

ALBERTO CORRÊA DOS REIS

EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS DE MOVIMENTO  
DE REAÇÕES NUCLEARES A ALTAS ENERGIAS

Tese de  
**MESTRADO**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO - 1985

*Aos meus pais*

## AGRADECIMENTOS

- Ao Kodama, meu orientador, pelo exemplo de seriedade, competência e humildade, e pelo muito que me ensinou;

- Aos companheiros do DNE, e em especial ao Sergio sempre disposto e paciente em nossas intermináveis discussões;

- Ao Luis Reis, pela inestimável ajuda nos "galhos" da computação;

- À Bia, pelo carinho e pela beleza dos gráficos e desenhos;

- À Myriam, por quatro anos de atenção, paciência e carinho, e pelo belo trabalho de datilografia.

"... Se há algo certo em nossos conhecimentos, é a verdade de que todos os conhecimentos atuais são parcial ou totalmente equivocados. Dentro de cem anos parecerão monstruosas as operações cometidas pelos médicos do século XX nos úlceras. Em geral, parecerá bastante cômico a procura das curas locais, tendência do homem ingênuo a dividir a realidade. A experiência realizada até o presente tem mostrado que velhas teorias que constituíam Dogmas eram apenas Equívocos. Esse fato melancólico deveria fazer meditar os médicos e em geral os cientistas que dogmatizam. A menos que pensem, audaciosamente, que esse processo de transmutação de Dogma em Equívoco já terminou e que agora tudo o que dizem é imutável. Não vejo, no entanto, por que há de se poder estabelecer um limite entre o Dogma e o Equívoco que passe, justamente, por nosso tempo."

Ernesto Sábato

## RESUMO

O modelo de equações clássicas de movimento (ECM) tem sido largamente utilizado no estudo das reações nucleares relativísticas (RNR). Há, no entanto, uma limitação séria neste modelo: sua formulação não covariante não permite que seja aplicável em energias superiores a algumas centenas de MeV/nucleon, fora, portanto, da região onde os fenômenos mais notáveis são esperados. Neste trabalho discutimos as possibilidades de extensão do modelo ECM a energias relativísticas. Isto depende não só de uma formulação covariante para a interação nucleon-nucleon clássica, mas também da viabilidade de se integrar numericamente as equações de movimento resultantes. A covariância da interação nucleon-nucleon requer a presença do momentum de interação, o que é feito incluindo os graus de liberdade de um campo mesônico escalar clássico nas equações de movimento. A integrabilidade das equações de movimento é analisada no problema de dois corpos. Os efeitos da radiação de um nucleon acelerado sobre a sua própria trajetória implicam na presença de uma derivada temporal da aceleração nas equações de movimento. Este termo é responsável pelo surgimento de infinitas soluções que não satisfazem às condições de contorno. Um estudo comparativo do problema análogo na eletrodinâmica (equação de Lorentz - Dirac) mostra que a única maneira de se resolver as equações de movi-

mento parte de um estado final conhecido e de um andamento inverso no tempo ( $t = +\infty \rightarrow t = -\infty$ ). O mérito do modelo ECM, no entanto, está na possibilidade de obter informações a respeito dos estados intermediários e finais nas RNR partindo de estados iniciais conhecidos.

## SUMÁRIO

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Sumário	vii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	9
- Reações Nucleares Relativísticas (RNR): o Ponto de Vista Experimental	9
- Referências do Capítulo 1	29
CAPÍTULO 2	30
- D Ponto de Vista Teórico	30
- Equações Clássicas de Movimento (ECM)	34
- A Cascata Intranuclear	42
- O Modelo Hidrodinâmico	52
- Conclusões	66
- Referências do Capítulo 2	71
CAPÍTULO 3	73
- Formulação Covariante da Interação Nucleon-Nucleon	73
CAPÍTULO 4	117
- Integrabilidade das Equações de Movimento	117
CONCLUSÃO	134

## INTRODUÇÃO

*"Eis aqui o relato de como tudo estava suspenso, tudo tranqüilo, tudo imóvel, tudo silencioso, tudo vazio, no céu e na terra. Eis aqui a primeira história, a primeira descrição. Não havia um só homem, um só animal, pássaro, peixe, madeira, pedra, caverna, herba, selva. Só o céu existia.(...) Não havia nada reunido, junto. Tudo era invisível tudo estava imóvel no céu. Não existia nada edificado. Somente o silêncio, a imobilidade, nas trevas, na noite"*

Este é um trecho do relato da criação segundo o Popol-Vuh, ou o Livro do Conselho, dos índios quichês da América Central pré-Colombiana. A criação do Universo sempre foi, de uma forma ou de outra, uma das preocupações principais dos homens. O recente desenvolvimento de aceleradores de ions pesados abre uma nova perspectiva de investigação científica deste tema tão fundamental.

Espera-se que a matéria nuclear se aqueça e se torne altamente comprimida durante a colisão de dois núcleos pesados como o urânio ou chumbo, acelerados até alcançarem energias relativísticas. Uma enorme quantidade de energia é depositada numa região muito pequena possibilitando o surgimento de outros hadrons. Os pions, os mais leves, são os primeiros a aparecer. A medida que aumenta a energia incidente outros tipos de hadrons mais pesados são criados. Este processo poderia continuar até o ponto em que numa porção significativa da região de interação todo o espaço entre os nucleons estaria ocupado pelas novas partí-



culas formadas durante a reação. Os nucleons originais e estes novos hadrons perderiam então sua identidade própria, individual, dissolvendo-se nos seus constituintes, os quarks e gluons. Uma transição de fase como esta recriaria, em escala nuclear, as condições que possivelmente teriam sido as do Universo instantes após o Big-Bang.

Até o momento esta transição de fase da matéria nuclear para um plasma de quarks e gluons ainda não foi observada, mas há uma crença generalizada de que isto venha a acontecer. Processos semelhantes ocorrem com a matéria ordinária. Um gás sob condições extremas de temperatura e pressão torna-se um plasma de núcleos e elétrons quando a distância média entre dois núcleos é menor que as dimensões típicas dos orbitais atômicos. Os elétrons deixam de estar ligados a um núcleo particular para moverem-se livremente, ou seja, os elétrons se desconfinam. No caso nuclear a compressão dos núcleos e a criação de novas partículas seriam o mecanismo básico para o desconfinamento dos quarks. Dito de outra forma o desconfinamento dos quarks ocorreria quando a densidade e a temperatura ultrapassassem uma fronteira num diagrama de fases bidimensional, como indicado na figura 1. Segundo uma estimativa de H.Satz a temperatura crítica para a transição está entre 140-200 MeV enquanto que a densidade crítica seria algo entre 3 e 7 vezes a densidade normal da matéria nuclear,  $\rho_0 = 0.145 \text{ fm}^{-3}$ .

Ao que tudo indica os valores da densidade e temperatura atingidos no presente ainda são insuficientes para a ocorrência de transições de fase. Seria necessário acelerar ions realmente pesados a energias da ordem de alguns GeV/N. Es

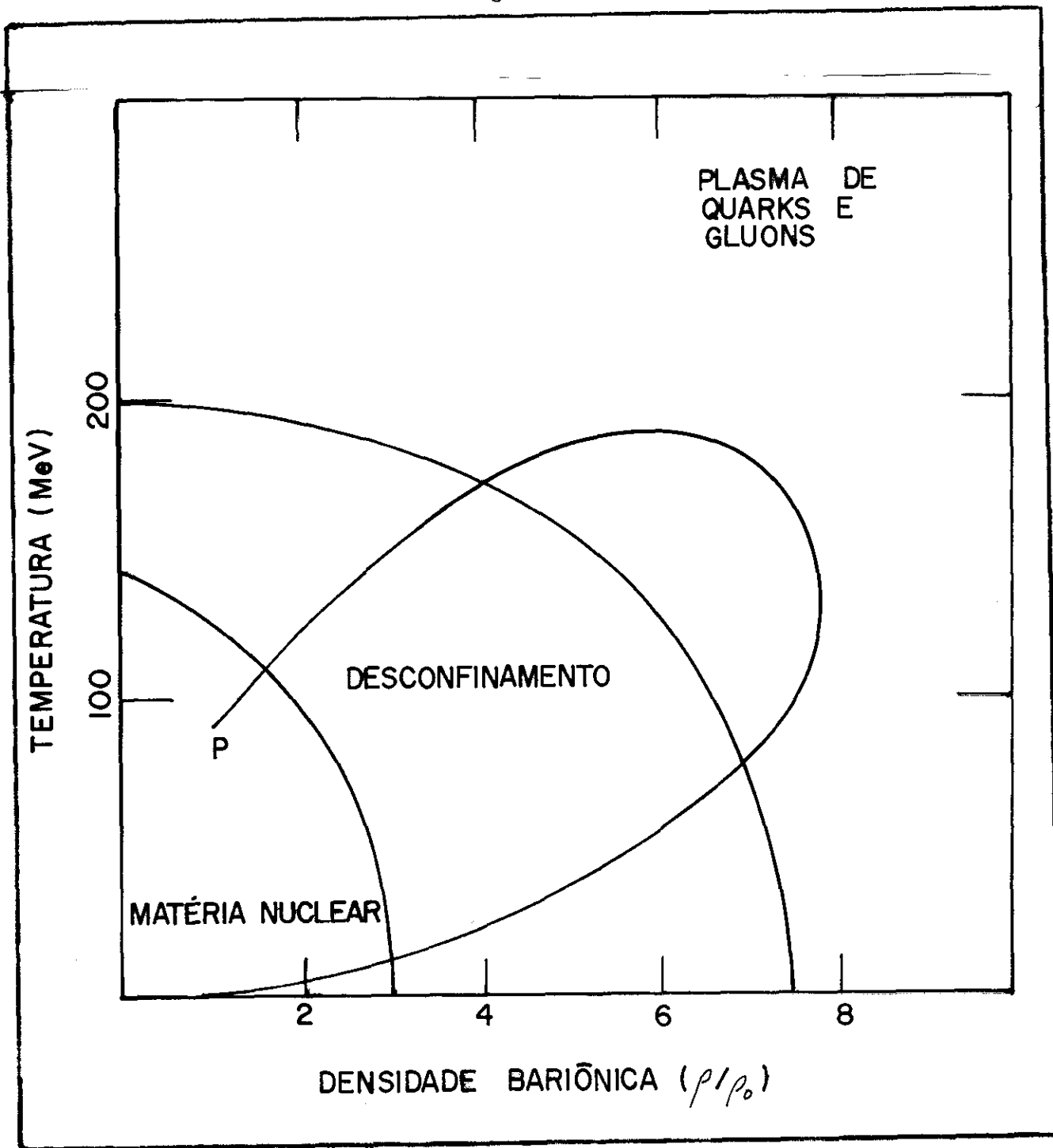
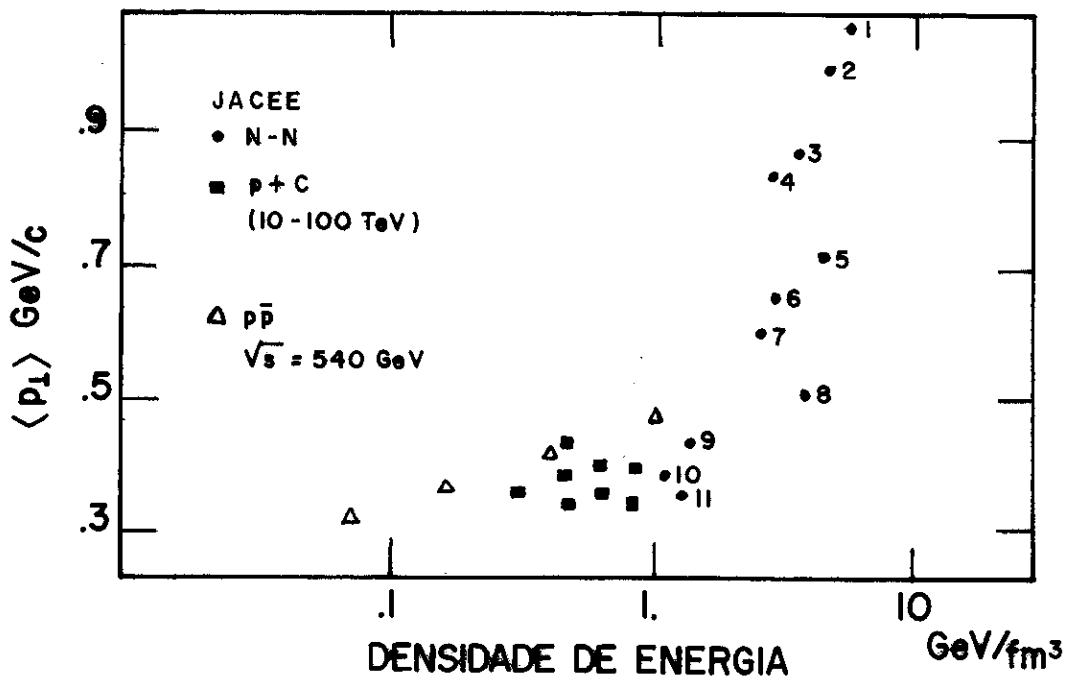


Figura 1 - Diagrama de fases da matéria nuclear. Durante uma reação a matéria nuclear evolui do seu estado fundamental ( $\rho=\rho_0$ ,  $T=0$ ) até o ponto P segundo a trajetória indicada. O sistema se comprime e aquece, havendo uma transição de fase quando a região de desconfinamento é cruzada. Posteriormente o sistema se expande e resfria, decaindo nos hadrons observados nas experiências.



- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| 1. (Ar + Pb 1 TeV/n)  | 7. (He + Ag 7.1 TeV/n) |
| 2. (He + C 8 TeV/n)   | 8. (Si + Ag 4 TeV/n)   |
| 3. (He + C 8.2 TeV/n) | 9. (He + Ag 37 TeV/n)  |
| 4. (He + C 20 TeV/n)  | 10. (Ne + C 7.1 TeV/n) |
| 5. (Ca + C 100 TeV/n) | 11. (He + C 8 TeV/n)   |
| 6. (Li + C 26 TeV/n)  |                        |

Figura 2 - Diagrama momentum transverso médio vs densidade de energia estimada em eventos de alta multiplicidade registrados em emulsão (raios cósmicos). O valor de  $\langle p_T \rangle$  pode ser relacionado com a temperatura. A densidade de energia estimada que é alcançada em reações envolvendo núcleos pesados é comparada com a correspondente em reações  $p\bar{p}$  e p-núcleos. É nítido o súbito crescimento de  $\langle p_T \rangle$  para  $1 < \epsilon < 10$  GeV/f, indicando talvez a ocorrência de uma transição de fase. Estes dados são da colaboração japonesa-americana.

núcleos em equilíbrio. Estes possíveis novos estados, se existirem, somente poderão ser observados em reações entre núcleos pesados. O estudo das RNR, portanto, é o único meio para se extrair a equação de estado da matéria nuclear.

Do ponto de vista teórico as dificuldades são enormes. Uma vez formado o plasma de quarks e gluons, e se este é um sistema localmente equilibrado, então é possível obter com auxílio da teoria quântica de campos a temperaturas finitas um "ansatz" da equação de estado do sistema. Este seria o ingrediente básico para um conjunto de equações hidrodinâmicas que descreveriam a evolução deste sistema no espaço-tempo. Sem dúvida que esta já é uma situação bastante idealizada, mas é o que se pode fazer até o momento. A ocorrência mesma desta transição de fase seria apenas um dos estágios de uma reação nuclear relativística. Há que se computar as flutuações quânticas oriundas das interações nos estágios iniciais e finais, os efeitos de não equilíbrio as correlações e os mecanismos de compressão e aquecimento, e muitos outros aspectos. Esta extraordinária complexidade impõe restrições sérias à formulação de uma teoria exata das RNR, um programa ainda por demais ambicioso.

Reações envolvendo ions pesados relativísticos são ainda um terreno pouco conhecido. Não resta outra alternativa senão a abordagem fenomenológica, baseada em modelos simples que têm um papel bem definido: procurar esclarecer qualitativamente os estágios de uma reação e seus principais mecanismos. O que ocorre em uma RNR depende, evidentemente, da energia incidente,  $E_{IN}$ . Assim, por exemplo, com  $E_{IN}$  da ordem de algumas centenas de MeV por nucleon os efeitos de campo médio devem desempenhar, ainda, um papel importante; com  $E_{IN}$  da ordem de al-

guns GeV/nucleon a dinâmica deve ser dominada pelos graus de liberdade individuais dos nucleons. O uso de um modelo fenomenológico depende, portanto, não apenas do aspecto experimental a ser estudado mas também da faixa de energia considerada. É possível desta forma obter estimativas do grau de equilíbrio alcançado numa reação, ou ainda estimar a máxima compressão e aquecimento da matéria nuclear. O conhecimento da física dos ions pesados relativísticos assemelha-se à montagem de um intrincado quebra-cabeça, cujas muitas peças vão se encaixando pouco a pouco com o auxílio dos diversos modelos fenomenológicos.

Um destes modelos, o de Equações Clássicas de Movimento, nos parece digno de atenção especial por ser o conceitualmente mais simples, o mais econômico em termos de hipóteses e por poder, em princípio, ser aplicado a uma ampla faixa de energia. A idéia básica deste modelo é descrever a evolução da reação de dois núcleos no tempo e no espaço seguindo, uma a uma, as trajetórias dos seus nucleons constituintes. Obviamente que uma descrição como esta apenas tem sentido enquanto os nucleons podem ser identificados individualmente.

A única versão deste modelo é uma versão não relativística, aplicável apenas quando a energia incidente é da ordem de algumas centenas de MeV. Os fenômenos mais notáveis e interessantes, no entanto, são esperados em energias superiores, onde a relatividade deve ser explicitamente considerada.

O propósito deste trabalho é uma investigação sobre as possibilidades práticas de extensão do modelo ECM a energias relativísticas. A aplicabilidade do modelo em altas energias dependerá de dois fatores: uma formulação covariante da in

teração nucleon-nucleon e a possibilidade de solução numérica das equações relativísticas de movimento resultantes.

No primeiro capítulo será apresentada uma coletânea dos primeiros dados de natureza exclusiva obtidos recentemente. Procuramos nestes resultados experimentais os indícios da compressão e aquecimento da matéria nuclear durante uma reação, bem como do grau de equilíbrio alcançado.

No segundo capítulo serão apresentados e discutidos os três principais modelos fenomenológicos em voga atualmente. As previsões de cada modelo serão confrontadas com os dados experimentais apresentados no capítulo anterior.

No terceiro capítulo, que juntamente com o quarto se constitui na parte principal do trabalho, é discutida uma formulação covariante para a interação nucleon-nucleon.

Finalmente, no quarto e último capítulo as dificuldades técnicas de solução numérica serão discutidas à luz da solução do problema análogo na eletrodinâmica clássica.

## CAPÍTULO 1

### REAÇÕES NUCLEARES RELATIVÍSTICAS (RNR):

#### O PONTO DE VISTA EXPERIMENTAL

O rápido desenvolvimento das facilidades experimentais nos últimos quinze anos possibilitou a extração de um grande volume de informações acerca da reação de núcleos pesados a altas energias. Nos últimos três anos, entretanto, houve um salto na qualidade destas informações com a entrada em operação de detetores especiais, que cobrem um ângulo sólido de  $4\pi$  (uma descrição detalhada desses detetores pode ser encontrada na referência [1]). Esses novos dados<sup>[2-6]</sup>, de caráter exclusivo, permitem uma visão mais profunda do que ocorre nas colisões entre núcleos pesados, particularmente no que se refere à produção de estados de equilíbrio da matéria nuclear com densidades e temperaturas que não as do seu estado fundamental.

A produção e observação de matéria nuclear em condições extremas de temperatura e densidade e a obtenção de sua equação de estado são alguns dos principais objetivos do estudo das RNR. Neste capítulo apresentamos os mais recentes resultados experimentais relativos a estes aspectos, e que deverão se constituir no pano de fundo de toda a discussão que lhes segue.

Em primeiro lugar vamos discutir um pouco a geometria das RNR. A figura 1 mostra, esquematicamente, três tipos quali-

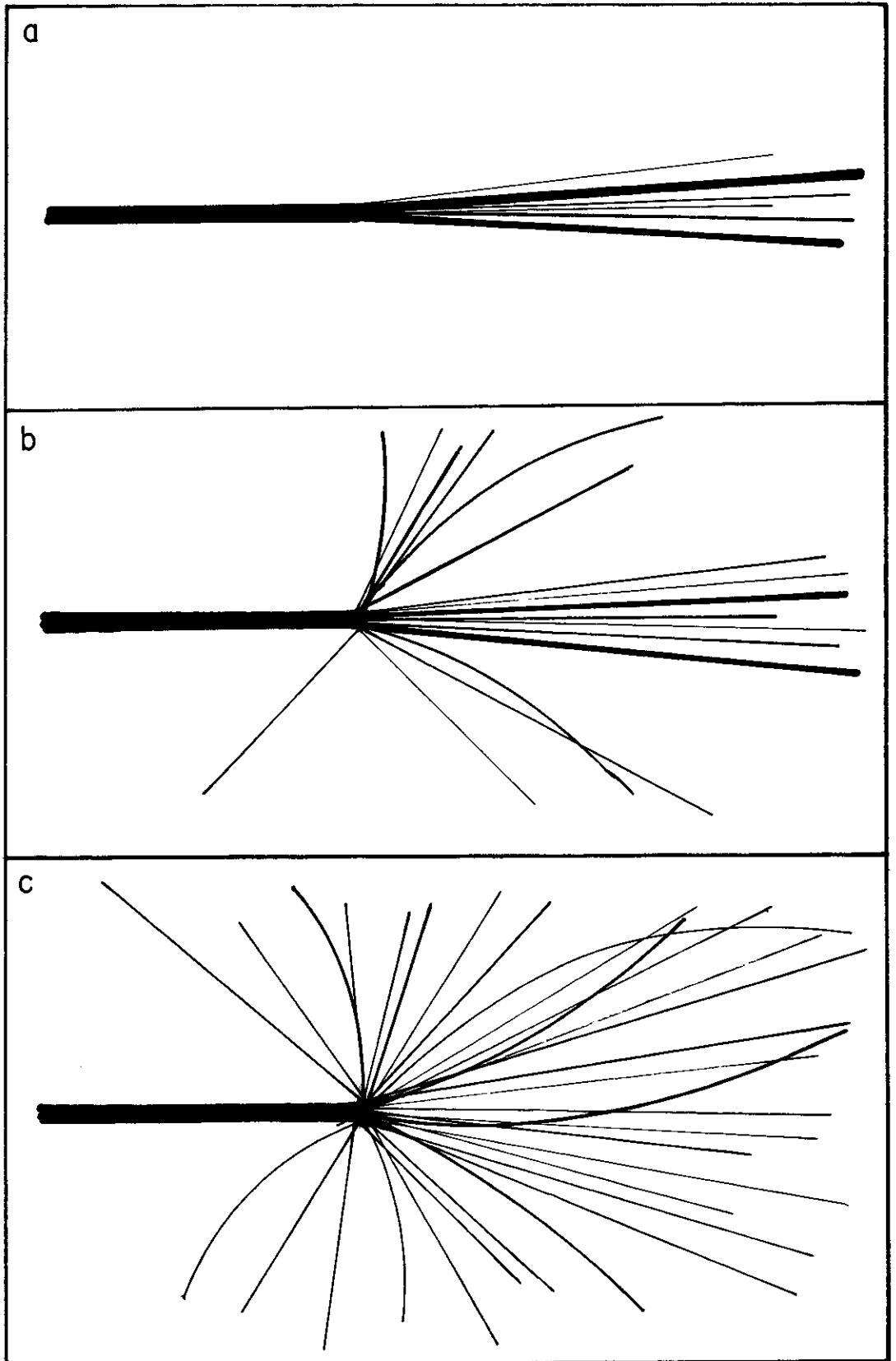


Figura 1



tativamente distintos de eventos observados em colisões núcleo - núcleo a altas energias.

A figura 1-A representa uma colisão em que apenas uns poucos fragmentos são produzidos, formando um jato dianteiro. Os produtos da colisão têm velocidades próximas a do núcleo projétil, o que significa uma pequena transferência de momentum no processo. Essa transferência de momentum entre os nucleons do projétil e os do alvo é maior no evento simbolizado na figura 1-B, onde, além do jato dianteiro, alguns fragmentos são espalhados em ângulos maiores. Muito mais violenta é a colisão representada na figura 1-C, onde o alvo e o projétil são completamente destruídos, com dezenas de fragmentos emitidos em todas as direções.

O parâmetro de impacto é uma idéia útil (mesmo considerando que não há uma maneira única de defini-lo), pois os núcleos são, evidentemente, sistemas espacialmente extensos. Numa visão geométrica simples, eventos do tipo representado pela figura 1-A são associados a colisões periféricas, isto é, com grandes parâmetros de impacto. Em colisões deste tipo há uma superposição pequena do alvo e do projétil. Eventos do tipo da figura 1-B são associados a colisões intermediárias, enquanto que os eventos do tipo da figura 1-C são associados a colisões frontais, ou quase frontais, isto é, colisões com parâmetro de impacto próximo de zero, em que há uma completa superposição do alvo com o projétil.

Evidentemente as colisões frontais são as mais indicadas para o estudo das propriedades da matéria nuclear longe do seu estado de equilíbrio. É muito importante, pois, selecionar

apenas os dados relativos a essas colisões. A associação de eventos de alta multiplicidade de fragmentos com colisões frontais ou quase frontais fornece o critério mais empregado nessa seleção. Não é, entretanto, um critério isento de ambiguidades, pois a multiplicidade de fragmentos, para uma dada combinação alvo + projétil, cresce com o aumento da energia incidente.

A técnica empregada no tratamento dos dados obtidos com detectores  $4\pi$  é a da análise global [7-8]. A idéia básica é medir, evento por evento, o momentum, a carga e a massa dos fragmentos eletricamente carregados e selecionar dos dados, os relativos a eventos de alta multiplicidade apenas. A análise é feita com uso das variáveis globais, tomadas emprestado da física de partículas elementares. É o método mais adequado para observar as manifestações da compressão da matéria nuclear.

Algumas das variáveis globais empregadas derivam do tensor de fluxo de energia cinética, definido para cada evento por

$$F_{ij} = \sum_v^N \frac{1}{2m(v)} p_i(v) p_j(v) ,$$

onde  $m(v)$  é a massa do  $v$ -ésimo fragmento e  $p_i, p_j$  são componentes cartesianas do seu momentum no sistema do centro de massa núcleo-núcleo. O tensor  $F_{ij}$  pode ser associado a um elipsóide, no espaço dos momenta, centrado na origem e que representa a distribuição de momentum. Na representação diagonal de  $F_{ij}$  os semi-eixos do elipsóide são vetores cujo módulo representa a intensidade do fluxo de momentum e cuja direção indica a direção deste fluxo. Imagine um evento em que os núcleos se interpenetrassem e após a colisão guardassem memória do momentum inicial.

O elipsóide representativo da distribuição de momentum de um evento como esse teria a forma de uma cigarra (oblato). No outro extremo situam-se os eventos em que os núcleos seriam freados completamente um pelo outro, ejetando a matéria nuclear em direções perpendiculares à direção do feixe incidente. Neste caso o elipsóide seria semelhante a um disco. Ambas as situações são representadas na figura 2. As variáveis globais derivadas de  $F_{ij}$  são o ângulo de fluxo máximo,  $\theta_F$ , e as razões de fluxos  $R_{ij}$ , que são as razões entre os comprimentos dos semi-eixos  $i$  e  $j$ . Estes números representam o grau de anisotropia da distribuição.

Outro tipo de variável global utilizado é a razão

$$R = \frac{2}{\pi} \frac{\sum_{v=1}^N p_{\perp}^v}{\sum_{v=1}^N p_{\parallel}^v} \quad , \quad (1)$$

onde  $p_{\parallel}^v$  e  $p_{\perp}^v$  são, respectivamente, as componentes longitudinal (paralela à direção do feixe) e transversal do momentum do  $v$ -ésimo fragmento. Para uma distribuição isotrópica teremos  $R = 1$ , enquanto que  $R < 1$  significa um grau de transparência.

Temperatura é um conceito aplicável a sistemas equilibrados. O decaimento de um sistema equilibrado é isotrópico no referencial do centro de massa. A isotropia da distribuição de momentum é necessária mas não é condição suficiente para a termalização: é preciso também que a distribuição de energias seja do tipo Maxwell-Boltzmann. A figura 3 mostra o espectro de prótons da reação  $^{93}\text{Nb} + \text{Nb}$  a 400 MeV/N no laboratório (H.A. Gustafsson e colaboradores, ref. [5]). A observação de prótons com energia cinética muito maior que a do feixe incidente é um

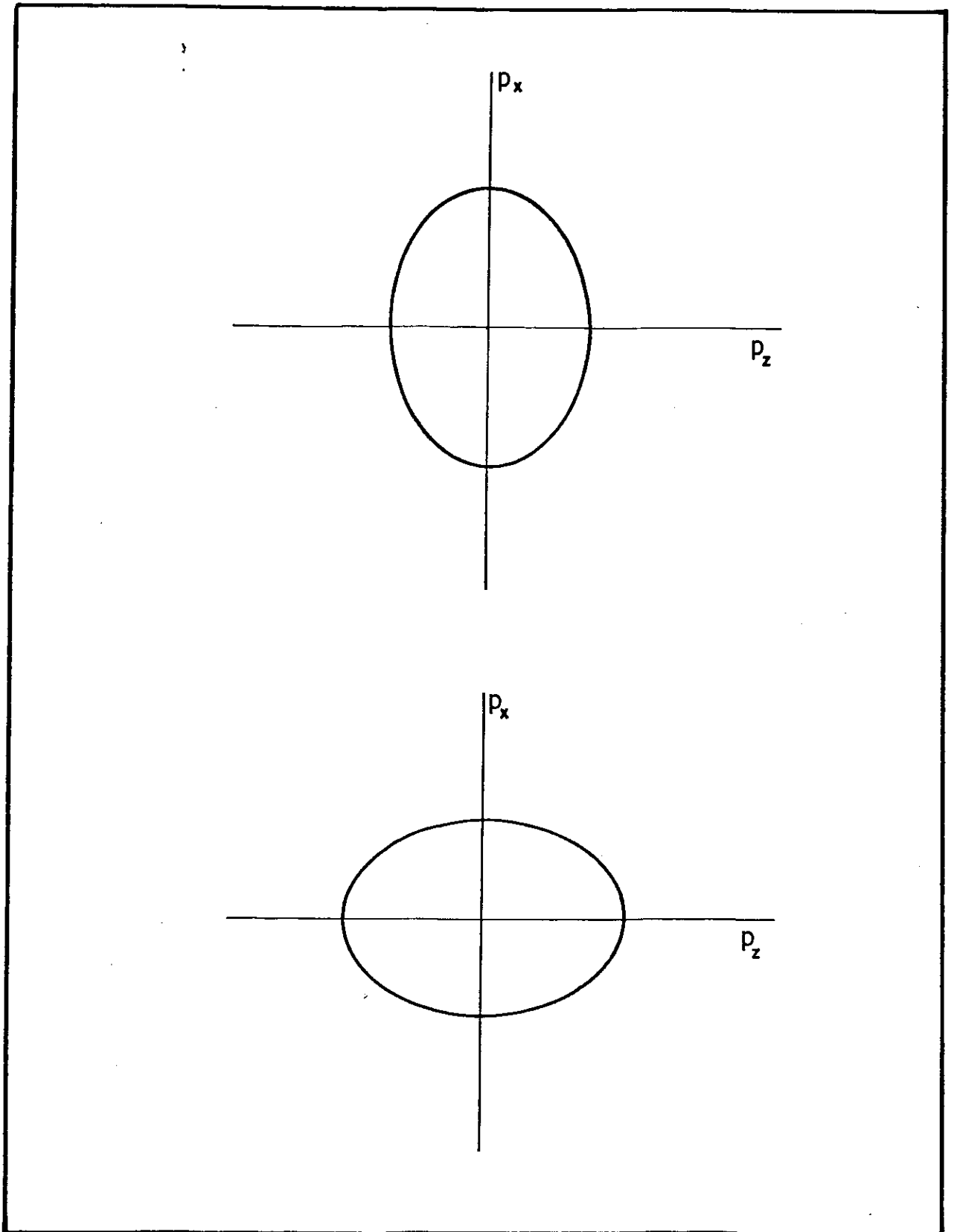


Figura 2 - Elipsóides representativos da distribuição de momentum de eventos com grande opacidade (gráfico superior) e grande transparência (gráfico inferior). A direção Z é a direção do feixe incidente.

indicador da ocorrência de colisões múltiplas entre os nucleons. Essas colisões seriam responsáveis por uma possível termalização do sistema. O espectro de protons é parametrizado por uma distribuição de Maxwell-Boltzmann relativística,

$$\frac{\epsilon}{p^2} \frac{d^2\sigma}{dpd\Omega} \propto e^{-\epsilon/T_0} \quad (2)$$

onde  $\epsilon$  é a energia total da partícula e  $T_0$  é a temperatura. A tabela abaixo mostra os valores de  $T_0$  como função da multiplicidade de cargas  $M_C$ .

$M_C$	$T_0$ (MeV)	
	Nb + Nb	Ca + Ca
0 - 10	42	43
10 - 20	46	48
20 - 30	51	54
30 - 40	55	56
40 - 50	60	
50 - 60	65	

A equação (2) representa um sistema em que toda a energia disponível é convertida em energia térmica. Os valores de  $T_0$  obtidos por esse ajuste representam limites superiores da temperatura. O fato de que  $T_0$  aumenta em ambos os casos com o aumento da multiplicidade pode ser visto como uma aproximação de um estado equilibrado globalmente. Outro fator responsável pelo aumento de  $T_0$  com  $M_C$ , possivelmente, é a produção de fragmentos compostos que também aumenta com a multiplicidade<sup>3</sup>. A presença

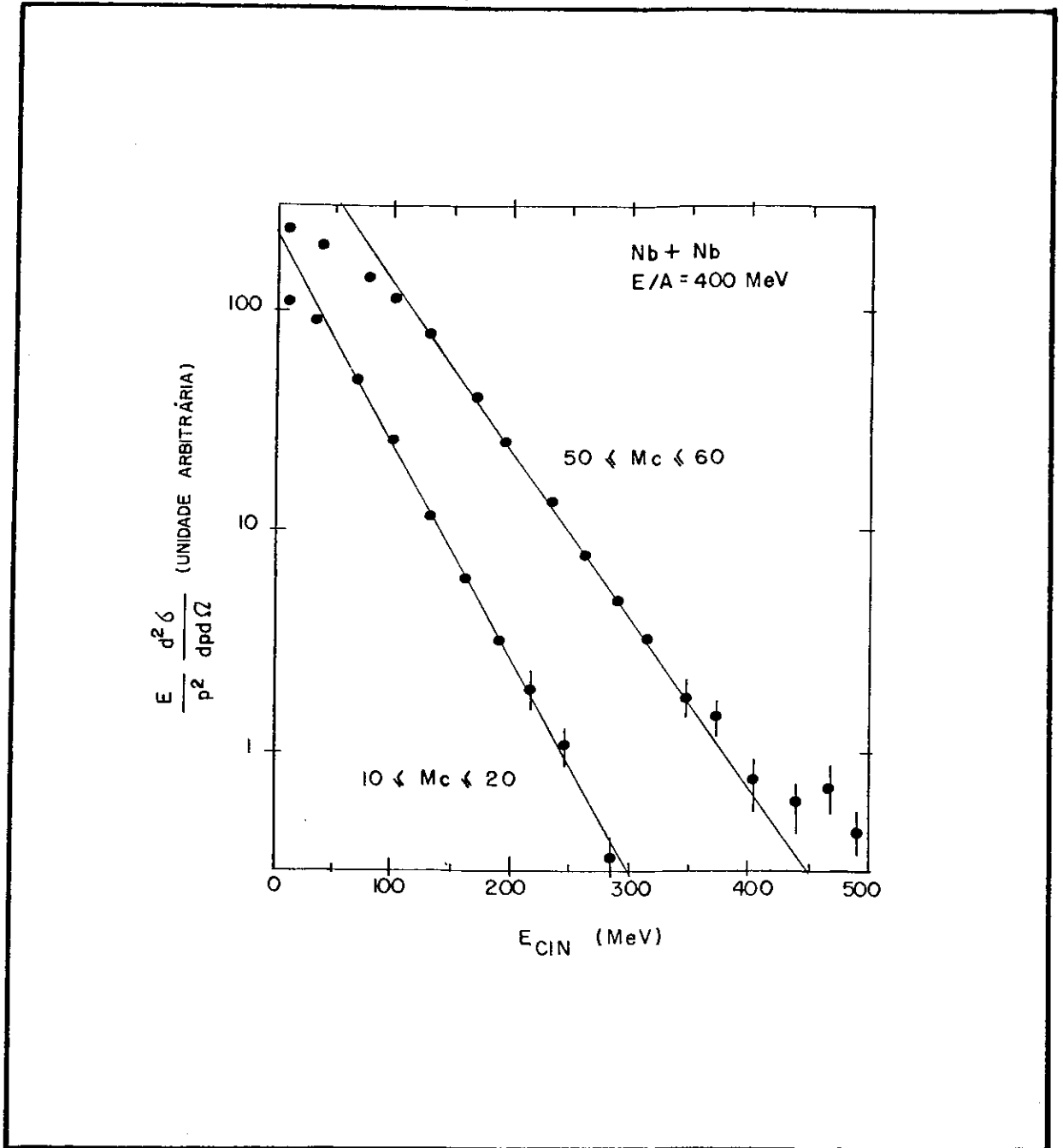


Figura 3 - Espectro de energia de protons na reação  $^{93}\text{Nb}+\text{Nb}$  a 400 MeV/N no laboratório. Os dados são relativos a dois tipos de seleção de multiplicidade. As energias dos protons observados são relativas ao centro de massa do sistema e medidas em  $\theta_{CM} = 90^\circ$ . Esta escolha de  $\theta_{CM}$  tem como objetivo minimizar a influência sobre o espectro das partículas que não participam diretamente da reação (espetadores). As linhas retas representam ajustes feitos com a distribuição de Maxwell-Boltzmann relativística. Dados da referência (5).

de fragmentos compostos diminui o número de partículas e, portanto, de graus de liberdade, aumentando o valor de  $T_0$ .

