

*EDGARDO SALOMON CHEB TERRAB*

**" CONDIÇÕES PARA AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO  
INFINITA EM MASSAS E CONSTANTES DE ACOPLAMENTO "**

**T E S E**

**D E**

**M E S T R A D O**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

**1 9 8 5**

À estrela da liberdade.

## AGRADECIMENTOS

A todos os que, de um modo ou de outro, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Trabalha-se com um modelo onde interagem partículas escalares, pseudo escalares e de spin  $\frac{1}{2}$ . Depois de reformular o problema em função de Campos Auxiliares, desenvolvem-se os cálculos perturbativos até um loop encontrando-se certas relações entre as constantes características do sistema, as quais garantem (até a ordem considerada) ausência de renormalização infinita em massas e constantes de acoplamento. Para os leitores familiarizados com a teoria quântica de campos são prescindíveis os parágrafos 1) e 2) do Capítulo I.

Um panorama completo do conteúdo e resultados deste trabalho pode se obter através da introdução e das conclusões (Capítulo IV).

## NOTAÇÃO UTILIZADA

$$g^{\mu\nu} = [1, -1, -1, -1]$$

$$\square = -\partial_\mu \partial^\mu$$

$\phi$  = Campo escalar

$\eta$  = Campo pseudo escalar

$\Psi$  = Campo de spin  $\frac{1}{2}$  (spinor de Dirac)

F = Campo Auxiliar escalar

N = Campo Auxiliar escalar

G = Campo Auxiliar pseudoescalar

T = Operador de ordenação cronológica

$$D_A(x_1-x_2) = -i[A(x_1)A(x_2)] = -ik \langle 0 | T A(x_1)A(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Delta_A(p) =$$

$\Delta_A(p)$  = propagador do campo A em representação de momentos.

$d^D p$  = Elemento de volume no espaço de dimensão D.

$\epsilon = 4-D$  = parâmetro do processo de regularização dimensional quando  $D \rightarrow 4, \epsilon \rightarrow 0$ .

$L_{q\ell}(x)$  = Contratermos. Sua definição é dada na pág. 24.

$\Lambda(x_1 \dots x_n)$  = Operadores quase-locais definidos na pág. 24.

$\oplus$  Usado nos apêndices A e B. Significa reter somente a parte infinita.

$I_{18} \equiv \frac{2i\pi^2}{\epsilon}$  = Usado nos apêndices para significar a parte infinita da integral 18 do formulário do apêndice A.

$$\Delta \{ \dots \} \equiv \frac{-i}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k d^4 q}{(2\pi)^8} e^{-i(kx_{21} + qx_{31})} \dots$$

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
NOTAÇÃO UTILIZADA .....	v
INTRODUÇÃO .....	
<u>CAPÍTULO I</u> - BASES TEÓRICAS .....	1
1) TEORIA DOS CAMPOS ESCALARES .....	1
1.1 - Partículas livres. Lagrangiana dos campos escalares .....	1
1.2 - Solução às equações clássicas do campo livre .....	3
1.3 - Quantização do campo escalar .....	6
2) SISTEMAS DE PARTÍCULAS EM INTERAÇÃO .....	9
2.1 - Teoria Perturbativa. Matriz S .....	9
2.2 - Os propagadores e as integrais divergentes .....	14
2.3 - Regularização dimensional .....	21
2.4 - O processo de renormalização .....	24
3) CAMPOS AUXILIARES .....	29
3.1 - Caso Clássico .....	29
3.2 - Caso Quântico .....	31
<u>CAPÍTULO II</u> - O MODELO .....	34
1) APRESENTAÇÃO DO MODELO .....	34
1.1 - A lagrangiana, seu conteúdo e suas características .....	34

1.2 - Os campos auxiliares do modelo .....	37
1.3 - Cálculo dos propagadores .....	

CAPÍTULO III - CONDIÇÕES PARA AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO INFINITA ÀS MASSAS E CONSTANTES DE ACOPLAMENTO .....

1) FUNÇÕES DE GREEN DE DUAS PERNAS .....	47
1.1 - Cálculo das correções infinitas até 1 loop às funções de Green de duas pernas. ....	47
1.2 - Condições para ausência de renormalização infinita às massas .....	59
1.3 - Extrapolação dos resultados ao caso supersimétrico .....	65
2) FUNÇÕES DE GREEN DE TRÊS PERNAS .....	66
2.1 - Cálculo das correções infinitas até 1 loop às funções de Green de três pernas. ....	66
2.2 - Condições para ausência de renormalização infinita às constantes de acoplamento. ....	77
2.3 - Renormalização à norma dos campos .....	79

CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES .....

APÊNDICE A -

A.1) Matrizes de Dirac .....	86
A.2) Formulário .....	87
A.3) Cálculo das integrais do formulário .....	96

APÊNDICE B

B.1) Cálculo da parte infinita do produto de dois propagadores .....	105
B.2) Cálculo da parte infinita do produto de três propagadores .....	111

## INTRODUÇÃO

Uma das características físicas mais importante das partículas microscópicas, é sua capacidade para interagir e transformar-se umas nas outras. De acordo com o ponto de vista atual, existem somente 4 interações fundamentais que são: Gravitacão, Eletromagnetismo, Interações fracas e Interações fortes.

O tratamento dos problemas relativos à interação entre estas partículas, é feito através da teoria quântica de campos. A questão específica nesta teoria, consiste em determinar a probabilidade de transição entre os possíveis estados iniciais e finais do sistema de partículas sob estudo. No entanto, dado um sistema de partículas em interação, a solução exata do problema, pode ser obtida somente em um número pequeno de casos. Assim, do mesmo modo que na Mecânica Quântica, na teoria quântica de campos, o cálculo das probabilidades de transição é feito com o auxílio da teoria das perturbações. A aproximação inicial, (onde se conhece a solução exata do problema) consiste em considerar o sistema de partículas como não interagentes (livres). Nas aproximações seguintes, são considerados todos os efeitos ligados à interação entre elas, como sendo pequenas perturbações ao estado inicial. Isto é feito, decompondo o Lagrangeano total do sistema em:

$$L_{\text{tot}} = L_0 + L_{\text{INT}}$$

onde  $L_0$  é o Lagrangeano dos campos livres (representa o sistema de partículas, sem interação) e  $L_{\text{INT}}$  contém todos os termos ligados à interação entre elas [1].



Matematicamente falando, existem certos problemas na solução através da teoria perturbativa. A questão de interesse neste trabalho, é o aparecimento de divergências (infinitos) nas sucessivas aproximações assim como sua eliminação, de modo a obter resultados convergentes nos cálculos das probabilidades. Existem diversos pontos de vista sobre o método de eliminação dos infinitos da teoria<sup>[2]</sup>. Uma primeira maneira de ver as coisas, é pensar que estes infinitos tem sua origem em certas contradições na aproximação inicial (onde se conhece a solução exata). De fato, nesta aproximação onde as partículas são consideradas livres (sem interação) são utilizados dados como a massa das partículas, a qual, por sua vez, é impossível de ser medida, se as partículas estão realmente livres; já que qualquer medida da massa perturbaria o sistema, de tal modo que ele deixaria de comportar-se como livre. Deste modo, a teoria admitiria uma redefinição da massa, de modo a embutir parte dos infinitos, no valor observado da massa das partículas.

De um modo equivalente, são tratadas as constantes de acoplamento e a norma dos campos, no sentido de admitir uma redefinição capaz de embutir todos os infinitos, que não foram embutidos na redefinição da massa, de modo a obter a eliminação total das divergências da teoria<sup>[3]</sup>. Isto é conhecido como o método de renormalização na teoria das perturbações.

Uma outra maneira de ver as coisas, surgiu a uns 10 anos atrás junto com as teorias supersimétricas. A diferença com o ponto de vista anterior começa basicamente na introdução simultânea de partículas de diferente spin (todas integrantes de um mesmo multiplete supersimétrico) com o que muitas das divergên

cias que aparecem na expansão perturbativa, se cancelam mutuamente entre o setor bosônico e o setor fermiônico do sistema em estudo [4].

O fato destes cancelamentos entre os dois setores terem sido estudados pela primeira vez no contexto das teorias supersimétricas, fez com que esta solução ao problema das divergências seja, em geral, associado a estas teorias. No entanto, existem setores bosônicos e fermiônicos que podem ser combinados num modelo não supersimétrico (as partículas correspondentes não correspondem a multipletes supersimétricos). Deste modo chegamos, naturalmente, a idéia central da tese, que é desenvolver um modelo não necessariamente supersimétrico, e estabelecer as condições necessárias para que ocorram cancelamentos de divergências análogos aos observados naquelas teorias.

## CAPÍTULO 1

### BASES TEÓRICAS

#### 1 - TEORIA DOS CAMPOS ESCALARES

##### 1.1 - PARTÍCULAS LIVRES. LAGRANGIANA DOS CAMPOS ESCALARES

Antes de entrar no tema, vamos introduzir uma série de conceitos já conhecidos na teoria quântica de campos, os quais podem ser considerados como breve síntese das bases teóricas deste trabalho.

Para isto, vamos começar com a teoria dos campos escalares. Esta teoria é a que descreve as partículas cujo momento angular no referencial de repouso, é igual a zero, ou então, partículas de massa nula, sem polarização<sup>[4]</sup>.

Genericamente trata-se das partículas de spin zero.

Analiticamente, este sistema pode ser estudado a partir da sua Lagrangiana. (Entenda-se densidade de Lagrangiana), supondo sempre, que no Limite clássico, a evolução do sistema ocorre de acordo com o princípio da mínima ação.

De maneira análoga à Mecânica Quântica, o estado do sistema é representado por um vetor de estado

$$| \emptyset \rangle$$

Existem os operadores de campo  $\phi$  equivalentes aos operadores de posição  $q$  da Mecânica Quântica. No Limite clássico, o campo  $\phi$  faz as vezes de "Coordenada generalizada" de um sistema de infinitos graus de Liberdade.

Sem ser muito rigoroso, a forma do Lagrangiano de um sistema de partículas livres de spin zero, pode ser construída considerando-se o Limite clássico.

Neste caso, supõe-se que

$$L = L(\phi, \partial_{\mu}\phi, \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi, \dots)$$

ou seja, que o Lagrangeano é função do campo e de suas derivadas.

Se as partículas estão livres, tanto a energia  $p^0$  como o momentum  $\vec{p}$  de cada partícula são conservados, valendo sempre a relação  $p_{\mu}p^{\mu} = m^2$ .

Assim, para cada valor de  $p_{\mu}$ , se  $\phi(p_0, \vec{p})$  é solução das equações decorrentes de L, então  $\phi(-p_0, \vec{p})$  ou  $\phi(p_0, -\vec{p})$  ou  $\phi(-p_0, -\vec{p})$  também é solução já que a única relação a ser satisfeita é  $p^2 = m^2$  ou  $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ,  $|\vec{p}| = \sqrt{p_0^2 - m^2}$

Isto é indicativo de que as equações de Lagrange para o campo, admitem duas soluções independentes em cada variável e então são equações diferenciais de segunda ordem, de modo que o Lagrangiano pode conter somente derivadas primeiras<sup>[5]</sup>.

Por outro lado, qualquer solução  $\phi$  das equações de campo, representa um sistema de partículas livres que pode existir na natureza. Assim, a soma de um número arbitrário destes  $\phi$ , também representa um sistema de partículas livres que pode existir na natureza, e então, também é solução das mesmas equações. Isto

é a expressão do princípio de superposição do qual se conclui que as equações de campo são Lineares e homogêneas, de modo que finalmente, o Lagrangiano deve ser uma expressão quadrática nos campos e suas primeiras derivadas.

## 1.2 - SOLUÇÃO ÀS EQUAÇÕES CLÁSSICAS DO CAMPO LIVRE

Supondo

$$L = \alpha_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \beta \phi^2$$

temos as seguintes equações de Lagrange que surgem do princípio da mínima Ação.

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

$$\Rightarrow (\alpha_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu - \beta) \phi = 0$$

expandindo em ondas planas e lembrando que  $p^2 = m^2$  se conclui rapidamente que

$$\alpha_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \beta = -m^2 \quad \square \equiv -\partial^\mu \partial_\mu$$

Deste modo, os campos  $\phi$ , satisfazem a equação de Klein-Gordon

$$(\square - m^2) \phi = 0$$

A escolha do coeficiente numérico geral no Lagrangiano, é convencional e está ligada à normalização da teoria.

Assim, temos para o Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

A solução às equações clássicas do campo, pode obter-se em representação de Fourier<sup>[6]</sup>.

$$(\square - m^2) \phi(x) = 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ipx} \hat{\phi}(p)$$

$$\Rightarrow (p^2 - m^2) \hat{\phi}(p) = 0$$

cujas soluções incompletas são:

- a)  $\hat{\phi}(p) \equiv 0$  que não é o caso em questão
- b)  $p^2 = m^2$ ;  $\hat{\phi}(p)$  arbitrário

Isto permite procurar  $\hat{\phi}$  na forma:

$$\hat{\phi}(p) = \delta(p^2 - m^2) \hat{\phi}(p) \sqrt{2\pi}$$

Então temos:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p e^{ipx} \hat{\phi}(p) \cdot \delta(p^2 - m^2)$$

Expandindo a função delta em

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_0 - x_1)}{\left| \frac{df}{dp_0} \right|_{x_1}} \quad \begin{aligned} f &= p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 \\ x_1 &= \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

e integrando em  $p_0$  mais breve algebra, chegamos a:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p_0}} [\hat{\phi}(p)e^{ipx} + \hat{\phi}(-p)e^{-ipx}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2p_0}}$$

que reescrevemos como:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p_0}} [c^+(p)e^{ipx} + c^-(p)e^{-ipx}]$$

$$c^+(p) = \frac{\hat{\phi}(p)}{\sqrt{2p_0}} \qquad c^-(p) = \frac{\hat{\phi}(-p)}{\sqrt{2p_0}}$$

que é a solução geral às equações clássicas do campo. As funções  $c(p)$  podem obter-se uma vez conhecidas as condições de contorno invertindo o resultado.

O tensor Energia-Momentum do campo escalar livre se obtém partindo da expressão geral: (Entenda-se densidade de).

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L$$

Substituindo aqui  $L$  pela sua expressão, concreta, obtém-se

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} L$$

A energia total do sistema, é dada por:

$$T^0 = \int T^{00} d^3\vec{x} = \int \frac{1}{2} \{ \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \} d^3\vec{x}$$

que em função de  $c^+(p)$  e  $c^-(p)$  aparece depois de breve álgebra, como

$$T^0 = \int d^3\vec{p} p^0 c^+(p) c^-(p) \quad p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Como se vê, o produto  $c^+c^-$  aparece classicamente, como a densidade de partículas de spin 0 e massa  $m$ .

### 1.3 - QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR

Os parenteses clássicos de Poisson são, sob certo ponto de vista, o modo mais simples e direto de quantizar a teoria dos campos escalares.

Partindo da definição geral<sup>[7]</sup>:

$$\{ F, G \} = \int d^3z \sum_j \left\{ \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_j(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi_j(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_j(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi_j(z)} \right\}$$

onde  $F$  e  $G$  são Funcionais de  $\phi_j$  e  $\pi_j$ ; e  $\pi_j$  é o momentum canônico associado ao campo  $\phi$ .

$$\pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j} = \dot{\phi}_j$$

temos como resultado direto:

$$\{ \phi(x) ; \pi(y) \}_{x^0=y^0} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Assim, a teoria pode ser quantizada substituindo o parentese de



Poisson clássico das funções  $\phi$  e  $\pi$ , pelo comutador quântico entre os operadores correspondentes  $\phi$  e  $\pi$  :

$$\{ \phi(x) ; \pi(y) \}_{x^0=y^0} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Em essência, o processo de quantização do campo escalar aqui se guido, consiste na aplicação do conhecido princípio da corres-pondência da Mecânica Quântica, a um sistema com infinitos graus de liberdade.

Segundo ele, ao parentese de Poisson clássico lhe corresponde o comutador quântico dividido por  $i$ ; e às coordenadas generalizadas, lhe correspondem operadores que atuam sobre o vetor de estado  $|\psi\rangle$  do sistema.

Do mesmo modo, a qualquer função de  $\phi$  e  $\pi$ , lhe corresponde um operador função de  $\phi$  e  $\pi$ , (operadores).

Como se vê, os operadores obtidos deste modo, aparecem todos na representação de Heisenberg.

Assim, às funções  $c^+(p)$  e  $c^-(p)$ , também correspondem operadores quânticos  $c^+(p)$  e  $c^-(p)$ . (Daqui em diante, os símbolos  $c^+$  e  $c^-$  representam os próprios operadores, e não as funções clássicas).

A expressão do operador de campo escalar fica:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{ c^+(p) e^{ipx} + c^-(p) e^{-ipx} \} \quad (2)$$

Os comutadores para  $c^+$  e  $c^-$  aparecem na forma:

$$\{ c^-(p) ; c^+(q) \} = \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

Os operadores  $c(p)$  são chamados de criação e de aniquilação de vido a que, quando aplicados a um estado de 4-momentum definido  $k_\mu$ , geram um outro estado de 4-momentum  $k \pm p$  onde  $p^2 = m^2$  [8]. Desde este ponto de vista podemos considerar o operador  $c^\pm(p)$  como descrevendo a criação de uma partícula de 4-momentum  $p$  e massa  $m$  ( $p^2 = m^2$ ), enquanto que  $c^-(p)$  corresponde à aniquilação da mesma partícula.

Algebricamente, este processo, é representado pelo comutador do operador de campo com o operador 4-momentum total do campo:

$$i \partial_\mu \phi(x) = \{ \phi(x) ; T_\mu \}$$

que implica em:

$$p_\mu c^\pm(p) = \mp \{ c^\pm(p) , T_\mu \} \quad (2)$$

Se  $|\phi\rangle$  é um auto estado de  $T_\mu$  com autovalor  $k_\mu$ :

$$T_\mu |\phi\rangle = k_\mu |\phi\rangle$$

aplicando o comutador (2), obtemos diretamente:

$$T_\mu ( c^\pm(p) |\phi\rangle ) = ( k_\mu \pm p_\mu ) ( c^\pm(p) |\phi\rangle )$$

que mostra que  $c(p) |\phi\rangle$  também é auto estado de  $T_\mu$  com autovalor  $k_\mu \pm p_\mu$

## 2 - SISTEMAS DE PARTÍCULAS EM INTERAÇÃO

### 2.1 - TEORIA PERTURBATIVA - MATRIZ S

Passando do caso de sistemas de partículas em interação, a questão se complica de maneira notável já que não mais vale o princípio da superposição e as equações no caso geral, deixam de ser lineares e homogêneas; com o que torna-se praticamente impossível conhecer a solução exata do problema<sup>[9]</sup>. No entanto, quando a interação pode ser considerada como um fator adicional que gera pequenas mudanças nas propriedades dinâmicas do sistema; é possível tentar uma solução aproximada através da teoria perturbativa.

