

JOSÉ NOBÔRU MAKI

INTERAÇÃO EFETIVA SÓLITON-SÓLITON

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRÁSILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1986-

- Ao meu avô, Yukiti

- A todos os meus

ENTES QUERIDOS.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Takeshi Kodama pela orientação, amizade e discussões. Pelos ensinamentos e experiências transmitidos.

Aos professores pesquisadores do CBPF que contribuíram na minha formação científica.

Aos colegas do CBPF pelas interações.

Ao pessoal das secretarias: Míriam, Aroldo e Helena; ao pessoal da biblioteca: Fátima, Baiano et al; ao pessoal da xerox: Zé Gordo e Elias, todos eles pela prontidão nos atendimentos. Ao pessoal das limpezas e aos porteiros pela ordem e bem-estar.

À Dona Elizabeth Regina, minha maior incentivadora.

Ao amigo Eng. Thadeu que mais contribuiu indiretamente.

Enfim, a todos amigos de fé que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho se tornasse uma realidade.

Às Instituições: CBPF pela acolhida, e CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

Um esquema de quantização semi-fenomenológico é proposto para um processo de colisão de dois envelopes-sólitons de mesmo tamanho. Estes sólitons são soluções especiais provenientes da equação de Schrödinger não linear. Determinou-se o avanço no tempo devido à colisão de dois envelopes-sólitons. Considerando os sólitons como partículas puntiformes e usando a descrição da mecânica clássica, determinou-se o potencial efetivo atrativo envelope sóliton-envelope sóliton. Este potencial é conhecido na literatura por Pöschl-Teller modificado. A obtenção deste potencial foi possível porque se tinha a informação em forma de memória do sistema, dada pela expressão analítica de "time delay". Quantizou-se o tal sistema usando esse potencial efetivo na equação de Schrödinger. Desse modo, pôde-se determinar a matriz S_{col} de dois corpos puntiformes e verificou-se que, no limite $1 \ll N^2 \ll 4\hbar^2 E/mN^4$ ela reproduz exatamente a matriz S_{2N} obtida de um pacote sóliton que incide sobre um outro pacote sóliton. Cada pacote sóliton é formado por N partículas ligadas. Todas têm mesma massa, interagem por força de contato de dois corpos. Estes pacotes possuem apenas um estado ligado, isto é, não possuem estados excitados. Verificou-se, enfim, que através da matriz S_{col} pode-se obter a energia de ligação do estado fundamental do sistema, a qual coincide com a do de $2N$ partículas na aproximação $\frac{1}{N}$. Neste esquema aparecem infinitos estados ligados espúrios.

SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - FONTES BÁSICAS E PRELIMINARES	8
I.1 - INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DO CONTEXTO SÓLITON	8
I.2 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR PELO MÉTO DO DA TRANSFORMAÇÃO ESPECTRAL INVERSA (IST)	19
a) Espalhamento Direto	20
b) Espalhamento Inverso	24
c) Forma Explícita para Solução N-Sólitons	29
d) Solução Explícita de Um-Sóliton	30
e) Solução Explícita de Dois-Sólitons e Dinâmica de Sólito ton-Sóliton	33
I.3 - OBTENÇÃO DAS INFINITAS LEIS DE CONSERVAÇÃO	39
<u>CAPÍTULO II</u> - PANORAMA MICROSCÓPICO	43
II.1 - INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DO SISTEMA DE N-CORPOS INTERA GINDO VIA POTENCIAIS DELTA DE DOIS CORPOS	43
II.2 - ESTUDO DA MATRIZ S DO SISTEMA DE N-CORPOS ESPALHADOS PE LOS POTENCIAIS DELTA	46
a) Espalhamentos de Partículas Livres	46
b) Energia de Ligação das N Partículas	60
c) Espalhamento dos Estados Ligados	62
c.1) Espalhamento do Estado Ligado Formado com Duas Partículas Incidindo em uma Livre	63
c.2) Espalhamento de Dois Estados Ligados e Formados cada um com Duas Partículas	64
c.3) Espalhamento de Dois Estados Ligados e Formados por Três e Duas Partículas	69

	c.4) Espalhamento de Dois Estados Contendo cada um Três Partículas e Generalização do Operador S Fatorado para a Colisão de Dois Pacotes Equivalentes	71
	d) Dois Estados de Espalhamento Formado por Dois Pares de Partículas em Função da Energia Cinética	75
	e) Estados de Espalhamento de Uma Partícula por $(N-1)$ Partículas em Função da Energia Cinética	78
III.3	- DESCRIÇÃO MICROSCÓPICA QUÂNTICA DO ESPALHAMENTO DE UM AGREGADO DE N -BÓSONS POR OUTRO	80
<u>CAPÍTULO III</u>	- PANORAMA MACROSCÓPICO	88
III.1	- INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DA QUANTIZAÇÃO DE DOIS CORPOS COLETIVOS	88
III.2	- DINÂMICA DO SISTEMA COM SÓLITONS	93
	a) Solução Dois-Sólitons e Obtenção da Expressão de Avanço no Tempo.....	93
	b) Interpretação Física e Utilidade das Três Primeiras das Infinitas Leis de Conservação	95
III.3	- DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA CLÁSSICA DA INTERAÇÃO SÓLITON - SÓLITON - POTENCIAL COLETIVO	98
III.4	- DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA QUÂNTICA DA INTERAÇÃO SÓLITON - SÓLITON - MATRIZ S COLETIVA	105
<u>CAPÍTULO IV</u>	- COMPARAÇÕES E DISCUSSÕES	112
IV.1	- VERIFICAÇÃO DA CONSISTÊNCIA DAS QUATRO DESCRIÇÕES VIA "TIME DELAY"	112
	a) Consistência entre a Descrição da Teoria Clássica e a da Teoria de $2N$ Corpos	114
	b) Consistência Entre a Descrição da Teoria Clássica e a de Dois Corpos Coletivos	117
IV.2	- COMPARAÇÃO DA AMPLITUDE S COLETIVA À AMPLITUDE S DE $2N$ CORPOS	118
IV.3	- REOBTENÇÃO DA ENERGIA DE LIGAÇÃO DOS $2N$ CORPOS VIA QUANTIZAÇÃO SEMI-FENOMENOLÓGICA	120
IV.4	- CONCLUSÕES E NOVAS PERSPECTIVAS	121
REFERÊNCIAS	123

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PÁG.</u>
1.1 - Gráfico típico de uma cinemática da interação sóliton-sóliton	9
1.2 - Diagrama de IST	11
2.1 - (a) Transmissão; (b) Reflexão	47
2.2 - Ordem de interação	49
2.3 - Diagrama de colisão de dois corpos	53
2.4 - Uma das 14 possibilidades de construir diagramas de interações de 4 partículas livres	56
2.5 - Interação de dois agregados	66

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>		<u>PÁG.</u>
2.1 - Elementos de matriz S		51
2.2 - Visão pictórica de interação		69

INTRODUÇÃO

Intensifica-se a cada dia o estudo de importantes fenômenos físicos que apresentam aspectos não lineares. Os problemas não lineares surgem em quase todas as áreas da Física; aparecem na relatividade geral, nas teorias de campo como a QCD, na física dos plasmas, óptica, hidrodinâmica, etc.

A não linearidade resulta muitas vezes de mecanismos de auto-interação contidos no próprio sistema. Por exemplo, na Física Nuclear este sistema é representado por um campo não linear (e, inclusive, até não local) como no modelo de Hartree-Fock ou no de Thomas-Fermi. Nestes modelos a não linearidade é responsável pela estabilidade do sistema.

A descrição da dinâmica nuclear via campo global, onde se considera todos os nucleons do sistema, requer inevitavelmente a introdução da não linearidade. Este tipo de descrição microscópica é inviável, resta então a descrição macroscópica. Assim, esta descrição é o único meio de estudar a propriedade global do sistema nuclear, especialmente a dinâmica coletiva em grande escala tal, como a fissão nuclear.

Seria extremamente interessante investigar as soluções das equações não lineares que apresentam as propriedades globais de um sistema nuclear. Estas equações são muito pouco esclarecidas se comparadas com os problemas lineares, devido à diversas dificuldades matemáticas. Mas existem certas classes de equações de campos não lineares cujas soluções exatas foram descobertas nos últimos decênios e pesquisadas tanto na versão clássica quanto na versão quântica. Embora nenhuma das soluções

seja tridimensional, o que corresponderia aos sistemas realísticos, elas servem como um paradigma para estudar o procedimento de quantização de campos não lineares. Entre elas, é de nosso interesse particular a que apresenta solução denominada de sóliton.

Uma solução sóliton mantém a forma do pacote de onda estável durante todo o seu percurso (onda solitária); quando dois sólitons colidem, fundem-se perdendo momentaneamente suas identidades. Após a fusão, cada sóliton emerge com a mesma forma anterior, mas deslocado no movimento em que deveria estar, sofrendo assim um "time delay" ou "phase shift" no seu movimento. Neste sentido, um sóliton pode ser considerado uma partícula rígida em relação ao processo de espalhamento.

Numa descrição do espalhamento em termos de matriz S , onde o processo de colisão é reconstituído através de quantidades assintóticas, o espalhamento de sólitons é representado simplesmente por uma interação efetiva, sem necessidade de se considerar as estruturas geométricas complexas. Em particular, se a interação efetiva é representada pelo potencial local, os sólitons se comportam como partículas puntiformes sem estrutura.

Inversamente, o fato do processo de colisão ser descrito em termos de potencial local não quer dizer que o sistema em questão seja de partículas sem estrutura interna. Tal situação ocorre frequentemente na Física Nuclear. Por exemplo, o modelo de potencial óptico para espalhamento entre íons descreve o processo em termos de potencial efetivo. Os efeitos de outros canais que não estão sendo observados são simplesmente representados através da parte imaginária do potencial efetivo. No modelo de agregado de alfas (α - "cluster") para núcleos leves, eles (alfas) são tratados como partículas que interagem entre si a-

través de um potencial efetivo. Note que o raio de cada α não é desprezível, nem absoluto (definitivo) se comparado ao sistema α - "cluster". Uma situação mais perplexa ocorre num domínio mais fundamental, isto é, no caso de forças nucleares entre nucleons. Como é do conhecimento geral, a Física Nuclear teórica corrente é construída inteiramente sobre a suposição de que os nucleons são partículas elementares puntiformes, e de que as interações são descritas por um potencial local. Os grandes sucessos do modelo de camada e demais modelos atestam que os fundamentos são bastante confiáveis. Entretanto, é sabido que os nucleons não são partículas puntiformes. O modelo de sacola indica que o raio do nucleon é da ordem de 1 fm, comparável com a interdistância dos nucleons dentro do núcleo.

Então, qual é o mecanismo pelo qual os nucleons se comportam como partículas puntiformes dentro do núcleo, apesar de sua extensão geométrica e da sua estrutura interna complexa?

Uma possível resposta para esta questão pode advir do estudo dos sólitons provenientes das teorias de campos não lineares.

No presente trabalho estudamos um processo de espalhamento de dois sólitons via potencial efetivo. Para isso escolhemos a equação de Schrödinger não linear (NLS) que é exatamente resolvível.

O objetivo deste trabalho é investigar a interação efetiva entre os dois sólitons da equação NLS. Assim, construiremos no mundo do modelo NLS um esquema semi-fenomenológico que usa o conceito de coletividade. Vamos analisar o significado físico do método de quantização semi-fenomenológico utilizando um potencial efetivo, e comparar os resultados com o de sistema exa

to.

A equação NLS tem a forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \epsilon^2 |\psi|^2 \psi = 0 \quad ,$$

e tem sido estudada por vários autores em conexão com o problema de muitos corpos não relativísticos. Existem diversos trabalhos sobre o modelo NLS com diferentes enfoques, tanto a nível clássico, semi-clássico quanto em quântico. Pode-se obter essa equação NLS através do Lagrangeano de um sistema gasoso cujas partículas interagem por força de contato de dois corpos $V = c \delta(x_i - x_j)$. Pode-se mostrar, no contexto de campo quântico NLS, que se o número de ocupação total N é muito grande obteremos um estado correspondente ao sóliton clássico. Deste modo o sóliton pode ser visto como representante de estado ligado contendo N partículas, isto é, um pacote. Por outro lado, tratamos os sólitons como partículas coletivas. Assim, usando apenas a mecânica clássica de pontos materiais, obtivemos um potencial efetivo que simula exatamente a interação sóliton-sóliton. Isto é possível porque após a interação do campo sóliton-sóliton pode-se obter uma expressão de avanço no tempo que é a memória do sistema.

Depois, quantizamos esse sistema de duas partículas macroscópicas usando o potencial efetivo na equação de Schrödinger. O resultado da quantização foi comparado ao do sistema de $2N$ -corpos porque o esquema semi-fenomenológico assim montado não nos garante chegar aos resultados esperados.

Agora, para melhor esclarecimento, apresentaremos pictoricamente o esquema semi-fenomenológico no quadro esquemático:

	Teoria Clássica	Teoria Quântica
Teoria Exata	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> descrição via teoria clássica de campo </div> <p>1º quadrante - sistema macroscópico 1</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> descrição via mecânica quântica de 2N-corpos </div> <p>2º quadrante - sistema microscópico</p>
Teoria Semi-fenomenológica	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> descrição via mecânica newtoniana </div> <p>3º quadrante - sistema macroscópico 2</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> descrição via mecânica quântica de 2 corpos coletivos </div> <p>4º quadrante - sistema macroscópico³ (informação a nível microscópico)</p>

Este quadro visualiza quatro descrições de um mesmo fenômeno ao mostrar a divisão: teoria exata, teoria semi-fenomenológica, teoria a nível clássico, e a quântico. A descrição do 1º, 3º e 4º quadrantes apresenta aspecto macroscópico, e a do 2º quadrante, o fenômeno a nível de estrutura da matéria condensada (microscópico). No 4º quadrante conseguimos informação microscópica que é a energia de ligação do sistema de 2N-corpos.

No Capítulo I apresentamos aspectos gerais da teoria correspondente ao 1º quadrante do quadro esquemático. Introduzimos generalidades do contexto sóliton. Ilustramos o método de transformação do espalhamento inverso para resolver a equação não linear, e depois aplicamo-lo particularmente à equação NLS. Determinamos explicitamente as soluções 1-sóliton e 2-sólitons. Apresentamos a solução geral N-sólitons. Mostramos também que a solução 2-sólitons se desdobra em "duas soluções 1-sóliton". Mostramos como foram obtidas as infinitas leis de conservação. O

objetivo principal deste Capítulo é introduzir ao estudo do setor de solução 2-sólitons clássica. Este setor e suas propriedades serão usados no esquema de quantização semi-fenomenológico com base em grandezas macroscópicas exatas.

O Capítulo II corresponde ao 2º quadrante. Nele apresentamos a 1ª quantização do problema de 2N-corpos. Estas partículas interagem via potenciais delta atrativos de dois corpos. Não apresentamos a versão de 2ª quantização por não ser mais necessário. Estudamos o sistema de 2N-corpos sem restrição na simetria considerando iguais as massas das partículas. Estudamos a matriz S desse sistema seguindo as convenções de J.B. McGuire e o método desenvolvido por C.N. Yang. Este Capítulo é rico em detalhes. Deduzimos a matriz- S na forma fatorada de matrizes S_s provenientes de interações delta fazendo incidir um agregado (sóliton) sobre outro. Esta matriz de 2N-corpos corresponde, sob o ponto de vista de campo, ao sistema de equações NLS multidimensional cujos 2N-corpos são partículas multicoloridas. Depois particularizamos a matriz S_{2N} para o sistema bosônico, que corresponde ao sistema NLS de nosso interesse. Calculamos a energia de ligação de N-corpos que formam o agregado. O objetivo principal deste Capítulo é deduzir a matriz- S_{2N} com informação microscópica sobre a colisão sóliton-sóliton, para posterior comparação com a de semi-fenomenológica, e também apresentar a energia de ligação do sistema via efeito (com informação) microscópico, que não é exatamente acessível ao usar as descrições semi-clássicas desse campo NLS.

No Capítulo III apresentamos a teoria semi-fenomenológica. Determinamos o "time delay" (devido à interação sóliton-sóliton) usando o referencial dos pontos onde os sólitons têm

suas maiores amplitudes. Utilizando as três primeiras das infinitas leis de conservação existentes, e considerando sólitons como pontos materiais coletivos com massas, momentos e energias bem determinados, aplicamo-lhes a lei de conservação da mecânica clássica vinculada ao "time delay" em coordenada relativa para encontrar um potencial efetivo coletivo. É efetivo no sentido de que um problema de $2N$ -corpos foi reduzido ao de dois corpos. É coletivo no sentido de que simula interações de $2N$ -corpos. Encontrado o potencial efetivo classicamente, usamo-lo na equação de Schrödinger e deduzimos a matriz S . Esta matriz foi comparada à de sistema exato no Capítulo IV. Neste Capítulo também verificamos a consistência do "time delay" em todas as quatro descrições. A quantização semi-fenomenológica permite obter a energia de ligação. Esta energia coincide com a exata apresentada no Capítulo III na aproximação $\frac{1}{N}$.

CAPÍTULO I

FONTES BÁSICAS E PRELIMINARES

I.1 - INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DO CONTEXTO SÓLITON

Os sólitons aparecem frequentemente como solução de certas equações evolutivas não lineares, dos sistemas físicos. Faz duas décadas que o termo sóliton foi criado. Nestes vinte anos, a pesquisa relacionada com sóliton progrediu substancialmente tanto na Física como na Matemática. Existem hoje muitas publicações sobre sóliton; as referências (1-14) são artigos de revisão ou livros. Aqui expomos, sumariamente, alguns aspectos gerais extraídos dessas referências. Focalizaremos fatos históricos, definições e conceitos gerais, para melhor entendimento do contexto da teoria do sóliton.

Foi com o desenvolvimento da tecnologia eletrônica, particularmente dos poderosos e velozes computadores digitais dos últimos decênios, que se tornou possível a pesquisa de sistemas físicos através de simulações numéricas.

Quando um desses métodos de matemática experimental foi aplicado ao então conhecido problema de Fermi, Pasta e Ulam (FPU) pelos pesquisadores M. Kruskal e N. Zabusky no ano de 1965^(1,2,3), estes encontraram soluções numéricas da dinâmica de rede FPU (ondas de plasma) e redescobriram que no contínuo esta rede é descrita pela equação de Korteweg de Vries (KdV), já conhecida em 1895,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (I.1)$$

onde α é um fator de "scaling".

Esta equação possui solução (numérica) interessante com as seguintes propriedades:

- a) - uma solução com um perfil pulso, denominada onda solitária, caminhando com velocidade constante. A onda tem uma forma bem definida, que se mantém invariável durante todo o percurso;
- b) - solução com mais de uma onda solitária. Foi dado o nome de sólitons a estas ondas solitárias, por M.Kruskal e N. Zabusky. O nome sóliton provém do comportamento tipo partícula. Numa dada colisão os sólitons, após a interação, emergem sem mudar os perfis anteriores, mas possivelmente estarão deslocados das posições em que deveriam estar se tal interação não houvesse ocorrido. Assim, assintoticamente são ondas solitárias.

Ilustremos graficamente as trajetórias no espaço-tempo:

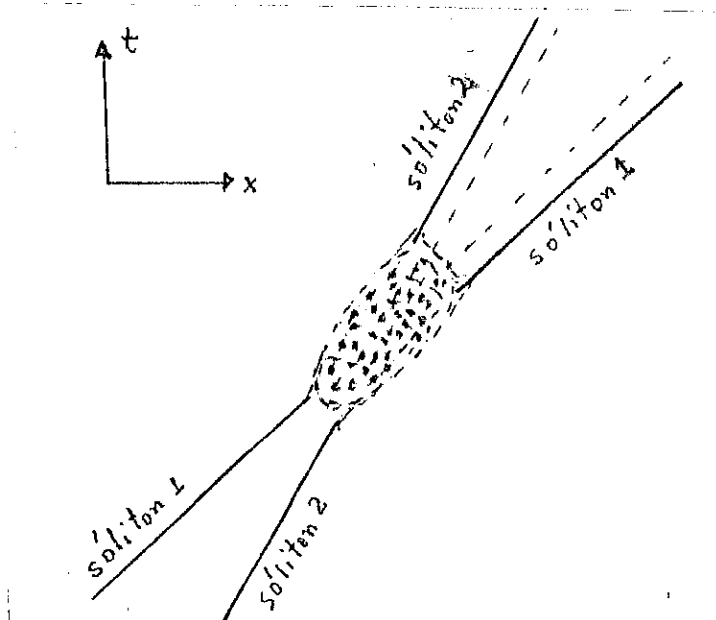


Figura 1.1 - Gráfico típico de uma cinemática da interação sóliton-sóliton.

Neste gráfico a velocidade do s3liton 1 3 maior do que a velocidade do s3liton 2. Interagem na regi3o pontilhada, depois emergem reaparecendo apenas com posi33es deslocadas.

Qualitativamente o s3liton pode ser entendido como representando um balanceamento entre o efeito de n3o linearidade e dispers3o (ou dissipac3o). Assim, no caso de KdV, o termo de n3o linearidade 3 dado por $\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e o de dispers3o por $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$.

Logo depois, em 1967 ao descobrirem a aplicabilidade da t3cnica da transforma3o de espalhamento inverso (IST), S. Gardner, J.M.Green, M.Kruskal e R.Miura ⁽¹⁵⁾ conseguiram resolver analiticamente, por sucess3o de c3culos lineares, a equa3o KdV para dados valores iniciais. Obtiveram as solu33es exatas (em caso particular, os s3litons) deste sistema evolutivo n3o linear. Apresentaram subseqüentemente uma s3rie de artigos sobre estudos das propriedades f3sicas e matem3ticas dos sistemas KdV e KdV modificado e descobriram as infinitas leis de conserva3o desta equa3o.

P.Lax mostrou em 1968 ⁽¹⁶⁾ queo m3todo IST pode ser aplicado a uma classe mais geral de equa3o da forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K(\phi) \quad , \quad (I.2)$$

onde K 3 um operador n3o linear em ϕ . Esta equa3o pode ser reescrita na forma de operadores,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, M] \quad (I.3)$$

L e M, chamados par de Lax, s3o operadores que dependem de ϕ .

Introduzindo uma fun3o auxiliar ψ , e f3cil verificar

que a equação (I.3) é equivalente ao par de equações

$$L\psi = \lambda\psi \quad , \quad (I.4)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = M\psi \quad , \quad (I.5)$$

onde λ_j é independente de t .

Em alguns casos é possível resolver-se um problema de espalhamento usando-se o operador linear L . Quando este for o caso, dado o valor inicial $\phi(x,0)$ podemos encontrar $\phi(x,t)$ através do seguinte procedimento:

- i) Problema direto: calcula-se os parâmetros de espalhamento tais como os coeficientes de reflexão e transmissão do sistema (I.4), para todo "potencial" $\phi(x,0)$, estabelecendo os comportamentos assintóticos da função $\psi(x)$ para $|x| \rightarrow \infty$;
- ii) Evolução temporal dos dados de espalhamento: usa-se a equação na forma assintótica de M em $|x| \rightarrow \infty$ para calcular a evolução temporal dos dados de espalhamento empregando a equação (I.5);
- iii) Problema inverso: voltando à equação (I.4) conhecendo-se agora dados de espalhamento do operador em função de tempo (os coeficientes de reflexão e transmissão em função do tempo), constrói-se $\phi(x,t)$.

O IST está representado diagramaticamente na Fig.1.2.

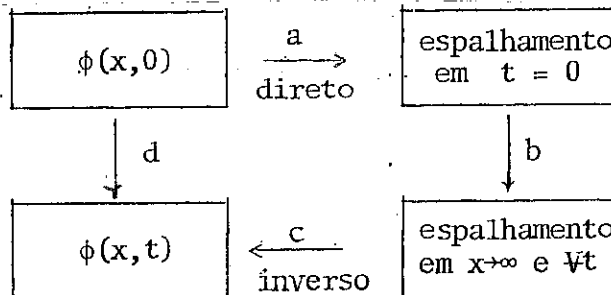


Figura 1.2 - Diagrama de IST.

A idéia é evitar o caminho d (o qual resolveria a equação evolutiva não linear (I.2) diretamente) e sim percorrer sucessivamente os caminhos a, b e c que envolvem álgebras lineares.

O primeiro problema desta abordagem é encontrar os operadores (I.3). Os operadores L e M em alguns casos podem ser encontrados facilmente. Portanto, mesmo tendo L e M, o problema de autovalores (I.4) nem sempre fácil é de ser resolvido.

Fora estas dificuldades, o método IST resolve uma grande variedade de equações evolutivas não lineares. V.E. Zakharov e A.B. Shabat (1970)⁽¹⁷⁾ (ZS), aplicaram o método de Lax⁽¹⁶⁾ na equação de Schrödinger não linear,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K|u|^2 u = 0 \quad (I.6)$$

O par de Lax L e M tem as formas

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \quad (I.7.1)$$

$$M = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} |u|^2/(1+p) & i \frac{\partial}{\partial x} u^* \\ -i \frac{\partial}{\partial x} u & -|u|^2/(1-p) \end{bmatrix} \quad (I.7.2)$$

e

$$K = \frac{2}{1-p^2} \quad (I.7.3)$$

Assim, eles obtiveram a solução analítica geral. Com uma condição especial na equação de auto-valores (I.4), isto é, fazendo o coeficiente de reflexão $R = 0$ na solução geral, obtém-se "o potencial" não refletor de partículas. Este potencial é o(s) sóliton(s)

que é denominada de "envelope sóliton". Além de obter solução analítica, os autores estudaram as propriedades dos sólitons quanto a estabilidade, quantização quase-clássica e comportamentos assintóticos. Obtiveram as infinitas leis de conservação que aparecem quando é possível aplicar o método IST em equações evolutivas não lineares unidimensionais.

Sob a motivação da aplicação do método IST segundo esquema matricial de ZS, M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell e H. Segur (AKNS) em 1974⁽¹⁸⁾ generalizaram esse esquema considerando o problema linear de auto-valores

$$Lv = \zeta v, \tag{I.8.1}$$

sendo

$$L = \begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial x} & -iq \\ ir & -i \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{I.8.2}$$

e

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{I.8.3}$$

nos quais os coeficientes $q = q(x,t)$ e $r = r(x,t)$ são funções arbitrárias. Considerando que o operador M toma a forma geral

$$M = \begin{pmatrix} a(x,t;\zeta) & b(x,t;\zeta) \\ c(x,t;\zeta) & -a(x,t;\zeta) \end{pmatrix} \tag{I.9}$$

sendo os coeficientes a , b e c arbitrários, a auto-função v evolui conforme a equação (I.5), isto é,

$$i \frac{\partial v}{\partial t} = Mv. \tag{I.5}$$

Tomando a derivada t da equação (I.8.1) e a derivada x da equação (I.5) e levando em conta que os auto-valores ζ 's de (I.8.1) são independentes de t e x , a consistência das derivadas cruzadas fornece as três condições sobre os coeficientes arbitrários:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = qc - rb \quad , \quad (I.10.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + 2i\zeta b = i \frac{\partial q}{\partial t} - 2aq \quad , \quad (I.10.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} - 2i\zeta c = i \frac{\partial r}{\partial t} + 2ar \quad . \quad (I.10.3)$$

Fazendo escolhas convenientes destes coeficientes, os autores (AKNS) mostraram que as condições (I.10) são equivalentes a uma longa classe de equações evolutivas não lineares. Daremos aqui alguns exemplos que descrevem sistemas físicos famosos. Escolhendo

$$a = 4\zeta^3 + 2qr\zeta + ir \frac{\partial}{\partial x} q + iq \frac{\partial}{\partial x} r \quad , \quad (I.11.1)$$

as condições (I.10) fornecem as equações

$$\frac{\partial q}{\partial t} - 6rq \frac{\partial}{\partial x} q + \frac{\partial^3}{\partial x^3} q = 0 \quad , \quad (I.11.2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} - 6rq \frac{\partial}{\partial x} r + \frac{\partial^3}{\partial x^3} r = 0 \quad . \quad (I.11.3)$$

Quando $r = 1$, as equações (I.11) reduzem-se à equação KdV; quando $r = \pm q$, as equações (I.11) reduzem-se à equação KdV modificada.

