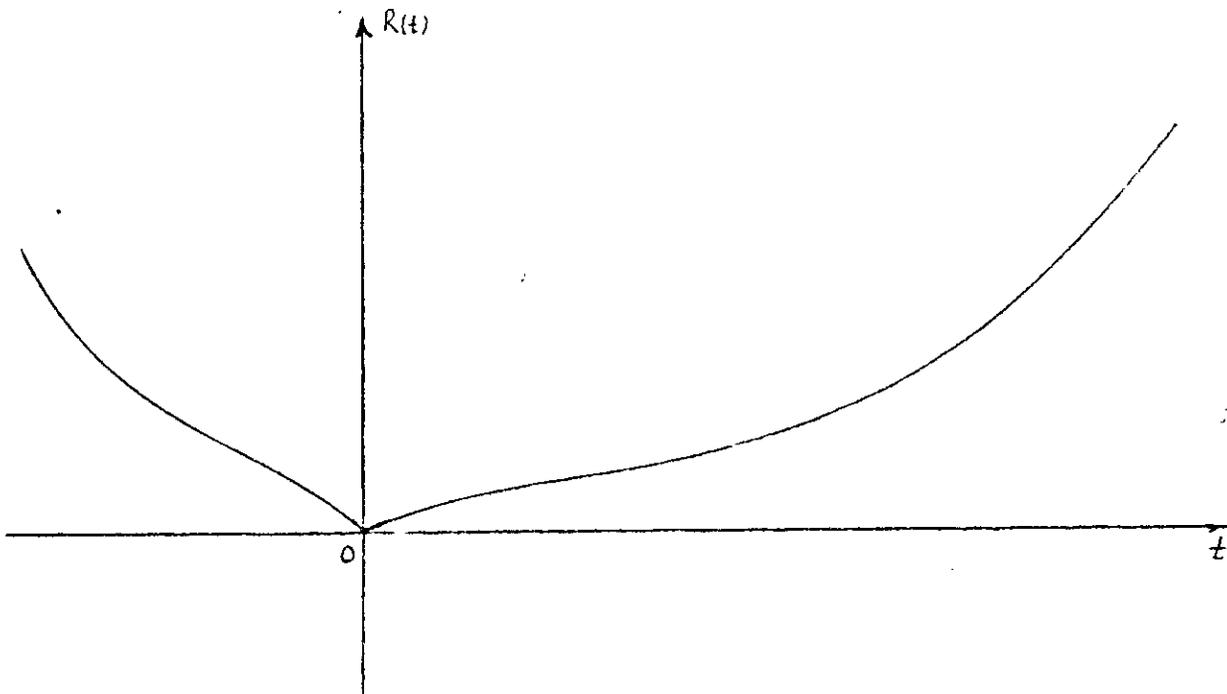
Após algumas passagens,  $H(t)$  é dado por:

$$H(t) = \sqrt{|G|} \operatorname{cotg} h \left[ \sqrt{|G|} (|A_2|t + C_1) \right] - \frac{|A_1|}{2|A_2|} \quad (3.105)$$

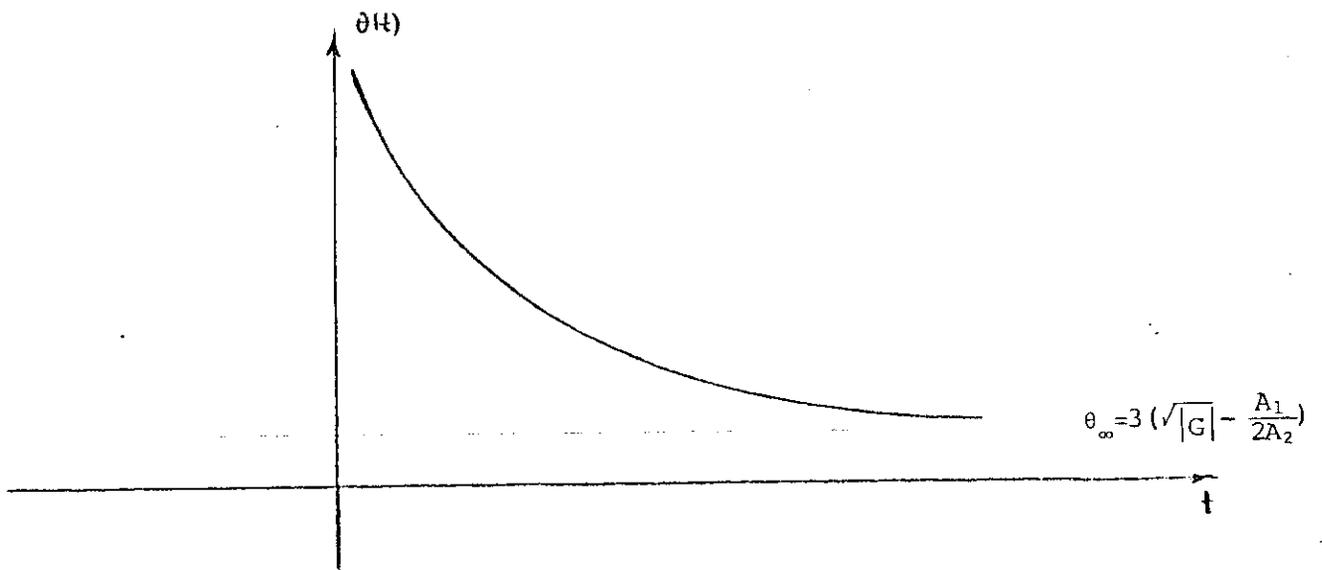
Novamente a partir da definição de  $H(t)$ ,  $R(t)$  é calculado facilmente:

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{|A_1|t}{2|A_2|}} \operatorname{sen} h \frac{|A_2|^{-1}}{(\sqrt{|G|} |A_2|t)} \quad (3.106)$$

onde tomamos  $C_1 = 0$  e  $R_0$  é uma constante de integração. Os gráficos de  $R(t)$  versus  $t$  e  $\theta(t)$  versus  $t$  são mostrados a seguir.



(a)



(b)

Fig. 3.2.5. - (a) Gráfico de  $R(t)$  dado pela eq. 3.106

(b) Gráfico de expansão  $\theta(t)$

### 3.2.1 - Condições de Energia

Vamos analisar as condições de energia para os modelos obtidos anteriormente e verificar quais destes são fisicamente razoáveis. A pós isto, faremos o cálculo da produção de entropia destes últimos.

Iniciemos com a solução não singular expressa pela equação (3.99). Como vimos, a condição de energia fraca nos diz que a densidade local de energia é sempre não negativa. Logo, podemos escrever:

$$\rho \geq 0$$

De (3.76a) e (3.98) podemos calcular  $\rho(t)$ :

$$\rho(t) = 3 \left[ \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|} A_2 t) \right]^2 - \Lambda \quad (3.107)$$

onde a constante cosmológica é escrita em função de  $\tau_0$ ,  $\lambda$  e  $\beta$  por (3.93a). Da expressão (3.107), notamos que no limite  $t \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{tg} h(\sqrt{|B|} A_2 t)$  assume seu valor máximo (que é igual a unidade) de modo que  $\rho(t)$  assume seu valor mínimo. Então

$$\rho_{\min} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 3 \left[ \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \right]^2 - \Lambda \quad (3.108)$$

Caso  $\rho_{\min}$  seja maior ou igual a zero, então  $\rho(t)$  será maior ou igual a zero em qualquer tempo. Para fazer esta verificação devemos tomar os valores de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $|B|$  e  $\Lambda$  expressos em função de  $\lambda$ ,  $\tau_0$  e  $\beta$  se substituí-los em (3.108). No apêndice (E), os cálculos são realizados e o seguinte resultado é obtido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_{\min} = 0 \quad (3.109)$$

Segue então que a condição de energia fraca é sempre satisfeita se  $1,0 < n \leq 4,0$ .

Passemos agora à condição de energia dominante. De acordo com (3.60) devemos ter a seguinte relação:

$$-\rho \leq \dot{H} \leq 0 \quad (3.110)$$

Utilizando  $H(t)$  dado pela equação (3.98), obtemos:

$$\dot{H}(t) = - |B| A_2 \sec h^2 (\sqrt{|B|} A_2 t) \leq 0 \quad (3.111)$$

Resta verificar se  $\dot{H} + \rho(t) \geq 0$ . Isto é feito com detalhes no apêndice E, de onde se conclui que esta relação é satisfeita para os casos de poeira ( $\lambda=0$ ) e radiação ( $\lambda=\frac{1}{3}$ ) quando  $1 < \eta \leq \approx 4,0$ .

A solução expressa pela equação (3.102) não é fisicamente satisfatória por apresentar densidade de energia negativa em parte de sua evolução cosmológica. Isso é facilmente constatado se observarmos a expressão para  $\rho(t)$ , dada a seguir:

$$\rho(t) = 3 \left( \frac{-1}{A_2 t + C_1} + \frac{|A_1|}{2A_2} \right)^2 - \Lambda \quad (3.112)$$

Por exemplo, se  $t = t_0 = \left( \frac{2}{|A_1|} - \frac{C_1}{A_2} \right)$ , então  $\rho(t_0) = -\Lambda < 0$ . E para todo valor de  $t$  no qual

$$\left( \frac{|A_1|}{2A_2} - \frac{1}{A_2 t + C_1} \right) < \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

a densidade de energia  $\rho(t)$  será negativa. O gráfico de  $\rho(t)$  dado a seguir esclarece bem esta situação.