O ponto de partida é a solução exata do problema quando as partículas estão livres, (ou seja, desprezando a interação) que é considerada a primeira aproximação. Todos os efeitos ligados à interação são considerados como pequenas perturbações ao estado inicial. As constantes de interação (constantes de acoplamento) são consideradas como pequenos parâmetros com os quais se constrói uma série de potências, que é a base da expansão perturbativa<sup>[10]</sup>.

A possibilidade de usar uma expansão em série nas constantes de acoplamento envolve várias hipóteses nem sempre verificadas. Assim, por exemplo, na Eletrodinâmica Quântica, o parâmetro da expansão

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

é da ordem de  $10^{-3}$  com o que os termos superiores na série, representam correções "realmente" pequenas ao primeiro termo não nulo na expansão; o que justifica em grande parte o uso da teoria perturbativa<sup>[11]</sup>; enquanto que na Cromodinâmica quântica o problema é bem mais complicado havendo questões como a ausência de estados livres para os quarks e os gluons, que não podem ser estudados dentro da teoria perturbativa ordinária<sup>[12]</sup>.

No entanto, o estudo das propriedades de renormalização do modelo a ser apresentado neste trabalho, será feito no contexto da teoria usual; assumindo tacitamente que não há problemas com o comportamento assintótico da série.

A abordagem matemática mais simples da teoria perturbativa, conduz, naturalmente, ao conceito de matriz de espalhamento. O ponto de partida é a equação de Schrodinger<sup>[13]</sup>.

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H |\phi(t)\rangle \quad )3)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano total dos campos quantizados e  $|\phi\rangle$  é o vetor de estado em representação de números de ocupação. O caso de interesse é quando o Hamiltoniano pode ser dividido em

$$H = H_0 + V$$

onde  $H_0$  é o Hamiltoniano dos campos livres e  $V$  é o "potencial" de interação que no caso aqui considerado, coincide com o Lagrangiano total de interação a menos de um sinal.

Supondo conhecidos os autovalores e autovetores de  $H_0$  : (solução exata para os campos livres).

$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$                                    $|n\rangle$  é um estado estacionário

pode-se chegar a uma solução formal (representação de interação) que representa a base da expansão perturbativa.

Efetivamente, da equação original (3)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \{ H_0 + V \} |\phi(t)\rangle$$

se chega rapidamente a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \{ e^{iH_0 t} |\phi(t)\rangle \} = \{ e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \} \{ e^{iH_0 t} |\phi(t)\rangle \}$$

que escrevemos como

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = V |\phi\rangle \tag{4}$$

onde  $e^{iH_0 t} |\phi(t)\rangle = |\Phi\rangle$  é o vetor de estado em representação de interação (coincide com a representação de Heisenberg quando não há interação); e é dependente do tempo (seria independente se não houvesse interação).

Assim, conhecendo a solução exata para  $H_0$ , podemos calcular os elementos de matriz

$$\langle n | V | m \rangle$$

e então, montar um conjunto de equações diferenciais para

$$\langle n | \Phi \rangle = \langle n | e^{iH_0 t} | \phi(t) \rangle$$

partindo de (4) que reescrevemos como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \Phi \rangle = \sum_m \langle n | V | m \rangle \langle m | \Phi \rangle$$

que "formalmente" é o caminho para resolver o problema.

No entanto, estas equações não são diretamente integráveis pois tanto  $V$  como  $\Phi$  dependem do tempo. A solução a este problema é a própria expansão perturbativa. De fato, considerando o caso infinitesimal, podemos escrever a equação (4) como:

$$|\phi(t + \delta t)\rangle - |\phi(t)\rangle = -i \delta t V |\phi(t)\rangle \quad \delta t \ll 1$$

$$\rightarrow |\phi(t + \delta t)\rangle = \{ 1 - i \delta t V(t) \} |\phi(t)\rangle$$

extrapolando:

$$N \gg 1 \quad |\phi(t')\rangle = |\phi(t + \{ \frac{t' - t}{N} \} N)\rangle =$$

$$= |\phi(t + \sum_{\alpha} \delta t_{\alpha})\rangle = \{ \prod_{\alpha} \{ 1 - i V(t_{\alpha}) \delta t_{\alpha} \} \} |\phi(t)\rangle$$

por outro lado

$$\prod_{\alpha} \{ 1 - i V(t_{\alpha}) \delta t_{\alpha} \} = \prod_{\alpha} \{ e^{-iV(t_{\alpha}) \delta t_{\alpha}} \}$$

se  $V(t)$  comutasse com  $V(t')$  poderíamos substituir o produto pelo integral no expoente mas como este não é o caso, devemos conservar a ordem em que atuam os operadores  $V(t_{\alpha})$  sobre  $|\phi\rangle$ .

Podemos escrever formalmente:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t_{\alpha} \rightarrow 0} \prod_{\alpha} \{ e^{-iV(t_{\alpha}) \delta t_{\alpha}} \} &= T \lim_{\delta t_{\alpha} \rightarrow 0} \{ e^{-i \sum_{\alpha} V(t_{\alpha}) \delta t_{\alpha}} \} = \\ &= T e^{-i \int_t^{t'} V(t) dt} \end{aligned}$$

onde  $T$  é o operador de ordenação cronológica, e se "encarrega" de manter a ordem temporal na somatória integral de modo que a integração formal da equação de Schrodinger fica:

$$|\phi(t')\rangle = T e^{-i \int_t^{t'} V(t) dt} |\phi(t)\rangle$$

Considerando o caso em que  $t = -\infty$   $t' = +\infty$  temos:

$$|\phi(\infty)\rangle = S |\phi(-\infty)\rangle$$

onde definimos  $S = T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt}$  como sendo a matriz de espalhamento.

Assim, se antes de ocorrer a interação o sistema se encontra num estado inicial  $|\phi(-\infty)\rangle$  característico de partículas livres, a amplitude de probabilidade de transição para o estado final  $|\phi(\infty)\rangle$  (outro conjunto de partículas livres) é dada pelo

elemento de matriz

$$S_{fi} = \langle \Phi(\infty) | S | \Phi(-\infty) \rangle \quad (5)$$

Escrevendo o potencial de interação  $V(t)$  em função da densidade e Lagrangiana de interação, chegamos a

$$S = T e^{i \int_{-\infty}^{\infty} L d^4x}$$

Expandindo a exponencial em série de potências obtemos:

$$S = \sum_k \frac{(i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_k T \{ L(t_1) L(t_2) \dots L(t_k) \}$$

que nada mais é do que a série perturbativa da qual estávamos falando.

Os estados  $|\Phi(\pm\infty)\rangle$  são considerados estados de partículas livres, e como tais, coincidem com os estados quânticos na representação de Heisenberg; isto é: são independentes do tempo e coincidem com a solução exata para  $H_0$ . Os operadores  $L(t)$  são funções dos operadores de campo (eq. (1))

Assim, pelo menos formalmente, é possível calcular as amplitudes de probabilidade (eq. (5)).

## 2.2 - OS PROPAGADORES E AS INTEGRAIS DIVERGENTES

Ao calcular os elementos de matriz  $S$ , surgem certas ex



pressões chamadas propagadores, que são de vital importância técnica<sup>[14]</sup>. No caso do campo escalar, esta expressão é dada por:

$$\frac{\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle}{i} = D(x-y) = -i \overline{\phi(x) \phi(y)}$$

O cálculo dos propagadores pode ser feito de diversas maneiras, no entanto devido à posterior aplicação no caso de campos auxiliares, seguiremos aqui o caminho da função de Partição do sistema, acoplado a correntes externas<sup>[15]</sup>.

A integral de Partição para um campo livre acoplado a uma corrente externa J é dada por:

$$Z(\phi, J) = \frac{\int_{D\phi} e^{i \int d^4x (L_0 + J\phi)}}{\int_{D\phi} e^{i \int d^4x L_0}}$$

onde  $L_0$  é o Lagrangiano dos campos Livres.

No caso de interesse,  $L_0$  pode expressar-se como uma forma quadrática nos campos  $\phi$  através de um operador que chamamos de A:

$$L_0 = \frac{1}{2} \phi A \phi$$

Para o campo escalar,  $A = \square - m^2$  ou seja o operador de Klein-Gordon.

Sendo  $L_0$  uma forma quadrática, a integral é do tipo gaussiana e pode ser resolvida diretamente:

$$Z(\phi, J) = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D(x-y) J(y)} = e^{-\frac{i}{2} (J, A^{-1} J)}$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \int d^4x J(x) A^{-1}(x) J(x)}$$

onde  $D(x-y)$  é o propagador procurado. Chamando

$$W = \int d^4x \int d^4y J(x) D(x-y) J(y)$$

podemos obter o propagador diferenciando  $W$  funcionalmente duas vezes em relação a  $J(x)$ .

Para o campo escalar, se obtem:

$$D(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2}$$

Desde o ponto de vista matemático, os propagadores representam a função da Green da equação dos campos Livres<sup>[16]</sup>; assim, por exemplo, para o campo escalar,  $D(x)$ , satisfaz a equação:

$$\{ \square - m^2 \} D(x) = \delta^4(x)$$

Apesar da simplicidade de estrutura da teoria exposta, existem certos problemas de origem matemática na manipulação dos propagadores. O modo mais direto de ver isto, é a expressão destes em termos de funções singulares:

$$D(x) \approx \frac{\delta(x^2)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i x^2} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(x^2) + \frac{i m^2}{8\pi^2} \text{Ln} \frac{m|x^2|^{1/2}}{2} +$$

$$T \phi(x) \phi(y) = \begin{cases} \phi(x) \phi(y) & x^0 > y^0 \\ \phi(y) \phi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

ou seja, que o T-produto, é definido em todo o 4-espaço menos em  $x = y$  de modo que as regras de integração no entorno infinitesimal de  $x = y$  podem ser fixadas arbitrariamente<sup>[19]</sup>.

Num caso típico, por exemplo no modelo  $\lambda \phi^3$  temos:

$$L = \frac{1}{2} \{ : \phi \{ \square - m^2 \} \phi : + \lambda : \phi^3 : \}$$

(onde  $:$   $:$  significa ordenamento normal)

No termo de segunda ordem da série perturbativa, aparece a integral

$$\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \text{Tr} : \phi(x_1) \phi(x_2) : \{ \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle \}^2$$

Desenvolvendo a expressão de interesse, temos:

$$\begin{aligned} \{ \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle \}^2 &= - \{ D(x_1 - x_2) \}^2 = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^8} \int d^4p d^4p' e^{-i(p+p')(x_1-x_2)} \Delta(p) \Delta(p') = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x_1-x_2)} \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p) \Delta(k+p) \right\} \end{aligned}$$

onde  $\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$

A integral entre parenteses,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\{m^2 - p^2\} \{m^2 - (p+k)^2\}}$$

apresenta sérios problemas já que o integrando não vai a zero suficientemente rápido na região de grandes momentos  $p$ ; o que faz com que diverja logaritmicamente.

Esta é uma manifestação direta dos problemas que aparecem quando se multiplicam duas distribuições.

O modo com que se tem atacado estes problemas, consiste em considerar os propagadores (ou as próprias integrais divergentes) como formas limites de expressões mais gerais, as quais por sua vez são convergentes. Este método é chamado de regularização [20]. Neste sentido, a integral acima precisa ser regularizada para poder ser calculada. Em geral, isto envolve a introdução de certos parâmetros, os quais desaparecem num segundo passo quando se executa a transição até o limite. Basicamente, este processo faz com que o resultado da integral se separe em duas partes. Uma delas é finita e é a que tem significado físico concreto.

A outra, é infinita, e em princípio não tem significado físico.

De fato, a construção "Axiomática" da teoria quântica dos Campos, (Matriz S "Axiomática") mostra que os requisitos de causalidade, unitariedade, invariância relativista (covariância) e princípio da correspondência, não são suficientes para determinar a forma do integrando nas integrais 4-espaciais da matriz  $S$ . (Normalmente este integrando é constituído de produtos de Lagran

gianos de interação).

Com efeito, sempre é possível somar ao Lagrangiano de Interação, uma série de operadores quasi-locais:

$$\Lambda(x;y) = 0 \quad \longrightarrow \quad x \neq y \quad \Lambda^\dagger = \Lambda$$

através dos quais pode-se eliminar todas as partes divergentes que aparecem no cálculo, sem alterar os resultados físicos.

### 2.3 - REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Dentre os diversos métodos de regularização usados normalmente<sup>[21]</sup>, trabalharemos aqui, com a regularização dimensional (Bollini-Giambiagi)<sup>[22]</sup> devido a suas vantagens formais, como covariância de Lorentz e de gauge (o que permite posteriores extensões do trabalho) assim como por sua praticidade e simplicidade conceitual.

Tomando como exemplo ilustrativo a integral acima

$$I = \int \frac{d^4 p}{\{ m^2 - p^2 \} \{ m^2 - (p + k)^2 \}}$$

a idéia central consiste em substituir a integração no espaço 4 - dimensional na variável  $p^\mu$  por uma integração num espaço  $D$  - dimensional onde a dimensão  $D$  dele, é uma quantidade arbitrária, no início inteira, mas logo tomada como variável analítica. Este processo faz com que em geral (e é o caso da integral acima) as integrais sejam rapidamente computáveis, e seu resultado de expresse em termos das funções gama

$\Gamma(x)$

cujo argumento depende agora de  $D$ <sup>[24]</sup>. Feito isto, a expansão deste resultado em torno de  $D = 4$  permite separar a parte que tem significado físico (parte finita) da parte infinita.

Assim, no exemplo tomado, aplicando a fórmula 7 do formulário (parâmetros de Feynman) (Apêndice "A"):

$$a = m^2 - (p+k)^2 \quad b = m^2 - p^2 \quad \alpha = \beta = 1$$

$$I = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{1}{\{ (m^2 - (p+k)^2)x + (m^2 - p^2)(1-x) \}^2}$$

Arrumando o denominador,

$$I = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{1}{(m^2 - k^2x - p^2 - 2pkx)^2}$$

Aplicando a fórmula 1 do formulário:

$$I = i \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left\{ \frac{4-D}{2} \right\} \int_0^1 dx \{ (x^2 - x)k^2 + m^2 \}^{-\frac{D-4}{2}}$$

Por comodidade escrita, introduzimos o parâmetro  $\epsilon = 4-D$   $D = 4-\epsilon$

$$I = i \pi^{\frac{4-\epsilon}{2}} \Gamma\left\{ -\frac{\epsilon}{2} \right\} \int_0^1 dx \{ (x^2 - x)k^2 + m^2 \}^{-\frac{\epsilon}{2}}$$

A expansão em torno de  $D = 4$  é equivalente à expansão em torno de  $\epsilon = 0$ . Segundo as fórmulas 12 e 13 do formulário:

$$12_f: \Gamma\{x\} = \frac{1}{x} - c$$

$C =$  constante de Euler

$C = 0,5772\dots$

$$13_f: \quad A^x = 1 + x \operatorname{Ln} A + \frac{(x \operatorname{Ln} A)^2}{2} + \dots$$

Temos:

$$\pi^{\frac{4-\varepsilon}{2}} = \pi^2 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Ln} \pi + O(\varepsilon) \right\}$$

$$\Gamma\left\{\frac{\varepsilon}{2}\right\} = \frac{2}{\varepsilon} - C$$

$$\int_0^1 dx (\dots)^{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dx \operatorname{Ln}(\dots)$$

$$I = \frac{2i \pi^2}{\varepsilon} - i \pi^2 \left\{ \int_0^1 dx \operatorname{Ln}(m^2 + k^2(x^2 - x)) + \operatorname{Ln} \pi + C \right\} +$$

+  $O(\varepsilon) \dots$

onde  $O(\varepsilon)$  representa termos proporcionais a potencias positivas de  $\varepsilon$ .

No limite em que a dimens~ao D do espaco tende a 4 ( $\varepsilon$  tende a 0) o resultado se separa como era esperado, numa parte divergente, e uma convergente, que  $\tilde{e}$  a que tem significado ffsico:

$$I_{\text{inf.}} = \frac{2i \pi^2}{\varepsilon} \quad I_{\text{fin}} = -i \pi^2 \left\{ \int_0^1 dx \operatorname{Ln}\{m^2 + k^2(x^2 - x)\} + \operatorname{Ln} \pi + C \right\}$$



Com o que, em princípio, se resolve o problema para a integral considerada, já que a integração na variável  $x$  é convergente, e pode ser calculada por tabela.

Há também situações em que o cálculo de  $I_{fin}$  é mais complicado; no entanto, a questão de interesse nesta tese, está na compensação das partes divergentes. Assim, a parte convergente será deixada de lado em todos os cálculos subseqüentes.

#### 2.4 - O PROCESSO DE RENORMALIZAÇÃO

Como já foi mencionado, os requisitos de causalidade, unitariedade, covariância e princípio da correspondência, não são suficientes para determinar a forma do integrando nas integrais 4-espaciais da matriz  $S$ ; podendo-se sempre somar ao Lagrangiano de interação uma série de operadores quase-locais  $\Lambda(x_1 \dots x_n)$  (diferentes de zero somente quando todos seus argumentos coincidirem) sem alterar os resultados físicos. A forma mais geral desta seqüência de operadores  $\Lambda$  é [25]:

$$L_{q\ell}(x_1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad (6)$$

de modo que o integrando na matriz  $S$ , fica :

$$L = L_{int.} + L_{q\ell}$$

ou seja, o Lagrangiano de interação mais a seqüência infinita de operadores quase-locais.

Aqui, alguns comentários precisam ser feitos. Em primeiro lugar, como todos os operadores  $\Lambda$  são quase-locais, (são diferentes de zero, somente quando coincidem todos os seus argumentos), todas as integrais que aparecem em  $L_{q\ell}(x)$ , desaparecem, e então  $L(x)$  é um operador local (só depende do valor dos campos no ponto  $x$ ). Em segundo lugar, o fato da somatória começar em  $n = 2$ , é já evidente pois, os termos de ordem zero e de ordem um na matriz  $S$ , são convergentes. Em terceiro lugar, é interessante estruturar a série perturbativa, para melhor compreender de que modo a existência de  $L_{(q\ell)}$ , é capaz de eliminar os infinitos na matriz.