Agora, escolhendo

$$a = -\frac{1}{4\zeta} \cos\phi \quad (I.12.1)$$

e usando as condições (I.10) e tomando

$$r = -q = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \phi \quad (I.12.2)$$

obtemos a equação do sine-Gordon,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \phi = \sin\phi \quad (I.12.3)$$

A escolha de

$$a = 2\zeta^2 + rq \quad (I.13.1)$$

e usando as condições (I.10) implicará nas equações

$$i \frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} q - 2q^2 r = 0 \quad (I.13.2)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} r - \frac{\partial^2}{\partial x^2} r + 2q^2 r = 0 \quad (I.13.3)$$

Quando tomamos $r = \pm q^*$, (I.13) transforma-se na equação NLS.

Assim, Ablowitz et al. estabeleceram um esquema geral que engloba, em particular, as conhecidas equações evolutivas resolvíveis pelo método IST, tais como: KdV, KdV modificada, um par de equação KdV acoplada, sine-Gordon, sinh-Gordon, NLS e muitas outras.

Historicamente, Gardner et al. resolveram KdV⁽¹⁵⁾, Zakharov e Shabat resolveram NLS⁽¹⁷⁾, Wadati resolveu KdV modificada⁽¹⁹⁾, Tanaka também resolveu KdV modificada⁽²⁰⁾, Ablowitz et al. resolveram sine-Gordon⁽²¹⁾, e assim por diante.

Destaca-se, dentre os métodos de resolução das equações com solução sóliton, o método direto ou R.Hirota^(22,23).

Seu procedimento é reescrever a variável de campo ϕ da equação não linear como uma razão de funções. Com algumas manipulações algébricas transforma-se essa equação em um sistema de equações diferenciais bilineares acopladas. A forma das equações fica simplificada ao introduzirmos novos operadores,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}$$

em um espaço estendido para quatro variáveis, fazendo as variáveis dependentes dependerem delas mesmas na equação diferencial, e restringir a $x = x'$ e $t = t'$. O método consiste em expandir as equações bilineares em uma série a um parâmetro ϵ e calcular os coeficientes pelo método usual de série perturbativa. Para o caso de sólitons, esta série reduz-se à soma finita e fornece fórmulas explícitas para as soluções. R.Hirota tem resolvido e estudado diversos modelos não lineares. Outros autores têm estudado modelos não lineares usando a sistemática de Hirota ^(24,25,26).

Os métodos de potencial e pseudo-potencial são também usados para a resolução das equações não lineares ^(27,28,29). Têm sido estudados os métodos geométricos, prolongamentos estruturais, etc. ^(30,31,32).

Um método antigo (1895) conhecido por transformação de Bäcklund ^(33,34,2), que é aplicado na geometria diferencial, foi introduzido para as transformações de equações parciais não lineares de modo a que suas resoluções fiquem facilitadas. É aplicado exaustivamente na teoria de sóliton e com sucesso extraordinário.

Hoje, conhecemos dezenas de equações evolutivas não lineares que descrevem sistemas físicos que podem ser resolvidos usando os métodos mencionados. É bom ressaltar que, através do progresso da teoria de sine-Gordon e outras, verificou-se que mesmo no nível clássico é preservado o conceito de partícula-antipartícula dado pelas soluções tipo sóliton-anti-sóliton, conceito este puramente da mecânica quântica relativística. Os sólitons e anti-sólitons ao colidirem se aniquilam e depois reaparecem com as mesmas formas anteriores. Isto é um dos conceitos quântico-relativísticos que aparecem naturalmente na teoria de campo clássico não linear.

Além das equações KdV e NLS, que são protótipos de equações não relativísticas, a equação de sine-Gordon é importante e interessante por ser equação relativística. A solução analítica da equação sine-Gordon foi descoberta antes da equação KdV, isto é, antes do aparecimento do termo sóliton. Os resultados do estudo do primeiro teste foram obtidos em 1962 por J.K.Perring e T. H.R.Skyrme⁽³⁵⁾: Eles estavam interessados na solução onda solitária da equação sine-Gordon como um simples modelo para partícula elementar da matéria. Experiências de computação foram realizadas para ver como tal modelo de partícula elementar poderia sofrer espalhamento devido à colisão. A solução computacional indicou que a colisão entre as ondas solitárias não produz espalhamento. Elas emergem da colisão tendo as mesmas formas e velocidades com as quais entraram. Deste "vestígio computacional", Perring e Skyrme conseguiram encontrar uma expressão analítica que descreve o evento de colisão. Porém, é interessante notar que esta expressão foi encontrada uma década antes por A.Seeger, H.Donth e A.Kochendörfer⁽³⁶⁾.

Após os conhecimentos de soluções exatas, das estrutu

ras matemáticas etc. desses campos clássicos não lineares, veio naturalmente a questão de quantização.

Apareceram vários estudos de quantização do sistema não linear usando os métodos coletivos, semi-clássicos, canônicos etc. na quantização (37 a 69). Surgiram concomitantemente novas publicações na área de campo quantizado com o enfoque da teoria de fatoração de matriz S (70 e 72). Esta fatoração na dimensão 1 espacial e 1 temporal não é trivial. A teoria de quantização desenvolveu tanto que atualmente conhece-se mais sobre sistema não linear quantizado do que sobre o correspondente clássico. Este desenvolvimento da teoria dos sólitons tanto a nível quântico quanto a nível clássico acarretou um enriquecimento significativo dos conceitos físicos e matemáticos. Em matemática beneficiaram-se a álgebra, a teoria dos grupos, a geometria diferencial, o cálculo funcional, a topologia, etc.

Hoje, conhecemos diversos nomes específicos para o sóliton: "envelope sóliton", "dark soliton", "bright soliton", "kinks", "antikinks", "breathers", "boomerons", "zoomerons", "trappons", "looping soliton", "GRK", "lump solitons" e outros.

Em geral, os modelos físicos são não lineares. Exemplos: dinâmica de fluidos, ondas de água, ópticas de cristal, dinâmica de cadeia, linhas de transmissão ativa, mecânica do contínuo, propagação de pulso em nervo, gravitação e cosmologia, mecânica quântica, etc. Todos estes modelos exibem soluções sólitons. Particularmente, na Física Nuclear conhecemos os modelos de Skyrmons.

I.2 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR PELO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO ESPECTRAL INVERSA (IST)

Mostraremos como se resolve analiticamente a equação NLS. Para tanto seguiremos o artigo dos autores Z.S. ⁽¹⁷⁾, que pioneiramente mostraram a resolução analítica desta equação aplicando o método IST. Posteriormente, sob forte motivação da aplicabilidade do esquema de Z.S., AKNS ⁽¹⁸⁾ o estenderam a uma família maior de equações diferenciais evolutivas não lineares. Esta extensão ficou conhecida como método de AKNS-ZS. O esquema de AKNS-ZS foi pesquisado sob o enfoque da geometrização. Hoje, conhecemos a extensão do método AKNS-ZS até o supersimétrico ⁽⁷³⁾.

Costuma-se escrever a equação NLS na forma convencional adimensional

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K|u|^2 u = 0 \quad ; \quad (I.14)$$

vamos estudar apenas o caso $K > 0$ porque implica em solução envelope(s)-sóliton(s), que é o objeto principal deste trabalho. Esta equação foi resolvida pelo método IST desenvolvido por P. Lax ⁽¹⁶⁾ porque é do tipo (I.2). Assim, (I.14) na forma de equação de operadores fica como a (I.3),

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, M] \quad ,$$

com L e M dados pelas expressões (I.7.1) e (I.7.2),

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$
$$M = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} |u|^2/(1+p) & i \frac{\partial}{\partial x} u^* \\ -i \frac{\partial}{\partial x} u & -|u|^2/(1-p) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$K = \frac{2}{1 - p^2} .$$

Para resolver a equação (I.14) precisaremos de uma função auxiliar dada na forma de problema de auto-valores (I.4)

$$L\psi = \lambda\psi$$

e de sua evolução temporal (I.5)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = M\psi .$$

O comportamento do auto-vetor ψ determina o potencial de espalhamento (que é a solução da equação NLS) dado na equação (I.4), como veremos a seguir.

a) Espalhamento Direto

Este é o primeiro passo do método IST. Vamos averiguar o problema do espalhamento para o operador L com a condição $u(x,0) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Com este propósito, a equação de auto-valores (I.4) será escrita em sistema de equações. Então, decomponos ψ em duas parcelas,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} ,$$

e mudamos as variáveis (ψ_1, ψ_2) para (v_1, v_2) da forma

$$\psi_1 = \sqrt{1-p} \exp(-i \frac{\lambda}{1-p^2} x) v_2 ,$$

$$\psi_2 = \sqrt{1+p} \exp(-i \frac{\lambda}{1-p^2} x) v_1 .$$

Assim, a equação (I.4) pode ser reescrita na forma de sistema de equações

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} v_1 - iq v_2 &= \zeta v_1 \\ -i \frac{\partial}{\partial x} v_2 - iq^* v_1 &= \zeta v_2 \end{aligned} \quad , \quad (I.15.1)$$

ou

$$L'v = \zeta v \quad , \quad (I.15.2)$$

$$L' = \begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial x} & -iq \\ -iq^* & -i \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

e com

$$\begin{aligned} q &= iu / \sqrt{1-p^2} \\ \zeta &= \lambda p / (1-p^2) \end{aligned} \quad . \quad (I.15.3)$$

Apesar desta equação (I.15.1) não ser auto-adjunta, seu problema de espalhamento é semelhante em muitos aspectos ao da equação auto-adjunta.

Sejam v e w as soluções do sistema de equações (I.15) com auto-valores $\zeta = \zeta_1$ para v e $\zeta = \zeta_2$ para w . Então, pode-se mostrar que é válida a relação

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_1 w_2 - w_1 v_2) + i(\zeta_1 - \zeta_2)(v_1 w_2 + v_2 w_1) = 0 \quad . \quad (I.16)$$

Ademais, se v é uma solução do sistema de equações (I.15) com auto-valores $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, então

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2^* \\ -v_1^* \end{pmatrix} \quad (I.17)$$

é a solução do sistema de equações (I.15.1) com auto-valor

$$\zeta_2 = \zeta_1^* = \xi_1 - i\eta_1.$$

As soluções assintóticas do sistema (I.15.1) são dadas pelas funções de Jost ϕ e ψ com auto-valor $\zeta = \xi$ real,

$$\begin{aligned} v_2 &= \phi + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty \\ v_1 &= \psi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (I.18)$$

o par de soluções $\bar{\psi}$ e ψ formam um conjunto completo de soluções,

$$\phi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi \quad (I.19)$$

Conforme (I.17), $\bar{\psi}$ é dada por

$$\bar{\psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(x, \xi) \\ -\psi_1^*(x, \xi) \end{pmatrix}$$

O coeficiente $a(\xi)$ é o inverso do coeficiente de transmissão e $b(\xi)$ é o produto do coeficiente R de reflexão com o inverso do de transmissão, isto é, $b(\xi) = R.a(\xi)$.

Aplicando a relação (I.16) ao par de soluções

$v = \phi(x, \xi)$ e $w = \bar{\phi}(x, \xi)$ da equação (I.15), obtemos

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1 \quad (I.20)$$

As funções $v = \phi$ e $w = \bar{\phi}$ admitem a continuação analítica no semi-plano superior $\text{Im}\xi > 0$. Da relação (I.16) fazendo $v = \phi$, $w = \bar{\phi}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \xi$, obtemos

$$a(\xi) = (\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1)(x, \xi) \quad ,$$

$a(\xi) = \text{cte}$ em relação a x , e, então, $a(\xi)$ também admite uma

continuação analítica. É claro que

$$a(\zeta) \rightarrow 1 \quad \text{quando } |\zeta| \rightarrow \infty, \operatorname{Im}\zeta \geq 0 .$$

Os pontos do semi-plano superior $\operatorname{Im}\zeta > 0, \zeta = \zeta_j, j=1, \dots, N$ correspondem aos auto-valores do problema (I.15). Nestes pontos temos que

$$\phi(x, \zeta_j) = c_j \psi(x, \zeta_j) \quad , \quad j=1, \dots, N .$$

Notamos também que para $q(x)$ real temos as igualdades

$$\phi(x, -\xi) = \phi^*(x, \xi) \quad ,$$

$$\psi(x, -\xi) = \psi^*(x, \xi) \quad ,$$

e, conseqüentemente,

$$a(\xi) = a^*(-\xi) .$$

A continuação analítica da última igualdade no semi-plano superior fornece

$$a(\zeta) = a^*(-\zeta) .$$

É claro que neste caso os zeros de $a(\zeta)$ ficam no eixo imaginário.

Sabemos que as auto-funções do operador L obedecem à equação (I.5). Mais precisamente, se em $t = 0$ a função ψ_0 é vista como condição inicial para a equação (I.5), satisfazendo o sistema (I.4), então, a correspondente solução (I.5) em um instante arbitrário satisfaz também o sistema (I.4) com valor inalterado de λ . Assim, a equação (I.5) para as auto-funções pode ser escrita

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{p\lambda^2}{(1-p^2)^2} + \frac{|u|^2}{1+p} \right] v_2 + \frac{2ip\lambda}{(1-p^2)} \frac{\partial v_2}{\partial x} - p \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \\ \left[\frac{p\lambda^2}{(1-p^2)^2} - \frac{|u|^2}{1-p} \right] v_1 + \frac{2ip\lambda}{(1-p^2)} \frac{\partial v_1}{\partial x} - p \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

com $\zeta = \frac{p\lambda}{1-p}$, e quando $|x| \rightarrow \infty$ temos $u \rightarrow 0$; então, a solução $v(x, \zeta, t)$ do sistema (I.15) satisfaz a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{1}{p} \zeta^2 v + 2i \frac{\partial v}{\partial x} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (I.21)$$

da qual se obtém substituindo (I.19) em (I.21) o resultado

$$a(\zeta) = a(\zeta, 0) \quad ; \quad (I.22.1)$$

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) e^{4i\xi^2 t}, \quad (I.22.2)$$

e temos também que

$$c_j(t) = c_j(0) e^{4i\zeta^2 t}. \quad (I.22.3)$$

b) Espalhamento Inverso

Vamos considerar o problema de reconstruir $u(x, t)$ a partir dos dados de espalhamento $a(\zeta)$, $b(\xi, t)$, $-\infty < \xi < \infty$; $c_j(t)$, $j = 1, \dots, N$. Os valores destas quantidades em $t = 0$ são calculados a partir dos dados iniciais para a equação (I.14), e suas variações com t estão indicadas nas fórmulas (I.22). No problema de espalhamento inverso, o tempo t é apenas um parâmetro. É suficiente considerar a questão da reconstrução do coeficiente $q(x)$ da equação (I.15) usando $a(\zeta)$, $b(\xi)$ e c_j .

Introduzamos a função

$$\Phi(\zeta) \equiv \Phi(\zeta, x) = \begin{cases} a^{-1}(\zeta)\phi(x, \zeta)e^{i\zeta x} & , \quad \text{Im}\zeta > 0 \\ \begin{pmatrix} \psi_2^*(x, \zeta^*) \\ -\psi_1^*(x, \zeta^*) \end{pmatrix} e^{i\zeta x} = \bar{\psi} & , \quad \text{Im}\zeta < 0 \end{cases}$$

e denotando $\phi(\xi)$ a descontinuidade desta função sobre o corte no eixo real,

$$\phi(\xi) = \Phi(\xi+i0) - \Phi(\xi-i0) \quad .$$

Admitindo serem simples os zeros ζ_1, \dots, ζ_N da função $a(\zeta)$, temos uma fórmula que reconstrói (por extensão de vizinhanças) a função analítica $\overline{\phi(\zeta)}$ a partir da descontinuidade e dos resíduos nos polos ζ_j (que é o teorema de Cauchy):

$$\Phi(\zeta) = \binom{1}{0} + \sum_{k=1}^N \frac{e^{i\zeta_k x}}{\zeta - \zeta_k} \frac{\phi(x, \zeta_k)}{a'(\zeta_k)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \quad .$$

Definimos

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} \quad , \\ \Phi^{(1)}(\zeta) &= \binom{1}{0} + \sum_{k=1}^N \frac{e^{i\zeta_k x}}{\zeta - \zeta_k} \tilde{C}_k \psi(x, \zeta_k) \quad , \\ \tilde{C}_k &= \frac{C}{a'(\zeta_k)} \quad , \end{aligned} \tag{I.23}$$

$$\Phi^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \quad .$$

Doravante o til sobre C_k será omitido. Da relação (I.19) obtemos a seguinte expressão para a descontinuidade:

$$\phi(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i\zeta x} \psi(x, \xi) \quad . \tag{I.24}$$

O sistema de equações da teoria do problema do espa-

lhamento inverso para a função $\phi(\xi)$, $\xi < +\infty$ e parâmetros $\psi(x, \zeta_j)$ (sendo x fixo), $j = 1, \dots, N$, é obtido colocando-se na fórmula (I.23) $\zeta = \zeta_j^*$, $j = 1, \dots, N$. Em $\zeta = \xi - i0$ a fórmula (I.23) fornece

$$\begin{pmatrix} \psi_2^*(x, \xi) \\ -\psi_1^*(x, \xi) \end{pmatrix} e^{i\xi x} = -\frac{1}{2}(1-H)\phi(\xi) + \phi^{(1)}(\xi) .$$

Este H é a transformada de Hilbert, definida por

$$(H\phi)(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' ,$$

$$(H\phi)^* = -H\phi^* .$$

Reescrevamos a relação acima obtida na forma

$$\psi_2^*(x, \xi) e^{i\xi x} + \frac{1}{2}(1-H)\phi_1 = \phi_1^{(1)}(\xi) ,$$

$$-\psi_1(x, \xi) e^{-i\xi x} + \frac{1}{2}(1+H)\phi_2^* = \phi_2^{(1)*}(\xi) ,$$

e multipliquemos a primeira destas equações por $c(x, \xi)$, e a segunda por $c(x, \xi)$ tal que

$$c(x, \xi) = \frac{b(\xi)}{2(\xi)} e^{2i\xi x} . \tag{I.25}$$

Levando em conta a expressão (I.24), temos

$$\phi_1 - c(x, \xi) \frac{1+H}{2} \phi_2^* = -c(x, \xi) \sum_{k=1}^N \frac{\exp(-i\zeta_k^* x)}{\xi - \zeta_k^*} c_k^* \psi_2^*(x, \zeta_k) , \tag{I.26}$$

$$c^*(x, \xi) \frac{1-H}{2} \phi_1 + \phi_2^* = c^*(x, \xi) + c^*(x, \xi) \sum_{k=1}^N \frac{\exp(i\zeta_k x)}{\xi - \zeta_k} c_k \psi_1(x, \zeta_k) .$$

Adendo às equações (I.26) obtemos $2N$ equações para $\psi_1(x, \zeta_j)$ e

$\psi_2^*(x, \zeta_j)$ colocando na relação (I.23) $\zeta = \zeta_j^*$ tal que $j=1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \zeta_j) \exp(-i\zeta_j x) + \sum_{k=1}^N \frac{\exp(-i\zeta_k^* x)}{\zeta_j - \zeta_k^*} c_k^* \psi_2^*(x, \zeta_k) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_2^*(\xi)}{\xi - \zeta_j} d\xi, \quad (I.27) \\ - \sum_{k=1}^N \frac{e^{i\zeta_k x}}{\zeta_j^* - \zeta_k} c_k \psi_1(x, \zeta_k) + \psi_2^*(x, \zeta_j) \exp(i\zeta_j^* x) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1(\xi)}{\xi - \zeta_j^*} d\xi \end{aligned}$$

O sistema de equações (I.26) e (I.27) relativo a

$$\phi(\xi) = \phi(x, \xi) \quad , \quad \psi(x, \zeta_j)$$

resulta na possibilidade de se obter estas quantidades dos dados de espalhamento. Uma formulação para a obtenção do "potencial" $q(x)$ a partir das funções $\phi(\xi)$ e $\psi(x, \zeta_j)$ pode ser obtida fazendo-se uma comparação do comportamento assintótico de $\psi(x, \zeta)$ quando $\zeta \rightarrow \infty$, obtido da fórmula (I.23),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_2(x, \zeta) \\ -\psi_1(x, \zeta) \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\zeta} \left[\sum_{k=1}^N c_k^* \exp(-i\zeta_k^* x) \psi^*(x, \zeta_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int \phi^*(\xi) d\xi \right] + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad (I.28) \end{aligned}$$

e com comportamento assintótico obtido diretamente da equação diferencial (I.15). Então, usando as condições assintóticas,

$$v_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \quad p/x \rightarrow -\infty \quad , \quad v_1 = A e^{-i\zeta x}$$

$$v_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad p/x \rightarrow +\infty \quad , \quad v_2 = B e^{+i\zeta x}$$

permitted-nos verificar de (I.18) $(\psi \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \text{ onde } x \rightarrow +\infty)$ que $A \cong 0$. Reescrevamos a forma aproximada

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 1+g \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad \text{com } f, g \ll 1$$

ou

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$$

isto é, o segundo termo é uma primeira aproximação. Assim, derivando e comparando com (I.15.1),

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = i\zeta \begin{pmatrix} f \\ 1+g \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + e^{i\zeta x} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ -q^* & i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 1+g \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -i\zeta f - i\zeta f + q(1+g) \\ -i\zeta(1+g) - q^* f + i\zeta(1+g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i\zeta f + q(1+g) \\ -q^* f \end{bmatrix} ,$$

do qual eliminamos g porque $g \ll 1$, logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2i\zeta f + q \rightarrow f = +e^{-2i\zeta x} \int_x^\infty (q(x)e^{2i\zeta x} + c) dx \rightarrow f \cong + \frac{1}{2i\zeta} q ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -q^* f \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{1}{2i\zeta} |q|^2 \rightarrow g = \frac{1}{2i\zeta} \int_x^\infty |q|^2 dx .$$

Sabendo-se que

$$\psi(x, \zeta) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ,$$

então

$$\psi(x, \zeta) e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\zeta} \left[\int_x^\infty |q(s)|^2 ds \right] + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (I.29)$$

Da comparação das duas relações (I.28) e (I.29) obtemos

$$q(x) = -2i \sum c_k^* \exp(-i\zeta_k^* x) \psi_2^*(x, \zeta_k) - \frac{1}{\pi} \int \phi_2^*(\xi) d\xi \quad ,$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2 ds = -2i \sum c_k \exp(i\zeta_k x) \psi_1(x, \zeta_k) + \frac{1}{\pi} \int \phi_1(\xi) d\xi \quad (I.30)$$

Assim, temos duas fórmulas auto-consistentes para reconstruir $q(x)$ a partir de $\phi(\xi)$ e $\psi(x, \zeta_j)$.

Pode-se também obter a relação equivalente a (I.30), usando-se a equação de Marchenko.

Outros autores resolveram a equação NLS com enfoques diferentes. Entre eles J.W. Miles⁽⁷⁴⁾ resolveu-a a partir de um potencial explícito $u(x,0) = \text{sech}(x)$, o qual no método original ZS aparece implicitamente. R. Hirota também obteve a solução usando o método direto⁽⁷⁵⁾. Hasegawa e Tappert⁽⁷⁶⁾ encontraram a solução "dark soliton" ("envelope hole soliton") porque consideraram o caso em que $K < 0$; também Hirota⁽⁷⁷⁾, usando seu próprio método.

Esses tipos de equações evolutivas também foram resolvidas com diferentes condições de contorno. Por exemplo: $u(x,0) \rightarrow \text{cte}$ quando $x \rightarrow \infty$ e $u(x,0) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$.^(78,79)

c) Forma Explícita para Solução N-Sólitons

Nos problemas IST em que ocorre $b(\zeta, t) \equiv 0$, há a-

penas ondas sem reflexão, o que implica que ao $q(x)$ é uma solução sólito(n)s). Neste caso $\phi(\zeta) \equiv 0$ em (I.27) e a solução de sistema finito de equações algébricas. Este sistema (I.27) fica reduzido a

$$\begin{cases} \psi_{ij} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_j \lambda_k^*}{\zeta_j - \zeta_k^*} \psi_{2k}^* = 0 \\ - \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k \lambda_j^*}{\zeta_j^* - \zeta_k} \psi_{1k} + \psi_{2k}^* = \lambda_j^* \end{cases} \quad , \quad (I.31.1)$$

aqui

$$\psi_j = \begin{pmatrix} \psi_{1j} \\ \psi_{2j} \end{pmatrix} = \sqrt{c_j} \psi(x, \zeta_j) \quad , \quad (I.31.2)$$

$$\lambda_j = \sqrt{c_j} e^{i\zeta_j x} \quad . \quad (I.31.3)$$

As fórmulas (I.30) também adquirem, neste caso, expressões mais simplificadas:

$$q(x) = 2i \sum_{k=1}^N \lambda_k^* \psi_{2k} \quad , \quad (I.32.1)$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2 ds = 2i \sum_{k=1}^N \lambda_k \psi_{1k} \quad . \quad (I.32.2)$$

Se $N = 1$, então $a(\zeta)$ tem apenas um zero no semi-plano superior, assim, o sistema (I.31) e (I.32) fornece a fórmula explícita de um-sólito(n).

d) Solução Explícita de Um-Sólito(n)

Vamos explicitar a solução um-sólito(n) com todos os pormenores de cálculos.