O espectro de prótons desvia-se visivelmente de uma distribuição de Maxwell-Boltzmann quando a energia cinética da partícula é menor que a do feixe incidente. Talvez a produção de fragmentos compostos seja uma das possíveis causas desse desvio por diminuir o número de prótons livres. Essa é uma hipótese razoável pois o desvio de uma distribuição de equilíbrio aumenta com a multiplicidade, o que também ocorre com a produção de fragmentos compostos.

A figura 4 mostra para a mesma reação como varia o valor médio da razão  $R$ , definida pela equação (1), com a fração de cargas detetadas,  $N_Z/Z$  [5]. Em eventos de baixa multiplicidade ( $N_Z/Z \ll 1$ ), correspondentes a colisões periféricas, a fragmentação dos espectadores aumenta a componente paralela do momentum, diminuindo o valor médio de  $R$ . Os espectadores são os nucleons do alvo e do projétil que não participaram diretamente da reação, isto é, sofreram pequena transferência de momentum. À medida que diminui o parâmetro de impacto, aumenta o número de nucleons que participam diretamente da colisão, aumenta a multiplicidade, aumenta o grau de isotropia da distribuição de momentum. Este comportamento é observado também para o sistema mais leve  $^{40}\text{Ca} + \text{Ca}$ . O aumento da energia incidente, no entanto, faz com que aumente a transparência dos núcleos em ambos os sistemas considerados. Há uma diferença marcante entre o  $^{93}\text{Nb}$  e o  $^{40}\text{Ca}$ . O sistema mais pesado alcança valores de  $\langle R \rangle$  próximos da unidade quando  $N_Z/Z \simeq 1$ , o que não ocorre para o sistema mais leve  $\text{Ca} + \text{Ca}$  a mesma energia incidente. Os núcleos de  $\text{Ca}$  parecem não ser sufi-

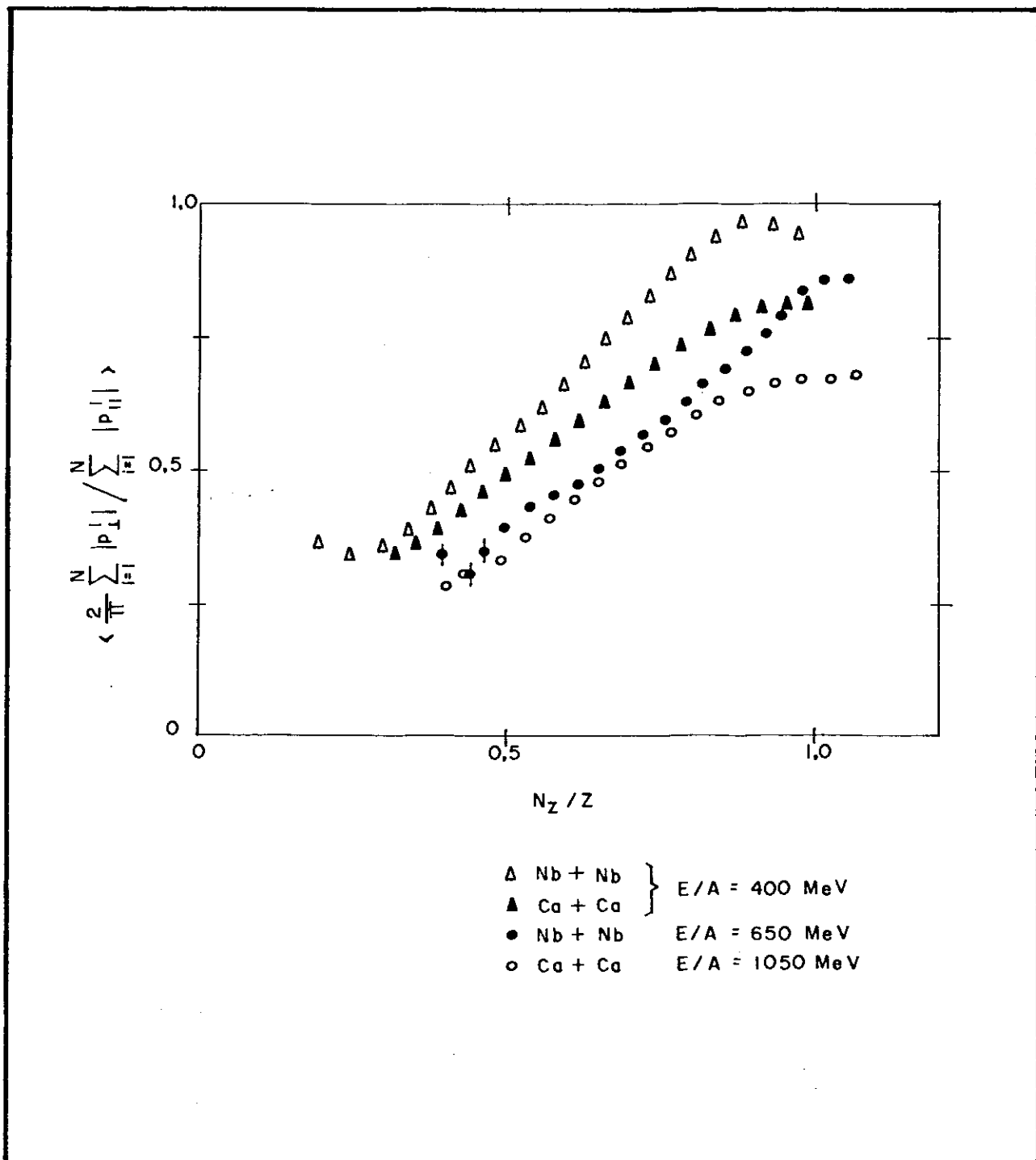


Figura 4 - Valor médio da razão entre a soma das componentes transversais e longitudinais do momentum dos fragmentos como função da fração de tetada da carga total original, para os sistemas Ca + Ca e Nb + Nb a diferentes energias incidentes. Dados da referência (5).



cientemente pesados para que haja uma degradação completa da energia incidente. O efeito da difusividade da superfície nuclear é considerável comparado com o efeito de volume no caso do Ca, aumentando a sua transparência. É possível que isso faça com que apenas uma fração dos nucleons formem um estado equilibrado. Esse efeito diminui substantivamente no caso do  $^{93}\text{Nb}$  e deve ser desprezível para núcleos como  $^{238}\text{U}$ .

A figura 5 mostra, em acordo com o que foi discutido até aqui, as distribuições de frequências de eventos projetadas no plano  $p_{\perp}$  vs  $p_{\parallel}$  [5] (curvas de nível), para as mesmas reações. Pontos sobre a linha reta significam eventos isotrópicos. O mesmo comportamento descrito acima é observado aqui.

Estes aspectos foram também estudados no sistema assimétrico Ar + Pb a 772 MeV/N (R.E. Renfordt e colaboradores, ref. 6). A figura 6 mostra os resultados. A distribuição de frequências de eventos é projetada no plano R vs  $M_p$  (multiplicidade de protons participantes, definidos como aqueles cujo momento no C.M. é maior que 270 MeV/c). A linha tracejada representa para cada valor de  $M_p$  o valor máximo da distribuição. A linha de isotropia é alcançada em  $M_p \approx 40$ . Num modelo geométrico simples [9] o valor  $M_p \approx 40$  corresponde a um parâmetro de impacto  $b \approx 2.5$  fm. Considerando o raio do núcleo de argônio  $r(\text{Ar}) \approx 4$  fm e o do chumbo  $r(\text{Pb}) \approx 7$  fm, o frenamento completo ( $R=1$ ) ocorre quando o núcleo de chumbo começa a envolver totalmente o núcleo de argônio. Para valores de  $M_p$  maiores que 40 observa-se um ligeiro aumento de  $p_{\perp}$  em relação a  $p_{\parallel}$ .

A figura 7 mostra as distribuições de ângulos de fluxo  $\theta_F$ , definido anteriormente, para o mesmo sistema Ar + Pb [6]. Os

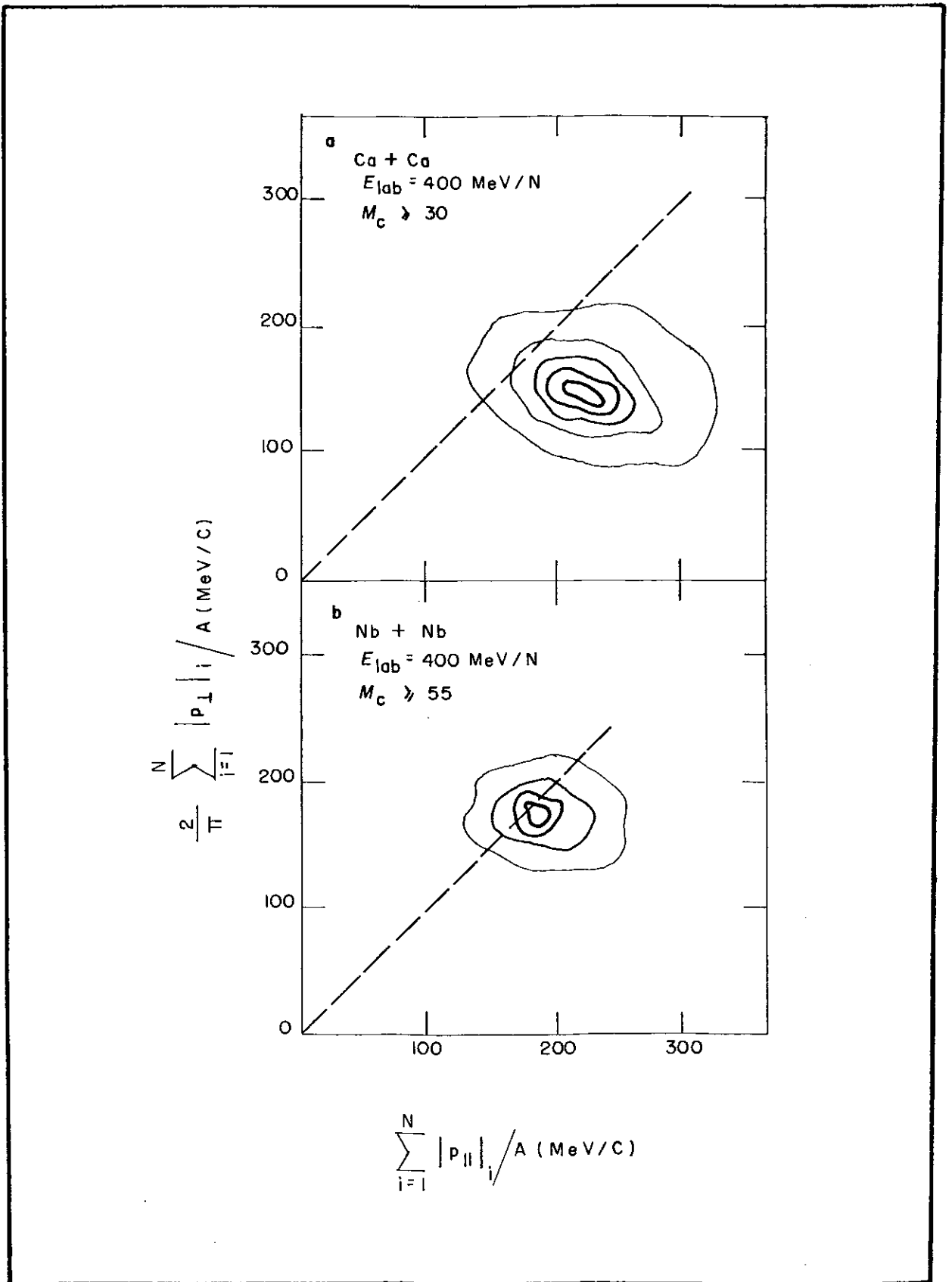


Figura 5 - Distribuições de frequências de eventos projetadas no plano  $p_{\perp}$  vs  $p_{\parallel}$  para os sistemas Ca + Ca (superior) e Nb + Nb (inferior) a 400 MeV/N. A linha diagonal corresponde a eventos isotrópicos ( $R=1$ ). Dados da referência (5).

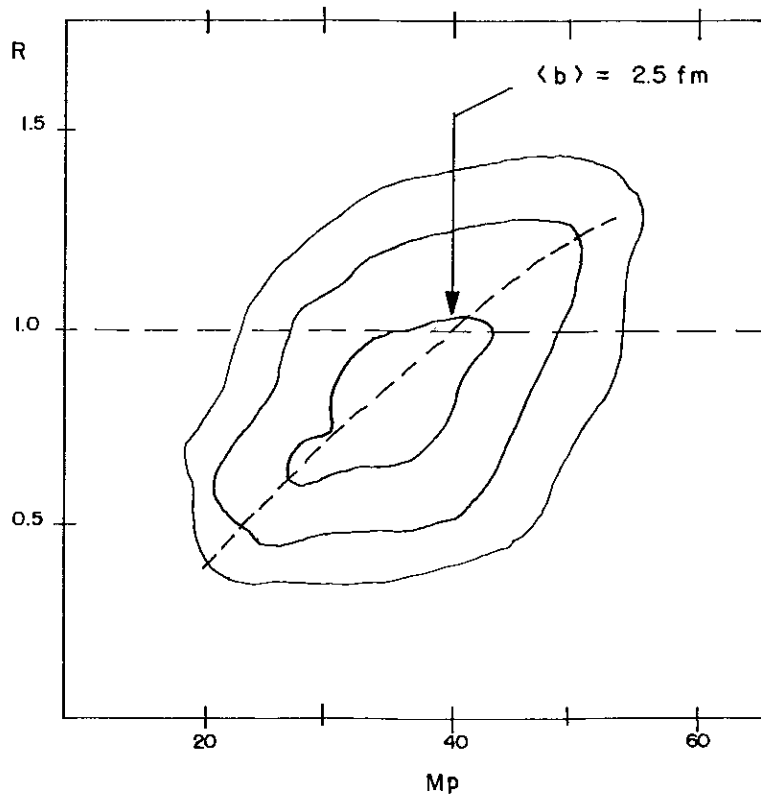


Figura 6 - Distribuição de frequências de eventos projetada no plano  $R$  vs  $M_p$  para a reação  $\text{Ar} + \text{Pb}$  a  $772 \text{ MeV/N}$ . A linha tracejada ao longo das curvas de nível representa o valor máximo da distribuição para cada valor da multiplicidade. Dados da referência (6).

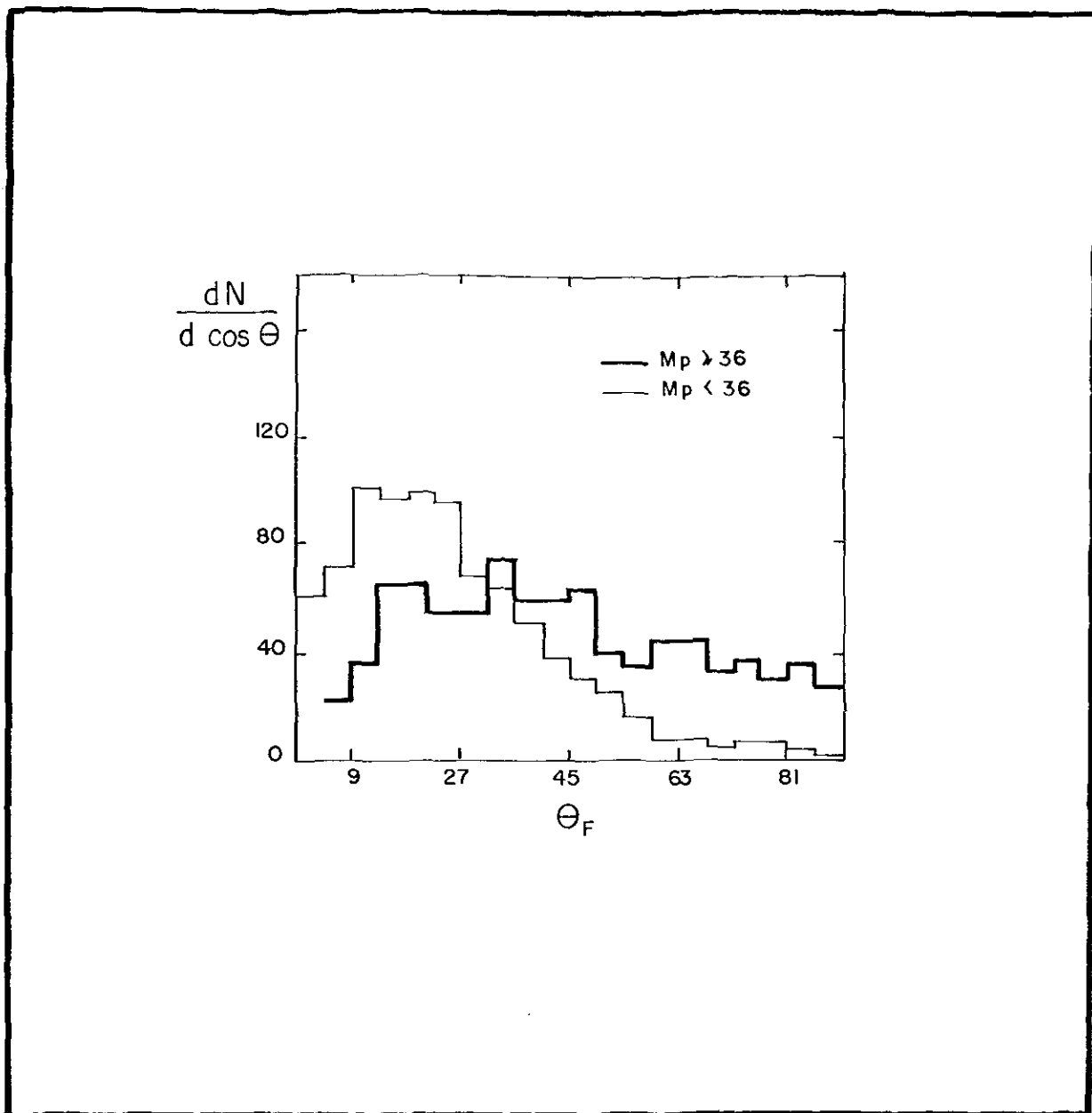


Figura 7 - Distribuição de ângulos de fluxo  $\theta_F$  para a reação  $Ar + Pb$  a  $772 \text{ MeV/N}$ . Dados com duas seleções de multiplicidade de protons participantes, definidos como aqueles cujo momentum transversal maior que  $270 \text{ MeV/c}$ . Dados da referência (6).

dados correspondem a duas seleções de multiplicidade,  $M_p < 36$  ( $3 < b < 5.5$  fm) e  $M_p > 36$  ( $b < 3$  fm). As colisões mais frontais ( $M_p > 36$ ) exibem uma distribuição aproximadamente constante, com ligeira supressão em ângulos dianteiros. Isto indica uma distribuição de momentum isotrópica, em acordo com os resultados mostrados na figura anterior. Eventos com parâmetros de impacto intermediários mostram um fluxo bem definido em torno de  $20^\circ$ . A geometria, numa visão simplificada, está na figura 8.

Esse mesmo tipo de análise foi feita para os sistemas simétricos Ca + Ca e Nb + Nb (H.A.Gustafsson e colaboradores, ref. 4), a 400 MeV/N. Os resultados estão na figura 9. Observe a nítida diferença entre os dados relativos ao cálcio e ao nióbio. Mesmo em eventos de alta multiplicidade, para o caso do Ca,  $\theta_F$  é centrado em torno de  $0^\circ$ . Ao contrário, os dados relativos ao nióbio mostram uma distribuição de  $\theta_F$  centrada em torno de  $25-30^\circ$ .

O fluxo de matéria nuclear em direções laterais ( $\theta_F \neq 0$ ) observado em colisões de sistemas pesados ( $A > 100$ ) é, ao que tudo indica, uma manifestação coletiva dos nucleons, revelada pela técnica de análise global. É possível que o mecanismo que produz esse movimento coletivo dos fragmentos seja distinto em colisões assimétricas, pois no sistema Ar + Pb ele não é observado nos eventos frontais, ao contrário do sistema simétrico Nb + Nb. De toda forma, a origem deste fenômeno ainda está por ser esclarecida. Como veremos no próximo capítulo, os diferentes modelos em uso reproduzem, dentro de suas limitações, os aspectos qualitativos desse fluxo coletivo da matéria nuclear. Talvez esse fenômeno seja um sintoma da compressão do núcleo,

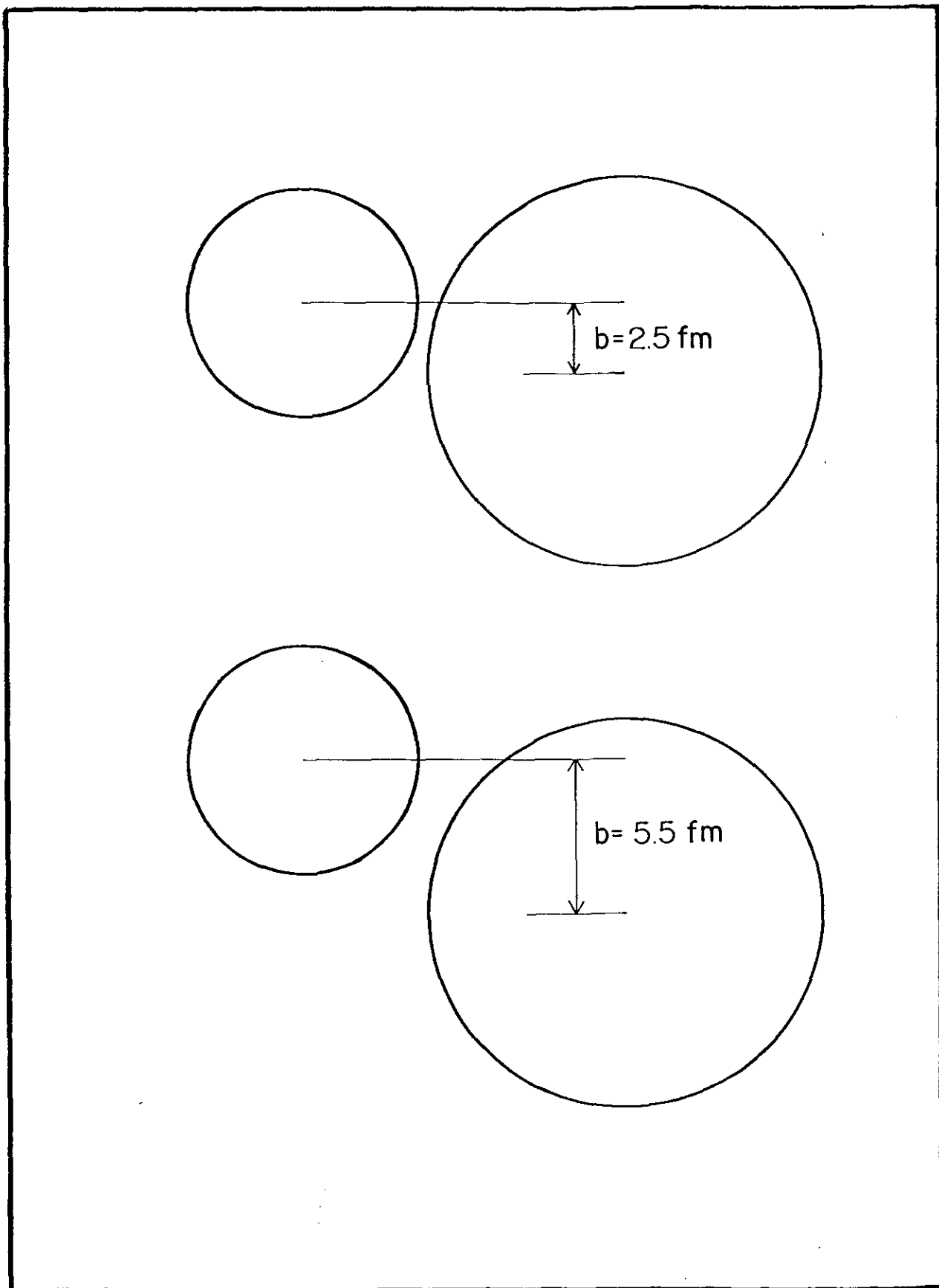


Figura 8 - Representação geométrica da colisão Ar + Pb. Para  $b \approx 2.5$  a distribuição de momentum é isotrópica (figura superior). Quando  $2.5 \approx b \approx 5.5$  observa-se um fluxo lateral de momentum (figura inferior). Estes valores de  $b$  são obtidos pelo modelo de Fireball (9).

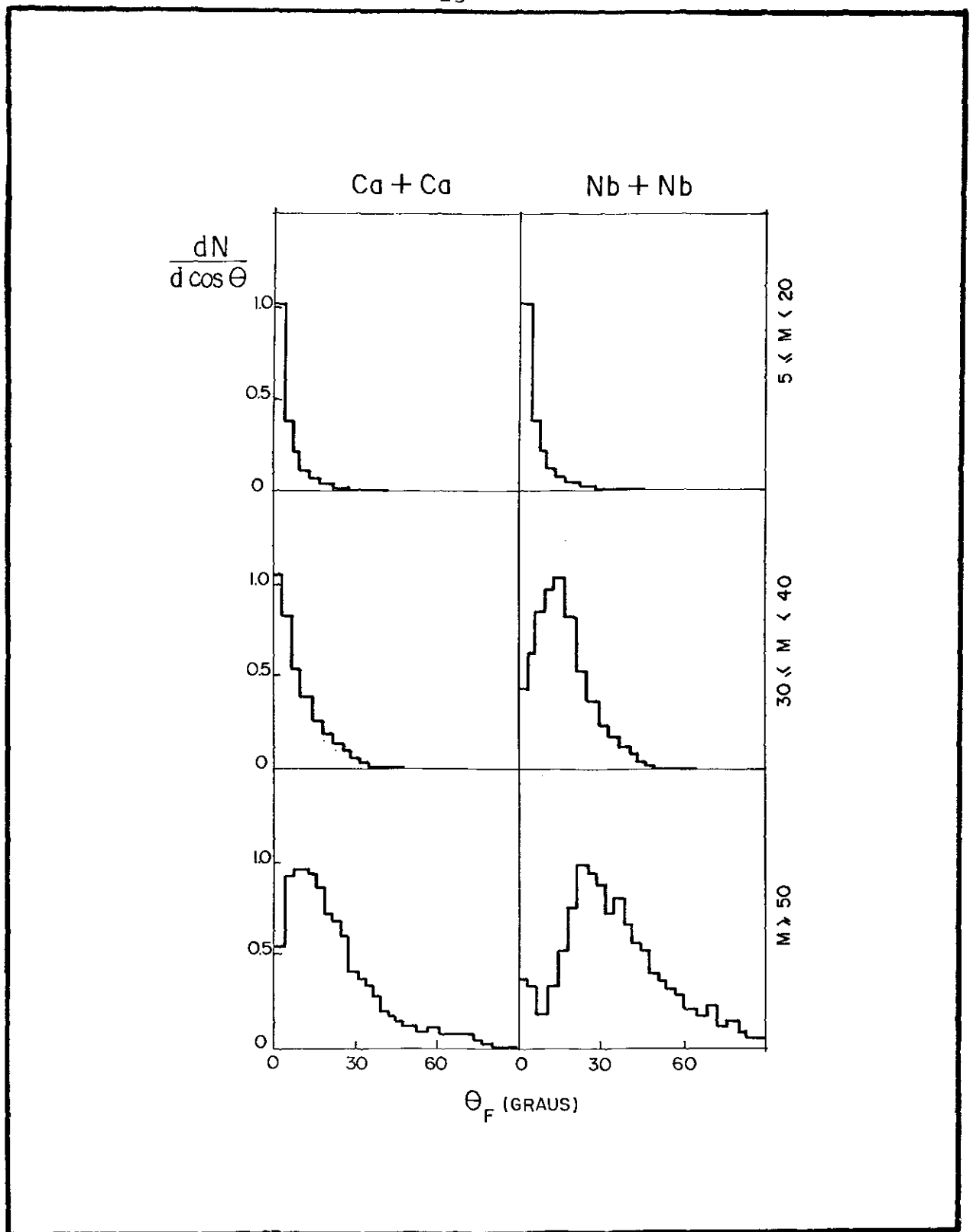


Figura 9 - Distribuições de ângulos de fluxo  $\theta_F$  para os sistemas  $^{40}\text{Ca} + \text{Ca}$  e  $^{93}\text{Nb} + \text{Nb}$  a 400 MeV/N. A comparação é feita para 3 tipos de seleção de multiplicidade de cargas detetadas. Dados da referência (4).

mas esta é apenas uma das interpretações possíveis.

Como dissemos anteriormente, muito pouco se sabe a respeito das propriedades da matéria nuclear a temperaturas finitas e densidades diferentes da do estado fundamental. Os resultados experimentais apresentados aqui não se constituem numa evidência inequívoca da formação de estados equilibrados da matéria nuclear quente e densa. Há bons indícios, entretanto, de que isto é possível quando os núcleos da reação são suficientemente pesados (Pb + Pb, por exemplo). Admitindo que nos casos estudados houvesse sido atingido o equilíbrio térmico e densidades maiores que a do estado fundamental, os valores da temperatura e densidade seriam ainda insuficientes para a ocorrência de uma transição de fase da matéria nuclear para um plasma de quarks e gluons. Este fenômeno, se ocorre, deverá ser observado em colisões de núcleos realmente pesados a energias mais altas. A análise global, neste caso, deve ser modificada. Como pode ser visto na figura 4, a transparência dos núcleos aumenta com a energia incidente. Espera-se que haja, mesmo em colisões frontais, partes subtantivas em cada um dos núcleos que não sejam suficientemente perturbadas na colisão, isto é, mesmo em colisões frontais de núcleos realmente pesados haveria um número significativo de espectadores quando a energia incidente estiver na faixa de alguns GeV/N. Este efeito seria análogo ao efeito "leading particle" observado nas interações hadron-hadron a altas energias. A figura 10 mostra o que seria a colisão de dois núcleos a alguns GeV/N. A análise global deveria ser modificada de forma a excluir os espectadores. Além disso o efeito da contração de Lorentz faria com que a distribuição de momentum dos participantes não fosse mais isotrópica. Estas, no entanto, são questões do porvir.



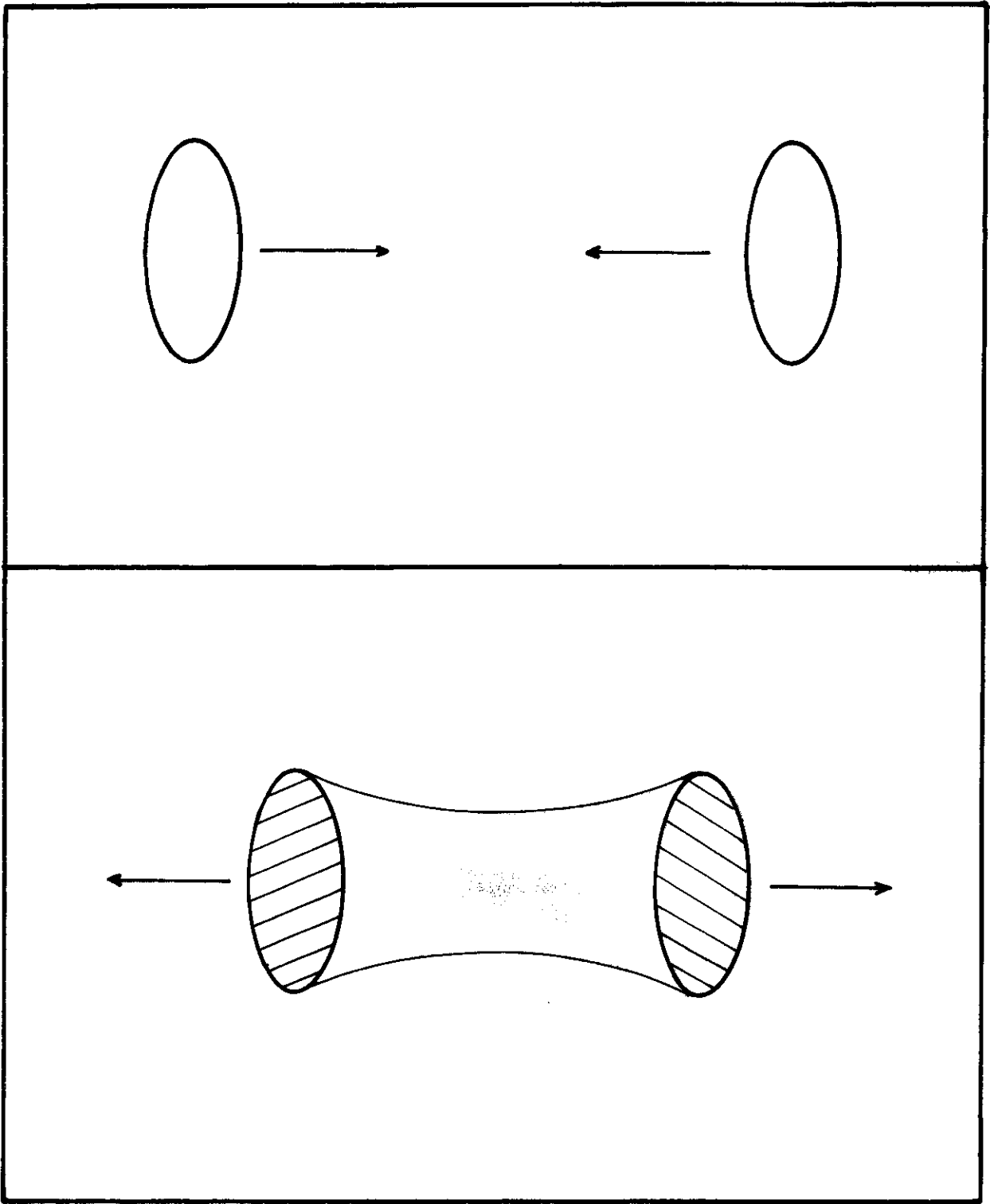


Figura 10 - Representação esquemática de uma colisão nuclear frontal a altíssima energia, vista no referencial do centro de massa. Devido à contração de Lorentz os núcleos tomam a forma de elipsóides. Os núcleos passam um pelo outro com pequena perda de momento. A colisão deixa ambos os núcleos excitados e forma uma região intermediária muito aquecida. Devido à excitação provinda pela colisão os núcleos posteriormente se fragmentarão.

## REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 1

- [1] H.H.Gutbrod et al, Publ. Phys. A400, 343c (1983); A. Sandoval et al, Nucl. Phys. A400, 365c (1983)
- [2] H.Ströbel et al, Phys. Rev. c27, 1349 (1983)
- [3] H.H.Gutbrod et al, Phys. Lett. 127B, 317 (1983)
- [4] H.A.Gustafsson et al: Phys, Rev. Lett, 52, 1590 (1984)
- [5] H.A.Gustafsson et al, Phys. Lett. 142B, 141 (1984)
- [6] R.E.Renfordt et al, Phys. Rev. Lett. 53, 763 (1984)  
Nucl. Phys. A400, [198 ]
- [7] H.Gyulassy et al, Phys. Lett. 110B, 185 (1982)
- [8] J.Cugnon e D.L'Hote, Nucl. Phys. A397, 519 (1983)
- [9] G.D.Westfall et al, Phys. Rev. Lett. 37, 1202 (1976]

## CAPÍTULO 2

### O PONTO DE VISTA TEÓRICO

Um núcleo de argônio, acelerado até atingir a energia de 1.8 GeV/nucleon, colide frontalmente com um núcleo estacionário de chumbo. Os dois núcleos, que juntos possuem cerca de 250 nucleons, são completamente destruídos. Os fragmentos dos núcleos originais são espalhados por todas as direções e são compostos principalmente por nucleons individuais, pions e aglomerados de uns poucos nucleons. Cerca de 130 partículas carregadas são detetadas, 30 a mais que os 100 protons dos núcleos originais.

A interpretação de eventos como este não é, decididamente, uma tarefa simples. Os mecanismos de reação têm-se mostrado terrivelmente complexos. Uma reação entre núcleos pesados relativísticos não é uma mera superposição de interações independentes entre seus constituintes. Não há razão aparente para que a interação de dois nucleons não seja influenciada pela presença de centenas de outros nucleons, todos muito próximos uns dos outros. A interação de dois nucleons é um fenômeno que sabidamente pertence ao reino da física quântica e quando a energia relativa é grande há a necessidade de levar em conta os graus de liberdade internos dos nucleons. Isto significa a entrada em cena de outras espécies de hadrons (pions, kaons,  $\Delta$ ,

etc.). Uma reação envolve a constante criação e absorção destes hadrons e correlações quânticas entre todos os participantes. Estas correlações manifestam-se na distribuição em energias e ângulos dos fragmentos e na produção de fragmentos compostos. Um cálculo exato deveria ser feito com base na cromodinâmica quântica (QCD). As técnicas atuais, entretanto, ainda estão muito distantes do grau de sofisticação necessário para descrever a interação de centenas de partículas, como ocorre nas reações nucleares relativísticas.