Assim, temos:  $(L \equiv L_{INT})$

$$S = 1 + i \int \{L + L_{q\ell}\}(x_1) dx_1 + \frac{i^2}{2} \int T \{L + L_{q\ell}\}(x_1) \{L + L_{q\ell}\}(x_2) dx_1 dx_2 + \dots$$

o próximo passo é substituir  $L_{q\ell}$  pela sua forma (6) em termos dos operadores  $\Lambda_n(x_1 \dots x_n)$  e arrumar os termos, destacando como fator comum os elementos de integração  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ . Aqui vamos exemplificar, expondo este esquema até a terceira ordem na série, o que em geral coincide com a expansão até 1 Loop. Se obtem, então:

$$S = 1 + i \int dx_1 L(x_1) + \frac{i^2}{2} \int dx_1 dx_2 T \{L(x_1) L(x_2) - i \Lambda(x_1, x_2)\} - \\ - \frac{i}{6} \int dx_1 dx_2 dx_3 T \{L(x_1) L(x_2) L(x_3) - i 3 L(x_1) \Lambda_2(x_2, x_3) - \Lambda_3(x_1, x_2, x_3)\}$$

$$- \frac{1}{24} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 T \{ \dots \} + \dots$$

Numa linguagem mais familiar, o operador  $\Lambda_2$  elimina as divergências nas correções de 1 loop aos propagadores;  $\Lambda_3$  elimina as divergências nas correções próprias de 1 loop aos vértices, e assim por diante.

Tomando como exemplo a teoria com interação tipo  $\lambda \phi^3$  até terceira ordem na série perturbativa, temos:

$$L = : \frac{1}{2} (|\partial_\mu \phi|^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \lambda \phi^3) : \quad L_{int} = \lambda : \phi^3 :$$

Um cálculo simples mostra que a escolha de  $\Lambda_2(x_1, x_2)$  e  $\Lambda_3(x_1, x_2, x_3)$  que tornam a série convergente é dada por:

$$\Lambda_2(x_1, x_2) = \frac{-36 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon} : \phi(x_1) \phi(x_2) : \delta(x_1 - x_2)$$

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

onde  $\epsilon$  é o parâmetro que aparece através da regularização dimensional.

A sequência de operadores quase-locais  $\Lambda$  é dada por:

$$L_{ql}(x_1) = \frac{1}{2} \int dx_2 \left\{ - \frac{36 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon} : \phi(x_1) \phi(x_2) : \delta(x_1 - x_2) \right\}$$

Como foi mencionado, a integração desaparece devido ao caráter quase-local do operador  $\Lambda$  :

$$L_{q\lambda}(x) = \frac{-18 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon} : \phi^2(x) :$$

e o Lagrangiano total:

$$L_{\text{tot}} = L + L_{q\lambda} = : \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{m^2}{2} + \frac{18 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon} \right) \phi^2 + \lambda \phi^3 \right\} :$$

Já que o valor  $m$  da massa das partículas quando elas são tão livres é inobservável, podemos embutir o fator divergente  $\frac{18 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon}$  numa redefinição da massa:

$$m_R^2 = m^2 + \frac{36 \pi^2 \lambda^2}{\epsilon}$$

O valor de  $m_R$  pode ser medido experimentalmente (se o modelo  $\lambda \phi^3$  fosse realista, o que não é o caso).

Este modelo, é um bom exemplo da renormalização da massa, no entanto, num caso mais geral, a idéia de renormalização, se apóia em que como regra, o  $L_{q\lambda}$  tem a mesma estrutura do Lagrangiano inicial. E assim, pelo mesmo caminho, são renormalizáveis a norma dos campos, e cada uma das constantes de acoplamento que apareçam na teoria.

De todos os modos, é importante assinalar que esta identidade de estrutura entre  $L_{q\lambda}$  e o Lagrangiano inicial não ocorre em todo e qualquer modelo teórico, com o que o processo de renormalização das constantes da teoria, não se mostra suficiente para eliminar todas as divergências [26]. A solução nestes casos é muito complicada, e em geral se torna impossível de obter

uma expressão fechada para o Lagrangiano total ou efetivo.

Sem entrar nos detalhes formais da questão, podemos dizer que uma das características mais facilmente identificáveis dos modelos renormalizáveis, consiste em que os términos de interação não contém potências superiores a 4 nos campos escalares, que é o caso do modelo a ser tratado nesta tese.

### 3 - CAMPOS AUXILIARES

#### 3.1 - CASO CLÁSSICO

Sob certo ponto de vista, mesmo fora do contexto da supersimetria, os Campos Auxiliares são uma ferramenta analítica, capaz de facilitar o cálculo das correções na série perturbativa.

Matematicamente falando, se trata de campos que não tem dinâmica, isto é, o Lagrangiano não contém derivadas dos campos auxiliares.

Fisicamente, eles não representam partícula alguma e seu aparecimento tem sentido quando existem outros campos de verdadeiro significado físico.

De fato, eles sempre poderiam ser eliminados já no Lagrangiano, prescindindo-se deles, o que confirma o seu caráter de ferramenta técnica auxiliar no cálculo.

Desde este ângulo, tem pouco sentido falar dos "quantos" associados aos campos auxiliares, ou do "Lagrangiano dos campos auxiliares livres".

Como exemplo ilustrativo destas questões, consideraremos um sistema escalar com interação cúbica e quãrtica, fixando-nos primeiro no caso clássico.

Seja:

$$L = \frac{1}{2} \phi \{ \square - m^2 \} \phi + f \phi^3 - \lambda \phi^4$$

Por simplicidade tomaremos a situação em que  $f = -m \sqrt{2 \lambda}$

$$L = \frac{1}{2} \phi \{ \square - m^2 \} \phi - m\sqrt{2\lambda} \phi^3 - \lambda \phi^4$$

Não é difícil ver que o Lagrangiano pode ser reescrito com o auxílio de um outro campo  $F$  (campo auxiliar) em "interação" com  $\phi$ , na forma

$$L = \frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} F^2 - \{ m \phi + \sqrt{2\lambda} \phi^2 \} F .$$

Efetivamente, das equações de Lagrange para o novo campo  $F$ , tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 = m \phi + \sqrt{2\lambda} \phi^2 - F \rightarrow F = \{ m \phi + \sqrt{2\lambda} \phi^2 \}$$

e substituindo este valor do  $F$ , se reobtem a expressão do

Lagrangiano escrita em função somente do campo  $\phi$

Como se vê, e de acordo com o que foi dito, a manobra consiste na introdução de um campo auxiliar  $F$ , sem dinâmica, e cujo sentido é devido à existência do campo  $\phi$ .

Evidentemente o verdadeiro conteúdo físico do Lagrangiano está no campo  $\phi$ . O campo  $F$  aparece aqui como um recurso através do qual, podemos reescrever o Lagrangiano sem alterar seu conteúdo.

O estudo do sistema pode ser feito com o campo  $F$ , ou sem ele, eliminando-o através das equações do movimento.

### 3.2 - CASO QUÂNTICO

No entanto, na teoria quântica de campos, usando o formalismo geral da função de partição, pode-se mostrar que estas equações de Lagrange, não são necessárias para eliminar o campo auxiliar  $F$ . De fato, este pode ser integrado exatamente, eliminando-o totalmente da função de partição, com o que, depois de ter quantizado os campos, o sistema físico também pode ser analisado com ou sem campo Auxiliar.

Em outras palavras, também no caso quântico, a introdução do operador de campo  $F$ , em nada altera as características físicas do sistema.

Para se verificar isto, seja:

$$L = : \left\{ \frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} F^2 - (m \phi + \sqrt{2\lambda} \phi^2) F \right\} :$$

onde  $\phi$  e  $F$  são operadores de campo.

A integral de partição é dada por:

$$Z = \frac{1}{N} \int D\phi \, DF \, e^{i \int d^4x \, L} \qquad N = \int D\phi \, Df \, e^{i \int d^4x \, L_0}$$

Por outro lado, para uma integral do tipo gaussiana como é o caso, é trivial mostrar que

$$\int_{DF} e^{i \int d^4x \left( \frac{1}{2} F^2 - F b(x) \right)} = e^{-i \int d^4x \frac{1}{2} b^2(x)}$$

$$b(x) = m \phi + \sqrt{2\lambda} \phi^2$$



## CAPÍTULO 2

### O MODELO

#### 1 - APRESENTAÇÃO DO MODELO

##### 1,1 - A LAGRANGIANA, SEU CONTEÚDO E SUAS CARACTERÍSTICAS

O modelo aqui estudado, consiste basicamente num sistema em interação, formado por três tipos de partículas diferentes: partículas escalares, pseudo-escalares e de spin 1/2.

A interação entre os diversos tipos de partículas é a mais geral possível dentro dos modelos renormalizáveis, no sentido comentado na introdução teórica. O Lagrangiano, em termos dos campos "físicos" ( não auxiliares), é dado por:

$$L = \frac{1}{2} \phi \{ \square - m_1^2 \} \phi + \frac{1}{2} \eta \{ \square - m_2^2 \} \eta + f \phi^3 + f' \phi \eta^2 + \lambda \phi^4 + \lambda' \eta^4 + \\ + \lambda'' \phi^2 \eta^2 \bar{\Psi} \{ i \not{\partial} - M \} \Psi + \bar{\Psi} \{ g \phi - g' \gamma_5 \eta \} \Psi$$

Como é visível, vários tipos possíveis de interação foram considerados. (As potências ímpar do campo pseudo-escalar, somente aparecem acompanhadas de  $\gamma_5$ ).

Os três campos,  $\phi$ ,  $\eta$ ,  $\psi$ , escalar pseudo-escalar e spinorial, tem massas diferentes de zero e distintas entre si:  $m_1 \neq m_2 \neq M$ .

As constantes de acoplamento são em total 7, de modo que o modelo consta, ao todo, de 10 constantes características.

Como é sabido, para o caso geral em que não existem condições sobre estas constantes, aparecem divergências no cálculo das integrais de Feynman com o que seríamos obrigados a renormalizar cada uma das 10 constantes características, mais a norma dos três campos, como se faz tradicionalmente.

Aparentemente, esta afirmativa já é suficiente para tornar desinteressante a questão. No entanto a supersimetria mostra que o assunto não é bem assim, e que há certas questões sutis, capazes de mudar o panorama. A chave está nas possíveis relações entre as constantes de acoplamento.

O modelo aqui tratado apresenta diferenças significativas com o modelo supersimétrico (conhecido como modelo Wess-Zunimo<sup>[27]</sup>), já que aqui,  $\psi$  é um spinor de Dirac, enquanto que no modelo W-Z trata-se de um spinor de Majorana, além de não conter "a priori" alguma relação entre as constantes de acoplamento.

Estas diferenças não são triviais e alteram o panorama. De fato, para ter-se um spinor de Dirac nas teorias supersimétricas, é preciso duplicar o número de campos escalares e pseudo-escalares<sup>[28]</sup> -

Por outro lado, no modelo supersimétrico, a relação entre as constantes de acoplamento<sup>[29]</sup>

8 a)  $m_1 = m_2 = M,$

b)  $g = g'$

c)  $f = f' = + Mg$

d)  $\lambda = \lambda = \frac{\lambda''}{2} = - \frac{g^2}{2}$

é capaz de transformar significativamente a situação já que estas relações são suficientes para que quase todas as divergências da Matriz S desapareçam, com o que nenhuma das 10 constantes características (em realidade duas, M e g) precisa ser renormalizada (a menos de uma renormalização convergente para  $g^{[30]}$ ), restando uma renormalização à norma dos campos.

Voltando ao nosso modelo não supersimétrico, o objetivo proposto consiste em desenvolver os cálculos perturbativos, assumindo que todas as constantes do modelo são arbitrárias e independentes entre si e estabelecer as relações entre as constantes do sistema, de modo a eliminar a renormalização infinita às massas e constantes de acoplamento.

Existem, a priori, dois caminhos possíveis para começar. O primeiro seria atacar diretamente o Lagrangiano e construir a série perturbativa, sem campos auxiliares. Esta opção, mesmo que a mais direta, apresenta sérias complicações (já no 1º termo não nulo da série), devido à existência de diversos tipos de divergência superposta (originados nas 4<sup>as</sup> potências dos campos  $\phi, \eta$ ). Assim, mesmo sendo problemas "superáveis", torna-se impossível associar um número determinado de loops a cada termo da série perturbativa. Por outro lado, a extensão do cálculo aos próximos termos da série carregando diversos tipos de divergência superposta, tornaria o modelo extremamente complicado para trabalhar.

O segundo caminho consiste na utilização de campos auxiliares através dos quais desaparecem todas as quartas potên-

cias dos campos  $\phi$ ,  $\eta$  (e então as divergências superpostas na correção de segunda ordem aos propagadores) associando-se um número fixo de loops a cada termo da série, e simplificando-se diversas partes do cálculo, assim como facilitando, em grande parte, qualquer possível extensão do trabalho.

### 1.2 - OS CAMPOS AUXILIARES DO MODELO

Optando pela utilização de campos auxiliares já foi comentado na introdução teórica, que o número de campos auxiliares precisos para descrever um determinado sistema depende basicamente da relação entre as constantes de acoplamento.

Para resolver esta questão, vamos reescrever o Lagrangiano:

$$L_0(\text{fis}_{\text{bos}}) = \frac{1}{2} \{ \phi(\square - m^2)\phi + \eta(\square - m^2)\eta \} \quad (9)$$

$$L_{\text{int}}(\text{fis}_{\text{bos}}) = f\phi^3 + f'\phi\eta^2 + \lambda\phi^4 + \lambda'\eta^4 + \lambda''\phi^2\eta^2 \quad (10)$$

$$L(\text{fis}_{\text{fer}}) = \bar{\Psi} \{ i \not{\partial} - M \} \Psi \quad (11)$$

$$L_{\text{int}} \left( \begin{smallmatrix} \text{fis} \\ \text{f\`er} \end{smallmatrix} \right) = \bar{\Psi} \{ g \phi - g' \gamma_5 \eta \} \Psi \quad ( 12 )$$

$$L = L_0(\text{f. b.}) + L_{\text{int}}(\text{f. b.}) + L_0(\text{f.f.}) + L_{\text{int}}(\text{f.f.})$$

Em primeiro lugar, os campos auxiliares s\~o atuam no se-  
tor bos\~onico do Lagrangiano, de modo que (11 + 12) permanece inal-  
terada.

Em segundo lugar, para se produzir

$$(9) = L_0(\text{fis. bos.})$$

\u00e9 preciso a introdu\u00e7\~ao de pelo menos 2 campos auxiliares (um as-  
sociado a cada campo f\u00edsico), um escalar e um pseudo-escalar, jun-  
to com duas constantes  $m_1$  e  $m_2$ .

O Lagrangiano dos campos livres  $L_0$ , \u00e9 sempre uma forma  
quadr\u00e1tica. Esta caracter\u00edstica deve manter-se quando escrito  
em fun\u00e7\~ao dos campos auxiliares. Isto j\u00e1 \u00e9 evidente por inspe-  
\u00e7\~ao na integral funcional. Se assim n\u00e3o fosse, a express\~ao de  
 $L_0$  em termos dos campos auxiliares, n\u00e3o daria uma integral gaus-  
siana e, ent\u00e3o, n\u00e3o seria equivalente trabalhar com ou sem eles.

Assim, temos para o Lagrangiano dos campos livres  $\phi$  e  
 $\eta$ , b\~os\~onicos em fun\u00e7\~ao dos campos auxiliares  $F$  e  $G$ .

$$13 \quad L_0(\text{aux. bos.}) = \left\{ -\frac{1}{2} \phi \square \phi + m_1 \phi F + \frac{F^2}{2} \right\} +$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{2} \eta \square \eta + m_2 \eta G + \frac{G^2}{2} \right\}$$

É direto verificar que a eliminação de  $F$  e  $G$  através das equações de Lagrange (ou integrando funcionalmente, o que se mostrou equivalente), conduz diretamente a  $L_0$  (Fis.Bos.) = (9)

Trata-se agora de escrever o Lagrangiano de interação do setor bosônico em função dos Campos auxiliares.

Por inspeção, ele contém 5 constantes de acoplamento  $f, f', \lambda, \lambda', \lambda''$ , de modo que um conjunto de 5 constantes independentes deve entrar junto com os campos auxiliares.

Por outro lado somente podem entrar primeiras potências dos campos auxiliares; de terceira potência para cima não é possível pois a integral funcional em  $F$  (ou  $G$ ) deixaria de ser gaussiana e seria impossível sua eliminação (as segundas potências ( $F^2$  ou  $G^2$ ) já foram incluídas em  $L_0$ , e são desnecessárias em  $L_{int.}$ , como se verifica no raciocínio abaixo). Considerando isto, mais o fato de  $\eta$  e  $G$  serem pseudo-escalares, enquanto que o Lagrangiano todo deve ser escalar, temos os seguintes possíveis termos para construir  $L_{INT}$  (Aux):

$$\phi^2 F; \quad \eta^2 F; \quad \phi \eta G$$

De fato, estes são os únicos termos cúbicos (lineares em  $F$  ou  $G$ ) invariantes por reflexão. (qualquer termo do tipo  $\phi F$  ou  $\eta G$  não passa de uma redefinição da massa de  $\phi$  ou  $\eta$ )

Mas o problema é que três termos não são suficientes para introduzir um conjunto de 5 constantes independentes. Este é o problema mencionado na introdução teórica.

Uma das soluções consiste em introduzir um terceiro campo auxiliar N. Por inspeção, ele deve ser um campo escalar o que permite aumentar em dois, o número de constantes independentes, através de termos do tipo:

$$\phi^2 N; \quad \eta^2 N$$

Por outro lado, isto obriga a introduzir o N no Lagrangiano dos campos livres (13). Mas como a sua presença está determinada pela parte de interação, não é preciso introduzir um termo do tipo  $\phi N$ , o qual somente alteraria o valor inicial da massa (e complicaria os cálculos pelo aparecimento de propagadores cruzados, o qual, como veremos mais a frente, ocorre com F e G, devido aos termos  $\phi F$  e  $\eta G$ ).