Um sólito(n) é obtido fazendo-se $N = 1$ no sistema de e-

quações (I.31),

$$\begin{cases} \psi_1 + \frac{|\lambda|^2}{2i\eta} \psi_2^* = 0, \\ \frac{|\lambda|^2}{2i\eta} \psi_1 + \psi_2^* = \lambda^*, \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

assim, temos

$$\psi_2^* = \frac{4\eta^2 \lambda^*}{4\eta^2 + |\lambda|^4}, \quad (\text{I.34})$$

e na fórmula (I.32) tomando-se $N = 1$, temos

$$q(x) = -2i \lambda^* \psi_2^*, \quad (\text{I.35})$$

Substituindo (I.34) em (I.35) e sabendo que $q(x)$ está relacionada com $u(x)$ de acordo com a relação (I.15.3), temos

$$u(x) = - \sqrt{\frac{2\eta}{K}} \frac{8\eta^2 \lambda^{*2}}{4\eta^2 + |\lambda|^4}. \quad (\text{I.36})$$

Explicitemos agora λ^{*2} e $|\lambda|^2$. De acordo com (I.31.3) e considerando-se o auto-valor $\zeta = \xi + i\eta$ temos então

$$\lambda = \sqrt{c} e^{-\eta x} e^{i\xi x}$$

e

$$|\lambda|^2 = |c| e^{-2\eta x}.$$

Agora a expressão de c é dada por (I.25),

$$c = \frac{b(\zeta, t)}{a(\xi)} e^{2i\xi z},$$

e substituindo a expressão (I.22.2) prolongada, temos

$$c = \frac{b(\zeta, 0)}{a(\zeta)} e^{4i\zeta^2 t} e^{2i\xi x} .$$

Substituindo o auto-valor em $x=0$, temos que

$$\lambda^2(0, t) = \frac{b(\zeta, 0)}{a(\zeta)} e^{4i\zeta^2 t} = \frac{b(\zeta, 0)}{a(\zeta)} e^{4i(\zeta^2 - \eta^2)t - 8\xi\eta t}$$

assim

$$|\lambda|^2 = |\lambda(0)|^2 e^{-8\zeta\eta t} e^{-2\eta x} \quad (I.37)$$

e

$$\lambda^* = \sqrt{c}^* e^{-\eta x} e^{-i\zeta x} = \lambda^*(0, t) e^{-\eta x - i\xi x}$$

ou

$$(\lambda^*(0, t))^2 = \frac{b(\zeta, 0)}{a(\zeta)} e^{-4i\zeta^2 t}$$

e definindo

$$(\lambda^*(0))^2 \equiv \frac{b(\zeta, 0)}{a(\zeta)}$$

temos, portanto,

$$(\lambda^*(0, t))^2 = \lambda^{*2}(0) e^{-4i(\zeta^2 - \eta^2)t - 8\xi\eta t} e^{-2\eta x - 2i\xi x} . \quad (I.38)$$

Substituindo as relações (I.37) e (I.38) na solução (I.36), temos após rearranjos

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{8}{k}} \eta \frac{\exp\{-4i(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi x\}}{\frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^2(0)}{(-2\eta)} e^{-8\xi\eta t - 2\eta x} + \frac{(-2\eta)}{\lambda^*(0)^2} e^{8\xi\eta t + 2\eta x} \right]}$$

As condições iniciais para um sóliton são dadas por

$$x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln \frac{|\lambda(0)|^2}{2\eta} ,$$

$$\phi = -2 \arg \lambda(0)$$

Assim, substituindo-as temos a expressão "envelope sóliton". Observe que "envelope" (envoltório) é dado pela função secante hiperbólica,

$$u(x,t) = -\sqrt{\frac{8\eta}{k}} \frac{\exp\{-4i(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi x + i\phi\}}{\cosh\{2\eta(x-x_0) + 8\eta\xi t\}} \quad (\text{I.39})$$

Esta é a solução clássica mais simples do setor de família sólitons. É a expressão

$$\rho(x,t) = |u(x,t)|^2 = \frac{8\eta^2}{k} \operatorname{sech}^2\{2\eta(x-x_0) + 8\eta\xi t\} \quad (\text{I.40})$$

é o que interpretaremos por densidade de N partículas. Aparecem quatro parâmetros arbitrários e independentes, ξ , η , x_0 e ϕ , sendo ξ e η os parâmetros que caracterizam o sistema, isto é, ξ é o parâmetro de velocidade e η o parâmetro de tamanho do sóliton. Os parâmetros x_0 e ϕ são parâmetros dados pelas condições iniciais.

e) Solução Explícita de Dois-Sólitons e Dinâmica de Sóliton-Sóliton

Encontraremos a solução explícita de dois sólitons fazendo $N = 2$ no sistema de equações (I.31) e na solução (I.32). Assim, o sistema de equações (I.31) fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} + 0\psi_{12} + \frac{\lambda_1\lambda_2^*}{\zeta_1 - \zeta_1^*} \psi_{21}^* + \frac{\lambda_1\lambda_1^*}{\zeta_1 - \zeta_2^*} \psi_{22}^* = 0 \quad , \\ 0\psi_{11} + \psi_{12} + \frac{\lambda_2\lambda_1^*}{\zeta_2 - \zeta_1^*} \psi_{21}^* + \frac{\lambda_2\lambda_2^*}{\zeta_2 - \zeta_2^*} \psi_{22}^* = 0 \quad , \\ -\frac{\lambda_1\lambda_1^*}{\zeta_1^* - \zeta_1} \psi_{11} - \frac{\lambda_2\lambda_1^*}{\zeta_1^* - \zeta_2} \psi_{12} + \psi_{21}^* + 0\psi_{22}^* = \lambda_1^* \quad , \\ -\frac{\lambda_1\lambda_2^*}{\zeta_2^* - \zeta_1} \psi_{11} - \frac{\lambda_2\lambda_2^*}{\zeta_2^* - \zeta_2} \psi_{12} + 0\psi_{21}^* + \psi_{22}^* = \lambda_2^* \quad , \end{array} \right. \quad (I.41)$$

e a solução (I.32) após rearranjos, fica

$$u(x,t) = -\sqrt{\frac{8}{K}} [\lambda_1^* \psi_{21}^* + \lambda_2^* \psi_{22}^*] \quad . \quad (I.42)$$

Lembramos que

$$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \quad ,$$

$$\zeta_j^* = \xi_j - i\eta_j \quad ,$$

$$\lambda_j(0,0) = \sqrt{2\eta_j} \exp[\eta_j x_{0j} - i\phi_j] \quad , \quad (I.43)$$

$$\lambda_j(x,t) = \lambda_j(0,0) \exp[2i(\xi_j^2 - \eta_j^2)t - 4\xi_j\eta_j t + i\xi_j x + i\eta_j x] \quad ,$$

com $j = 1, 2$

Podemos obter do sistema de equações (I.41) as expressões ψ_{21}^* e ψ_{22}^* , as quais substituídas na fórmula de solução sólitons (I.42) fornecem-nos explicitamente a solução dois-sólitons:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & \sqrt{\frac{8}{k}} \left[\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} + \left[\frac{1}{2\eta_1} - \frac{1}{(\eta_1 + \eta_2) - i(\xi_1 - \xi_2)} \right]^2 \lambda_2^{*2} |\lambda_1|^4 + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2\eta_2} - \frac{1}{(\eta_1 + \eta_2) + i(\xi_1 - \xi_2)} \right]^2 \lambda_1^{*2} |\lambda_2|^4 \right] \times \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{|\lambda_1|^4}{4\eta_1^2} + \frac{|\lambda_2|^4}{4\eta_2^2} - \frac{(\lambda_2 \lambda_1^*)^2}{[(\xi_1 - \xi_2) - i(\eta_1 + \eta_2)]^2} - \right. \\
 & - \frac{(\lambda_1 \lambda_2^*)^2}{[(\xi_1 - \xi_2) + i(\eta_1 + \eta_2)]^2} + \left[\frac{|\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{|\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2}{4\eta_1 \eta_2} \right]^2 \right\}^{-1} ;
 \end{aligned}
 \tag{I.14}$$

ou, fazendo $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ e $-\xi_1 = \xi_2 = \xi$,

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & \sqrt{\frac{8}{k}} \left[2\eta \exp(4i(\xi^2 - \eta^2)t) \times \right. \\
 & \times \left\{ \exp(-2i\xi x + i\phi_1) \left[\exp(-2\eta(x-x_{01})) + 8\eta\xi t \right] - \right. \\
 & - \frac{\xi^2}{(\eta - i\xi)^2} \exp(-4\eta(x-x_{02}) - 16\eta\xi t) \Big] + \\
 & + \exp(-2i\xi x + i\phi_2) \left[\exp(-2\eta(x-x_{02})) - 8\eta\xi t \right] - \\
 & - \frac{\xi^2}{(\eta + i\xi)^2} \exp(-4\eta(x-x_{01}) + 16\eta\xi t) \Big] \Big\} \times \\
 & \times \left\{ 1 + \exp(-4\eta(x-x_{01}) + 16\eta\xi t) + \exp(-4\eta(x-x_{02}) - 16\eta\xi t) - \right. \\
 & - 2\eta^2 \exp(4\eta(x-x_{01}-x_{02})) \left[\frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \cos(4\xi x + \phi_1 - \phi_2) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \operatorname{sen}(4\xi x + \phi_1 - \phi_2) \right] + \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \exp(-4\eta(2x-x_{01}-x_{02})) \right\}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{I.45}$$

Esta é a solução dois-sólitons geral, que descreve a interação de campo não-linear. O número total de parâmetros agora é oito, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_{01}, x_{02}, \phi_1$ e ϕ_2 . Assim podemos explicitar soluções 1-sóliton, 2-sólitons, 3-sólitons, etc.

Resolvendo os sistemas (I.31) pela inversão de matriz e substituindo em (I.32), obtemos uma solução fechada formulística de N-sólitons ⁽⁷⁴⁾, isto é,

$$u_N(x,t) = \sqrt{\frac{8}{k}} \lambda^* (\mathbb{1} + A^* A)^{-1} \lambda^*,$$

com

$$\lambda = [\lambda_n] = [\sqrt{C_n} \exp(i\zeta_n x + 2i\zeta_n^2 t)],$$

$$A = [A_{m,n}] = [\lambda_m \lambda_n^* (\zeta_m - \zeta_n^*)^{-1}] \quad , \quad (I.45)$$

$\mathbb{1} \equiv$ matriz identidade;

ou ⁽¹⁷⁾ equivalentemente,

$$|u_N(x,t)|^2 = \frac{8}{k} \frac{d^2}{dx^2} \ln \det || B B^* + \mathbb{1} || \quad (I.46)$$

com

$$[B_{m,n}] = \frac{\sqrt{C_m C_n^*}}{\zeta_m - \zeta_n^*} \exp[i(\zeta_m - \zeta_n^*)x]$$

Esta é a única solução N-sólitons. O número total de parâmetros arbitrários é 4N.

Vamos supor que os sólitons possuem velocidades diferentes. Assim, podemos analisar o comportamento da solução 2-sólitons nos instantes anteriores à interação, durante e após. Para isto apresentâmo-lo em sessões. Neste exemplo, os ξ 's te-

rão sinais opostos.

Antes, quando o tempo $t \rightarrow -\infty$, temos duas ondas solitárias independentes nas regiões em que valem as relações $|\lambda_1| \gg \gg |\lambda_2| \approx 1$ correspondente ao sóliton 2, e $|\lambda_2| \approx 1 \gg \gg |\lambda_1|$ correspondendo ao sóliton 1. O sóliton 2 neste instante tem a forma

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{8}{k}} \left[\frac{\left[\frac{1}{2\eta_1} - \frac{1}{(\eta_1 + \eta_2) - i(\xi_1 - \xi_2)} \right]^2 \lambda_2^{*2}}{\frac{1}{4\eta_1^2} + \left[\frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2} - \frac{1}{4\eta_1\eta_2} \right]^2 |\lambda_2|^4} \right] \quad (I.47)$$

ou

$$u_2(x,t) = -\sqrt{\frac{8}{k}} \eta \frac{\exp\{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t + 2\xi x + \phi_{02} - 2\arctg \frac{\xi}{\eta}]\}}{\cosh\{2\eta(x - x_{02}) + 8\xi\eta t + \ln(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2})\}} \quad (I.48)$$

e o sóliton 1 tem a forma

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{8}{k}} \left[\frac{\lambda_1^{*2}}{1 + \frac{|\lambda_1|^4}{4\eta_1^2}} \right] \quad (I.49)$$

ou

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{8}{k}} \frac{\exp\{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t - 2\xi x + \phi_{01}]\}}{\cosh\{2\eta(x - x_{01}) - 8\xi\eta t\}} \quad (I.50)$$

Estas são as soluções assintóticas, isto é, antes da colisão sóliton-sóliton. Estes sólitons estão suficientemente afastados um do outro.

Durante o tempo $t \approx 0$ temos interação não linear cuja superposição de dois sólitons se dá quando vale a relação $|\lambda_1| \approx |\lambda_2| \approx 1$. Nesta região de interação a solução dois-sólitons é dada por (I.44).

Posteriormente os sólitons emergem sem se transformarem, estando apenas deslocados do movimento anterior; isto ocorre quando $t \rightarrow +\infty$, temos novamente duas ondas solitárias independentes nas regiões em que valem as relações $|\lambda_2| \gg |\lambda_1| \approx 1$ correspondendo ao sóliton 1 e $|\lambda_1| \approx 1 \gg |\lambda_2|$ correspondendo ao sóliton 2. Assim, assintoticamente o sóliton 1 tem a forma

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{8\eta}{k}} \left[\frac{\left[\frac{1}{2\eta_2} - \frac{1}{(\eta_1 + \eta_2) + i(\xi_1 - \xi_2)} \right]^2 \lambda_1^{*2}}{\frac{1}{4\eta_2^2} + \left[\frac{1}{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2} - \frac{1}{4\eta_1\eta_2} \right]^2 |\lambda_1|^4} \right] \quad (I.51)$$

ou,

$$u_1(x,t) = -\sqrt{\frac{8\eta}{k}} \eta \frac{\exp\{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t - 2\xi x + \phi_{01} + 2\arctg \frac{\xi}{\eta}]\}}{\cosh\{2\eta(x-x_{01}) - 8\xi\eta t + \ln(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2})\}}, \quad (I.52)$$

e o sóliton 2 toma a forma:

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{8\eta}{k}} \left[\frac{\lambda_2^{*2}}{1 + \frac{|\lambda_2|^4}{4\eta_2^2 x}} \right] \quad (I.53)$$

ou

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{8\eta}{k}} \eta \frac{\exp\{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t + 2\xi x + \phi_{02}]\}}{\cosh\{2\eta(x-x_{02}) + 8\xi\eta t\}} \quad (I.54)$$

Desta maneira, esta dinâmica da solução sólitons pode ser estendida diretamente a N-sólitons. Para isto devemos tomar os parâmetros relacionados com velocidades $\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_N$ e quando $|t| \rightarrow \infty$ todos os N-sólitons estarão suficientemente afastados um do outro. Assim temos: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots$

+ $u_N(x,t)$. Observe também a simetria dos índices nas equações (I.47), (I.49) com (I.51), (I.53), isto é, trocar i com j , $i=1,2$ é o mesmo que trocar antes com depois.

I.3 - OBTENÇÃO DAS INFINITAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Sabemos que o sistema descrito pela equação (I.14) apresenta um conjunto infinito de leis de conservação. Isto pode ser verificado pelo fato de que a grandeza $a(\zeta)$ é invariante no tempo. Essas leis de conservação deduzidas a partir de $a(\zeta)$ são um conjunto enumerável de leis de conservação. Elas são escritas na forma de uma integral, em relação à variável espacial x , de uma expressão polinomial em termos da função $u(x,t)$ e de suas derivadas em relação a x . O método de obtê-las consiste em usar a função

$$a(\zeta) = \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1, \quad \text{Im } \zeta \geq 0$$

que especifica a forma assintótica, quando $x \rightarrow \infty$, da solução

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

da equação (I.16):

$$a(\zeta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1(x, \zeta) e^{i\zeta x} \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty ;$$

$\text{Im } \zeta > 0, \zeta \neq \zeta_j$. Alternativamente, colocando

$$\phi_1 e^{i\zeta x} = e^\phi$$

temos

$$\phi(x, \zeta) \rightarrow \ln a(\zeta), \text{ quando } x \rightarrow +\infty, |\zeta| > R.$$

De (I.16) obtemos a equação de Riccati para ϕ ,

$$2i\zeta\phi' = |q|^2 + \phi'^2 + q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \phi' \right),$$

a qual nos permite calcular usando o método da recorrência, os coeficientes da expansão assintótica da função $\phi'(x, \zeta)$ em potências de $1/\zeta$, isto é:

$$\phi'(x, \zeta) \cong \sum_{n=1}^{\infty} f_n / (2i\zeta)^n, \tag{I.55}$$

$$f_{n+1} = q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} f_n \right) + \sum_{j+k=n} f_j f_k, \quad f_1 = |q|^2. \tag{I.56}$$

Quando $|\zeta| \rightarrow \infty$, e $\text{Im}\zeta \geq 0$, a função $\ln a(\zeta) \rightarrow 0$ e também admite uma expansão assintótica em potências de $1/\zeta$:

$$\ln a(\zeta) \cong \sum_{n=1}^{\infty} C_n / \zeta^n. \tag{I.57}$$

De (I.55) e (I.57) segue-se que

$$(2i)^n C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{I.58}$$

Devido à fórmula de recorrência (I.56), os integrandos f_n das leis de conservação (I.58) são polinômios da função $q(x, t)$ e de suas derivadas com respeito a x . Apresentemos as primeiras cinco leis de conservação:

$$2iC_1 = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t))^2 dx,$$

$$(2i)^2 C_2 = -\frac{k}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) dx,$$

$$(2i)^3 C_3 = -\frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\frac{\partial}{\partial x} u|^2 - \frac{k}{2} |u|^2) dx \quad , \quad (I.59)$$

$$(2i)^4 C_4 = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u \frac{\partial^3}{\partial x^3} u^* + \frac{3k}{2} u \frac{\partial}{\partial x} u^* |u|^2) dx \quad ,$$

$$(2i)^5 C_5 = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\frac{\partial^2}{\partial x^2} u|^2 + \frac{k^2}{2} |u|^6 - \frac{k}{2} (\frac{\partial}{\partial x} |u|^2) - 3k |\frac{\partial}{\partial x} u|^2 |u|^2) dx \quad .$$

As primeiras três integrais têm um significado físico simples se interpretarmos (I.14) como uma equação NLS. As constantes de movimento c_1 , c_2 e c_3 então coincidem, a menos de coeficientes, com o número de partículas, o momento e a energia.

Para solução N-sólitons é fácil calcular todas as constantes de movimento c_n . Então, segue de (I.20) que

$$a(\xi)a^*(\xi) = 1 \quad . \quad (I.60)$$

É claro, entretanto, que a função $a(\zeta)$, a qual é analítica no semi-plano superior, tem continuação analítica no semi-plano inferior, onde tem polos simples nos pontos conjugados para os zeros de $\bar{\zeta}_j$, $j = 1, \dots, N$. Reconstruindo a função fracionária racional $a(\zeta)$ a partir dos seus zeros e polos, obtemos, reconhecendo que $a(\zeta) \rightarrow 1$ quando $|\zeta| \rightarrow \infty$,

$$a(\zeta) = \prod_{j=1}^N \frac{\zeta - \bar{\zeta}_j}{\zeta - \zeta_j} \quad . \quad (I.61)$$

É fácil verificar usando (I.57) que

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N (\zeta_j^n)^* - \zeta_j^n \quad . \quad (I.62)$$

A presença de um número infinito de leis de conserva-

ção polinomial é uma propriedade característica das equações não lineares nas quais o método IST é aplicável.

CAPÍTULO II

PANORAMA MICROSCÓPICO

II.1 - INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DO SISTEMA DE N-CORPOS INTERAGINDO VIA POTENCIAIS DELTA DE DOIS CORPOS

Sabe-se que o problema de N-corpos interagindo via função delta é resolvível exatamente usando o "ansatz de .. Bethe"⁽¹²⁾. Neste trabalho estamos interessados justamente no caso em que as interações são atrativas. Quando N é muito grande, M. Wadati et al.^(50,51) mostraram que estes N-corpos que estão no estado ligado são um "envelope-sóliton", isto é, um sóliton clássico que satisfaz à equação NLS.

Partindo das informações das interações microscópicas desta matéria condensada, vamos estudar o espalhamento de envelope-sóliton-envelope-sóliton. Este envelope-sóliton é um estado ligado formado por N partículas bosônicas, $N \gg 1$. No caso geral de N-corpos, podemos incluir números quânticos internos, tais como as cores, os spins, etc. O objetivo deste Capítulo é introduzir conceitos necessários para que possamos deduzir a matriz-S que leva em conta todas as interações microscópicas das 2N partículas. Para isto seguiremos o método desenvolvido por J.B. McGuire⁽⁸⁰⁾ e C.N. Yang^(81,82). J.B. McGuire desenvolveu o estudo dos estados de espalhamento de N-corpos por método geométrico e foi generalizado por C.N. Yang. Este deu maior contribuição no

método de "ansatz de Bethe", desenvolveu uma técnica para tratar o problema de N-corpos com interação função delta na qual não impôs nenhuma limitação na simetria da função de onda. Seu método fornece uma solução não apenas para o caso de bósons idênticos, mas para o caso mais geral de um sistema constituído de diversas partículas de diferentes espécies (as quais seriam referidas como coloridas). Apenas um requisito, é que todas as partículas tenham massas idênticas. Em teoria de campo, este sistema é descrito pela equação NLS com multi-componentes cujo Hamiltoniano é

$$H = \int dx \left[\sum_a \frac{\partial}{\partial x} \phi_a^* \frac{\partial}{\partial x} \phi_a + \frac{g}{2} \sum_{a,b} \phi_a^* \phi_b^* \phi_a \phi_b \right],$$

onde a somatória vai de 1 a N_c , sendo N_c o número de cores.

P.P.Kulish ⁽⁸³⁾ mostrou que o método de C.N.Yang para o modelo NLS multi-componentes pode ser estudado naturalmente pelo método IST quântico.

Usando o método de J.B.McGuire e C.N.Yang obteremos a matriz- S_{2N} total fatorada em termos de matrizes S_s de cada interação delta.

O estudo da teoria da fatoração da matriz-S aplicado ao campo não linear bidimensional (1 espaço e 1 tempo) tem progredido substancialmente nos últimos anos. Karowski, Thun Truong e Weisz ⁽⁷²⁾ e Zamolodchikov e Zamolodchikov ⁽⁷¹⁾ mostraram como determinar as matrizes S_s fatoradas para modelos relativísticos tais como sine-Gordon, Sigma não linear e Multi-Fermions $(\bar{\psi}\psi)^2$. R.Shankar e E.Witten ⁽⁸⁴⁾ aplicaram a teoria de fatoração para modelo não linear supersimétrico. Sogo, Uchinami, Nakamura e Wadati ⁽⁷⁰⁾ desenvolveram de maneira clara a teoria de fatoração

para modelos não relativísticos, os quais têm mostrado que os paradigmas desta teoria são os sistemas de Calogero e NLS. Tem-se observado que a técnica de fatoração é aplicável quando o sistema possui sólitons e infinitas leis de conservação.

O estudo quântico do modelo NLS já está bem estabelecido. Existem várias abordagens pelo método de quantização canônica. Dentre os vários enfoques podemos citar o trabalho de D.J.Kaup ⁽⁵⁶⁾ que obteve energia de ligação errada porque não ordenou corretamente os operadores de campo. L.D.Faddeev ⁽⁶⁴⁾ interpretou o problema IST como um sistema Hamiltoniano e encontrou as variáveis globais do tipo ação-ângulo que descreve o sistema completamente integrável. H.B.Thacker e D.Wilkinson ⁽⁶⁰⁾ formularam na versão denominada de método de Gelfand-Levitan para operadores de campo. Nesta linha estudaram M.Wadati, A.Kuniba e T.Konishi ⁽⁵⁰⁾, obtendo o sóliton clássico para $N \rightarrow \infty$. O estudo do processo de espalhamento de N-corpos usando os gráficos de Feynman foi efetuado por H.B.Tacker ⁽⁵²⁾.

Quanto à construção do formalismo de quantização do modelo NLS, está pronta. Porém, a explicitação do resultado do formalismo para $N \rightarrow \infty$ apareceu somente em estudo com o setor um-sóliton clássico. Este fato é óbvio porque o estudo da solução com mais de um sóliton é bastante difícil de se realizar sob a luz da teoria de muitos corpos. Os únicos que ousaram aventurar no estudo do setor dois-sólitons foram B.Yoon e J.W.Negele ⁽⁴¹⁾, descrevendo o sistema de N-bósons com a técnica Hartree dependente do tempo, para estados de espalhamento. L.Dolan ⁽⁵³⁾ mostrou num trabalho sutil que a interação sóliton-sóliton é dada pela função delta através da equação que relaciona "phase shift" e "time delay" no limite de acoplamento fraco. Quanto ao estudo

do setor um-sóliton existem vários trabalhos publicados. Dentre eles podemos citar o de H.Kuratsuji ⁽³⁷⁾ que usa técnica de quantização semi-clássica. O espectro de estado ligado é calculado, o qual reproduz com boa precisão. O trabalho de D.A. Kessler e H. Levine ⁽⁸⁵⁾ aplica o formalismo de campo médio desenvolvido por Jeviski e Sakita ⁽⁸⁶⁾, obtendo para $N \rightarrow \infty$ um bom resultado para a energia do estado fundamental. O trabalho de A.Klein e F.Krejs ⁽³⁸⁾ aplica o método semi-clássico e faz correção quântica de primeira ordem ao resultado, conseguindo obter a energia de ligação exata. C.R.Nohl ⁽⁵⁸⁾ usa a técnica integral funcional para quantização semi-clássica desenvolvida por Dashen, Hasslacher e Neveu ^(66 e 69), obtendo assim a energia de ligação exata.

II.2 - ESTUDO DA MATRIZ S DO SISTEMA DE N-CORPOS ESPALHADOS PELOS POTENCIAIS DELTA

a) Espalhamentos de Partículas Livres

Para ilustrar claramente as construções e conceitos de fatoração da matriz S, seguiremos definições e condições do sistema de acordo com a convenção adotada no artigo de J. B. McGuire ⁽⁸⁰⁾ em todo o andamento desta monografia. J.B.McGuire desenvolveu a teoria de N-corpos ilustrando-a com idéias geométricas; a teoria foi depois estendida por C.N. Yang ^(81, 82), com aplicação da teoria do grupo de permutação S_N .

Neste problema pressupõe-se que todos os N-corpos têm a mesma massa m. Nesta introdução trataremos do caso em que todas as partículas são distinguíveis, por exemplo, possuem cores diferentes. Elas interagem via potencial delta de dois corpos, todas com a mesma intensidade. O sistema é descrito pela equação

$$\left[\sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_j^2} \right\} - g' \sum_{i>j \geq 1}^N \delta(x_i - x_j) \right] \psi = E\psi \quad (\text{II.1})$$

Introduzamos as idéias geométricas através do gráfico de espaço-tempo. Façamos, $\hbar = m = 1$. Ilustremos em primeiro lugar com o problema de duas partículas. Consideremos que as partículas possuem momentos k_1 e k_2 , os quais permitem traçar linhas inclinadas em um gráfico espaço-tempo. Quando as duas partículas colidem, ocorre ou uma transmissão ou uma reflexão, mas nenhuma nova velocidade é gerada. Com isto queremos dizer que as partículas no estado inicial têm a mesma velocidade das partículas no estado final, embora as partículas possam "desligar" as velocidades no momento da colisão. Assim, os possíveis gráficos de espaço-tempo são

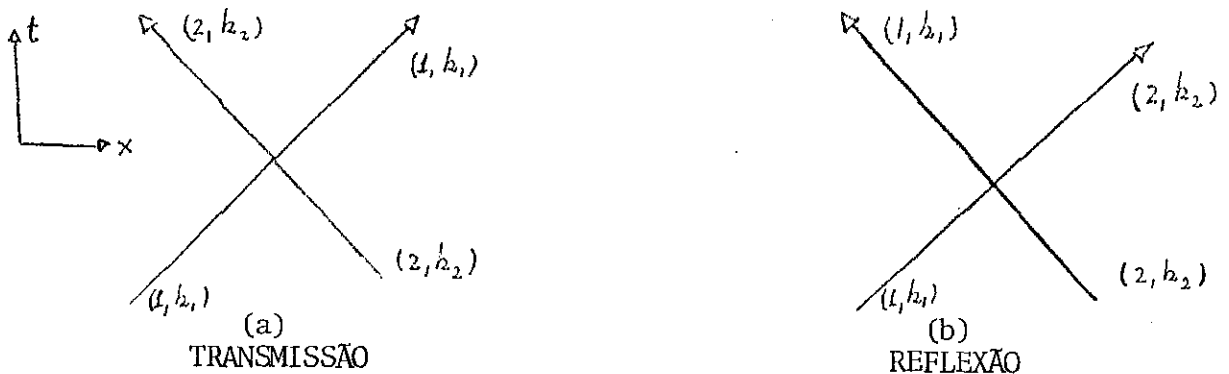


FIGURA 2.1

Se a partícula 1 começa pela esquerda e a partícula 2 pela direita, então o coeficiente de transmissão é a amplitude para a partícula 1 aparecer ao lado direito e a partícula 2 ao lado esquerdo (Fig 2.1(a)) e o coeficiente de reflexão é a amplitude para a partícula 1 aparecer ao lado esquerdo e a partícula 2

aparecer ao lado direito (Fig.2.1(b)).