As alternativas que restam são abordagens fenomenológicas e aproximadas, que não conseguem englobar num único modelo teórico toda a complexidade de uma reação de núcleos pesados. A abordagem fenomenológica cumpre o papel de lançar um pouco de luz sobre os complexos processos físicos destas reações, desvendando gradativamente alguns dos seus mistérios. O status dos diferentes modelos fenomenológicos existentes no mercado é o de uma primeira aproximação, capaz de identificar por contraste se algum novo fenômeno está ocorrendo.

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais modelos teóricos empregados no estudo das RNR, discutir suas qualidades e defeitos, bem como os resultados que nos oferecem.

Quase todos os modelos fenomenológicos se utilizam da física clássica. É fácil entender o porquê. Há na física clássica muito mais técnicas, todas bem conhecidas, para o cálculo de transporte de energia e matéria em sistemas não equilibrados (ou parcialmente equilibrados) que na física quântica. Além disso é possível no âmbito de uma teoria clássica simular alguns efeitos quânticos. O emprego da mecânica clássica se dá

por razões de ordem prática e não conceitual. Não há justificativas para a validade de um tratamento clássico das RNR, como também não há estimativas precisas da magnitude das correções quânticas necessárias.

Um dos conceitos mais elementares da mecânica clássica é o de trajetória. Na mecânica quântica o conceito de trajetória não é bem definido devido ao princípio de incerteza. Se num determinado problema a incerteza na posição e no momentum de uma partícula é pequena dentro de uma escala característica do sistema então uma descrição clássica e aproximada não deve diferir substancialmente da descrição quântica exata. Sob estas circunstâncias a noção de trajetória clássica poderia ser empregada sem maiores problemas.

Quando a energia incidente é alta a incerteza na posição associada ao movimento longitudinal dos nucleons torna-se pequena comparada com as dimensões do núcleo. A evolução temporal dos nucleons pode ser vista como trajetórias clássicas. A incerteza na posição inicial associada ao movimento de Fermi dos nucleons é da ordem do diâmetro do núcleo, o que faz com que não haja uma única trajetória clássica possível, mas um conjunto delas. Em outras palavras, em energias altas os nucleons do projétil identificam os do alvo individualmente, mas a incerteza na posição inicial não permite identificar qual é a trajetória clássica a ser seguida. Este efeito quântico é compensado numa simulação baseada na mecânica clássica tomando a média de várias configurações iniciais representativas dos núcleos.

A situação se complica quando começam as interações. Se a incerteza na posição dos nucleons é pequena diante do tamanho do núcleo, não o é quando comparada com a interd-

tância média dos nucleons ou com o alcance de suas interações. Duas colisões sucessivas ocorrem sem que a função de onda do nucleon espalhada na primeira colisão atinja sua forma assintótica e as amplitudes de espalhamento interferirão. Pode parecer que o simples aumento da energia incidente resolveria o problema ao reduzir ainda mais o pacote de onda dos nucleons, mas neste caso a criação de novas partículas complicaria ainda mais o problema.

Não há, enfim, nada que assegure a existência de um limite clássico no tratamento teórico das RNR. Não há também uma estimativa da importância de correções quânticas a uma abordagem clássica. A magnitude destas correções deve depender da variável dinâmica observada e do intervalo de energias considerado. O que se conclui é que este é um problema em aberto que requer muito mais estudo. Nenhuma abordagem clássica, nenhuma aproximação é justificável a priori. Num contexto em que a física é ainda pouco conhecida a validade dos modelos fenomenológicos e as hipóteses simplificadoras que fazem é determinada pelos resultados que produzem.

## EQUAÇÕES CLÁSSICAS DE MOVIMENTO (ECM)

Se admitimos de início nas reações nucleares relativísticas a validade da noção de trajetória clássica, então o que há de mais elementar em termos de uma descrição clássica é seguir, uma a uma, a trajetória de cada nucleon. É necessário apenas especificar a forma de interação nucleon-nucleon. Esta força a ser definida deve ser capaz de reproduzir os aspectos principais da seção de choque nucleon-nucleon experimental, bem como as principais características dos núcleos em equilíbrio, tais como a energia de ligação e densidade de saturação. As trajetórias são obtidas integrando diretamente as  $A = A_p + A_A$  equações de movimento. Essa descrição é aplicável a qualquer combinação alvo+projétil, qualquer que seja o parâmetro de impacto, mas é restrita, obviamente, a uma região cinemática em que tanto a produção de pions como os demais efeitos relativísticos são insignificantes. Isto significa um intervalo de energias entre 200-500 MeV/nucleon no laboratório.

Os detalhes desse modelo estão descritos nas referências [1-6]. Aqui vamos nos ocupar apenas em discutir suas principais características e resultados.

Os núcleos são representados como um conjunto de prótons e neutrons dispostos inicialmente ao acaso no interior de uma esfera de raio  $R = r_0 A^{1/3}$ , com uma distribuição de momentum reproduzindo uma distribuição de Fermi. A configuração inicial dos núcleos é uma das dificuldades do modelo. Antes da colisão núcleo-núcleo ter início os nucleons em cada núcleo es-

tão interagindo. Os núcleos originais são quentes ( $T \neq 0$ ) e tendem, simultaneamente, a colapsar e a evaporar. Para realização do estado fundamental realístico, o efeito de exclusão de Pauli seria essencial. Embora este efeito seja pequeno na escala de tempo da reação é necessário considerar os efeitos do Princípio de Pauli para uma representação mais realista dos núcleos no estado fundamental. O modelo é determinístico: dadas as configurações iniciais e o parâmetro de impacto o resultado final da colisão será único. Uma simulação para ser realística requer : 1) uma média calculada sobre um conjunto de configurações iniciais distintas, para cada valor do parâmetro de impacto  $b$ ; 2) uma média sobre todos os valores de  $b$ .

As equações de movimento são as equações de Hamilton,

$$\dot{\vec{p}}_i = - \nabla_{\vec{r}_i} H \quad , \quad \dot{\vec{r}}_i = \nabla_{\vec{p}_i} H \quad ,$$

A Hamiltoniana do sistema é

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V(r) \quad , \quad r \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j| .$$

Esta é a Hamiltoniana de um sistema de  $A$  nucleons com interações de 2 corpos simultâneas entre todas as partículas. A interação coulombiana é desprezível na faixa de energia considerada (centenas de MeV/n). O princípio de exclusão de Pauli pode ser representado substituindo  $V(r)$  por um potencial que também dependa do momentum relativo [2].

O potencial nucleon-nucleon consiste em geral da soma de 2 termos, um atrativo e outro repulsivo,



$$V(r) = \frac{1}{r} [V_R e^{-K_R r} - V_A e^{-K_A r}]$$

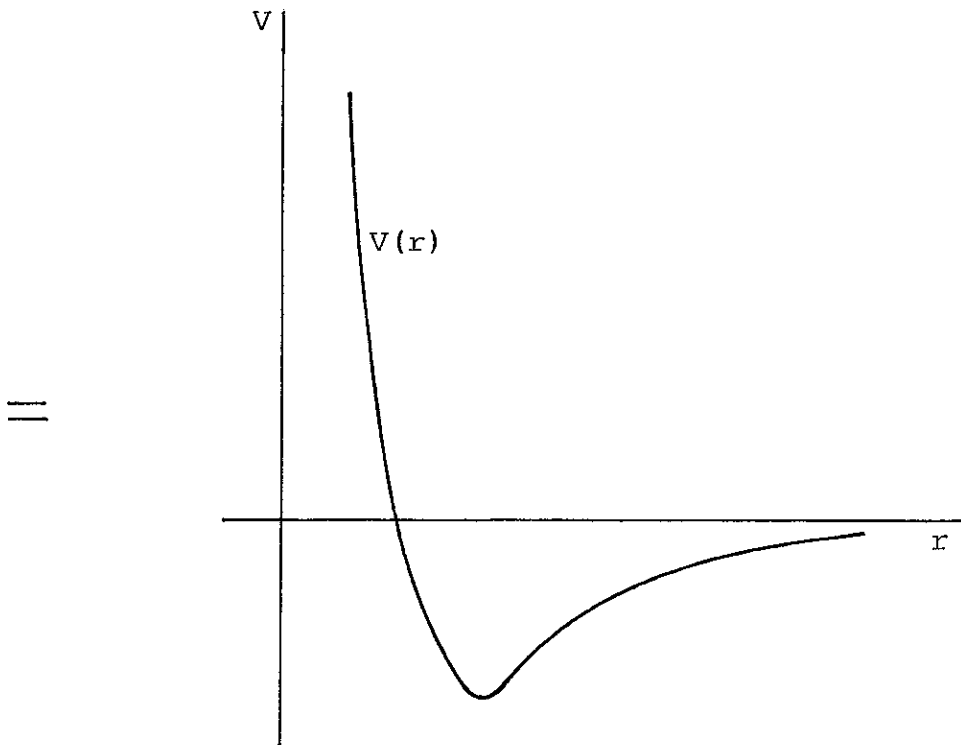
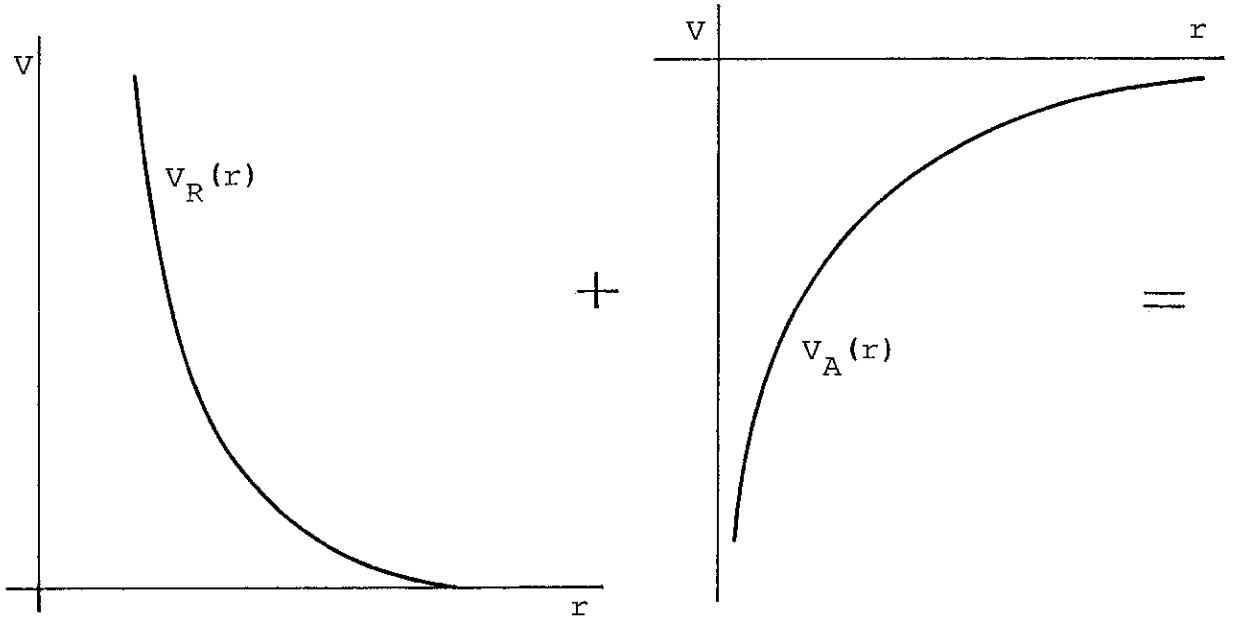


figura 1

Os parâmetros  $V_R$ ,  $V_A$ ,  $K_R$  e  $K_A$  são ajustados, como dissemos, para reproduzir aspectos experimentais dos núcleos em equilíbrio e da seção de choque diferencial nucleon-nucleon no espaço livre. É difícil obter este ajuste devido aos efeitos difrativos e de troca observados na interação nucleon-nucleon. Usualmente o aspecto fenomenológico a ser ajustado é a quantidade

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin^2\theta d(\cos\theta),$$

onde  $\sigma(\theta)$  é a seção de choque diferencial no centro de massa. Esta quantidade está relacionada com os coeficientes de viscosidade e condutividade térmica no limite hidrodinâmico [7,8].

Esse ajuste determina o alcance de  $V(r)$ , que é da mesma ordem do livre percurso médio ( $\sim 2\text{fm}$ ) dos nucleons na matéria nuclear em equilíbrio. O potencial, como mostra a figura 1, é nulo em  $r = d$ . Isto fornece uma escala de distâncias para definir  $V(r)$  como uma soma de um potencial de curto alcance, tipo caroço repulsivo, e um potencial de longo alcance, que varia suavemente com a distância,

$$V(r) = \begin{cases} V_c(r), & r < d \\ V_l(r), & r > d \end{cases}$$

Pouco sentido haveria em se falar de livre caminho médio ou de colisões simples ou múltiplas se  $V(r)$  tivesse apenas a sua componente de longo alcance. A presença do termo  $V_c(r)$ , ao contrário, implica em forças que variam drasticamente e altas componentes de momentum transferido, ou seja, em colisões propriamente ditas. Além desta a presença de  $V_c(r)$  tem ou

tra consequência. O caroço repulsivo significa uma região impenetrável. Somando os volumes das regiões proibidas em torno de cada nucleon teremos um volume a ser excluído do volume total do sistema. O resultado prático é uma diminuição da transparência dos núcleos e o favorecimento de estados de densidade nuclear mais elevada.

Essa possibilidade de discernimento entre efeitos de curto e longo alcance em  $V(r)$  permite estabelecer uma comparação do modelo de ECM com uma visão baseada numa equação cinética para a função de distribuição de 1 corpo,  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ .

A equação cinética seria

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{p}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col.}},$$

onde

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \bar{V}(r)$$

e

$$\bar{V}(r) = \int V_{\lambda}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'.$$

No caso limite de  $V_C(r)$  ser substituído por um caroço repulsivo infinito o termo de colisão  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}$  seria o termo de colisão de Enskog, apropriado para um gás de esferas rígidas,<sup>[8]</sup> uma vez que no cômputo de  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}$  o termo relevante de  $V(r)$  é  $V_C(r)$ . Noutro extremo, se  $V(r)$  possui apenas o seu termo  $V_1(r)$ , então  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} = 0$  e teríamos apenas a equação de Vlasov, na qual as mudanças em  $f$  são devidas apenas a interações com o campo médio  $V(r)$ .

A figura 2 mostra uma simulação da reação Nb + Nb a 400 MeV/n utilizando o modelo ECM<sup>[6]</sup>. A figura mostra a evolução temporal da reação com parâmetro de impacto  $b = 3$  fm, resultado obtido por uma média de cerca de 500 configurações distintas. Nota-se que os nucleons são espalhados preferencialmente em uma direção oblíqua à incidente.

A figura 3 mostra a comparação das distribuições de ângulos de fluxo  $\theta_F$ , obtidas com o modelo ECM, e os resultados experimentais. O ângulo médio de deflexão dos nucleons do alvo e do projétil, visto na figura 2, é aproximadamente igual ao valor médio de  $\theta_F$  para o mesmo valor de  $b$ , visto na figura 3. A existência de um fluxo lateral da matéria nuclear é interpretada pelo modelo de ECM como uma repulsão coletiva dos núcleos. A origem dessa repulsão se deve à parte repulsiva do potencial adotado, que implica, como dissemos anteriormente, num efeito de exclusão de volume. Isto facilita a compressão dos dois núcleos. Os nucleons dessa forma tendem a ser defletidos de uma zona de alta densidade para uma de baixa densidade, ou seja, lateralmente. A parte atrativa do potencial contribui mantendo os nucleons próximos, impedindo a sua expansão antes das colisões.

Deve ser ressaltado que em energias da ordem de algumas centenas de MeV/n os efeitos quânticos e de campo médio são mais importantes que em energias mais altas. A aproximação de ECM deve ser melhor para estas energias mais altas, mas neste caso a relatividade tem de ser levada em conta.

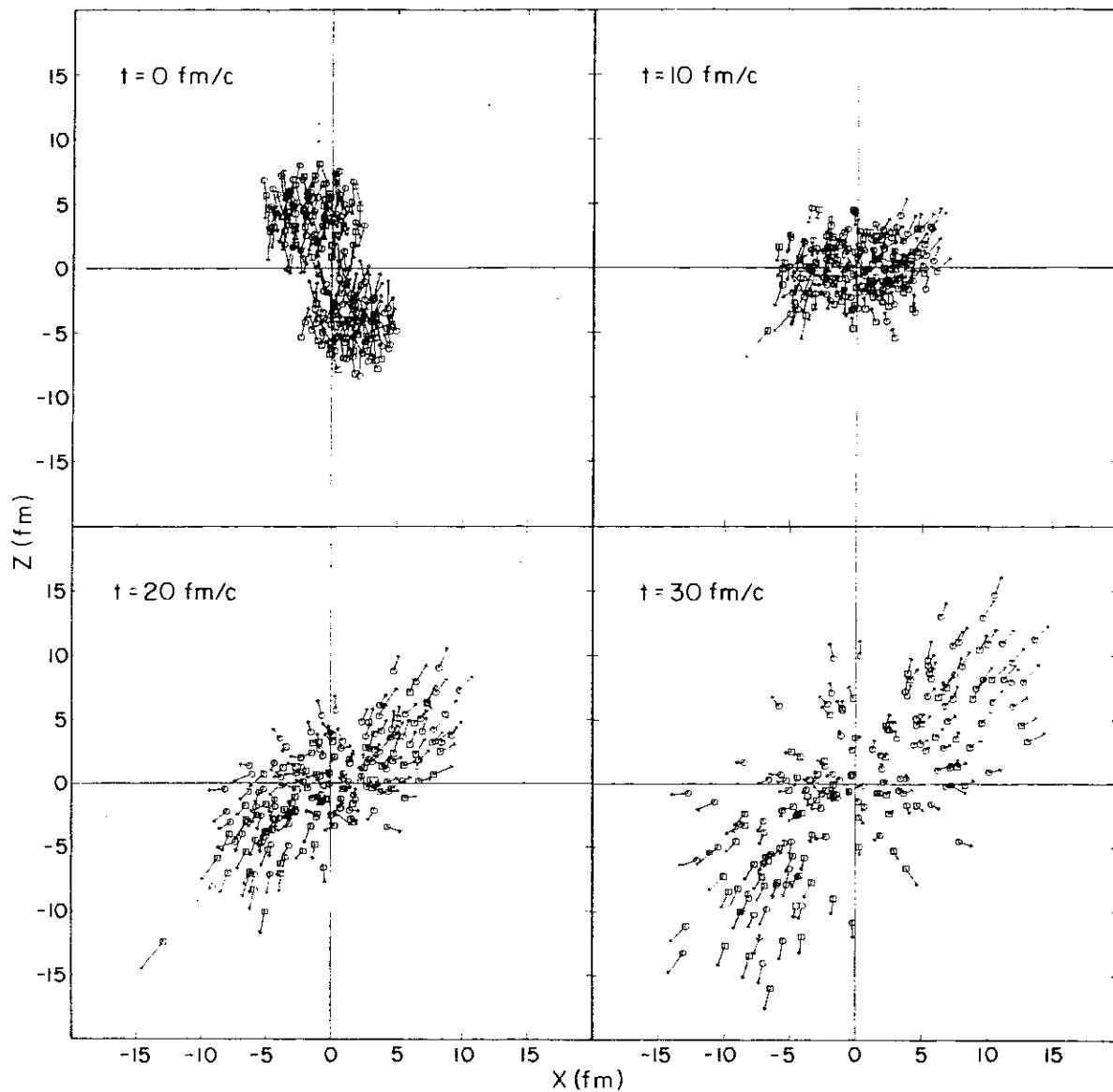


Figura 2 - Simulação da reação Nb+Nb (400 MeV/n) utilizando o modelo ECM. A simulação é feita no sistema do centro de massa e com parâmetro de impacto  $b=3$  fm. É bem nítido o movimento lateral dos nucleons na fase de expansão da reação (referência [6]).

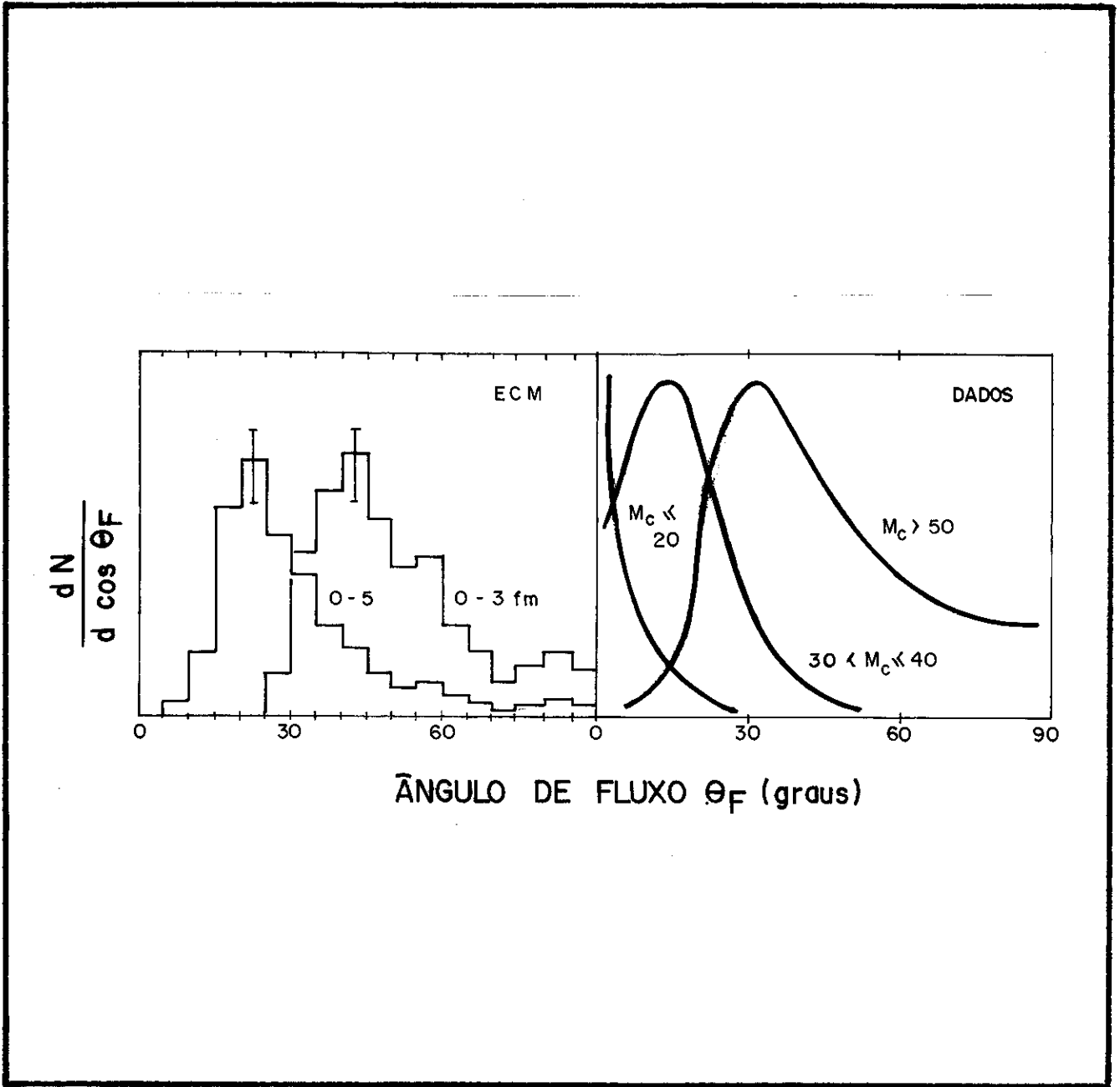


Figura 3 - Comparação entre as distribuições de ângulos de fluxo experimentais e as do modelo ECM, tomadas como uma média com  $0 < b < 3 \text{ fm}$ , e  $3 < b < 5 \text{ fm}$  (referência [6]).

## A CASCATA INTRANUCLEAR

Se uma reação em altas energias os núcleos atômicos se comportassem como gases rarefeitos então a descrição baseada no modelo de ECM se tornaria muito simples. Nestas condições de suficiente diluição o livre percurso médio dos nucleons seria muito maior que o alcance da interação ou, alternativamente, o tempo característico de cada colisão nucleon-nucleon seria muito menor que o tempo transcorrido entre duas colisões sucessivas. As trajetórias dos nucleons seriam praticamente retilíneas entre duas colisões. Interações envolvendo mais de dois corpos seriam raras. As colisões entre os nucleons seriam praticamente independentes uma das outras. Cada partícula somente sentiria a presença de outra no curto intervalo de duração de cada colisão. A dinâmica da reação seria, deste modo, determinada fundamentalmente pelas características da interação nucleon-nucleon no espaço livre. Correlações e coletividade seriam conceitos de pouca ou nenhuma valia. A reação entre dois núcleos poderia ser encarada como uma simples superposição de colisões binárias entre seus constituintes.

Esta é a visão em que se baseia a cascata intranuclear<sup>[9,11]</sup>. Rigorosamente falando a cascata não é um modelo teórico propriamente dito, mas um método de simulação. Uma descrição minuciosa do método pode ser encontrada na referência[9]. Aqui nos ocuparemos apenas das suas características gerais e dos resultados obtidos pela versão mais elaborada<sup>[11]</sup>.

Em linhas gerais o método de cascata consiste na

simulação de um grande número de colisões núcleo-núcleo. Cada núcleo é representado por um conjunto de nucleons puntiformes distribuídos de acordo com a densidade nuclear observada e com uma distribuição de momentum que reproduz a distribuição de Fermi. Os nucleons movem-se em trajetórias retilíneas entre suas sucessivas colisões. Essas colisões são instantâneas e ocorrem sempre que a distância entre dois nucleons atinge um valor mínimo. Este critério de colisão é determinado pela seção de choque total (experimental) nucleon-nucleon no espaço livre,  $\sigma(s)$  ( $s^2 \equiv -p^2 + \varepsilon^2$ ,  $p$  é o momentum relativo e  $\varepsilon$  a energia total das partículas). Os estados finais dos nucleons são determinados por um sorteio dentre os estados possíveis, de acordo com a seção de choque diferencial (experimental) no espaço livre, o que confere um caráter não determinístico ao método. Este procedimento conserva a energia em cada colisão nucleon-nucleon, mas não o momentum angular. O valor de uma variável dinâmica num dado instante da reação é obtido através de uma média dos valores que a variável assume naquele instante em cada uma das colisões simuladas.

Como resultado o método fornece  $6_N$  quantidades ( $N$ = número total de nucleons),

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\},$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{e} \quad \vec{p} = \vec{p}(t)$$

ou, equivalentemente,

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=1}^{\Omega} \sum_{n=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_n(t)),$$



onde  $\Omega$  é o número total de colisões núcleon-núcleon simuladas e  $\vec{r}_n(t)$  é o vetor posição do n-ésimo nucleon na  $\omega$ -ésima simulação.

O método de cascata é livre de parâmetros ajustáveis e pode ser executado com qualquer combinação alvo+projétil, em qualquer parâmetro de impacto. A faixa de energias em que este tipo de simulação se tornaria mais adequado seria, provavelmente, a faixa de 1 GeV/n em diante. A razão é que nesta faixa de energias deve aumentar a importância das colisões independentes entre dois nucleons, nos quais se baseia a cascata. A transparência dos núcleos aumenta com o aumento da energia incidente, o que favorece a realização das condições que a cascata supõe ocorrerem. Por outro lado, maiores energias incidentes implicam na entrada em cena de novos graus de liberdade, como a produção e o decaimento de hadrons mais pesados. O modelo de cascata é demasiado simples e as dificuldades de incluir estes novos fenômenos na simulação seria muito grande. Por sua natureza o método de cascata é aplicável em energias relativísticas. Mas nesse caso surgem alguns problemas no que se refere à invariância dos resultados<sup>[12]</sup>. Para entender o que isto significa vamos nos deter um pouco sobre a forma como usualmente é feito o andamento no tempo da simulação. Definidas as configurações iniciais e o critério de colisão temos inicialmente uma lista de colisões que ocorreriam se todos os nucleons evoluíssem livremente. Desta lista inicial apenas a colisão mais próxima no tempo é processada. Definidos os estados finais do par que interagiu nova lista é feita, novamente é processada apenas a colisão mais imediata e assim sucessivamente. Esta lista não é, evidentemente, idêntica em todos os sistemas de referência, uma vez que a

simultaneidade não é um conceito relativisticamente invariante. A determinação do instante de colisão é feita utilizando o "tamanho geométrico" do nucleon. Assim sendo a ordenação temporal de uma colisão passa a depender do sistema de referência em que ela é simulada. Os efeitos decorrentes desta não invariância são ocultados pela média estatística de muitas simulações e somente se tornariam explícitos se alguma das hipóteses da cascata fosse modificada, como por exemplo as colisões nucleon-nucleon serem não instantâneas.

Devido ao seu caráter peculiar de simulação estatística torna-se difícil estabelecer relação direta com alguma teoria específica. Há uma opinião generalizada de que a cascata é um método de solução numérica da equação de Boltzmann. A razão dessa crença está nos ingredientes de que a cascata se utiliza: um esquema clássico e a seção de choque nucleon-nucleon para o espaço livre. Além disso a função de distribuição de um corpo fornecida pela cascata não sofre modificações significativas numa escala de tempo da ordem do intervalo entre duas colisões nucleon-nucleon consecutivas. Dito de outra forma, a distribuição de um corpo da cascata evolui no espaço de fase se gundo uma trajetória suave. A equação de Boltzmann é obtida a partir da hipótese do caos e descreve a evolução de um sistema markoviano, com completa ausência de correlações. Mas na casca ta não há indícios de movimento caótico das partículas, que guardam em grande parte a memória da direção inicial de seu movimento. A forma de andamento temporal da cascata induz uma correlação entre todos os nucleons ao condicionar a ocorrência de uma colisão ao resultado de interações anteriores. Além dis

so a hipótese de colisões apenas binárias na cascata é muito restritiva. Na referência [9] é feito um estudo comparativo entre uma simulação de cascata com andamento temporal convencional, determinado pelas próprias colisões nucleon-nucleon, e outra simulação em que o andamento se dá de acordo com um intervalo constante, imposto externamente. O resultado é que há um número significativo de colisões envolvendo três ou mais corpos. As dificuldades de processar de uma forma realística uma colisão envolvendo mais de dois corpos são muito grandes. Na referência [13] o cálculo de cascata convencional é comparada com um outro em que as colisões não binárias são permitidas, estas sendo tratadas via equação clássica de movimento com um potencial da forma

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & 0 < r < R_1 \\ V_0, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$$

onde  $r$  é a distância entre os nucleons. Os resultados indicam que as colisões não binárias desempenham papel importante, diminuindo a transparência dos núcleos e contribuindo para uma equi libração mais rápida dos núcleos. O que se conclui é que os efeitos não binários, eliminados a priori na cascata convencional, devem de alguma forma ser considerados numa descrição mais realista. A existência de colisões puramente binárias se constitui num dos pilares da equação de Boltzmann.

A relação entre o método de cascata e um quadro teórico, se existe, não é clara. As semelhanças entre a cascata e a equação de Boltzmann sugerem que a cascata talvez se consti

tua na solução numérica de algum tipo de equação cinética. Mas este é um ponto ainda a ser esclarecido.

Passemos agora à apresentação dos resultados obtidos com o código de Kitazoe e colaboradores<sup>[11]</sup>. Esta formulação da cascata, além das características mencionadas anteriormente, contempla os seguintes aspectos:

- a) os nucleons em cada núcleo são distribuídos inicialmente como um gás de Fermi num poço quadrado de potencial. Como consequência os nucleons são refratados ou refletidos pela superfície dos núcleos, mas podem mover-se livremente de um núcleo a outro quando estes se superpoem;
- b) dois nucleons são proibidos de colidir se pertencem ao mesmo núcleo e se encontram no estado ligado ou se algum deles cair no estado ligado após a colisão. Este procedimento simula o princípio de Pauli;
- c) pions são formados por decaimento de ressonâncias  $\Delta$  formadas em colisões inelásticas e, por hipótese, não interagem com qualquer outra partícula;

A figura 4 mostra a evolução temporal da reação  $Nb + Nb$  a 400 MeV/n com um parâmetro de impacto  $b = 3.0$  fm, que é o mais provável para eventos de alta multiplicidade<sup>[14]</sup>. Vamos claramente que um fluxo de nucleons em direção lateral também é observado neste cálculo de cascata. A figura 5 compara as distribuições de ângulos de fluxo  $\theta_F$  para a mesma reação e também para a colisão  $Ca + Ca$  (400 MeV/n) obtidas por este código de cascata e experimentalmente. Em ambos os casos os resultados da simulação são muito bons nas duas seleções de multiplicidade feitas. Este é um resultado surpreendente. Os códigos

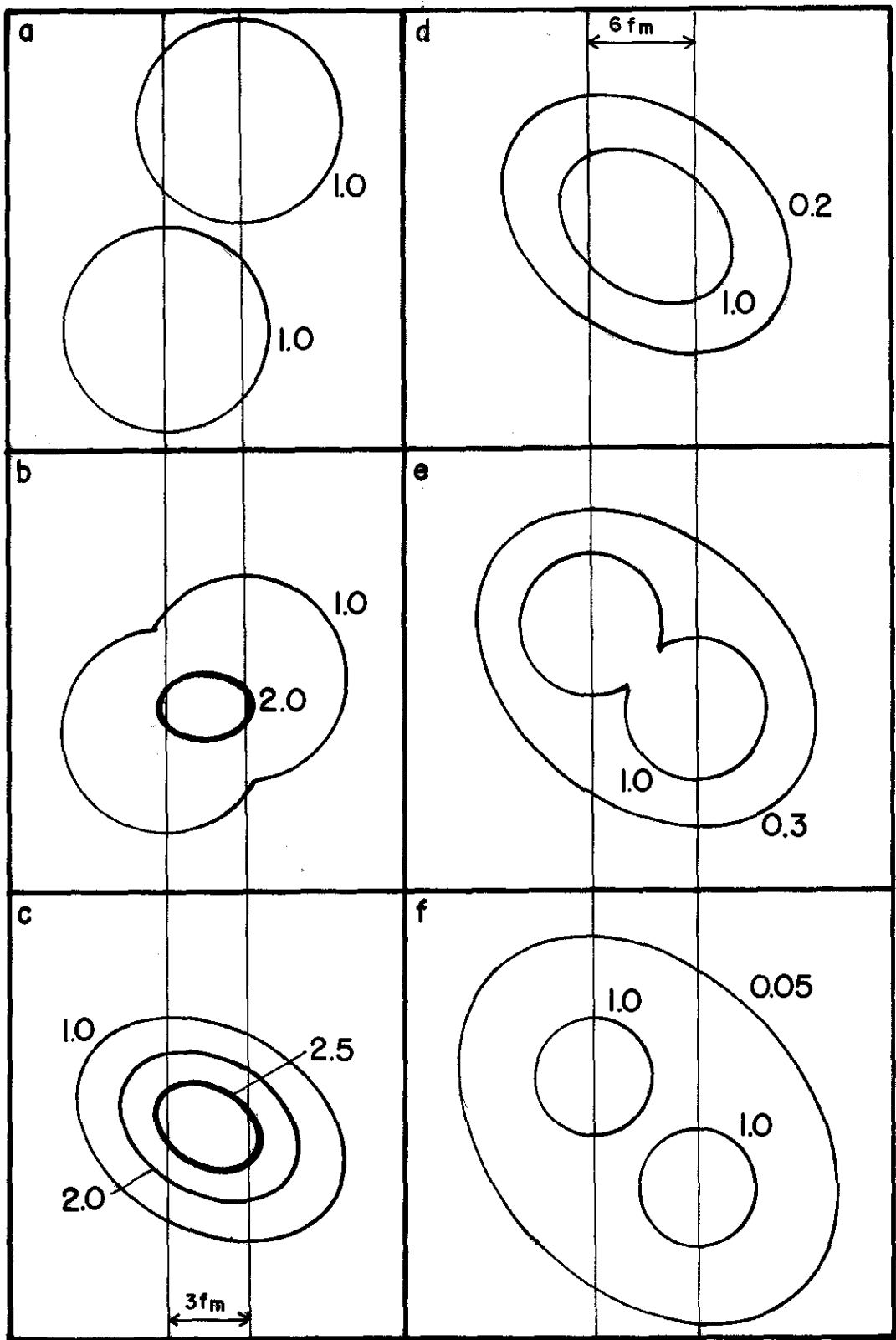


Figura 4 - Evolução temporal da reação Nb+Nb (400 MeV/n) segundo o método de cascata. A simulação é feita no referencial do centro de massa, com  $b=3$  fm. Os contornos delimitam regiões de mesma densidade relativa,  $\rho/\rho_0$  (referência [14]).