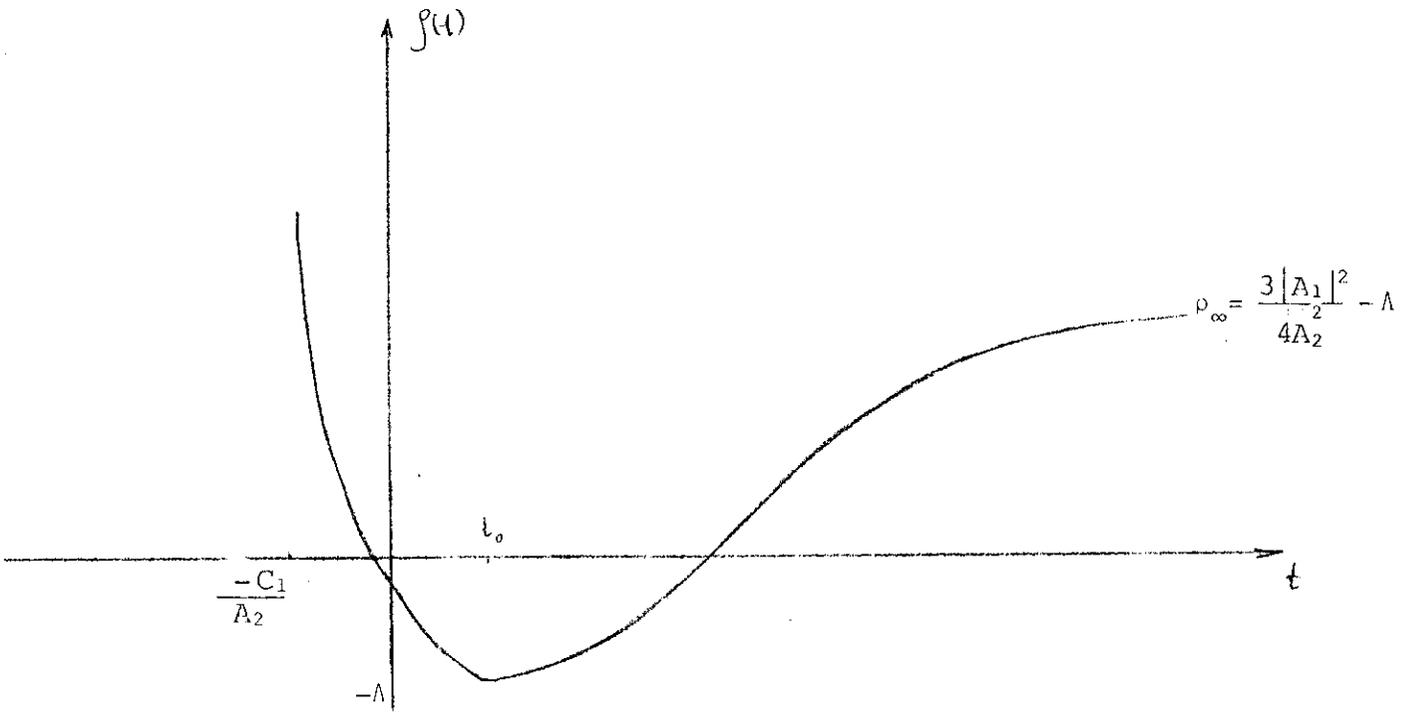


Fig. 3.2.6. - Gráfico de  $\rho(t)$  para o modelo expresso pela eq.(3.106)

Além do mais, a condição de energia dominante é completamente violada, visto que  $\dot{H}(t) \geq 0$ , que pode ser facilmente constatado pela equação (3.101).

Finalmente consideremos a solução cosmológica correspondente a equação (3.106). A densidade de energia  $\rho(t)$  é dada por:

$$\rho(t) = 3[\sqrt{|G|} \cotg h(\sqrt{|G|} |A_2| t) - \frac{|A_1|}{2|A_2|}]^2 - \Lambda \quad (3.113)$$

Nesta expressão  $\Lambda$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $|G|$  são dados pelas equações (3.103), (3.91b), (3.89b) e (3.104), respectivamente. Aplicando o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, notemos que  $\rho(t)$  tem seu valor mínimo quando  $t \rightarrow \infty$ . Então caso  $\rho(\infty)$  seja positivo,  $\rho(t)$  o será para qualquer tempo. Entretanto, é mostrado no apêndice E que isto não ocorre, ou seja:

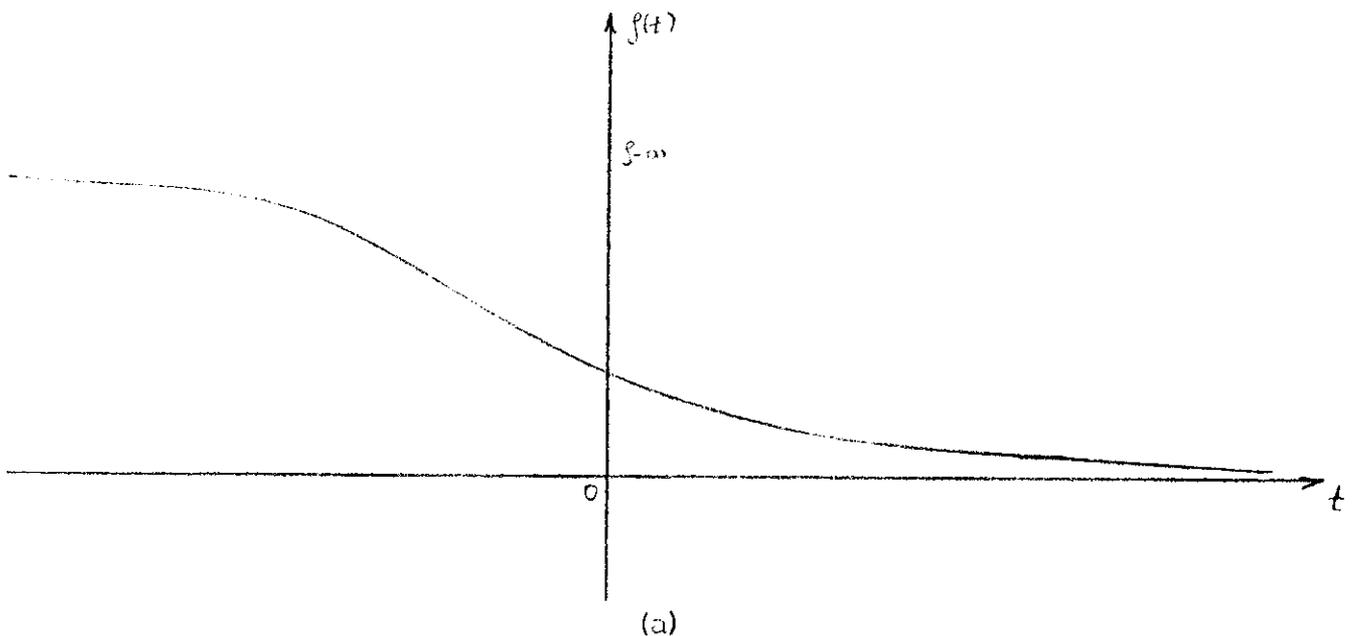
$$\rho(\infty) < 0$$

Isto significa que a partir de um dado tempo  $t = t_0$  a densidade de energia é negativa. Logo esta solução não é satisfatória.

Vamos nos concentrar na solução expressa pela equação (3.99). Porém, antes de calcularmos a produção de entropia, é interessante explicitar a pressão viscosa obtida a partir das equações de campo:

$$\begin{aligned} \pi(t) = & 2|B|A_2 \sec^2 h^2 \sqrt{|B|A_2}t - 3(\lambda+1) \left[ \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2t) \right]^2 + \\ & + \Lambda(\lambda+1) \end{aligned} \quad (3.114)$$

E a seguir mostramos os gráficos de  $\rho(t)$  dado pela equação (3.107) e  $\pi(t)$  versus  $t$ .



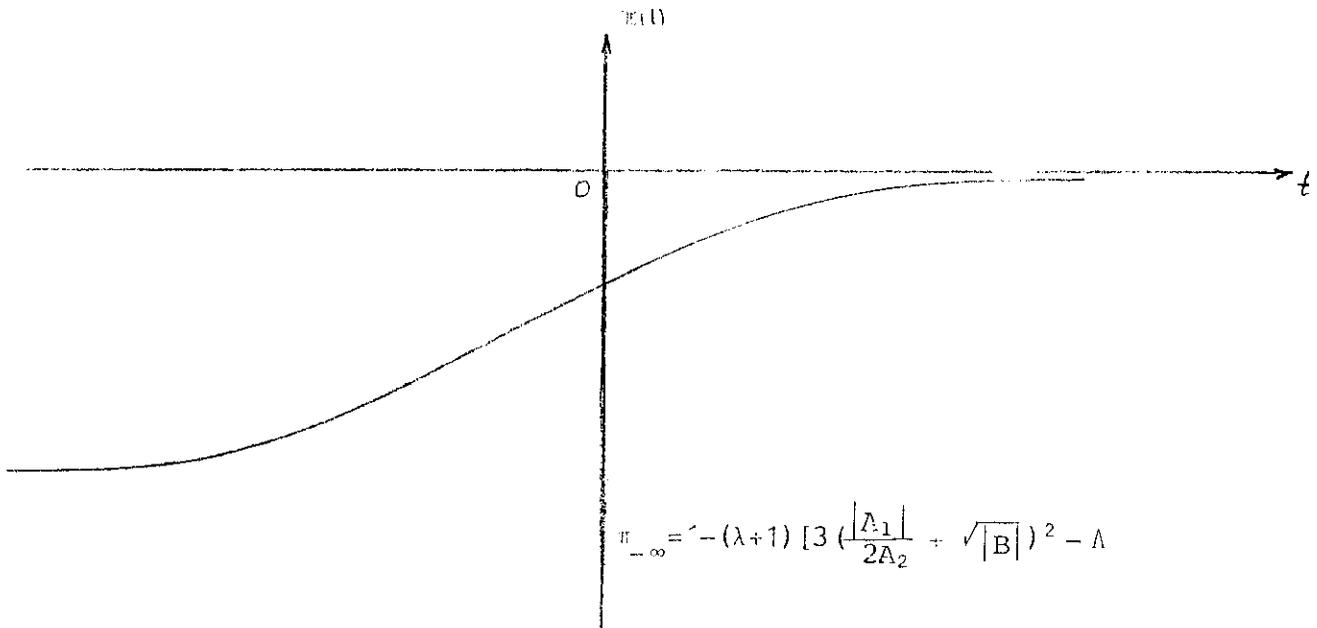


Fig. 3.2.7. - (a) Gráfico de  $\theta(t)$   
 (b) Gráfico de  $\pi(t)$

### 3.2.2 - Produção de Entropia

A produção local de entropia para os modelos com viscosidade volumar é dada por:

$$\sigma = S^\mu_{\mu} = \frac{\pi^2}{\zeta T} \quad (3.115)$$

ou ainda

$$\dot{s} = \frac{\pi^2}{n \zeta T} \quad (3.116)$$

sendo  $s$  a entropia por partícula. De acordo com a subseção anterior, calcularemos a taxa de variação de entropia para a solução expressa pela equação (3.99). Sabendo que  $n(t) = n_0 R^{-3}$ ,  $\zeta = \beta \rho$  e  $\pi(t)$  é dado pela equação (3.114), temos:

$$\dot{s} = \frac{\{2|B|A_2 \sec h^2(\sqrt{|B|}A_2 t) - 3(\lambda+1)\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 + \Lambda(\lambda+1)\}^2 e^{\frac{3|A_1|t}{2A_2}}}{n_0 \beta \{3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 - \Lambda\} T(t)} \sec h^{\frac{3}{A_2}}(\sqrt{|B|}A_2 t) \quad (3.117)$$