Para uma interação delta com intensidade g , o coeficiente de transmissão é

$$T = \frac{\sqrt{2}ik/g}{\sqrt{2}ik/g + 1} \equiv \frac{s}{s+1} \quad (\text{II.2.1})$$

com

$$s = \sqrt{2}ik/g, \quad (\text{II.2.2})$$

e $k = k_1 - k_2$ é o vetor de onda. Similarmente, o coeficiente de reflexão

$$R = \frac{-1}{\sqrt{2}ik/g + 1} \equiv \frac{-1}{s+1} ; \quad (\text{II.3})$$

então a função S para duas partículas idênticas vale

$$S = T+R = \frac{s-1}{s+1} \quad (\text{II.4})$$

Observação: Se tivermos partículas 1 e 2 no estado ligado, não observaremos $|T|^2$ nem $|R|^2$. Para que isto aconteça, devemos ter $s = -1$, assim as amplitudes das ondas entrante e saínte serão impossíveis de nos observarmos, pois $T \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow \infty$, porém será preservada a razão

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{T}{R} = 1 \quad (\text{II.5})$$

No problema de três partículas livres há topologicamente duas possibilidades de se construir diagramas de espaço-tempo. A ilustração com $k_1 > k_2 > k_3$ é dada por:

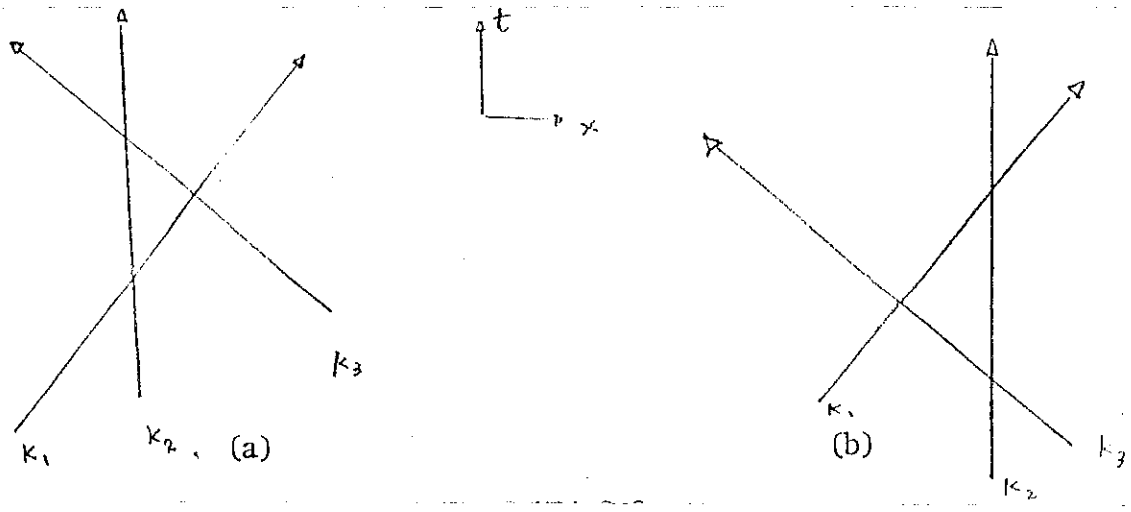


FIGURA 2.2

Se as partículas estão ordenadas 123 da esquerda para a direita, então no diagrama à esquerda (Fig. 2.2(a)) a partícula 1 atinge a partícula 2 primeiro e no diagrama à direita (Fig. 2.2(b)) a partícula 3 primeiro. Observe que há uma colisão em cada uma das três possíveis velocidades relativas e que há exatamente três colisões entre as ondas entrante e saínte. As colisões simultâneas de três partículas serão desprezadas neste trabalho por estarmos lidando com pontos materiais.

Introduzimos agora uma variável s_{ij} associada a cada vértice de momento k_i e k_j ;

$$s_{ij} \equiv \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_i - k_j) \quad ; \quad (II.6)$$

assim, no caso de três partículas,

$$s_{12} = \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_1 - k_2) \quad , \quad (II.7)$$

$$s_{23} = \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_2 - k_3) \quad , \quad (II.8)$$

temos a propriedade

$$s_{12} + s_{23} = \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_1 - k_3) = s_{13} \quad (II.9)$$

Pode-se mostrar que a onda espalhada não sofre difração nestas colisões. No exemplo de N partículas livres não há difração porque todas elas possuem a mesma massa e interagem com a mesma intensidade. Além do mais, temos as seguintes condições: 1º) antes de colisões temos as partículas puntiformes com momento $k_1 > k_2 > k_3 \dots$, e que estão arranjadas nas regiões $x_1 < x_2 < x_3 \dots$;

2º) na região de interação as partículas colidem sucessivamente, aos pares e se movem como sendo livres e reais entre as colisões, isto é, ocorre uma colisão na região onde $|x_i - x_j| \ll R$; as demais regiões estão suficientemente fora do alcance R da interação, que é finito. No caso de interação delta, $R \rightarrow 0$. Em cada colisão os momentos são conservados. No caso de três partículas, após três colisões são rearranjadas ao longo do eixo- x de modo que os seus momentos sejam crescentes, isto é, $k_1 > k_2 > k_3$ em $x_3 < x_2 < x_1$. Isto corresponde ao estado final da onda sainte. Nestas condições não há possibilidade de interação de três corpos simultaneamente.

Isto mostra que quaisquer diagramas (Fig. 2.2(a)) ou (Fig. 2.2(b)) podem ser usados indistintamente; eles darão o mesmo resultado porque não há dependência cronológica nas interações.

Assim, mostraremos como construir a Tabela 2.1 de funções de ondas, amplitudes e regiões:

Função de Onda	Amplitude	Regiões
$\exp i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)$	1 (Onda entrante)	$x_1 < x_2 < x_3$
$\exp i(k_3x_1+k_2x_2+k_1x_3)$	$\frac{-1-s_1s_3}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_1 < x_2 < x_3$
$\exp i(k_2x_1+k_3x_2+k_1x_3)$	$\frac{s_2}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_2 < x_1 < x_3$
$\exp i(k_3x_1+k_1x_2+k_2x_3)$	$\frac{s_2}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_1 < x_3 < x_2$
$\exp i(k_1x_1+k_3x_2+k_2x_3)$	$\frac{-s_1s_2}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_2 < x_3 < x_1$
$\exp i(k_2x_1+k_1x_2+k_3x_3)$	$\frac{-s_2s_3}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_3 < x_1 < x_2$
$\exp i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)$	$\frac{s_1s_2s_3}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)}$	$x_3 < x_2 < x_1$

TABELA 2.1 - Elementos de matriz S

Vamos agora calcular as amplitudes das ondas santes associadas aos diagramas de 2, 3 e 4 partículas. Para calculá-las necessitaremos introduzir dois operadores $T_{i,j}^{\ell,\ell+1}$ e $R_{i,j}^{\ell,\ell+1}$ para cada vértice, os quais envolvem as permutações de índices e momentos das partículas ao longo da linha do diagrama. Os índices ℓ e $\ell+1$ indicam a posição do par adjacente de partículas que estão interagindo e idem i e j que rotulam os vetores k_i e k_j . Observe que estamos lidando com partículas distinguíveis. O operador T troca a partícula de ℓ -ésima linha com a $\ell+1$ -ésima linha, tendo a amplitude t_{ij} dada por

$$t_{ij} = \frac{\frac{\sqrt{2}i}{g} (k_i - k_j)}{\frac{\sqrt{2}i}{g} (k_i - k_j) + 1} \equiv \frac{s_{ij}}{s_{ij} + 1} \quad (\text{II.10})$$

que é o coeficiente de transmissão para o potencial delta de Dirac. O operador R mantém a mesma partícula em ℓ -ésima e $\ell+1$ -ésima linha com amplitude de reflexão r_{ij} , dada por

$$r_{ij} = \frac{-1}{s_{ij}+1} \quad (II.11)$$

Denotando a ordem das partículas por (abc) significando que a partícula a seja a primeira linha, isto é, está à esquerda de todas as outras, a b é a segunda e a c é a última. Assim, as atuações dos operadores acima definidos ficam

$$T_{13}^{13} |abc\rangle = \frac{S_{13}}{S_{13}+1} |cba\rangle, \quad (II.12)$$

$$R_{13}^{13} |abc\rangle = \frac{-1}{S_{13}+1} |abc\rangle; \quad (II.13)$$

O símbolo $|\bar{}\rangle$ denota estado entrante.

Como as partículas são puntiformes, todas com mesma massa e interagem uma-a-uma com mesma intensidade, e desprezando a possibilidade de impacto simultâneo de três corpos, não haverá difração. Isso nos permite escrever a amplitude de espalhamento de três partículas (amplitude total) como o produto cronológico de cada amplitude de espalhamento de duas partículas, representável por $S^3 = S^2 S^2 S^2$, denominada de fatoração da amplitude de espalhamento de três partículas em termos de duas a duas.

Definamos, de modo geral, o operador espalhamento de dois corpos:

$$S_{i,j}^{\ell,\ell+1} \equiv T_{i,j}^{\ell,\ell+1} + R_{i,j}^{\ell,\ell+1} \quad (II.14)$$

Usando o diagrama de colisão de dois corpos,

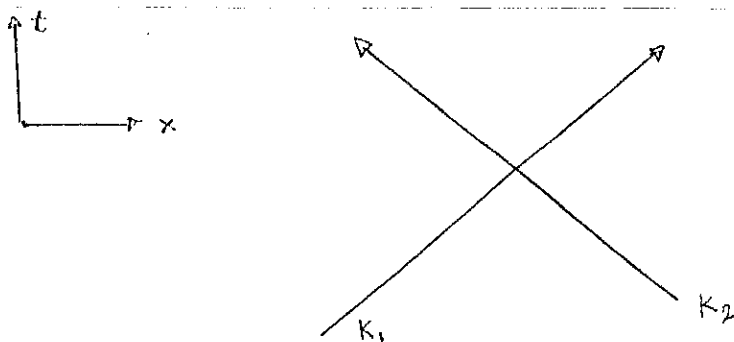


FIGURA 2.3

a matriz S desta interação é obtida diretamente

$$S = S_{12}^{12} = T_{12}^{12} + R_{12}^{12} = \frac{s_{12}}{s_{12}+1} P^{12} + \frac{(-1)}{s_{12}+1} \quad (II.15)$$

O operador P^{ij} permuta as partículas i e j . Para o caso de partículas idênticas $P^{ij} \equiv 1$ e simplificando a notação $s_{12} = s$, temos:

$$S = \frac{s-1}{s+1} \quad (II.16)$$

que é naturalmente a relação (I.4). Ela pode ser facilmente calculada usando a coordenada relativa na equação de Schrödinger.

Agora, aplicando os operadores em ordem temporal temos, de acordo com o diagrama de três partículas da Fig.2.2(a)

$$\left(T_{23}^{12} + R_{23}^{12} \right) \left(T_{13}^{23} + R_{13}^{23} \right) \left(T_{12}^{12} + R_{12}^{12} \right) \quad , \quad (II.17)$$

e de acordo com o diagrama da Fig. 2.2(b),

$$\left(T_{12}^{23} + R_{12}^{23} \right) \left(T_{13}^{12} + R_{13}^{12} \right) \left(T_{23}^{23} + R_{23}^{23} \right) \quad . \quad (II.18)$$

É fácil verificar, utilizando as relações (II.7), (II.8) e (II.9),

que estes operadores em qualquer permutação das partículas dão exatamente o mesmo resultado.

Aplicando estes operadores ao estado entrante $|123\rangle$, verificaremos que existem vários canais de saída para um dado canal de entrada. Primeiramente, vamos usar o gráfico da Fig. 2.2(a):

$$\begin{aligned}
 S|123\rangle &= S_{23}^{12} S_{13}^{23} S_{12}^{12} |123\rangle = (T_{23}^{12} + R_{23}^{12}) (T_{13}^{23} + R_{13}^{23}) (T_{12}^{12} + R_{12}^{12}) |123\rangle = \\
 &= (T_{23}^{12} + R_{23}^{12}) (T_{13}^{23} + R_{13}^{23}) (t_{12} |213\rangle + r_{12} |123\rangle) = \\
 &= (T_{23}^{12} + R_{23}^{12}) (t_{13} t_{12} |231\rangle + r_{13} t_{12} |213\rangle + t_{23} r_{12} |132\rangle + \\
 &\quad + r_{13} r_{12} |123\rangle) = \\
 &= (t_{23} r_{13} t_{12} + r_{23} r_{13} r_{12}) |123\rangle + (r_{23} r_{13} t_{12} + t_{23} r_{13} r_{12}) |213\rangle + \\
 &\quad + (r_{23} t_{13} r_{12}) |132\rangle + (r_{23} t_{13} t_{12}) |231\rangle + \\
 &\quad + (t_{23} t_{13} r_{12}) |312\rangle + (t_{23} t_{13} t_{12}) |321\rangle \quad . \quad (II.19)
 \end{aligned}$$

usando o outro, Fig. 2.2(b), obtemos

$$\begin{aligned}
 S|123\rangle &= S_{12}^{23} S_{13}^{12} S_{23}^{23} |123\rangle = (T_{12}^{23} + R_{12}^{23}) (T_{13}^{12} + R_{13}^{12}) (T_{23}^{23} + R_{23}^{23}) |123\rangle = \\
 &= (T_{12}^{23} + R_{12}^{23}) (T_{13}^{12} + R_{13}^{12}) (t_{23} |132\rangle + r_{23} |123\rangle) = \\
 &= (T_{12}^{23} + R_{12}^{23}) (t_{13} t_{23} |312\rangle + t_{13} r_{23} |213\rangle + r_{13} t_{23} |132\rangle + \\
 &\quad + r_{13} r_{23} |123\rangle) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (t_{12}r_{13}t_{23} + r_{12}r_{13}r_{23})|123\rangle + (r_{12}t_{13}r_{23})|213\rangle + \\
 &\quad + (t_{12}r_{13}r_{23} + r_{12}r_{13}t_{23})|132\rangle + (t_{12}t_{13}t_{23})|231\rangle + \\
 &\quad + (r_{12}t_{13}t_{23})|312\rangle + (t_{12}t_{13}t_{23})|321\rangle \quad (II.20)
 \end{aligned}$$

Observe que

$$r_{12}t_{13}r_{23} \equiv (t_{12}r_{13}r_{23} + r_{12}r_{13}t_{23}) \quad , \quad (II.21)$$

como era de se esperar, pois a matriz-S total (II.19) é idêntica à (II.20). Estes resultados estão registrados na Tab.2.1.

Como tínhamos mencionado anteriormente, a amplitude de onda sainte não depende do ordenamento temporal das interações.

Nota: se tomarmos um par ligado, teremos colisão de uma partícula por duas partículas ligadas. por exemplo, se tomarmos $s_{12} = -1$ basta colocar nos canais de saída $r_{12} = t_{12} = 1$. Se tomarmos $s_{23} = +1$, basta colocar $r_{23} = t_{23} = 1$ e se tomarmos $s_{12} = s_{23} = -1$, temos um agregado (de três partículas) livre.

A teoria de fatoração da matriz S apresenta uma propriedade fundamental:

$$S_{ij}^{ab} S_{ik}^{bc} S_{ij}^{ab} = S_{ij}^{bc} S_{ik}^{ab} S_{jk}^{bc} \quad (II.22)$$

Esta propriedade é denominada equação de fatoração. Temos ainda outras propriedades úteis:

$$S_{ij}^{ab} S_{ji}^{ab} = 1 \quad , \quad (II.23)$$

$$S_{ij}^{ab} S_{bc}^{dc} = S_{kl}^{dc} S_{ij}^{ab} \quad , \quad (\text{II.24})$$

com todos os índices i, j, k e l diferentes.

Se tivermos um sistema de espalhamento com 4 partículas livres, este sistema terá 14 diagramas de possibilidades de colisões uma com outra e precisaremos de seis fatores de amplitudes de espalhamento de dois corpos para obter a amplitude total de espalhamento de 4 corpos. Assim, $S^4 = S^2 S^2 S^2 S^2 S^2 S^2$, denominado de fatoração da matriz-S de 4 corpos.

Agora mostraremos que as ondas saintes são as mesmas para cada um dos possíveis 14 diagramas. Para calcular a matriz S^4 , vamos iniciar com um dos possíveis diagrama como está mostrado na Figura 2.4, com a condição de as partículas estarem dispostas na ordem espacial $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$ e terem momentos $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$, assim:

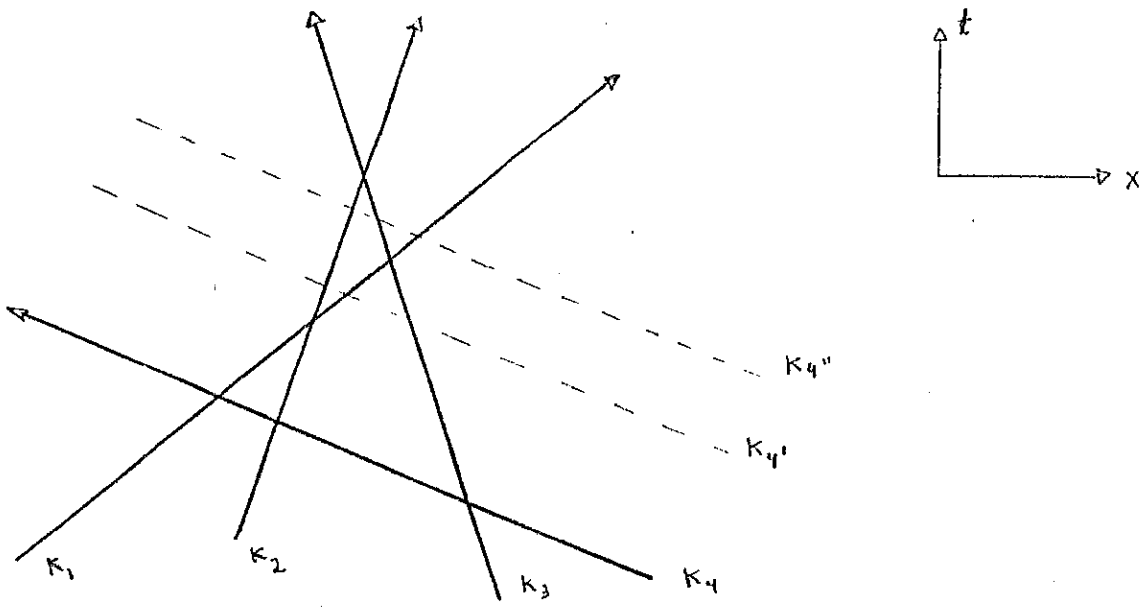


FIGURA 2.4 - Uma das 14 possibilidades de construir diagramas de interações de 4 partículas livres.

Este diagrama fornece a ordem temporal de interação para os seis

operadores de dois corpos dado por

$$S_{23}^{23} S_{13}^{34} S_{12}^{23} S_{14}^{12} S_{24}^{23} S_{34}^{34} \quad (II.25)$$

Imagine que estamos movendo a linha inferior k_4 em direção acima. Geramos um novo esquema quando esta linha passa a colisão entre k_1 e k_2 indicada por outra tracejada na Fig. 2.4. Esta segunda sequência de colisões dá exatamente o mesmo resultado que a primeira, porque trocamos apenas a ordem dos operadores (conforme a eq. (II.22)); assim o novo diagrama dá o mesmo resultado, como já foi observado para o caso de três corpos. Se continuamos a mover a linha k_4 em direção acima, uma nova sequência será gerada quando esta atingir a posição indicada pela segunda tracejada. Esta sequência envolve uma troca de operadores S_{12}^{12} e S_{14}^{14} a qual comuta porque não tem nenhuma inclinação em comum (conforme propriedade (II.24)). Assim, este diagrama dá exatamente o mesmo resultado das duas anteriores.

Uma combinação deste argumento mostrará que cada diagrama possível dá exatamente a mesma onda sainte. Ele não depende do número de partículas, para todos os casos é apenas necessário mover linhas de interações cruzadas e passadas comutando interação.

No cálculo da matriz-S fatorada para 4 partículas livres basta tomar uma das 14 possibilidades cronológicas de interações porque as demais darão o mesmo resultado. Tomando a possibilidade dada pelo gráfico da Fig. 2.4, temos

$$S|1234\rangle = S_{23}^{23} S_{13}^{34} S_{12}^{23} S_{14}^{12} S_{24}^{23} S_{34}^{34} |1234\rangle \quad (II.26)$$

O número total de termos desta expressão (II.26) será dado por

$2^6 = 64$. O número de canais de ondas saintes será dado por $4! = 24$ canais. O resultado é

$$\begin{aligned}
 S|1234\rangle = & t_{23}t_{13}t_{12}t_{14}t_{24}t_{34}|4321\rangle + t_{23}t_{13}t_{12}t_{14}t_{24}r_{34}|3421\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}t_{12}t_{14}r_{24}t_{34}|2341\rangle + t_{23}t_{13}t_{12}t_{14}r_{24}r_{34}|2431\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}t_{12}r_{14}t_{24}t_{34}|1324\rangle + t_{23}t_{13}t_{12}r_{14}t_{24}r_{34}|1423\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}t_{12}r_{14}r_{24}t_{34}|1342\rangle + t_{23}t_{13}t_{12}r_{14}r_{24}r_{34}|1432\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}r_{12}t_{14}t_{24}t_{34}|4312\rangle + t_{23}t_{13}r_{12}t_{14}t_{24}r_{34}|3412\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}r_{12}t_{14}r_{24}t_{34}|2314\rangle + t_{23}t_{13}r_{12}t_{14}r_{24}r_{34}|2413\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}r_{12}r_{14}t_{24}t_{34}|1342\rangle + t_{23}t_{13}r_{12}r_{14}t_{24}r_{34}|1432\rangle + \\
 & + t_{23}t_{13}r_{12}r_{14}r_{24}t_{34}|1324\rangle + t_{23}t_{13}r_{12}r_{14}r_{24}r_{34}|1423\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}t_{12}t_{14}t_{24}t_{34}|4123\rangle + t_{23}r_{13}t_{12}t_{14}t_{24}r_{34}|3124\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}t_{12}t_{14}r_{24}t_{34}|2143\rangle + t_{23}r_{13}t_{12}t_{14}r_{24}r_{34}|2134\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}t_{12}r_{14}t_{24}r_{34}|1423\rangle + t_{23}r_{13}t_{12}r_{14}t_{24}r_{34}|1324\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}t_{12}r_{14}r_{24}t_{34}|1243\rangle + t_{23}r_{13}t_{12}r_{14}r_{24}r_{34}|1234\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}r_{12}t_{14}t_{24}t_{34}|4213\rangle + t_{23}r_{13}r_{12}t_{14}t_{24}r_{34}|3214\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}r_{12}t_{14}r_{24}t_{34}|2413\rangle + t_{23}r_{13}r_{12}t_{14}t_{24}t_{34}|2314\rangle + \\
 & + t_{23}r_{13}r_{12}r_{14}t_{24}t_{34}|1243\rangle + t_{23}r_{13}r_{12}r_{14}t_{24}r_{34}|1234\rangle +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + t_{23} r_{13} r_{12} r_{14} r_{24} t_{34} |1423\rangle + t_{23} r_{13} r_{12} r_{14} r_{24} r_{34} |1324\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} t_{12} t_{14} t_{24} t_{34} |4231\rangle + r_{23} t_{23} t_{12} t_{14} t_{24} r_{34} |3241\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} t_{12} t_{14} r_{24} t_{34} |2431\rangle + r_{23} t_{13} t_{12} t_{14} r_{24} r_{34} |2341\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} t_{12} r_{14} t_{24} t_{34} |1234\rangle + r_{23} t_{13} t_{12} r_{14} t_{24} r_{34} |1243\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} t_{12} r_{14} r_{24} t_{34} |1432\rangle + r_{23} t_{13} t_{12} r_{14} r_{24} r_{34} |1342\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} r_{12} t_{14} t_{24} t_{34} |4132\rangle + r_{23} t_{13} r_{12} t_{14} t_{24} r_{34} |3142\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} r_{12} t_{14} r_{24} t_{34} |2134\rangle + r_{23} t_{13} r_{12} t_{14} r_{24} r_{34} |2143\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} r_{12} r_{14} t_{24} t_{34} |1432\rangle + r_{23} t_{13} r_{12} r_{14} t_{24} r_{34} |1342\rangle + \\
 & + r_{23} t_{13} r_{12} r_{14} r_{24} t_{34} |1234\rangle + r_{23} t_{13} r_{12} r_{14} r_{24} r_{34} |1243\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} t_{12} t_{14} t_{24} t_{34} |4213\rangle + r_{23} r_{13} t_{12} t_{14} t_{24} r_{34} |3214\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} t_{12} t_{14} r_{24} t_{34} |2413\rangle + r_{23} r_{13} t_{12} t_{14} r_{24} r_{34} |2314\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} t_{12} r_{14} t_{24} r_{34} |1243\rangle + r_{23} r_{13} t_{12} r_{14} t_{24} r_{34} |1234\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} t_{12} r_{14} r_{24} t_{34} |1423\rangle + r_{23} r_{13} t_{12} r_{14} r_{24} r_{34} |1324\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} r_{12} t_{14} t_{24} t_{34} |4123\rangle + r_{23} r_{13} r_{12} t_{14} t_{24} r_{34} |3124\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} r_{12} t_{14} r_{24} t_{34} |2143\rangle + r_{23} r_{13} r_{12} t_{14} r_{24} r_{34} |2143\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} r_{12} r_{14} t_{24} t_{34} |1423\rangle + r_{23} r_{13} r_{12} r_{14} t_{24} r_{34} |1324\rangle + \\
 & + r_{23} r_{13} r_{12} r_{14} r_{24} t_{34} |1243\rangle + r_{23} r_{13} r_{12} r_{14} r_{24} r_{34} |1234\rangle .
 \end{aligned}$$

e assim por diante. Podemos calcular a expressão final do operador S para quaisquer números de partículas livres, basta construir um dos diagramas possíveis. A lei de formação desses diagramas para N partículas é a seguinte:

$$\text{Nº de fatores S} = \binom{N}{2} = \frac{(N-1)N}{2}$$

$$\text{Nº de termo da expressão } S_N = 2^{(N-1)N/2}$$

$$\text{Nº de canais para ondas saintes} = N!$$

b) Energia de Ligação das N Partículas

Vamos agora examinar o espalhamento dos estados ligados. As partículas estarão ligadas pelos potenciais delta de Dirac. Sabemos que o sistema com duas partículas ligado devido ao potencial delta atrativo tem somente um estado ligado, bem como para as N partículas.

A função de onda do estado ligado,

$$\psi = \exp \left[-\sqrt{Z} g \sum_{i < j \leq N} |x_i - x_j| \right], \tag{II.28}$$

naturalmente satisfaz à equação de Schrödinger (II.1).