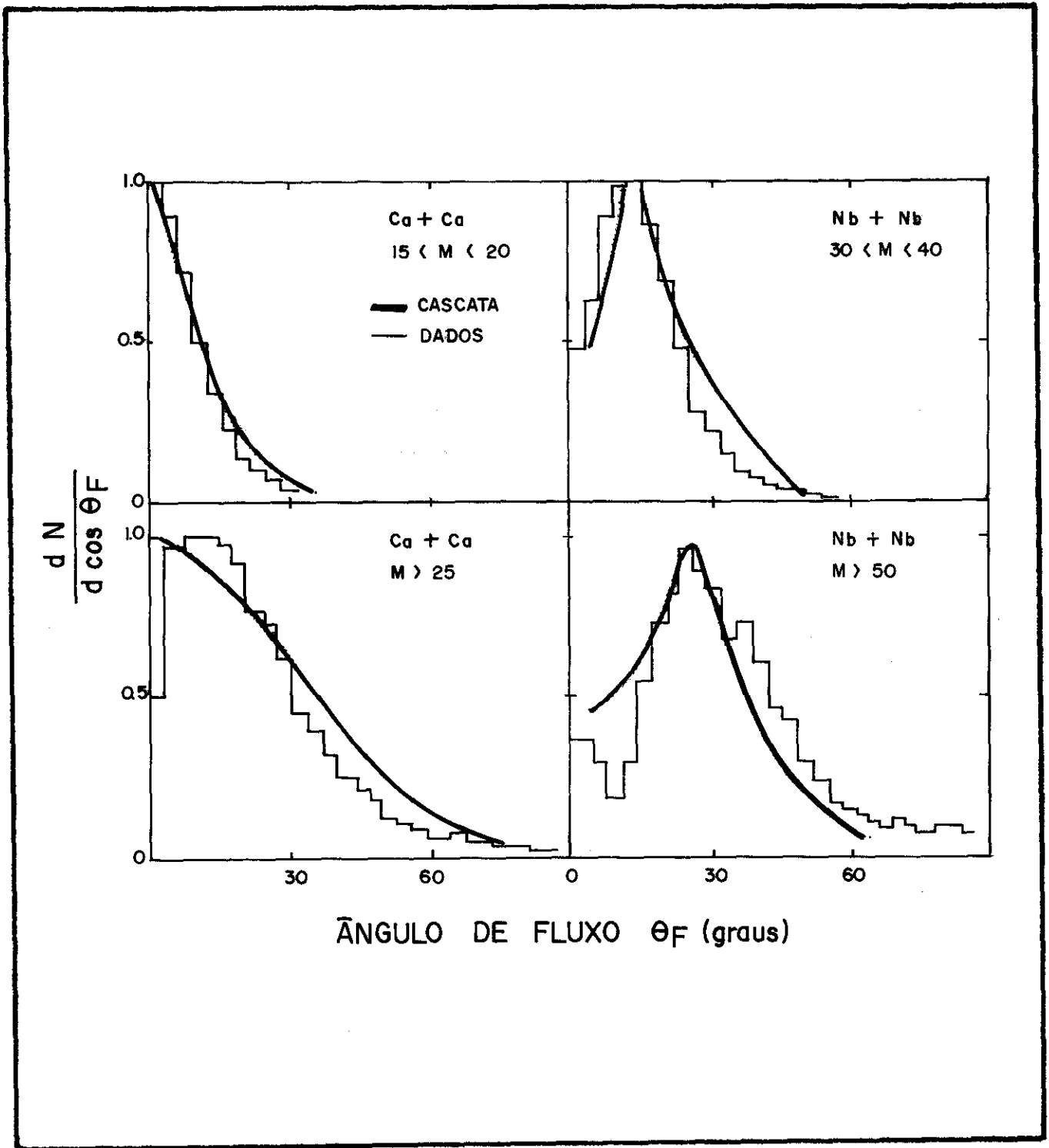


Figura 5 - Distribuições de ângulo de fluxo experimentais, comparadas com as obtidas com o modelo de cascata, para as reações Ca+Ca e Nb+ Nb, ambas a 400 MeV/n (referência [14]).

## O MODELO HIDRODINÂMICO

Se dois núcleos numa reação a altas energias formam um sistema suficientemente denso, então o livre percurso médio dos nucleons seria muito pequeno comparado com as dimensões do sistema e com o próprio alcance da interação nucleon-nucleon. Seguir uma a uma as trajetórias clássicas de todos os nucleons seria muito difícil nestas circunstâncias. Como resultado de tal proximidade entre os nucleons haveria em cada pequena região do sistema um número elevado de colisões. Nesta situação, é relevante considerar um comportamento macroscópico dos nucleons, como em um fluido. As equações de movimento de cada nucleon poderiam ser substituídas por equações hidrodinâmicas descrevendo um sistema equilibrado localmente. Em vez de partículas microscópicas teríamos temperatura, densidade e pressão, conceitos macroscópicos. Os graus de liberdade individuais dos nucleons cederiam lugar a uma equação de estado que especificaria as propriedades termodinâmicas de um grande número de partículas.

Este é o quadro subjacente ao modelo hidrodinâmico<sup>[15,18]</sup>. Na visão deste modelo a colisão de dois núcleos pesados é representada por uma colisão de duas gotas líquidas. No lugar de trajetória de nucleons a informação básica está contida na densidade  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ , na velocidade de fluxo  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  e na densidade de energia  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, t)$ . Estas são as variáveis dinâmicas relevantes, especificadas por equações que descrevem a conservação da massa, do momentum e da energia no fluido nuclear.

A figura 6<sup>[19]</sup> mostra como é a colisão de um núcleo de argônio ( $A = 40$ ) com um de chumbo ( $A = 208$ ), a uma energia de

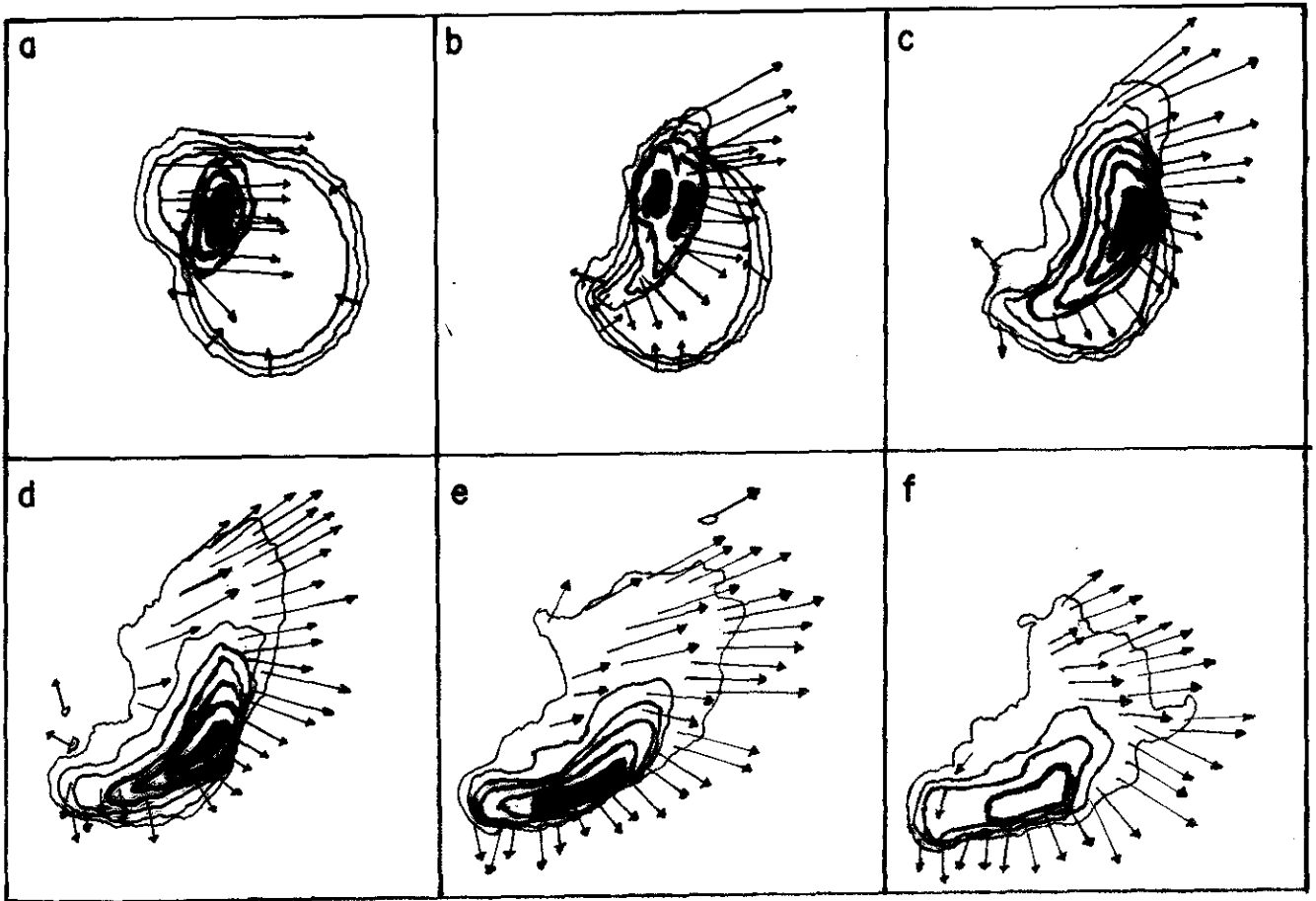


Figura 6 - Reação Ar+Pb(0.8 GeV/n) vista pelo modelo hidrodinâmico, no referencial do laboratório. O impacto do projétil provoca a formação de uma onda de choque que se propaga no interior do núcleo de chumbo, aquecendo e comprimindo a matéria nuclear na frente de onda. O sistema expande-se das regiões de alta pressão para as de baixa pressão, isto é, lateralmente (referência [19]).



0.8 GeV/n, vista pela hidrodinâmica no referencial do laboratório. Esta energia corresponde a uma velocidade que é cerca de 80% da velocidade da luz. A velocidade do som na matéria nuclear em equilíbrio é algo em torno de 30% da velocidade da luz. O impacto causado pelo núcleo de argônio provoca a formação de uma onda de choque que se propaga pelo interior do núcleo de chumbo, comprimindo e aquecendo a matéria nuclear. Nos últimos estágios da colisão a densidade do sistema atinge um limite inferior e tem início o processo de fragmentação. A propagação da onda de choque no núcleo de chumbo provoca uma emissão dos produtos da reação em direções preferencialmente laterais. A onda de choque nuclear é o mecanismo chave para a compressão e o aquecimento da matéria nuclear, segundo o modelo hidrodinâmico.

As equações de movimento hidrodinâmicas podem ser obtidas a partir de uma equação cinética. O método, desenvolvido por Chapman e Enskog<sup>[7,8]</sup>, consiste numa expansão em série de potências dos gradientes de  $\rho$ ,  $T$  e  $\vec{v}$  (essencialmente é uma expansão em potências de  $\lambda/L$ ,  $\lambda$  = livre caminho médio e  $L$  = dimensão característica do sistema,  $\lambda/L \ll 1$ ). Correspondendo a ordens crescentes de  $\lambda/L$  há uma hierarquia de equações hidrodinâmicas envolvendo derivadas espaciais superiores.

A ordem mais baixa  $(\lambda/L)^0$  corresponde às equações de Euler para um fluido ideal, que representam a conservação da massa (eq. de continuidade), do momentum e da energia, respectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon v_i)}{\partial x_i} = - \frac{\partial(v_i p)}{\partial x_i} \quad (3)$$

As quantidades  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $\epsilon$  e  $p$ , densidade, velocidade de escoamento, densidade de energia e pressão, são quantidades definidas localmente representando um estado de equilíbrio termodinâmico local. Não há viscosidade ou condução de calor, de forma que dissipação de energia ocorre apenas através de ondas de choque. Num fluido ideal uma onda de choque tem espessura infinitesimal, representada por uma descontinuidade nas quantidades termodinâmicas do fluido.

Considerando a próxima ordem na expansão de Champman-Enskog,  $(\lambda/L)^1$ , obtemos as equações de Navier-Stokes, representando da mesma forma que as equações de Euler, a conservação da massa, do momentum e da energia.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_i \Pi_{ij} - \delta_{ij} v_i p \right] + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (6)$$

onde

$$\Pi_{ij} = \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \delta_{ij} p \quad (7)$$

Nas equações acima  $\eta$  e  $\zeta$  são os coeficientes de viscosidade e  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica. Observe que se estes coeficientes se anulam as equações de Navier-Stokes se reduzem às equações de Euler. A presença dos coeficientes de viscosidade e condutividade térmica representam efeitos dissipativos que amortecem a onda de choque formada em reações de núcleos pesados. O equilíbrio local é apenas aproximadamente atingido. A função distribuição de equilíbrio  $f$ , neste caso, é a função de equilíbrio local  $f^0$  (obtida quando  $(\frac{\partial f}{\partial t})_{col} = 0$ ) acrescida de uma função que depende dos gradientes de  $T$  e  $\vec{v}$ ,

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f^0(\vec{r}, \vec{v}, t) + \phi(\nabla T, \nabla v).$$

A solução das equações hidrodinâmicas requer a especificação da equação de estado do sistema relacionando como a energia interna depende da pressão, densidade e temperatura. No caso das equações de Navier-Stokes é necessário também especificar os coeficientes de transportes  $\eta, \zeta$ , e  $k$ . As equações de Euler são as mais empregadas pois sua simplicidade maior permite que sejam integradas em três dimensões. As equações de Navier-Stokes até o momento só são resolvidas em 2 dimensões. A descrição de reações envolvendo as equações de Navier-Stokes é mais realista. Há estimativas de que os efeitos dissipativos da viscosidade e condução térmica dão conta de aproximadamente 30% da energia incidente<sup>[20]</sup> quando esta é da ordem de 400MeV/n. É interessante, portanto, um esforço na tentativa de solução tridimensional destas equações. Quando a relatividade é inevitável ( $E_{IN} \gtrsim 8$  GeV/n) as dificuldades de se tratar conceitos

como viscosidade são grandes. Neste caso o modelo utiliza apenas a hidrodinâmica do fluido ideal. As equações hidrodinâmicas do fluido ideal relativístico podem ser escritas numa forma idêntica às equações (1-3). As quantidades  $\rho$ ,  $\vec{M} \equiv \rho \vec{v}$  e  $\epsilon$  são definidas no sistema de referência computacional, usualmente tomado como o sistema do laboratório. Essas grandezas relacionam-se com as equivalentes computadas no referencial de repouso do fluido através das relações

$$\rho = \gamma \rho'$$

$$\vec{M} = \gamma^2 (\epsilon + p) \vec{v}'$$

$$\epsilon = \gamma^2 (\epsilon' + p) - p \quad (p = \text{pressão})$$

A solução numérica das equações hidrodinâmicas é obtida dividindo a região do espaço onde ocorre a reação em pequenas células adjacentes e, para cada uma delas, atribui-se um valor inicial de densidade, velocidade, etc:

$$\rho(\vec{r}, t = 0) \rightarrow \{\rho_i\}$$

$$v(\vec{r}, t = 0) \rightarrow \{\vec{v}_i\}$$

$$f(\rho, \vec{v}) \rightarrow \{f_i(\rho_i, \vec{v}_i)\}$$

O andamento do processo é feito, passo a passo, acompanhando os valores de  $\{\rho_i\}$ ,  $\{\vec{v}_i\}$ ,  $\{\epsilon_i\}$  para cada célula, fornecidos pelas equações de movimento. Mesmo na sua versão mais simples, no entanto, a solução das equações hidrodinâmicas é muito complexa e trabalhosa, e vem acompanhada de erros apreciáveis. [15].

A despeito de sua complexidade, as equações de movimento ainda não são suficientes para uma comparação direta com os dados. É necessário um modelo que especifique como o fluido nuclear se fragmenta, formando as partículas que são detetadas. O modelo mais rudimentar consiste em encerrar a reação quando o fluido atingir uma densidade média menor que a densidade normal da matéria nuclear. O espectro de protons é determinado pela distribuição de momentum do fluido no instante em que o cálculo é encerrado.

Um modelo mais realista<sup>[21]</sup> considera não o instante em que a densidade média atinge um valor crítico, mas sim quando a densidade em cada célula da rede computacional atinge esse valor de  $\rho$ . Diferentes células "congelarão" em instantes de tempo distintos. Nestes tratamentos as interações finais são completamente desprezadas.

Numa célula de volume  $V$ , temperatura  $T$  e densidade nucleônica  $\rho$ , o número médio de deuterons, por exemplo, é dado pela expressão<sup>[22]</sup>

$$\langle n_d \rangle = \langle n_p \rangle \cdot \langle n_n \rangle \frac{3}{4} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_p T} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{V} ,$$

onde  $\langle n_p \rangle$  é o número médio de protons,  $\langle n_p \rangle = \rho \cdot \frac{Z}{A}$ ,  $\langle n_n \rangle$ , o número médio de neutrons,  $\langle n_n \rangle = \rho \left( 1 - \frac{Z}{A} \right)$ , e  $m_p$  é a massa do proton. Essa expressão supõe que o equilíbrio químico é atingido no instante de congelamento.

Num outro modelo considera-se que em cada célula há um potencial médio,  $V_0$ . Apenas os nucleons cuja energia cinética for maior que  $V_0$  conseguem escapar da célula como nu-

cleons livres. O restante forma fragmentos compostos.

Qualquer modelo de fragmentação envolve hipóteses e parâmetros além dos que levam às equações de movimento. O mecanismo adotado para a fragmentação do fluido nuclear infelizmente influencia diretamente o espectro de fragmentos individuais,  $p$ ,  $d$ ,  $t$  [23-24].

Até o momento apenas duas informações acerca da equação de estado da matéria nuclear são bem estabelecidas: a energia por nucleon e a densidade no estado fundamental. Mesmo o coeficiente de compressibilidade da matéria nuclear não é satisfatoriamente conhecido. As várias especulações sobre possíveis transições de fase da matéria nuclear em altas densidades sugerem que a equação de estado deva ser bastante complexa.

Na determinação da equação de estado, admite-se que a energia interna por nucleon seja composta por contribuições de dois tipos, uma compressional dependendo apenas de  $\rho$ , e uma térmica, dependendo tanto de  $\rho$  como da temperatura,

$$E(\rho, T) = E_C(\rho) + E_T(\rho, T)$$

A energia interna compressional por nucleon é simplesmente

$$\text{energia compressional} = E_C(\rho) - E_C(\rho_0) \quad ,$$

onde  $\rho_0 = 0.145 \text{ fm}^{-3}$  é a densidade normal da matéria nuclear,

e  $E_C(\rho_0) = -15.960 \text{ MeV/n}$  é a energia por nucleon no estado fundamental [25].

A energia térmica é dada por

$$\text{energia térmica} = E(\rho, T) - E_C(\rho)$$

A liberdade de escolha da forma funcional de  $E_0(\rho)$  é muito grande pois além do valor de  $E_C(\rho_0)$  apenas outra condição impõe alguma restrição, a de  $E_0$  ter um mínimo em  $\rho = \rho_0$ ,

$$\left( \frac{\partial E_C}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0$$

A figura 7 mostra três formas fenomenológicas para  $E_C(\rho)$  [26].

A pressão é obtida pela primeira lei da termodinâmica,

$$dE = Tds - pdv ,$$

onde  $v = \frac{1}{\rho}$  é o volume por nucleon. O resultado são duas contribuições para a pressão, uma térmica e outra compressional.

$$p = \rho^2 \left. \frac{\partial E(\rho, T)}{\partial \rho} \right|_S = \rho^2 \left[ \frac{\partial E_C(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial E_T(\rho T)}{\partial \rho} \right]_S , \quad (8)$$

onde a derivação com entropia constante corresponde a processos adiabáticos.

O primeiro termo da equação (8) pode ser obtido a partir da escolha de uma forma fenomenológica para  $E_C(\rho)$ . O segundo termo, entretanto, requer hipóteses adicionais, pois a informação sobre a dependência funcional de  $E_T$  com  $\rho$  é muito pouca. Usa-se frequentemente a expressão correspondente a um gás de Fermi. A pressão devida à contribuição térmica, nesse caso, será

$$p_T \equiv \rho^2 \left. \frac{\partial E_T}{\partial \rho} \right|_S = \alpha \rho E_T , \quad \alpha = \text{constante} \quad (9)$$

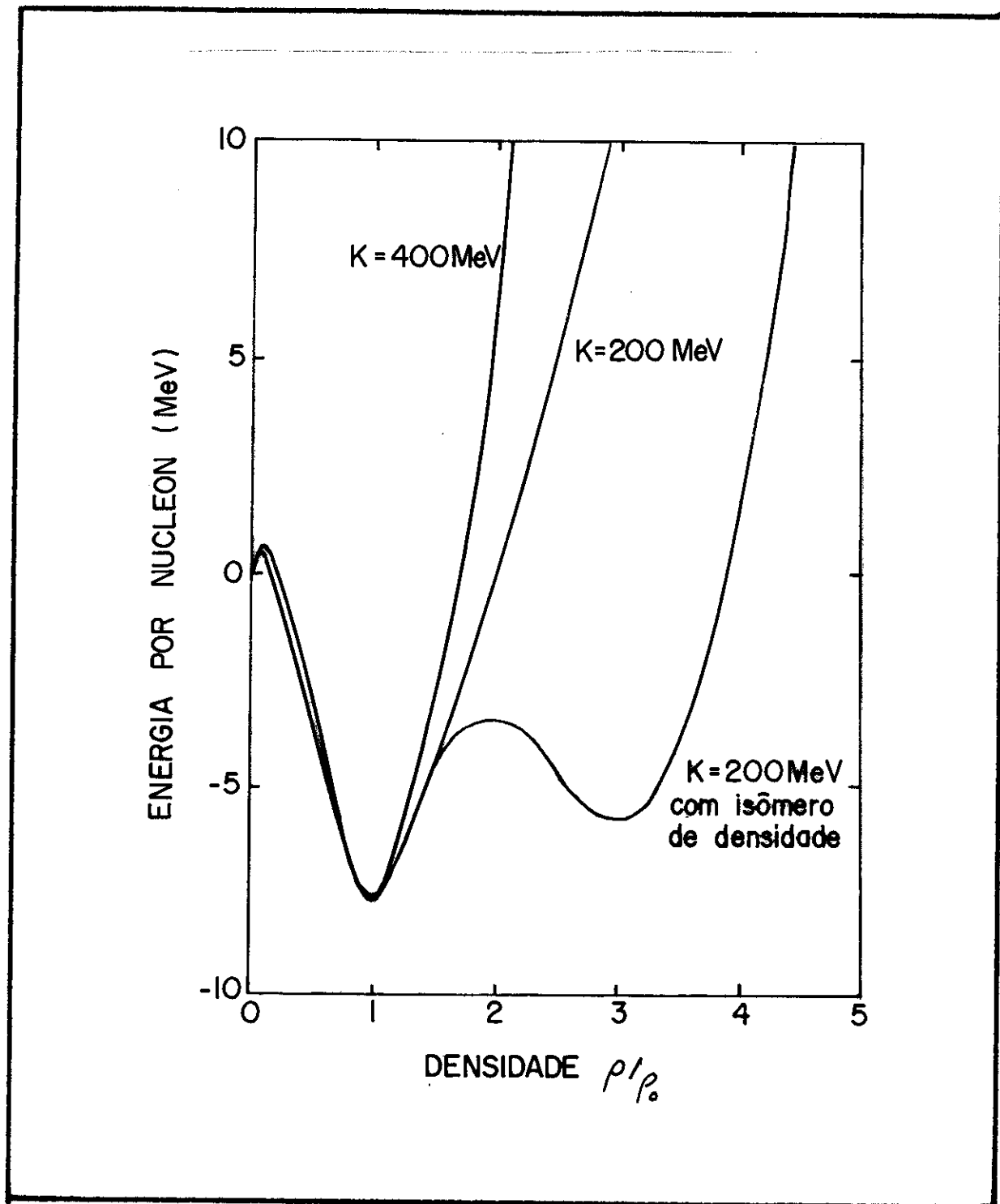


Figura 7 - Três formas fenomenológicas para o termo compressional da equação de estado da matéria nuclear. O coeficiente de compressibilidade  $\bar{k}$  é definido como  $\bar{k} = 9\rho_0^2 \left. \frac{d^2 E_0(\rho)}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0}$ . Quanto maior for o valor de  $\bar{k}$  maior é a energia necessária para a compressão da matéria nuclear. Todas as curvas têm um mínimo no estado fundamental. O mínimo secundário representa um estado estável com  $\rho > \rho_0$ , isto é, correspondendo a um isômetro de densidade (referência [26]).



Uma equação de estado é o "input" do modelo hidrodinâmico. É possível, em princípio, extrair dos dados experimentais informações a respeito da equação de estado da matéria nuclear. Mas isto, em última análise, é determinado pela sensibilidade dos resultados do modelo a uma particular equação adotada como ponto de partida. Vamos nos deter por uns instantes nesta questão.

A compressão e o aquecimento produzidos por uma onda de choque nuclear podem ser estimados pela equação de Rankine-Hugoniot [27],

$$(E^2 - E_0^2) + p \left( \frac{E}{\rho} - \frac{E_0}{\rho_0} \right) = 0, \quad (10)$$

que expressa a conservação da massa, do momentum e da energia ao longo da frente da onda. Esta equação é válida para um fluido ideal e no seu sistema de repouso. A energia por nucleon  $E$  é fixada pela energia incidente  $K$ ,

$$E = \gamma_{CM}(k) \cdot E_0, \quad E_0 = (m_0 - B) \cdot \frac{v}{c} \cdot 931 \text{ MeV} \quad (11)$$

onde  $\gamma_{CM}(K) = \left( 1 + \frac{K^2}{2E_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

Com uso das equações (8) e (11) é possível resolver a equação (10) para  $p(K)$ ,

$$p(K) = \frac{1}{2} K \rho_0 \left[ 1 - \gamma_{CM}(K) \cdot \frac{\rho_0}{\rho(K)} \right]^{-1} \quad (12)$$

A onda de choque nuclear é uma onda de pressão. A pressão é a força que direciona a emissão dos fragmentos da reação. O que a equação (12) nos mostra é que a sensibilidade da

pressão com a equação de estado surge apenas através da dependência desta com a densidade. Infelizmente quanto maior a densidade, menor é a sensibilidade da pressão com a equação de estado escolhida. Este fato não se deve à escolha particular de uma equação de estado, mas aos fortes vínculos impostos à pressão pela conservação do número bariônico, do momentum e da energia.

Admitindo que a pressão devida à energia térmica seja dada pela equação (9) podemos resolver a equação (10) para  $\rho(K)$  com auxílio das equações (8) e (11),

$$\rho(K) = \frac{\rho_0}{\alpha} [(1 + \alpha) \gamma_{CM}(K) + 1] \quad (13)$$

A densidade aumentaria indefinidamente com o aumento da energia incidente!

Vamos agora apresentar os resultados obtidos com o modelo hidrodinâmico. A figura 8 mostra a reação  $^{136}\text{Nb} + ^{136}\text{Nb}$  (400 MeV/n), vista no referencial do centro de massa, com parâmetro de impacto  $b = 3 \text{ fm}$  [28]. Nota-se claramente a formação de uma região central altamente comprimida que expande-se nos últimos estágios da colisão. Parte substantiva dos núcleos originais é espalhada lateralmente, resultado da forte pressão exercida pela região comprimida sobre as demais regiões. No caso limite de  $b = 0$  o fluxo de matéria nuclear deveria ser principalmente perpendicular à direção do feixe incidente. Colisões deste tipo, porém, são raras.

A figura 9 mostra uma comparação entre a distribuição de ângulos de fluxo obtida experimentalmente e com o modelo hidrodinâmico, para a mesma reação. A comparação é feita

com duas seleções de multiplicidade. Existem distorções na análise de fluxo quando a multiplicidade é menor que 100, devidas ao número finito de partículas<sup>[29]</sup>. Isto dificulta a comparação direta dos resultados obtidos com a hidrodinâmica, que considera a matéria nuclear como um contínuo. Para os eventos de alta multiplicidade os valores ou parâmetros de impacto são tomados como  $0 < b \lesssim 3$  fm, enquanto que para os de multiplicidade intermediária,  $b_{\text{máx}} = 6$  fm. Em ambos os casos as previsões da hidrodinâmica concordam com os resultados experimentais. O ângulo de fluxo  $\theta_F$  varia rapidamente de  $90^\circ$  para ângulos menores à medida que  $b$  aumenta. Com sistemas mais pesados como  $^{238}\text{U} + \text{U}$  por exemplo, é possível obter ângulos de fluxo maiores que  $\theta_F \simeq 30^\circ$  obtidos com a reação estudada. Uma comparação quantitativa deve melhorar substancialmente com sistemas mais pesados, para os quais as flutuações da análise global devem ser bem menores.

Na visão da hidrodinâmica a observação de um pico na distribuição de ângulos de fluxo em  $\theta_F \neq 0^\circ$  é um sinal inequívoco da compressão da matéria nuclear.

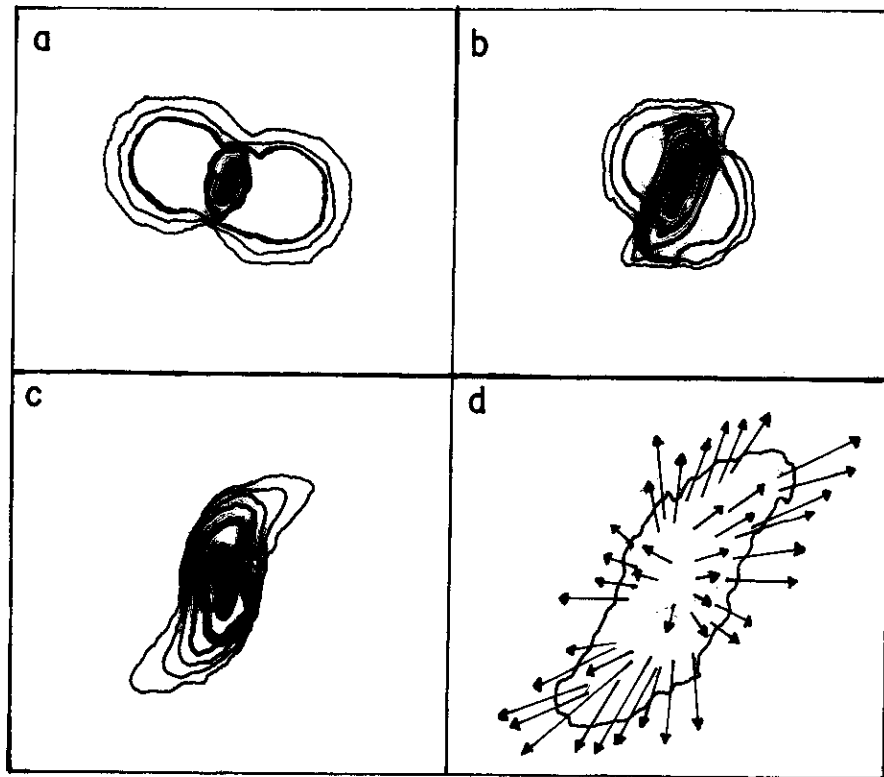


Figura 8 - Evolução temporal da reação Nb+Nb (400 MeV/n) vista no referencial do centro de massa, com  $b=3 m_f$ . A simulação é feita utilizando o modelo hidrodinâmico (referência [19]).

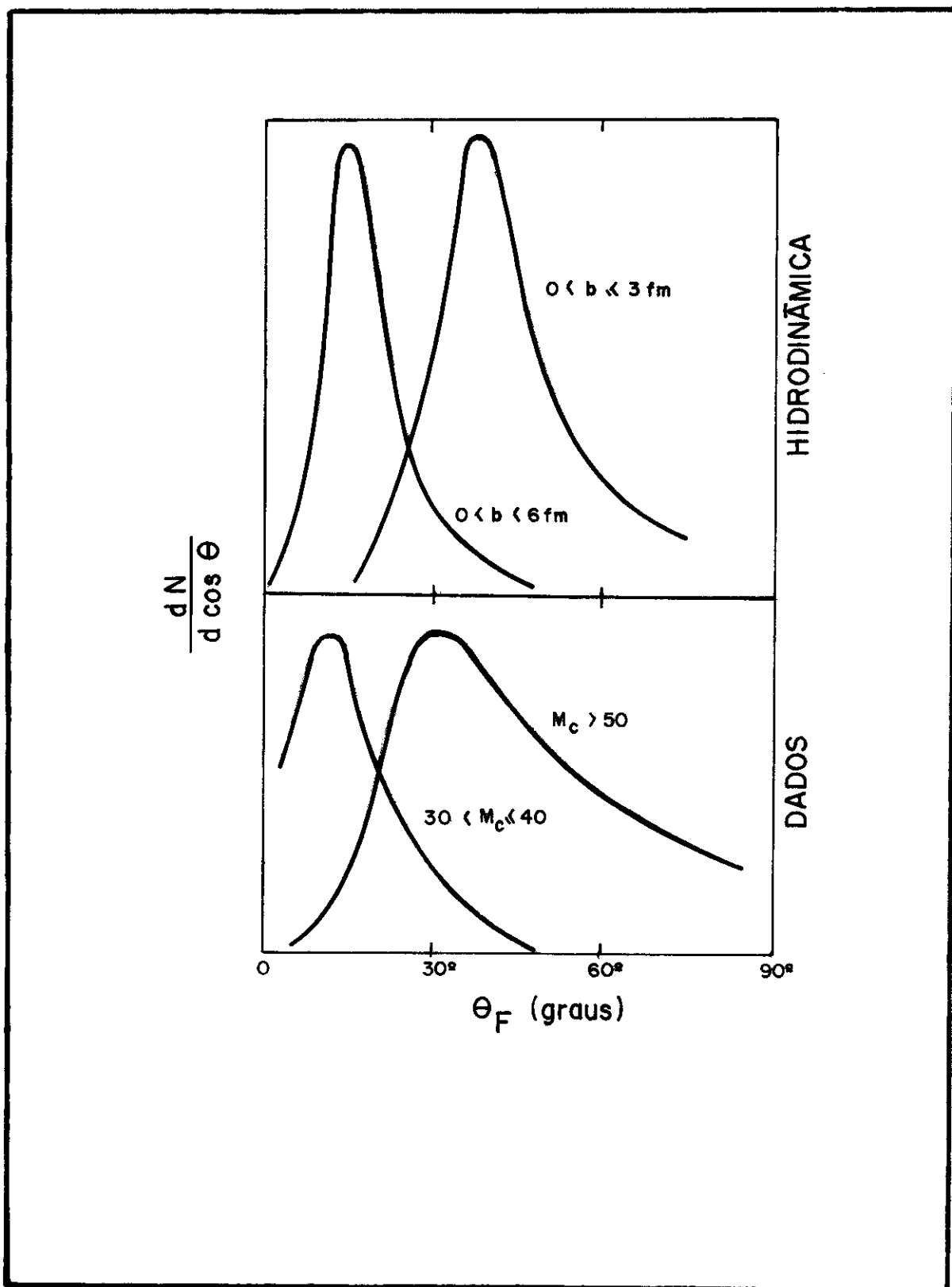


Figura 9 - Comparação entre as distribuições experimentais de ângulos de fluxo e as obtidas pelo modelo hidrodinâmico, para a reação  $Nb + Nb$  (400 MeV) [referência [28]].

## CONCLUSÕES

A teoria das reações nucleares relativísticas deve ser uma teoria quântica. Devido à enorme complexidade do problema, isto é uma coisa fora do alcance até o momento. Resta aos teóricos a abordagem fenomenológica baseada na física clássica e em hipóteses simplificadoras. Não há justificativas rigorosas para o uso da física clássica, o que não invalida a abordagem fenomenológica. A validade ou não dos modelos apresentados é, em última análise, decidida pelo confronto entre os resultados experimentais e os que eles fornecem. Isto não significa que o sucesso de algum modelo em particular o credencie como candidato à teoria das RNR.

Admitindo como válida uma aproximação clássica o modelo conceitualmente mais simples é o de equações clássicas de movimento, que não faz qualquer hipótese adicional quanto às condições em que ocorrem as RNR. A única hipótese feita diz respeito à interação nucleon-nucleon. Admite-se que esta se dê via um potencial de dois corpos clássico que deveria ser capaz de ao mesmo tempo reproduzir tanto a seção de choque experimental como os aspectos conhecidos dos núcleos em equilíbrio. Convenhamos, é uma ingenuidade esperar tanto de um potencial clássico. Nem mesmo considerando separadamente os dois requisitos o potencial tem sucesso. Alguns ingredientes quânticos podem ser adicionados a mão neste esquema como por exemplo, o princípio de exclusão de Pauli. Não se pode, enfim, esperar muita coisa de um modelo que não simula de forma rea-

lística nem os núcleos em equilíbrio nem a maneira pela qual seus constituintes interagem.

Embora envolva uma hipótese adicional, a de que os núcleos comportam-se como gases rarefeitos, o modelo de cascata é tecnicamente mais simples. As condições que a cascata supõe ocorrerem durante uma reação nuclear relativística não são realísticas. Em compensação a cascata pode ser aplicada em faixas de energia que o modelo ECM não alcança. A interação nucleon-nucleon é muito mais próxima do que deve ocorrer na realidade. Estes aspectos e a simplicidade são vantagens muito grandes. Também na cascata é possível incluir alguns efeitos quânticos. A sua simplicidade torna-se uma desvantagem quando as energias envolvidas são suficientes para a excitação de novos graus de liberdade que tornam cada vez mais complexos os mecanismos de reação. A descrição das RNR via cascata centra-se no comportamento individual dos nucleons.