Em síntese, podemos escrever o Lagrangiano total como:

$$L_{(Aux)} = L_0 + L_{INT}$$

$$L_0 = \left\{ -\frac{1}{2} \phi \square \phi + m_1 \phi F + \frac{F^2}{2} \right\} + \left\{ -\frac{1}{2} \eta \square \eta + m_2 \eta G + \frac{G^2}{2} \right\} + \frac{N^2}{2} + \bar{\Psi} \{ i \not{\partial} - M \} \Psi \quad (14)$$

$$L_{int} = \phi^2 \{ c F + \underline{c} N \} + \eta^2 \{ c' F + \underline{c}' N \} + 2 \phi \eta d G + \bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi \quad (15)$$

As equações do movimento para F, G e N permitem escrever as constantes f, f',  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  em função de c,  $\underline{c}$ , c',  $\underline{c}'$ , d:

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 = F + m_1 \phi + c \phi^2 + c' \eta^2 \rightarrow F = - \{m_1 \phi + c \phi^2 + c' \eta^2\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 = G + m_2 \eta + 2d\phi\eta \rightarrow G = - \{m_2 \eta + 2d\phi\eta\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial N} = 0 = N + \underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2 \quad N = - \{\underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2\}$$

Substituindo F, G e N por estas expressões em função de  $\phi$   $\eta$ , se obtém a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \phi \{ \square - m_1^2 \} \phi + \frac{1}{2} \eta \{ \square - m_2^2 \} \eta + \bar{\Psi} \{ i \not{x} - M \} \Psi \\ & - m_1 c \phi^3 - (m_1 c' + 2m_2 d) \phi \eta^2 - \left( \frac{c^2 + \underline{c}^2}{2} \right) \phi^4 \\ & - \left( \frac{(c')^2 + (\underline{c}')^2}{2} \right) \eta^4 - (cc' + \underline{c}\underline{c}' + 2d^2) \phi^2 \eta^2 \end{aligned} \quad ( 16 )$$

de modo que

$$f = - m_1 c \quad \lambda = \frac{1}{2} (-c^2 - \underline{c}^2) \quad \lambda'' = - cc' - \underline{c}\underline{c}' - 2d^2$$

17

$$f' = - m_1 c' - 2m_2 d \quad \lambda' = \frac{1}{2} (-\{c'\}^2 - \{\underline{c}'\}^2)$$



que são as relações procuradas.

É importante observar que a escolha de  $\lambda$  (ou  $\lambda'$ ) positivo, implica em que pelo menos uma das duas constantes  $c, \zeta$  (ou  $c', \zeta'$ ) são imaginárias puras, o que levaria a trabalhar com um Lagrangiano de campos auxiliares com constantes de acoplamento (algumas delas) imaginárias.

Assim, para evitar entrar nas complicações teóricas desta questão, escolhemos  $\lambda$  e  $\lambda'$  negativas o que é equivalente a impor a realidade  $c, \zeta, c', \zeta'$ .

### 1.3 - CÁLCULO DOS PROPAGADORES

O primeiro passo a dar no cálculo da série perturbativa é o cálculo dos propagadores. Para isto vamos considerar a integral funcional do sistema acoplado a correntes externas  $J$  que é dada por<sup>[31]</sup>:

$$18 \quad Z(\phi, J) = \frac{1}{N} \int D\phi \ e^{i \int d^4x (L_0 + J\phi)}$$

o caso de interesse ocorre quando o Lagrangiano dos campos livres é uma forma quadrática:

$$L_0 = \frac{1}{2} \phi A \phi$$

Então:

$$Z(\phi, J) = \frac{1}{N} \int D\phi \ e^{i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi A \phi + J\phi \right)}$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \int d^4x J(x) \{ A^{-1}(x) J(x) \}}$$

No nosso caso,  $\Phi$  é dado por :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ F \\ N \\ \eta \\ G \end{bmatrix}$$

e a matriz  $A$ , é :

$$A = \begin{bmatrix} & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$J$  é :

$$J = \begin{bmatrix} J_\phi \\ J_F \\ J_N \\ J_\eta \\ J_G \end{bmatrix}$$

Uma vez esclarecida a natureza do operador  $A$ , podemos partir para a idéia de  $A^{-1}$

Em relação aos seus índices discretos,  $A^{-1}$  satisfaz:

$$; A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Assim,  $A^{-1}$  é dado por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\square - m_1^2} & \frac{-m_1}{\square - m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1}{\square - m_1^2} & \frac{-m_1^2}{\square - m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\square - m_2^2} & \frac{-m_2}{\square - m_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-m_2}{\square - m_2^2} & \frac{-m_2^2}{\square - m_2^2} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{aligned} & \int d^4x J(x) A^{-1}(x) J(x) = \\ & \int d^4x J(x) \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A^{-1}(x) e^{-ip \cdot x} \right\} \left\{ \int d^4y e^{ipy} J(y) \right\} \\ & = \int d^4x d^4y J(x) \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A^{-1}(x) e^{-ip(x-y)} \right\} J(y) = \\ & = \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y) \end{aligned}$$

Onde  $D(x-y)$  é o propagador procurado; e pode obter-se formalmente diferenciando funcionalmente duas vezes em relação a  $J(x)$ , to da integral funcional (18) e colocando  $J = 0$ .

Enfim, calculando, temos diretamente:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \{A^{-1}(x) e^{-ip(x-y)}\} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta(p)$$

$$(19) \rightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{1}{p^2 - m_1^2} & \frac{-m_1}{p^2 - m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1}{p^2 - m_1^2} & \frac{p^2}{p^2 - m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p^2 - m_2^2} & \frac{m_2}{p^2 - m_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-m_2}{p^2 - m_2^2} & \frac{p^2}{p^2 - m_2^2} \end{array} \right]$$

Onde  $\Delta(p)$  é a matriz dos propagadores em representação de momento.

Quanto ao propagador do campo fermiônico, a idéia é exatamente a mesma, somente que a introdução de variáveis anticomutativas na integral funcional, obriga a um tratamento (técnico) mais detalhado [32]. Na ideia de não dispersar a discussão, damos diretamente seu resultado.

$$\Delta_{\Psi}(p) = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2}$$

Como foi mencionado anteriormente, existem propagadores cruzados: Por exemplo:

$$\Delta_{\phi F}(p) = \frac{-m_1}{p^2 - m_1^2}$$

A origem destes está no termo cruzado no Lagrangiano dos campos Livres:

$$L_0 = \dots + m_1 \phi F + \dots$$

assim, é claro agora, o porquê de não acoplar o campo N ao campo  $\phi$  no Lagrangiano Livre  $L_0$ . Fisicamente só se alteraria (em parte) o valor da massa, enquanto que matematicamente haveria propagadores cruzados tipo  $\Delta_{\phi N}$  e então também  $\Delta_{FN}$  o que complicaria as coisas.

De fato, do modo em que N foi introduzido, estes propagadores cruzados de N, não existem; e, mais ainda, o propagador para o campo N, em representação de momentum, é igual a 1.

Vemos também de que modo a falta de dinâmica dos campos auxiliares F e G, faz com que o propagador deles tenha a mesma potência de p no numerador como no denominador, coisa que também foi mencionada na introdução.

## CAPÍTULO 3

### AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO INFINITA ÀS MASSAS E CONSTANTES DE ACOPLAMENTO

#### 1 - FUNÇÕES DE GREEN DE DUAS PERNAS

##### 1,1 - CÁLCULO DAS CORREÇÕES INFINITAS ATÉ 1 LOOP ÀS FUNÇÕES DE GREEN DE DUAS PERNAS

A expressão da matriz S, é dada por:

$$S = 1 + i \int d^4x_1 : L(x_1) : - \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 : T L(x_1) L(x_2) : - \\ - \frac{i}{6} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 : T L(x_1) L(x_2) L(x_3) : + \dots$$

onde L(x) é o Lagrangiano de Interação. No nosso modelo, L é da  
do por: 15

$$: L(x) : = : \{ ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) F + ( \underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2 ) N + (2d \phi \eta) G + \\ + \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi \} :$$

O segundo termo da série perturbativa é:

$$-\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 : T L(x_1) L(x_2) :$$

Trata-se, agora, de substituir  $L(x)$  pela sua expressão explícita e desenvolver o produto normal  $:T L(x_1) L(x_2):$  sendo que as correções às funções de Green, se obtêm somente dos termos proporcionais ao produto normal de 2 campos. (Por exemplo:

$$: \phi(x_1) \phi(x_2) : \quad \text{ou} \quad : \eta(x_1) G(x_2) : )$$

$$\begin{aligned} & :T L(x_1) L(x_2) : = \\ & :T \{ (F[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} (F[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_2} + (N[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} \\ & (N[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_2} + 4 (Gd\phi\eta)_{x_1} (Gd\phi\eta)_{x_2} + (\bar{\Psi}[\phi g - g'\gamma_5\eta]\Psi)_{x_1} \\ & (\bar{\Psi}[\phi g - g'\gamma_5\eta]\Psi)_{x_2} + 2 (F[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} (N[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_2} + \\ & 2 (F[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} 2 (Gd\phi\eta)_{x_2} + 2 (F[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} (\bar{\Psi}[\phi g - g'\gamma_5\eta]\Psi)_{x_2} \\ & + 2 (N[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} 2 (Gd\phi\eta)_{x_2} + 2 (N[c\phi^2 + c'\eta^2])_{x_1} \\ & (\bar{\Psi}[\phi g - g'\gamma_5\eta]\Psi)_{x_2} + 4 (Gd\phi\eta)_{x_1} (\bar{\Psi}[\phi g - g'\gamma_5\eta]\Psi)_{x_2} \} : \quad ( 19 ) \end{aligned}$$

Para racionalizar o trabalho, é preciso classificar as funções de Green de duas pernas para desenvolver os produtos nor

mais. Uma rápida observação mostra as seguintes funções proporcionais a:

1: $\phi\phi$ :	1: $\eta\eta$ :	1: $FF$ :	1: $NN$ :	1: $GG$ :	1: $\Psi\Psi$ :
*: $\phi\eta$ :	*: $\eta F$ :	: $FN$ :	*: $NG$ :	: $G\Psi$ :	
1: $\phi F$ :	*: $\eta N$ :	*: $FG$ :	: $N\Psi$ :		
: $\phi N$ :	1: $\eta G$ :	: $F\Psi$ :			
*: $\phi G$ :	: $\eta\Psi$ :				
: $\phi\Psi$ :					

Em primeiro lugar, é evidente que todas as funções do tipo :  $A\Psi$  : não existem (a menos de :  $\bar{\Psi}\Psi$  ).

Em segundo lugar, as marcadas \* violam paridade em processos de até 1 loop, de modo que também não são consideradas.

Por outro lado, as funções marcadas com 1 são as que fornecem as correções às massas e a norma dos campos.

A função proporcional a :  $\phi N$  : também deve ser calculada, assim como a função :  $FN$  :

Em síntese, a ausência de divergências deve ser condição imposta nas funções marcadas com 1, assim como em :  $\phi N$  : e :  $FN$  :

Trata-se, agora, de filtrar somente as correções às funções acima mencionadas. Começando pela parcela proporcional a :  $\bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2)$  : contribui a ela unicamente o quarto termo da expressão acima. (19).

$$: \{ \bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi \}_1 \{ \bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi \}_2 \Big|_{\sim: \bar{\Psi}_1 \Psi_2:} =$$



$$= : \overline{\Psi}_a(x_1) \Psi_b(x_2) : \{ g^2 \overbrace{|\phi_1 \phi_2|} \overbrace{|\Psi_1 \overline{\Psi}_2|}_{ab} + (g')^2 (\gamma_5 \overbrace{|\Psi_1 \overline{\Psi}_2|} \gamma_5)_{ab} \overbrace{|\eta_1 \eta_2|} \}$$

Relembramos que:

$$\overbrace{|\phi_1 \phi_2|} = \overbrace{|\phi(x_1) \phi(x_2)|} = i D_\phi(x_1, x_2)$$

e idem com  $\overbrace{[\Psi_1 \overline{\Psi}_2]_{ab}}$ . Os índices a e b são índices spinoriais. En quanto à convenção sobre matrizes  $\gamma$  e notações, a questão é discutida no apêndice "A". Por outro lado, o modo de desenvolver o produto normal, consiste numa aplicação simples das regras de comutação para os campos ou do que em sua forma mais geral, é conhecido como teorema de Wick[33].

Continuando, procuramos agora a parte de  $: T L(x_1) L(x_2) :$  proporcional a  $: \phi(x_1) \phi(x_2) :$

O primeiro termo contribui com:

$$: T ( F \{c\phi^2 + c'\eta^2\} )_{x_1} ( F \{c\phi^2 + c'\eta^2\} )_{x_2} : \Big|_{:\phi_1 \phi_2:} =$$

$$4 \{ c^2 \overbrace{|\overline{F}_1 F_2|} \overbrace{|\phi_1 \phi_2|} + c^2 \overbrace{|\overline{F}_1 \phi_2|^2} : \phi(x_1) \phi(x_2) :$$

Os fatores 4 são fatores estatísticos (alguns autores, o chamam de "simmetry factor") cuja origem consiste no número possível de contrações [34]:

Por exemplo:

O termo :  $\phi^2(x_1) F(x_1) \phi^2(x_2) F(x_2)$  : permite construir a par  
cela :  $\phi(x_1) \phi(x_2) : \overline{[F_1 F_2]} \overline{[\phi_1 \phi_2]}$  de 4 modos distintos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}
 \Rightarrow 2 \cdot 2 \equiv 4$$

O  $\phi(x_1)$  dentro do produto normal pode escolher-se de duas maneiras, tirando-o de  $(\phi^2 F)_{x_1}$  e idem com  $\phi(x_2)$ . (Por isso os fatores 2 em cada "perna externa"). Feito isto, o  $\phi(x_1)$  restante, pode contrair-se com o  $\phi(x_2)$  restante de um único modo e idem com  $F(x_1)$  e  $F(x_2)$  (por isso os fatores  $\overline{1}$  em cada "linha interna"). Em síntese, temos um peso 4 para o termo. Em outras palavras, este termo aparece 4 vezes ao desenvolver o produto normal.

De maneira análoga, o segundo termo contribui com:

$$: T ( N \{ \underline{c}\phi^2 + \underline{c}'\eta^2 \} )_{x_1} ( N \{ \underline{c}\phi^2 + \underline{c}'\eta^2 \} )_{x_2} : \left| \begin{array}{l} = \\ : \phi_1 \phi_2 : \end{array} \right.$$

$$= 4 \{ \underline{c}^2 \overline{[N_1 N_2]} \overline{[\phi_1 \phi_2]} \} : \phi(x_1) \phi(x_2) :$$

(A contração  $\overline{[\phi N]}$  é igual a zero pois não existe propagador cruzado de N com  $\phi$ ).

O terceiro termo:

$$\begin{aligned}
 & : T d^2(G\phi)_{x_1} d^2(G\phi)_{x_2} : \left| \begin{array}{l} = \\ \sim : \phi_1 \phi_2 : \end{array} \right. \\
 & = \{ 4 d^2 \overline{|\eta_1 \eta_2|} \overline{|G_1 G_2|} + 4 d^2 \overline{|\eta_1 G_2|^2} \} : \phi(x_1) \phi(x_2) :
 \end{aligned}$$

O quarto termo:

$$\begin{aligned}
 & : T (\bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi)_{x_2} : \left| \begin{array}{l} = \\ \sim : \phi_1 \phi_2 : \end{array} \right. \\
 & = : \phi(x_1) \phi(x_2) : g^2 \overline{\bar{\Psi}_a(x_1) \Psi_a(x_1) \bar{\Psi}_b(x_2) \Psi_b(x_2)} = \\
 & = -g^2 : \phi(x_1) \phi(x_2) : \text{Tr} \{ \overline{|\Psi_1 \bar{\Psi}_2|} \overline{|\Psi_2 \bar{\Psi}_1|} \}
 \end{aligned}$$

O resto dos termos não contribui para  $: \phi_1 \phi_2 :$  de modo que temos:

$$\begin{aligned}
 & : T L(x_1) L(x_2) : \left| \begin{array}{l} = \\ \sim : \phi(x_1) \phi(x_2) : \end{array} \right. \\
 & = : \phi(x_1) \phi(x_2) : \{ 4c^2 \overline{|F_1 F_2|} \overline{|\phi_1 \phi_2|} + 4c^2 \overline{|F_1 \phi_2|^2} + 4d^2 \overline{|\eta_1 \eta_2|} \overline{|G_1 G_2|} +
 \end{aligned}$$

$$+ 4d^2 \overline{|\eta_1 G_2|} + 4\tilde{c}^2 \overline{|N_1 N_2|} \overline{|\phi_1 \phi_2|} - g^2 \text{Tr} \{ \overline{|\Psi_1 \bar{\Psi}_2|} \overline{|\Psi_2 \bar{\Psi}_1|} \} \}$$

Os termos proporcionais a  $:\eta(x_1)\eta(x_2):$  são obtidos do mesmo modo:

$$\begin{aligned} & : T ( F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) )_{x_1} ( F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) )_{x_2} \Big|_{\sim:\eta_1\eta_2:} = \\ & = 4 (c')^2 \overline{|F_1 F_2|} \overline{|\eta_1 \eta_2|} : \eta_1 \eta_2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : T ( N ( \underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2 ) )_{x_1} ( N ( \underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2 ) )_{x_2} \Big|_{\sim:\eta_1\eta_2:} = \\ & = 4 (\underline{c}')^2 \overline{|N_1 N_2|} \overline{|\eta_1 \eta_2|} : \eta_1 \eta_2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : T d^2 2 ( G \phi \eta )_{x_1} 2 ( G \phi \eta )_{x_2} : \Big|_{\sim:\eta_1\eta_2:} = \\ & = 4 d^2 \overline{|G_1 G_2|} \overline{|\phi_1 \phi_2|} : \eta_1 \eta_2 : \end{aligned}$$

$$: T ( \bar{\Psi} ( g \phi - g' \gamma_5 \eta ) \Psi )_{x_1} ( \bar{\Psi} ( g \phi - g' \gamma_5 \eta ) \Psi )_{x_2} : \Big|_{\sim:\eta_1\eta_2:} =$$

$$= (g')^2 \overline{\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_1} \overline{\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_2} : \eta_1 \eta_2 : =$$

$$= - (g')^2 \text{Tr} \{ \overline{|\Psi_2 \bar{\Psi}_1|} \gamma_5 \overline{|\Psi_1 \bar{\Psi}_2|} \gamma_5 \} : \eta_1 \eta_2 :$$

Por último, um dos termos cruzados também contribui:

$$\begin{aligned}
 & : 4T ( F ( c \phi^2 + c'\eta^2 ) )_{x_1} ( d G \phi \eta )_{x_2} : \Bigg|_{\sim : \eta_1 \eta_2 :} = \\
 & = 8 c' d \overline{|F_1 \phi_2|} \overline{|\eta_1 G_2|} : \eta_1 \eta_2 : \cdot
 \end{aligned}$$