Para elucidar a dinâmica de N-corpos do tipo (II.1) é conveniente empregar sistema de coordenadas racionalizadas ⁽⁸⁷⁾,

$$z_n = \sqrt{\frac{m}{n(n+1)}} \left[\sum_{t=1}^n x_t - n x_{n+1} \right], \quad 1 \leq n \leq N-1, \tag{II.29}$$

$$Z_N = \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_{t=1}^N x_t \quad . \quad (\text{II.30})$$

Com o objetivo de calcular a energia do sistema convém usarmos as coordenadas conjugadas, isto é,

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{mn(n+1)}} \left[\sum_{t=1}^n p_t - np_{n+1} \right] , \quad 1 \leq n \leq N-1 , \quad (\text{II.31})$$

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_{t=1}^N p_t \quad . \quad (\text{II.32})$$

As coordenadas (II.31) podem ser reescritas

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{mn(n+1)}} \sum_{t=1}^n (p_t - p_{n+1}) , \quad 1 \leq n \leq N-1 . \quad (\text{II.33})$$

Sabemos que a energia cinética neste sistema de coordenadas fica

$$E = \frac{\hbar^2}{2} \sum_{n=1}^{N-1} P_n^2 \quad (\text{II.34})$$

então, substituindo (II.33) em (II.34) e fazendo $m = \hbar = 1$, temos

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{1}{n^{1/2}(n+1)^{1/2}} \sum_{j=1}^n (p_j - p_{n+1}) \right]^2 \quad (\text{II.35})$$

Fazendo $k_j = p_j - p_{j+1} = k_j - k_{j+1}$, a (II.35) pode ser reescrito como

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{j=1}^n j k_j \right]^2 . \quad (\text{II.36})$$

Agora, aplicando as condições das N partículas interligadas ou

"strings",

$$\frac{\sqrt{2}i}{g} (k_j - k_{j+1}) = -1 = s_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (\text{II.37})$$

a expressão para a energia interna fica

$$E = \frac{g^2}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{j=1}^n j s_j \right]^2 \quad (\text{II.38})$$

$$= -\frac{1}{48} g^2 N(N^2-1) \quad (\text{II.39})$$

Esta é a energia de ligação das N partículas do sistema microscópico. Observe que o sistema não satura com aumento de N , apenas a energia diminui com $N^3 - N$. A função de onda é simétrica pela troca de quaisquer partículas. Particularmente, o estado ligado de um par de partículas ($N = 2$) vale

$$E = -\frac{1}{8} g^2, \quad (\text{II.40})$$

e obviamente para $N = 1$ temos $E = 0$

c) Espalhamento dos Estado Ligados

Vamos agora aplicar a técnica de fatoração da matriz S para os espalhamentos de estados ligados incidindo um sobre o outro.

Não iremos apresentar as colisões múltiplas entre os estados ligados. Usando o "ansatz de Bethe" em (II.1) pode-se mostrar ⁽⁸²⁾ que uma colisão de dois estados ligados nunca resulta numa redistribuição ou quebra das partículas; por exem

plo, se um estado de três partículas ligado com velocidade v_1 colide com um estado de cinco partículas ligado com velocidade v_2 , eles sempre emergem como um estado de três partículas ligado com velocidade v_1 e um estado de cinco partículas ligado com velocidade v_2 , tendo sofrido apenas um "phase shift" ou "time delay". Isto pode claramente ser identificado à propriedade da colisão sóliton-sóliton.

c.1) Espalhamento do Estado Ligado Formado com Duas Partículas Incidindo em Uma Livre

Faremos incidir um estado ligado formado com duas partículas sobre uma livre. O estado entrante é denotado por $|(12)(3)\rangle$, significando estado formado com partículas 1 e 2 ligado e que vão colidir com uma livre 3. O operador de espalhamento S de três corpos dado em (II.18) com a condição de estado ligado em (II.37), $s_{12} = -1$, se reduz a

$$S = S_{13}^{12} S_{23}^{23} \quad (\text{II.41})$$

Aplicando (II.41) ao estado entrante temos

$$\begin{aligned} S|(12)(3)\rangle &= S_{13}^{12} S_{23}^{23} |(12)(3)\rangle = \\ &= (R_{13}^{12} + T_{13}^{12})(R_{23}^{23} + T_{23}^{23}) |(12)(3)\rangle = \\ &= \left(\frac{-1}{s_{13}+1} + \frac{s_{13}^{IP12}}{s_{13}+1} \right) \left(\frac{-1}{s_{23}+1} + \frac{s_{23}^{IP23}}{s_{23}+1} \right) |(12)(3)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

usando as condições de espalhamento $s_{23} = s$ e $s_{13} = s-1$ temos

$$S|(12)(3)\rangle = \frac{1}{s(s+1)} (1-(s-1)P^{12})(1-sP^{23})|(12)(3)\rangle ,$$

efetuando as operações transposições P^{ij} temos

$$S|(12)(3)\rangle = \frac{1}{s(s+1)} [|123\rangle - s|132\rangle - (s-1)|213\rangle + s(s-1)|312\rangle] . \quad (II.43)$$

Assim, as amplitudes de probabilidade para cada canal de saída resultam em

$$\langle(3)(12)| (12)(3)\rangle = \frac{s-1}{s+1} , \quad (II.44)$$

$$\langle(1)(23)| (12)(3)\rangle = - \frac{s-1}{s+1} , \quad (II.45)$$

$$\langle(2)(13)| (12)(3)\rangle = - \frac{s-1}{s+1} . \quad (II.46)$$

Em (II.44) não houve transferência de partícula , essa amplitude é de transmissão. Em (II.45) e (II.46) ocorreu uma substituição da partícula do estado ligado.

Podemos obter o mesmo resultado impondo as condições do problema $s_{12} = -1$, $s_{23} = s$ e $s_{13} = s-1$ em (II.20).

c.2) Espalhamento de Dois Estados Ligados e Formados cada um com Duas Partículas

O próximo sistema simples consiste em um estado ligado de duas partículas colidindo com outro. Constrói-se o operador de espalhamento S fazendo $s_{12} = s_{24} = -1$ em (II.25),

$$S|(12)(34)\rangle = S_{14}^{23} S_{24}^{34} S_{13}^{12} S_{23}^{23} |(12)(34)\rangle . \quad (II.47)$$

As condições deste sistema são dadas por

$$\begin{aligned} s_{23} &= s \quad , \\ s_{13} &= s_{24} = s-1 \quad , \\ s_{14} &= s-2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Este cálculo envolverá $2^4 = 16$ termos e obtemos $4!/2!2! = 6$ canais de estados saintes. As amplitudes de probabilidade para cada canal de espalhamento encontrado são

$$\langle (12)(34) | (12)(34) \rangle = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)s} \quad , \quad (\text{II.49})$$

$$\langle (13)(24) | (12)(34) \rangle = \frac{-(s-1)(s-2)}{(s+1)s^2} \quad , \quad (\text{II.50})$$

$$\langle (32)(14) | (12)(34) \rangle = \frac{-(s-1)(s-2)}{(s+1)s^2} \quad , \quad (\text{II.51})$$

$$\langle (14)(32) | (12)(34) \rangle = \frac{-(s-1)(s-2)}{(s+1)s^2} \quad , \quad (\text{II.52})$$

$$\langle (24)(13) | (12)(34) \rangle = \frac{-(s-1)(s-2)}{(s+1)s^2} \quad , \quad (\text{II.53})$$

$$\langle (34)(12) | (12)(34) \rangle = \frac{2(s-2)}{(s+1)s^3} \quad . \quad (\text{II.54})$$

A amplitude (II.49), denominada de transmissão, é um canal totalmente elástico. Nas amplitudes de (II.50) e (II.53) observa-se uma substituição da partícula. Na amplitude (II.54) nota-se dupla substituição (ou total substituição) é um canal totalmente inelástico.

Ilustremos todas as etapas de interação de modo "pedestre" para os processos de 4 partículas somente para o canal totalmente elástico (II.49). O estado entrante $| (12)(34) \rangle$ pode ser representado pictoricamente,

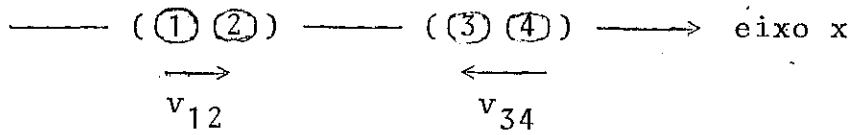


FIGURA 2.5 a

Na interação destes dois agregados haverá somente interação de contato de dois corpos de origem microscópica.



FIGURA 2.5 b

O estado σ sante $\langle (34) (12) |$ toma a forma

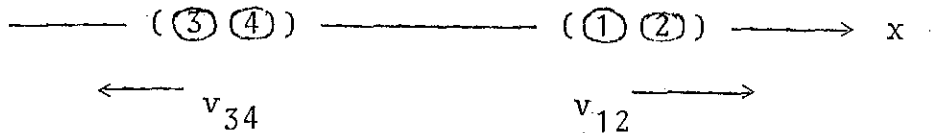


FIGURA 2.5 c

Vamos então explicar o processo que ocorre na Figura 2.5 b.

1º) A função de onda que descreve a interação delta é simétrica, portanto podemos trocar as partículas no estado ligado, por exemplo as partículas 1 e 2, e o resultado não muda.

2º) A condição de estado ligado $s = -1$ provém de que $R = T = \infty$ com $T/R = 1$. Assim temos:

$$\frac{\sqrt{2i}}{g} (k_1 - k_2) = -1 \text{ significando que as partículas 1 e 2 estão no estado ligado,}$$

$$\frac{\sqrt{2i}}{g} (k_3 - k_4) = -1 \text{ idem, 3 e 4 ligado.}$$

3º) definimos que a partícula 2 de um agregado (12) é espalhada pela partícula 3 de outro (34) da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{2}i}{g} (k_2 - k_3) = s \quad ; \quad (\text{II.55})$$

4º) a amplitude para a partícula 2 transmitir através da partícula 3, e vice-versa, é

$$\langle 32 | 23 \rangle = \frac{\sqrt{2}i(k_2 - k_3)/g}{\sqrt{2}i(k_2 - k_3)/g + 1} = \frac{s}{s+1} \quad ; \quad (\text{II.56})$$

5º) a amplitude para a partícula 2 transmitir através da partícula 4, e vice-versa, é

$$\langle 42 | 24 \rangle = \frac{s-1}{s} \quad , \quad (\text{II.57})$$

porque

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_3 - k_4) = -1 \\ \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_2 - k_3) = s \end{array} \right\} \frac{\sqrt{2}i}{g} (k_2 - k_4) = s-1 \quad , \quad (\text{II.58})$$

então

$$\langle 42 | 24 \rangle = \frac{\sqrt{2}i(k_2 - k_4)/g}{\sqrt{2}i(k_2 - k_4)/g + 1} \quad ; \quad (\text{II.59})$$

6º) a amplitude de partícula 1 transmitir através da partícula 3, e vice-versa, é

$$\langle 31 | 13 \rangle = \frac{s-1}{s} \quad , \quad (\text{II.60})$$

porque

$$\sqrt{2}i (k_1 - k_2)/g = -1 \quad , \quad (\text{II.61})$$

$$\sqrt{2}i (k_2 - k_3)/g = s \quad , \quad (II.62)$$

donde

$$\sqrt{2}i (k_1 - k_3)/g = s-1 \quad , \quad (II.63)$$

Portanto

$$\langle 31 | 13 \rangle = \frac{\sqrt{2}i(k_1 - k_3)/g}{\sqrt{2}i(k_1 - k_3)/g+1} = \frac{s-1}{s} \quad ; \quad (II.64)$$

7º) a amplitude de 1 transmitir através de 4 é

$$\langle 41 | 14 \rangle = \frac{s-2}{s-1} \quad , \quad (II.65)$$

porque

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2}i (k_1 - k_2)/g &= -1 \\ \sqrt{2}i (k_3 - k_4)/g &= -1 \\ \sqrt{2}i (k_2 - k_3)/g &= s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2}i (k_1 - k_4)/g = s-2; \quad (II.66)$$

portanto,

$$\langle 41 | 14 \rangle = \frac{\sqrt{2}i(k_1 - k_4)/g}{\sqrt{2}i(k_1 - k_4)/g+1} = \frac{s-2}{s-1} \quad ; \quad (II.67)$$

8º) a amplitude para todos os eventos é o produto de suas respectivas amplitudes e que é a amplitude para o agregado (12) atravessar o (34). Assim,

$$\begin{aligned} \langle (34)(12) | (12)(34) \rangle &= \langle 32 | 23 \rangle \langle 42 | 24 \rangle \langle 31 | 13 \rangle \langle 41 | 14 \rangle = \\ &= \left(\frac{s}{s+1}\right) \left(\frac{s-1}{s}\right) \left(\frac{s-1}{s}\right) \left(\frac{s-2}{s-1}\right) = \frac{(s-1)(s-2)}{s(s+1)} \quad . \quad (II.68) \end{aligned}$$

O que ocorre na sequência das Figuras 2.5a, 2.5b e 2.5c

é pictoricamente o seguinte:

$ (12)(34)\rangle$	(1 2)		(3 4)		estado entrante Fig. 5a
$\langle(3)(2) (2)(3)\rangle$	(1)	(3)	(2)	(4)	Fig. 5b região de interação, as
$\langle(4)(2) (2)(4)\rangle$	(1)	(3)	(4)	(2)	
$\langle(3)(1) (1)(3)\rangle$	(3)	(1)	(4)	(2)	partículas se "comportam" como se fossem independentes
$\langle(4)(1) (1)(4)\rangle$	(3)	(4)	(1)	(2)	
$\langle(34)(12) $	(3 4)		(1 2)		estado saínte, Fig. 5c

TABELA 2.2

Apesar de existirem estados ligados na região de interação, eles são considerados como gás rarefeito, isto é, as partículas estão sempre suficientemente afastadas umas das outras ou estão interagindo. Isto é plausível porque as partículas são pontos materiais. Observe que este caso não é relativista, logo não há necessidade de "crossing" nem de efeito de criação-aniquilação (mesmo no caso relativista este efeito não é possível de vez que a fatoração da matriz S é aplicável). Pode-se visualizar quaisquer canais de espalhamento dessa maneira e construir todas as possibilidades.

c.3) Espalhamento de Dois Estados Ligados e Formados por Três e Duas Partículas

Para o caso de espalhamento do estado ligado contendo

três partículas com o de duas, temos

$$S | (123) (45) \rangle = S_{15}^{23} S_{25}^{34} S_{35}^{45} S_{14}^{12} S_{24}^{23} S_{34}^{34} | (123) (45) \rangle, \quad (\text{II.69})$$

onde foram usadas as condições de estado ligado, isto é, $s_{12} = s_{23} = s_{45} = -1$. As condições de espalhamento são dadas por

$$\begin{aligned} s_{34} &= s, \\ s_{35} &= s_{24} = s-1, \\ s_{35} &= s_{14} = s-2, \\ s_{15} &= s-3. \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

Nestes cálculos encontraremos $2^6 = 64$ termos e $5!/3!2! = 10$ canais de espalhamento. As amplitudes de probabilidades encontradas são:

$$\langle (45) (123) | (123) (45) \rangle = \frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)s}, \quad (\text{II.71})$$

$$\langle (35) (124) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2}, \quad (\text{II.72})$$

$$\langle (25) (134) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2}, \quad (\text{II.73})$$

$$\langle (15) (234) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2}, \quad (\text{II.74})$$

$$\langle (41) (235) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s-1)s^2}, \quad (\text{II.75})$$

$$\langle (42) (135) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s-1)s^2}, \quad (\text{II.76})$$

$$\langle (43) (125) | (123) (45) \rangle = - \frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2}, \quad (\text{II.77})$$

$$\langle (12) (345) | (123) (45) \rangle = \frac{2(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2(s-1)}, \quad (\text{II.78})$$

$$\langle (13)(452) | (123)(45) \rangle = \frac{2(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2(s-1)} \quad , \quad (\text{II.79})$$

$$\langle (23)(451) | (123)(45) \rangle = \frac{2(s-3)(s-2)}{(s+1)s^2(s-1)} \quad . \quad (\text{II.80})$$

c.4) Espalhamento de Dois Estados Contendo cada um Três Partículas e Generalização do Operador S Fatorado para a Colisão de Dois Pacotes Equivalentes

O espalhamento de estado ligado contendo três partículas com outro é

$$S | (123)(456) \rangle = s_{16}^{34} s_{26}^{35} s_{36}^{56} s_{15}^{23} s_{25}^{34} s_{35}^{45} s_{14}^{12} s_{24}^{23} s_{34}^{34} | (123)(456) \rangle ,$$

onde foram usadas as condições de estado ligado, $s_{12} = s_{23} = s_{45} = s_{56} = -1$. As condições de espalhamento são

$$\begin{aligned} s_{24} &= s \quad , \\ s_{24} &= s_{35} = s_{46} = s-1 \quad , \\ s_{14} &= s_{25} = s_{36} = s-2 \quad , \\ s_{15} &= s_{16} = s-3 \quad , \\ s_{16} &= s-4 \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

No cálculo de canais de saída encontraremos $2^9 = 512$ termos e $6!/3!3! = 20$ canais de espalhamento, sendo um canal sem nenhuma substituição de partículas, nove canais com uma substituição, nove com duas substituições e um com três.

O operador de espalhamento S total pode ser generalizado para sistema de muitos corpos em fatores de operadores de dois corpos, denominado fatoração da matriz S. Por recorrência,

$$\begin{aligned}
 & S_{1, N+3}^{N+4, N+5} S_{2, N+3}^{N+5, N+6} S_{3, N+3}^{N+6, N+7} \dots S_{N-2, N+3}^N S_{N-1, N+3}^{N+1, N+2} S_{N, N+3}^{N+2, N+3} \\
 & S_{1, N+2}^{N+3, N+4} S_{2, N+2}^{N+4, N+5} S_{3, N+2}^{N+5, N+6} \dots S_{N-2, N+2}^{N-1, N} S_{N-1, N+2}^N S_{N, N+2}^{N+1, N+2} \\
 & S_{1, N+1}^{N+2, N+3} S_{2, N+1}^{N+3, N+4} S_{3, N+1}^{N+4, N+5} \dots S_{N-2, N+1}^{N-2, N-1} S_{N-1, N+1}^{N-1, N} S_{N, N+1}^{N, N+1}] | \rangle , \quad (\text{II.84})
 \end{aligned}$$

onde as condições de espalhamento são

$$s_{ij} = s + (i-j+1) \quad . \quad (\text{II.85})$$

Todas estas fórmulas apresentadas são para uma colisão de dois agregados. C.N.Yang desenvolveu a teoria para múltiplas colisões entre estados ligados (82). na fórmula (II.84) somente o cálculo de amplitude de canal elástico é imediato, isto é:

$$\begin{aligned}
 & \langle (2N, \dots, N+1) (N, \dots, 1) | (1, \dots, N) (N+1, \dots, 2N) \rangle = \\
 & = \frac{(s-(N-1))(s-N)(s-(N+1)) \dots (s-(2N-2))}{(s+1)(s-1)(s-2) \dots (s-(N-2))} \quad . \quad (\text{II.86})
 \end{aligned}$$

Podemos ainda verificar que:

$$\text{número de termos} = 2^{N^2} ,$$

$$\text{número de canais} = (2N)!/N!N! = \frac{2^N (2N-1)!!}{N!} ,$$

sendo: 1 canal totalmente elástico

N^2 canais com uma substituição

$\left(\frac{N!}{(N-2)!2!}\right)^2$ canais com duas substituições

$\left(\frac{N!}{(N-3)!3!}\right)^2$ canais com três substituições, etc.

⋮

É óbvio que

$$\frac{(2N)!}{N!N!} = \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N!}{(N-\ell)!\ell!} \right)^2 .$$

Se tivermos colisão de dois agregados quaisquer, com amplitude

$$\langle (i, i-1, i-2, \dots, N+1) (1, \dots, N) \mid (1, \dots, N) (N+1, \dots, i) \rangle ,$$

podemos verificar que

$$\text{número de termos} = 2^{iN} ,$$

$$\text{número de canais} = \frac{(N+i)!}{N!i!} ,$$

sendo: 1 canal totalmente elástico

iN canais com uma substituição

$$\frac{i!N!}{(i-2)!(N-2)!(2!)^2} \text{ canais com duas substituições}$$

⋮

$$\frac{i!N!}{(i-\ell)!(N-\ell)!(\ell!)^2} \text{ canais com } \ell \text{ substituições}$$

⋮

onde $\ell = 0, 1, 2, \dots, i$.

É óbvio que

$$\frac{(N+i)!}{N!i!} = \sum_{\ell=0}^i \frac{i!N!}{(i-\ell)!(N-\ell)!(\ell!)^2} .$$

Estes números seriam importantes se estivessemos lidando com partículas multicoloridas.

d) Dois Estados de Espalhamento Formado por Dois Pa-
res de Partículas em Função da Energia Cinética

É preferível estudar as amplitudes em função dos processos de espalhamentos em função da energia ao invés do parâmetro S . Ilustremos para o caso de espalhamento de um par de partículas ligadas incidindo sobre um segundo par de partículas ligadas conforme (II.47), usando a fórmula (II.36) que relaciona a energia em função do parâmetro S . Assim, após o desenvolvimento explícito dessa fórmula (II.36), que relaciona a energia em função do parâmetro s . Assim, após o desenvolvimento explícito dessa fórmula (II.36), temos

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} k_1'^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} (k_1' + 2k_2')^2 + \frac{1}{3 \cdot 4} (k_1' + 2k_2' + 3k_3')^2 \right]. \quad (\text{II.87})$$

Usando as condições do espalhamento para este problema,

$$\frac{\sqrt{Z_1}}{g} k_1' = \frac{\sqrt{Z_1}}{g} (k_1 - k_2) = -1 \quad (\text{significando estado ligado da partícula 1 e 2}),$$

$$\frac{\sqrt{Z_2}}{g} k_2' = \frac{\sqrt{Z_2}}{g} (k_2 - k_3) = s;$$

$$\frac{\sqrt{Z_3}}{g} k_3' = \frac{\sqrt{Z_3}}{g} (k_3 - k_4) = -1 \quad (\text{significando estado ligado da partícula 3 e 4}), \quad (\text{II.88})$$

Substituindo (II.88) em (II.87) e efetuando os cálculos encontraremos que

$$E = -[s-1]^2 \frac{g^2}{4} - \frac{g^2}{4}.$$

(II.89)

Sabemos de (II.40) que um par de partículas tem energia de ligação $E = -g^2/8$. O termo $-g^2/4$ em (II.89) é a energia interna dos dois pares. podemos por conveniência removê-lo representando assim a solução em termos de energia cinética incidente dos agregados no referencial de centro de massa, assim temos que

$$s = 1 + \frac{2iE^{1/2}}{g} \quad (II.90)$$

A amplitude de transmissão (II.49) é então

$$\langle (34)(12) | (12)(34) \rangle = \frac{(s-1)(s-2)}{s(s+1)} = \frac{\left(\frac{2iE^{1/2}}{g}\right) \left(\frac{2iE^{1/2}}{g} - 1\right)}{\left(\frac{2iE^{1/2}}{g} + 1\right) \left(2 + \frac{2iE^{1/2}}{g}\right)} \quad (II.91)$$

e a probabilidade de transmissão é

$$|\langle (34)(12) | (12)(34) \rangle|^2 = \frac{\frac{E}{4}}{\frac{E}{4} + 1} \quad (II.92)$$

Assim, a possibilidade de um par de agregado atravessar outro é zero na energia cinética zero e aumenta monotonicamente à unidade quando $E \rightarrow \infty$.

Para as amplitudes em que ocorre uma substituição, isto é, de (II.50) a (II.53), as amplitudes são dadas por

$$\langle () () | (12)(34) \rangle = - \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)s^2} = - \frac{\left(\frac{2iE^{1/2}}{g}\right) \left(\frac{2iE^{1/2}}{g} - 1\right)}{\left(1 + \frac{2iE^{1/2}}{g}\right) \left(2 + \frac{2iE^{1/2}}{g}\right)} \quad (II.93)$$

e a probabilidade das correspondentes amplitudes é dada por

$$P = |\langle () () | (12)(34) \rangle|^2 = \frac{4E/g^2}{(4E/g^2 + 1)(4E/g^2 + 4)} \quad (II.94)$$

Esta probabilidade é zero em $E \rightarrow \infty$ e $E = 0$. Há uma energia em que a probabilidade destes canais é máxima. Denomina-se probabilidade de "ressonante"; então

$$\frac{dP}{dE} = \frac{-4E^2}{g^6} + \frac{1}{g^2} \equiv 0 \implies E = \frac{1}{2} g^2 \quad (\text{energia de ressonância}), \quad (\text{II.95})$$

logo, a probabilidade para $E = g^2/2$ vale

$$P = \frac{1}{9} \quad (\text{II.96})$$

Portanto nos canais em que ocorre, uma substituição tem probabilidade

$$P = \frac{4}{9} \quad (\text{II.97})$$

Para a amplitude em que há duas substituições (II.54), temos

$$\langle (12)(34) | (12)(34) \rangle = \frac{2(s-2)}{s^2(s+1)} = \frac{2\left(\frac{2iE^{1/2}}{g} - 1\right)}{\left(\frac{2iE^{1/2}}{g} + 1\right)^2 \left(\frac{2iE^{1/2}}{g} + 2\right)} \quad (\text{II.98})$$

e

$$|\langle (12)(34) | (12)(34) \rangle|^2 = \frac{4}{\left(\frac{4E}{g^2} + 1\right) \left(\frac{4E}{g^2} + 4\right)} \quad (\text{II.99})$$

Como era esperado, quando $E \rightarrow \infty$ temos probabilidade nula e quando $E = 0$ temos probabilidade 1. Na energia de ressonância a probabilidade de transmissão total é $3/9$ e a probabilidade de duas substituições é $2/9$.

e) Estados de Espalhamento de Uma Partícula por (N-1) Partículas em Função da Energia Cinética

Consideremos um ket entrante na forma $| (1, 2, \dots, N-1) (N) \rangle$, significando que um agregado de (N-1) partículas, incide sobre uma partícula livre. Vamos calcular a variável s em função da energia usando (II.36) e as condições do problema:

$$\frac{\sqrt{2i}}{g} k_j = \frac{\sqrt{2i}}{g} (k_j - k_{j+1}) = -1 \quad \text{para } j = 1, \dots, N-2 \quad (\text{II.100})$$

e

$$\frac{\sqrt{2i}}{g} k_{N-1} = \frac{\sqrt{2i}}{g} (k_{N-1} - k_N) = s \quad (\text{II.101})$$

Destrinchando a expressão (II.36) e substituindo as condições (II.100) e (II.101), após um pouco de algebrismo, encontraremos

$$E = -\frac{g^2}{4} \left[\left\{ \sum_{\ell=1}^{N-2} \frac{\ell(\ell+1)}{4} \right\} + \frac{(N-1)N}{4} - (s+1)(N-1) + \frac{(s-1)^2(N-1)}{N} \right]. \quad (\text{II.102})$$

O termo entre as chaves corresponde à energia de ligação do agregado das (N-1) partículas. Assim, abandonando o termo de ligação chegaremos a s em função da energia cinética,

$$s = \frac{2iN^{1/2} E^{1/2}}{g(N-1)^{1/2}} + \frac{N-2}{2}, \quad (\text{II.103})$$

Onde levamos em conta só a raiz positiva.