Novamente consideremos os casos de poeira ( $\lambda=0$ ) e radiação ( $\lambda=\frac{1}{3}$ ).

19) Poeira:

Como vimos anteriormente  $T(t) = \frac{T_0}{R^2(t)}$ , então (3.117) é escrita como:

$$\dot{s} = \frac{\{2|B|A_2 \sec h^2(\sqrt{|B|}A_2 t) - 3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 + \Lambda\}^2 e^{\frac{5|A_1|t}{2A_2}} \sec h^{\frac{5}{A_2}}(\sqrt{|B|}A_2 t)}{n_0 \beta T_0 \{3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 - \Lambda\}} \quad (3.118)$$

No limite  $t \rightarrow -\infty$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{s} = 0 \quad (3.119)$$

Desse modo o universo iniciou sua evolução a partir de um estado de entropia constante. Processos dissipativos surgiram originando em produção de entropia cujo valor para um tempo infinitamente longo é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{2|B|A_2 - \frac{3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 - \Lambda}{\sec h_2(\sqrt{|B|}A_2 t)}\}^2 e^{\frac{5|A_1|t}{2A_2}}}{n_0 \beta T_0 \{3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 - \Lambda\}} \sec h^{\frac{5}{A_2} + 4}(\sqrt{|B|}A_2 t) \quad (3.120)$$

Pode ser mostrado que o segundo termo da expressão entre chaves no numerador tem valor constante no limite considerado. A expressão (3.120) pode ainda ser reescrita por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2|B|A_2 - \frac{3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 - \Lambda}{\sec h(\sqrt{|B|}A_2 t)})}{n_0 \beta T_0 (3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 - \Lambda) e^{-\frac{5|A_1|t}{2A_2}} \cos h^{\frac{5}{A_2} + 4}(\sqrt{|B|}A_2 t)} \quad (3.120')$$

Tendo em vista os valores de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $B$  dados pelas equações (3.91a), (3.89a) e (3.97), podemos inferir que para  $1 < \eta \leq 4$  o termo exponencial domina sobre a função hiperbólica. Sendo assim, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s} = \infty \quad (3.121)$$

Esse resultado é idêntico ao obtido anteriormente na seção 3.1

## 2º) Radiação:

Neste caso  $T(t) = \frac{T_0}{R(t)}$ , de modo que (3.117) é escrita como:

$$\dot{s} = \frac{\frac{16}{9} \{3|B|A_2 \sec h^2(\sqrt{|B|}A_2 t) - 3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 + \Lambda\}^2 e^{\frac{2|A_1|}{A_2}} \sec h^{\frac{4}{A_2}}(\sqrt{|B|}A_2 t)}{n_0 \beta T_0 (3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 - \Lambda)} \quad (3.122)$$

No limite  $t \rightarrow -\infty$ , vem:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{s} = 0 \quad (3.123)$$

Para o cálculo do limite da produção de entropia para um tempo infinitamente grande, escrevamos (3.122) tal qual a expressão (3.120').

$$\dot{s} = \frac{16(3|B|A_2 - \frac{3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 - \Lambda}{\sec h^2(\sqrt{|B|}A_2 t)})^2}{n_0 \beta T_0 (3[\frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t)]^2 - \Lambda) e^{-\frac{2|A_1|t}{A_2}} \cos h^{\frac{4}{A_2} + 4}(\sqrt{|B|}A_2 t)} \quad (3.124)$$

Novamente com as respectivas expressões de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $\sqrt{|B|}$ , podemos afirmar que para  $\sim 2,4 < \eta < 4,0$ , pelo menos o limite torna-se

não indeterminado e dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s} = \infty$$

(3.125)

## CONCLUSÃO

Nesta tese procuramos inicialmente expor as teorias termodinâmicas para processos reversíveis e irreversíveis em Relatividade Geral para meios contínuos. Abordamos a formulação da teoria termodinâmica estendida desenvolvida por Pavon et al (1982). Nesta formulação vimos que a propagação de sinais térmicos e viscosos se faz com velocidade finita ao contrário do que previsto pelas formulações convencionais. Também nesta parte inicial, fazemos a extensão dessas teorias em Relatividade Geral. Mencionamos ainda os resultados obtidos por Tolman. Na verdade, tais resultados mostram que podemos considerar qualquer sistema material no espaço-tempo curvo como sendo termodinamicamente aberto. Finalmente, apontamos para modificações de caráter local na descrição hidrotermodinâmica do fluido quando campos gravitacionais não conformalmente planos estão presentes.

Em seguida fazemos a análise termodinâmica de um modelo representado por uma métrica conformalmente plana, e cujo conteúdo material é um fluido com fluxo de calor e viscosidade volumar. Esse modelo pode ser entendido como uma nebulosa em contração. A análise é feita inicialmente com a formulação convencional da termodinâmica (com hipótese do equilíbrio local) e em seguida com a formulação da termodinâmica estendida numa aproximação linear. O principal resultado obtido, além do cálculo da produção de entropia, foi o fato da entropia local permanecer constante ou decrescer juntamente com a produção local de entropia. Isso vem corroborar que um sistema material sob ação de um campo gravitacional pode ser considerado um sistema aberto.

Na terceira parte novos modelos homogêneos e isotrópicos com

seção plana são propostos. Esses modelos apresentam viscosidade volumar como único processo dissipativo. Devemos frisar que esses modelos diferem daqueles já estabelecidos na literatura pelo fato de que estamos utilizando equações fenomenológicas da termodinâmica estendida e portanto introduzimos um novo parâmetro fenomenológico  $\tau_0$ , que é tempo de relaxação. Na primeira solução consideramos  $\zeta$  e  $\tau_0$  como constantes. Nas demais,  $\tau_0$  foi tornado constante enquanto que  $\zeta$  foi considerado não constante. Encontramos soluções não-singulares e singulares. As não-singulares são caracterizadas pela não existência de um momento de criação (big bang). Após verificadas as condições de energia, calculamos a produção para os casos de poeira e radiação dos modelos fisicamente razoáveis. Devemos ainda ressaltar que foi constatado que a viscosidade volumar pode ser interpretada como o efeito fenomenológico da criação de partículas pelo campo gravitacional, uma vez que em determinados modelos, a densidade de energia permanece constante estando o modelo em expansão.

APÊNDICE A

Formulação de Landau-Lifchitz para termodinâmica relativista irreversível de 1ª ordem.

Na seção 1.2, vimos que a definição de uma única quadrivelocidade hidrodinâmica para um fluido imperfeito é ambígua. Na formulação de Eckart, a quadrivelocidade escolhida coincide com a do fluxo de partículas do fluido. Na formulação adotada por Landau-Lifchitz a quadrivelocidade escolhida é tal que no referencial de repouso do elemento do fluido a densidade de momentum é nula. As expressões para o tensor momento-energia e o quadri vetor fluxo de partículas são respectivamente dadas por

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - p h^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (A.1)$$

$$N^\alpha = n U^\alpha + v^\alpha \quad (A.2)$$

Como antes, o efeito da dissipação está contida nos objetos  $\tau^{\alpha\beta}$  e  $v^\alpha$ . No referencial comoviente com os elementos do fluido  $U^\alpha = \delta_0^\alpha$  e ainda temos que:

$$T^{00} \equiv \rho = \rho + \tau^{00} \quad \text{logo} \quad \tau^{00} = 0 \quad (A.3)$$

$$T^{i0} = \tau^{i0} = 0 \quad (A.4)$$

$$N^0 \equiv n = n + v^0 = 0 \quad \text{logo} \quad v^0 = 0 \quad (A.5)$$

Então em qualquer referencial de Lorentz, são válidas as seguintes relações:

$$\tau^{\alpha\beta} U_\beta = 0 \quad (A.6)$$

$$v^\alpha U_\alpha = 0 \quad (A.7)$$

Como feito anteriormente vamos determinar  $\tau^{\alpha\beta}$  e  $v^\alpha$  de modo que a produção de entropia seja positiva definida. Iniciemos escrevendo a lei de conservação da energia:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} U_\alpha = \dot{\rho} + (p+\rho)U^\alpha{}_{;\alpha} + \tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta} U_\alpha \quad (\text{A.8})$$

e a lei da conservação do nº de partículas:

$$N^\alpha{}_{;\alpha} = \dot{n} + nU^\alpha{}_{;\alpha} + v^\alpha{}_{;\alpha} = 0 \quad (\text{A.9})$$