Juntando todos estes resultados, temos:

$$\begin{aligned}
 & : T L(x_1) L(x_2) : \Bigg|_{\sim : \eta_1 \eta_2 :} = \\
 & = : \eta(x_1) \eta(x_2) : \{ 4 (c')^2 \overline{|F_1 F_2|} \overline{|\eta_1 \eta_2|} + 4 d^2 \overline{|G_1 G_2|} \overline{|\phi_1 \phi_2|} + \\
 & + 8 c' d \overline{|F_1 \phi_2|} \overline{|\eta_1 G_2|} + 4 (c')^2 \overline{|N_1 N_2|} \overline{|\eta_1 \eta_2|} - \\
 & - (g')^2 \text{Tr} \{ \overline{|\Psi_2 \bar{\Psi}_1|} \gamma_5 \overline{|\Psi_1 \bar{\Psi}_2|} \gamma_5 \} \}
 \end{aligned}$$

A parcela proporcional a  $: F_1 F_2 :$  obtem-se de:

$$: T ( F \{ \underline{c} \phi^2 + \underline{c}' \eta^2 \} )_{x_1} ( F \{ c \phi^2 + c' \eta^2 \} )_{x_2} : \Bigg|_{\sim : F_1 F_2 :} =$$



$$= : F_1 \phi_2 : \{ 8 c^2 \overline{|\phi_1 \phi_2|} \overline{|\phi_1 F_2|} + 8 c' d \overline{|\eta_1 \eta_2|} \overline{|\eta_1 G_2|} \} .$$

Para :  $G_1 \eta_2$  : temos:

$$: T \{ 4d^2 (\phi \eta G)_{x_1} (\phi \eta G)_{x_2} + 4 (F (c \phi^2 + c' \eta^2))_{x_1} (d G \phi \eta)_{x_2} \} : \left. \begin{array}{l} = \\ :G_1 \eta_2: \end{array} \right|$$

$$= : G_1 \eta_2 : \{ 8 d^2 \overline{|\phi_1 \phi_2|} \overline{|\eta_1 G_2|} + 8 c' d \overline{|\eta_1 \eta_2|} \overline{|\phi_1 F_2|} \} .$$

Para :  $\phi_1 N_2$  : temos:

$$: T \{ 2 (N (c \phi^2 + c' \eta^2))_{x_1} \{ 2 (d G \phi \eta)_{x_2} + (F (c \phi^2 + c' \eta^2))_{x_2} \} \} : \left. \begin{array}{l} = \\ :N_1 \phi_2: \end{array} \right|$$

$$= : N_1 \phi_2 : \{ 8 c' d \overline{|\eta_1 \eta_2|} \overline{|\eta_1 G_2|} + 8 c c \overline{|\phi_1 F_2|} \overline{|\phi_1 \phi_2|} \}$$

Finalmente, para : FN : temos:

$$: 2 T (F (c \phi^2 + c' \eta^2))_{x_1} (N (c \phi^2 + c' \eta^2))_{x_2} : \left. \begin{array}{l} = \\ :F_1 N_2: \end{array} \right|$$

$$= 4 : F(x_1) N(x_2) : \{ c c \overline{|\phi_1 \phi_2|}^2 + c' c' \overline{|\eta_1 \eta_2|}^2 \} .$$





$$\begin{aligned}
 + : N(x_1) \phi(x_2) & : \{ 8c'd[\overline{\eta_1\eta_2}][\overline{\eta_1G_2}] + 8cc[\overline{\phi_1F_2}][\overline{\phi_1\phi_2}] \} + \\
 + : G(x_1) \eta(x_2) & : \{ 8d^2[\overline{\phi_1\phi_2}][\overline{\eta_1G_2}] + 8c'd[\overline{\eta_1\eta_2}][\overline{\phi_1F_2}] \} + \\
 + : F(x_1) N(x_2) & : \{ 4cc[\overline{\phi_1\phi_2}]^2 + 4c'c'[\overline{\eta_1\eta_2}]^2 \} \quad ( 20 )
 \end{aligned}$$

Trata-se agora do cálculo da parte infinita de todos os produtos de propagadores que aparecem neste resultado. Por um problema de ordem na exposição e para evitar dispersar o assunto com folhas de cálculo, o cálculo do produto dos propagadores, é feito no Apêndice "B", utilizando as integrais calculadas no Apêndice "A", ( as quais por sua vez constituem o formulário construído no Apêndice "A".) .

Deste modo, basta dizer que a parte infinita dos produtos de propagadores, por ordem de aparição, é dada pelos resultados 1<->26, calculados no apêndice "B".

$$: \left[ L(x_1) L(x_2) \right] \begin{array}{l} \text{parte infinita} \\ \text{proporcional a } A(x_1) A(x_2) \end{array} : =$$

$$= : \{ \bar{\Psi}^a(x_1) \Psi^b(x_2) : \{ g^2 [i\not{x} - 2M]^{ab} + g'^2 [i\not{x} + 2M]^{ab} \} +$$

$$+ : \phi(x_1) \phi(x_2) : \{ -16c^2m_1^2 - 8c^2m_1^2 - 16d^2m_2^2 - 8d^2m_2^2 + 8c^2m_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & - 4g^2 \square_{x_2} + 24g^2 M^2 \} + : \eta(x_1) \eta(x_2) : \{ - 8c'^2 m_1^2 - 8c'^2 m_2^2 - \\
 & - 8d^2 m_1^2 - 8d^2 m_2^2 - 16c'dm_1 m_2 + 8c'^2 m_2^2 - 4g'^2 \square_{x_2} + 8g'^2 M^2 \} + \\
 & + : F(x_1) F(x_2) : \{ -4c^2 - 4c'^2 \} + : N(x_1) N(x_2) : \{ -4c^2 - \\
 & - 4c'^2 \} + : G(x_1) G(x_2) : \{ - 8d^2 \} + : F(x_1) \phi(x_2) : \{ 16c^2 m_1 + \\
 & + 16c'dm_2 \} + : N(x_1) \phi(x_2) : \{ - 16cgm_1 - 16 c'dm_2 \} + \\
 & + G(x_2) \eta(x_2) : \{ + 16d^2 m_2 + 16c'dm_1 \} + : F(x_1) N(x_2) : \{ - 8cg - \\
 & - 8c'c' \} \} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon} \delta(x_1 - x_2) \quad \epsilon = 4 - D \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

## 1.2 - CONDIÇÕES PARA AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO INFINITA ÀS MASSAS

Procuraremos primeiro as condições para a ausência de renormalização infinita às massas. De acordo com toda a teoria exposta, segue-se que as condições procuradas, são aquelas que anulam todas as chaves {...} da expressão 21, a menos dos termos:

$$\begin{aligned}
 & \{ : F(x_1) F(x_2) : ( - 4 c^2 - 4 (c')^2 ) + \\
 & : N(x_1) N(x_2) : ( - 4 \underline{c}^2 - 4 (\underline{c}')^2 ) + \\
 & : G(x_1) G(x_2) : ( - 8 d^2 ) + \\
 & : \bar{\Psi}_a(x_1) \Psi_b(x_2) : ( g^2 + (g')^2 ) i \gamma^{ab} + \\
 & : \phi(x_1) \phi(x_2) : ( - 4 g^2 \square_{x_2} ) + \\
 & : \eta(x_1) \eta(x_2) : ( - 4 (g')^2 \square_{x_2} ) \} \frac{i \pi^2}{(2 \pi)^4 \epsilon} \delta(x_1 - x_2) \quad (22)
 \end{aligned}$$

Os quais contribuem somente à renormalização da norma dos campos.

Assim, a ausência de renormalização à massa, implica na solução algébrica do seguinte sistema de equações:

$$\Psi \rightarrow g^2 - g'^2 = 0 \quad (23)$$

$$\phi \rightarrow m_1^2 [ 3 c^2 - \underline{c}^2 ] + m_2^2 [ 3 d^2 - M^2 ] - 3 g^2 = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \eta \rightarrow m_1^2 [ c'^2 + d^2 ] + m_2^2 [ c'^2 + d^2 - \underline{c}'^2 ] + m_1 m_2 [ 2 c' d - \\
 - M^2 ] - g'^2 = 0 \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\phi F \rightarrow m_1 c^2 + m_2 c' d = 0 \quad (26)$$

$$\phi N \rightarrow m_1 c \underline{c} + m_2 \underline{c}' d = 0 \quad (27)$$

$$\eta G \rightarrow m_1 c' d + m_2 d^2 = 0 \quad (28)$$

A solução destas equações ainda é sujeita à condição de ausência de contratermo proporcional a : FN :, ou seja, que deve respeitar:

$$FN \rightarrow c\bar{c} + c'c' = 0 \quad (29)$$

Não é difícil ver que esta condição é incompatível; isto é: não há condição de satisfazer as equações (23-28) e simultaneamente, a condição (29) .

$$\text{De fato, de } \frac{(27)}{(28)} : \frac{c}{c'} = \frac{c'}{c} = c\bar{c} = c'c'$$

enquanto que de (29):  $c\bar{c} = -c'c'$

donde  $c\bar{c} = 0$ . Com três soluções possíveis:

$$1^a) c = 0 \quad 2^a) \bar{c} = 0 \quad 3^a) c = \bar{c} = 0$$

A terceira elimina quase todo o problema. (reduz significativamente o modelo de modo que não a levamos em conta; o mesmo ocorrendo com a solução  $c = 0$ .) .

A segunda,  $\bar{c} = 0$ , é a solução de interesse dentro da "ideia" da tese, já que ela é a solução que estabelece um primeiro vínculo entre as constantes .

Em outras palavras, a ausência de renormalização à massa, impõe  $\bar{c} = c' = 0$ , elimina o terceiro campo auxiliar, e, então, fixa uma relação entre as constantes de acoplamento.

O Lagrangiano se reduz, então, para:

(30)

$$\begin{aligned}
 L = & \left\{ -\frac{1}{2} \phi \square \phi + m_1 \phi F + \frac{F^2}{2} \right\} + \left\{ -\frac{1}{2} \eta \square \eta + m_2 \eta G + \frac{G^2}{2} \right\} + \\
 & + \bar{\Psi} \{ i \not{\partial} - M \} \Psi + ( \phi^2 c + \eta^2 c' ) F + 2 \phi \eta d G + \\
 & + \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi \quad \cdot \qquad \qquad \qquad ( 30 )
 \end{aligned}$$

$$F = - ( m_1 \phi + c \phi^2 + c' \eta^2 )$$

$$G = - ( m_2 \eta + 2 d \phi \eta )$$

Substituindo F e G por estas expressões em função de  $\phi$  e  $\eta$ , obtem-se:

$$\begin{aligned}
 (31) \quad L = & \frac{1}{2} \phi ( \square - m_1^2 ) \phi + \frac{1}{2} \eta ( \square - m_2^2 ) \eta + \bar{\Psi} ( i \not{\partial} - M ) \Psi - \\
 & - m_1 c \phi^3 - ( m_1 c' + 2 d m_2 ) \phi \eta^2 - \frac{c^2}{2} \phi^4 - \frac{(c')^2}{2} \eta^4 - ( c c' + 2 d^2 ) \phi^2 \eta^2 \cdot
 \end{aligned}$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
 (32) \quad f = & -m_1 c & \lambda = & -\frac{c^2}{2} & \lambda'' = & -(cc' + 2d^2) \\
 f' = & -m_1 c' - 2m_2 d & \lambda' = & -\frac{c'^2}{2}
 \end{aligned}$$

De um lado temos cinco constantes  $f, f', \lambda, \lambda', \lambda''$ . Do outro, somente 3:  $c, c', d$ . Isto significa que, agora, as cinco constantes não são mais independentes. Com efeito, invertendo o sistema:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} c = \pm \sqrt{-2\lambda} \quad c' = \pm \sqrt{-2\lambda'} \quad d = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \{ \pm 2\sqrt{\lambda\lambda'} + \lambda'' \}} \\ \text{mais os vínculos:} \quad d = \\ f = \mp m_1 \sqrt{-2\lambda} \quad f' = \mp ( m_1 \sqrt{-2\lambda'} \pm 2m_2 \sqrt{-\frac{1}{2}(\pm 2\sqrt{\lambda\lambda'} + \lambda'')} ) \end{array} \right.$$

Ou seja,  $f$  e  $f'$  como funções de  $m_1, m_2, \lambda, \lambda', \lambda''$

As equações obtidas impondo ausência de renormalização à massa ficam, agora:

$$g^2 - g'^2 = 0 \quad (35)$$

$$m_1^2 c^2 + m_2^2 d^2 - M^2 g^2 = 0 \quad (36)$$

$$[m_1^2 + m_2^2] [c'^2 + d^2] + 2m_1 m_2 c' d - M^2 g'^2 = 0 \quad (37)$$

$$m_1 c^2 + m_2 c' d = 0 \quad (38)$$

$$m_1 c' + m_2 d = 0 \quad (39)$$

A solução algébrica deste sistema de equações leva à expressão de  $g'$ ;  $c'$ ;  $m_1$ ;  $m_2$  e  $d$  em função de  $M$ ,  $g$ , e  $c$  :

$$g = \pm g' \quad (40)$$

$$\text{De } \frac{(38)}{(39)} \quad c = \pm c' \quad (41)$$

$$\text{De } (39) \quad d = -\frac{m_1}{m_2} c' \quad (42)$$

Substituindo estes resultados em (36) temos:

$$m_1^2 = \frac{g^2 M^2}{2c^2} \quad \text{ou} \quad m_1 = \frac{M}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{g}{c} \right| \quad (43)$$

É interessante notar aqui, que a escolha  $c = \text{real}$  garante a realidade de  $m_1$ . Se escolhessemos  $\lambda$  positivo, então  $c$  seria imaginário puro e a massa do campo  $\phi$  seria imaginária.

Para  $m_2$ , temos de (37):

$$[m_1^2 + m_2^2] \left[ c^2 + \frac{m_1^2}{m_2^2} c^2 \right] - 2c^2 m_1^2 - M^2 g^2 = 0$$

$$\rightarrow [m_2^2]^2 c^2 + m_2^2 [m_1^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2m_1^2 c^2 - M^2 g^2] + m_1^4 c^4 = 0$$

$$[m_2^2]^2 - m_2^2 \frac{M^2 g^2}{c^2} + m_1^4 = 0$$

$$m_2^2 = \frac{M^2 g^2}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{M^4 g^4}{4c^4} - \frac{m_1^4}{4}}$$

$$m_2^2 = \frac{M^2 g^2}{2c^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_1^4 c^4}{M^4 g^4}} \right]$$

Por outro lado, de (43),  $m_1^4 = \frac{g^4 M^4}{4c^4}$

De modo que:

$$m_2^2 = \frac{M^2 g^2}{2c^2} \equiv m_1^2 \quad (44)$$

Em outras palavras, as massas dos campos de spin zero, devem ser iguais.

Por último, isto significa que a constante  $d$  fica:

$$d = -\frac{m_1}{m_2} c' = -c' = -(\pm c) \quad (45)$$

Juntando todos os resultados:

$$\xi = \xi' = 0 \quad (46)$$

$$g' = \pm g \quad (40)$$

$$c' = \pm c \quad (41)$$

$$\bar{d} = -(\pm c) \quad (45)$$

$$(43) = (44) \quad m_1 = m_2 = \frac{M}{\sqrt{2}} \left| \frac{g}{c} \right| \quad (44)$$

Em síntese, dadas três constantes de valor arbitrário  $M$ ,  $g$  e  $c$ , é possível (até este ponto) garantir ausência de renormalização à massa., desde que satisfeitos os resultados acima.

### 1.3 - EXTRAPOLAÇÃO DOS RESULTADOS AO CASO SUPERSIMÉTRICO

Quanto ao modelo W-Z supersimétrico, é possível enquadrá-lo como uma das soluções que satisfazem as relações acima obtidas.

Para verificar isto, é preciso, antes, modificar em parte os cálculos, devido a que no modelo W-Z, o spinor é um spinor de Majorana, o que introduz um fator 2 multiplicativo em todos os traços que envolvem contrações spinoriais da pag. 57, e um fator 4 no produto normal  $\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_2)$  :

Isto é equivalente a fazer  $M^2 \rightarrow 2M^2$  em nossos resultados o que altera somente a relação(44) que passa a ser:

$$(44)_{(W-Z)} = m_1^2 = m_2^2 = \frac{M^2 g^2}{c^2}$$

Uma solução possível consiste em escolher

$$48 \{ g = -c \quad c' = -c \quad g' = +g \quad M = \text{arbitrário} \} (48)$$



Com o que se obtem:

$$\left[ \begin{array}{l} m_1^2 = m_2^2 = M^2 \\ d = -g \end{array} \right] \quad (49)$$

e de (32) :

$$\left[ \begin{array}{l} f = f' = Mg \\ \lambda = \lambda' = \frac{\lambda''}{2} = -\frac{g^2}{2} \end{array} \right] \quad (50)$$

Resultados que coincidem com as relações supersimétricas da pag. 36 .

Assim, mesmo que o nosso modelo não contenha o mesmo tipo de campos que o modelo W-Z, o resultado até aqui obtido enmarca a solução supersimétrica como sendo uma das possíveis soluções capaz de eliminar as correções infinitas à massa dos campos.

## 2. FUNÇÕES DE GREEN DE TRÊS PERNAS

### 2.1 - CÁLCULO DAS CORREÇÕES INFINITAS ATÉ 1 LOOP ÀS FUNÇÕES DE GREEN DE DUAS PERNAS

Trata-se, agora, de calcular as condições para o cancelamento das divergências no terceiro termo da expansão da Matriz S. Em linhas gerais (ver introdução teórica (eq. 7)) este termo escreve-se:

$$S_3 = \frac{i^3}{3!} \int dx_1 dx_2 dx_3 : T L(x_1)L(x_2)L(x_3) - 3i L(x_1) \Lambda_2(x_2; x_3) -$$

$$\begin{aligned}
 & + 3 ( F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) )_{x_1} ( F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) )_{x_2} \{ 2 d ( \phi \eta G ) + \\
 & + \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi \}_{x_3} + 12 d^2 ( \phi \eta G )_{x_1} ( \phi \eta G )_{x_2} \{ F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) + \\
 & + \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi \}_{x_3} + 3 ( \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi )_{x_1} ( \bar{\Psi} ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) )_{x_2} \\
 & \{ F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) + 2 d ( \phi \eta G ) \}_{x_3} + 12 d ( \phi \eta G )_{x_1} \\
 & ( \Psi ( \phi g - g' \gamma_5 \eta ) \Psi )_{x_2} ( F ( c \phi^2 + c' \eta^2 ) )_{x_3} \} . :
 \end{aligned}$$

Quanto à classificação das distintas funções de Green de 3 pontos, temos as seguintes possibilidades de pernas externas:

$$\begin{array}{llll}
 \&: \phi^2 \phi : & \&: \phi \eta \eta : & \dagger: \phi F F : & \dagger: \phi G G : & \varepsilon: \phi \Psi \Psi : \\
 \&: \phi^2 \eta : & *: \phi \eta F : & *: \phi F G : & : \phi G \Psi : & & \\
 \varepsilon: \phi^2 F : & \varepsilon: \phi \eta G : & : \phi F \Psi : & & & & \\
 *: \phi^2 G : & : \phi \eta \Psi : & & & & & \\
 : \phi^2 \Psi : & & & & & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 *: \eta^2 \eta : & *: \eta F F : & *: \eta G G : & \varepsilon: \eta \Psi \Psi : ( \text{contem } \gamma_5 ) \\
 \varepsilon: \eta^2 F : & \dagger: \eta F G : & : \eta G \Psi : & & & \\
 *: \eta^2 G : & : \eta F \Psi : & & & & \\
 : \eta^2 \Psi : & & & & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \dagger: F^2 F : & \dagger: F G G : & \dagger: F \Psi \Psi :
 \end{array}$$

$$* :F^2 G : \quad :FG\Psi :$$

$$: F^2 \Psi :$$

$$*: G^2 G : \quad *:G\Psi\Psi :$$

$$: G^2 \Psi :$$

$$: \Psi^2 \Psi :$$

A existência de infinitos nos termos tipo  $\epsilon$  implicaria no aparecimento de contratermos divergentes, proporcionais aos termos de interação do Lagrangiano. São estes infinitos os que obrigam a renormalizar as constantes de acoplamento de modo que para ter renormalização não divergente nestas constantes, devemos impor o cancelamento das divergências nestas funções.