A amplitude para a partícula incidida ser atravessada pelo agregado ligado das (N-1) partículas é o produto de suas amplitudes para travessias individuais, isto é, correspondente

Ainda mais, a amplitude de transmissão é sempre diferente de zero para uma partícula incidida pelo (N-1) agregado, pois fazendo o caso extremo, $E \rightarrow \infty$ em (II.105) temos, respectivamente,

$$\langle (N) (1, \dots, N-1) | (1, \dots, N-1) (N) \rangle = -1 + \frac{4}{N} \quad (\text{II.109})$$

e

$$\langle (x) (1, \dots, N, \dots, N-1) | (1, \dots, x, \dots, N-1) (N) \rangle = \frac{2}{N} \quad (\text{II.110})$$

Assim, se o agregado tiver $(N-1) \rightarrow \infty$ partículas, nada acontecerá com a partícula incidida, simplesmente ela é atravessada por essa imensa agregação como se não existisse nada no caminho.

O próximo passo seria estudar um par de partículas ligado incidido pelo agregado de (N-2) partículas. Depois uma terna, e assim por diante. A sistemática é a mesma, porém os seus cálculos são muito tediosos.

II.3 - DESCRIÇÃO MICROSCÓPICA QUÂNTICA DO ESPALHAMENTO DE UM AGREGADO DE N-BÓSONS POR OUTRO

Doravante as partículas serão incolores, indistinguíveis, isto é, bósons. Para isto basta tomar os operadores transposição $\mathbb{P}^{ij} \equiv \mathbb{1}$ porque todos estes operadores atuando sobre bósons são redundantes. Assim, estaremos resolvendo o problema de espalhamento de um sólito clássico incidindo sobre um outro, pois um agregado de N bósons com $N \rightarrow \infty$ é um pacote sólito clássico que é um estado ligado contendo N bósons $| (1, 2, 3, \dots, N-2, N-1, N) \rangle$.

Com estas particularidades, o operador S total (II.84) fica compactado a

$$S = \prod_{i=1}^N \prod_{j=N+1}^{2N} S_{ij} \quad (\text{II.111})$$

onde

$$S_{ij} = R_{ij} + T_{ij} = \frac{s_{ij}^{-1}}{s_{ij}+1}, \quad (\text{II.112})$$

e as condições de interações microscópicas são

$$s_{ij} = s + (i-j+1) \quad (\text{II.113})$$

O ket do estado entrante para o espalhamento de dois sólitons é denotado por

$$|(1, \dots, N) ((N+1), \dots, (2N))\rangle \quad (\text{II.114})$$

e o braç do correspondente estado sainte é

$$\langle (1', \dots, N') ((N+1)', \dots, (2N)') | \quad (\text{II.115})$$

O estado sainte (II.115) tem forma interna idêntica à do estado entrante (II.114) por se tratar de bósons, não quebrando assim o agregado de N partículas; é como se não houvesse espalhamento, apenas defasagem do movimento com respeito ao anterior à colisão.

Desenvolvendo (II.111) e usando explicitamente as condições (II.113), temos a seguinte amplitude:

$$S = \langle ((N+1)', \dots, (2N)') (1', \dots, N') | (1, \dots, N) ((N+1), \dots, (2N)) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{s-2N+1}{s-2N+3}\right) \left(\frac{s-2N+2}{s-2N+4}\right)^2 \left(\frac{s-2N+3}{s-2N+5}\right)^3 \left(\frac{s-2N+4}{s-2N+6}\right)^4 \left(\frac{s-2N+5}{s-2N+7}\right)^5 \dots \\
 &\dots \left(\frac{s-2N-2}{s-N}\right)^{N-2} \left(\frac{s-N-1}{s-N+1}\right)^{N-1} \left(\frac{s-N}{s-N+2}\right)^N \left(\frac{s-N+1}{s-N+3}\right)^{N-1} \left(\frac{s-N+2}{s-N+4}\right)^{N-2} \dots \\
 &\dots \left(\frac{s-5}{s-3}\right)^5 \left(\frac{s-4}{s-2}\right)^4 \left(\frac{s-3}{s-1}\right)^3 \left(\frac{s-2}{s}\right)^2 \left(\frac{s-1}{s+1}\right) \quad , \quad (II.116)
 \end{aligned}$$

ou simplificando os termos semelhantes,

$$S = \frac{(s-2N+1)(s-2N+2)^2(s-2N+3)\dots(s-N-2)^2(s-N-1)^2(s-N)^2}{(s+1)(s)^2(s-1)^2(s-2)^2\dots(s-N+1)^2(s-N+1)^2(s-N-3)^2(s-N+2)^2} \quad . \quad (II.117)$$

Compactando a expressão fica

$$S = \frac{s-2N+1}{s+1} \prod_{j=0}^{N-2} \frac{(s-N-j)^2}{(s-j)^2} \quad . \quad (II.118)$$

Como a amplitude de espalhamento de dois corpos coletivos (macroscópicos) vai ser deduzida em termos do parâmetro energia cinética, convém usar o mesmo parâmetro para essa amplitude S (II.118); isto nos poupará trabalho ulterior quando formos comparar as duas versões quânticas, isto é, sistema microscópico e macroscópico. Para isso vamos substituir o parâmetro s pelo parâmetro energia cinética usando a relação (II.36),

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{j=1}^n j k'_j \right]^2 \quad , \quad (II.36.1)$$

que é a energia total do sistema de $2N$ partículas. Explicitando para facilitar o mecanismo do cálculo, temos

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} k'_1{}^2 + \frac{1}{6} (k'_1+2k'_2)^2 + \dots + \frac{1}{(2N-1)2N} (k'_1+2k'_2 + \dots + (2N-1)k'_{2N-1})^2 \right] \quad (II.119)$$

e usando as condições para espalhamentos microscópicos,

$$k_1 - k_2 = k_2 - k_3 = k_3 - k_4 = \dots = k_{N-1} - k_N = -\frac{g}{\sqrt{2}i}$$

$$k_N - k_{N+1} = \frac{g}{\sqrt{2}i} \quad s \quad (\text{II.120})$$

$$k_{N+1} - k_{N+2} = k_{N+2} - k_{N+3} = \dots = k_{2N-1} - k_{2N} = -\frac{g}{\sqrt{2}i}$$

temos:

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} \left(\frac{-g^2}{2}\right) \left[\frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{1}{6}(-1-2)^2 + \frac{1}{12}(-1-2-3)^2 + \frac{1}{20}(-1-2-3-4)^2 + \dots \right. \\ & \dots + \frac{1}{N(N+1)} (-1-2-3-4-\dots-(N-1)+Ns)^2 + \frac{1}{(N+1)(N+2)} (-1-2-2-\dots- \\ & \dots - (N-1)+Ns+(N+1))^2 + \dots \\ & \dots + \left. \frac{1}{(2N-1)2N} (-1-2-3-\dots-(N-1)+Ns-(N+1)-(N+2)-\dots-(2N-2)-(2N-1))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.121})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} E = & \frac{-g^2}{4} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{i(i+1)}{4} + \frac{1}{N(N+1)} \left(-\frac{(N+1)N}{2} + N(s+1)\right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \left(-\frac{(N+2)(N+1)}{2} + N(s+1)\right)^2 + \dots + \\ & \left. + \frac{1}{(2N-1)2N} \left(-\frac{2N(2N-1)}{2} + N(s+1)\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

Exaurindo agora as energias internas ou de ligações (II.39) dos dois pacotes (energias espúrias),

$$E_{\text{ligações}} = 2 \cdot \left(\frac{-g}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i(i+1)}{4}\right) = -\frac{2g^2}{4} \frac{N(N^2-1)}{12} \quad (\text{II.123})$$

temos a expressão em termos de energia cinética em referencial de centro de massa,

$$E = -\frac{g^2}{4} \left\{ \frac{-N(N^2-1)}{12} + \left[\frac{(N+1)N}{4} - N(s+1) + \frac{N^2(s+1)}{N(N+1)} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(N+2)(N+1)}{4} - N(s+1) + \frac{N^2(s+1)}{(N+1)(N+2)} \right] + \dots + \left[\frac{2N(2N-1)}{4} - \right. \right. \\ \left. \left. - N(s+1) + \frac{N^2(s+1)^2}{(2N-1)2N} \right] \right\}, \quad (II.124)$$

ou convertendo-a, temos

$$E = -\frac{g^2}{4} \left[\frac{-N(N^2-1)}{12} + \sum_{i=1}^N \frac{(N+i)(N+i-1)}{4} - \sum_{i=1}^N N(s+1) + \sum_{i=1}^N \frac{N^2(s+1)^2}{(N+i)(N+i-1)} \right], \quad (II.125)$$

e usando a Tabela de Integrais ⁽⁸⁸⁾, temos

$$E = -\frac{g^2}{4} \left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{24} + \frac{(2N-1)N(N+1)}{8} + \frac{N(N^2-N)}{4} - \frac{N(N^2-1)}{12} - \right. \\ \left. - N^2(s+1) + \frac{N(s+1)^2}{2} \right], \quad (II.126)$$

ou finalmente

$$E = -\frac{g^2}{4} \left[\frac{N^3}{2} - N^2(s+1) + \frac{N(s+1)^2}{2} \right], \quad (II.127)$$

Assim s em função de energia cinética fica

$$s = N-1 \pm i \sqrt{\frac{8E}{Ng^2}}. \quad (II.128)$$

Portanto, a amplitude de espalhamento S para sistema de dois sólitons em função de energia cinética do centro de massa, após substituirmos a relação (II.128) em (II.118), fica

$$S = \frac{i \sqrt{\frac{8E'}{Ng^2}} - N}{i \sqrt{\frac{8E'}{Ng^2}} + N} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \frac{i \sqrt{\frac{8E'}{Ng^2}} - j}{i \sqrt{\frac{8E'}{Ng^2}} + j} \right)^2 \quad (\text{II.129})$$

Vamos reescrever esta amplitude (II.128) numa forma mais elegante. Façamos

$$a = \sqrt{\frac{8E'}{Ng^2}} \quad , \quad (\text{II.130})$$

e usando a forma (II.117) temos

$$S = \frac{(ia-N)(ia-N+1)^2(ia-N+2)^2(ia-N+3)^2 \dots (ia-3)^2(ia-2)^2(ia-1)^2}{(ia+1)^2(ia+2)^2(ia+3)^2(ia+4)^2 \dots (ia+N-3)^2(ia+N-2)^2(ia+N-1)^2(ia+N)} \quad (\text{II.131})$$

Definimos

$$S = \frac{P_1(a,N)P_2(a,N)}{P_3(a,N)P_4(a,N)} \quad (\text{II.132})$$

com

$$\left. \begin{aligned} P_1(a,N) &= (ia-N)(ia-N+1)(ia-N+2) \dots (ia-3)(ia-2)(ia-1) \\ P_2(a,N) &= (ia-N+1)(ia-N+2)(ia-N+3) \dots (ia-3)(ia-2)(ia-1) \\ P_3(a,N) &= (ia+1)(ia+2)(ia+3)(ia+4) \dots (ia+N-2)(ia+N-1)(ia+N) \\ P_4(a,N) &= (ia+1)(ia+2)(ia+3)(ia+4) \dots (ia+N-3)(ia+N-2)(ia+N-1) \end{aligned} \right\} (\text{II.133})$$

ou

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \prod_{j=1}^N (j^2+a^2) e^{-i \arctg \frac{a}{j}} \quad , \quad P_3 = \prod_{j=1}^N (j^2+a^2) e^{i \arctg \frac{a}{j}} \quad , \\ P_2 &= \prod_{j=1}^{N-1} (j^2+a^2) e^{-i \arctg \frac{a}{j}} \quad , \quad P_4 = \prod_{j=1}^{N-1} (j^2+a^2) e^{i \arctg \frac{a}{j}} \quad . \end{aligned} \right\} (\text{II.134})$$

Portanto

$$S = \frac{P_1 P_2}{P_3 P_4} = \prod_{j=1}^N e^{-2i \operatorname{arctg} \frac{a}{j}} \prod_{j=1}^{N-1} e^{-2i \operatorname{arctg} \frac{a}{j}} \quad (\text{II.135})$$

ou

$$S = e^{-2i \operatorname{arctg} \frac{a}{N}} \prod_{j=1}^{N-1} e^{-4i \operatorname{arctg} \frac{a}{j}} \quad (\text{II.136})$$

ou

$$S = e^{-2i \operatorname{arctg} \frac{a}{N} - 4i \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{arctg} \frac{a}{j}} \quad (\text{II.137})$$

Esta expressão é mais elegante e fácil de lidar.

Podemos reescrever novamente a fórmula (II.129) numa outra mais conveniente, ficando melhor expressada em termos de funções gamas, assim podemos futuramente comparar com a amplitude de S coletiva.

Então, multiplicando a expressão (II.129) por $(ia)^2$ no numerador e denominador, temos

$$S = \frac{ia-N}{ia+N} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \frac{j-ia}{j+ia} \frac{(-ia)}{(+ia)} \right)^2 \quad (\text{II.138})$$

Deste modo, podemos substituí-los pelas funções gama

$$\Gamma(N-ia) = (N-1-ia)(N-2-ia)\dots(-ia)\Gamma(-ia) \quad (\text{II.139})$$

$$\Gamma(N+ia) = (N-1+ia)(N-2+ia)\dots(ia)\Gamma(ia) \quad (\text{II.140})$$

Assim, a amplitude de espalhamento (II.129) fica

$$S = \frac{ia-N}{ia+N} \left(\frac{\Gamma(N-ia)\Gamma(ia)}{\Gamma(-ia)\Gamma(N+ia)} \right)^2 \quad (\text{II.141})$$

Esta é a amplitude de espalhamento ou matriz S (II.129) ou (II.118) que foi deduzida para um agregado de N bósons espalhados por um segundo agregado de N bósons. Ela é a matriz S fatorada obtida do espalhamento sóliton-sóliton clássico onde foram consideradas todas as interações microscópicas em função da energia cinética medida em referencial de centro de massa dos dois sólitons. Esta expressão (II.141) é a que iremos usar para comparar com a matriz S coletiva, considerando que $N \rightarrow \infty$.

CAPÍTULO III

PANORAMA MACROSCÓPICO

III.1 - INTRODUÇÃO À GENERALIDADE DA QUANTIZAÇÃO DE DOIS CORPOS COLETIVOS

Como vimos nos capítulos anteriores, há vários trabalhos de estudo de quantização do modelo NLS em conexão com sistema de N-corpos que interagem via potenciais delta. Este problema de N-corpos foi resolvido por McGuire⁽⁸⁰⁾ e generalizado posteriormente por C.N. Yang^(81,82) :

O Hamiltoniano de N-corpos na versão de 1ª quantização

$$H = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_i^2} \right) - \frac{2m\epsilon^2}{\hbar} \sum_{i>j}^N \delta(x_i - x_j) \quad (\text{III.1})$$

pode ser expresso na versão de segunda quantização em termos de campos escalares complexos

$$H(x) = -L(x) + \frac{i\hbar}{2} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (\text{III.2})$$

com

$$L(x) = \frac{i\hbar}{2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial}{\partial x} \phi^* + \frac{\epsilon^2}{2} (\phi^* \phi)^2 \quad (\text{III.3})$$

e

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^* \phi \quad (\text{III.4})$$

A equação de Euler-Lagrange para ϕ é a NLS,

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \epsilon^2 (\phi^* \phi) \phi = 0 \quad . \quad (\text{III.5})$$

Vamos, doravante, usar a equação NLS (I.6) na forma dimensionada (III.5), com a constante de acoplamento $\epsilon^2 > 0$. Como sabemos, esta equação admite uma família de solução envelopes-sólitons quando o número de bósons $N \gg 1$. A solução mais simples na forma dimensionada fica

$$\phi(x,t) = \frac{2\hbar\eta}{\sqrt{\epsilon^2 m}} \frac{\exp\{2i\xi(x-\bar{x}_0) - \frac{2i\hbar}{m}(\xi^2 - \eta^2)t\}}{\cosh\{2\eta(x-x_0 + \frac{2\hbar\xi}{m}t)\}} \quad , \quad (\text{III.6})$$

e é denominada de um-sóliton ou onda solitária. Esta solução possui quatro parâmetros arbitrários; ξ , η , x_0 e \bar{x}_0 . O parâmetro ξ está relacionado à velocidade da onda solitária caminhante,

$$v = - \frac{2\hbar}{m} \xi \quad . \quad (\text{III.7})$$

O parâmetro η está relacionado ao tamanho do sóliton, portanto, estes parâmetros, ξ e η , caracterizam o sistema. Os parâmetros \bar{x}_0 e x_0 estão relacionados à condição inicial, isto é, x_0 corresponde à posição inicial do sóliton e \bar{x}_0 está relacionado à fase inicial. Se tivermos solução dois-sólitons teremos oito parâmetros arbitrários, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_{01}, x_{02}, \bar{x}_{01}$ e \bar{x}_{02} , onde os índices 1 e 2 não significam que pertencem ao sóliton 1 ou ao sóliton 2. Genericamente, se tivermos solução n-sólitons, teremos $4n$ parâmetros arbitrários.

As dimensões dos parâmetros envolvidos nesse sistema (III.5) são dados por

$$\dim[\xi] = \dim[\eta] = L^{-1} \quad (III.8)$$

$$\dim[\varepsilon^2] = (ML^2T^{-2}) \cdot L$$

e a dimensão dos sólitons é dada por

$$\dim[\phi] = L^{1/2} \quad (III.9)$$

A equação NLS (I.6) descreve vários sistemas físicos. Citemos alguns exemplos cuja dimensão será estabelecida de acordo com o sistema que a equação (I.6) pretende descrever.

Para ondas em águas profundas, a equação (I.6) provém de (74)

$$i(A_T + UA_X) + \left(\frac{w_0}{8k_0^2}\right)A_{XX} + \frac{1}{2}w_0k_0^2|A|^2A = 0 \quad (III.10)$$

onde $U = \frac{1}{2} w_0/k_0$ é a velocidade de grupo; com as transformações

$$\begin{aligned} u &= \alpha^{-1}k_0A, \\ x &= 4\beta k_0(X-UT), \\ t &= 2\beta^2w_0T, \\ k &= \frac{1}{4}(\alpha/\beta)^2, \end{aligned} \quad (III.11)$$

obtemos (I.6), onde α e β são, respectivamente, medidas da não linearidade e da modulação, e são implicitamente pequenas na derivação de (III.10).

Um feixe de luz estacionário plano em um meio com índice de refração não linear é descrito pela equação (17)

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 \frac{\delta n}{n_0} |E|^2 E \quad (III.12)$$

Aqui E é o envolvente complexo do campo elétrico, considerando que o índice de refração seja dado pela fórmula

$$n = n_0 + \delta n_{nl} |E|^2 \quad (III.13)$$

A mesma equação, expressa em termos de variáveis convenientes, pode ser usada para descrever um feixe de onda plana em meio não linear.

Uma equação similar (17),

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + w'_k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} w''_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = q |\psi|^2 \psi \quad (III.14)$$

também vale para a amplitude complexa ψ de uma onda unidimensional quase monocromática, em um meio com dispersão e não linearidade, e sem inércia. Em (III.14), w_k está relacionada com a dispersão da onda e $q|\psi|^2$ é a correção não linear para a frequência da onda com amplitude ψ .

Para o caso de (I.6), $K > 0$ implica em que $\delta n_{nl} > 0$ em (III.12). Sob estas condições a equação (III.12) descreve um auto-focado bidimensional estacionário e também a onda monocromática plana associada vindo da instabilidade transversa.

Em (III.14), $K > 0$ implica em $q w''_k < 0$, que, quando satisfeito, produz no meio não linear uma instabilidade longitudinal da onda monocromática-auto-modulada.

Por conveniência vamos estudar o modelo NLS na forma padronizada (III.5) que fica em acordo com o trabalho de D.J. Kaup⁽⁵⁶⁾, o primeiro que conseguiu quantizar o modelo NLS na versão completa de segunda quantização, em 1975.

D.J. Kaup usou o seguinte Hamiltoniano quântico:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon^2 (\phi^* \phi \phi^* \phi) \right] dx, \quad (\text{III.15})$$

o qual não forneceu o espectro de energia encontrado por McGuire (80). Sabe-se hoje que os dois resultados diferiram devido ao ordenamento incorreto dos ϕ e ϕ^* na (III.15); segundo este H, a energia do estado ligado seria proporcional a $(N + 1/2)^3$ e não $N(N^2 - 1)$ conforme a (II.39).

Thacker e Wilkinson (60) em 1979 usando o Hamiltoniano com ordenamento correto de ϕ e ϕ^* ,

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \epsilon^2 (\phi^* \phi^* \phi \phi) \right] dx \quad (\text{III.16})$$

obtiveram resultados corretos. Nesse caso as variáveis obedecem à relação de comutação

$$[\phi(x, t), \phi^*(y, t)] = \delta(x - y) \quad (\text{III.17})$$

em todas as ordens de \hbar .

Em geral os modelos são construídos com simetrias e com o princípio de invariância de Galileu ou o de Lorentz, e qualquer modelo dinâmico que satisfaz a esses requisitos é considerado legítimo. No modelo com sólitons, além desses requisitos, há uma equação geral que governa todo o sistema tal como a equação (III.5), e há um grande interesse na versão quantizada.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modo de quantização. Por isso, selecionamos um setor de soluções dois sólitons clássicos para construir estados de espalhamentos através

de variáveis coletivas. B.Yoon e J.N.Negele⁽⁴¹⁾ estudaram este problema no contexto de TDH e observaram que a equação de TDH leva à equação clássica de espalhamento entre sólitons. Calcularam a matriz S total do espalhamento de agregado N-corpos com N-corpos e mostraram que no limite de $N \rightarrow \infty$ esta matriz S recupera o "time delay" clássico na ordem de $1/N$.

Nosso trabalho consiste em estudar a colisão de dois sólitons através do potencial coletivo. Partimos do "time delay" dependente em energia, e obtivemos o potencial local efetivo que reproduz o comportamento de espalhamento de dois sólitons. Assim, sob o ponto de vista clássico, o processo de espalhamento é inteiramente representado por este potencial efetivo. É interessante então investigar se este potencial efetivo reflete também o aspecto quântico do processo. Para estudar este problema, deduzimos as amplitudes de transmissão e reflexão e comparamos esta amplitude S coletiva com a amplitude S de $2N$ -bósons. Verificamos a consistência dos "time delays" quando $N \rightarrow \infty$ nas quatro descrições do mesmo sistema. A requantização do sistema tem por objetivo buscar as discrepâncias dessa descrição e a exata, e também obter as informações inacessíveis no nível de mecânica newtoniana. Assim, através do polo da matriz-S reencontramos a energia de ligação do sistema.

III.2 - DINÂMICA DO SISTEMA COM SÓLITONS

a) Solução Dois-Sólitons e Obtenção da Expressão de Avanço no Tempo

Determinemos a forma analítica de avanço no tempo pre

veniente da interação não linear sóliton-sóliton com os mesmos perfis, $\eta_1 = \eta_2$, e velocidades opostas, $\xi_1 = -\xi_2$. Para encontrar a expressão de avanço no tempo precisaremos da solução dois-sólitons. Esta solução explícita e detalhada da eq. NLS(III.5) já foi obtida pelo método F.S.T. no Capítulo I em referencial de centro de massa. No instante $t \rightarrow 0$ fica com a forma

$$\begin{aligned} \phi(x,t) = & \frac{4\hbar\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp\left[-\frac{2i\hbar}{m}(\xi^2 - \eta^2)t\right] \left\{ \exp(-2i\xi x + i\bar{x}_{01}) \left[\exp(-2\eta(x-x_{01} + \frac{2\hbar\xi}{m}t)) - \frac{\xi^2}{(\eta-i\xi)^2} \exp(-4\eta(x-x_{02} - \frac{4\hbar\xi}{m}t)) \right] + \exp(+2i\xi x + i\bar{x}_{02}) \right. \\ & \left. \left[\exp(-2\eta(x-x_{02} - \frac{2\hbar\xi}{m}t)) - \frac{\xi^2}{(\eta+i\xi)^2} \exp(-4\eta(x-x_{01} + \frac{4\hbar\xi}{m}t)) \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 + \exp(-4\eta(x-x_{01}) - \frac{8\eta\xi}{m}t) + \exp(-4\eta(x-x_{02}) - \frac{8\eta\xi}{m}t) - \right. \\ & - 2\eta^2 \exp(-4\eta(x-x_{01}-x_{02})) \left[\frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \cos(4\xi x + \bar{x}_{01} - \bar{x}_{02}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \sin(4\xi x + \bar{x}_{01} - \bar{x}_{02}) \right] + \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \exp(-4\eta(2x-x_{01}-x_{02})) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (III.18)$$

As equações cinemáticas são dadas pelos argumentos de cada envoltório-sóliton. Antes da colisão, de acordo com (I.48) e (I.50), temos

$$x_1 = x_{01} - vt, \quad (III.19)$$

$$x_2 = x_{02} + vt - \frac{1}{2\eta} \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \right), \quad (III.20)$$

e as equações horárias após colisão de (I.52) e (I.54) ficam

$$x_1 = x_{01} - vt - \frac{1}{2\eta} \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \right) , \quad (\text{III.21})$$

$$x_2 = x_{02} + vt ; \quad (\text{III.22})$$

então, de (III.19) e (III.21) ou (III.20) e (III.22) e com $v = -\frac{2\hbar\xi}{m}$, a expressão de avanço no tempo dos sólitons fica

$$\Delta t = -\frac{m}{4\hbar\xi\eta} \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \right) . \quad (\text{III.23})$$

Graças à invariância de Galileu da teoria em questão, o avanço no tempo Δt será o mesmo em qualquer referencial.

b) Interpretação Física e Utilidade das Três Primeiras das Infinitas Leis de Conservação.

As três primeiras das infinitas leis de conservação que aparecem no modelo da equação NLS e que tem interpretação física imediata são o número de partículas N , o momento total P e a energia total E dados respectivamente por (I.59) já com a forma dimensionada,

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^* \phi , \quad (\text{III.24})$$

$$P = -\frac{1}{2} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\phi^* \cdot \frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{\partial}{\partial x} \phi^* \cdot \phi \right) , \quad (\text{III.25})$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \phi^* \cdot \frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{1}{2} \epsilon^2 (\phi^* \phi)^2 \right] \quad (III.26)$$

Para o setor sólitons temos de acordo com (I.62) que

$$N = \frac{2\hbar^2}{m\epsilon^2} \left[i \sum_{j=1}^J (\zeta_j^* - \zeta_j) \right] \quad (III.27)$$

$$P = \frac{2\hbar^2}{m\epsilon^2} \left[-i \sum_{j=1}^N (\zeta_j^{*2} - \zeta_j^2) \right] \quad (III.28)$$

$$E = \frac{4\hbar^2}{m\epsilon^2} \left[\frac{i}{3} \sum_{j=1}^N (\zeta_j^* - \zeta_j) \right] \quad (III.29)$$

sendo J o número de sólitons do sistema considerado e $\zeta = \xi + i\eta$.

Na solução da equação NLS geral existe a parte da solução radiação. Não incluímo-la porque estamos interessados no comportamento tipo partículas apresentado pelo setor de solução sólitons.

Para $J = 1$, que corresponde ao caso de onda solitária ou um-sóliton, temos

$$N = \frac{4\hbar^2 \eta}{m\epsilon^2} \quad (III.30)$$

$$P = \frac{8\xi\eta\hbar^3}{m\epsilon^2} \quad (III.31)$$

$$E = \frac{8\hbar^4 \eta}{m^2 \epsilon^2} \left(\xi^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) \quad (III.32)$$

Usando as relações (III.30) e (III.31), a relação (III.32) pode ser escrita na forma bem familiar

$$E = \frac{p^2}{2mN} - \eta \frac{\epsilon^2 N^2}{6} \quad (III.33)$$

Usando as relações (III.3) e $v = -2\hbar\xi/m$, a relação (III.31) po-

de ser escrita também na forma

$$P = -mNv \quad , \quad (III.34)$$

onde m é a massa de cada partícula constituinte do sóliton. Naturalmente temos que

$$M = Nm \quad , \quad (III.35)$$

onde M é a massa do sóliton.