No entanto  $\rho = n(\epsilon + a)$  e juntamente com a equação (A.9), (A.8) é reescrita por:

$$nU^\alpha \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{;\alpha} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{;\alpha} \right] - \frac{(\rho+p)}{n} v^\alpha{}_{;\alpha} + \tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta} U_\alpha = 0 \quad (\text{A.10})$$

ou ainda, de acordo com a equação de Gibbs, temos:

$$nU^\alpha s_{;\alpha} - \frac{(p+\rho)}{nT} v^\alpha{}_{;\alpha} + \frac{\tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta}}{T} U_\alpha = 0 \quad (\text{A.11})$$

onde  $s$  é a entropia por partícula. Utilizando novamente a lei de conservação do nº de partículas, podemos escrever:

$$(nsU^\alpha)_{;\alpha} - \frac{\mu}{T} v^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{-\tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta}}{T} U_\alpha \quad (\text{A.12})$$

onde  $\mu = \frac{\rho+p}{n} - Ts$  é o potencial químico relativista. Rearranjando alguns termos, (A.12) é colocada na seguinte forma:

$$(nsU^\alpha - \frac{\mu}{T} v^\alpha)_{;\alpha} = \frac{+\tau^{\alpha\beta}}{T} U_{(\alpha;\beta)} - \left( \frac{\mu}{T} \right)_{;\alpha} v^\alpha \quad (\text{A.13})$$

Definimos a expressão entre parenteses como sendo o quadrive-

tor fluxo de entropia S :

$$S^\alpha \equiv nsU^\alpha - \frac{\mu}{T} v^\alpha \quad (\text{A.14})$$

De acordo com a 2ª Lei da Termodinâmica, a divergência de  $S^\alpha$  deve ser sempre positiva. Então  $\tau^{\alpha\beta}$  e  $v^\alpha$  são dados por:

$$\tau^{\alpha\beta} = \eta h^{\alpha\gamma} h^{\beta\lambda} U_{(\gamma,\lambda)} + \zeta h^{\alpha\beta} U^\lambda{}_{,\lambda} \quad (\text{A.15})$$

$$v^\alpha = \xi h^{\alpha\beta} \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\beta} \quad (\text{A.16})$$

onde  $\zeta$  e  $\eta$  são os coeficientes de viscosidade volumar e de cisalhamento. O coeficiente  $\xi$  está relacionado com o coeficiente de condução térmica. Esse fato é esperado uma vez que na formulação de Landau-Lifchitz o efeito do fluxo de calor aparece na difusão de partículas. Desse modo, se considerarmos um fluido com fluxo de calor, a produção de entropia dada pelas formulações de Eckart e Landau, deve ser as mesmas ou seja:

$$\sigma = - \frac{\chi}{T^2} h^{\alpha\beta} (T_{,\alpha} - T\dot{U}_\alpha) (T_{,\beta} - T\dot{U}_\beta) = - \xi h^{\alpha\beta} \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\alpha} \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\beta} \quad (\text{A.18})$$

sendo  $\chi$  o coeficiente de condução de calor. No entanto,

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\alpha} = \left(\frac{\rho+p}{Tn} - s\right)_{,\alpha} = \left(\frac{\rho+p}{Tn}\right)_{,\alpha} - s_{,\alpha} \quad (\text{A.19})$$

Utilizando a equação de Gibbs  $s_{,\alpha} = \frac{1}{T} \left(\frac{\rho}{n}\right)_{,\alpha} + \frac{p}{T} \left(\frac{1}{n}\right)_{,\alpha}$  e após alguns algebrismo, temos:

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\alpha} = \frac{-(\rho+p)}{nT^2} \left(T_{,\alpha} - \frac{p_{,\alpha} T}{\rho+p}\right) \quad (\text{A.20})$$

Substituindo (A.20) em (A.18), vem:

$$\sigma = \frac{-\chi h^{\alpha\beta}}{T^2} (T_{,\alpha} - T\dot{U}_\alpha) (T_{,\beta} - T\dot{U}_\beta) = -\xi h^{\alpha\beta} \frac{(\rho+p)^2}{n^2 T^4} \left(T_{,\alpha} - \frac{p_{,\alpha} T}{\rho+p}\right) \left(T_{,\beta} - \frac{p_{,\beta} T}{\rho+p}\right) \quad (\text{A.21})$$

A lei de conservação do momentum nos fornece a seguinte relação:

$$(\rho+p)\dot{U}_\alpha = h_\alpha^\beta p_{,\beta} \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, substituindo (A.22) em (A.21), temos:

$$\frac{\chi h^{\alpha\beta}}{T^2} (T_{,\alpha} - T\dot{U}_\alpha) (T_{,\beta} - T\dot{U}_\beta) = \frac{\xi (\rho+p)^2}{n^2 T^4} h^{\alpha\beta} (T_{,\alpha} - T\dot{U}_\alpha) (T_{,\beta} - T\dot{U}_\beta) \quad (\text{A.23})$$

Somos forçados a seguinte relação de modo que ambas as formulações forneçam a mesma produção de entropia.

$$\xi = \frac{n^2 T^2 \chi}{(\rho+p)^2} \quad (\text{A.24})$$

As equações fenomenológicas são escritas abaixo em sua forma final:

$$v^\alpha = \chi \left(\frac{nT}{\rho+p}\right)^2 h^{\alpha\beta} \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,\beta} \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \eta (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} - \dot{U}_\alpha U_\beta - \dot{U}_\beta U_\alpha) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) h_{\alpha\beta} U^\lambda{}_{;\lambda} \quad (\text{A.26})$$

onde na dedução de (A.26) utilizamos a definição do projetor  $h_{\alpha\beta}$  e desenvolvemos a expressão (A.15).

APÊNDICE B

A entropia por partícula de não equilíbrio é função das variáveis de equilíbrio e das variáveis dissipativas (fluxos dissipativos). Assim, a temperatura absoluta é definida por (vide equação 1.72a):

$$T^{-1} = \left. \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right| \quad (B.1)$$

De (B.1), segue que

$$T = T(\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^{\mu}) \quad (B.2)$$

No sentido de tornar claro a temperatura de não equilíbrio, esta pode ser expandida por uma série de potências em torno de seu valor definido no equilíbrio local  $T_0(\epsilon, v)$ . Temos então:

$$T(\epsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^{\mu}) = T_0(\epsilon, v) + \left(\frac{\partial T}{\partial \pi}\right)_{eq} \pi + \left(\frac{\partial T}{\partial \pi^{\mu\nu}}\right)_{eq} \pi^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial T}{\partial q^{\mu}}\right)_{eq} q^{\mu} + 0(2) \quad (B.3)$$

onde as derivadas parciais são calculadas no equilíbrio, ou seja, quando  $\pi = \pi^{\mu\nu} = q^{\mu} = 0$ . Devemos mostrar que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \pi}\right)_{eq} = \left(\frac{\partial T}{\partial \pi^{\mu\nu}}\right)_{eq} = \left(\frac{\partial T}{\partial q^{\mu}}\right)_{eq} = 0 \quad (B.4)$$

Iniciemos por derivar parcialmente (B.1) com relação a  $\pi$ :

$$- T^{-2} \frac{\partial T}{\partial \pi} = \frac{\partial^2 S}{\partial \pi \partial \epsilon} \quad (B.5)$$

Consideremos agora a seguinte equação de estado:

$$\frac{v \alpha_0 \pi}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial \pi} \right| \quad (B.6)$$

Derivando parcialmente relativamente a  $\epsilon$ , vem:

$$\frac{v\pi}{T} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \epsilon} - \frac{v\pi\alpha_0}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} = \frac{\partial^2 S}{\partial \epsilon \partial \pi} \quad (B.7)$$

Sabemos que de acordo com o cálculo diferencial  $\frac{\partial^2 S}{\partial \pi \partial \epsilon} = \frac{\partial^2 S}{\partial \epsilon \partial \pi}$ , então, de (B.5) e (B.7), vem:

$$-T^{-2} \frac{\partial T}{\partial \pi} = \frac{v\pi}{T} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \epsilon} - \frac{\pi v \alpha_0}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \pi} = v\pi\alpha_0 \frac{\partial T}{\partial \epsilon} - v\pi T \frac{\partial \alpha_0}{\partial \epsilon} \quad (B.8)$$

Quando calculamos no equilíbrio  $\pi = 0$ , então segue de imediato:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \pi} \right)_{\text{eq}} = 0 \quad (B.9)$$

c.q.d.

Tomemos (B.1) e derivemos parcialmente com relação a  $q^\mu$ :

$$-T^{-2} \frac{\partial T}{\partial q^\mu} = \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial \epsilon} \quad (B.10)$$

Seja agora a seguinte equação de estado:

$$\frac{\alpha_1 v q^\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \quad (B.11)$$

Derivando (B.11) parcialmente com relação a  $\epsilon$ , vem:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \epsilon} \frac{v q^\mu}{T} - \frac{\alpha_1 v q^\mu}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} = \frac{\partial^2 S}{\partial \epsilon \partial q^\mu} \quad (B.12)$$

Igualando (B.10) e (B.12), obtemos:

$$-T^{-2} \frac{\partial T}{\partial q^\mu} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \epsilon} \frac{v q^\mu}{T} - \frac{\alpha_1 v q^\mu}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^\mu} = \alpha_1 v q^\mu \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T v q^\mu \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \quad (\text{B.13})$$

Novamente quando esta equação é calculada no equilíbrio,  $q^\mu = 0$ , resultando em:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial q^\mu} \right)_{\text{eq}} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Para mostrar que  $\left( \frac{\partial T}{\partial \pi^{\mu\nu}} \right)_{\text{eq}} = 0$ , o procedimento é inteiramente análogo ao anterior.