Os termos do tipo  $*$  não conservam a paridade em processos até 1 Loop e, assim, não precisamos analisá-los.

Os do tipo  $:AB\Psi:$  não existem pois tem uma única perna externa spinorial.

Os do tipo  $\dagger$  não contem parte divergente pois as três linhas internas do Loop, contem unicamente propagadores do tipo:  $\phi$ ,  $\eta$ ,  $\phi_F$ ,  $\eta_G$ ,  $\Psi$  com o que a integral correspondente é finita (como discutiremos mais a frente)

Finalmente restam as funções do tipo  $\&$  das quais existem somente duas:  $:\phi^2\phi:$  e  $:\phi\eta^2:$

Os infinitos nestas funções não estão ligados diretamente à renormalização das constantes de acoplamento "auxiliares" (conjunto  $c, c', d$ ) mas sim das constantes físicas  $f, f', \lambda, \lambda', \lambda''$ .

Já que a presença de contratermos infinitos proporcionais a  $\phi^3$  ou  $\phi \eta^2$  obrigaria a renormalização das constantes  $f$  e  $f'$ , de modo que também nestas funções, deve-se pedir o cancelamento das divergências.

Trata-se, agora, de calcular as correções de 1 Loop as funções de Green acima selecionadas. Para isto, basta tomar os termos que dão correções próprias aos vértices sem considerar as correções às linhas constituintes.

Como foi mencionado, um dado a ser levado em conta é que todos os Loops cujas linhas internas são do tipo  $\phi\phi$ ,  $\eta\eta$ ,  $F\phi$ ,  $G\eta$ , não dão contribuições divergentes pois a integral:

$$I = \int \frac{d^D p}{p} \frac{1}{[m^2 - p^2] [m^2 - (p+k)^2] [m^2 - (p+k+q)^2]}$$

é convergente (como é mostrado no formulário, fórmula 16).

Assim, começando pela correção aos vértices bosônicos, temos:

$$:L(x_1) L(x_2) L(x_3) : \left| \begin{array}{l} \\ \text{correções próprias aos} \\ \text{vértices bosônicos} \end{array} \right. =$$

$$\begin{aligned} = & : F(x_3) \phi(x_1) \phi(x_2) : \{ c^3 3.8 [\overline{\phi_2 \phi_3}] [\overline{\phi_3 \phi_1}] [\overline{F_1 F_2}] + d^2 . 2.12 . c' \\ & [\overline{\eta_3 \eta_2}] [\overline{\eta_1 \eta_3}] [\overline{G_2 G_1}] \} + : F(x_3) \eta(x_2) \eta(x_1) : \{ (c')^3 3.8 . [\overline{\eta_3 \eta_2}] \\ & [\overline{\eta_1 \eta_3}] [\overline{F_2 F_1}] + c d^2 . 2.12 [\overline{\phi_3 \phi_2}] [\overline{\phi_1 \phi_3}] [\overline{G_2 G_1}] \} + : \phi(x_1) \eta(x_2) G(x_3) : \\ & \{ d^3 . 3.8 [\overline{\eta_1 \eta_3}] [\overline{\phi_2 \phi_3}] [\overline{G_1 G_2}] + c c' d . 4.6 [\overline{\phi_1 \phi_3}] [\overline{\eta_2 \eta_3}] [\overline{F_1 F_2}] \} + : \phi(x_1) \\ & \phi(x_2) \phi(x_3) : \{ - g^3 . 2 [\overline{\psi_1^a \psi_2^b}] [\overline{\psi_2^b \psi_3^c}] [\overline{\psi_3^c \psi_1^a}] + c^3 . 3.16 [\overline{F_1 F_2}] [\overline{\phi_2 F_3}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\overline{\phi_3 \phi_1}] + 8 d^3 \cdot 3 \cdot 2 [\overline{G_1 G_2}] [\overline{n_2 G_3}] [\overline{n_3 n_1}] \} + : n(x_1) \phi(x_2) n(x_3) : \\
 & \{ 3c(c')^2 \cdot 2 \cdot 8 [\overline{F_1 F_2}] [\overline{\phi_2 F_3}] [\overline{n_3 n_1}] + 3 \cdot 2 \cdot 8 d^3 [\overline{G_1 G_2}] [\overline{n_2 G_3}] [\overline{\phi_3 \phi_1}] + \\
 & + 3 \cdot 2 \cdot 8 d(c')^2 [\overline{n_1 n_2}] [\overline{G_2 n_3}] [\overline{F_1 F_3}] + 6 \cdot 2 \cdot 4 d c c' [\overline{F_1 F_2}] [\overline{\phi_2 \phi_3}] [\overline{G_3 n_1}] \\
 & + 3 \cdot 4 \cdot 4 d^2 c [\overline{\phi_1 \phi_1}] [\overline{F_2 \phi_3}] [\overline{G_3 G_1}] + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 d^2 c' [\overline{G_1 G_2}] [\overline{n_2 n_3}] [\overline{F_3 \phi_1}] + \\
 & + 3 g'{}^2 g \cdot \left( \overline{\psi_1 \gamma_5} \overline{a}^{ab} \overline{\psi_1 \psi_2} \overline{b}^{bc} \overline{\psi_2 \psi_3} \overline{c}^{cd} \overline{\psi_3 \gamma_5} \overline{d}^{de} \overline{\psi_3}^e + \overline{\psi_1 \gamma_5} \overline{a}^{ab} \overline{\psi_1 \psi_2} \overline{b}^{bc} \overline{\psi_2 \psi_3} \overline{c}^{cd} \overline{\psi_3 \gamma_5} \overline{d}^{de} \overline{\psi_3}^e \right) \}
 \end{aligned}$$

No final desta expressão aparecem dois termos spinoriais, os quais é conveniente reescrevê-los.

Começando pelo Primeiro, temos:

$$\begin{aligned}
 \overline{1er)} &= \overline{\psi_1}^a \gamma_5^{ab} \overline{\psi_1}^b \overline{\psi_2}^c \overline{\psi_2}^c \overline{\psi_3}^d \gamma_5^{de} \overline{\psi_3}^e = \\
 &= \overline{\psi_1}^a \overline{\psi_3}^e \overline{\psi_1}^b \overline{\psi_2}^c \overline{\psi_2}^c \overline{\psi_3}^d \gamma_5^{ab} \gamma_5^{de} = \\
 &= - |\overline{\psi_3}^e \overline{\psi_1}^a| \gamma_5^{ab} |\overline{\psi_1}^b \overline{\psi_2}^c| |\overline{\psi_2}^c \overline{\psi_3}^d| \gamma_5^{de} = \\
 &= \gamma_5^{ea} |\overline{\psi_3}^a \overline{\psi_1}^b|_* |\overline{\psi_1}^b \overline{\psi_2}^c| |\overline{\psi_2}^c \overline{\psi_3}^d| \gamma_5^{de} .
 \end{aligned}$$

Onde  $[\overline{\psi_3}^a \overline{\psi_1}^b]_*$  é o propagador com a massa M com sinal trocado. Por outro lado,

$$\gamma_5^{ea} \gamma_5^{de} = -\delta^{ad} .$$

$$\Rightarrow = - [\overbrace{\Psi_3^a \bar{\Psi}_1^b}]_* [\overbrace{\Psi_1^b \bar{\Psi}_2^c}] [\overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_3^a}]$$

Para o segundo, temos:

$$\begin{aligned} 2^{do}) &= \overbrace{\Psi_1^a} \gamma_5^{ab} \overbrace{\Psi_1^b \bar{\Psi}_2^c} \overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_3^d} \gamma_5^{de} \overbrace{\Psi_3^e} = \\ &= - \left| \overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_1^a} \right| \gamma_5^{ab} \left| \overbrace{\Psi_1^b \bar{\Psi}_3^d} \right| \gamma_5^{de} \left| \overbrace{\Psi_3^e \bar{\Psi}_2^c} \right| = \\ &= \left| \overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_1^a} \right| \gamma_5^{ab} \gamma_5^{bd} \left| \overbrace{\Psi_1^d \bar{\Psi}_3^e} \right|_* \left| \overbrace{\Psi_3^e \bar{\Psi}_2^c} \right| = \\ &= - \left| \overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_1^a} \right| \left| \overbrace{\Psi_1^a \bar{\Psi}_3^e} \right|_* \left| \overbrace{\Psi_3^e \bar{\Psi}_2^c} \right| . \end{aligned}$$

Trocando as variáveis de integração  $x_1 \leftrightarrow x_3$  e, permutando ciclicamente dentro do trazo, temos:

$$= - [\overbrace{\Psi_3^a \bar{\Psi}_1^e}]_* [\overbrace{\Psi_1^e \bar{\Psi}_2^c}] [\overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_3^a}]$$

Ou seja, que os dois termos spinoriais são iguais, o que permite reescrevê-los como:

$$1a) + 2a) = - 2 [\overbrace{\Psi_3^a \bar{\Psi}_1^e}]_* [\overbrace{\Psi_1^e \bar{\Psi}_2^c}] [\overbrace{\Psi_2^c \bar{\Psi}_3^a}]$$

Enfim, do mesmo modo que nas correções de 1 Loop as funções de Green de 2 pontos, deixamos o cálculo de cada integral no apêndice para evitar dispersar o tema, e escrevemos diretamente os resultados por ordem de aparição em (51), retendo somente a parte divergente de cada integral:

$$\begin{aligned}
 (52) = & L(x_1) L(x_2) L(x_3) \left| \begin{array}{l} \text{correções próprias aos vértices} \\ \text{bosônicos; parte divergente.} \end{array} \right. = \\
 = & : F(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) : \left\{ + 24 c^3 \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon} \delta(x_2-x_1) \delta(x_3-x_1) + \right. \\
 & \left. + 24 c' d^2 \alpha \right\} + : F(x_1) \eta(x_2) \eta(x_3) : \left\{ + (c')^3 + cd^2 \right\} 24\alpha + : \phi(x_1) \\
 & \eta(x_2) G(x_3) : \left\{ + d^3 + cc'd \right\} 24\alpha + : \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) : \left\{ -g^3 M - \right. \\
 & - 2c^3 m_1 - 2d^3 m_2 \left. \right\} 24\alpha + : \eta(x_1) \phi(x_2) \eta(x_3) : \left\{ -2c(c')^2 m_1 - \right. \\
 & - 2d^3 m_2 - 2d(c')^2 m_2 - 2dcc' m_2 - 2d^2 c m_1 - 2d^2 c' m_1 - (g')^2 g M \left. \right\} . 24\alpha.
 \end{aligned}$$

( 52 )

Para os vértices fermiônicos, devemos considerar que todos os loops cujas três linhas internas são do tipo  $\overline{\psi}\psi$ ,  $\overline{\eta}\eta$ ,  $\overline{F}\phi$ ,  $\overline{G}\eta$ ,  $\overline{\Psi}\Psi$  não dão contribuições divergentes pois além de I 16) ser convergente, a integral

$$\text{I 24) } \int d^D p \frac{p^\mu}{[m_1^2 - p^2][m_2^2 - (p+k)^2][M^2 - (p+k+q)^2]}$$

do formulário

também é convergente. Assim, restam somente os seguintes termos:

$$L(x_1) L(x_2) L(x_3) \left| \begin{array}{l} \text{correções divergentes próprias} \\ \text{aos vértices fermiônicos} \end{array} \right. =$$

=

$$\begin{aligned}
 &= : \{ 3g^3 \cdot \overbrace{(\overline{\Psi}_1^a \phi_1 \overline{\Psi}_1^a)} \overbrace{(\overline{\Psi}_2^b \phi_2 \overline{\Psi}_2^b)} \overbrace{(\overline{\Psi}_3^c \phi_3 \overline{\Psi}_3^c)} \} + \\
 &+ 3g(g')^3 \overbrace{(\overline{\Psi}_1^a \eta_1 (\gamma_5 \Psi)_1^a)} \overbrace{(\overline{\Psi}_2^b \phi_2 \overline{\Psi}_2^b)} \overbrace{(\overline{\Psi}_3^c \eta_3 (\gamma_5 \Psi)_3^c)} + \\
 &- 3(g')^3 \overbrace{(\overline{\Psi}_1^a \eta_1 (\gamma_5 \Psi)_1^a)} \overbrace{(\overline{\Psi}_2^b \eta_2 (\gamma_5 \Psi)_2^b)} \overbrace{(\overline{\Psi}_3^c \eta_3 (\gamma_5 \Psi)_3^c)} - \\
 &- 3g'g^2 \overbrace{(\overline{\Psi}_1^a \phi_1 \overline{\Psi}_1^a)} \overbrace{(\overline{\Psi}_2^b \eta_2 (\gamma_5 \Psi)_2^b)} \overbrace{(\overline{\Psi}_3^c \phi_3 \overline{\Psi}_3^c)} \quad . \quad (53)
 \end{aligned}$$

O primeiro termo se reordena:

1º

$$= 3 : \overline{\Psi}^a(x_1) \phi(x_2) \overline{\Psi}^c(x_3) : \{ g^3 \overbrace{|\Psi_1 \overline{\Psi}_2|}^a \overbrace{|\Psi_2 \overline{\Psi}_3|}^b \overbrace{|\phi_1 \phi_2|}^c \}$$



O segundo:

$$\begin{aligned}
 2\varphi &= 3 : \bar{\Psi}^a(x_1) \phi(x_2) \Psi^c(x_3) : \{ g(g')^2 \cdot \gamma_5^{an} [\overline{\Psi^n(x_1) \Psi^b(x_2)}] [\overline{\Psi^b(x_2) \Psi^m(x_3)}] \gamma_5^{mc} [\overline{\eta(x_1) \eta(x_2)}] \} = -3g(g')^2 : \Psi^a(x_1) \phi(x_2) \Psi^c(x_3) : \\
 &: \{ [\overline{\Psi^a(x_1) \Psi^m(x_2)}]_* [\overline{\Psi^m(x_2) \Psi^c(x_3)}]_* [\overline{\eta(x_1) \eta(x_2)}] \} .
 \end{aligned}$$

O terceiro:

$$\begin{aligned}
 3\varphi &= \\
 &= 3(g')^3 : \bar{\Psi}_1^a \eta_2 \Psi_3^c : \{ \gamma_5^{am} \gamma_5^{mb} | \overline{\Psi_1^b \Psi_2^n} |_* | \overline{\Psi_2^n \Psi_3^j} | | \eta_1 \eta_3 | \gamma_5^{jc} \} \\
 &= -3(g')^3 : \bar{\Psi}_1^a \eta_2 \gamma_5^{jc} \Psi_3^c : \{ | \overline{\Psi_1^a \Psi_2^n} |_* | \overline{\Psi_2^n \Psi_3^j} | | \eta_1 \eta_3 | \} .
 \end{aligned}$$

O quarto:

$$\begin{aligned}
 4\varphi &= \\
 &= -3g'g^2 : \bar{\Psi}_1^a \eta_2 \Psi_3^c : \{ | \overline{\Psi_1^a \Psi_2^n} | \gamma_5^{nj} | \overline{\Psi_2^j \Psi_3^c} | | \phi_1 \phi_3 | \} \\
 &= 3g'g^2 : \bar{\Psi}_1^a \eta_2 \gamma_5^{jc} \Psi_3^c : \{ | \overline{\Psi_1^a \Psi_2^n} | | \overline{\Psi_2^n \Psi_3^j} |_* | \phi_1 \phi_3 | \} .
 \end{aligned}$$

Juntando estes resultados parciais:

$$\begin{aligned}
 (54): L(x_1) L(x_2) L(x_3) : & \left| \begin{array}{l} \text{correções divergentes próprias} \\ \text{aos vértices fermiônicos} \end{array} \right. = \\
 &= 3 : \bar{\Psi}_1^a \phi_2 \Psi_3^c : \{ g^3 | \overline{\Psi_1^a \Psi_2^b} | | \overline{\Psi_2^b \Psi_3^c} | | \phi_1 \phi_3 | -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -g(g')^2 \left| \bar{\psi}_1^a \bar{\psi}_2^m \right|_* \left| \psi_2^m \bar{\psi}_3^c \right|_* \left| \eta_1 \eta_3 \right| \} + \\
 & + 3 : \bar{\psi}_1^a \eta_2 \gamma_5^{jc} \psi_3^c : \{ g' g^2 \left| \bar{\psi}_1^a \bar{\psi}_2^n \right| \left| \psi_2^n \bar{\psi}_3^j \right|_* \left| \phi_1 \phi_3 \right| - \\
 & - (g')^3 \left| \bar{\psi}_1^a \bar{\psi}_2^n \right|_* \left| \psi_2^n \bar{\psi}_3^j \right| \left| \eta_1 \eta_3 \right| \} . \tag{54}
 \end{aligned}$$