O termo $\eta \frac{\epsilon^2 N}{6}$ na relação (III.33) é a energia de ligação das N partículas (ou energia interna de N partículas) que formam o sóliton.

O movimento de translação de um sóliton é possível se, e somente se

$$\eta \frac{\epsilon^2 N^2}{6} \ll \frac{P^2}{2M} \quad . \quad (III.36)$$

Para o caso de um sistema NLS com solução dois-sólitons, $J = 2$, temos

$$N_2 = \frac{4\hbar^2}{m\epsilon^2} (\eta_1 + \eta_2) \quad , \quad (III.37)$$

$$P_2 = \frac{8\hbar^3}{m\epsilon^2} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) \quad , \quad (III.38)$$

$$E_2 = \frac{8\hbar^4}{m^2 \epsilon^2} \left[(\eta_1 \xi_1^2 - \frac{\eta_1^3}{3}) + (\eta_2 \xi_2^2 - \frac{\eta_2^3}{3}) \right] \quad . \quad (III.39)$$

Se fizermos

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta \quad , \quad (III.40)$$

teremos um sistema de dois sólitons de mesmo tamanho.

Se fizermos

$$-\xi_1 = \xi_2 = \xi \quad (\text{III.41})$$

teremos um sistema de dois sólitons caminhando em sentidos opostos. Assim, as leis de conservação (III.37), (III.38) e (III.39) ficam respectivamente

$$N_2 = 2 \left(\frac{4\hbar^2 \eta}{m\epsilon} \right) = 2N \quad , \quad (\text{III.42})$$

$$P_2 = 0 \quad , \quad (\text{III.43})$$

$$E_2 = 2 \left(\frac{P^2}{2M} - \eta \frac{\epsilon^2 N^2}{6} \right) \quad . \quad (\text{III.44})$$

Estas quantidades físicas foram deduzidas no referencial de centro de massa e serão necessárias para o estudo da interação não linear de dois sólitons. As expressões que aparecem nas leis de conservação definem as variáveis coletivas, tais como M , P , $P^2/2M$, etc. Elas serão usadas na descrição de sistema via mecânica newtoniana de duas partículas puntiformes coletivas.

III.3 - DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA CLÁSSICA DA INTERAÇÃO SÓLITON-SÓLITON - POTENCIAL COLETIVO

Vamos observar a colisão de dois sólitons supondo seu referencial suficientemente afastado, de modo que os sólitons poderão ser considerados partículas puntiformes (ou observar somente o centro de massa de cada sóliton). Assim, somente o tratamen-

to Newtoniano é necessário desde que usemos as variáveis coletivas deste sistema. Quando observarmos este ponto material suficientemente de perto, veremos que é uma matéria condensada composta de N partículas idênticas bosônicas distribuída segundo a densidade.

$$\rho(x,t) = \frac{4\hbar^2 \eta^2}{\epsilon^2 m} \operatorname{sech}^2 \left(2\eta \left(x - x_0 + \frac{2\hbar\xi}{m} t \right) \right). \quad (\text{III.45})$$

Observaremos que esses sólitons são objetos que possuem uma estrutura de distribuição das partículas no espaço-tempo bem definido. Eles mantêm invariantes as suas formas tanto antes como depois de colisão. Como consequência natural dessa invariância na forma, a densidade, a energia cinética, a velocidade, etc. se mantêm também invariantes.

Mostraremos como procurar um potencial coletivo que simule exatamente a interação destes agregados de N partículas. Vamos procurar este potencial através da colisão destes dois corpos e resolvendo o problema inverso, isto é, conhecendo os dados assintóticos tal como a energia cinética total após a colisão, que é igual à energia total do sistema, e deduzir a partir daí o potencial por inspeccionamento. Será usado o princípio da conservação da energia total do sistema mecânico e postulada a existência deste potencial, baseado no efeito de "time delay". Este potencial coletivo dependerá apenas da distância relativa do centro de massa de cada sóliton, isto é, $V = V(|x_2 - x_1|)$. Resolveremos o problema em coordenada relativa, pois é a descrição nesta coordenada que permite a obtenção de um potencial efetivo. Obviamente, se a observação fosse em referencial centro de massa do sistema de dois sólitons observaríamos efeito puramen-

mente cinético.

Como estamos lidando com objetos denominados sólitons (idênticos e com a condição de que $-\xi_1 = \xi_2 = \xi$), a energia cinética de cada sóliton é a mesma tanto antes como depois da colisão. Então, pelo teorema de trabalho-energia da mecânica clássica, podemos conjecturar que o potencial é uma função simétrica em x decorrendo do fato da variação de energia cinética ser nula

$$\Delta E_{\text{cin}} = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (\text{III.46})$$

e que o potencial é de natureza efetiva.

A energia total do sistema em referencial do centro de massa de dois sólitons é dada por:

$$E_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = Mv^2 = \frac{P^2}{M} \quad , \quad (\text{III.47})$$

pois $v_1 = -v_2$ e $M_1 = M_2 = M$ que está de acordo com a relação de energia do campo (III.44), isto é,

$$E = 2 \left(\frac{8h^2 \eta}{m \epsilon^2} \left(\xi^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) \right] = 2 \left(\frac{P^2}{2mN} - \eta \frac{N^2 E^2}{6} \right) \quad , \quad (\text{III.48})$$

onde em (III.47) já foi exaurido o termo $\frac{N^2 \epsilon^2}{6}$, pois esta constante é a energia interna de cada sóliton (energia química).

Neste sistema particular de dois sólitons, podemos observar que a energia total no referencial de centro de massa ($x_{\text{CM}} = (x_1 + x_2)/2$) coincide com a energia total no referencial relativo ($x_{\text{rel}} = x_2 - x_1$), isto é,

$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2 \quad , \quad (\text{III.49})$$

onde $\mu = \frac{M}{2}$ e $v_{rel} = 2v$, logo, $E_{rel} \equiv E_{CM}$.

Para obter o potencial coletivo, primeiramente vamos supor que os sólitons não interagem em momento algum do seu percurso; então valeria sempre

$$2P^2/mN = E_{rel} \quad (III.50)$$

Mas, pelo efeito de "time delay", sabemos que os sólitons interagem no seu percurso; então, de acordo com o nosso postulado,

$$2P^2/mN + V(|x_2 - x_1|) = E_{rel} \quad (III.51)$$

Agora, escrevamos estas duas equações nas formas de integrais, assim explicitamos o efeito de "time delay":

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \int_{-x'}^{x'} \sqrt{\frac{mN'}{4E}} dx = \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} dt \quad (III.52)$$

e

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \int_{-x'}^{x'} \sqrt{\frac{mN'}{4(E-V)}} dx = \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'+\Delta t} dt \quad (III.53)$$

Escrevamos este par de equações numa única equação. Para isso basta subtrair (III.53) de (III.52), isto é,

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{mN'}{E}} - \sqrt{\frac{mN'}{E-V}} \right) dx = -\Delta t \quad (III.54)$$

Aqui, Δt (o "time delay" da partícula é considerado o mesmo que aquele dado pela relação (III.23), "time delay" de campo não linear). Substituindo-o, temos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-V/E}} \right) dx = \sqrt{\frac{4E}{mN(v_{rel}\eta)^2}} \ln\left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2}\right) \quad (III.55)$$

Sabemos que $\xi^2 = \frac{m^2 v^2}{4\hbar^2}$ e $v^2 = \frac{2E}{mN}$, onde E é a energia da partícula livre. Então, $E_{rel} = 2E_{livre}$ e usando a relação de número de partículas (III.30), $N = \frac{4\hbar^2 \eta}{mc^2}$, na sua função logarítmica e a relação (III.49) no radicando, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-V/E}}\right) d(\eta x) = \ln \left(1 + \eta \frac{N^2 \epsilon^2}{E}\right) \quad (III.57)$$

Escrevamos, agora, cada membro da equação (III.57) numa identidade polinomial, isto é, vamos expandir em série de potências de $1/E$ obtendo um polinômio de grau infinito em $1/E$. Assim, esta equação (III.57) é totalmente equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!! E^n} \int_{-\infty}^{\infty} (V)^n d(\eta x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\eta \frac{N^2 \epsilon^2}{E}\right)^n \quad (III.58)$$

Como sabemos da álgebra elementar, as potências $1/E$, $1/E^2, \dots, 1/E^n, \dots$, formam bases linearmente independentes, portanto, teremos infinitas equações enumeráveis e independentes. Elas são as infinitas condições sobre as quais o potencial está submetido, e são dadas por

$$\int_{-\infty}^{\infty} (V)^n d(\eta x) = \frac{(-1)^n (2n)!!}{(2n-1)!! n} \left(\eta N^2 \epsilon^2\right)^n \quad (III.59)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Isto mostra que o potencial procurado pode ser único e suave, pois, tem que satisfazer a todas essas infinitas condições. Escrevendo mais convenientemente, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{\eta N^2 \epsilon^2} V\right)^n d\left(\frac{\eta x}{2}\right) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad (III.60)$$

Por tentativa e erro podemos determinar uma função integrando $f(x)$ com qualquer limite de integração de modo que gere o segundo membro, por exemplo

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{|x| \sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad (\text{III.61})$$

e com mudanças convenientes podemos determinar $V(x)$. Um outro exemplo seria

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.62})$$

Fazendo $n = n'-1$, temos

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{n'}}{1-x^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{(2n'-2)!!}{(2n'-1)!!} \quad (\text{III.63})$$

Com a mudança de variável $x = \text{th } \theta$ obteremos uma única função integrando $V(x)$ que satisfaz a todas essas infinitas condições no intervalo $-\infty$ a $+\infty$ dada em (III.59). O potencial efetivo é, então

$$V(\eta x) = -\eta N^2 \varepsilon^2 / \cosh^2(\eta x) \quad (\text{III.64})$$

Este é o potencial procurado. É uma expressão analítica do potencial coletivo, obtida usando informações assintóticas. Ele foi procurado para substituir as interações de todas as $2N$ partículas. Como observamos anteriormente, ele é um potencial simétrico. É um potencial atrativo devido ao efeito de avanço no tempo.

Adendos Explanativos:

- 1) Esta descrição coletiva deve funcionar corretamente para $N \rightarrow \infty$ porque permite em princípio recuperar os sólitons do sistema através de quatro equações vinculadas a este sistema, tais como: número de partículas \dot{N} , momentum total P , energia total E e memória total do sistema, dada pela relação (III.23) do avanço no tempo.
- 2) Especula-se que podemos generalizar este esquema para N -sólitons, isto é, se tivermos três-sólitons teremos que considerar seis equações de conservação, quatro-sólitons, oito equações ... e assim por diante.
- 3) A utilização da mecânica clássica vem da idéia coletiva contida no sistema solitônico que nada mais é que uma mudança de enfoque, isto é, observar o fenômeno somente nos aspectos de propriedades macroscópica e assintótica via variáveis coletivas. Assim, o dado utilizado Δt é mensurável em condição assintótica. Nesse enfoque nada é perdido, nem criado artificialmente, apenas mudamos a maneira de focar - de um tamanho definido a um ponto material, considerando a região de interação de dois sólitons clássicos como se fosse uma caixa preta. Devido à memória total do sistema, preservado pela quantidade Δt , torna-se possível descobrir que existe força atrativa na interação sóliton-sóliton. Este tipo de força é conhecido na literatura pelo nome de potencial de Pöschl-Teller modificado ⁽⁸⁹⁾.

4) A solução (III.64) deve ser única porque temos infinitas condições a serem satisfeitas pela equação (III.60) e estamos usando informação global do sistema, tais como energia, "time delay", etc. Ainda mais, por tratar-se de uma descrição vinda da média (efetiva) e deduzidas usando condições assintóticas. Assim a função $V(x)$, não deve oscilar, portanto, deve ser simétrico e não oscilante, admitindo só um extremo (mínimo).

5) É conhecido o método de obtenção de potencial na mecânica clássica quando temos um sistema periódico, em outras palavras, num sistema periódico podemos resolver o problema inverso (ver, por exemplo, o livro da mecânica clássica de Landau)⁽⁹⁰⁾. Para sistema de espalhamento não existe ainda nenhum método analítico que se destine à obtenção do potencial, embora em nível quântico exista, conhecido pelo nome de método de transformação de espalhamento inverso⁽⁹¹⁾ e também o método do pseudopotencial⁽⁹²⁾.

Portanto, o caminho natural seria primeiro resolver o problema inverso quântico de dois corpos coletivos em coordenada relativa para um dado Δt e mais a aproximação de fase estacionária, e então construir a mecânica clássica. Surge um problema insolúvel pois não sabemos como obter as amplitudes de reflexão e de transmissão. Somente sabemos a sua soma, isto é, $S = T+R$ obtida do problema de $2N$ -corpos. Assim como no caso clássico, não há método para obter o potencial coletivo.

III.4 - DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA QUÂNTICA DA INTERAÇÃO SÓLITON-SÓLITON - MATRIZ S COLETIVA

Neste capítulo vamos examinar o efeito do potencial co-

letivo quanticamente. Vamos deduzir a matriz-S proveniente do espalhamento dado pelo potencial coletivo conhecido na literatura pelo nome de potencial de Pöschl-Teller modificado (89); em um caso particular é também conhecido pelo nome de potencial de Bargmann (93). Este tipo de potencial foi bem estudado na literatura e encontra-se resolvido até em livros de mecânica quântica de textos didáticos (89,94,95). Recentemente tem sido estudado sob vários aspectos por ser importante na teoria dos sólitons (96,97). Tem aparecido para resolução pelo método de espalhamento inverso da equação não linear tipo K-dV. Foi obtido também pelo método de Hartree dependente do tempo em teoria de sóliton, funcionando como potencial médio de muitos corpos (41). Tem aparecido em sistema geral com simetria Z_4 (70), onde uma das realizações é o sistema de Calogero, e agora como uma novidade surge também em teoria de sólitons no contexto deste trabalho.

Vamos mostrar como se resolve a equação de Schrödinger em coordenada relativa com o potencial atrativo coletivo considerado e deduzir a sua matriz-S.

A equação de Schrödinger é dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{V_0}{\cosh^2 \eta x} \right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (\text{III.65})$$

onde $V_0 = \eta N^2 \epsilon^2$ e $\mu = \frac{M}{2}$.

Transformando as variáveis em

$$\xi = \tanh(\eta x) \quad , \quad (\text{III.66})$$

$$\epsilon = -i \sqrt{\frac{ME}{\hbar^2 \eta^2}} \quad , \quad (\text{III.67})$$

$$s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4MV_0}{\hbar^2 \eta^2}} - 1 \right) \quad , \quad (\text{III.68})$$

a equação (III.65) se transforma em

$$\frac{d}{d\xi} (1-\xi^2) \frac{d\phi}{d\xi} + \left\{ s(s+1) - \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \right\} \phi = 0 \quad (III.69)$$

Utilizando

$$\phi(x) = (1-\xi^2)^{\nu} \omega(\xi) \quad , \quad \nu = \varepsilon/2 \quad (III.70)$$

a equação (III.69) reduz-se à forma

$$(1-\xi^2) \frac{d^2\omega}{d\xi^2} - 2\xi(2\nu+1) \frac{d\omega}{d\xi} + (s-\xi)(s+\varepsilon+1)\omega = 0 \quad (III.71)$$

a qual é transformada para a forma "standard" da equação diferencial hipergeométrica,

$$u(1-u) \frac{d^2\omega}{du^2} + \{ \gamma - (\alpha+\beta+1)u \} \frac{d\omega}{du} - \alpha\beta\omega = 0 \quad (III.72)$$

onde as variáveis estão relacionadas por

$$u = (1-\xi)/2 \quad (III.73)$$

$$\alpha = \varepsilon - s \quad (III.74)$$

$$\beta = \varepsilon + s + 1 \quad (III.75)$$

e

$$\gamma = \varepsilon + 1 \quad (III.76)$$

Assim, a solução da equação (III.65) pode ser expressa completamente pela função hipergeométrica. A solução de onda geral é dada por

$$\phi = (1-\xi)^{\nu} F(\alpha, \beta, \gamma; (1-\xi)/2) \quad (III.77)$$

Esta solução pode ser chamada de dois sólitons puntiformes quânticos (na coordenada relativa). Quando $|x| \rightarrow \infty$, a solução (III.77) tem os seguintes comportamentos assintóticos:

$$\phi \sim (4)^{\nu} e^{-2\eta\nu x} \quad , \quad x \rightarrow +\infty \quad ; \quad (\text{III.78})$$

$$\phi \sim (4)^{\nu} \left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-2\eta\nu x} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{2\eta\nu x} \right] \quad , \quad (\text{III.79})$$

$$x \rightarrow -\infty \quad ,$$

onde foi usada a fórmula de conexão das funções hipergeométricas (98)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-u) +$$

$$+ (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-u)$$

$$(\text{III.80})$$

e Γ refere-se à função gama. Donde os coeficientes de reflexão R e de transmissão T são dados por

$$R = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \quad (\text{III.81})$$

e

$$T = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \quad (\text{III.82})$$

Por conveniência de cálculo, vamos introduzir uma função S definida por

$$S \equiv \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(1-\alpha)} \quad (\text{III.83})$$

ou equivalentemente

$$S \equiv \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(\epsilon+S+1)}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon+S)} \quad (III.84)$$

Reescrevendo em termos de parâmetros macroscópicos, a função S fica

$$S = \frac{\Gamma\left(i\sqrt{\frac{ME}{\hbar^2\eta^2}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4MV_0}{\hbar^2\eta^2}} - i\sqrt{\frac{ME}{\hbar^2\eta^2}}\right)}{\Gamma\left(-i\sqrt{\frac{ME}{\hbar^2\eta^2}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4MV_0}{\hbar^2\eta^2}} + i\sqrt{\frac{ME}{\hbar^2\eta^2}}\right)} \quad (III.85)$$

O conjunto de parâmetros macroscópicos $\{M, \eta, V_0\}$ e microscópico $\{m, N, e^2\}$ estão relacionados por

$$mN = M \quad (III.86)$$

$$mNe^2 = 4\hbar^2\eta \quad (III.87)$$

$$N^2e^2 = -\frac{V_0}{\eta} \quad (III.88)$$

então a função S escrita em termos de parâmetros macroscópicos pode também ser escrita em termos de parâmetros microscópicos. Escrevêmo-la por conveniência futura. Para isto devemos efetuar as seguintes transformações nos argumentos da função gama:

$$\frac{ME}{\hbar^2\eta^2} = \frac{16\hbar^2 E}{mN\epsilon^4} \quad (III.89)$$

e

$$\frac{MV_0}{\hbar^2\eta^2} = -4N^2 \quad (III.90)$$

Assim, a função S escrita em parâmetros microscópicos fica

$$S = \frac{\Gamma(4i\sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon}}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 4i\sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon}})}{\Gamma(-4i\sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon}}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 4i\sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon}})} \quad (III.91)$$

Agora calculemos uma função ou matriz S coletiva, oriunda de $S_{col} = T+R$; usamos as relações (III.74), (III.75) e (III.76), então T e R ficam

$$T = \frac{\Gamma(\epsilon-s)\Gamma(\epsilon+s+1)}{\Gamma(\epsilon+1)\Gamma(\epsilon)} \quad (III.92)$$

e

$$R = \frac{\Gamma(\epsilon-s)\Gamma(\epsilon+s+1)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(s+1)\Gamma(-s)\Gamma(\epsilon)} \quad (III.93)$$

Logo S_{col} fica

$$S_{col} = \frac{\Gamma(\epsilon-s)\Gamma(\epsilon+s+1)}{\Gamma(\epsilon)} \left[\frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(\epsilon)+\Gamma(s-1)\Gamma(-s)}{\Gamma(s+1)\Gamma(-s)} \right], \quad (III.94)$$

onde usamos várias vezes a identidade ⁽⁹⁹⁾ (III.95) e as fórmulas trigonométricas (III.96):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad (III.95)$$

$$\sin A + \sin B = 2 \frac{\sin(A+B)}{2} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right). \quad (III.96)$$

Relembrando as relações (III.67) e (III.68), e por conveniência, usando as relações trigonométricas

$$\sin \frac{\pi}{2} (s+\epsilon) = -\cos \frac{\pi}{2} (s+\epsilon+1), \quad (III.97)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} (s-\epsilon) = -\cos \frac{\pi}{2} (s-\epsilon+1), \quad (III.98)$$

temos finalmente

$$S_{\text{col}} = S \frac{\cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} - 2i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right)}{\cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} + 2i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right)} \quad (\text{III.99})$$

ou

$$S_{\text{col}} = \frac{\Gamma \left(4i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 4i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right) \cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} - 2i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right)}{\Gamma \left(-4i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 4i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right) \cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} + 2i \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}} \right)} \quad (\text{III.100})$$

Esta é a matriz S coletiva calculada quando temos um espalhamento dado pela presença do potencial envelope sólito-envelope sólito (III.64). Usamos parâmetros de origem microscópico neste cálculo da matriz S coletiva porque iremos compará-la com a matriz S de origem totalmente microscópica. Não esqueçamos que ela foi deduzida com efeito totalmente microscópico. Seguindo o livro de Flügger ⁽⁸⁹⁾, "Practical Quantum Mechanics", encontraremos obviamente o mesmo resultado (III.100).

CAPÍTULO IV

COMPARAÇÕES E DISCUSSÕES

IV.1 - VERIFICAÇÃO DA CONSISTÊNCIA DAS QUATRO DESCRIÇÕES VIA "TIME DELAY"

Vamos verificar a consistência do esquema semi-fenomenológico de quantização. Assim, a matriz S do sistema macroscópico deve produzir o mesmo "time delay" que o mesmo sistema microscópico, pelo menos em alguma ordem $\frac{1}{N}$. Isto porque estamos examinando o mesmo sistema em versões distintas. Ademais, a expressão "time delay" funciona como uma memória total do sistema, conservando os parâmetros que o caracterizam em todas as interações ocorridas.

Primeiramente vamos deduzir a relação de "time delay" e "phase shift", qual seja

$$\Delta t = \hbar \frac{\partial}{\partial E} (2\delta_E) \quad (IV.1)$$

Consideremos a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V\psi = 0 \quad (IV.2)$$

A solução formal desta equação (IV.2) é

$$\psi(x,t) = U(t,t_0)\psi(t_0,x) \quad (IV.3)$$

e a matriz S é definida segundo

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (\text{IV.4})$$

Para $t_0 \rightarrow -\infty$ podemos expressar $\psi(t_0, x)$ como um pacote livre,

$$\psi(t_0, x) = \int A(E) e^{-\frac{iEt}{\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}} dE \quad (\text{IV.5})$$

Quando a aproximação de fase estacionária é válida, temos um pacote caminhante de acordo com a relação

$$\delta \left[\frac{\hbar}{i} \ln A(E) - E\bar{t} + p\bar{x} \right] = 0 \quad (\text{IV.6})$$

ou

$$\bar{x} = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right) \bar{t} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \ln A(E) \quad (\text{IV.7})$$

Agora a equação (IV.5) representa para $\bar{t} \rightarrow \infty$ um pacote correspondente a uma partícula livre,

$$\bar{x} = v\bar{t} - \delta_0 \quad (\text{IV.8})$$

e

$$\delta_0 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \ln A(E) \quad (\text{IV.9})$$

Substituindo a equação (IV.5) na definição (IV.3), e tomando o limite assintótico, temos

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \int A(E) S_E e^{-\frac{iEt}{\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}} dE \\ &= \int A(E) e^{2i\delta_E} e^{-\frac{iEt}{\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}} dE \quad (\text{IV.10}) \end{aligned}$$

Usando a aproximação de fase estacionária, temos um pacote para

$t \rightarrow \infty$ cuja trajetória é dada por

$$\delta \left[\frac{\hbar}{i} \ln A(E) + 2\hbar\delta_E - E\bar{t} + p\bar{x} \right] = 0 \quad (\text{IV.11})$$

ou

$$\bar{x} = \frac{\partial E}{\partial p} \bar{t} - \hbar \frac{\partial}{\partial p} (2\delta_E) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \ln A(E) \quad (\text{IV.12})$$

Comparando as equações (IV.7) e (IV.12), isto é, a passagem de $t_0 \rightarrow -\infty$ para $t \rightarrow +\infty$, concluímos que existe um retardamento no movimento do pacote, dado por

$$\Delta t = \frac{1}{\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)} \hbar \frac{\partial}{\partial p} (2\delta_E)$$

ou

$$\Delta t = \hbar \frac{\partial}{\partial E} (2\delta_E) \quad (\text{IV.13})$$

Para o caso simetrizado, o pacote inicial $t_0 \rightarrow -\infty$ toma a forma

$$\frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{iEt}{\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}} + e^{-\frac{iEt}{\hbar} - \frac{ipx}{\hbar}} \right\} \quad (\text{IV.14})$$

a) Consistência entre a Descrição da Teoria Clássica e a da Teoria de 2N Corpos

Vejamos agora, para conferir, que a matriz S obtida pela técnica de fatoração reproduz o avanço no tempo (III.23), obtido pelo espalhamento de dois sólitons clássicos,

$$\Delta t = - \frac{m}{4\hbar\xi\eta} \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \right) \quad (\text{III.23})$$

A matriz S é dada pela expressão (II.129):

$$S = \frac{ia-N}{ia+N} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{ia-j}{ia+j} \right)^2 \quad (\text{II.129})$$

com

$$a = 2 \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{mN\epsilon^4}}$$

dimensionado. Para o caso em que $N \gg 1$, temos:

$$S \cong (-1) \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{ia-j}{ia+j} \right)^2. \quad (\text{IV.15})$$

O cálculo da fase fica

$$2\delta_E = \frac{1}{i} \ln S = \frac{1}{i} \left\{ \ln(-1) + \sum_{j=1}^{N-1} 2[\ln(ia-j) - \ln(ia+j)] \right\},$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial E} (2\delta) = -2 \frac{\partial a}{\partial E} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2j}{j^2 + a^2} \quad (\text{IV.16})$$

com

$$\frac{\partial a}{\partial E} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{mN\epsilon^4 E}}. \quad (\text{IV.17})$$

Consideramos o problema na seguinte situação:

$$mN = M = \text{constante},$$

$$N \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{tal que} \quad 1 \ll N^2 \ll a^2;$$

então (IV.16) fica

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j^2 + a^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j/N}{(j/N)^2 + (a/N)^2}, \quad (\text{IV.18})$$

e fazendo

$$1/N = dx \quad \text{e} \quad j/N = x,$$

fica

$$\sum_{j=1}^N \frac{j}{j^2 + a^2} \cong \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + \left(\frac{a}{N}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \left(\frac{a}{N}\right)^2}{\left(\frac{a}{N}\right)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{N}{a}\right)^2 \right) .$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial E} (2\delta_E) \cong -2 \frac{\partial a}{\partial E} \ln \left(1 + \left(\frac{N}{a}\right)^2 \right) . \quad (\text{IV.19})$$

Substituindo (IV.14), (IV.32), o número de partículas (III.30), e a energia cinética total do sistema (III.32), obtemos o "time delay" idêntico ao obtido na colisão sóliton-sóliton clássico, isto é,

$$\Delta t = \hbar \frac{\partial (2\delta_E)}{\partial E} \cong - \frac{m}{4n\xi\hbar} \ln \left(1 + \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 \right) . \quad (\text{III.23})$$

Assim, acabamos de mostrar a consistência entre a descrição da teoria clássica e a da teoria de 2N corpos para $O(1/N)$.