Assim a série (B.3) conterá termos da ordem dois em  $\pi$  e  $q^\mu$  e a diferenciaremos daquela calculada no equilíbrio local. Explicando os termos de ordem dois, temos:

$$\begin{aligned} T(\varepsilon, v, \pi, \pi^{\mu\nu}, q^\mu) &= T_0(\varepsilon, v) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \pi^2} \right)_{\text{eq}} \pi^2 + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial q^\mu \partial q_\mu} \right)_{\text{eq}} q^\mu q_\mu + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \pi^{\mu\nu} \partial \pi_{\mu\nu}} \right)_{\text{eq}} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} + O(3) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Na aproximação linear os fluxos e forças vão se relacionar linearmente. Isso significa que os termos quadráticos nos fluxos são desprezivelmente pequenos. Então se observarmos (B.15), a temperatura só admitirá termos até ordem primeira, então:

$$T(\varepsilon, v, \pi^{\mu\nu}, \pi, q^\mu) = T_0(\varepsilon, v) \quad (\text{B.16})$$

que é o valor definido no equilíbrio local. Obviamente, o mesmo ocorre para a pressão.

APÊNDICE C

Consideremos uma métrica do tipo:

$$ds^2 = A^2(r,t) dt^2 - B^2(r,t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (C.1)$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Utilizemos uma base de tetradas inercial tal que possamos escrever:

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (C.2)$$

onde

$$\theta^0 = e^{(0)}_0 dx^0 = A(r,t) dt \quad (C.3a)$$

$$\theta^1 = e^{(1)}_1 dx^1 = B(r,t) dx \quad (C.3b)$$

$$\theta^2 = e^{(2)}_2 dx^2 = B(r,t) dy \quad (C.3b)$$

$$\theta^3 = e^{(3)}_3 dx^3 = B(r,t) dz \quad (C.3c)$$

Desenvolvendo  $d\theta^A$  e sabendo que

$$d\theta^A = \gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (C.4)$$

podemos concluir que:

$$\gamma^0_{i0} = \frac{A' x^i}{ABr} \quad (i= 1, 2, 3) \quad (C.5a)$$

$$\gamma^1_{01} = \gamma^2_{02} = \gamma^3_{03} = \frac{\dot{B}}{AB} \quad (C.5b)$$

$$\gamma^1_{21} = \gamma^3_{23} = \frac{B' x^2}{B^2 r} \quad (C.5c)$$

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = \frac{B' x^3}{B^2 r} \quad (C.5d)$$

$$\gamma_{12}^2 = \gamma_{13}^3 = \frac{B'x^1}{B^2r} \quad (C.5e)$$

Nestas expressões  $A' = \frac{\partial A}{\partial r}$ ,  $B' = \frac{\partial B}{\partial r}$  e  $\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}$ . Os coeficientes  $\gamma_{BC}^A$  são conhecidos como os coeficientes de rotação de Ricci.

As 1-formas de rotação são definidas por:

$$\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C \quad (C.6)$$

Para a métrica em questão, temos:

$$\omega_i^0 = \frac{A'x^i}{ABr} \theta^0 + \frac{\dot{B}}{AB} \theta^i \quad (C.7a)$$

$$\omega_{jk}^i = \frac{B'}{rB^2} (x^k \theta^j - x^j \theta^k) \quad (C.7b)$$

(i, j, k = 1, 2, 3)

Pode ser mostrado que vale a seguinte relação:

$$d\omega_B^A + \omega_{BD}^A \wedge \omega^{AD} = -\frac{1}{2} R_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D \quad (C.8)$$

sendo  $R_{BCD}^A$  as componentes do tensor de Riemann na base de tetradas inercial. Desenvolvendo (C.8), obtemos as seguintes componentes não nulas do tensor de Riemann:

$$R_{i0i}^0 = \frac{(x^i)^2}{AB^3r^2} (A''B - 2A'B' - \frac{A'B}{r}) + \frac{1}{AB} \left[ \frac{A'}{Br} - \left(\frac{\dot{B}}{A}\right)' + \frac{A'B'}{B^2} \right] \quad (C.9a)$$

i = 1, 2, 3

$$R_{i0j}^0 = \frac{x^i x^j}{AB^3r^2} (A''B - 2A'B' - \frac{A'B}{r}) \quad (C.9b)$$

i, j = 1, 2, 3; i ≠ j

$$R_{iij}^0 = \frac{x^j}{AB^2r} \left[ \dot{B}' - \dot{B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \right] \quad (C.9c)$$

$$R_{kik}^i = \frac{[(x^i)^2 + (x^k)^2]}{B^4 r^2} (B''B - 2B'^2 - \frac{B'B}{r}) + \frac{1}{B^2} \left[ \frac{2B'}{rB} + \left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \left(\frac{\dot{B}}{A}\right)^2 \right] \quad (C.9d)$$

(não há soma em i e k)

$$R_{jik}^i = \frac{x^j x^k}{B^4 r^2} (B''B - 2B'^2 - \frac{B'B}{r}) \quad (C.9e)$$

(não há soma em i)

Tendo em vista que  $R_{AB} = R_{ACB}^C$ , vem:

$$R_{00} = R_{0A0}^A = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \quad \text{ou}$$

$$R_{00} = \frac{-1}{AB} \left[ \frac{A''}{B} + \frac{A'}{B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) - 3 \left( \frac{\dot{B}}{A} \right)^2 \right] \quad (C.10a)$$

$$R_{kk} = R_{kAk}^A = \frac{(x^k)^2}{B^2 r^2} \left[ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} - \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{1}{r} + 2 \frac{B'}{B} \right) \right] + \frac{1}{B} \left[ \frac{-1}{A} \left( \frac{\dot{B}}{A} \right) - \frac{2}{B} \left( \frac{\dot{B}}{A} \right)^2 + \frac{B''}{B^2} + \frac{3B'}{rB^2} + \frac{A'}{AB} \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right) \right] \quad (C.10b)$$

$$R_{0k} = R_{0Ak}^A = \frac{2x^k}{AB^2 r} \left[ \dot{B}' - \dot{B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \right] \quad (C.10c)$$

$$R_{ij} = R_{iAj}^A = \frac{x^i x^j}{B^2 r^2} \left[ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} - \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \left( 2 \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right) \right] \quad (C.10d)$$

O escalar de curvatura R é dado por:

$$R = R_A^A = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3$$

Com os tensores de Ricci calculados acima, vem:

$$R = -\frac{2}{B} \left[ \frac{1}{B} \left( \frac{A''}{A} + \frac{2B''}{B} \right) - \frac{3\ddot{B}}{A^2} + \frac{3\dot{B}}{A^2} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) + \frac{A'}{AB} \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) \right] +$$

APÊNDICE E

Neste apêndice são realizados os cálculos referentes às condições de energia para os modelos encontrados.

A expressão para  $\rho(t)$  dada por (3.107) é escrita abaixo no limite  $t \rightarrow \infty$ :

$$\rho(\infty) = 3 \left( \frac{|A_1|}{2A_2} - \sqrt{|B|} \right)^2 - \Lambda \quad (E.1)$$

Temos que verificar o sinal de  $\rho(\infty)$ . Desenvolvendo a expressão acima e tendo em vista que  $|B| = \frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{4A_2}$ , vem:

$$\rho(\infty) = \frac{3A_1^2}{2A_2^2} - \frac{3}{A_2} (|A_1| \sqrt{|B|} + A_0) - \Lambda \quad (E.2)$$

Calculemos a parte negativa de (E.2) substituindo  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $A_0$ ,  $\Lambda$  e  $B$  pelas respectivas expressões (D.4a), (D.4b), (D.4c), (D.3) e (D.6). Temos então

$$\begin{aligned} \frac{3}{A_2} (|A_1| \sqrt{|B|} + A_0) + \Lambda &= \frac{\sqrt{(n+1)^4 - 4n(n-1)(3n+1)}}{\frac{3}{8}(\lambda+1)^2(n-1)^2(3n+1)^2\tau_0^2} + \\ &+ \frac{16n}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3n+1)^2(n-1)} \end{aligned} \quad (E.3)$$

Consideremos agora a parte positiva de (E.2):

$$\frac{3A_1^2}{2A_2^2} = \frac{8(n+1)^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3n+1)^2(n-1)^2} \quad (E.3')$$

Voltando à expressão (E.2), temos:

$$\rho(\infty) = \frac{8[-\eta^2 + 4\eta + 1 - \sqrt{(\eta+1)^4 - 4\eta(\eta-1)(3\eta+1)}]}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta-1)^2(3\eta+1)^2} \quad (\text{E.4})$$

No entanto  $(\eta+1)^4 - 4\eta(\eta-1)(3\eta+1) = \eta^4 - 8\eta^3 + 4\eta^2 + 8\eta + 1 = (-\eta^2 + 4\eta + 1)^2$ , então (E.4) reduz-se a:

$$\rho(\infty) = 0 \quad (\text{E.5})$$

caso  $1 < \bar{\eta} \leq 4,0$ . Logo, a condição de energia fraca é sempre satisfeita.