Novamente, deixando o cálculo das integrais no apêndice, colocamos diretamente o resultado:

$$\begin{aligned}
 (54) & = (55) = \\
 & = 3 : \bar{\psi}_1^a \phi_2 \psi_3^c : \{ g^3 \alpha^\delta{}^{ac} - g (g')^2 \alpha^\delta{}^{ac} \} + \\
 & + 3 : \bar{\psi}_1^a \eta_2 \gamma_5^{jc} \psi_3^c : \{ g' g^2 \alpha^\delta{}^{aj} - (g')^3 \alpha^\delta{}^{aj} \} .
 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 & = 3 : \bar{\psi}_1^a \phi_2 \psi_3^a : \alpha \{ g^3 - g (g')^2 \} + \\
 & + 3 : \bar{\psi}_1^a \eta_2 \gamma_5^{ac} \psi_3^c : \alpha \{ g' g^2 - (g')^3 \} .
 \end{aligned}$$

Assim, somando este resultado ao resultado obtido na parte bosônica, eq. (52), temos finalmente:

$$\begin{array}{l}
 L(x_1) \quad L(x_2) \quad L(x_3) \\
 \left| \right. \\
 \left. \right. \text{parte divergente das correções} \\
 \left. \right. \text{a todos os vértices}
 \end{array} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \alpha \{ 8 : F(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : [c^3 + c'd^2] + 8 : F(x_1)\eta(x_2)\eta(x_3) : \\
 &[(c')^3 + cd^2] + 8 : \phi(x_1)\eta(x_2)G(x_3) : [d^3 + cc'd] + 8 : \phi(x_1) \\
 &\phi(x_2)\phi(x_3) : [-g^3M - 2c^3m_1 - 2d^3m_2] + 8 : \eta(x_1)\phi(x_2)\eta(x_3) : \\
 &: [-2c(c')^2m_1 - 2d^3m_2 - 2d(c')^2m_2 - 2dcc'm_2 - 2d^2cm_1 - 2d^2c'm_1 - \\
 &-(g')^2gM] + : \bar{\Psi}^a(x_1)\phi(x_2)\Psi^a(x_3) : [g^3 - g(g')^2] + : \Psi^a(x_1)\eta(x_2) \\
 &\gamma_5^{ac}\Psi^c(x_3) : [g'g^2 - (g')^3] \} . \quad (56)
 \end{aligned}$$

## 2.2 - CONDIÇÕES PARA AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO INFINITA ÀS CONSTANTES DE ACOPLAMENTO

que a ausência de renormalização infinita as constantes de acoplamento implica na anulação simultânea de todos os colchetes (...) da expressão acima. Por outro lado, esta anulação deve respeitar as relações obtidas para a ausência de renormalização às massas dos campos. Isto é, devemos ter:

$$c^3 + c'd^2 = 0 \quad (57)$$

$$(c')^3 + cd^2 = 0 \quad (58)$$

$$d^3 + cc'd = 0 \quad (59)$$

$$g^3M + 2c^3m_1 + 2d^3m_2 = 0 \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
 &c(c')^2m_1 + d^3m_2 + d(c')^2m_2 + dcc'm_2 + d_2cm_1 + d^2c'm_1 + \\
 &+ (g')^2 \frac{g}{2}M = 0 \quad (61)
 \end{aligned}$$

$$g^3 - g(g')^2 = 0 \quad (62)$$

$$g'g^2 - (g')^3 = 0 \quad (63)$$

Vemos assim, que a ausência de renormalização às constantes de acoplamento levou a mais duas relações. Por um lado a determinação do sinal de  $c'$  e, por outro lado, uma relação entre as constantes  $c$  e  $g$ .

### 2.3 - RENORMALIZAÇÃO À NORMA DOS CAMPOS

Resta tratar a renormalização infinita à norma dos campos, problema que foi deixado para o final, em virtude de seu significado físico relativo, se comparado com as massas dos campos e as constantes de acoplamento. (De fato a questão da norma poderia ter sido tratada juntamente com a questão das massas).

Esta renormalização tem origem na presença de termos diferentes de zero na parte infinita de  $:L(x_1) L(x_2):$ ,

Tomando o resultado (22) e introduzindo as relações obtidas por ausência de renormalização às massas e constantes de acoplamento, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & :L(x_1) L(x_2): \Big|_{\text{parte infinita}} = \\
 & = \{ : \bar{\Psi}^a(x_1) \Psi^b(x_2) : (g^2 + g'^2) \cdot i \not{\partial}_x^{ab} + : \phi(x_1) \phi(x_2) : (-4g^2) \square_x + \\
 & + : \eta(x_1) \eta(x_2) : (-4(g')^2) \square_x + : F(x_1) F(x_2) : (-4c^2 - 4(c')^2) + \\
 & : G(x_1) G(x_2) : (-8d^2) \} \cdot \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon} \delta(x_1 - x_2) \\
 & = \{ : \bar{\Psi}^a(x_1) \Psi^b(x_2) : \frac{-8c|c|}{\sqrt{2}} i \not{\partial}_x^{ab} + : \phi(x_1) \phi(x_2) : + \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} \square_x + \\
 & + : \eta(x_1) \eta(x_2) : \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} \square_x + : F(x_1) F(x_2) : (-8c^2) + \\
 & G(x_1) G(x_2) : (-8c^2) \} \cdot \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon} \delta(x_1 - x_2) \quad (66)
 \end{aligned}$$

De acordo com a teoria exposta, esta expressão é igual a  $i\Lambda_2(x_1x_2)$  onde  $\Lambda_2(x_1x_2)$  é o operador quase-local cuja integral dá os contratermos a serem somados ao Lagrangiano.

Assim,

$$\begin{aligned}
 (67) \quad L_{(q-l)}(x_1) &= \frac{1}{2} \int dx_2 \Lambda_2(x_1x_2) \\
 &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon} \frac{1}{2} \left\{ \int dx_2 : \bar{\psi}_1^a \psi_2^b : \frac{-8c|c|}{2} i \not{x}_2^{ab} \delta(x_1 - x_2) \right. \\
 &+ \int dx_2 : \phi(x_1) \phi(x_2) : \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} \square_{x_2} \delta(x_1 - x_2) \\
 &+ \int dx_2 : \eta(x_1) \eta(x_2) : \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} \square_{x_2} \delta(x_1 - x_2) \\
 &+ \left. \int dx_2 : (F(x_1) F(x_2) + G(x_1) G(x_2)) : (-8c^2) \delta(x_1 - x_2) \right\} \\
 &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4 2} \left\{ \frac{8c|c|}{\sqrt{2}} : \bar{\psi}(x_1) i \not{x} \psi(x_1) : + \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} : \phi(x_1) \square \phi(x_1) : \right. \\
 &+ \left. \frac{16c|c|}{\sqrt{2}} : \eta(x_1) \square \eta(x_1) : - 8c^2 : (F(x_1) F(x_1) + G(x_1) G(x_1)) : \right\} .
 \end{aligned}$$

Somando  $L_{(q-l)}(x)$  ao Lagrangiano dos campos livres

$L_0(x)$ , temos:

$$L_0(x) + L_{(q-l)}(x) = L_0^R$$

$$\begin{aligned}
 L_0^R &= \left\{ \left( 1 + \frac{c|c|}{\pi^2 \sqrt{2} \epsilon} \right) \frac{1}{2} : \phi \square \phi : + m_1 : \phi F : + \left( 1 - \frac{c^2}{2 \pi^2 \epsilon} \right) \frac{1}{2} F^2 \right\} + \\
 &+ \left\{ \left( 1 + \frac{c|c|}{\pi^2 \sqrt{2} \epsilon} \right) \frac{1}{2} : \eta \square \eta : + m_2 : \eta G : + \left( 1 - \frac{c^2}{2 \pi^2 \epsilon} \right) \frac{1}{2} G^2 \right\} + \\
 &+ \left\{ \left( 1 + \frac{c|c|}{(2\pi)^2 \sqrt{2} \epsilon} \right) : \bar{\psi} i \not{x} \psi : - M : \bar{\psi} \psi : \right\} .
 \end{aligned}$$

Chamando

$$(69) \quad r^2 = 1 + \frac{c|c|}{\pi^2 \sqrt{2\epsilon}} \quad s^2 = 1 - \frac{c^2}{2\pi^2 \epsilon} \quad t^2 = 1 + \frac{c|c|}{(2\pi)^2 \sqrt{2\epsilon}}$$

e redefinindo a norma dos campos de acordo com:

$$(70) \quad \begin{array}{lll} \phi' = r & \eta' = r\eta & \Psi' = t\Psi \\ F' = sF & G' = sG & \end{array}$$

e as massas:

$$(71) \quad (m'_1) = \frac{m_1}{rs} \quad (m'_2) = \frac{m_2}{rs} \quad M' = \frac{M}{t}$$

obtemos o Lagrangiano com a norma dos campos renormalizada:

$$\begin{aligned} L_0^R = & \left\{ \frac{1}{2} : \phi' \square \phi' : + m'_1 : \phi' F' : + \frac{(F')^2}{2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} : \eta' \square \eta' : + \right. \\ & \left. + m'_2 : \eta' G' : + \frac{(G')^2}{2} \right\} + \left\{ \Psi' [i\cancel{\partial} - M'] \Psi' \right\} \end{aligned}$$

## CAPITULO 4

### CONCLUSÃO

Como conclusão principal deste trabalho, poderíamos dizer que, pelo menos até um loop, é possível construir um modelo físico onde aparecem setores bosônicos e fermiônicos simultaneamente (sem ser um modelo supersimétrico) o qual tem propriedades de renormalização equivalentes a um modelo supersimétrico.

Este fato é interessante por várias razões. Em primeiro lugar, porque abre caminho numa direção ainda não "trilhada" a respeito de modelos com ausência de divergências (as quais desde o nascimento da Teoria Quântica de Campos, tem sido um dos obstáculos no desenvolvimento da teoria). Em segundo lugar porque, sem alterar as propriedades de renormalização, dá uma liberdade na escolha dos campos integrantes do sistema que não existe nos modelos supersimétricos. De fato, nestes modelos, os campos que aparecem formam parte de um multiplete sem ser possível incorporar ou desincorporar uma parte dele. Um exemplo direto disto é a própria tese: trabalhar com spinores de Dirac (que representam partículas carregadas de spin  $\frac{1}{2}$ ) num modelo supersimétrico, somente seria possível duplicando-se o número de campos escalares e pseudo-escalares; no entanto, a tese mostra que saindo deste esquema, não é preciso esta duplicação, sem por isso alterar as propriedades de renormalização tão prezadas.

A título de síntese, é interessante juntar aqui to-

dos os resultados obtidos no capítulo anterior, para ter uma vi são global do trabalho.

O ponto de partida é a Lagrangiana (eq. (7)):

$$L = \frac{1}{2} \phi (\square - m_1^2) \phi + \frac{1}{2} \eta (\square - m_2^2) \eta + f \phi^3 + f' \phi \eta^2 + \lambda \phi^4 +$$

$$+ \lambda' \eta^4 + \lambda'' \phi^2 \eta^2 + \bar{\Psi} (i \not{\partial} - M) \Psi + \bar{\Psi} (g \phi - g' \gamma_5 \eta) \Psi \quad .$$

onde todas as 10 constantes que aparecem, se supõem arbitrárias e independentes uma das outras.

A sua expressão em função dos campos auxiliares é da da por (14) e (15).

$$L = \frac{1}{2} \{ \phi \square \phi + 2m_1 \phi F + F^2 \} + \frac{1}{2} \{ \eta \square \eta + 2m_2 \eta G + G^2 \} \quad +$$

$$+ \frac{N^2}{2} + \bar{\Psi} \{ i \not{\partial} - M \} \Psi + \{ \phi^2 c^2 + \eta^2 (c')^2 \} F + \{ \phi^2 \underline{c}^2 + \eta^2 (\underline{c}')^2 \} N \quad +$$

$$+ 2 \phi \eta d G + \bar{\Psi} \{ \phi g - g' \gamma_5 \eta \} \Psi \quad .$$

Onde os conjuntos de constantes de acoplamento:

$$\{ m_1, m_2, M, f, f', \lambda, \lambda', \lambda'', g, g' \} \quad \text{e} \quad \{ m_1, m_2, M, c, c', \underline{c}, \underline{c}', d, g, g' \}$$

estão ligados (via integral funcional ou equações de Lagrange) pe las seguintes relações ( eq. (17) ).

$$f = -m_1 c \qquad \lambda = -(c^2 + \underline{c}^2) \frac{1}{2}$$

$$f' = -m_1 c' - 2m_2 d \qquad \lambda' = -(c')^2 - (\underline{c}')^2 \frac{1}{2}$$

$$\lambda'' = (-cc' - \underline{c}\underline{c}' - 2d^2) \qquad \lambda < 0 \qquad \lambda' > 0$$



A ausência de renormalização divergente às massas e constantes de acoplamento, levou a: (eqs: (40), (41), (43), (44), (45), (64) e (65)).

$$g = 0 \quad g' = 0 \quad c' = -c \quad d = c$$

$$m_1^2 = m_2^2 = -M^2 \frac{|c|}{c} \sqrt{2} \quad (g')^2 = g^2 = \frac{-4c|c|}{\sqrt{2}}$$

A expressão para  $m_1$  e  $m_2$  obriga a  $C < 0$  para ter as massas reais. Assim, o último par de resultados se reduz (considerando  $c < 0$ ,  $M > 0$ ,  $c$  e  $M$  reais) a

$$m_1^2 = m_2^2 = \sqrt{2} \cdot M^2 \Rightarrow m_1 = m_2 = (2)^{\frac{1}{4}} M.$$

$$(g')^2 = g^2 = (2)^{\frac{3}{2}} c^2 \Rightarrow g = (2)^{\frac{3}{4}} c = \pm g'$$

Com o que as relações entre os dois grupos de constantes (eq. (17)) ficou (em função de  $M > 0$  e  $c < 0$  arbitrários).

$$f = - (2)^{\frac{1}{4}} M \cdot c \quad f > 0$$

$$f' = f \quad f' > 0$$

$$\lambda = \lambda' = -\frac{1}{2} c^2 \quad \lambda < 0$$

$$\lambda'' = 2\lambda = -c^2 \quad \lambda'' < 0$$

$$\Rightarrow f^2 = 2 \sqrt{2} M^2 (-\lambda) \quad g^2 = 4 \sqrt{2} (-\lambda) = (g')^2$$

Com o que se obtém todas as constantes do sistema em função de apenas duas delas:  $M > 0$  e  $\lambda < 0$ .

Quanto à renormalização infinita à norma dos campos. trata-se de um problema "insuperável", (inclusive no modelo W-Z supersimétrico) já que a anulação de qualquer um dos coeficientes  $r^2_{-1}$ ,  $s^2_{-1}$  ou  $t^2_{-1}$  (eq. (69)) conduz a  $c = 0$ . Com a consequente

anulação de todas as constantes de acoplamento (só não se anulam as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $M$ ) o que transforma o sistema num sistema de partículas livres sem interação, desaparecendo de vez o problema em questão que é de um sistema de partículas com interação entre elas. De todo modo (como já foi mencionado) a presença de renormalização infinita à norma dos campos não é um obstáculo de peso devido a não ser uma quantidade física mensurável.

Por último, é importante enquadrar os resultados obtidos, no sentido de que cálculos somente até um loop em modelos tão extensos como o aqui tratado, são insuficientes para fazer a afirmações categóricas a respeito. De fato, seria interessante como continuação deste trabalho, desenvolver os cálculos pelo menos até dois loops, e pesquisar a estrutura das divergências do modelo, para verificar se os resultados aqui obtidos se mantêm, a medida que aumentamos a ordem perturbativa considerada; isto é, se estes resultados garantem a ausência de renormalização divergente aqui encontrada, mesmo quando consideramos correções de ordem superior a um loop.

Neste sentido, são dadas no formulário (que se encontra no apêndice), as integrais (10), (11), (14), (15) e (17) úteis nos cálculos até dois loop.

## APÊNDICE A

### A.1) Matrizes de Dirac

A representação das matrizes  $\gamma$  utilizadas neste trabalho coincide com a representação Standard, a menos da definição de  $\gamma_5$ .

Aqui usamos:

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

Então temos:

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & -i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$$

onde as matrizes  $\vec{\sigma}$  de Pauli são dadas por:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\gamma$  satisfazem as seguintes relações:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 5$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad i = 1, 2, 3, 5$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

A.2) Formulário com métrica  $g_{\mu\nu} = [1, -1, -1, -1]$

$$(1) \int d^D p \frac{1}{[m^2 - p^2 - 2pk]^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \cdot \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]}$$

$$(2) \int d^D p \frac{p^\mu}{[m^2 - p^2 - 2pk]^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \cdot \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot (-k^\mu)$$

$$(3) \int d^D p \frac{p^2}{[m^2 - p^2 - 2kp]^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot k^2 - \frac{\Gamma[\alpha - 1 - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot \frac{D}{2} \cdot [m^2 + k^2] \right\} \cdot$$

$$(4) \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{[m^2 - p^2 - 2kp]^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot k_\mu k_\nu - \frac{\Gamma[\alpha - 1 - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [m^2 + k^2] \right\} \cdot$$

$$(5) \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{[m^2 - p^2 - 2kp]^\alpha} = \frac{i\pi \frac{D}{2}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \left[ \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot (-k_\mu k_\nu k_\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma[\alpha - 1 - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} k_\lambda + g_{\mu\lambda} k_\nu + g_{\nu\lambda} k_\mu) \cdot (m^2 + k^2) \right]$$

$$(6) \int d^D p \frac{p^2 p_\mu}{[m^2 - p^2 - 2kp]^\alpha} = \frac{i\pi \frac{D}{2}}{[m^2 + k^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}} \left[ \frac{\Gamma[\alpha - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} (-k_\mu k^2) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma[\alpha - 1 - \frac{D}{2}]}{\Gamma[\alpha]} \cdot \frac{(D+2)}{2} k_\mu \cdot [m^2 + k^2] \right]$$

Em síntese, todas podem se obter da primeira por derivação em relação a  $k_\mu$ .

$$(7) \frac{1}{a^{\alpha+1} b^\beta} = \frac{\Gamma[\alpha+\beta]}{\Gamma[\alpha]\Gamma[\beta]} \cdot \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax+b(1-x)]^{\alpha+\beta}}$$