O terceiro modelo apresentado, o hidrodinâmico, parte de uma suposição oposta diametralmente à da cascata. Neste modelo supõe-se que os núcleos comportam-se como gotas líquidas durante uma reação. Esta hipótese permite o uso de conceitos termodinâmicos como temperatura, por exemplo. Isto é tentador quando tratamos de sistemas realmente pesados com cerca de 500 partículas. A temperatura mede o vigor do movimento caótico das partículas de um sistema. Esta medida, porém, tem sentido apenas quando o movimento dos constituintes é de fato caótico. De forma alguma é evidente que essa condição é satisfeita nas RNR. A abordagem hidrodinâmica tem uma vantagem de permitir extrair diretamente informações sobre a equação de es

tado da matéria nuclear, ainda que de forma limitada. Em compensação, devido à sua natureza, parece intrinsecamente incapaz de fornecer informações sobre correlações de poucas partículas. A descrição das RNR via hidrodinâmica centra-se no comportamento coletivo dos nucleons.

Pode parecer estranho que visões tão distintas como o são a cascata e o modelo hidrodinâmico, possam concordar da mesma forma com os aspectos qualitativos dos dados experimentais. Na verdade tanto a cascata como o modelo hidrodinâmico representam limites extremos. As condições reais das RNR devem situar-se em algum lugar entre esses dois pontos de vista. Os mecanismos de reação devem envolver tanto os aspectos coletivos, de equilíbrio, como os ressaltados pela hidrodinâmica, quanto os aspectos individuais, de não-equilíbrio, que são destacados pela cascata. Nenhum modelo fenomenológico das RNR tem o dom da completude. A medida da importância dos efeitos individuais e dos coletivos não é bem estabelecida e depende de vários fatores, como a massa do sistema, a energia incidente e a geometria. É razoável supor que a coletividade se manifeste em situações em que o número de partículas é muito grande e que a energia incidente não seja muito alta, para que seja possível estabelecerem-se as correlações. Os efeitos de não equilíbrio, por sua vez, devem manifestar-se mais fortemente em sistemas relativamente leves e energias mais altas.

Há também outro ponto fundamental. O relativo sucesso de modelos tão distintos se deve em parte às grandes incertezas dos dados experimentais, que são amplificadas pelas distorções inerentes ao tipo de análise a que estes dados são



submetidos. Dentro do atual grau de precisão dos resultados experimentais é impossível levantar a degenerescência observada.

Uma fração substantiva dos fragmentos da reação surge sob a forma de compostos (d, t, He, etc). É necessário acrescentar aos modelos existentes um mecanismo que dê conta da formação destes fragmentos compostos na proporção e com a distribuição em energias observadas.

O papel que os modelos fenomenológicos desempenham pode ser definido como o de estabelecer um pano de fundo contra o qual se manifestem possíveis novos fenômenos, como transições de fase da matéria nuclear. Indicadores destes novos fenômenos seriam discrepâncias sistemáticas entre os resultados experimentais e os produzidos por esta primeira aproximação teórica.

O modelo de ECM sintetiza num certo sentido o modelo hidrodinâmico e o de cascata. Se as condições de uma reação nuclear a altas energias fossem as supostas pela cascata, então os resultados de ambos os modelos deveriam coincidir. O mesmo pode-se dizer com respeito ao modelo hidrodinâmico, se as condições da reação fossem as que este último supõe serem. Dentro das suas limitações o modelo de ECM incorpora tanto os aspectos individuais, microscópicos da cascata, como os coletivos da hidrodinâmica. Uma das limitações mais sérias das ECM é o seu restrito intervalo de aplicabilidade. Até o presente nenhum dos novos fenômenos ansiosamente procurados foi observado. É necessário aumentar a energia. Mas nesse caso a relatividade é irremediavelmente necessária. Uma

interação nucleon-nucleon mais realista, covariante, que inclua ao menos a produção de pions seria extremamente conveniente. De posse dela seria possível estender o intervalo de aplicabilidade do modelo ECM até cerca de  $5 \text{ GeV/n}$ , onde talvez alguma coisa nova esteja acontecendo. Obter esta interação nucleon-nucleon é o objetivo a ser perseguido no próximo capítulo.

## REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 2

- [1] A.R.Bodmer e A.D.Mac Kellar, Phys. Rev. C15, 1342 (1977)
- [2] L.Wilets, Y.Yariv e R.Chestnut, Nucl. Phys. A301, 359 (1978)
- [3] D.J.E.Callaway, L.Wilets e Y.Yariv, Nucl. Phys A327, 250 (1979)
- [4] A.R.Bodmer, C.N.Panos e A.D.Mac Keller, Phys. Rev. C22, 1025 (1980)
- [5] A.R.Bodmer e C.N.Panos, Nucl. Phys. A356, 517 (1981)
- [6] J.J.Molitoris e colaboradores, Phys. Rev. Lett. 53, 899 (1984)
- [7] S.Chapman e T.G.Cowling, "The Mathematical Theory of Transport Processes of Gases and Liquids"(Wiley, N.Y., (1954)
- [8] "The Boltzmann Equation", eds. E.G.D.Cohen e W.Tirring (Springer Verlag, 1973)
- [9] S.B.Duarte, Tese de Doutorado, CBPF (1984)
- [10] J.Cugnon e colaboradores, Nucl. Phys. A352, 505 (1981)
- [11] Y.Kitazoe e colaboradores, Phys. Rev. C29, 828 (1984)
- [12] T.Kodama e colaboradores, Phys. Rev. Lett. 49, 536 (1982)
- [13] E.C.Gomes, Tese de Mestrado, CBPF (1985)
- [14] Y.Kitazoe e colaboradores, Phys. Rev. Lett. 53, 2000 (1984)
- [15] A.A.Amsden, F.H.Harlow e J.R.Nix, Phys. Rev. C15, 2059 (1977)

- [16] J.P.Bondorf, S.I.A.Garpman e J.Zimanyi, Nucl. Phys. A296 320 (1978)
- [17] H.Stöcker, J.A.Maruhn e W.Greiner, Z. Physik A293, 173 (1979)
- [18] S.Nagamiya e M.Gyulassi, Lawrence Berkeley Laboratory preprint n° LBL 14035, (1982)
- [19] W.Greiner e H.Stöcker, Scientific Am. Vol. 252 n° 1, 76 (1985)
- [20] A.R.Bodmer, Argonne National Laboratory preprint.
- [21] J.I.Kapusta e D.Strottman, Phys. Rev. C23, 1282 (1981)
- [22] S.Das Gupta e A.Mekjian, Phys. Rep. 72, 131 (1981)
- [23] G.Buchwald e colaboradores, Phys. Rev. C24, 135 (1981)
- [24] H.Stöcker e colaboradores, Phys. Rev. Lett. 47, 1807 (1981)
- [25] W.D.Myers e W.J.Swiatecki, Ann. Phys. (N.Y.) 55, 395 (1969)
- [26] D.Strottman, Int. Rev. Nucl. Phys. Vol. 2, 452 (1984)
- [27] H.Stöcker, M.Gyulassi e J.Boguta, Phys. Lett. 103B, 269 (1981)
- [28] G.Buchwald e colaboradores, Phys. Rev. Lett. 52, 1594 (1984)
- [29] P.Danielewicz e M.Gyulassi. Phys. Lett. 129B, 283 (1983)

### CAPÍTULO 3

## FORMULAÇÃO COVARIANTE DA INTERAÇÃO NUCLEON-NUCLEON

Vimos no capítulo anterior que o modelo de equações clássicas de movimento se constitui numa alternativa teórica interessante por reproduzir alguns dos aspectos coletivos, bem como de partícula independente, observados em colisões de núcleos pesados relativísticos. A inexistência de uma versão que incorpore os efeitos da relatividade é uma limitação séria para a aplicabilidade do modelo. O ponto central dessa abordagem é a interação nucleon-nucleon via um potencial fenomenológico. Este não é um conceito covariante. Uma versão relativística do modelo ECM deve partir de uma interação nucleon-nucleon covariante, cuja formulação é o objetivo deste capítulo.

No começo dos anos 60 o problema da descrição clássica da interação de partículas relativísticas mereceu um estudo rigoroso<sup>[1-7]</sup>. Esses trabalhos, basicamente, constituem-se em tentativas de contornar o chamado teorema de não-interação. Considere um sistema de  $N$  partículas cujas posições no espaço-tempo relativas a um observador inercial são especificadas por

$${}_a x^\mu(\tau_a) \quad (a = 1, 2, \dots, N \quad \text{e} \quad \mu = 0, \dots, 4),$$

onde  $\tau_a$  é o tempo próprio (invariante) da  $a$ -ésima partícula, de-

finido como

$$d\tau_a = \sqrt{d_a x^\mu d_a x_\mu} = \sqrt{dt^2 - d\vec{r}^2}$$

O momentum de cada partícula, medido no tempo  $t$  pelo observador, é

$${}_a p^\mu(t) = m_a \frac{d_a x^\mu(\tau_a)}{d\tau_a}$$

O tempo próprio da  $a$ -ésima partícula correspondente ao tempo  $t$  do observador inercial é dado por

$$\tau_a = \int \gamma_a^{-1} dt$$

onde

$$\gamma_a = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$$

Vamos assumir para esse sistema que, assintoticamente, o momentum de cada partícula é independente do seu tempo próprio, isto é,

$$\tau_a \rightarrow \pm \infty \Rightarrow {}_a \dot{x}^\mu(\tau_a) = \text{const.} \quad (\dot{x} = \frac{dx}{d\tau})$$

Se o momentum total de um sistema como esse é definido como a soma dos momenta das partículas,

$$p_\tau^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu$$

então é possível mostrar que as trajetórias das partículas deverão ser sempre retilíneas, ou equivalentemente, que não há inte-

rações compatíveis com a relatividade especial. Esta é a essência do teorema de não-interação, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [8].

A única forma de se contornar o teorema de não-interação, ou seja, de se construir uma dinâmica compatível com a relatividade especial é redefinir o momentum total do sistema, adicionando ao momentum das partículas um momentum de interação,

$$p_{\tau}^{\mu} = \sum_{a=1}^N p_a^{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} p_{ab}^{\mu}$$

Na eletrodinâmica clássica a interação entre cargas elétricas é mediada pelo campo eletromagnético, que possui ele próprio momentum e energia. O campo é o ente físico responsável pelo momentum de interação necessário para qualquer teoria covariante. Na formulação usual da eletrodinâmica o campo é uma entidade fundamental, com graus de liberdade próprios, e não existe apenas como mediador da interação de duas cargas. Se uma carga elétrica é acelerada - não necessariamente devido à ação de outra carga - ela emite radiação eletromagnética. O campo da radiação ganha autonomia em relação à sua fonte. Em outras palavras, a emissão de radiação é um processo fundamental. As equações de movimento de elétrons relativísticos em interação foram obtidas em 1938 por Dirac [9], numa generalização das idéias de Maxwell e Lorentz.

Hã, alternativamente, uma formulação da eletrodinâmica baseada no conceito de ação à distância (covariante), devida a Wheeler e Feynman [10]. A diferença básica entre esta visão e a atual é o papel que o campo desempenha num e noutro caso. Na ótica da ação à distância o campo é apenas um mero transmissor

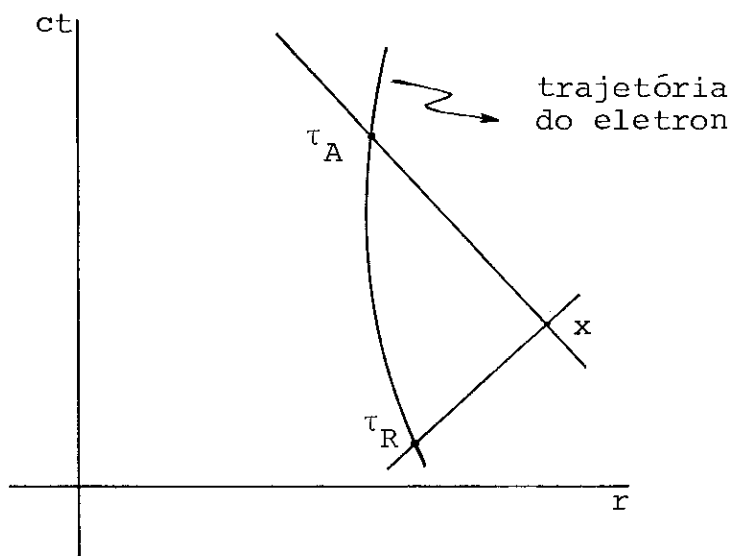
da interação entre as partículas, que são os entes fundamentais. Não existe o campo livre. O campo de uma carga acelerada é obtido considerando tanto as soluções retardadas como as soluções avançadas das equações de Maxwell (ao contrário da formulação usual, que considera apenas as soluções retardadas). Este campo atuará sobre todas as demais partículas do universo, que se constituem numa espécie de absorvedor do que seria a radiação eletromagnética. As partículas deste absorvedor, por sua vez, são influenciadas pelo campo da carga acelerada. Os campos das partículas do absorvedor serão, da mesma forma, metade avançados, metade retardados, e agirão sobre a nossa carga. A soma dos campos avançados das outras partículas compensa exatamente o campo avançado da nossa carga dando o efeito puramente retardado que é observado. Não há, portanto, campos desligados das partículas: a radiação emitida é completamente absorvida. A emissão de radiação, não é, portanto, um processo fundamental, segundo a visão da ação à distância. As equações de movimento, no entanto, são as mesmas obtidas por Dirac partindo da teoria convencional.

Em ambos os casos as partículas são puntiformes. Na visão convencional a partícula num certo ponto, interage com o campo total naquele ponto, incluído no campo total o seu próprio campo. Esta auto-interação é infinita. Esta dificuldade deve ser eliminada por um procedimento de renormalização. A eletrodinâmica de ação à distância é livre de problemas dessa natureza: o campo que age sobre uma partícula é apenas o campo devido a outras partículas. O preço a ser pago por isto é a inclusão de campos avançados, o que contradiz a noção usual de causalidade. Além disso, a hipótese de que toda a radiação emitida é absorvi-

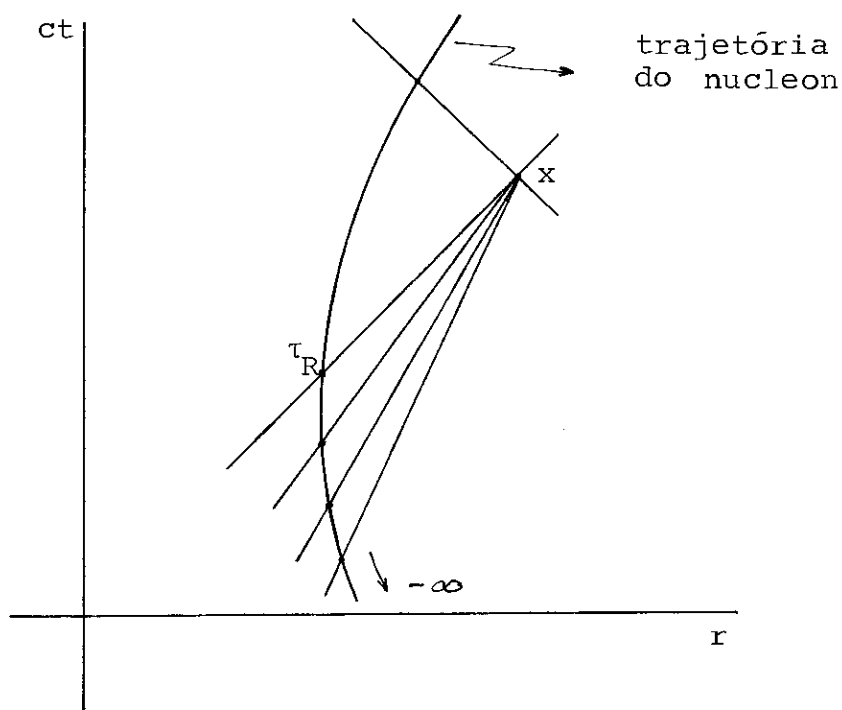


da pelas demais partículas é questionável.

As diferenças entre a eletrodinâmica e o nosso problema são muitas, evidentemente. A interação nuclear é cerca de 100 vezes mais intensa que a eletromagnética. O propagador desta interação (foton) tem massa de repouso nula. A interação eletromagnética, conseqüentemente, tem alcance infinito e se propaga com uma única velocidade possível,  $c$ . Em outras palavras, o campo gerado por uma carga num ponto qualquer é devido apenas aos pontos da sua trajetória que são interceptados pelo cone de luz (soluções retardada e avançada), como mostra a figura abaixo.



Ao contrário do foton, o meson tem massa de repouso não nula. A consequência é uma interação de curto alcance, que não se propaga com uma única velocidade, mas com um espectro contínuo de velocidades. O campo de um nucleon, dessa forma, depende de toda a história prévia da partícula, como mostra a figura abaixo.



A despeito das diferenças apontadas há uma analogia grande entre os dois casos no que diz respeito a estrutura de ambas as teorias. A origem desta está no uso comum dos mesmos conceitos básicos: partículas puntiformes interagindo via campos clássicos. O ponto de vista aqui adotado para a interação nucleon-nucleon será o da teoria de campo [11-13]. Os nucleons são representados por partículas puntiformes, com carga nuclear  $g$ . A carga  $g$  é uma constante fenomenológica associada a constante de acoplamento da interação forte. Os nucleons interagem via um campo mesônico que é solução de uma equação semelhante à equação do campo eletromagnético, a diferença sendo a inclusão de um termo associado à massa do meson.

Os pions são partículas pseudoescalares. Este fato por si só é suficiente para que o campo mesônico no formalismo a ser desenvolvido seja um campo escalar. O sentido físico dos pontos a serem discutidos é, no entanto, mais transparente quando consideramos o campo mesônico como um campo vetorial. As e-

quações de movimento serão diferentes, evidentemente, mas em con-  
trapartida a analogia com a eletrodinâmica, cujos resultados são  
bem estabelecidos, é imediata. Os aspectos essenciais como a o-  
rigem das divergências e a maneira de contorná-las, a estrutura  
das equações de movimento, as características básicas do compor-  
tamento dos campos no limite de grandes e pequenas distâncias,  
não dependem do caráter específico do campo. Assim sendo, o de-  
senvolvimento terá como base o campo mesônico vetorial, mas sem-  
pre que for necessário serão dados os resultados corresponden-  
tes ao campo escalar.

Um último comentário: em vez de optar por incluir a  
relatividade na interação nucleon-nucleon via teoria clássica de  
campo, poderíamos ter optado por uma visão de ação à distância.  
Isto, no entanto, não traria qualquer vantagem do ponto de vista  
conceitual ou prático. Além disso a formulação aqui adotada em  
analogia com a eletrodinâmica é o correspondente clássico da teo-  
ria quântica de campos.

#### CAMPO DE UM NUCLEON EM MOVIMENTO

Vamos considerar agora o campo de um nucleon em movi-  
mento arbitrário, cuja trajetória  $z^{\sigma}(\tau)$  é conhecida. O  
nosso objetivo é expressar o campo em termos das variáveis da partícu-  
la  $z$ ,  $v \equiv \frac{dz}{d\tau}$  e  $a \equiv \frac{d^2z}{d\tau^2}$ . O quadrivetor densidade de corrente é  
definido como

$$R^{\nu}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g v^{\nu} \delta(\mathbf{x}-z(\tau))$$

O campo mesônico é solução da equação

$$(\partial_\sigma \partial^\sigma + \mu^2) \phi^\nu(x) = 4\pi R^\nu(x) \quad (1)$$

Para o campo escalar a equação 1 reduz-se à equação de Klein-Gordon,

$$(\partial_\sigma \partial^\sigma + \mu^2) \phi(x) = 4\pi \rho(x)$$

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g \delta(x - z(\tau))$$

onde  $\mu$  é um parâmetro característico do campo, associado à massa do meson. Observe que no limite  $\mu \rightarrow 0$  e  $g \rightarrow e$  a equação (1) torna-se a equação do campo eletromagnético. A solução formal da equação 1 é obtida com auxílio da função de Green correspondente,

$$\phi^\nu(x) = \int d^4x' R^\nu(x') G(x - x') \quad (2)$$

A função de Green para o potencial retardado, a mesma para o campo escalar, é

$$G_R(s^\nu) = \begin{cases} 2\delta(s^2) - \frac{\mu}{s} J_1(\mu s), & x^0 - x^0' > |\vec{x} - \vec{x}'| \\ 0 & , \text{ nas demais regiões} \\ & \text{do espaço-tempo} \end{cases}$$

onde  $s^\nu \equiv (x - x')^\nu$ ,  $s = (s^\nu s_\nu)^{1/2}$  e  $J_1$  é a função de Bessel de 1ª espécie. A função de Green para o potencial avançado é:

$$G_A(s) = \begin{cases} 2\delta(s^2) - \frac{\mu}{s} J_1(\mu s), & x^0 - x^0' < -|\vec{x} - \vec{x}'| \\ 0 & ; \text{ nas demais regiões} \end{cases}$$

Os detalhes dos cálculos são apresentados no apêndice, no final do capítulo. Como era de se esperar, no limite  $\mu \rightarrow 0$  a função de Green do campo mesônico se reduz a do campo eletromagnético. A função de Bessel satisfaz a propriedade

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{J_n(s)}{s^n} = \frac{1}{2^n n!}$$

Isto significa que a função de Green do campo mesônico tem na função delta a sua única singularidade, exatamente a mesma da função de Green do campo eletromagnético. Isto implica, como veremos mais adiante, que as singularidades dos campos mesônicos e eletromagnético tenham a mesma natureza!

Outra observação importante: a função de Green é não nula mesmo quando  $s^2 \neq 0$ , isto é, fora do cone de luz. Isto se deve ao termo  $\mu^2$  na equação (1). Em consequência o campo num ponto será determinado não apenas pelo estado de movimento do nucleon no tempo retardado, mas por toda a trajetória anterior.

Substituindo as funções de Green  $G_R(s^\nu)$  e  $G_A(s^\nu)$  em (2) obtemos os potenciais retardado e avançado

$$\phi_R^\nu(\mathbf{x}) = g \left[ \frac{\mathbf{v}^\nu}{s^\sigma v_\sigma} - \mu \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \frac{\mathbf{v}^\nu}{s} J_1(\mu s) \right]_{\tau = \tau_R} \quad (3-a)$$

e

$$\phi_A^\nu(\mathbf{x}) = -g \left[ \frac{\mathbf{v}^\nu}{s^\sigma v_\sigma} + \mu \int_{\tau_A}^{\infty} d\tau' \frac{\mathbf{v}^\nu}{s} J_1(\mu s) \right]_{\tau = \tau_A} \quad (3-b)$$

O potencial escalar é obtido da mesma forma e sua expressão é

$$\phi_R(x) = g \left[ \frac{1}{s^\sigma v_\sigma} - \mu \int_{-\infty}^{\tau_R} d\tau \frac{1}{s} J_1(\mu s) \right]_{\tau = \tau_R}$$

O quadrivetor intensidade do campo é obtido derivando  $\phi(x)$

$$F_R^\nu(x) = -\partial^\nu \phi(x) = g \left[ \frac{1}{(s^\sigma v_\sigma)^2} (v^\nu - \frac{s^\nu}{s^\sigma v_\sigma} (1 - s^\sigma a_\sigma)) + \mu^2 \left[ -\frac{s^\sigma}{2s^\sigma v_\sigma} + \int_{-\infty}^{\tau_R} d\tau \frac{s^\nu}{s^2} J_2(\mu s) \right] \right]_{\tau = \tau_R}$$

O tensor intensidade do campo é obtido derivando as equações 3,

$$F^{\sigma\nu} = \partial^\sigma \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\sigma$$

Para o caso retardado a expressão é

$$F_{ret.}^{\sigma\mu}(x) = -g \left[ \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{K^3} (1 - K'_R) + \frac{s^\sigma a^\nu - s^\nu a^\sigma}{K^2} - \frac{1}{2} \mu^2 \left[ \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{K} - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{s^2} J_2(\mu s) \right] \right]_{\tau = \tau_R} \quad (4)$$

$K \equiv s^\sigma v_\sigma$ ,  $K' \equiv s^\sigma a_\sigma$ . Excetuando as variáveis da partícula fonte na integral, todas as demais são computadas em  $\tau = \tau_R$ . Uma expressão semelhante pode ser obtida da mesma forma para o campo avançado. É conveniente separar  $F_R^{\sigma\nu}$  em 2 partes, uma independente de  $\mu$ ,

$$F_0^{\sigma\nu} = -g \left[ \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{K^3} (1 - K') + \frac{s^\sigma a^\nu - s^\nu a^\sigma}{K^2} \right], \quad (5)$$

e outra contendo os termos em  $\mu$ ,

$$G^{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g \mu^2 \left[ \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{K} - \int_{-\infty}^{\tau_R} d\tau \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{s^2} J_2(\mu s) \right], \quad (6)$$

$$F_R^{\sigma\nu} = F_0^{\sigma\nu} + G^{\sigma\nu}$$

O mesmo se aplica ao campo escalar, onde teremos

$$F_R^\nu = F_0^\nu + G^\nu$$

É evidente que os tensores acima definidos são antissimétricos.

I) O tensor  $F_R^{\sigma\nu}$  é singular na trajetória da fonte. Vamos analisar as singularidades de cada um de seus componentes,  $F_0$  e  $G$ . Considere, para tanto, o referencial de repouso instantâneo da partícula, em que são válidas as relações

$$s^\sigma = (r; \vec{r}), \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{z}(\tau) \quad \text{p/ } \tau = \tau_R,$$

$$v^\sigma = (1; \vec{0})$$

$$K = s^\sigma v_\sigma = r$$

$$a^\sigma = (0; \vec{a})$$

$$K' = s^\sigma a_\sigma = -\vec{a} \cdot \vec{r}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{z}}{dt}$$

Nesse sistema de referência o tensor  $F_0^{\sigma\nu}$  tem a forma

$$F^{0k} = -g \left[ \frac{r^k}{r^2} (1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) - \frac{a^k}{r} \right] = -F^{k0} \quad (7-a)$$

$$F^{ik} = -g \frac{r^i a^k - r^k a^i}{r} = -F^{ki}, \quad F^{\sigma\nu} = 0. \quad (7-b)$$

No limite  $r \rightarrow 0$  o tensor  $F_0^{\sigma\nu}$  diverge. Vamos agora ver o que ocorre com  $G^{\sigma\nu}$ . Apenas por questão de simplicidade vamos definir o ponto de observação  $x^\sigma$  na origem. No sistema de repouso instantâneo da fonte o quadrivetor  $s^\sigma$  que aparece na integral, será

$$s^\sigma = x^\sigma - z^\sigma = (-t; \vec{z}), \quad s^2 = t - \vec{z}^2 \neq 0 \quad (t \neq t_R!)$$

O tensor  $G^{\sigma\nu}$  tem a forma

$$G^{0k} = -\frac{1}{2} g\mu^2 \left[ \frac{r^k}{r} - \int_{-\infty}^{\tau_R} d\tau \frac{z^k}{s^2} J_2(\mu s) \right] = -G^{k0}$$

$$G^{ik} = 0$$

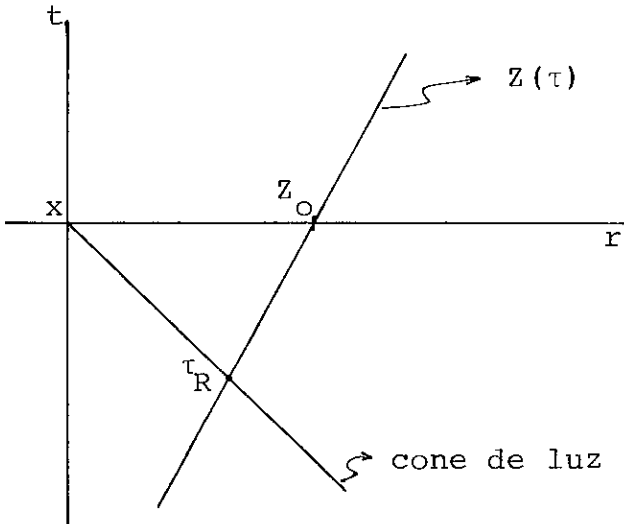
No limite  $r \rightarrow 0$  a integral é finita e bem definida. Já o primeiro termo não é univocamente determinado quando  $r \rightarrow 0$ , pois depende da direção pela qual o ponto de observação se aproxima da fonte. Uma média tomada em todas as direções, entretanto, torna nula a contribuição deste termo em  $G^{\sigma\nu}(z(\tau))$ . Conclusão:  $G^{\sigma\nu}$  não contribui para as singularidades do campo ao longo da trajetória da fonte.

Vemos, dessa forma, que as singularidades de  $F_R^{\sigma\nu}$  estão unicamente no termo  $F_0^{\sigma\nu}$ , que é formalmente idêntico ao tensor e-



letromagnético. As singularidades do campo mesônico, portanto, têm a mesma origem das do campo eletromagnético, como ressaltado anteriormente.

II) Vamos analisar o comportamento do campo mesônico a grandes distâncias. É suficiente, para o nosso objetivo, considerar o potencial  $\phi_R^V$  de um nucleon em movimento uniforme num ponto afastado. Por uma questão de simplicidade vamos escolher como ponto de observação a origem. Veja a geometria representada na figura abaixo.



A trajetória do nucleon é dada por

$$z^\sigma = [t; \vec{z}_0 + \vec{\beta}t] .$$

A separação  $s^\sigma$  será, portanto,  $s^\sigma = -z^\sigma$ . No ponto retardado ( $t = t_R$ ) o valor de  $K$  é dado por

$$K = [\gamma; \gamma\vec{\beta}] \begin{bmatrix} -t_R \\ -z(t_R) \end{bmatrix} = -\gamma t_R + \gamma\vec{\beta} \cdot \vec{z}_0 + \vec{\beta}t_R = \gamma\vec{\beta}\vec{z}_0 - \gamma^{-1} t_R$$

Em  $t = t_R$   $s^2 = 0$ , o que permite escrever  $t_R$  em função de  $Z_0$ ,

$$t_R = \gamma^2 \vec{\beta} \vec{Z}_0 - Z_0$$

Podemos agora reescrever  $K$  apenas em termos de  $Z_0$ ,

$$K = \gamma \vec{\beta} \vec{Z}_0 - \gamma \vec{\beta} \vec{Z}_0 + \gamma Z_0$$

$$K = \gamma Z_0$$

O potencial  $\phi_R^v$ , dado por (3-a) tem componentes

$$\phi_R^o = g \left[ \frac{\gamma}{\gamma Z_0} - \mu \int_{-\infty}^{t_R} dt \frac{1}{s} J_1(\mu s) \right] \quad (8-a)$$

$$\phi_R^k = g \left[ \frac{\gamma \vec{\beta}}{\gamma Z_0} - \mu \vec{\beta} \int_{\infty}^{t_R} dt \frac{1}{s} J_1(\mu s) \right] \quad (8-b)$$

A integral em  $t$  pode ser transformada numa integral em  $s$ . Num instante qualquer  $s$  é dada por

$$s^2 = (1-\beta^2)t^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{Z}_0 t - Z_0^2$$

Podemos escrever  $t$  em função de  $s$ , invertendo a equação acima,

$$t = \gamma^2 \left[ \vec{\beta} \vec{Z}_0 + \gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 Z_0^2 + s^2} \right]$$

$$dt = \frac{\gamma s}{\sqrt{s^2 + r^2}} ds, \quad r \equiv \gamma Z_0$$

A integral agora tem a forma

$$i = -\gamma \mu \int_0^{\infty} ds \frac{1}{\sqrt{s^2 + r^2}} J_1(\mu s),$$

cujo resultado é

$$i = -\gamma\mu I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\mu r\right) \cdot K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\mu r\right),$$

onde I e K são as funções de Bessel modificadas [15]. É fácil ver que o limite de grandes distâncias é equivalente a  $r \rightarrow \infty$ , mantido fixo o ponto de observação. Nesse caso a integral i assume a forma

$$i = -\left[\gamma \frac{1}{r} - \frac{e^{-\mu r}}{r}\right] \quad (9)$$

A expressão do potencial  $\phi_R^v$ , eq.(8), agora fica

$$\phi_R^o = g\gamma \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$\phi_R^k = g\gamma\beta^k \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

ou

$$\phi_R^v = Y(r) \cdot v^v, \quad (10)$$

onde  $Y(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}$ . Note que a integral contém um termo que compensa exatamente o termo em  $r^{-1}$  nas equações (8).

Conclusão: o campo de um nucleon em movimento uniforme cai rapidamente com o aumento da distância entre a fonte e o observador.

III) Vamos analisar agora o que ocorre quando o movimento do nucleon não é uniforme. Nesse caso os termos envolvendo explicitamente o quadrivetor  $a^\sigma$  em  $F_o^{\sigma v}$  têm de ser considerados.

Voltemos por um momento ao sistema de repouso instantâneo do nu-

cleon fonte.

Nesse sistema o campo  $F_0^{\sigma\nu}$  é dado pelas equações (7). Todos os termos envolvendo a aceleração são termos em  $r^{-1}$ ,  $\vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{z}(t_R)$ ,

$$F^{0k} = -g \frac{\vec{r} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{r}) - \vec{a}}{r} = g \frac{\hat{r} \wedge (\hat{r} \wedge \vec{a})}{r}$$

e

$$F^{1k} = -g \frac{\vec{a} \wedge \hat{r}}{r}$$

Estes termos representam um campo de longo alcance, presente apenas quando  $\vec{a} \neq 0$ . Estes termos fazem parte do campo de radiação mesônica, em estreita analogia com os campos de radiação eletromagnética,

$$\vec{E} = e \frac{\hat{r} \wedge (\hat{r} \wedge \vec{a})}{r} ; \vec{B} = \hat{r} \wedge \vec{E}$$

IV) Em resumo, o campo de um nucleon puntiforme em movimento tem as seguintes características, extensivas para o caso de um campo escalar:

- 1) É composto por 2 termos,  $F_0^{\sigma\nu}$  e  $G^{\sigma\nu}$ ; o primeiro análogo ao eletromagnético e o último representando contribuições (causais) de pontos da trajetória a fora do cone de luz, em consequência de  $\mu \neq 0$ ;
- 2) As suas singularidades são as mesmas do campo eletromagnético, cuja origem é a auto-interação de uma partícula puntiforme com seu próprio campo. Esse fato decorre de  $G^{\sigma\nu}$  ser finito em toda a trajetória da fonte;
- 3) Tem curto alcance quando o movimento da fonte é

uniforme, mas possui uma componente de longo alcance quando  $a^\sigma \neq 0$ , identificada como parte do campo de radiação mesônica.

## AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Estamos agora em condições de obter as equações clássicas de movimento de dois nucleons em interação. Na ausência de forças externas ao sistema nucleons + campo, a energia e o momento devem ser conservados. O objetivo desta seção é obter as equações de movimento a partir da conservação da energia e do momento do sistema. A estratégia adotada é a mesma utilizada por Dirac na obtenção das equações da eletrodinâmica<sup>[9]</sup>:

- a) Vamos supor que as trajetórias dos nucleons sejam dadas;
- b) Envolvamos a trajetória com um tubo estreito;
- c) Calculemos o fluxo de momentum-energia através do tubo;
- d) Quando o raio do tubo tender a zero, o fluxo de energia-momentum dependerá apenas das condições das duas extremidades do tubo, isto é, o fluxo é uma diferencial exata. Daqui surgirão as equações de movimento.

O tensor momentum-energia  $T^{\sigma\nu}$ , é definido por

$$T^{\sigma\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^\sigma F^\nu - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (F_\alpha F^\alpha - \mu^2 \phi^2) \right],$$

para o campo escalar. Para o campo vetorial a expressão de  $T^{\sigma\nu}$  é

$$T^{\sigma\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^{\sigma\rho} F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\nu} F_{\rho\delta} F^{\rho\delta} + \mu^2 \phi^{\sigma} \phi^{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu^2 g^{\sigma\nu} \phi_{\rho} \phi^{\rho} \right] \quad (11)$$

para regiões que não contenham a trajetória do nucleon. Quando a trajetória está contida, como no nosso caso, os campos serão singulares e o tensor  $T^{\sigma\nu}$  também o será. Para obtermos equações de movimento finitas será necessário eliminar essas singularidades.