Passemos, agora, para a condição de energia dominante para este modelo. Vimos que é necessário ser obedecida a seguinte relação:

$$-\rho(t) \leq \dot{H}(t) \leq 0 \quad (\text{E.6})$$

Constatamos que  $\dot{H}(t) < 0$  para qualquer tempo  $t$ . Basta então mostrar que  $\dot{H}(t) + \rho(t) > 0$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) + \rho(t) = & -|B|A_2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{|B|}A_2 t) + 3\left[\frac{|A_1|}{2A_2} - \right. \\ & \left. - \sqrt{|B|} \operatorname{tgh}(\sqrt{|B|}A_2 t)\right]^2 - \Lambda \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Desenvolvendo esta expressão e tendo-se em vista que

$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$ , vem:

$$\dot{H}(t) + \rho(t) = X + Y \operatorname{tgh}^2(\sqrt{|B|}A_2 t) - Z \operatorname{tgh}(\sqrt{|B|}A_2 t) \quad (\text{E.8})$$

onde

$$X = 3 \frac{A_1^2}{4A_2^2} - \Lambda - |B|A_2 \quad (\text{E.9a})$$

$$Y = |B|(A_2 + 3) \quad (\text{E.9b})$$

$$Z = \frac{3|A_1|}{A_2} \sqrt{|B|} \quad (\text{E.9c})$$

Em  $t=0$ ,  $\dot{H}(t)$  tem em módulo seu valor máximo. Verifiquemos a expressão (E.8) neste instante:

$$\dot{H}(0) + \rho(0) = X = \frac{3A_1^2}{4A_2^2} - \Lambda - |B|A_2$$

Tendo em vista as expressões para  $\Lambda$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $|B|$ , vem:

$$\dot{H}(0) + \rho(0) = X = \frac{(\eta+1)^4 [4 - (\lambda+1)(\eta-1)] + 4\eta(\eta-1)^2 [(\lambda+1)(3\eta+1) - 4\eta]}{3\tau_0^2 (3\eta+1)^2 (\eta+1)^2 (\eta-1)^2 (\lambda+1)^2} \quad (\text{E.10})$$

Caso  $X > 0$ , então poderemos garantir que  $\dot{H}(t) + \rho(t) > 0$  para  $-\infty < t < 0$ . Nos casos específicos de poeira e radiação,  $X$  é dado por:

$$X(\eta, \lambda=0) = \frac{(\eta+1)^4 (5-\eta) - 4\eta(\eta-1)^3}{3\tau_0^2 (3\eta+1)^2 (\eta+1)^2 (\eta-1)^2} \quad (\text{E.11})$$

$$X(\eta, \lambda = \frac{1}{3}) = \frac{(\eta+1)^4 (4-\eta) + 4\eta(\eta-1)^2}{4\tau_0^2 (3\eta+1)^2 (\eta^2-1)^2} \quad (\text{E.12})$$

Pode ser facilmente constatado que para  $1 < \eta < \sim 4,0$ ,  $X$  será sempre positivo em ambos os casos.

Falta verificar que  $\dot{H}(t) + \rho(t) > 0$  para qualquer  $t > 0$ . Note mos que  $F(t) \equiv \dot{H}(t) + \rho(t)$  se anula para  $t \rightarrow \infty$ . Vamos supor que para algum intervalo finito ou não de tempo, tenhamos:

$$F(t) = \dot{H}(t) + \rho(t) < 0$$

Então necessariamente haverá algum intervalo de tempo finito ou não onde  $F(t)$  será uma função crescente, e, em consequência  $\dot{F}(t) > 0$ . Caso contrário, i.e., se  $\dot{F}(t)$  for sempre negativa teremos que

$F(t) > 0$  para todo  $t > 0$ . Nos gráficos abaixo essas situações são ilustradas:

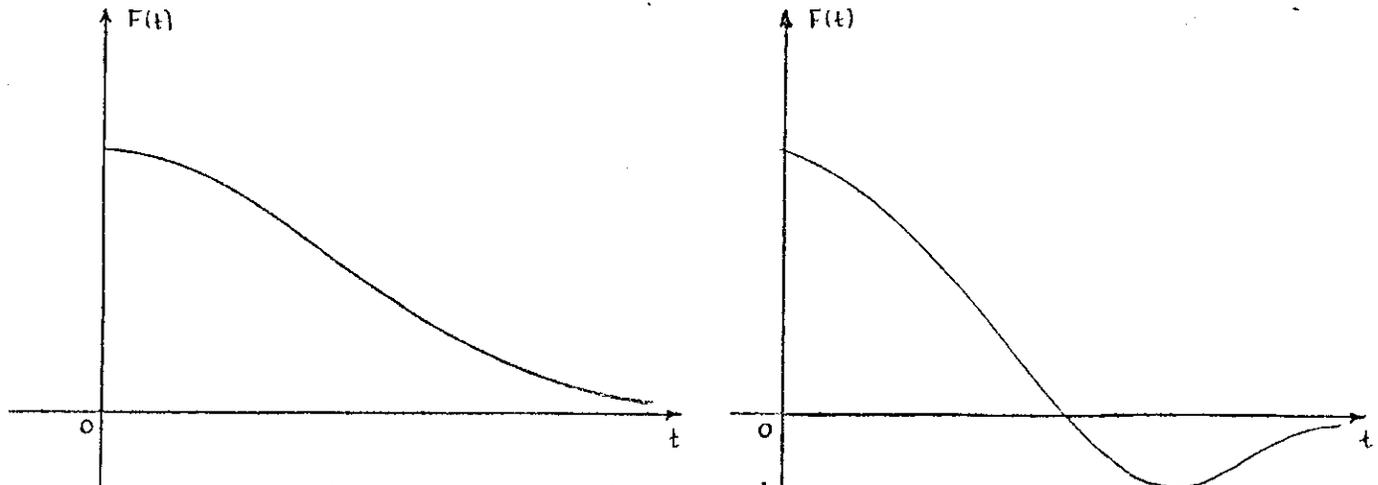


Fig. E.1 - (a) Gráfico de  $F(t)$  quando  $\dot{F}(t) < 0$  para todo  $t > 0$   
 (b) Gráfico de  $F(t)$  quando  $\dot{F}(t)$  pode assumir valores positivos

Derivando (E.8), vem:

$$\dot{F}(t) = [2Y \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t) - Z] \sqrt{|B|}A_2 \sec^2 h(\sqrt{|B|}A_2 t) \quad (\text{E.13})$$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

$$\dot{F}(t) = \frac{|\eta^2 - 4\eta - 1| \{ |\eta^2 - 4\eta - 1| [4 + (\lambda + 1)(\eta - 1)] \operatorname{tg} h(\sqrt{|B|}A_2 t) - 4(\eta + 1)^2 \}}{3\tau_0^2 (\lambda + 1)^2 (\eta + 1)^2 (\eta - 1)^2 (3\eta + 1)^2} \quad (\text{E.14})$$

tendo-se em vista que  $\sqrt{|B|} = \frac{|\eta^2 - 4\eta - 1|}{\frac{3}{2}\tau_0(\lambda + 1)(\eta^2 - 1)(3\eta + 1)}$ . Se  $\lambda = 0$  e  $\lambda = \frac{1}{3}$

pode ser mostrado diretamente que  $\dot{F}(t) < 0$  pelo menos no intervalo de  $\eta$  dado por

$$1 < \eta < 4,0$$

Finalmente tomemos a solução correspondente a equação (3.106). A densidade de energia  $\rho(t)$  é dada por:

$$\rho(t) = 3[\sqrt{|G|} \cotg h(\sqrt{|G|}A_2t) - \frac{A_1}{2A_2}]^2 - \Lambda \quad (E.15)$$

onde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $G$  e  $\Lambda$  são dados por (D.9b), (D.9c), (D.10) e (D.8) respectivamente. Observando a equação (E.15), notamos que  $\rho(t)$  terá seu valor mínimo se  $\cotg h(\sqrt{|G|}A_2t) = 1$ , ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $\rho(\infty) > 0$ , então a condição de energia fraca é satisfeita para qualquer tempo  $t$ . De (E.15), temos:

$$\rho(\infty) = 3 \left( \sqrt{|G|} - \frac{A_1}{2A_2} \right)^2 - \Lambda \quad (E.16)$$

Desenvolvendo a expressão acima e tendo em vista que

$$|G| = \frac{A_1^2 + 4A_0|A_2|}{4A_2^2}, \text{ vem:}$$

$$\rho(\infty) = 3 \left( \frac{A_1^2}{2A_2^2} + \frac{A_0}{|A_2|} \right) - \left( \Lambda + 3\sqrt{|G|} \frac{A_1}{A_2} \right) \quad (E.17)$$

Calculando a parte negativa da equação (E.17), temos:

$$\begin{aligned} \Lambda + 3\sqrt{|G|} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{16\eta^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3\eta-1)^2(\eta-1)^2} + \\ &+ \frac{8\sqrt{(\eta-1)^4 + 4\eta(\eta+1)(3\eta-1)}}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta+1)^2(3\eta-1)^2} \end{aligned} \quad (E.18)$$

Fazendo o mesmo para a parte positiva, temos:

$$3 \left( \frac{A_1^2}{2A_2^2} + \frac{A_0}{|A_2|} \right) = \frac{8(\eta-1)^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta+1)^2(3\eta-1)^2} +$$

$$+ \frac{B'}{B^2} \left( \frac{4}{r} - \frac{B'}{B} \right) ] \quad (C.11)$$

Na base de tetradas utilizada, o tensor de Einstein é dado por:

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} R$$

As componentes não nulas deste tensor são escritas abaixo:

$$G_{00} = \frac{1}{B} \left[ \frac{2B''}{B^2} - \frac{3\dot{B}^2}{A^2 B} + \frac{B'}{B^2} \left( \frac{4}{r} - \frac{B'}{B} \right) \right] \quad (C.12a)$$

$$G_{0i} = R_{0i} = \frac{2x^i}{AB^2 r} \left[ \dot{B}' - \dot{B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \right] \quad (C.12b)$$

$$G_{ij} = R_{ij} = \frac{x^i x^j}{B^2 r^2} \left[ \left( \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} \right) - \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{2B'}{B} + \frac{1}{r} \right) \right] \quad (C.12c)$$

$$G_{ii} = \frac{x_i^2}{B^2 r^2} \left[ \left( \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} \right) - \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{1}{r} + \frac{2B'}{B} \right) \right] - \frac{1}{B} \left[ \frac{1}{B} \left( \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\dot{B}}{A^2} \left( \frac{2\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) - \frac{2\ddot{B}}{A^2} + \frac{A'}{ABr} + \frac{B'}{B^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{B'}{B} \right) \right] \quad (C.12d)$$

### - Cálculo das quantidades cimenáticas

O campo de velocidades  $U^\alpha = \frac{\delta^\alpha_0}{A(r,t)}$  é escrito numa base de tetradas como:

$$U^A = e^{(A)}_\alpha U^\alpha = \delta^A_0 \quad (C.13)$$

Como a expansão  $\theta$  é definida por

$$\theta = U^\alpha_{;\alpha} \quad (C.14)$$

podemos escrever:

$$\theta = (e^\alpha_{(A)} U^A)_{;\alpha} = e^\alpha_{(0);\alpha} = -\gamma_{0AB} e^{\alpha(A)} e_{\alpha}^{(B)} = -\gamma_{0AB} \eta^{AB}$$