Podemos também verificar (III.23) através da expressão (II.141)

$$S_{2N} = \frac{ia-N}{ia+N} \left(\frac{\Gamma(N-ia)\Gamma(ia)}{\Gamma(-ia)\Gamma(N+ia)} \right)^2 \quad (\text{II.141})$$

Então,

$$\Delta t = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial E} \ln S_{2N}$$

$$= - \hbar \left\{ \frac{2N}{N+a} + 4[\text{Re}\psi(ia) + \text{Re}\psi(N-ia)] \right\} \frac{\partial a}{\partial E}$$

$$= - \hbar \sqrt{\frac{\hbar^2}{mN\epsilon^4 E}} \left[\frac{2N}{N+a} + 4\text{Re}\{\ln(N-ia) - \frac{1}{2(N-ia)} + O\left(\frac{1}{N-ia}\right)^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \ln(ia) + \frac{1}{2ia} + O\left(\frac{1}{ia}\right)^2 \} \\
& = - \frac{4\hbar^3}{mc} \frac{1}{aN} \left\{ \ln\left(1 + \frac{N^2}{a^2}\right) - O\left(\frac{1}{N-ia}\right)^2 - O\left(\frac{1}{a}\right)^2 \right\} \\
& \approx - \frac{m}{4\hbar n \xi} \ln\left(1 + \left(\frac{n}{\xi}\right)^2\right) \tag{IV.20}
\end{aligned}$$

que coincide com (III.23) a menos de ordens superiores $\frac{1}{N+ia}$ e $\frac{1}{a}$.

b) Consistência entre a Descrição da Teoria Clássica e a de Dois Corpos Coletivos

Vejamos agora para conferir, que o "time delay" da descrição de dois corpos coletivos quânticos reproduz o "time delay" da teoria clássica de campo não linear. Para isto usemos a matriz-S do sistema coletivo (III.100),

$$S = \frac{\Gamma(2ia)}{\Gamma(-2ia)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 2ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 2ia\right)}$$

com a dada em (IV.14) e

$$\cos\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} - ia\right) / \cos\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} + ia\right) \approx 1 ;$$

então temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{i} \ln S \right) &= 2 \frac{\partial a}{\partial E} \frac{1}{i} \left\{ i \frac{\Gamma'(2ia)}{\Gamma(2ia)} + i \frac{\Gamma'(-2ia)}{\Gamma(-2ia)} - \frac{i\Gamma'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 2ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 2ia\right)} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 2ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 2ia\right)} \right\} \tag{IV.21}
\end{aligned}$$

$$= 2 \frac{\partial a}{\partial E} \left\{ \psi(2ia) + \psi(-2ia) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} - 2ia\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+16N^2} + 2ia\right) \right\} \tag{IV.22}$$

Usando a condição de que $1 \ll N^2 \ll a^2$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{I} \ln S \right) \cong 2 \frac{\partial a}{\partial E} \{ \ln(-2ia) + \ln(2ia) - [\ln 2(N-ia) + \ln 2(N+ia)] \}, \quad (\text{IV.23})$$

a qual reproduz (IV.19),

$$\frac{\partial (2\delta_e)}{\partial E} = - 2 \frac{\partial a}{\partial E} \ln \left(1 + \left(\frac{N}{a} \right)^2 \right) . \quad (\text{IV.19})$$

Portanto, verificamos que o esquema montado para diversas descrições está em forma auto-consistente desde que tenhamos a condição de fase estacionária. Assim,

- Δt da teoria clássica de campo não linear é consistente com o do sistema de 2N corpos
- Δt da teoria clássica de campo não linear é consistente com o da mecânica clássica por construção
- Δt da teoria clássica de campo não linear é consistente com a da mecânica quântica de dois corpos coletivos.
- Δt da teoria de 2N corpos é consistente com a de dois corpos coletivos.
- Δt da teoria de dois corpos coletivos clássicos é consistente com o da teoria quântica por "extensão teórica".
- Δt da teoria de dois corpos coletivos clássicos é também consistente com o da de 2N corpos quânticos.

IV.2 - COMPARAÇÃO DA AMPLITUDE S COLETIVA À AMPLITUDE S DE 2N CORPOS

Mostramos que o procedimento macroscópico da obtenção da amplitude S coletiva é correto, pois podemos compará-la à amplitude S exata de 2N corpos. Mostremos que a S coletiva coincide para valores de N e a muito grandes.

Então, escrevamos a expressão S coletiva (III.100)

da seguinte forma:

$$S_{col} = \frac{\Gamma(2ia)\Gamma(2\lambda-2ia)\cos\pi(\lambda-ia)}{\Gamma(2ia)\Gamma(2\lambda+2ia)\cos\pi(\lambda+ia)} \quad (III.100)$$

onde fizemos

$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+16N^2} = N + \frac{1}{4} + q \quad (IV.24)$$

com

$$q = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1+16N^2} + 4N} \approx O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Para compararmos a expressão (III.100) com a (II.14) usaremos as fórmulas (100),

$$\Gamma(z+\alpha) = z^\alpha \Gamma(z) \left[1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \quad (IV.25)$$

e

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad (IV.26)$$

de modo que (III.100) pode ser reescrito na forma

$$S_{col} = \frac{\Gamma(ia)\Gamma\left(ia+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda-ia)\Gamma\left(\lambda-ia+\frac{1}{2}\right)\cos\pi(\lambda-ia)}{\Gamma(-ia)\Gamma\left(-ia+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+ia)\Gamma\left(\lambda+ia+\frac{1}{2}\right)\cos\pi(\lambda+ia)} \quad (IV.27)$$

$$= \left[\frac{\Gamma(ia)\Gamma(N-ia)}{\Gamma(-ia)\Gamma(N+ia)} \right]^2 \frac{(ia)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{8ia} + O\left(\frac{1}{ia}\right)^2 \right] (N-ia)^{1+2q}}{(-ia)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{8ia} + O\left(\frac{1}{ia}\right)^2 \right] (N+ia)^{1+2q}}$$

$$\frac{\left[1 + \frac{\left(\frac{1}{4}+q\right)\left(-\frac{3}{4}+q\right)}{2(N-ia)} + O\left(\frac{1}{N-ia}\right)^2 \right]}{\left[1 + \frac{\left(\frac{3}{4}+q\right)\left(-\frac{1}{4}+q\right)}{2(N+ia)} + O\left(\frac{1}{N+ia}\right)^2 \right]} \frac{\cos\pi(\lambda-ia)}{\cos\pi(\lambda+ia)} \quad (IV.28)$$

ou

$$S_{col} = S_{2N} \cdot \frac{[1 - \frac{1}{8ia} + O(\frac{1}{ia})^2][1 - \frac{3}{32} \frac{1}{N-ia} + O(\frac{1}{N-ia})^2]}{[1 + \frac{1}{8ia} + O(\frac{1}{ia})^2][1 - \frac{3}{32} \frac{1}{N+ia} + O(\frac{1}{N+ia})^2]} \quad (IV.29)$$

com

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} S_{col} = S_{2N} \quad (IV.30)$$

Podemos concluir que, para

$$e \left. \begin{aligned} N = \frac{4\hbar^2 \eta}{m\epsilon^2} \gg 1 \\ \frac{E}{\eta\epsilon^2} \gg \frac{N}{6} \end{aligned} \right\} \iff 1 \ll N^2 < a^2, \quad (IV.31)$$

o esquema semi-fenomenológico de quantização fornece resultados corretos.

IV.3 - REOBTENÇÃO DA ENERGIA DE LIGAÇÃO DOS 2N CORPOS VIA QUANTIZAÇÃO SEMI-FENOMENOLÓGICA

As análises das matrizes S_{col} e S_{2N} não fornecem nenhuma informação nova, apesar de estarmos lidando ao nível quântico, pois todas estas informações já foram observadas nas análises da memória total do sistema dada pelo "time delay" Δt .

Para verificar o ganho de informação de origem quântico devemos procurar polos dos estados ligados dados por S_{col} (III.100). Estes polos de estados ligados vêm dos zeros positivos de $\cos\pi(\lambda+ia)$, isto é,

$$-ia_{\ell} \pi = (\lambda - \ell - \frac{1}{2}) \pi, \quad \ell \geq 0, \text{ inteiro.} \quad (\text{IV.32})$$

No estado fundamental, $\ell = 0$, temos a seguinte energia:

$$E = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{mN\epsilon^4}{4\hbar^2} \\ \approx -\frac{m\epsilon^4 N^3}{4\hbar^2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right\}, \quad (\text{IV.33})$$

a qual pode ser comparada com o valor exato:

$$E_{2N} = -\frac{m\epsilon^4 N^3}{4\hbar^2}. \quad (\text{IV.34})$$

IV.4 - CONCLUSÕES E NOVAS PERSPECTIVAS

1) O esquema de quantização semi-fenomenológico reproduz o efeito quântico previsto a nível de estrutura, fornecendo a energia de ligação correta dos $2N$ bósons nos limites de $1 \ll N^2 \ll a^2$. Este fato e a matriz S_{col} (III.100) mostram que o esquema de quantização semi-fenomenológico reproduz com certa fidelidade o sistema exato de $2N$ -bósons. Neste esquema surge um problema devido ao tratamento unidimensional (cinemática de sóliton puntiforme) dado ao sistema com grau de liberdade infinita. Assim, via matriz S_{col} , consegue-se obter polos de muitos estados ligados, em contrapartida da exata, que tem apenas um estado ligado. Estes polos adicionais são os resultados fantasmas oriundos do processo coletivo (sóliton puntiforme). Eles aparecem essencialmente na região da energia na qual os efeitos quânticos observáveis atrá-

vés da amplitude de espalhamento são importantes.

2) Seria interessante estudar as restrições na energia para haver colisão de dois corpos quaisquer. Para o caso de s \acute{o} liton-s \acute{o} liton obtivemos a condiç \tilde{o} $1 \ll N^2 < a^2$. Esta condiç \tilde{o} é reobtida com a requantizaç \tilde{o} do sistema considerado. Assim, o esquema proposto funciona somente para altas energias, ou setor soluç \tilde{o} s \acute{o} litons. Uma maneira de obter um potencial efetivo seria através de colis \tilde{o} dos agregados de 2N-corpos, $N = 1, 2, \dots$, diretamente e obter os limites de validade deste processo.

3) N \tilde{a} o continuamos o estudo de 2N part \acute{i} culas multicoloridas, $P^{ij} \neq \pm 1$ por envolver c \acute{a} lculos tediosos. Fica em aberto o estudo dessa equaç \tilde{o} NLS multi-componentes. Fica, tamb \acute{e} m em aberto o significado f \acute{i} sico dos estados fantasmas.

REFERÊNCIAS

- (1) - A.C. Scott, F.Y.F. Chu e D.W. McLaughlin. A New Concept in Applied Science. Proc. IEEE, 61(1973)pp. 1443-1483.
- (2) - R.M. Miura (Editor). Bäcklund Transformations, The Inverse Scattering Method, Solitons and Their Applications. Editado por A. Dold e B. Eckmann, Springer-Verlag (1976).
- (3) - F. Calogero (Editor). Nonlinear Evolution Equations Solvable by Spectral Transform. π . Pitman (1978).
- (4) - G.L. Lamb Jr. Elements of Soliton Theory. John Wiley & Sons (1980).
- (5) - R.K. Bullough e P.J. Caudrey (Editores). Topics in Current Physics. SOLITONS. Springer-Verlag (1980).
- (6) - G. Eilenberger. Solitons. Mathematical Methods for Physicists. Springer-Verlag (1981).
- (7) - M.J. Ablowitz e H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM (1981).
- (8) - M. Jimbo & T. Miwa (Editores). Nonlinear Integrable Systems. Classical Theory and Quantum Theory. Proceedings of RIMS Symposium. World Scientific (1981).
- (9) - M.J. Ablowitz. Lectures on the Inverse Scattering Transform. Stud. Appl. Math. 58(1978) pp 17-94.
- (10) - R. Miwa. The Korteweg-de Vries Equation: A Survey of Results. SIAM Rev. 18(1976) pp 412-459.
- (11) - R. Rajaraman. Some Non-Perturbative Semi-Classical Methods in Quantum Field Theory (A Pedagogical Review). Phys. Rep. 21, 5 (1975) pp. 227-313.
- (12) - H.B. Thacker. Exact Integrability in Quantum Field Theory and Statistical Systems. Rev. Mod. Phys. 53, 2(1981) pp. 253-285.
- (13) - G.B. Witham. Linear and Nonlinear Waves. Wiley - Interscience (1974). Cap. 17 - Exact Solutions, Interacting Solitons

ry Waves. pp 577-620.

- (14) - Proceedings of the Conference on Solitons and Coherent Structures held at Santa Barbara. Solitons and Coherent Structures. Physica D - Nonlinear Phenomena; Physica 18D (1986) pp 1-490.
- (15) - C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. Phys. Rev. Lett. 19, 19(1967) pp. 1095-1097.
- (16) - P.D. Lax. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. Comm. Pure Appl. Math. 21(1968) pp. 467-490.
- (17) - V.E. Zakharov e A.B. Shabat. Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self Modulation of Waves in Nonlinear Media. Sov. Phys. JETP 34, 1(1972) pp 62-69; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61(1971) pp. 118-134.
- (18) - M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell e H. Segur. The Inverse Scattering Transform - Fourier Analysis for Nonlinear Problems. Stud. Appl. Math. 53(1974) pp. 249-315.
- (19) - M. Wadati. The Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation. J. Phys. Soc. Japan, 32(1972) pp. 1681 ; J. Phys. Soc. Japan, 34(1973) pp. 1289-1296.
- (20) - S. Tanaka. Modified K-dV and Scattering Theory. Proc. Japan Acad. 40(1972) pp. 466-469.
- (21) - M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell e H. Segur. Method for Solving the Sine-Gordon Equation. Phys. Rev. Lett. 30 (1973) pp. 1262-1264.
- (22) - Loc. cit. (2), R. Hirota. Direct Method of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equation. pp. 40-68.
- (23) - Loc. cit. (7). Capítulo 3. 3.3 Direct Methods for Finding Soliton Solutions - Hirota's Method. pp. 172-203.
- (24) - P.J. Caudrey, A.O. Barut (Editor). Nonlinear Equations in Physics and Mathematics/NATO Advanced Study Institute (Istanbul) - Hirota's Method of Solving Soliton-Type Equations. (1977) pp. 177-192.

- (25) - V.I. Shubov. Finding of N-Solitons Solutions of Multidimensional Nonlinear Equations by Means of Hirota's Method. Theor. Math. Phys. 41, 1 (1979) pp. 891-895.
- (26) - Y. Ueda e A. Noguchi. On the Relationship Between the Zakharov-Shabat and Hirota-Oishi Schemes for Constructing Various Soliton Solutions. Prog. Theoret. Phys. 64, 3(1980) pp. 794-802.
- (27) - M. Boite, C. Laddomada e F. Pempinelli. Multiple-Kink-Soliton Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation. Il Nuovo Cimento, 65B, 1 (1981) pp. 248-258.
- (28) - M. Boite, C. Laddomada e F. Pempinelli. Nonlinear Schrödinger Equation and Soliton Solutions. Il Nuovo Cimento, 68A, 3(1982) pp. 236-248.
- (29) - V.A. Andreiev. On the Connection Between "Pseudopotentials" and the Inverse Scattering Problem Method. Theor. Math. Phys. 36, 3(1978) pp. 773-779.
- (30) - Loc. cit. (7). Capítulo 3. 3.2 Pseudopotentials and Prolongation Structures. pp. 161-163.
- (31) - Loc. cit. (3). F.B. Estrabrook e H.D. Wahlquist. Prolongation Structures, Connection Theory and Bäcklund Transformation. pp. 64-83.
- (32) - D.J. Kaup. The Estrabrook-Wahlquist Method with Examples of Application. Physica 1D(1980) pp. 391-411.
- (33) - Loc. cit. (4). Capítulo 8 - Bäcklund Transformations. pp 243-258.
- (34) - Loc. cit (7). Capítulo 3 - Bäcklund Transformations. pp 153-161.
- (35) - J.K. Perring e T.H.R. Skyrme. A Model Unified Field Equation. Nucl. Phys. 31(1962) pp. 550-555.
- (36) - A. Seeger, H. Donth e A. Kochendörfer. Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. Z. Phys. 134(1953) pp 173-193.
- (37) - H. Kuratsuji. A Soluble Method of Semiclassical Bound State for Many Body Systems. Prog. Theoret. Phys. 74, 3 (1985) pp. 433-438.

- (38) - A. Klein e F. Krejs. Nonlinear Schrödinger Equation: A Testing Ground for the Quantization of Nonlinear Waves . Phys. Rev. D 13, 12(1976) pp. 3282-3294.
- (39) - E.K. Sklyanin e Acadêmico L.D. Faddeev. Quantum-Mechanical Approach to Completely Integrable Field Theory Models. Sov. Phys. Dokl. 23, 12(1978) pp. 902-904.
- (40) - M. GÜckeler. Quantum Gelfand-Levitan Method for the Cubic Schrödinger Field Theory with Attractive Coupling. Z.Phys. C 11(1981) pp. 125-134.
- (41) - B. Yoon e J.W. Negele. Time-Dependent Hartree Approximation for a One-dimensional System of Bosons with Attractive δ -function Interaction. Phys. Rev. A 16, 4(1977) pp. 1451-1457.
- (42) - A. Neveu. Quantization of Nonlinear Systems. Rep. Prog. Phys. 40(1977) pp. 709-730.
- (43) - B. Davies. Second Quantisation of Nonlinear Schrödinger Equation. J. Phys. A. Math. Gen. 14(1981) pp. 2631-2644 .
- (44) - J.N. Maki & T. Kodama. Phenomenological Quantization Scheme in the Nonlinear Schrödinger Equation. CBPF - N.F. -013/86 "pré-print", submetido a Phys. Rev. Lett.
- (45) - M. Ichikawa e H. Takayama. Solitons in a One-Dimensional Bose System with the Repulsive Delta Function Interaction. J. Phys. Soc. Japan, 49, 4(1980) pp. 1242-1246.
- (46) - Fu-Cho Pu e Bas-Feng Zhao. Quantum Gelfand-Levitan Equations for Nonlinear Schrödinger Model of Spin -1/2 Particles. Phys. Rev. D 30, 10(1984) pp. 2253-2256.
- (47) - R. Jackiw e G. Woo. Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves. Phys. Rev. D 12, 6(1975) pp. 1643-1649.
- (48) - E. Tomboulis e G. Woo. Dirac Quantization of N-Solitons . Ann. Phys. 98(1976) pp. 1-13.
- (49) - D.B. Creamer, H.B. Thacker e D. Wilkinson. Gelfand-Levitan Method for Operator Fields. Phys. Rev. D 21, 6(1980) pp. 1523-1528.
- (50) - M. Wadati, A. Kuniba e T. Konishi. The Quantum Nonlinear

- Schrödinger Model: Gelfand-Levitan Equation and Classical Soliton. J. Phys. Soc. Japan, 54, 5(1985) pp.1710-1723.
- (51) - M. Wadachi e M. Sakagami. Classical Soliton as a Limit of the Quantum Field Theory. J. Phys. Soc. Japan 53, 6 (1984) pp. 1933-1938.
- (52) - H.B. Thacker. Many-body Scattering Process in a One-dimensional Boson System. Phys. Rev. D 14, 12(1976) pp.3508 - 3519.
- (53) - L. Dolan. Scattering of Quantized Solitary waves in the Cubic Schrödinger Equation. Phys. Rev. D 13, 2(1976) pp. 528-530.
- (54) - A. Wiesler. Derivation of "Bethe hypothesis" from the quantum Inverse Scattering Transform for the Nonlinear Schrödinger Equation. J. Math. Phys. 22, 4(1981) pp. 750-753.
- (55) - P.P. Kulish, S.V. Manakov e L.D. Faddeev. Comparison of the Exact Quantum and Quasiclassical Results for a Nonlinear Schrödinger Equation. Ther. Math. Phys. 28, 1(1976) pp. 615-620.
- (56) - D.J. Kaup. Exact Quantization of the Nonlinear Schrödinger Equation. J. Math. Phys. 16, 10(1975) pp.2036-2041.
- (57) - J. Honerkamp. Quantization of Exactly Integrable Field Theoretic Models - The Operator Transform Method. Leitura na "International Colloquium on Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory". Les Houches, França, 3 a 13 setembro (1979).
- (58) - C.R. Nohl. Semiclassical Quantization of the Nonlinear Schrödinger Equation. Ann. Phys. 96(1976) pp. 234-260.
- (59) - E. Tomboulis. Canonical Quantization of Nonlinear Waves. Phys. Rev. D 12, 6(1975) pp. 1678-1683.
- (60) - H.B. Thacker e D. Wilkinson. Inverse Scattering Transform as an Operator Method in Quantum Fields Theory. Phys. Rev. D 19, 12(1979) pp. 3660-3664.
- (61) - J. Honerkamp, P. Weber e A. Wiesler. On the Connection Between the Inverse Transform Method and the Exact Quantum Eigenstates. Nucl. Phys. B152(1979) pp. 266-272.

- (62) - E.K. Sklyamin. Method of the Inverse Scattering Problem and the Nonlinear Quantum Schrödinger Equation. Sov. Phys. Dokl. 24, 2 (1979) pp. 107-109.
- (63) - J. Goldstone e R. Jackiw. Quantization of Nonlinear Waves. Phys. Rev. D 11, 6(1975) pp. 1486-1498.
- (64) - Loc. cit. ref. (5). L. D. Faddeev. A Hamiltonian Interpretation of the Inverse Scattering Method. pp. 339-354.
- (65) - Loc. cit. ref. (5). A.H. Lutter. Quantum Solitons in Statistical Physics. pp. 356-372.
- (66) - R.F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu. Nonperturbative Methods and Extended-hadron Models in Field Theory. I. Semiclassical Functional Methods. Phys. Rev. D 10, 12 (1974) pp. 4114-4129.
- (67) - R.F. Dashen et al.. Nonperturbative Methods and Extended-hadron Models in Field Theory. II. Two Dimensional Models and Extended Hadrons. Phys. Rev. D 10, 12(1974) pp. 4130-4138.
- (68) - R.F. Dashen et al.. Nonperturbative Methods and Extended-Hadron Models in Field Theory. III. Four Dimensional Non-Abelian Models. Phys. Rev. D 10, 12(1974) pp. 4138-4142.
- (69) - R.F. Dashen et al. Semiclassical Bound States in a Asymptotically free Theory. Phys. Rev. D 12, 8(1975) pp. 2443-2457.
- (70) - K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura e M. Wadati. Non Relativistic Theory of Factorized S-Matrix. Prog. Theor. Phys. 66, 4(1981) pp. 1284-1300.
- (71) - A.B. Zamolodchikov e A.B. Zamolodchikov. Factorized S-Matrix in Two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models. Ann. Phys. 120 (1979) pp. 253-291.
- (72) - M. Karowski, H.J. Thun, T.T. Truong e P.H. Weisz. On the Uniqueness of a Purely Elastic S-Matrix in (1+1) Dimensions. Phys. Lett. 67B, 3(1977) pp. 321-322.
- (73) - M. Gürses e Ö. Oğuz. A Super Soliton Connection. Lett. Math. Phys. 11(1986) pp. 235-246.

- (74) - J.W. Miles. An Envelope Soliton Problem. J. Appl. Math. 41, 2(1981) pp. 227-230.
- (75) - R. Hirota. Exact Envelope-Soliton Solutions of a Nonlinear Wave Equations. J. Math. Phys. 14(1973) pp. 805-809.
- (76) - A. Hasegawa e F. Tappert. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. II. Normal Dispersion. Appl. Phys. Lett. 23(1973) pp.171-172.
- (77) - Loc. cit. ref. (2). R. Hirota. Direct Method of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equation III. Nonlinear Schrödinger Equation, pp. 48-53.
- (78) - T. Kawata, J. Sakai e N. Kobayashi. Inverse Method for the Mixed Nonlinear Schrödinger Equation and Soliton Solutions. J. Phys. Soc. Japan, 48, 4(1980) pp. 1371-1379.
- (79) - J. Choudhury. Inverse Scattering Method for a New Integrable Nonlinear Evolution Equation under Nonvanishing Boundary Conditions. J. Phys. Soc. Japan, 51, 7(1982) pp. 2312-2317.
- (80) - J.B. McGuire. Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problems. J. Math. Phys. 5, 5(1964), pp. 622-636.
- (81) - C.N. Yang. Some Exact Results for the Many-Body Problem in One-Dimensional with Repulsive Delta-Function Interaction. Phys. Rev. Lett. 15, 23(1967) pp. 1312-1315.
- (82) - C.N. Yang. S Matrix for the One-Dimensional N-Body Problem with Repulsive or Attractive δ -Function Interaction. Phys. Rev. 168, 5(1968) pp. 1920-1923.
- (83) - P.P. Kulish. Classical and Quantum Inverse Problem Method and Generalized Bethe Ansatz. Physica 3D(1981) pp. 246 - 257.
- (84) - R. Shankar e E. Witten. S Matrix of the Supersymmetric Nonlinear model. Phys. Rev. D17(1978) pp. 2134-2143.
- (85) - D.A. Kessler e H. Levine. N-Body Dynamics and the Collective Field Method. Phys. Lett. 81A, 1(1981) pp. 9-11.
- (86) - A. Jeviski e B. Sakita. The Quantum Collective Field Method and its Application to the Planar Limit. Nucl. Phys. B165(1980) pp. 511-527.
- (87) - J.N. Maki. Tese de Mestrado. Efeito de Forças de Três Corpos no Fator de Forma do $^{16}_0$ no Modelo de Partículas Alfa. Instituto de Física Teórica, São Paulo, (1979) pp.9.

- (88) - I.S. Gradshteyn e I.W. Ryzhik. Table of Integrals - Séries and Products. Academic Press (1965). N. York pp. 4.
- (89) - S. Flügge. Practical Quantum Mechanics. Springer-Verlag , (1971), pp. 94-100, problema 39.
- (90) - L. Landau e E. Lifchitz. Mécanique . MIR-Moscou (1966) , Cap. III, pp. 40-42.
- (91) - K. Chadan e P.C. Sabatier. Inverse Problems in Q Quantum Scattering Theory. Springer-Verlag (1978).
- (92) - K. Huang. Statistical Mechanics. Appendix A, Wiley - New York, (1963).
- (93) - Loc. cit. Ref. (4), pp. 8.
- (94) - L. Landau e E. Lifchitz. Mécanique Quantique - Théorie Non-Relativiste. MIR - Moscú (1966) Cap. III, pp. 93-94.
- (95) - Loc. cit. Ref. (4) pp. 34.
- (96) - J.N. Ginocchio. A Class of Exactly Solvable Potentials.I. One-Dimensional Schrödinger Equations. Ann. Phys.152(1984) pp. 203-219.
- (97) - A. Frank e K.B. Wolf. Lie Algebras for Potentials Scattering. Phys. Rev. Lett. 52, 20(1984) pp. 1737-1739.
- (98) - M. Abramowitz e I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., New York (1970) pp.559.
- (99) - Loc. cit. Ref. (98) pp. 256.
- (100) - Loc. cit. Ref. (98) pp. 256.

"INTERAÇÃO EFETIVA SÓLITON-SÓLITON"

OSÉ NOBORU MAKI

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:



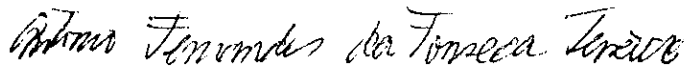
Takeshi Kodama - Presidente



Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza



Ivan Ventura



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Jorge Silvio Helman

Rio de Janeiro, 28 de agosto de 1986