O fluxo de momentum-energia através da superfície que envolve a trajetória é dado pela integral

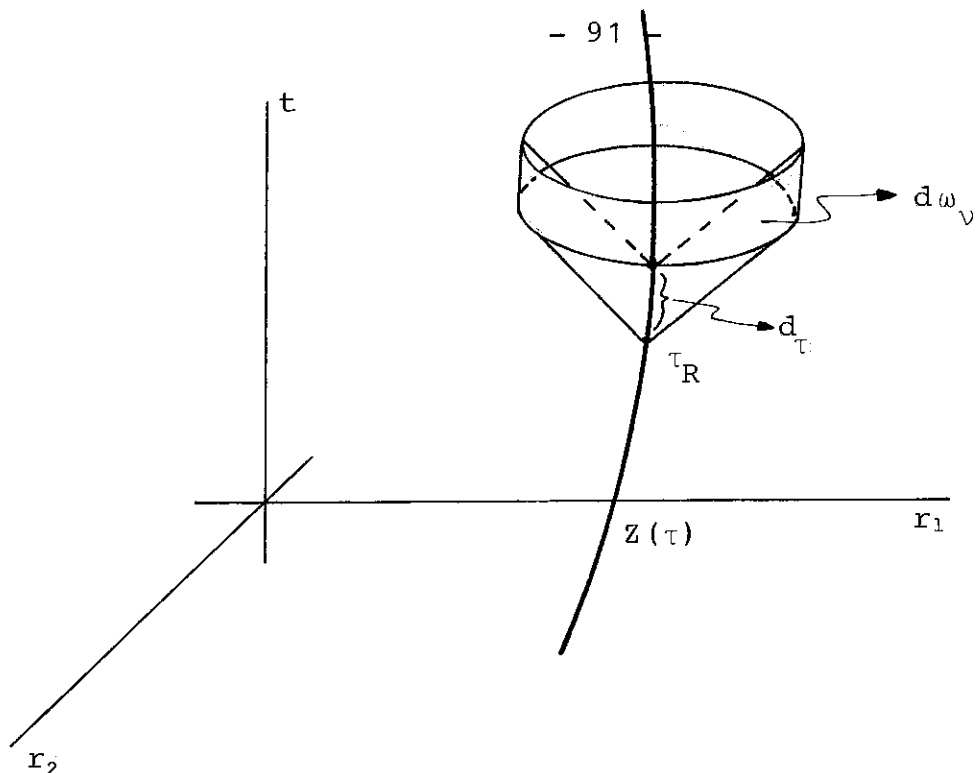
$$T^{\sigma} = - \int T^{\sigma\nu} d\omega_{\nu} = - \int T^{\sigma\nu} N_{\nu} d\omega, \quad (12)$$

onde  $d\omega$  é o elemento de superfície tridimensional e  $N_{\nu}$  é a sua normal. O campo que é utilizado para a construção de  $T^{\sigma\nu}$  é a superposição do campo próprio do nucleon (solução retardada) com o campo da outra partícula,

$$F^{\sigma\nu} = F_R^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}$$

Ao longo da trajetória de um dos nucleons o campo da outra  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  é sempre finito e bem comportado. As divergências em  $T^{\sigma\nu}$  estão contidas em  $F_R^{\sigma\nu}$ , isto é, originam-se da interação da partícula com seu próprio campo.

A figura abaixo ilustra a geometria do sistema.



Os resultados, obviamente, são independentes do formato específico do tubo. Em particular vamos definir o tubo pelas relações:

$$s^\sigma s_\sigma = 0, \quad s^\sigma \equiv x^\sigma - z^\sigma(\tau), \quad x^\sigma \text{ é um ponto do tubo,}$$

$$K \equiv s^\sigma v_\sigma = \epsilon$$

O elemento de superfície  $d\omega_\nu$ , no espaço de Minkowski, corresponde a um elemento de volume no nosso espaço euclidiano tridimensional. O fluxo do tensor  $T^{\sigma\nu}$  através de  $d\omega_\nu$  é equivalente ao fluxo através de uma esfera de raio  $\epsilon$ , centrada na partícula, e observado durante um intervalo de tempo  $\epsilon$ . Vamos agora determinar a normal  $N_\nu$  ao elemento  $d\omega$ . Se  $dx_\sigma$  são variações infinitesimais ao longo da superfície do tubo, são válidas as relações

$$s^\sigma dx_\sigma = s^\sigma v_\sigma d\tau = \epsilon d\tau$$

$$v^\sigma dx_\sigma = (1 - K') d\tau \quad , \quad K' \equiv s^\sigma a_\sigma \quad (13)$$

Multiplicando a primeira das expressões por  $(1 - K')$ , a segunda por  $\varepsilon$  e subtraindo uma da outra, teremos

$$[s^\sigma (1 - K') - v^\sigma \varepsilon] dx_\sigma = 0$$

O quadrivetor  $s^\sigma (1 - K') - v^\sigma \varepsilon$  é normal ao tubo. Sua norma é  $\varepsilon \sqrt{1 - 2K'}$ . O quadrivetor  $N_\nu$  ortonormal à superfície é

$$N_\nu = \frac{s_\nu (1 - K') - v_\nu \varepsilon}{\varepsilon \sqrt{1 - 2K'}} \quad (14)$$

O elemento de superfície tridimensional  $d\omega$  é determinado por três quadrivetores,  $\eta_{(1)}^\nu$ ,  $\eta_{(2)}^\nu$  e  $\eta_{(3)}^\nu$ . Dois desses vetores podem ser definidos como vetores puramente espaciais, tangentes à superfície de uma esfera no sistema de repouso da partícula. O terceiro tem parte espacial perpendicular aos outros dois (proporcional a  $\vec{s} = \vec{x} - \vec{z}$ ), e sua componente temporal determinada por (13). No sistema de repouso instantâneo  $v^\sigma = (1, \vec{0})$  e  $s_0 = \varepsilon$ . Logo,

$$\eta_{(3)}^0 = (1 - K') d\tau$$

Os três vetores definem o elemento de superfície  $d\omega$  e são, portanto, ortogonais a  $N_\nu$ . Em particular,

$$\eta_{(3)}^\nu N_\nu = -s_0 K' (1 - K') d\tau + s_k (1 - K') \eta_{(3)}^k = 0 \quad ,$$



o que determina  $\eta_{(3)}^k$ ,

$$\eta_{(3)}^k = - \frac{s^k}{\epsilon} K' d\tau$$

A norma de  $\eta_{(3)}^\sigma$  é  $\sqrt{1 - 2K'} d\tau$ . O elemento de superfície da cor-  
respondente a um deslocamento  $d\tau$  na posição da partícula é

$$d\omega = \sqrt{1 - 2K'} d\tau d\sigma,$$

onde  $d\sigma$  é o elemento de superfície (bidimensional) da esfera de  
raio  $\epsilon$  que circunda a partícula em  $\tau = \tau_R$ . O elemento de superfí-  
cie  $d\omega_v = N_v d\omega$  é, finalmente,

$$d\omega_v = [s_v (1 - K') - v_v \epsilon] \epsilon d\tau d\Omega, \quad (15)$$

onde  $d\Omega = \epsilon^2 d\sigma$  é o ângulo sólido no sistema de repouso instantâneo  
da partícula.

Vamos agora considerar o tensor  $T^{\sigma\nu}$ . É conveniente  
separar o campo  $F_R^{\sigma\nu}$  em suas componentes  $F_O^{\sigma\nu}$  e  $G^{\sigma\nu}$ . Dessa forma,  
o tensor  $T^{\sigma\nu}$  pode ser escrito como

$$T^{\sigma\nu} = T_O^{\sigma\nu} + T_M^{\sigma\nu} + T_{IN}^{\sigma\nu}, \quad (16)$$

em que  $T_O^{\sigma\nu}$  é composto apenas por  $F_O^{\sigma\nu}$  e  $\phi_O^\nu$ ,  $T_M^{\sigma\nu}$  é composto por ter-  
mos cruzados e  $T_{IN}^{\sigma\nu}$  contém apenas os campos não singulares,  $G^{\sigma\nu}$  e  
 $F_{IN}^{\sigma\nu}$ . Em pontos do tubo os campos  $F_O^{\sigma\nu}$  e  $G^{\sigma\nu}$  são

$$-\frac{1}{g} F_O^{\sigma\nu} = \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{\epsilon^3} + \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu a^\sigma}{\epsilon^2} - \frac{s^\sigma v^\nu - s^\nu v^\sigma}{\epsilon^3} K' \quad (17)$$

$$-\frac{1}{g} G^{\sigma\nu} = -\frac{1}{2} \mu^2 \frac{s^{\sigma\nu\nu} - s^{\nu\nu\sigma}}{\varepsilon} + \mu^2 \int_{-\infty}^{\tau_R} d\tau \frac{s^{\sigma\nu\nu} - s^{\nu\nu\sigma}}{s^2} J_2(\mu s) \quad (18)$$

$G^{\sigma\nu}$  é de ordem  $\varepsilon^0$ , assim como  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  e, conseqüentemente,  $T_{IN}^{\sigma\nu}$ . Este último, quando contraído com  $d\omega_\nu$  (ordem  $\varepsilon^2$ ), resulta num termo de ordem  $\varepsilon^2$  e não contribui para o fluxo no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Em  $T_M^{\sigma\nu}$  apenas o primeiro termo de (17) precisa de ser considerado, pois os demais termos, quando contraídos com  $d\omega_\nu$ , anulam-se no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Todos os cálculos estão apresentados em detalhe no apêndice. Por ora basta-nos o resultado da integral (12), isto é, o fluxo de momentum-energia através de uma porção do tubo compreendido entre os instantes  $\tau_1$  e  $\tau_2$  é

$$T^\sigma = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau g \left( \frac{1}{2} \frac{a^\sigma}{\varepsilon} - \frac{2}{3} v^\sigma a^2 \right) + g(\tilde{G}^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu, \quad (19)$$

com  $\tilde{G}^{\sigma\nu} \equiv G^{\sigma\nu} - \frac{\mu^2}{2} \frac{s^{\sigma\nu\nu} - s^{\nu\nu\sigma}}{K}$ . Para que o fluxo  $T^\sigma$  dependa apenas dos instantes  $\tau_1$  e  $\tau_2$  é preciso que o integrando em (19) seja a derivada temporal de uma função, cuja forma ainda deve ser determinada:

$$g^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{a^\sigma}{\varepsilon} - \frac{2}{3} v^\sigma a^2 \right] + g(\tilde{G}^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu = \dot{A}^\sigma \quad (20)$$

Para determinar a forma de  $A^\sigma$  vamos multiplicar (20) por  $v_\sigma$ . Observando que:

$$v^2 = 1,$$

$$v_\sigma a^\sigma = 0$$

e

$$v_{\sigma} G^{\sigma\nu} v_{\nu} = 0 \quad (G^{\sigma\nu} \text{ é antissimétrico}),$$

$\dot{A}^{\sigma}$  deve satisfazer a relação

$$v_{\sigma} \dot{A}^{\sigma} = - \frac{2}{3} g^2 a^2 \quad (21)$$

Derivando em relação ao tempo a expressão  $v_{\sigma} a^{\sigma}$  obtemos a relação

$$v_{\sigma} \dot{a}^{\sigma} = - a^2$$

$\dot{A}^{\sigma}$ , portanto, deve ter a forma

$$\dot{A}^{\sigma} = \dot{A}'^{\sigma} + \frac{2}{3} g^2 a^{\sigma}, \quad \dot{A}'^{\sigma} v_{\sigma} = 0$$

Há várias possibilidades para a escolha de  $A'^{\sigma}$ . A mais simples é escolhe-lo como uma constante multiplicando a velocidade,  $A'^{\sigma} = c v^{\sigma}$ . As equações de movimento vão assim assumindo a forma

$$\begin{aligned} g^2 \left[ \frac{1}{2\epsilon} a^{\sigma} - \frac{2}{3} a^2 v^{\sigma} \right] + g (\tilde{G}^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_{\nu} = \\ = c a^{\sigma} + \frac{2}{3} g^2 \dot{a}^{\sigma} \end{aligned} \quad (22)$$

Nesse ponto vamos eliminar a singularidade das equações. A forma usual de uma equação de movimento é

$$ma = f$$

Podemos em (22) agrupar os termos em  $a^{\sigma}$ ,

$g^2 \left( \frac{1}{2\epsilon} - c \right) a^{\sigma} = K^{\sigma}$ ,  $K^{\sigma}$  sendo a força que age sobre o nucleon. A constante  $c$  fica determinada pela condição de que as

equações devem ser finitas quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Se  $c$  é definida como  $\frac{1}{2\epsilon} - m_0$ , a equação (22) assume finalmente a forma

$$m a^\sigma = \frac{2}{3} g^2 [a^\sigma + a^2 v^\sigma] - g (\tilde{G}^{\sigma\nu} F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu, \quad (23)$$

onde  $m$  é a massa observada do nucleon. As equações (23) são as equações de movimento procuradas. A definição  $c \equiv \frac{1}{2\epsilon} - m_0$  é o processo de renormalização utilizado, através do qual as divergências são eliminadas. Este procedimento se justifica quando os graus de liberdade internos dos nucleons não são relevantes na descrição da interação. Se isto é verdade, então a forma das equações de movimento não deve depender de modelos de estrutura interna dos nucleons. Esta é a razão de se considerar essas partículas como puntiformes. As divergências indesejáveis são limitações do conceito de partícula puntiforme e do conceito de campo. Essas limitações compensam-se mutuamente, isto é, a energia infinita do campo, se não houvesse a partícula, é compensada pela massa da partícula, infinita se não houvesse o campo. No âmbito de uma teoria clássica não é necessário especificar o mecanismo pelo qual essa compensação é feita, resultando na partícula real, observável. É suficiente para nossos objetivos a simples subtração efetuada.

O procedimento para obter as equações de movimento no caso do campo escalar é essencialmente o mesmo empregado para obter as equações (23). O resultado são as equações

$$m a^\sigma = \frac{1}{3} g^2 (\dot{a}^\sigma + a^2 v^\sigma) + \frac{1}{2} \mu^2 g^2 v^\sigma - g^2 \mu^2 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{s^\sigma}{s^2} J_2(\mu s) d\tau' + \\ + g^2 \mu \frac{d}{d\tau} [v^\sigma \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{s} J_1(\mu s) d\tau'] + g [F_{IN}^\sigma + \frac{d}{d\tau} (\phi_{IN} v^\sigma)] \quad (23.b)$$

O segundo membro de (23) é a força efetiva que age em cada instante sobre a partícula. Apenas o último termo se refere à força exercida pelo outro nucleon,  $-g F_{IN}^{\sigma\nu} v_\nu$ . Os termos que restam representam o efeito sobre o movimento da partícula causado pela interação com o seu próprio campo. Vamos olhar mais de perto para o significado disto. Considere primeiramente apenas a força externa. Este termo se anula quando multiplicado pela velocidade,

$$v_\sigma F_{IN}^{\sigma\nu} v_\nu = -v_\nu F_{IN}^{\nu\sigma} v_\sigma = 0$$

Definindo  $K^\sigma \equiv F_{IN}^{\sigma\nu} v_\nu$ ,  $K^\sigma = \left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right)_{IN}$

$$v_\sigma K^\sigma = v_\sigma \left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right)_{IN} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2} (mv^2) = \frac{1}{2} \frac{dm}{d\tau} = 0,$$

ou seja, a interação da partícula com o campo externo mantém constante a sua massa de repouso, informação que, em última análise, está contida em  $v_\sigma K^\sigma = 0$ .

Vimos na seção anterior que o movimento acelerado do nucleon faz com que haja componentes de seu campo que alcançam grandes distâncias, identificadas como o campo de radiação mecânica. Isto significa que a partícula acelerada perde o momento e energia carregados pelo campo. O efeito dessa perda sobre a trajetória da partícula é o que se chama de reação da radiação. No caso eletromagnético essa força tem a expressão

$$\left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right) = \frac{2}{3} e^2 a^2 v^\sigma$$

No nosso caso devemos incluir o termo de "massa" do campo,  $g\tilde{G}^{\sigma\nu}v_\nu$ ,

$$R^\sigma \equiv - \left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right)_{\text{RAD}} = - \frac{2}{3} g^2 a^2 v^\sigma - g\tilde{G}^{\sigma\nu}v_\nu \quad (24)$$

Multipliquemos  $R^\sigma$  definido acima por  $v_\sigma$ ,

$$v_\sigma R^\sigma = - \frac{2}{3} g^2 a^2 - g v_\sigma \tilde{G}^{\sigma\nu}v_\nu = - \frac{2}{3} g^2 a^2 \neq 0,$$

ou seja, a força de reação da radiação não preserva a massa de repouso da partícula. Sabemos, no entanto, que as partículas que emergem da interação são idênticas às que incidem. A energia irradiada é, no nosso modelo, a diferença entre as energias cinéticas dos estados inicial e final. Deve haver, dessa forma, uma outra interação, cuja origem no momento ainda não é identificada, que cumpra o papel de equilibrar o balanço de energia-momentum,

$$\left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right)_{\text{TOT}} = K^\sigma - R^\sigma + f^\sigma, \quad (25)$$

onde a forma de  $f^\sigma$  ainda deve ser determinada. Se multiplicarmos ambos os lados por  $v_\sigma$  teremos:

$$v^\sigma \left(\frac{dp^\sigma}{d\tau}\right)_{\text{TOT}} = v^\sigma K_\sigma - v_\sigma R^\sigma + v_\sigma f^\sigma = 0$$

ou, equivalentemente,

$$v_\sigma R^\sigma = v_\sigma f^\sigma,$$

$$-\frac{2}{3} g^2 a^2 v^\sigma = f^\sigma$$

A relação

$$v^\sigma a^2 + \dot{a}^\sigma = 0$$

determina a forma de  $f^\sigma$ ,

$$f^\sigma = \frac{2}{3} g^2 \dot{a}^\sigma \tag{26}$$

A substituição de (24) e (26) em (25) resulta nas equações de movimento (23). Resta ainda explicar a origem de  $f^\sigma$ . Seu papel nas equações de movimento é o de equilibrar o balanço de energia. Suas conseqüências, no entanto, vão mais além. O que faremos agora é tentar interpretar a origem de  $f^\sigma$  estudando suas conseqüências nas equações de movimento.

Vamos supor que, em vez de ser devido ao outro nucleon, o campo  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  é um campo externo com a seguinte característica: é constante até um certo instante de tempo e nulo a partir de então. Instantes após a interação com o campo externo ser "desligada", a equação de movimento da partícula torna-se

$$m a^\sigma = \frac{2}{3} g^2 (\dot{a}^\sigma + a^2 v^\sigma) - g \tilde{G}^{\sigma\nu} v_\nu \tag{27}$$

Uma solução da eq. (27) é  $v^\sigma = \text{const.}$  como era, evidentemente, de se esperar. Essa, no entanto, não é a única solução. Dirac mostrou no problema análogo da eletrodinâmica<sup>(9)</sup> que há infinitas soluções em que a velocidade aumenta constantemente,

mesmo na ausência de forças externas. Soluções dessa natureza não são fisicamente aceitáveis. É necessário, portanto, acrescentar à equação (23) condições de contorno adequadas para evitar soluções não físicas. O caminho natural é transformar a eq. (23) numa equação integrodiferencial. Vamos definir a constante

$\tau_0 \equiv \frac{2}{3} \frac{g^2}{m}$  e reescrever tanto as equações (23) como as (23-b) na forma

$$a^\sigma - \tau_0 \dot{a}^\sigma = F^\sigma, \quad F^\sigma \equiv \tau_0 a^2 v^\sigma - \frac{3}{2g} (\tilde{G}^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu \quad (28)$$

Multiplicamos agora ambos os lados por  $e^{-\tau/\tau_0}$  e podemos escrever

$$- \frac{d}{d\tau} \left[ \tau_0 e^{-\tau/\tau_0} a^\sigma(\tau) \right] = e^{-\tau/\tau_0} F^\sigma(\tau) \quad (29)$$

Em qualquer movimento real o termo da direita em (29) deve ser integrável sobre um intervalo de tempo finito

$$e^{-\tau/\tau_0} (a^\sigma(\tau) - a^\sigma(0)) = - \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau d\tau' F^\sigma(\tau') e^{-\tau'/\tau_0} \quad (30)$$

Para qualquer movimento real é preciso que a integral na eq. (30) exista no limite  $\tau \rightarrow \infty$ . Essa condição determinará a constante  $a^\sigma(0)$ .

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} a^\sigma(\tau) = 0 \Rightarrow a^\sigma(0) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty d\tau' F^\sigma(\tau') e^{-\tau'/\tau_0}$$

As equações de movimento são, portanto

$$a^\sigma(\tau) = \frac{e^{-\tau/\tau_0}}{\tau_0} \int_\tau^\infty d\tau' F^\sigma(\tau') e^{\tau'/\tau_0} \quad (31)$$



A equação (31) é uma equação não local no tempo. Ela diz que a determinação de  $a^\sigma$  num instante  $\tau$  requer o conhecimento da força efetiva  $F^\sigma$  que age sobre a partícula não apenas no instante  $\tau$  mas também em todos os instantes subseqüentes. Nesta altura do acontecido, pode bem parecer estranha a situação: queremos determinar a trajetória de uma partícula, conhecidas as forças que agem sobre ela, resolvendo suas equações de movimento. Mas a solução das equações de movimento requer o conhecimento prévio da própria trajetória! A situação não é tão grave como parece, pois a constante  $\tau_0$  é da ordem de  $10^{-23}$  segundos. Isto significa que a influência do futuro sobre o movimento atual da partícula é desprezível para tempos umas poucas vezes  $\tau_0$ . Voltaremos a este ponto daqui a pouco.

Estamos agora próximos do nosso objetivo, que é interpretar o significado do termo  $\dot{a}^\sigma$  na equação de movimento. Analisando as eq. (28) e (29) fica claro que a origem da não localidade no tempo da eq. (31) é o termo  $a$  em (23), ou seja, a presença de  $\dot{a}^\sigma$  na equação diferencial equivale à não localidade da equação integrodiferencial. A mesma situação ocorre na eletrodinâmica. A diferença formal entre a eq. (31) e sua correspondente na eletrodinâmica está apenas na expressão da força efetiva que age sobre a partícula, dentro da integral. Vejamos como essa não localidade temporal pode ser interpretada na eletrodinâmica.

O raio clássico do elétron é definido como sendo o raio de uma esfera a partir da qual o campo coulombiano teria energia igual à massa de repouso do elétron, admitindo que esta seja de origem puramente eletromagnética,

$$E = \frac{e^2}{2r_0} = mc^2 \rightarrow r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} \sim 10^{-13} \text{ m.}$$

O parâmetro  $\tau_0$  na equação de Lorent-Dirac é da ordem de  $10^{-22}$  s, ou do tempo necessário para um sinal luminoso cruzar um diâmetro clássico do elétron. Em outras palavras, a distância correspondente a não causalidade temporal nas eq. de movimento é da mesma ordem do raio clássico do elétron,

$$\tau_0 \sim r_0 \quad (c = 1)$$

Este fato pode ser encarado do seguinte modo: apesar do elétron ser considerado como uma partícula puntiforme sua inércia se estende espacialmente por uma região de dimensões da ordem de  $r_0$ . Isto se deve ao fato do campo possuir energia e momentum, e conseqüentemente, inércia. O que se entende, classicamente falando, por eletron é o sistema combinado singularidade + campo, com um "raio efetivo" da ordem de  $r_0$ . Neste sentido a não localidade no tempo, ou equivalentemente, a presença do termo  $\dot{a}^\sigma$  na equação de movimento pode ser interpretada como o efeito da inércia do campo sobre o movimento da partícula puntiforme.

Estas idéias decorrem do uso dos conceitos de campo clássico e partícula puntiforme, e não do tipo específico de campo considerado. A origem do termo  $\dot{a}^\sigma$  na eletrodinâmica e na teoria mesônica é comum. Interpretamos o significado do termo  $\dot{a}^\sigma$  nas equações de movimento de nucleon da mesma forma que o fazemos na equação de movimento do elétron: o nucleon em movimento traz consigo seu campo. Há defasagens nas respostas das diferentes regiões deste sistema à aceleração provocada por um agente externo. Este efeito aparece na equação de movimento como um termo envolvendo  $\dot{a}^\sigma$ , ou então como uma não localidade no tempo a eq. (31). Esta é a interpretação adotada aqui.

É claro que essa discussão não pode ser encarada com rigor absoluto. A interpretação dada aqui é quase intuitiva. Distâncias tão pequenas como o raio clássico do elétron e intervalos de tempo tão curtos tornam qualquer teoria clássica uma aproximação: o que estamos tentando fazer é enquadrar num esquema clássico, fenômenos sabidamente pertencentes ao domínio quântico. Os problemas são incontornáveis, pois a dinâmica relativística de partículas carregadas em interação toca os limites de competência de uma descrição clássica da natureza.

Acreditamos, no entanto, que numa faixa de energia de 0.5 - 5 GeV, no laboratório, o modelo aqui desenvolvido é uma descrição auto-consistente, covariante e que leva em conta a produção de pions em interações nucleon-nucleon. Tomamos, dessa forma, as equações (23-b) como as equações de movimento da interação nucleon-nucleon relativística.

A - A FUNÇÃO DE GREEN DO CAMPO MESÔNICO

A função de Green do campo mesônico é definida pela equação

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2)G(x, x') = 2\pi \delta(x-x') \quad (\text{A.I})$$

Definindo  $s^\sigma = (x-x')^\sigma = [t, \vec{r}]$ , a representação integral é

$$G(s) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{e^{ik^\nu s_\nu}}{k^2 - \mu^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k dk_0 \cdot \frac{e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{k_0^2 - \vec{k}^2 - \mu^2} \quad (\text{A.II})$$

Consideremos em primeiro lugar a parte espacial da integral (A.II).

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 2\pi \int d(\cos \theta) k^2 dk e^{ikr \cos \theta} \\ &= -2\pi i \int_0^\infty dk \frac{k}{r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) \\ &= -2\pi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ikr} \end{aligned} \quad (\text{A.III})$$

A parte temporal da integral (A.II) é

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - \omega^2}, \quad \omega^2 \equiv \vec{k}^2 + \mu^2 \quad (\text{A.IV})$$

O integrando de  $I_2$  é singular em  $k_0 = \pm \omega$ . Essas singularidades podem ser evitadas se a integral for computada no plano complexo, com  $k_0^2 - \omega^2 \rightarrow k_0^2 - \omega^2 \pm i\epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ :

$$I_2 \rightarrow \oint_c dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - \omega^2 \pm i\epsilon}, \quad k_0 = k_0^R + ik_0^I \quad (\text{A.V})$$

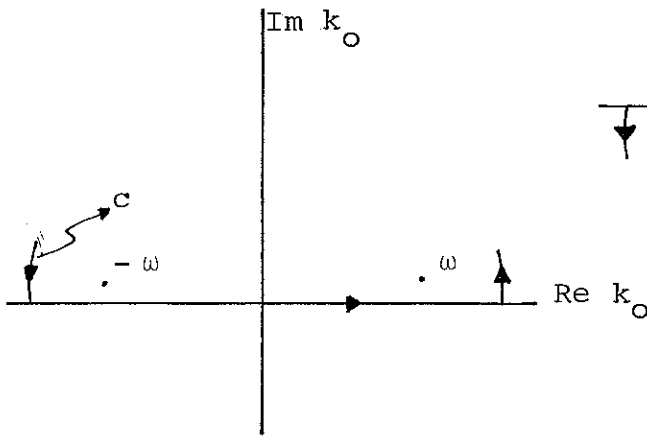


figura I-A

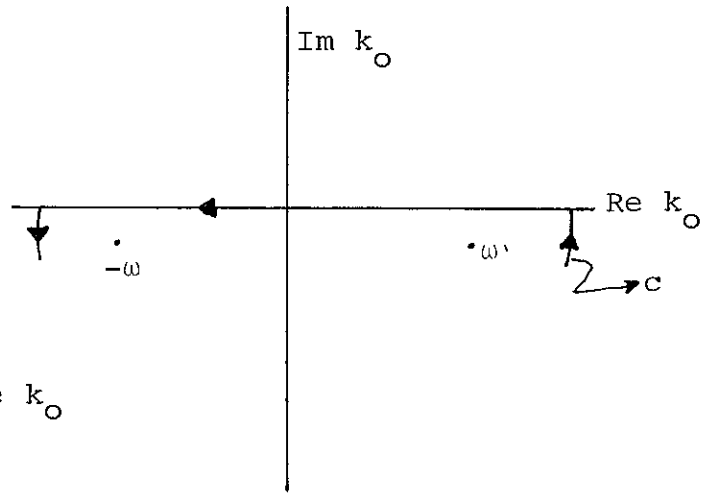


figura I-B

A integral na variável real  $k_0$  é obtida quando o contorno  $c$  envolve todo o semiplano superior, ou todo o inferior, e no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Vamos supor, sem nenhuma perda de generalidade dos nossos resultados, que a fonte encontra-se na origem. Soluções com  $t > 0$  serão, portanto, soluções retardadas, enquanto que as soluções com  $t < 0$  serão as avançadas. O integrando em (A.V) é

$$e^{ik_0 t} = e^{i(k_0^R + ik_0^I)t} = e^{ik_0^R t} \cdot e^{-k_0^I t}$$

Considere o propagador retardado ( $t > 0$ ). O integrando em (A.V) deve ser finito no limite  $k_0^I \rightarrow \infty$ . Essa condição impõe a escolha do contorno  $c$  como o indicado na figura I-A. A

mesma condição impõe a escolha do contorno indicado na figura I-B para o cômputo do propagador avançado ( $t < 0$ ).

A integral  $I_2$  agora é facilmente determinada com auxílio do teorema dos resíduos,

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}(\pm \omega) \quad (\text{solução retardada})$$

$$I_2 = -2\pi i \operatorname{Res}(\pm \omega) \quad (\text{solução avançada})$$

Os resíduos do integrando (A.V) são

$$\operatorname{Res} f(\pm \omega) = \pm \frac{e^{\pm i\omega t}}{2\omega}$$

e a integral  $I_2$  vale

$$I_2^R = \frac{i}{\omega} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}]$$

$$I_2^A = -I_2^R$$

A função de Green (A.II) pode ser escrita na forma

$$G_R(s) = -\frac{1}{(2\pi)^3} (-2\pi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikr} \cdot \frac{\pi i}{\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega} e^{ikr} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$$G_R(s) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega} e^{ikr} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\text{A.VI})$$

Resta avaliar a integral na equação acima. Para isso considere a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ixy} \frac{\text{sen}(b\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}} = \pi J_0 \frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{|b| |y|} \Theta(|b| |y|)$$

Se  $x^2 = k^2$  ,  $a^2 = \mu^2$  ,  $y = r$  e  $b = t$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega} \text{sen}(\omega t) = \pi J_0 \frac{\mu\sqrt{t^2 - r^2}}{\omega} \Theta(t^2 - r^2)$$

e a função de Green será

$$G(s) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} J_0(\mu\sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(t^2 - r^2) \quad (\text{A.VII})$$

Vamos efetuar a derivação na eq. (A.VII). Usando a propriedade

$$\frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x),$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\mu\sqrt{t^2 - r^2}) = \frac{\mu r}{\sqrt{t^2 - r^2}} J_1(\mu\sqrt{t^2 - r^2})$$

$$e \quad \frac{\partial}{\partial r} J_0(\mu\sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(t^2 - r^2) =$$

$$= \frac{\mu r}{\sqrt{t^2 - r^2}} J_1(\mu\sqrt{t^2 - r^2}) \cdot (t^2 - r^2) + \frac{\partial}{\partial r} \Theta(t^2 - r^2)$$

pois  $J_1(\mu\sqrt{t^2 - r^2}) = 1$  quando  $t^2 - r^2 = 0$ . A segunda derivada é uma função delta,

$$\frac{\partial}{\partial r} \Theta(t^2 - r^2) = -2r \delta(t^2 - r^2)$$

A equação (A.VII) agora tem a forma

$$G(s) = 2\delta(s^2) - \frac{\mu}{s} J_1(\mu s) \theta(s^2)$$

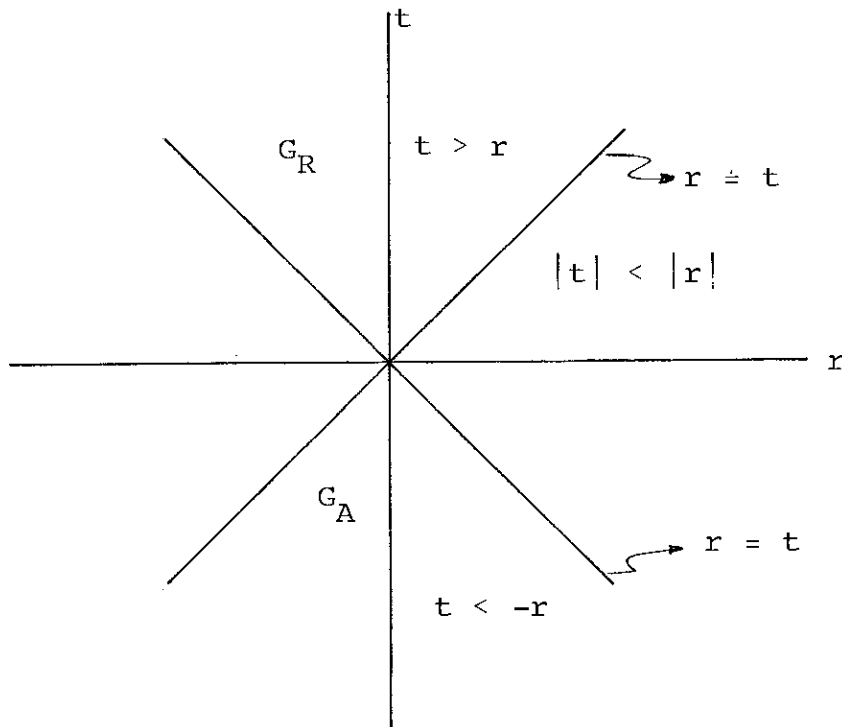
ou

$$G_R(s) = 2\delta(s^2) - \frac{\mu}{s} J_1(\mu s) \theta(t-r)$$

e

$$G_A(s) = 2\delta(s^2) - \frac{\mu}{s} J_1(\mu s) \theta(t+r)$$

ou é a expressão da função de Green contida no texto.



B - CÁLCULO DE  $-\int T^{\sigma\nu} d\omega_\nu$

Vamos, em primeiro lugar, expressar  $T^{\sigma\nu}_O$  em termos



das variáveis da partícula.

$$1) \quad - \frac{F_{0\nu}^{\sigma\nu} F_{0\rho}^{\nu\sigma} d\omega_{\nu}}{\epsilon^3}$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{g} F_{0\rho}^{\nu\sigma} d\omega_{\nu} &\rightarrow \frac{s_{\rho} v_{\nu}^{\sigma} - s_{\rho} v_{\rho}^{\nu\sigma}}{\epsilon^3} (s_{\nu} (1 - K') - v_{\nu} \epsilon) \epsilon d\tau d\Omega = \\ &= \frac{s_{\rho} \epsilon^{\sigma} - s_{\rho} \epsilon K' - s_{\rho} \epsilon + \epsilon^2 v_{\rho}^{\sigma}}{\epsilon^2} d\tau d\Omega \\ &= \frac{-s_{\rho} K' + \epsilon v_{\rho}^{\sigma}}{\epsilon} d\tau d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{s_{\rho} v_{\nu}^{\sigma} - s_{\rho} v_{\rho}^{\nu\sigma}}{\epsilon^3} K' (s_{\nu} (1 - K') - v_{\nu} \epsilon) \epsilon d\tau d\Omega = \\ = \frac{s_{\rho} K'^2 - \epsilon v_{\rho}^{\sigma} K'}{\epsilon} d\tau d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{\rho} a_{\nu}^{\sigma} - s_{\rho} a_{\rho}^{\nu\sigma}}{\epsilon^2} s_{\nu} (1 - K') - \epsilon v_{\nu}^{\sigma} \epsilon d\tau d\Omega = \\ = \frac{s_{\rho} K' - s_{\rho} K'^2 + \epsilon^2 a_{\rho}^{\sigma}}{\epsilon} d\tau d\Omega \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{g} F_{0\rho}^{\nu\sigma} d\omega_{\nu} = v_{\rho} (1 - K') + \epsilon a_{\rho}^{\sigma} d\tau d\Omega$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{\rho} v_{\nu}^{\sigma} - s_{\rho} v_{\rho}^{\nu\sigma}}{\epsilon^3} v_{\rho} (1 - K') + \epsilon a_{\rho}^{\sigma} d\tau d\Omega = \\ = \frac{s_{\rho}^{\sigma} (1 - K') - \epsilon (1 - K') v^{\sigma} - \epsilon K' v^{\sigma}}{\epsilon^3} d\tau d\Omega = \\ = \frac{s_{\rho}^{\sigma} (1 - K') - \epsilon v^{\sigma}}{\epsilon^3} d\tau d\Omega \end{aligned}$$

$$- \frac{s_{\rho} v_{\nu}^{\sigma} - s_{\rho} v_{\rho}^{\nu\sigma}}{\epsilon^3} K' [v_{\rho} (1 - K') + \epsilon a_{\rho}^{\sigma}] d\tau d\Omega =$$

$$= - \frac{s^\sigma (1 - K') - \epsilon v^\sigma}{\epsilon^3} K' d\tau d\Omega$$

$$\frac{s^\sigma a^\rho - s^\rho a^\sigma}{\epsilon^2} [v_\rho (1 - K') + \epsilon a_\rho] d\tau d\Omega =$$

$$= \frac{s^\sigma a^2 - a^\sigma (1 - K') - K' a^\sigma}{\epsilon} d\tau d\Omega$$

$$\begin{aligned} - F_0^{\sigma\rho} F_0^\nu{}_\rho d\omega_\nu &= g^2 \left[ \frac{s^\sigma - \epsilon v^\sigma}{\epsilon^3} - 2 \frac{s^\sigma - \epsilon v^\sigma}{\epsilon^3} K' - \frac{v^\sigma K'}{\epsilon^2} - \frac{a^\sigma}{\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^\sigma}{\epsilon^3} K'^2 + \frac{s^\sigma a^2}{\epsilon} \right] d\tau d\Omega \end{aligned} \quad (B.I)$$

$$2) \quad - \frac{1}{4} F^{\delta\rho} F_{\delta\rho} d\omega_\nu$$

$$- F^{\delta\rho} F_{\delta\rho} = \left[ \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} + \frac{s^\delta a^\rho - s^\rho a^\delta}{\epsilon^2} - \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} K' \right] .$$

$$\cdot \left[ \frac{s_\delta v_\rho - s_\rho v_\delta}{\epsilon^3} - \frac{s_\delta a_\rho - s_\rho a_\delta}{\epsilon^2} + \frac{s_\delta v_\rho - s_\rho v_\delta}{\epsilon^3} K' \right]$$

$$- \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} \cdot \frac{s_\delta v_\rho - s_\rho v_\delta}{\epsilon^3} = \frac{2}{\epsilon^4}$$

$$- \frac{s^\delta a^\rho - s^\rho a^\delta}{\epsilon^2} \cdot \frac{s_\delta a_\rho - s_\rho a_\delta}{\epsilon^2} = \frac{2K'^2}{\epsilon^4} = \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} .$$

$$\cdot \frac{s_\delta v_\rho - s_\rho v_\delta}{\epsilon^3} K'^2$$

$$- \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} \cdot \frac{s_\delta a_\rho - s_\rho a_\delta}{\epsilon^2} = \frac{2K'}{\epsilon^4} = \frac{s^\delta v^\rho - s^\rho v^\delta}{\epsilon^3} .$$

$$\cdot \frac{s_\delta v_\rho - s_\rho v_\delta}{\epsilon^2} K'$$

Os quatro termos restantes são idênticos aos quatro últimos, a menos do sinal. O único termo não compensado é o primeiro,  $\frac{2}{\epsilon^4}$ .