De acordo com os coeficientes de rotação de Ricci dados pelas equações (C.5), temos:

$$\theta = \gamma^0_{11} + \gamma^0_{22} + \gamma^0_{33} = \frac{3\dot{B}}{AB} \quad (C.15)$$

A aceleração  $\dot{U}^\alpha$  sendo dada por

$$\dot{U}^\alpha = U^\alpha_{;\beta} U^\beta \quad (C.16)$$

pode ser escrita como:

$$\dot{U}^\alpha = (e^\alpha_{(A)} U^A)_{;\beta} U^\beta = e^\alpha_{(0);\beta} U^\beta = -\gamma_{0AB} e^{\alpha(A)} e_{\beta}^{(B)} e^{\beta(C)} U^C$$

ou ainda:

$$\dot{U}^\alpha = -\gamma_{0AB} e^{\alpha(A)} e_{\beta}^{(B)} e^{\beta(0)} = -\gamma_{0AB} e^{\alpha(A)} \delta^{B0} = -\gamma_{0A0} e^{\alpha(A)}$$

mas  $\dot{U}^\alpha = \dot{U}^A e_{(A)}^\alpha$ , então:

$$\dot{U}^A e_{(A)}^\alpha = -\gamma_{0A0} e^{\alpha(A)}, \text{ contraindo com } e_{\alpha}^{(C)}, \text{ vem:}$$

$$\dot{U}^A \delta_A^C = -\gamma_{0A0} e^{\alpha(A)} e_{\alpha}^{(C)} = -\gamma_{0A0} \eta^{AC}$$

Finalmente temos:

$$\dot{U}^A = \gamma^A_{00} \quad (C.17)$$

De acordo com os coeficientes de rotação de Ricci dados pelas equa-

ções (C.5), vem:

$$\dot{U}^A = \left( 0, \frac{A'x^1}{ABr}, \frac{A'x^2}{ABr}, \frac{A'x^3}{ABr} \right) \quad (C.18)$$

O parâmetro cinemático conhecido como cisalhamento é definido por:

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv h_{(\alpha}{}^{\mu} h_{\beta)}{}^{\nu} U_{\mu\nu} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (C.19)$$

Colocando (C.19) na base de tetradas, vem:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} (-\gamma_{AB}^0 - \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \eta_{B0} + \gamma_{B0}^0 \eta_{A0} - \frac{2}{3} h_{AB} \theta) \quad (28) \quad (C.20)$$

Para nosso caso temos:

$$\sigma_{0i} = \frac{1}{2} (-\gamma_{0i}^0 - \gamma_{i0}^0 + \gamma_{00}^0 \eta_{i0} + \gamma_{i0}^0 \eta_{00} - \frac{2}{3} h_{0i} \theta) =$$

$$= \frac{1}{2} (-\gamma_{i0}^0 + \gamma_{i0}^0) = 0$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (-\gamma_{ij}^0 - \gamma_{ji}^0 + \gamma_{i0}^0 \eta_{j0} + \gamma_{j0}^0 \eta_{i0} - \frac{2}{3} h_{ij} \theta) =$$

$$= \frac{1}{2} (-\gamma_{ij}^0 - \gamma_{ji}^0 - \frac{2}{3} h_{ij} \theta)$$

Se  $i=j$ , vem:

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{2} (-\gamma_{ii}^0 - \gamma_{ii}^0 + \frac{2}{3} \theta) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{B}}{AB} + \frac{2}{3} \cdot 3 \frac{\dot{B}}{AB} \right) = 0$$

Portanto para a métrica em questão

$$\sigma_{AB} = 0 \quad (C.21)$$

O parâmetro cinemático vorticidade ou rotação  $\omega_{\alpha\beta}$  é definido por:

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv h_{[\alpha}{}^{\mu} h_{\beta]}{}^{\nu} U_{\mu\nu} \quad (C.22)$$

Quando escrito numa base de tetradas <sup>(29)</sup>, temos:

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} (-\gamma^0{}_{AB} + \gamma^0{}_{BA} + \gamma^0{}_{A_0} \eta_{B_0} - \gamma^0{}_{B_0} \eta_{A_0}) \quad (C.23)$$

Para o nosso caso, temos:

$$\omega_{0i} = \frac{1}{2} (-\gamma^0{}_{0i} + \gamma^0{}_{i0} + \gamma^0{}_{0_0} \eta_{i_0} - \gamma^0{}_{i_0} \eta_{0_0}) =$$

$$= \frac{1}{2} (-\gamma^0{}_{0i} + \gamma^0{}_{i0} - \gamma^0{}_{i_0}) = 0$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (-\gamma^0{}_{ij} + \gamma^0{}_{ji} + \gamma^0{}_{i_0} \eta_{j_0} - \gamma^0{}_{j_0} \eta_{i_0}) = 0$$

Logo:

$$\omega_{AB} = 0 \quad (C.24)$$

APÊNDICE D

Neste apêndice explicitaremos os cálculos referentes às relações de vínculo e das constantes expressos pelas equações (3.93a), (3.93b), (3.97) e (3.104).

1) Equação de vínculo (3.93a):

A equação de vínculo dada por (3.93a) é:

$$\Lambda = \frac{4\eta(\eta+1)}{3\tau_0(3\eta+1)^2 \left[ \beta + \frac{\tau_0(\lambda+1)^2(3\eta+1)(\eta+1)}{4\eta} \right]} \quad (D.1)$$

onde

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\tau_0(\lambda+1)^2}} \quad (D.2)$$

Podemos escrever (D.1) como:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2(\eta+1)}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3\eta+1)^2 \left[ \frac{4\eta\beta}{\tau_0(\lambda+1)} + (3\eta+1)(\eta+1) \right]} \quad (D.1')$$

Entretanto, de (D.2) retiramos:

$$\frac{4\beta}{\tau_0(\lambda+1)^2} = \eta^2 - 1 \quad (D.2')$$

Voltando a (D.1'), tendo em vista (D.2'), vem:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2(\eta+1)}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3\eta+1)^2 [\eta(\eta^2-1) + (3\eta+1)(\eta+1)]}$$

Desenvolvendo o termo entre colchetes, vem:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2}{3\tau_0^2 (\lambda+1)^2 (3\eta+1)^2 (\eta+1)^2} \quad (D.3)$$

Obviamente  $\Lambda > 0$ .

2) Cálculo da expressão  $\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2^2}$  :

$A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  são dados por:

$$A_0 = \frac{\Lambda}{4\eta} (\lambda+1) (3\eta+1) \quad (D.4a)$$

$$A_1 = -\frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\eta+1}{3\eta+1} \right) \quad (D.4b)$$

$$A_2 = \frac{3}{4} (\lambda+1) (\eta-1) \quad (D.4c)$$

Temos então:

$$\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2^2} = \frac{\frac{4\Lambda}{4\eta} (\lambda+1) (3\eta+1) \frac{3}{4} (\lambda+1) (\eta-1) - \frac{1}{\tau_0^2} \left( \frac{\eta+1}{3\eta+1} \right)^2}{4 \frac{9}{16} (\lambda+1)^2 (\eta-1)^2}$$

Considerando  $\Lambda$  dado por (D.3), e após algum algebrismo, obtemos:

$$\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2^2} = \frac{4\eta (\eta-1) (3\eta+1) - (\eta+1)^4}{\frac{9}{4} (\lambda+1)^2 (\eta-1)^2 (\eta+1)^2 (3\eta+1)^2 \tau_0^2} \quad (D.5)$$

Para  $\eta > 1$ , constatamos que  $\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2^2} < 0$ , mas se  $\eta \approx 4,24$ ,

então podemos considerar  $\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2^2} \approx 0$ .

De acordo com a convenção adotada, definimos B como sendo:

$$B = \frac{-A_1^2 + 4A_0A_2}{4A_2^2} = \frac{-(\eta+1)^4 + 4\eta(\eta-1)(3\eta+1)}{\frac{9}{4}(\lambda+1)^2(\eta^2-1)^2(3\eta+1)^2\tau_0^2} \quad (D.6)$$

3) Equação de vínculo (eq. 3.93b):

A equação de vínculo dada por (3.93b) é:

$$\Lambda = \frac{4\eta(\eta-1)}{3\tau_0(3\eta-1)^2\left[\beta - \frac{\tau_0}{4\eta}(\lambda+1)^2(3\eta-1)(\eta-1)\right]} \quad (D.7)$$

Desejamos verificar qual o sinal que  $\Lambda$  pode assumir. Reescrevamos, então, (D.7):

$$\Lambda = \frac{16\eta^2(\eta-1)}{3\tau_0^2(3\eta-1)^2(\lambda+1)^2\left[\frac{4\eta\beta}{(\lambda+1)^2\tau_0} - (3\eta-1)(\eta-1)\right]} \quad (D.7')$$

mas, de acordo com (D.2'), vem:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2(\eta-1)}{3\tau_0^2(3\eta-1)^2(\lambda+1)^2[(\eta^2-1)\eta - (3\eta-1)(\eta-1)]}$$

Desenvolvendo o termo entre colchetes e fazendo algumas simplificações, vem:

$$\Lambda = \frac{16\eta^2}{3\tau_0^2(3\eta-1)^2(\lambda+1)^2(\eta-1)^2} \quad (D.8)$$

Verificamos que para todo  $\eta > 1$  a constante cosmológica é positiva.