O resultado é

$$- \frac{1}{4} F^{\delta\rho} F_{\delta\rho} d\omega_v = \frac{g^2}{2\epsilon^3} [s_v(1 - K') - v_v \epsilon] d\tau d\omega$$

$$3) \quad \underline{- \mu^2 \phi^\sigma \phi^v d\omega_v}$$

$$- \mu^2 g^2 \frac{v^\sigma v^v}{\epsilon^2} [s_v(1 - K') - v_v \epsilon] \epsilon d\tau d\Omega =$$

$$\mu^2 g^2 [v^\sigma(1 - K') - v^\sigma \epsilon] d\tau d\Omega = \mu^2 g^2 K' v^\sigma d\tau d\Omega \quad (\text{B.III})$$

$$4) \quad \underline{\frac{1}{2} \mu^2 \phi_\rho \phi^\rho d\omega_v}$$

$$\frac{1}{2} \mu^2 \phi_\rho \phi^\rho d\omega_v = \frac{1}{2} \mu^2 g^2 \frac{1}{\epsilon^2} (s_v(1 - K') - v_v \epsilon) \epsilon d\tau d\Omega$$

$$= \frac{\mu^2 g^2}{2\epsilon} (s_v(1 - K') - v_v \epsilon) d\tau d\Omega \quad (\text{B.IV})$$

Vamos agora integrar  $T^{\sigma v}$  termo a termo. Em alguns casos será conveniente efetuar a integração no sistema de repouso da partícula para então generalizar o resultado para um sistema qualquer.

$$1) \quad \underline{- \int F_0^{\sigma\rho} F_{0\rho}^v d\omega_v}$$

$$a) \quad \int d\Omega (s^\sigma - \epsilon v^\sigma) = [\int d\Omega (s_0 - \epsilon v_0); \int d\Omega (s^k - \epsilon v^k)] = 0$$

$$b) \quad - \int d\Omega K' = \int d\Omega s_\sigma a^\sigma = [\int d\Omega s_0 a_0; - \int d\Omega s_k a_k] = 4\pi s_0 a_0 =$$

$$= 4\pi \epsilon v_0 a^\sigma \text{ para qualquer sistema de referência. Como}$$

$$v_{\sigma} a^{\sigma} = 0, \quad \int d\Omega K' = 0.$$

Se  $B$  é um vetor constante na superfície de integração, pode-se mostrar com um pouco de paciência que no sistema de repouso

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega s_{\nu} s_{\sigma} B^{\sigma} &= \epsilon^2 b^0, \quad \nu = 0 \\ &= -\frac{1}{3} \epsilon^2 b^k, \quad \nu = k, \end{aligned} \quad \text{ou } -\frac{1}{3} \epsilon^2 B^{\sigma} + \frac{4}{3} \epsilon^2 v^{\sigma} v_{\nu} B^{\nu} \quad \text{em}$$

qualquer referencial. Essa propriedade será útil no cálculo das demais integrais. (B.V)

$$c) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon^3} \int d\Omega s_{\sigma} s_{\nu} a^{\nu} = -\frac{1}{3\epsilon} a^{\sigma} + \frac{4}{3\epsilon} a_{\sigma} v^{\sigma} = -\frac{1}{3\epsilon} a^{\sigma}$$

$$d) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon^3} \int d\Omega s^{\sigma} K'^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon^3} \int d\Omega s_{\sigma} s_{\rho} a^{\rho} s_{\nu} a^{\nu} = -\frac{1}{3} v^{\sigma} a^2$$

As integrais restantes são triviais. Usando os resultados acima, podemos escrever

$$- \int F_0^{\sigma\rho} F_{0\rho}^{\nu} d\omega_{\nu} = \int g^2 \left[ \frac{1}{3\epsilon} a^{\sigma} - \frac{2}{3} v^{\sigma} a^2 \right] d\tau \quad \text{(B.VI)}$$

$$2) \quad - \int \frac{1}{4} F_0^{\rho\delta} F_{0\rho\delta} d\omega_{\nu}$$

$$- \int \frac{1}{4} F_0^{\delta\rho} F_{0\delta\rho} d\omega_{\nu} = \int \frac{g^2}{2\epsilon^3} (s_{\nu} (1 - K') - v_{\nu} \epsilon) d\tau d\Omega$$

$$= \frac{g^2}{2\epsilon^3} \left[ \int d\Omega (s_{\nu} - \epsilon v_{\nu}) d\tau - \int d\Omega s_{\nu} K' d\tau \right]$$

$$= \frac{g^2}{6\epsilon} a^{\sigma} d\tau \quad \text{(B.VII)}$$

$$3) \quad \underline{- \mu^2 \int \phi^\sigma \sigma^\nu d\omega_\nu}$$

$$- \mu^2 \int \phi^\sigma \phi^\nu d\omega_\nu = \mu^2 g^2 \int d\Omega v^\sigma K' d\tau = 0$$

$$4) \quad \underline{\frac{1}{2} \mu^2 \int \phi^\rho \phi_\rho d\omega_\nu}$$

$$\frac{1}{2} \mu^2 \int \phi^\rho \phi_\rho d\omega_\nu = \mu^2 g^2 \frac{1}{2\epsilon} \int d\Omega (s_\nu (1 - K') - v_\nu \epsilon) d\tau$$

$$= \mu^2 g^2 \frac{1}{2\epsilon} \int d\Omega s_\nu K' d\tau = - \mu^2 g^2 \frac{\epsilon}{6} a^\sigma = 0 \quad \text{no limite } \epsilon \rightarrow 0$$

Utilizando estes resultados podemos escrever

$$- \frac{1}{4\pi} \int T_0^{\sigma\nu} d\omega_\nu = g^2 \left[ \frac{1}{2\epsilon} a^\sigma - \frac{2}{3} a^2 v^\sigma \right] \quad (\text{B.VIII})$$

Resta agora determinar  $-\int T_M^{\sigma\nu} d\omega_\nu$ . No tensor  $T_M^{\sigma\nu}$  apenas termos em  $\epsilon^{-2}$  vão contribuir para o fluxo. São termos do tipo

$$a) \quad F_0^{\sigma\rho} (G_\rho^\nu + F_{\rho IN}^\nu) + (G^{\sigma\rho} + F_{IN}^{\sigma\rho}) F_0^\nu_\rho$$

e

$$b) \quad g^{\sigma\nu} [F_0^{\delta\rho} (G_{\delta\rho} + F_{\delta\rho IN}) + (G_{\delta\rho} + F_{IN}^{\delta\rho}) F_0_{\delta\rho}]$$

Como  $(G^{\sigma\nu} + F^{\sigma\nu})$  é de ordem  $\epsilon^0$  apenas o primeiro termo de  $F_0^{\sigma\nu}$  contribuirá para a integral de fluxo. O primeiro termo de  $G^{\sigma\nu}$  é o primeiro termo de  $F_0^{\sigma\nu}$  multiplicado por  $-\frac{1}{2} \mu^2 \epsilon^2$ .  $\quad 0$

produto do primeiro termo de  $F_0^{\sigma\nu}$  por ele mesmo não contribui para o fluxo e, portanto, apenas o 2º termo de  $G^{\sigma\nu}$  precisa ser considerado. Teremos então, omitindo os termos que se anulam em  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} 1) \quad & - \frac{1}{4\pi} \int [F_0^{\sigma\rho} (G_\rho^\nu + F_{IN}^{\rho\nu}) + (G^{\sigma\rho} + F_{IN}^{\sigma\rho}) F_{0\rho}^\nu] d\omega_\nu = \\ & = - \frac{g}{4\pi} \left[ \int \frac{s^\sigma v^\rho - s^\rho v^\sigma}{\epsilon^2} (G_\rho^\nu + F_{IN}^{\rho\nu}) (s_\nu - \epsilon v_\nu) d\tau d\Omega + \right. \\ & \quad \left. + \int (G^{\sigma\rho} + F_{IN}^{\sigma\rho}) v_\rho d\tau d\Omega \right] \end{aligned}$$

A segunda integral é imediata pois os campos são constantes ao longo do tubo

$$- \frac{g}{4\pi} \int d\Omega d\tau (G^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu = - g \int (G^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_\nu d\tau$$

A primeira integral é calculada facilmente com auxílio de (B.V).

$$\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int d\Omega s^\rho v^\sigma G_\rho^\nu s_\nu = - \frac{1}{3} v^\rho G_\rho^\sigma + \frac{4}{3} v^\sigma v_\nu v^\rho G_\rho^\nu = - \frac{1}{3} v^\rho G_\rho^\nu$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int d\Omega s^\rho v^\sigma G_\rho^\nu s_\nu = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega v^\sigma s_\nu s^\rho G_\rho^\nu = 0$$

Os demais termos anulam-se pela antissimetria de  $G_\rho^\nu + F_{IN\rho}^\nu$ .

Teremos assim

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \int [F_0^{\sigma\rho} (G_\rho^\nu + F_{IN\rho}^\nu) + (G_\rho^{\sigma\rho} + F_{IN}^{\sigma\rho}) F_{0\rho}^\nu] d\omega_\nu = \\ & = - g \int \left[ - \frac{1}{3} v^\rho (G_\rho^\sigma + F_{IN\rho}^\sigma) + (G_\rho^\sigma + F_{IN\rho}^\sigma) v_\rho \right] d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \int g (G_{\rho}^{\sigma} + F_{IN \rho}^{\sigma}) v_{\rho} d\tau \quad (\text{B.IX})$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & - \frac{g^{\sigma\nu}}{4\pi} \int \frac{1}{2} [G_{\delta\rho} + F_{IN_{\delta\rho}}] \cdot F_0^{\delta\rho} d\omega_{\nu} = \\ & = \frac{g^{\sigma\nu}}{8\pi} \int d\tau g \frac{s^{\delta} v^{\rho} + s^{\rho} v^{\delta}}{\epsilon^2} (G_{\delta\rho} + F_{IN_{\delta\rho}}) (s_{\nu} - \epsilon v_{\nu}) d\Omega \\ & = - \frac{1}{3} \int g (G^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_{\nu} d\tau \quad (\text{B.X}) \end{aligned}$$

Reunidos os resultados (B.VIII), e (B.IX), obtemos finalmente a expressão constante do texto,

$$- \int T^{\sigma\nu} d\omega_{\nu} = \int d\tau [g^2 [\frac{1}{2\epsilon} a^{\sigma} - \frac{2}{3} v^{\sigma} a^2] + g (\tilde{G}^{\sigma\nu} + F_{IN}^{\sigma\nu}) v_{\nu}],$$

$$\tilde{G}^{\sigma\nu} = G^{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \mu^2 g \frac{s^{\sigma} v^{\nu} + s^{\nu} v^{\sigma}}{\epsilon} .$$

### REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 3

- [1] H.Van Dam e E.P.Wigner, Phys. Rev. 142, 838 (1966); Phys. Rev. B138, 1576 (1966)
- [2] D.G.Currie, Phys. Rev. 142, 817 (1966)
- [3] E.H.Kerner, J. Math. Phys. 6, 1218 (1965); Phys. Rev. Lett. 16, 667 (1966)
- [4] R.N.Hill e E.H.Kerner, Phys. Rev. Lett. 17, 1157 (1966)
- [5] D.G.Currie e T.F.Jordan, in "Lectures in Theoretical Physics" (A.D.Barut e W.E.Beittin, eds), vol. XA, p.91. Gordon Breach, New York, 1968
- [6] T.F.Jordan, Phys. Rev. 166, 1308 (1968)
- [7] P.Havas e J.Stachel, Phys. Rev. 185, 1636 (1969)
- [8] R.A.Mann, in "The Classical Dynamics of Particles", p.242 Academic Press, New York, 1974
- [9] P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. A167, 148 (1938)
- [10] J.A.Wheeler e R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys. 17, 157 (1945); Rev. Mod. Phys. 21, 425 (1949)
- [11] H.J.Bhabha, Proc. Roy. Soc. A172, 384 (1939)
- [12] H.J.Bhabha e Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc. A138, 134 (1944); Proc. Roy. Soc. A185, 250 (1946)
- [13] Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc. A185, 169 (1946)
- [14] P.Havas, Phys. Rev. 87, 309 (1952)
- [15] J.D.Jackson, in "Classical Electrodynamics", chap. 3, p.107 J.Wiley, New York, 1975



## CAPÍTULO 4

### INTEGRABILIDADE DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

No capítulo anterior encontramos as equações relativísticas de movimento de dois nucleons em interação, cumprindo a primeira parte do nosso propósito, que é investigar a possibilidade de extensão do modelo ECM a energias relativísticas. Resta agora verificar a integrabilidade numérica das equações apresentadas. Estas equações envolvem, a cada instante, integrais sobre toda a trajetória passada do nucleon. Uma estimativa numérica simples considerando o movimento da partícula como retilíneo e uniforme mostra que para intervalos de tempo superiores a  $\mu^{-1}$  o valor das integrais é menor que 1% do seu valor máximo. Isto representa uma simplificação mas, não são precisamente os termos envolvendo as integrais, as principais fontes de dificuldades. Como vimos no capítulo anterior, estes termos são bem definidos e comportados ao longo da trajetória da partícula. A característica mais notável das equações de movimento é a presença da derivada terceira  $\ddot{a}^\sigma$ , que confere um caráter não local no tempo. A origem deste fato está no uso dos conceitos de campo clássico e partícula puntiforme. A integrabilidade das equações de movimento vai depender, em última análise, do termo  $\ddot{a}^\sigma$ . As equações da teoria mesônica e da eletrodinâmica têm a mesma forma,

$$a^\sigma = \text{constante} \cdot \ddot{a}^\sigma + \text{uma "força efetiva"}$$

onde a "força efetiva" é uma função bem comportada em ambos os casos.

É esta "força efetiva" que, juntamente com a constante que multiplica  $\dot{a}^\sigma$  difere um caso do outro. No caso da eletrodinâmica a forma desta força efetiva é bem mais simples que a correspondente na teoria mesônica. Como estamos interessados, num primeiro momento, apenas na integrabilidade das equações, realizamos um estudo preliminar integrando as equações de Lorentz-Dirac da eletrodinâmica, muito mais simples, com o objetivo de mapear as dificuldades oriundas do termo  $\dot{a}^\sigma$  e de definir a melhor estratégia de solução do nosso problema.

A equação de Lorentz-Dirac descreve o movimento de um elétron sob a ação de um campo externo

$$a^\sigma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} (\dot{a}^\sigma + \frac{1}{c^2} a^2 v^\sigma) + \frac{e}{c} F_{IN}^{\sigma\nu} v_\nu, \quad (1)$$

onde  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  é o tensor eletromagnético representando o campo incidente. Tomando como unidade de comprimento o comprimento de onda Compton do elétron,  $\frac{h}{mc} \sim 10^{-11}$  cm, teremos

$$x^\sigma \rightarrow \frac{h}{mc} X^\sigma$$

$$t \rightarrow \frac{h}{mc^2} T, \quad \frac{h}{mc^2} \sim 10^{-21} \text{ s.}$$

$$v^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad c \frac{dX^\sigma}{dT} = cV^\sigma$$

$$a^\sigma = \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} \quad \frac{mc^3}{h} \frac{d^2 X^\sigma}{dT^2} = \frac{mc^3}{h} A^\sigma$$

As quantidades  $X$ ,  $T$ ,  $V$  e  $A$  são adimensionais e a equação 1 toma a forma

$$A^\sigma = \frac{2}{3} \alpha (\dot{A}^\sigma + A^2 V^\sigma) + \alpha F^\sigma$$

ou ainda

$$\dot{A}^\sigma = \frac{3}{2\alpha} A^\sigma - A^2 V^\sigma - \frac{3}{2} F^\sigma \quad (2)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  e  $F^\sigma \equiv F_{IN}^{\sigma\nu} \cdot V_\nu$

Na colisão  $e^-e^-$  teremos de resolver um sistema de 2 equações acopladas: o tensor  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  que aparece na equação da partícula 1 é o campo da partícula 2, expresso em termos das variáveis desta e calculado no tempo retardado, dado por

$$(X_1^0(\tau) - X_2^0(\tau_R))^2 = (\vec{X}_1(\tau) - \vec{X}_2(\tau_R))^2 \quad (3)$$

Pela simetria do problema podemos escolher um sistema de referência em que as trajetórias em cada instante satisfazem à condição  $\vec{X}_2 = -\vec{X}_1$ , o que reduz o número de equações a um. O campo  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  é calculado usando a trajetória obtida pela reflexão da trajetória 1. O tempo retardado em que  $F_{IN}^{\sigma\nu}$  é calculado é solução da equação

$$(X_1^0(\tau) - X_1^0(\tau_R))^2 = (\vec{X}_1(\tau) + \vec{X}_1(\tau_R))^2 \quad (4)$$

A componente temporal da equação (2) fica determinada pela componente espacial. Precisamos assim considerar, apenas, as componentes espaciais e, por isso, podemos resolver a equação (2) diretamente em função do tempo  $T = \int \gamma d\tau$ , com

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (c = 1),$$

Os quadrivetores  $A^\sigma$  e  $V^\sigma$  são facilmente expressos em termos dos trivetores usuais,  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dT^2}$ ,  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dT}$ ,

$$(v^\sigma) = [\gamma; \gamma\vec{v}]$$

$$A^\sigma = [\gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{v}; \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}]$$

Podemos reescrever a equação de Lorentz-Dirac em termos de  $\vec{x}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  e  $\dot{\vec{a}}$ :

$$\dot{\vec{a}} = \frac{1}{\gamma\alpha} \vec{a} - 3\gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{a} + \frac{3}{2\gamma^3} (F^0 \vec{v} - \vec{F}), \quad (5)$$

onde  $F^0$  e  $\vec{F}$  são, respectivamente, a parte temporal e espacial de  $F^\sigma = F^{\sigma\nu} V_\nu$ , escritas em termos de trivetores  $\vec{x}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ .

No sistema do centro de momentum as trajetórias dos eletrons estarão sempre num mesmo plano. A equação (5) tem, portanto, duas componentes apenas.

Aparentemente a equação (5),  $\dot{\vec{a}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{a})$ , poderia ser integrada numericamente com as técnicas padrão, uma vez que é um problema de valores iniciais. Por ser uma equação de 3ª ordem, a sua solução requer o conhecimento inicial não só de  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$  como também de  $\vec{a}$ ,

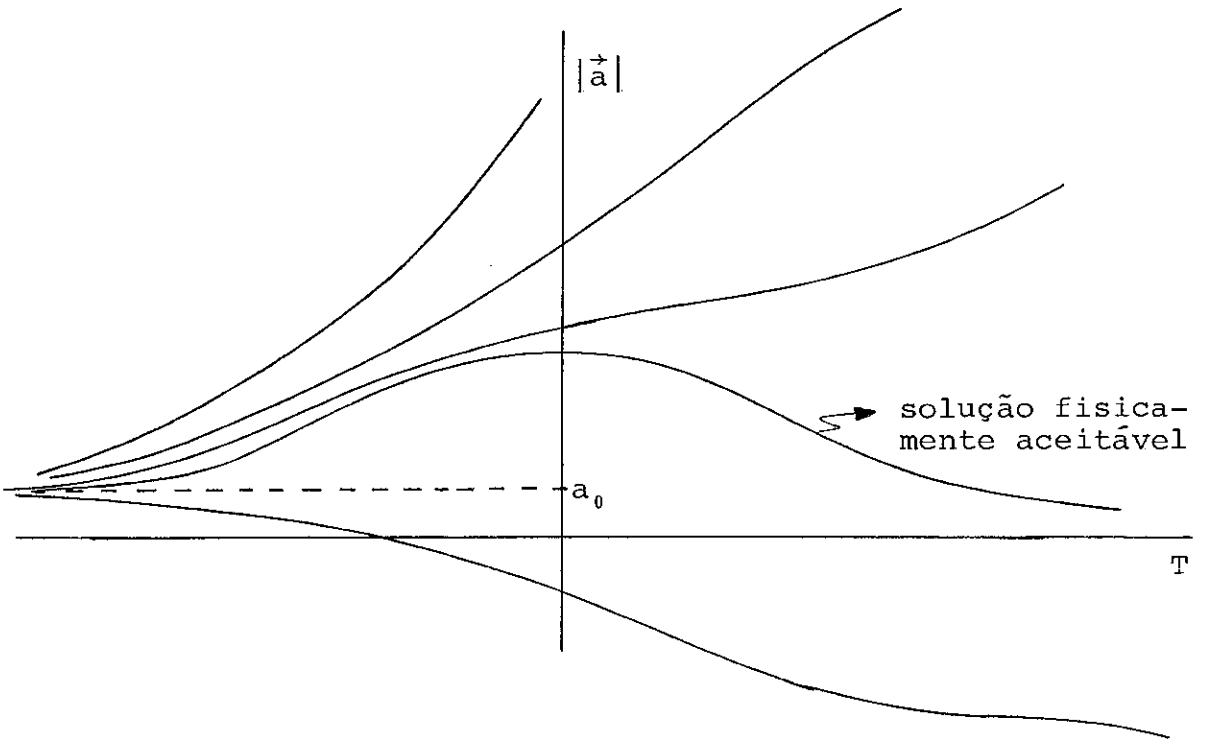
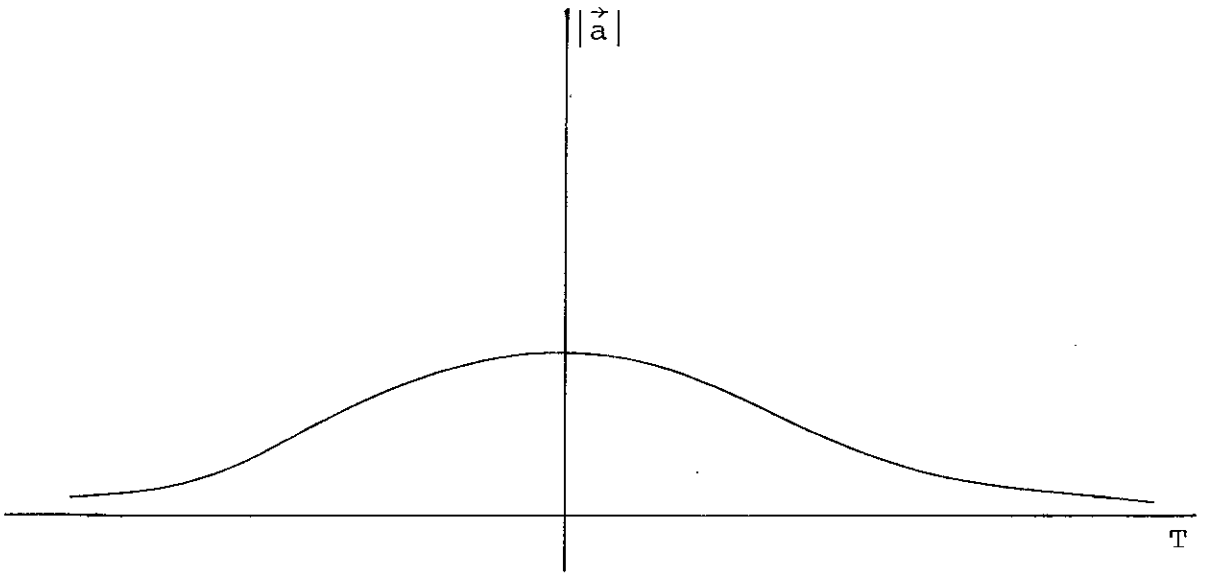
$$\begin{bmatrix} \vec{x}(T) \\ \vec{v}(T) \\ \vec{a}(T) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{v}_0 \\ \vec{a}_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde  $D$  é um operador diferencial. Para obter a devemos utilizar a condição de contorno para  $t \rightarrow -\infty$ . Existe para cada estado final  $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{a})$  um único conjunto possível  $(\vec{x}_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$  para que a equação (6) seja satisfeita. Das soluções da equação (5) apenas aquelas cujo comportamento é ilustrado na figura 1 são as fisicamente aceitáveis ( $\vec{a}(\infty) \rightarrow 0$ ). Isto é, o problema de obter a solução física que satisfaz a condição contorno para  $t \rightarrow \infty$  constitui um problema de autovalor para  $\vec{a}_0$ .

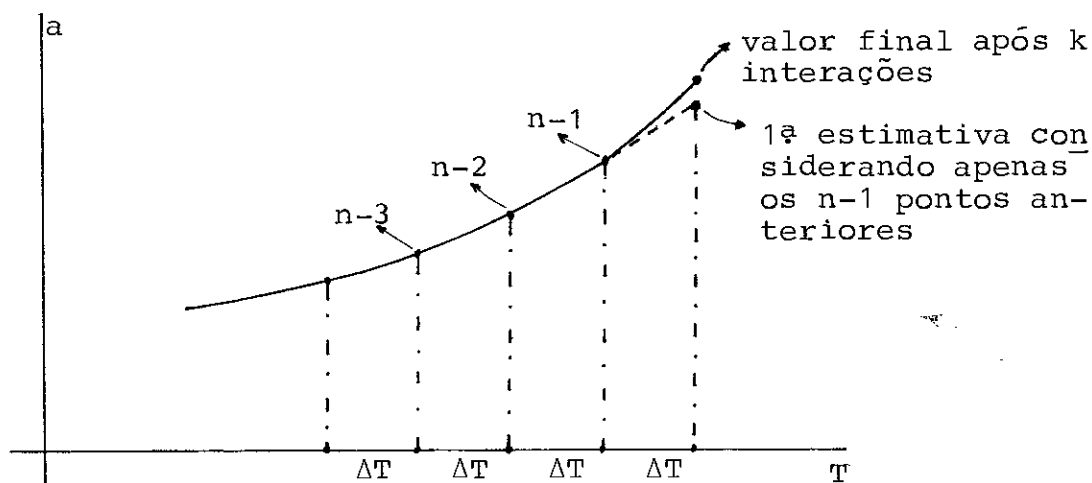
Empregando este ponto de vista obtivemos soluções com grandes valores do parâmetro de impacto  $b$ , ou equivalentemente com pequeno ângulo de deflexão ( $\sim 5^\circ$ ), ou ainda, sem praticamente perda de energia. Infelizmente à medida que  $b$  diminui, o método falha. Uma pequena variação em  $\vec{a}_0$ , mantidas fixas as outras condições iniciais, implica num outro estado final em que a condição  $\vec{a}(\infty) \rightarrow 0$  não é satisfeita. A sensibilidade da trajetória a estas pequenas variações em  $\vec{a}_0$  aumenta rapidamente com a diminuição do parâmetro de impacto, ou seja, à medida que  $b$  diminui, torna-se necessário especificar exatamente  $\vec{a}_0$  correspondente à única solução aceitável, para dados  $\vec{x}_0$  e  $\vec{v}_0$ . Existe um número muito grande de soluções divergentes, para dados  $\vec{x}_0$  e  $\vec{v}_0$ , cuja aceleração inicial é muito próxima do valor correto  $\vec{a}_0$ . A figura 2 mostra, esquematicamente, a situação descrita acima.

Esse método mostrou-se extremamente instável e foi necessário mudar a estratégia.

Outra tentativa foi feita considerando o termo  $\dot{\vec{a}}$  como uma perturbação. A primeira ordem é usualmente empregada para o cálculo de energias de radiação de partículas acelera-



das, como no caso da radiação de sincrotron. Isto é satisfatório quando a trajetória é conhecida a priori. No nosso caso queremos estimar a influência da radiação sobre a própria trajetória e devemos considerar ordens superiores, o que é feito por um processo iterativo. Escrevemos a equação a ser integrada na forma  $\ddot{\vec{a}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}) + \vec{g}(\vec{a})$ . Para calcular o n-ésimo ponto da trajetória a função  $\vec{g}(\vec{a})$  é estimada com base nos n-1 pontos anteriores; calculado dessa forma o n-ésimo ponto, repete-se agora o cálculo levando em conta na estimativa de  $\vec{g}(\vec{a})$  todos os pontos, incluindo o n-ésimo; obtido o novo valor do n-ésimo ponto, ele é novamente recalculado até que haja convergência, isto é, o valor do n-ésimo ponto na k-ésima repetição não difere da anterior. A figura abaixo ilustra o método.



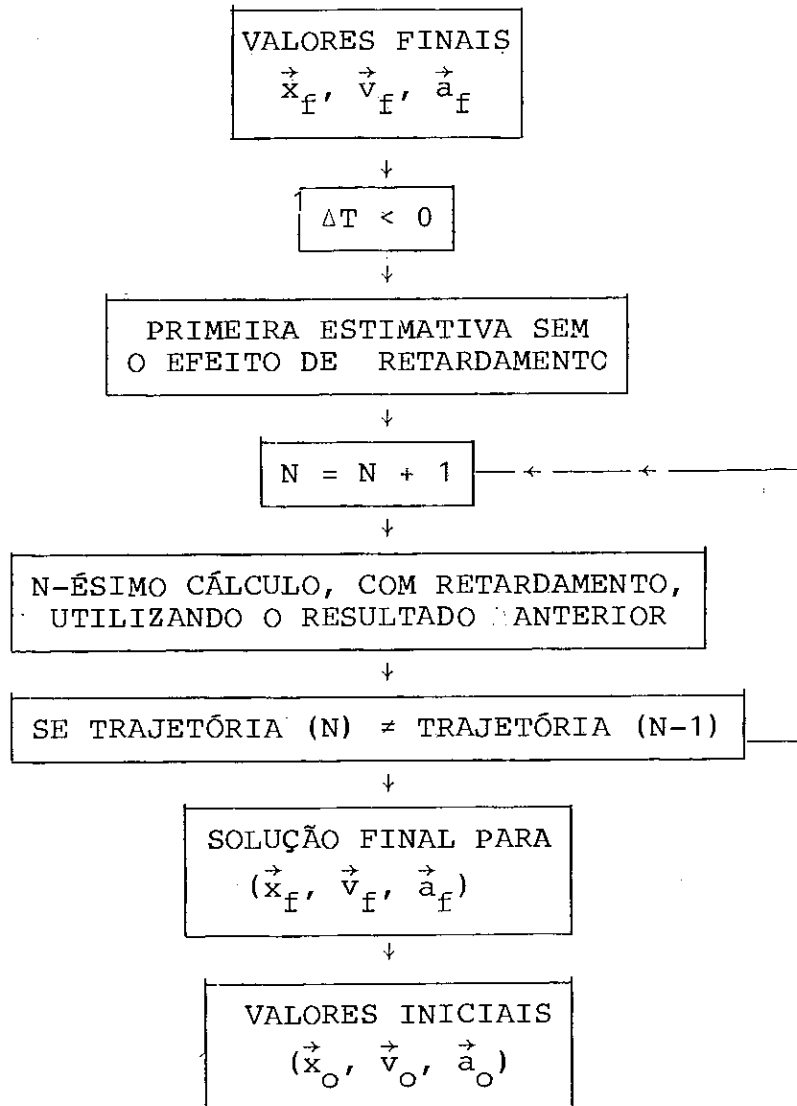
Essa abordagem é razoável se a aceleração não valia muito dentro do intervalo  $\Delta T$  de integração, o que não é o caso quando o parâmetro de impacto  $b$  é pequeno. Podemos, alternativamente, adotar um passo variável, que diminua sempre que  $\ddot{\vec{a}}$  atinja um valor limite, suficientemente pequeno para que seu efeito possa ser tratado como perturbação. No caso limite  $\Delta T \rightarrow 0$  a solução deveria convergir necessariamente.

Os resultados obtidos desmentem as expectativas. Quando o parâmetro de impacto é pequeno não obtemos soluções aceitáveis. Em outras palavras, quando  $b \rightarrow 0$ , este método iterativo partindo de uma trajetória sem radiação não converge.

Em virtude do insucesso das tentativas anteriores optamos por resolver a equação (5) no sentido inverso no tempo. Partindo de um estado final conhecido, determinamos o estado inicial correspondente, garantindo dessa forma a condição de contorno para  $t \rightarrow +\infty$ . Este método é estável mas isso tem o seu custo. O formalismo desenvolvido no capítulo anterior considera apenas campos retardados. O uso de campos retardados significa que a força que age sobre a partícula num instante de tempo qualquer é originada, necessariamente, num instante anterior (tempo retardado). Se vamos integrar a equação de  $T = +\infty \rightarrow T = -\infty$ , então é necessário ter uma primeira estimativa da trajetória da partícula para poder determinar, em cada instante, a força que age sobre a mesma. Esta primeira estimativa da trajetória é substituída pela trajetória calculada e nova integração é feita. Nesta nova integração a trajetória resultante da integração anterior é utilizada para o cálculo do campo retardado. Este processo iterativo é repetido tantas vezes quanto necessário para que a solução convirja, isto é, até que a diferença entre a  $n$ -ésima trajetória calculada e a anterior seja menor que um certo critério. A rapidez da convergência depende, dentre outros fatores, da estimativa inicial. Esta pode ser obtida resolvendo a equação (5) desprezando o efeito de retardamento mas incluindo a reação da radiação. Este procedimento é satisfatório apenas em energias não muito altas ( $\gamma < 2.0$ ). Quando a e-

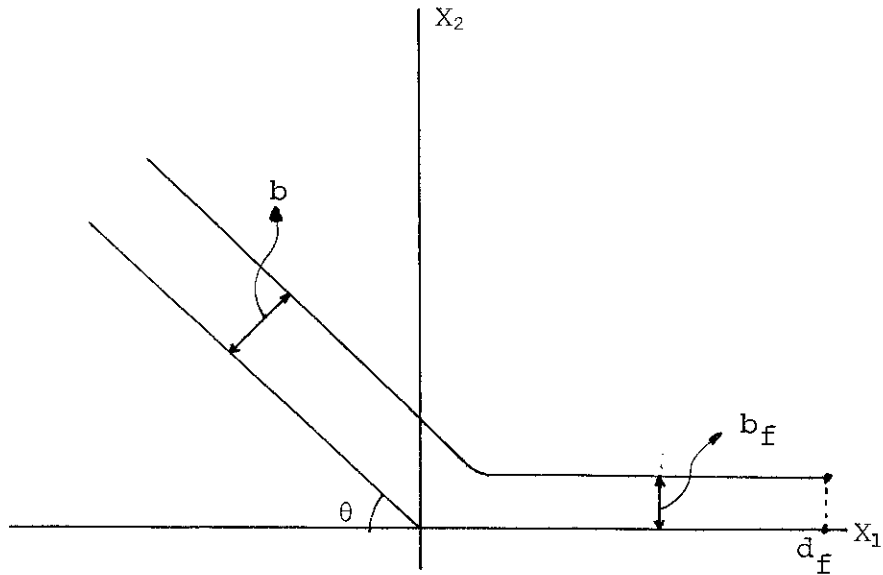


nergia aumenta, aumenta a importância do efeito de retardamento. A primeira estimativa, feita sem o retardamento, situa-se fora do raio de convergência. Este problema é resolvido utilizando como primeira estimativa, para cada valor da energia ( $\gamma$ ) final, a trajetória obtida para uma energia ligeiramente menor.



O movimento dos eletrons no referencial C.M., como vimos, está restrito a um plano. Denominando  $x$  o eixo horizontal, o vetor  $\vec{x}_f$  é  $\vec{x}_f = (d_f, b_f)$  e  $\vec{v}_f = (v_f, 0)$ . A figura abai-

o mostra a geometria



O que queremos, no entanto, é escrever as condições iniciais na forma

$$\vec{x}_0 = (d, b) \quad , \quad v_0 = (v, 0)$$

Para isso é preciso girar o sistema de coordenadas de  $\theta$ , que é o ângulo de deflexão. Há perda de energia e momentum das partículas via radiação eletromagnética, o faz com que  $b$  seja diferente de  $b_f$ . A determinação de  $b$  a partir da solução encontrada envolve erros numéricos da ordem de grandeza do próprio valor de  $b$ .

Para testar o alcance do nosso método, resolvemos considerar o caso mais simples do movimento unidimensional, eliminando assim dificuldades adicionais que no momento ainda não precisam ser consideradas. O intervalo de energias contemplado foi  $1.2 < \gamma_{IN} < 3.0$ .  $\gamma_{IN}$  relaciona-se com a energia cinética da partícula incidente através da reação  $K_{IN} = m_0 c^2 (\gamma_{IN} - 1)$ . Esse intervalo considerado correspondente, no caso nucleon-nucleon, a

energias entre 300 MeV e 2.0 GeV, aproximadamente, no C.M.

Infelizmente o número de interações necessárias para a convergência da solução aumenta proibitivamente com o aumento de  $\gamma_{IN}$ , como mostra a figura 5.