4) Cálculo de  $G = -\frac{A_1^2 + 4|A_2|A_0}{4A_2^2} :$  (eq. 3.104)

$A_0, A_1$  e  $A_2$  são dados por:

$$A_0 = \frac{\Lambda}{4\eta} (\lambda+1) (3\eta-1) \quad (D.9a)$$

$$A_1 = \frac{-1}{\tau_0} \left( \frac{\eta-1}{3\eta-1} \right) \quad (D.9b)$$

$$A_2 = \frac{-3}{4} (\lambda+1) (\eta+1) \quad (D.9c)$$

Então, substituindo  $A_0, A_1$  e  $A_2$  dados acima na expressão dada pela equação (3.104), vem:

$$-G = \frac{\frac{1}{\tau_0^2} \left( \frac{\eta-1}{3\eta-1} \right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} (\lambda+1) (\eta+1) \frac{\Lambda}{4\eta} (\lambda+1) (3\eta-1)}{4 \cdot \frac{9}{16} (\lambda+1)^2 (\eta+1)^2}$$

Substituindo a equação (D.8) na equação anterior, e depois de algumas simplificações, obtemos:

$$-G = \frac{(\eta-1)^4 + 4\eta(\eta+1)(3\eta-1)}{\frac{9}{4} \tau_0^2 (\lambda+1)^2 (\eta+1)^2 (\eta-1)^2 (3\eta-1)^2} \quad (D.10)$$

$$+ \frac{16\eta}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta-1)^2(3\eta-1)(\eta+1)} \quad (\text{E.19})$$

Voltando a equação (E.17), vem:

$$\begin{aligned} \rho(\infty) = & \frac{8(\eta-1)^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta+1)^2(3\eta-1)^2} + \frac{16\eta}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta-1)^2(3\eta-1)(\eta+1)} - \\ & - \frac{16\eta^2}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(3\eta-1)^2(\eta-1)^2} - \frac{8\sqrt{(\eta-1)^4 + 4\eta(\eta+1)(3\eta-1)}}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta+1)^2(3\eta-1)^2} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\rho(\infty) = \frac{8[-\eta^2 - 4\eta + 1 - \sqrt{(\eta-1)^4 + 4\eta(\eta+1)(3\eta-1)}]}{3\tau_0^2(\lambda+1)^2(\eta+1)^2(3\eta-1)^2} \quad (\text{E.20})$$

Para  $\eta > 1$ ,  $\rho(\infty)$  é sempre negativo. Isso significa que um dado tempo  $t = t_0$ ,  $\rho(t_0)$  e para todo  $t > t_0$ ,  $\rho(t) < 0$ . Logo, a condição de energia fraca é violada.

REFERÊNCIAS

- (1) - L.Landau and E.Lifschitz - Fluid Mechanics.Pergamon Press Ltd. (1959).
- (2) - W.G.Dixon - Special Relativity. The Foundation of Macroscopic Physics. Cambridge University Press (1978).
- (3) - H.B.Callen - Thermodynamics. John Willeyand Sons, Inc (1960)
- (4) - C.Eckart - The Thermodynamics of Irreversible Processes. Phys. Rev. 58, 919 (1940).
- (5) - S.Weinberg - Gravitation and Cosmology. John Willey (1972).
- (6) - W.Israel - Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory. Annals of Physics, 100, 310 - 331 (1976).
- (7) - I.Prigogine and P.Glansdorff - Thermodynamics Theory of Structure Stability and Fluctuations. John Willey ans Sons (1978).
- (8) - Wolsang Yourgrau, Alwyn Zan Der Merwe and Gough Raw - Treatise on Irreversible Thermodynamic. Dover Publications (1982).
- (9) - C.Cattaneo - C.R. Acad. Sci. Paris, 247, 431 (1958).
- (10) - J.C.Maxwell - Phil. Trans. R. Soc. London, 157, 49 (1867).
- (11) - F.Bampi and A.Morro - Two Approaches to Nonstationary Relativistic Thermodynamics. J. Math. Phys., 21(5) (1980).
- (12) - F.Bampi and A.Morro - Relativistic Heat Equation in Causal Nonstationary Thermodynamics. Phys. Let. 79A, 156 (1980).
- (13) - J.Meixner - Proc. IUTAM Symp. Vienna(Berlin: Springer)(1967).
- (14) - W.A.Day - The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory (Berlin: Springer)(1972).
- (15) - J.Müller - Z. Phys. 198, 329 (1967).
- (16) - W.Israel and J.M.Stewart - Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory. Annals of Phys. 118, 341 - 372 (1979).

- (17) - S.R. de Groot and P.Mazur - Non-Equilibrium Thermodynamics  
Dover Publications (1983).
- (18) - G.Nicolis and I.Prigogine - Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. John Willey and Sons (1978).
- (19) - D.Jou, J.M.Rubi and J.Casas-Vázquez - A Generalised Gibbs Equation for Second-Order Fluids. J.Phys. A: Math. Gen, 12, 2515 (1979).
- (20) - G.Lebon, D.Jou and J.Casas-Vázquez - An Extension of the Local Equilibrium Hypothesis. J.Phys. A: Math. Gen., 13, 275 (1980).
- (21) - D.Pavon, D.Jou and J.Casas-Vázquez - On a Covariant Formulation of Dissipative Phenomena. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. XXXVI, 1, 79-88 (1982).
- (22) - D.Jou, J.M.Rubi and Casas Vázquez - Hidrodynamical Fluctuations in Extended Irreversible Thermodynamics. Physics 101A, 588-598 (1980).
- (23) - D.Pavon, D.Jou and Casas Vázquez - Heat Conduction In Relativistic Extended Thermodynamics. J. Phys. A: Math. Gen. 13, L77-79 (1980).
- (24) - V.A.Belinskii, E.S.Nikomarov and I.M.Khalatnikov - Investigation of the Cosmological Evolution of Viscoelastic Matter with Causal Thermodynamics. Sov. Phys. JETP, 50(2), 213 (1979).
- (25) - M.Novello and J.B.S.d'Olival - Nonlinear Viscous Cosmology. Acta Physica Polonica, Vol. B11, 3 (1980).
- (26) - L.Onsager - Phys. Rev., 37, 405 (1931).
- (27) - C.Pombo - Análise de Geometrias Conformalmente Planas no Formalismo das Equações Quasi-Maxwellianas. Tese de Mestrado. CBPF (1984).
- (28) - M.Novello - II Escola de Cosmologia e Gravitação. CBPF(1980)..
- (29) - I.D.Souares - II Escola de Cosmologia e Gravitação. CBPF(1980).
- (30) - D.Pavon, D.Jon and J.Casas-Vázquez - Equilibrium and Non-Equilibrium Fluctuations in Relativistic Fluids. J. Phys. A: Math. Gen. 16, 775-782 (1983).

- (31) - L.Landau and E.Lifschitz - Statistical Physics. Perganon Press (1970).
- (32) - S.Weinberg - Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in a Expanding Universe. *Astroph. J.*, 168, 175 - 194, (1971).
- (33) - R.Tolman - Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford at the Clarendon Press (1984).
- (34) - S.W.Hawking and G.F.R.Ellis - The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press (1973).
- (35) - M.Heller, Z.Klimek and L.Suszycki - Imperfect Fluid Friedmannian Cosmology. *Astroph. and Space Sc.*, 20, 205 - 212 (1973).
- (36) - G.L.Murphy - Big-Bang Model Without Singularities. *Phys. Rev. D*, 8, 12, 4231 (1973).
- (37) - M.Heller and L.Suszycki - Dust-Filled Viscous Universes. *Acta Physica Polonica*, B5, 3, 345 (1974).
- (38) - L.Suszycki - Cosmological Models With Bulk Viscosity. *Acta Cosmologica*, CCCCLXXXIII, 147 - 159 (1978).
- (39) - R.S.Dias - Modelos Cosmológicos Isotrópicos com Fluidos Dissipativos. Tese de Mestrado. UFRJ(1984).
- (40) - S.R.Maiti - A Homogenous Universe With a Viscous Fluid. *Indian J. Phys.*, 56B, 110 - 118 (1982).
- (41) - A.Banerjee and N.O.Santos - *Journal Math. Phys.* 24, 2689 (1983).
- (42) - A.Banerjee and N.O.Santos - Spatially Homogeneous Cosmological Models. *G.R.G.* (1984).
- (43) - N.O.Santos and M.M.Som - *Phys. Lett.* 87A, 85 (1981).
- (44) - M.Novello and R.A.Araújo - Qualitative Analysis of Homogeneous Universes. *Phys. Rev. D*, 22, 2, 260 (1980).
- (45) - V.A.Belinskii and I.M.Khalatnikov - Influence of Viscosity on the Character of Cosmological Evolution. *Sov. Phys. JETP*, 42, 2, 205 - 210 (1975).

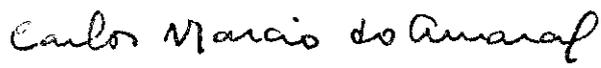
- (46) - M.Heller - Singularities In Viscous Universes. Acta Cosmologica, CCCCLXXXIII, 7 - 15 (1978).
- (47) - M.Szydlowsky and M.Heller - Viscous Cosmological Models with Matter and Radiation. Acta Phys. Polonica, B14, 303 (1983).
- (48) - M.Heller and M.Szydlowsky - Tolman's Cosmological Models. As troph. Space Sc., 90, 327 (1983).
- (49) - V.A.Belinskii and I.M.Khalatnikov - Viscosity Effects in Iso tropic Cosmologies. Sov.Phys. JETP 45, 1 - 9 (1977).
- (50) - J.M.Salim - Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação: Aplicações às Pertubações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann. Tese de Doutorado. CBPF(1982).
- (51) - C.Móller - The Theory of Relativity. International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press (1972).

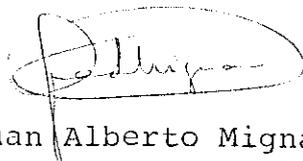
"UM ESTUDO EM COSMOLOGIA E TERMODINÂMICA CAUSAL"

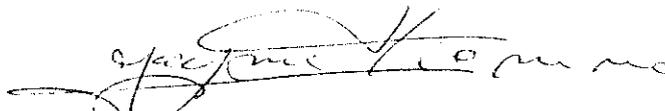
HENRIQUE PEREIRA DE OLIVEIRA

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
José Martins Salim - Presidente

  
Carlos Marcio do Amaral

  
Juan Alberto Mignaco

  
Jayme Tiomno - Suplente

Rio de Janeiro, 08 de dezembro de 1986