Fizemos um estudo comparativo entre as soluções da equação de Lorentz-Dirac e de uma versão simplificada, em que a reação da radiação é desprezada. Sem estes termos não há problemas relativos à intabilidade da solução que são observados na versão completa. A versão simplificada da equação de Lorentz - Dirac, ao contrário da versão completa, pode assim ser resolvida no sentido direto. O tempo de computação necessário à convergência da solução, em torno de 1 minuto de CPU, é aproximadamente o mesmo para quaisquer dos valores de  $\gamma_{IN}$  considerados. A versão completa necessita de aproximadamente 3 minutos de CPU para cada iteração. Os resultados obtidos estão mostrados nas figuras 6-10.

Como vemos, a emissão de radiação é um processo importante e seus efeitos sobre o movimento da partícula devem ser considerados. As trajetórias obtidas com as duas versões são bastante distintas. Vê-se claramente o efeito de amortecimento na aceleração causado pela reação da radiação. Igualmente clara é a diferença entre a perda de energia num e noutro caso. Estas conclusões não se transportam integralmente para o caso nucleon-nucleon. As dificuldades técnicas encontradas aqui, entretanto, deixam poucas esperanças de aplicação prática do formalismo desenvolvido no capítulo anterior.

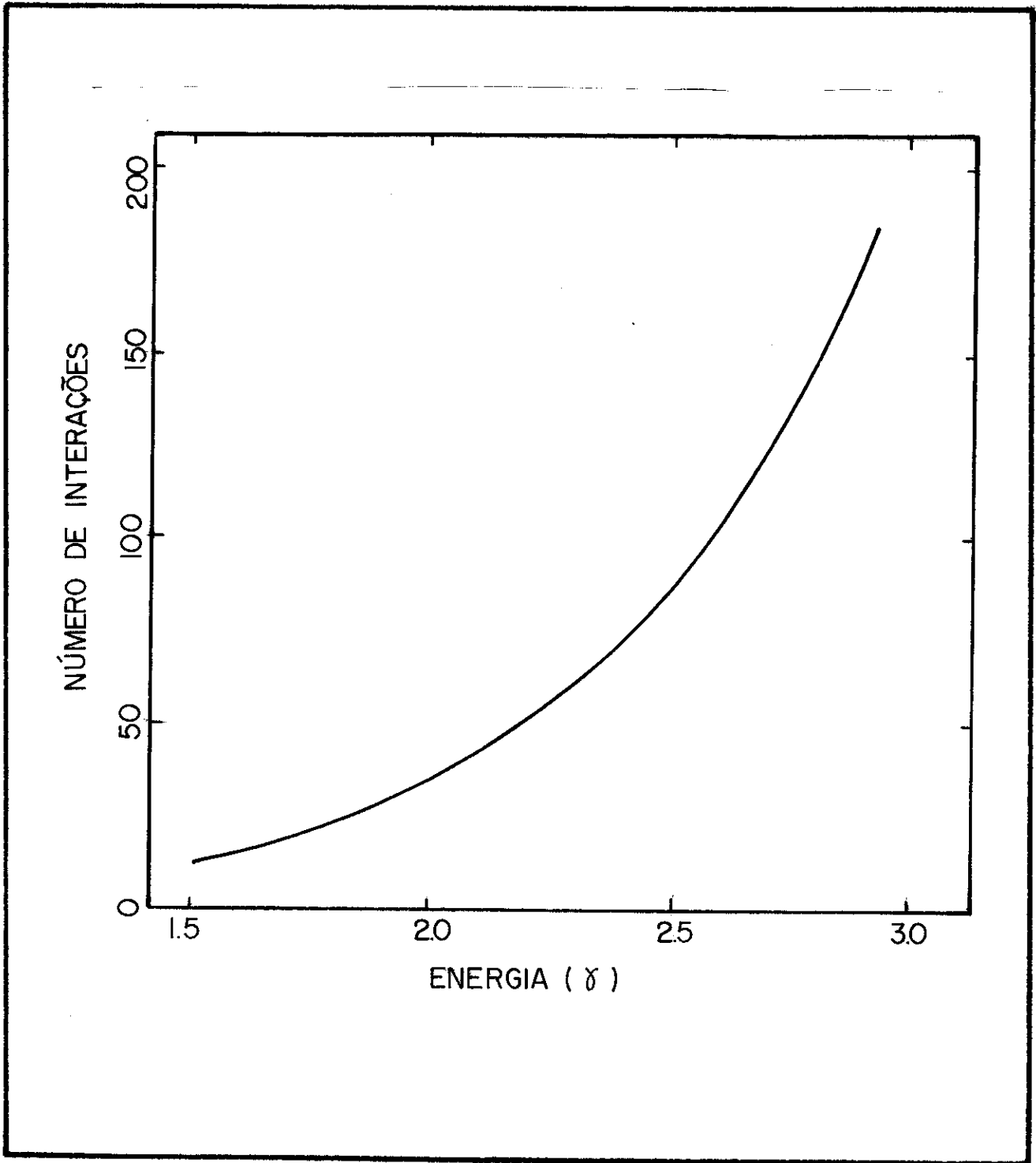


Figura 5 - Número de interações necessárias para a convergência da solução da equação de Lorentz-Dirac pelo método iterativo em função do fator de Lorentz,  $\gamma$ . A energia cinética incidente está relacionada com  $\gamma$  pela equação  $E_{IN} = m(\gamma - 1)$ , onde  $m$  é a massa da partícula incidente. Para  $\gamma = 3.0$   $E_{IN} \simeq 2$  GeV ( $m =$  massa do proton). Cada interação representa, em média, cerca de 3 minutos de CPU. O movimento das partículas é unidimensional.

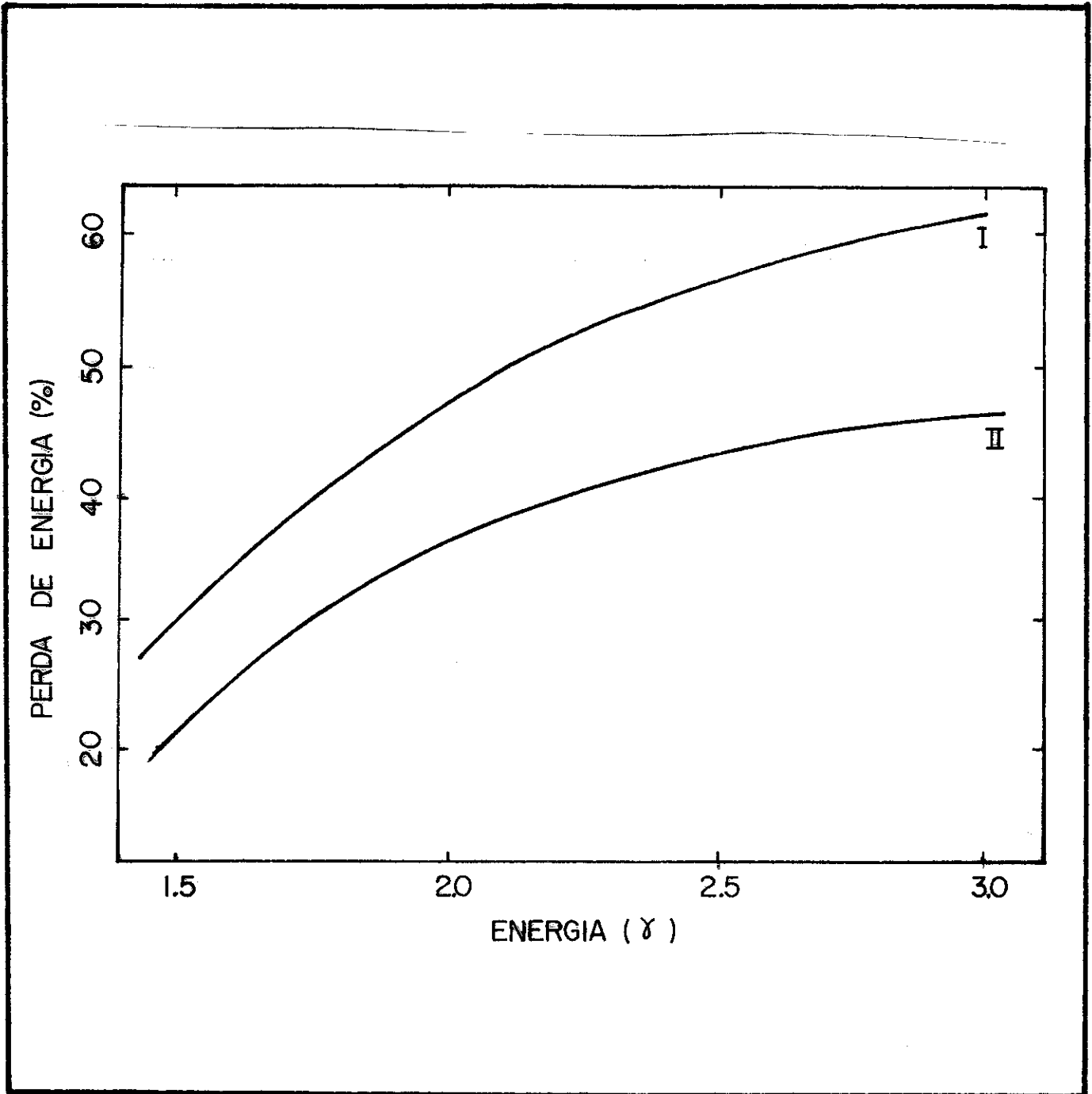


Figura 6 - Perda de energia cinética dos elétrons em função da energia cinética inicial, com as trajetórias obtidas. I) com a equação de Lorentz-Dirac; II) com uma versão simplificada sem considerar a reação da radiação e o termo  $a^\sigma$ . A perda de energia é definida como  $(\gamma_{IN} - \gamma_f) / \gamma_{IN}$ . A discrepância entre as duas soluções aumenta significativamente com o aumento da energia incidente. O movimento dos elétrons é unidimensional.

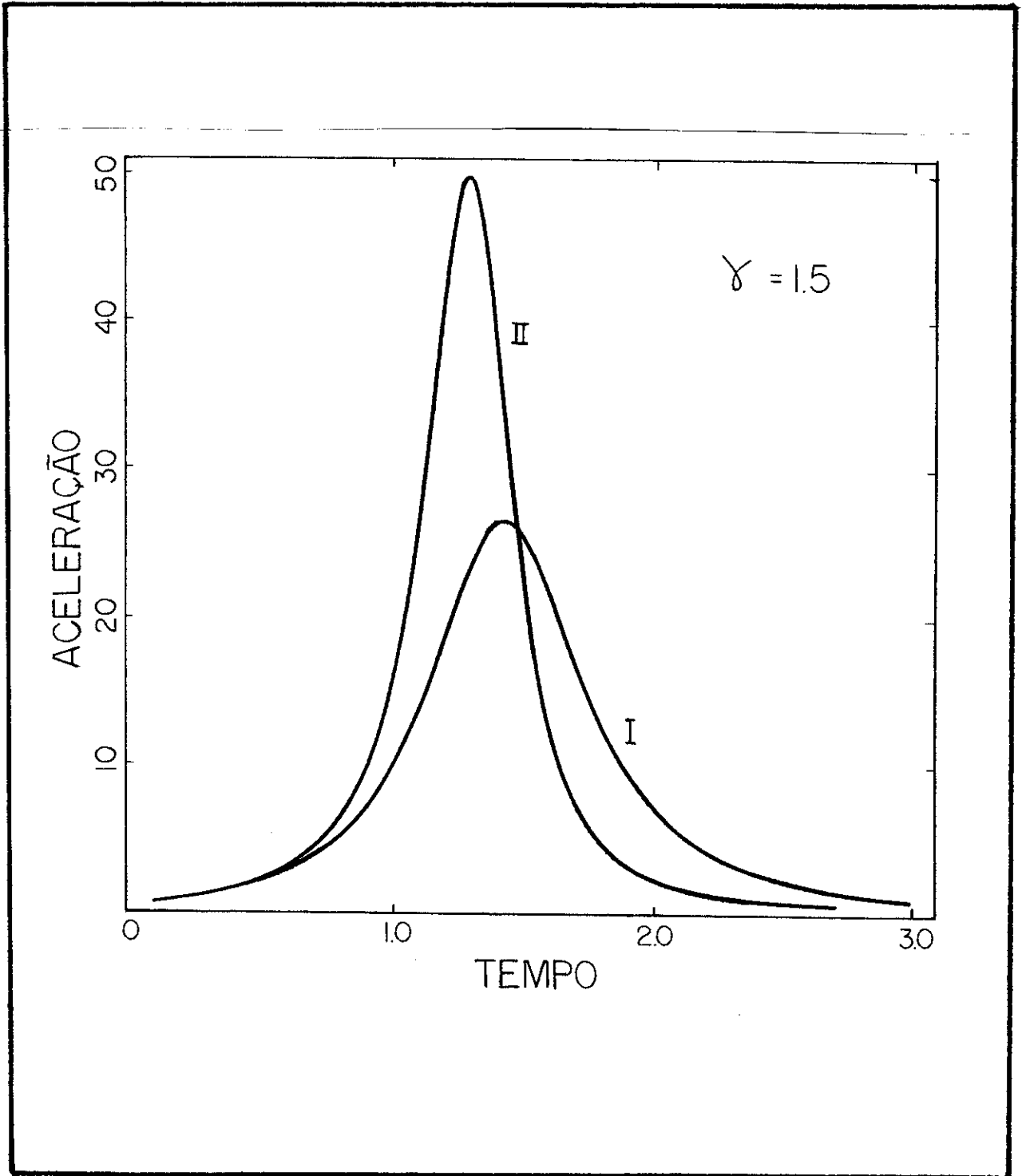


Figura 7 - Aceleração vs tempo na colisão eletron-eletron com  $b=0$  e  $\gamma_{IN} = 1.5$ . A aceleração é medida em unidades de  $\frac{mc^3}{\hbar}$  e o tempo em unidades de  $\frac{\hbar}{mc^2} \times 10$ . A curva I refere-se a trajetória obtida com a equação de Lorentz-Dirac (versão completa) e a curva II à trajetória obtida com a versão simplificada.

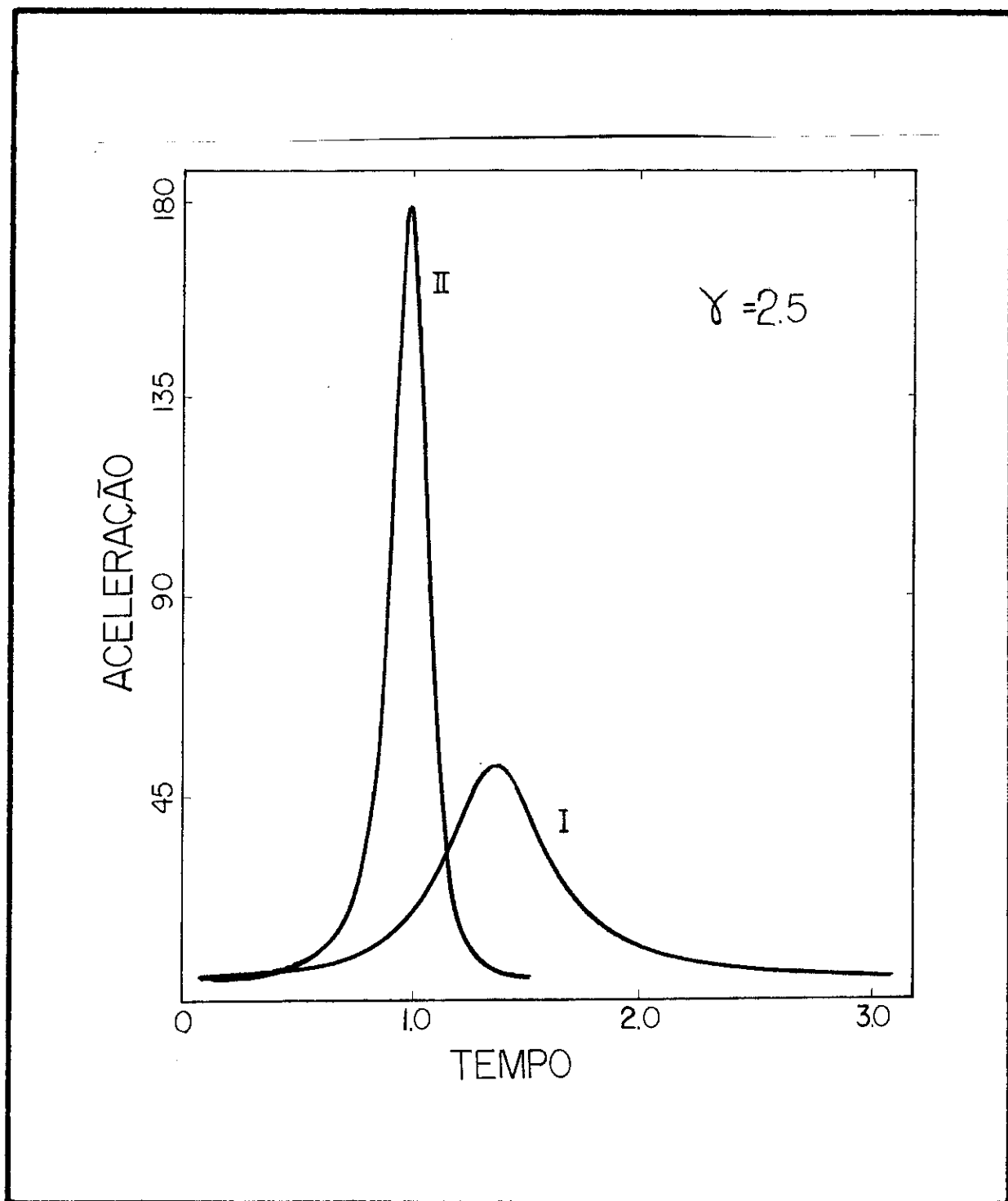


Figura 8 - O mesmo da figura anterior, agora com  $\gamma_{IN} = 2.5$ . Observe que a discrepância aumenta muito com a energia incidente maior, refletindo a importância dos efeitos da radiação sobre a trajetória da partícula. A aceleração assume grandes valores apenas num curto intervalo de tempo.

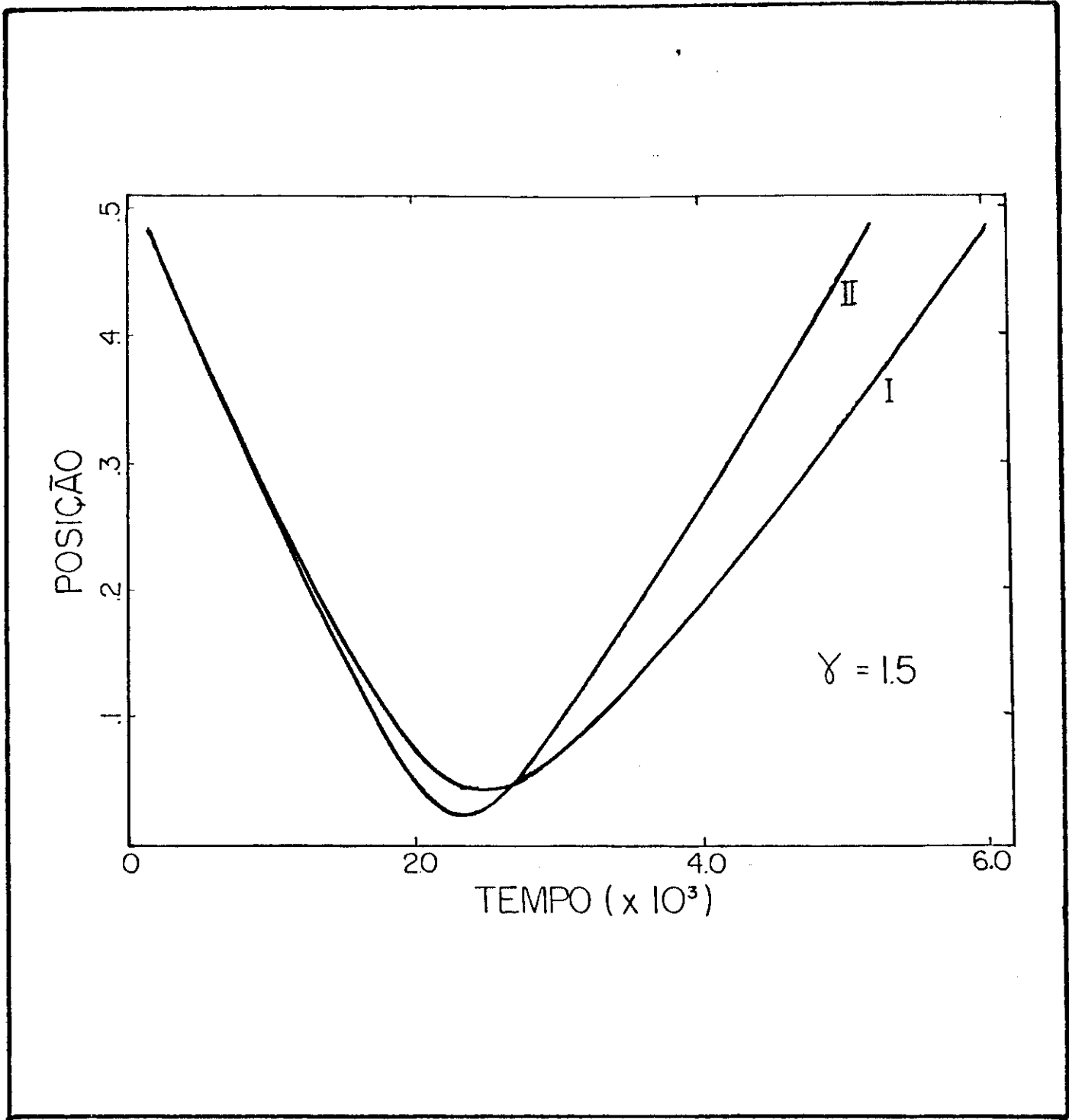


Figura 9 - Posição vs tempo,  $b=0$  e  $\gamma_{IN}=1.5$ . A posição  $\bar{e}$  medida em unidades de  $\frac{\hbar}{mc} \times 10$  e o tempo em unidades de  $\frac{\hbar}{mc^2} \times 10^3$ . As partículas tendem rapidamente a atingir o estado assintótico. A diferença entre a inclinação antes e depois do ponto de maior aproximação em cada curva reflete a perda de energia cinética sob a forma de radiação na versão completa (I) e na simplificada (II).



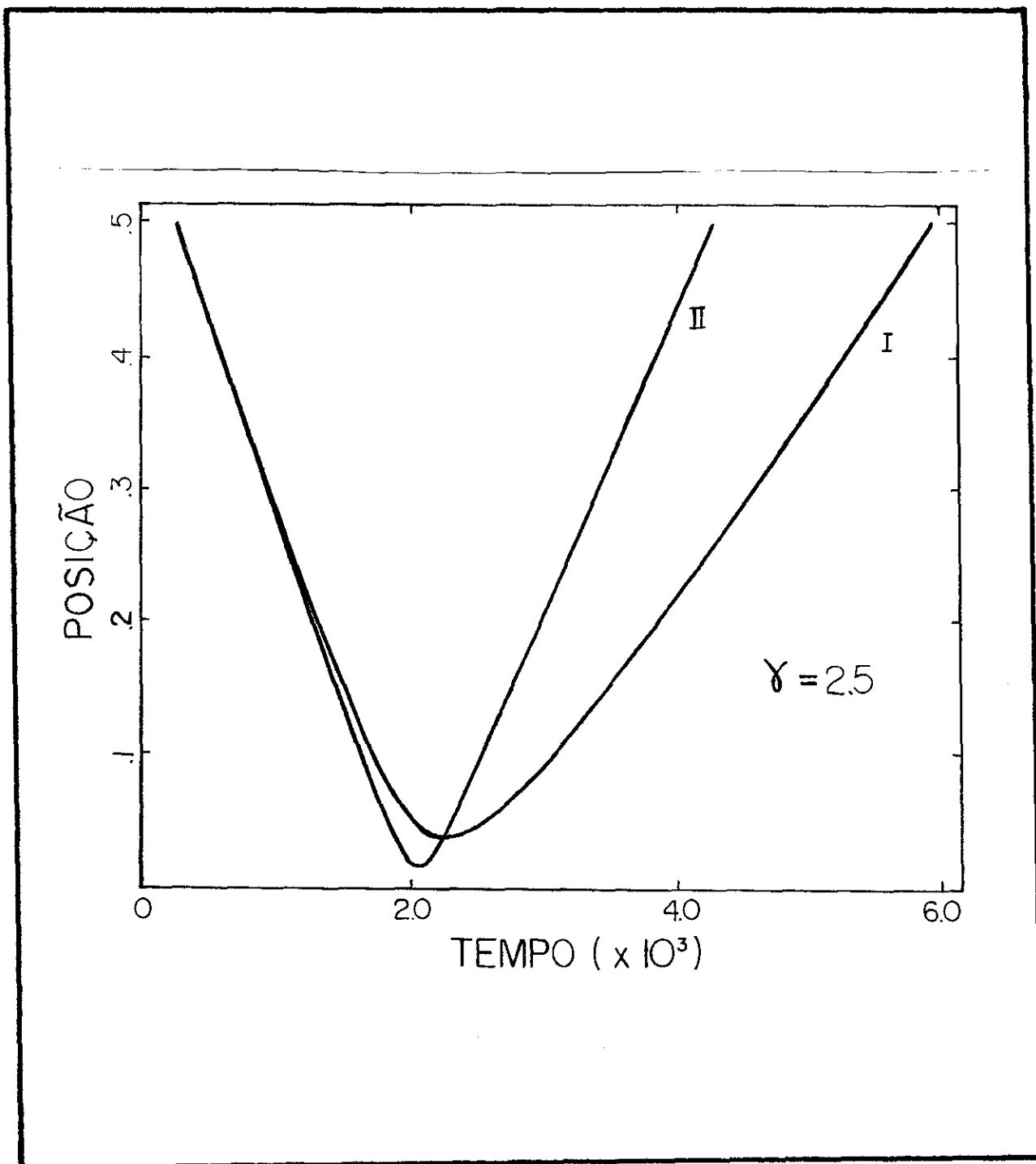


Figura 10 - O mesmo da figura anterior, agora com  $\gamma_{IN} = 2.5$ . Note que não a penas a diferença entre as inclinações em cada curva mas também a diferença entre as inclinações das curvas I e II aumenta muito com o aumento de  $\gamma_{IN}$ . O efeito da radiação sobre a trajetória é importante e cresce com o aumento da energia incidente.

## CONCLUSÃO

Vimos no capítulo anterior que a única maneira encontrada para resolver a equação de Lorentz-Dirac foi a utilização de um método iterativo, partindo de um estado final conhecido e caminhando no sentido inverso do tempo (futuro  $\rightarrow$  passado). As dificuldades encontradas em sucessivas tentativas têm origem na presença do termo  $\dot{a}^\sigma$  na equação de movimento, o que gera uma grande instabilidade na sua solução. Estas dificuldades são fundamentalmente as mesmas para a solução da equação de movimento no caso nucleon-nucleon.

O método pelo qual as soluções da equação de Lorentz-Dirac foram obtidas, entretanto, não tem utilidade prática se empregado na solução do nosso problema. Para realizar uma simulação de uma reação envolvendo muitos corpos é necessário partir de um estado inicial conhecido, o que implica na necessidade de um método de solução no sentido direto do tempo ( $t = -\infty \rightarrow t = +\infty$ ). Poderíamos pensar em tratar perturbativamente os efeitos da radiação sobre as trajetórias das partículas, admitindo que eles fossem suficientemente pequenos. Vimos, no entanto, que colisões frontais originam forças que variam drasticamente num curtíssimo intervalo de tempo, correspondendo a altas taxas de radiação. Um tratamento perturbativo dos efeitos da radiação seria impróprio nestas condições. Em outras palavras a aproximação perturbativa aplicada nos seus estreitos limites de validade equivale a um corte no parâmetro de impacto. Pode-se argumentar que a exclusão de colisões mais

frontais representa apenas uma pequena perda na seção de choque nucleon-nucleon. Vamos admitir por um momento que este é um bom argumento e analisar mais detidamente esta questão.

Genericamente falando a equação de movimento combinada com as condições de contorno apropriadas pode ser escrita como uma equação integrodiferencial na forma

$$a_{\sigma}(\tau) = \frac{e^{\tau/\tau_0}}{\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} d\tau' e^{-\tau'/\tau_0} K_{\sigma}(\tau') \quad (m = 1) \quad (1)$$

É conveniente introduzir uma mudança de variável de integração, definindo uma nova variável  $\alpha$  como

$$\alpha \equiv \frac{\tau' - \tau}{\tau_0}, \quad \tau' = \alpha\tau_0 + \tau \\ d\tau' = \tau_0 d\alpha$$

A equação (1) assume a nova forma

$$a_{\sigma}(\tau) = \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha} K_{\sigma}(\tau + \alpha\tau_0) \quad (2)$$

O integrando de (2) pode agora ser expandido em série de potências de  $\alpha\tau_0$  em torno do ponto  $\tau$ ,

$$K_{\sigma}(\tau + \alpha\tau_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau_0)^n}{n!} K_{\sigma}^{(n)}(\tau)$$

Supondo que esta seja uma série absoluta e uniformemente convergente é permitido trocar a ordem da integração com a soma, obtendo

$$a_{\sigma}(\tau) = \sum \frac{\tau_0^n}{n!} K_{\sigma}^{(n)}(\tau) \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^n e^{-\alpha},$$

$$a_{\sigma}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_0^n K_{\sigma}^{(n)}(\tau) \quad (3)$$

O conhecimento prévio do movimento da partícula em todo o futuro, requerido em (2), é substituído pelas infinitas derivadas de  $K_{\sigma}(\tau)$ . Na equação (2) a exponencial faz com que apenas alguns intervalos  $\tau_0$  sejam relevantes. Em (3), correspondentemente, o pequeno valor de  $\tau_0$  permite considerar apenas as primeiras ordens da expansão. A expressão de  $K_{\sigma}(\tau)$  é

$$K_{\sigma}(\tau) = g[F_{\sigma}^{\text{IN}} - \frac{d}{d\tau}(\phi^{\text{IN}} v_{\sigma})] + 3\tau_0 [a^2 v_{\sigma} + \frac{\mu^2}{2} v_{\sigma} - \mu^2 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{s_{\sigma}}{s^2} J_2(\mu s) d\tau' - \mu \frac{d}{d\tau}(v_{\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} J_1(\mu s) d\tau')] \quad (4)$$

A aproximação de ordem zero não considera qualquer efeito da radiação sobre a trajetória:

$$a_{\sigma}(\tau) = f_{\sigma}^{\text{IN}}(\tau) \quad , \quad (5)$$

onde  $f_{\sigma}^{\text{IN}}(\tau)$  é a força externa. Este termo contém a própria aceleração da partícula,

$$f_{\sigma}^{\text{IN}}(\tau) = g[F_{\sigma}^{\text{IN}} + \dot{\phi}_{\text{IN}} v_{\sigma}(\tau) + \phi_{\text{IN}} a_{\sigma}(\tau)]$$

É conveniente reescrever a equação 5 na forma

$$a_{\sigma}(\tau) (1 - g\phi_{\text{IN}}) = g[F_{\sigma}^{\text{IN}} + \dot{\phi}_{\text{IN}} v_{\sigma}(\tau)] \quad ,$$

ou ainda,

$$a_{\sigma}(\tau) = \frac{1}{1 - g\phi_{IN}} g[F_{\sigma}^{IN} + \dot{\phi}_{IN} v_{\sigma}(\tau)] \quad (6)$$

uma vez que a função  $\phi_{IN}$  é bem comportada em todos os pontos da trajetória.

Vamos considerar agora a aproximação de primeira ordem. A equação de movimento nesta aproximação é

$$a_{\sigma}(\tau) = f_{\sigma}^{IN}(\tau) + 3\tau_0 [a^2 v_{\sigma} + I_{\sigma}(\tau) + \frac{d}{d\tau}(v_{\sigma} I(\tau)) + \dot{f}_{\sigma}^{IN}(\tau)], \quad (7)$$

onde

$$I_{\sigma}(\tau) \equiv g^2 \left[ \frac{1}{2} \mu^2 v_{\sigma} - \mu^2 \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \frac{S\sigma}{s^2} J_2(\mu s) \right] d\tau'$$

e

$$I(\tau) \equiv -g^2 \mu \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \frac{1}{s} J_1(\mu s).$$

É interessante lembrar que as quatro componentes da equação de movimento não são independentes, obedecendo ao vínculo  $a^{\sigma} v_{\sigma} = 0$ . A derivada em relação ao tempo próprio desta expressão fornece a relação

$$\dot{a}_{\sigma} v^{\sigma} + a^2 = 0.$$

Isto torna linear em  $a_{\sigma}$  a equação (7), que pode ser reescrita reunindo à esquerda todos os termos em  $a_{\sigma}$ ,

$$\begin{aligned}
 a_{\sigma}(\tau) [1 - g\phi_{IN} - 3\tau_0 (I(\tau) + 2g\dot{\phi}_{IN})] &= g[F_{\sigma}^{IN} + \dot{\phi}_{IN} v_{\sigma}(\tau)] + \\
 &+ 3\tau_0 [\dot{a}_{\lambda} v^{\lambda} v_{\sigma} + I_{\sigma}(\tau) + \dot{I}(\tau) v_{\sigma}(\tau) + g(\dot{F}_{\sigma}^{IN} + \\
 &+ \phi_{IN}'' v_{\sigma}(\tau) + \phi_{IN} \dot{a}_{\sigma}(\tau))] \quad (8)
 \end{aligned}$$

Há na equação (8) os indesejados termos  $\dot{a}_{\sigma}$ , responsáveis pela instabilidade da solução da equação de movimento. Na aproximação que estamos considerando é lícito substituir  $\dot{a}_{\sigma}$  na equação (8) pela derivada em relação ao tempo próprio do lado direito da equação (6). Para simplificar a escrita vamos definir as funções

$$A_{\sigma}(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{g}{1 - g\phi_{IN}} F_{\sigma}^{IN} \right] + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{g\phi_{IN}}{1 - g\phi_{IN}} \right] v_{\sigma}(\tau) \quad (9-a)$$

$$B(\tau) \equiv 1 - g\phi_{IN} - 3\tau_0 (I(\tau) + 2g\phi_{IN} - \frac{g\phi_{IN}}{1 - g\phi_{IN}}) \quad (9-b)$$

$$C_{\sigma}(\tau) = g[F_{\sigma}^{IN} + \dot{\phi}_{IN} v_{\sigma}(\tau)] \quad (9-c)$$

$$\begin{aligned}
 D_{\sigma}(\tau) &= 3[\dot{A}_{\lambda} v^{\lambda} v_{\sigma}(\tau) + I_{\sigma}(\tau) + \dot{I}(\tau) v_{\sigma}(\tau) + g[\dot{F}_{\sigma}^{IN} + \\
 &+ \phi_{IN}'' v_{\sigma}(\tau) + \phi_{IN} \dot{A}_{\sigma}(\tau)]] \quad (9-d)
 \end{aligned}$$

A equação de movimento assume a forma

$$a_{\sigma}(\tau) = \frac{1}{B(\tau)} [C_{\sigma}(\tau) + \tau_0 D_{\sigma}(\tau)] \quad (10)$$

A equação (6) descreve a trajetória do nucleon desprezando completamente qualquer influência da radiação. A equa

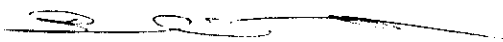
ção (10) considera esta influência como uma correção de primeira ordem em  $\tau_0$ . Ambas são singulares quando  $\phi_{IN} \sim 1$  ( $g$  é da ordem de 1). No sistema de unidades que estamos empregando, isto é,  $h = m = c = 1$  a singularidade aparece quando o parâmetro de impacto for da ordem do alcance da interação. Isto significa que a aproximação perturbativa só é aplicável quando a menor distância entre as partículas for maior que o alcance da interação. Mas neste caso a influência da radiação sobre as trajetórias das partículas é insignificante. A equação (6), para todos os fins práticos, fornece as trajetórias dos nucleons, que nestas condições serão praticamente retilíneas.

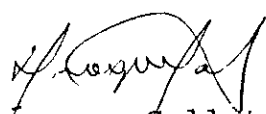
Vemos desta forma que o tratamento perturbativo não é capaz de fornecer a solução procurada. A esta altura poucas são as esperanças de estender ao domínio relativístico o modelo de ECM. O teorema de não interação mostra a necessidade de se considerar o momentum da interação ao lado do momentum das partículas. Isto pode ser feito através do formalismo de ação a distância covariante, em estreita analogia ao desenvolvido por Feynman e Wheeler, mas não traz simplificações conceituais ou práticas. Quando consideramos explicitamente os graus de liberdade do campo, a radiação e seus efeitos sobre a trajetória das partículas chegamos a um conjunto consistente de equações de movimento. Estas equações, ao que tudo indica, não podem ser resolvidas numericamente de uma forma útil, isto é, partindo apenas das condições iniciais determinadas, mesmo no caso mais simples de dois corpos apenas. Em função destas dificuldades encontradas, o método mais adequado para o estudo das reações nucleares relativísticas parece ser o do modelo hidrodinâmico (a-

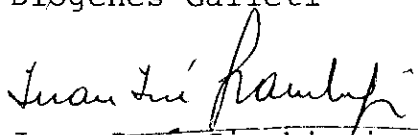
pesar das suas limitações técnicas) complementado de alguma forma pelo método de cascata, este com o objetivo de incluir os efeitos de não equilíbrio observados.



Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Takeshi Kodama - Presidente

  
Diógenes Galletti

  
Juan José Giambiagi

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 1985