Observação:

$$\frac{a}{a^{\alpha+1} b^\beta} = \frac{1}{a^\alpha b^\beta}, \text{ útil no caso de se precisar, } \alpha = 0$$

$$(8) \frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma[\alpha+\beta+\gamma]}{\Gamma[\alpha]\Gamma[\beta]\Gamma[\gamma]} \cdot \int_0^1 dx \cdot \int_0^x dy \frac{y^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-1}}{[ay + b(x-y) + c(1-x)]^{\alpha+\beta+\gamma}}$$

$$(9) \quad \Gamma[x] = \frac{\Gamma[x+1]}{x}$$

$$(10) \text{ Se } F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{[p^2 - m_1^2]^\alpha [\ell^2 - m_2^2]^\beta [(p+k-\ell)^2 - M^2]^\gamma}$$

$$F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{[p^2 - m_1^2]^\alpha [(p-\ell)^2 - m_2^2]^\beta [(k+\ell)^2 - M^2]^\gamma}$$

$$\tilde{\eta} = M^2 - k^2 + k(\ell - p)$$

$$S_1 = M^2 - k^2 - \ell^2 + p(\ell - k) + 2\ell k$$

$$S_2 = M^2 - k^2 - p^2 + \ell(p+k) - 2pk$$

$$S_3 = m_2^2 - \ell^2 + p\ell$$

Então quando integramos em  $d_p^D, d_\ell^D$  vale:

$$(10.a) \quad F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{2[D - (\alpha + \beta + \gamma)]} \cdot [2\alpha m_1^2 F[(\alpha+1), \beta, \gamma] + 2\beta m_2^2 F[\alpha, (\beta+1), \gamma] + 2\gamma \tilde{\eta} F[\alpha, \beta, (\gamma+1)]]$$

$$(10.b) \quad F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{D - 2[\alpha + \gamma]} [2\alpha m_1^2 F[(\alpha+1), \beta, \gamma] + 2\gamma S_1$$

$$F[\alpha, \beta, (\gamma+1)]]$$

$$(10.c) \quad F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{D-2[\beta+\gamma]} [2\beta m_2^2 F[\alpha, (\beta+1), \gamma] + 2\gamma S_2 F[\alpha, \beta, (\gamma+1)]] .$$

$$(10.d) \quad F[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{D-2[\alpha+\beta]} [2\alpha m_1^2 F[(\alpha+1), \beta, \gamma] + 2\beta S_3 F[\alpha, (\beta+1), \gamma]]$$

$$(11) \quad \int d^D p d^D l \frac{1}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - l^2] \cdot [M^2 - (p+k-l)^2]} = \frac{\pi^D \Gamma[\frac{4-D}{2}]}{[D-3] \Gamma[\frac{6-D}{2}]} .$$

$$\int_0^1 dx dz \cdot x \left[ \frac{1-x}{z-z^2} \right]^{\frac{4-D}{2}} \cdot \left\{ \Gamma[5-D] \left( m_1^2 \left[ \frac{E-x^2 k^2}{[H+x^2 k^2]^{2, 2, 5-D}} \right] + m_2^2 \left[ \frac{A-x^2 k^2}{[B+x^2 k^2]^{2, 2, 5-D}} \right] + (M^2 - xk^2) \cdot \left[ \frac{J-x^2 k^2}{[K+x^2 k^2]^{2, 2, 5-D}} \right] \right) + \Gamma[4-D] \left( \frac{m_1^2 \cdot D}{2[H+x^2 k^2]^{2, 2, 4-D}} + \frac{m_2^2 \cdot D}{2[B+x^2 k^2]^{2, 2, 4-D}} + \frac{(M^2 - xk^2) \cdot D}{2[K+x^2 k^2]^{2, 2, 4-D}} - \frac{xk^2}{[K+x^2 k^2]^{2, 2, 4-D}} \right) \right\}$$

onde:

$$A(z) = \frac{m_1^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2}$$

$$B(x, z) = \frac{m_1^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2} (1-x) + [m_2^2 - k^2] x .$$

$$E(z) = \frac{m_2^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2}$$

$$H(x, z) = \frac{m_2^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2} (1-x) + [m_1^2 - k^2] x$$

$$J(z) = \frac{m_1^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2}$$

$$K(x, z) = \frac{m_1^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2} (1-x) + [M^2 - k^2] x$$

$$(12) \quad \Gamma[x] = \frac{1}{x} - C \quad C = \text{Constante de Euler}$$

$$(13) \quad A^x = 1 + x \text{Ln}A + \frac{(x \text{Ln}A)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (x \text{Ln}A)^n \frac{1}{n!}$$

$$(14) \quad \int d^D p d^D l \frac{1}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - l^2]^2 \cdot [M^2 - (p+k-l)^2]}$$

$$= \frac{-\pi^D \Gamma[\frac{4-D}{2}]}{\Gamma[\frac{6-D}{2}]} \cdot \int_0^1 dx dz \cdot x \left[ \frac{1-x}{z-z^2} \right]^{\frac{4-D}{2}} \left\{ \frac{\Gamma[5-D]}{[B+x^2 k^2]^{5-D}} (A-x^2 k^2) + \frac{\Gamma[4-D]}{[B+x^2 k^2]^{4-D}} \cdot \frac{D}{2} \right\}$$

Onde A e B são dados na página anterior.

$$(15) \quad \int d^D p d^D l \frac{1}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - l^2] \cdot [M^2 - (p+k-l)^2] \cdot [m_3^2 - (l+q)^2]}$$

$$= \frac{-\pi^D \Gamma[\frac{4-D}{2}]}{\Gamma[\frac{6-D}{2}]} \int_0^1 dx dy dz \cdot x \left[ \frac{1-x}{z-z^2} \right]^{\frac{4-D}{2}} \left\{ \frac{\Gamma[5-D]}{[L+x^2 (k-xy)^2]^{5-D}} (A-x^2 [k-xy]^2) + \frac{\Gamma[4-D]}{[L+x^2 (k-xy)^2]^{4-D}} \cdot \frac{D}{2} \right\}$$

onde A é dado na página anterior, e para L temos:

$$L(x, y, z) = \underbrace{\frac{m_1^2 (1-z) + zM^2}{z-z^2}}_{L=A} (1-x) + [(m_3^2 - m_2^2 - q^2) y + q^2 y^2 + m_2^2 - (k-xy)^2] x$$



Observação: fazendo  $q=0$ ,  $m_2=m_3$ , reobtem-se o resultado (14).

$$(16) \int d^D p \frac{1}{[M^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2] \cdot [m_3^2 - (p+k+q)^2]} =$$

$$= \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma[\frac{6-D}{2}]}{1} \cdot \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - M^2 - k^2)x + (kx+qy)^2]^{\frac{6-D}{2}}}$$

Esta integral é finita e não contém polos em  $D=4$ .

$$(17) \int d^D p d^D \ell F[\alpha, \beta, \gamma] = \alpha! \beta! \gamma! \left[ \frac{\partial}{\partial m_1} \right]^{\alpha-1} \left[ \frac{\partial}{\partial m_2} \right]^{\beta-1} \left[ \frac{\partial}{\partial M^2} \right]^{\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot \int d^D_p d^D_\ell F[1, 1, 1].$$

Onde  $F[\alpha, \beta, \gamma]$  é dado na fórmula (10) do formulário e

$\int d^D_p d^D_\ell F[1, 1, 1]$  é a fórmula (11).

$$(18) \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma[\frac{4-D}{2}]}{\Gamma[2]} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 dx [(m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x)]^{\frac{D-4}{2}}$$

$$(18) \oplus \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \quad \epsilon = 4-D \quad \oplus \text{significa a parte infinita quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

$$(19) \int d^D p \frac{p_\mu}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]} = -k_\mu \cdot i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma[\frac{4-D}{2}] \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 dx \cdot x [(m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x)]^{\frac{D-4}{2}}$$

$$(19) \Rightarrow -\frac{k}{2} \cdot \left[ \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \right]$$

$$(19) \text{ bis: } \int \frac{d^D p}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]} = i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \left\{ \frac{(m_1)^{D-2} - (m_2)^{D-2}}{D-2} + \frac{m_2^2 - m_1^2 - k^2}{2} \int_0^1 dx \cdot [(m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x)]^{\frac{D-4}{2}} \right\}$$

$$(20) \int d^D p \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]} = i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \left\{ \frac{2}{D-2} (m_2)^{D-2} + m_1^2 \cdot \int_0^1 dx [(m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x)]^{\frac{D-4}{2}} \right\}$$

$$(20) \Rightarrow \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \cdot [m_2^2 + m_1^2].$$

$$20) = i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \cdot \frac{2}{D-2} \cdot m_2^{D-2} + m_1^2 I_{18}(m_1, m_2, k)$$

$$(21) \int d^D p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + M) \cdot (\not{p} + k + M)]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2]} =$$

$$(21) = i\pi \frac{D}{2} D \cdot \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \left(1 + \frac{D}{D-2}\right) \cdot \int_0^1 dx [(x^2 - x)k^2 + M^2]^{\frac{D-2}{2}}$$

$$= i\pi \frac{D}{2} D \cdot \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \cdot \left\{ \frac{2}{D-2} (M)^{D-2} + \left(2M^2 - \frac{k^2}{2}\right) \cdot \int_0^1 dx [(x^2 - x)k^2 + M^2]^{\frac{D-4}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{2M^{2D} I_{18}(M)}{D-2} + \left[2M^2 - \frac{k^2}{2}\right] D I_{18}(M, k)$$

$$(21) \Rightarrow = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \cdot [12M^2 - 2k^2].$$

O cálculo (21) com massas diferentes, se reduz à seguinte soma:

$$(21) [m_1 m_2] = D \cdot [ (20) + (19) \text{bis} + m_1 m_2 \cdot (18) ] .$$

$$(22) \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma_5 (\not{p}+M) \gamma_5 (\not{p}+k+M)]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2]} = i\pi \frac{D}{2} \Gamma[\frac{4-D}{2}] \cdot D \{ \frac{2M^{D-2}}{D-2} - \frac{k^2}{2} \} .$$

$$\int_0^1 dx [k^2 - x] \cdot k^2 + M^2 \left] \frac{D-4}{2} \right\}$$

$$(22) = \frac{2M^2_D}{D-2} \cdot I_{18}(M) - \frac{Dk^2}{2} \cdot I_{18}(M.k)$$

$$(22) = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \cdot [4M^2 - 2k^2]$$

$$(23) \int d^D p \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} = -I_{18}(m_2 \cdot M \cdot q) + m_1^2 \cdot I_{16}(m_1 \cdot m_2 \cdot M \cdot k \cdot q)$$

$$(23) = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} = -I_{18}$$

$$(24) = \int d^D p \frac{p \cdot k}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} = (m_2^2 - m_1^2 - k^2) \cdot (16)$$

Ou seja que (24) é convergente.

$$(25) \int d^D p \frac{\text{Tr}[[\not{p}+M][\not{p}+k+M][\not{p}+k+q+M]]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} = 4 \{ (3 \cdot (23)) + 2 [ (24) (q) + (2 \cdot (24)) (k) ] + k(k+q) \cdot (16) \} M + M^3 (16) \}$$

$$\Rightarrow (25) \quad \ominus - 12M \frac{2i\pi^2}{\epsilon}$$

$$(26) \quad \int d^D p \frac{\text{Tr} [ \cancel{p-M} \cancel{p+k+M} \cancel{p+k+q+M} ]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} = 4 \left\{ (23) \cdot M + \right. \\ \left. + [-(kq+k^2)M + M^3] \cdot (16) \right\}$$

$$\Rightarrow (26) \quad \ominus - 4M \frac{2i\pi^2}{\epsilon}$$

$$(27) \quad \int d^D p \frac{[\cancel{p+k+q+m}]^{ba}}{[m^2 - (p+k)^2] [\cancel{p-m}]^{ac} [m^2 - (p+k+q)^2]} = \\ = \int d^D p \frac{\delta^{bc}}{[m^2 - (p+k+q)^2] [m^2 - (p+k)^2]} \\ - \underbrace{\int d^D p \frac{[k+q+2m]^{ba} [\cancel{p+m}]^{ac}}{[m^2 - p^2] [m^2 - (p+k)^2] [m^2 - (p+k+q)^2]}}_{\text{convergente}}$$

$$(27) \quad \ominus \delta^{bc} I_{18} = \delta^{bc} \frac{2i\pi^2}{\epsilon}$$

A.3) CÁLCULO DE INTEGRAIS DO FORMULÁRIO

O cálculo é feito com o objetivo de separar a parte finita da infinita. Só são calculadas até o final, as partes infinitas das integrais (16) + (27).

$$(16) = \int d^4 p \frac{1}{[M^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [m_3^2 - (\ell + k+q)^2]}$$

Aplicando (8) do formulário:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1, \quad a = m_3^2 - (p+k+q)^2 \quad b = m_2^2 - (p+k)^2 \quad c = M^2 - p^2$$

$$(16) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^D p \frac{\Gamma[3]}{\{[m_3^2 - (p+k+q)^2] y + [m_2^2 - (p+k)^2] (x-y) + [M^2 - p^2] (1-x)\}^3}$$

Arrumando o denominador para aplicar (1) do formulário:

$$\{\dots\}^3 = \left\{ (m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk) y + (m_2^2 - M^2 - k^2) x - p^2 (y + (x-y) + (1-x)) - 2p((k+q)y + k(x-y)) \right\}^3$$

$$= \left\{ [(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk) y + (m_2^2 - M^2 - k^2) x] - p^2 - 2p(kx + qy) \right\}^3$$

$$\Rightarrow (16) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^D p \frac{\Gamma[3]}{\{\dots\}^3}$$

Aplicando (1) do formulário:

$$(16) = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma[\frac{6-D}{2}]}{\Gamma[3]} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\Gamma[3]}{[(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk) y + (m_2^2 - M^2 - k^2) x + (kx + qy)^2]^{\frac{6-D}{2}}}$$

Que mostra que a integral é finita, já que não contém polos em  $D = 4$ . Em particular, para  $D=4$  obtém-se:

$$(16) = i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - M^2 - k^2)x + (kx + gy)^2]}$$

Cálculo da integral (18).

$$(18) = \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

Aplicando (7) do formulário,  $a = m_2^2 - (p+k)^2$ ,  $b = m_1^2 - p^2$ ,  $\alpha = \beta = 1$

$$(18) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{1}{\{(m_2^2 - (p+k)^2)x + (m_1^2 - p^2)(1-x)\}^2}$$

Arrumando o denominador para aplicar (1),

$$\{\dots\}^2 = \{([m_2^2 - m_1^2 - k^2]x + m_1^2) - p^2 - 2p(kx)\}^2$$

Aplicando (1):

$$(18) = i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \int_0^1 dx ([m_2^2 - m_1^2]x + m_1^2 + k^2(x^2 - x))^{\frac{D-4}{2}}$$

Para separar a parte infinita, da integral, expandimos cada termo em série de potências de  $\epsilon = 4-D$  e guardamos somente os termos que divergem quando  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $D \rightarrow 4$ ). Para a expansão, usamos as fórmulas (12) e (13).

A integral em x tende a 1.  $\pi^{\frac{D}{2}}$  vai para  $\pi^2$  e a função  $\Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] = \Gamma\left[\frac{\epsilon}{2}\right]$  vai a  $\frac{2}{\epsilon} - c$  de modo que a parte infinita é igual a:

$$(18) \rightarrow \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \equiv I_{18} \text{ onde } \rightarrow \text{significa reter somente a parte infinita.}$$

Cálculo da integral (19).

$$(19) = \int d^D p \frac{p^\mu}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

O denominador é o mesmo que o de (18), o que permite aproveitar a arrumação dele já feita no cálculo de (18).

Assim,

$$(19) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{p^\mu}{\{([m_2^2 - m_1^2 - k^2]x + m_1^2) - p^2 - 2p(kx)\}^2}$$

Aplicando (2) do formulário,

$$(19) = i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] (-k^\mu) \int_0^1 dx x ([m_2^2 - m_1^2]x + m_1^2 + k^2(x^2 - x))^{\frac{D-4}{2}}$$

Filtrando o polo:

$$(19) \underset{\epsilon}{=} \frac{2i\pi^2}{\epsilon} (-k^\mu) \int_0^1 dx \cdot x$$

$$(19) \underset{\epsilon}{=} -\frac{k^\mu}{2} \frac{2i\pi^2}{\epsilon} = -\frac{k^\mu}{2} I_{18}$$

Um caminho alternativo, de utilidade em cálculos posteriores é:

Consideremos a seguinte integral:

$$(19)_{bis} = \int d^D p \frac{p \cdot k}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

O numerador pode ser rearrumado:

$$pk = \frac{1}{2} \{ [(p+k)^2 - m_2^2] - [p^2 - m_1^2] + [m_2^2 - m_1^2 - k^2] \}$$

Colocando esta expressão de  $pk$ , em (19) bis, obtem-se 3 integrais de solução direta via formulário:

$$(19) \text{ bis} = \frac{1}{2} \int d^D p \frac{-1}{[m_1^2 - p^2]} + \frac{1}{2} \int d^D p \frac{1}{[m_2^2 - (p+k)^2]} +$$

$$+ \frac{m_2^2 - m_1^2 - k^2}{2} \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

As duas primeiras obtem-se de (1) do formulário, e a terceira coincide com (18).

Assim,

$$(19) \text{ bis} = i\pi \frac{D}{2} \left\{ \frac{1}{2} [m_2^{D-2} - m_1^{D-2}] \cdot \Gamma\left[\frac{2-D}{2}\right] \right\} + \left( \frac{m_2^2 - m_1^2 - k^2}{2} \right) \frac{i\pi^D}{2} \cdot$$

$$\cdot \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \int_0^1 dx \left[ (m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x) \right]^{\frac{D-4}{2}}$$

Lembrando que  $\Gamma\left[\frac{2-D}{2}\right] = \frac{2}{D-2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right]$  obtem-se

$$(19) \text{ bis} = i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \left\{ \frac{m_1^{D-2} - m_2^{D-2}}{D-2} + \frac{m_2^2 - m_1^2 - k^2}{2} \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^1 dx \left[ (m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x) \right]^{\frac{D-4}{2}} \right\}$$

Filtrando o polo, temos diretamente:

$$(19) \text{ bis} = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \left( -\frac{k^2}{2} \right) = -\frac{k^2}{2} \cdot I_{18}.$$

Cálculo da integral (20).

$$(20) = \int d^D p \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

Arrumando o denominador como feito em (18):



$$(20) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{p^2}{\{([m_2^2 - m_1^2 - k^2]x + m_1^2) - p^2 - 2p(kx)\}^2}$$

Aplicando (3) do formulário, (

$$(20) = i\pi \frac{D}{2} \int_0^1 dx \{ \Gamma[\frac{4-D}{2}] k^2 x^2 - \frac{D}{2} \Gamma[\frac{2-D}{2}] (m_2^2 - m_1^2)x + m_1^2 + k^2(x^2 - x) \} \\ ([m_2^2 - m_1^2]x + m_1^2 + k^2[x^2 - x])^{\frac{D-4}{2}}$$

Fazendo  $\Gamma[\frac{2-D}{2}] = \frac{2}{2-D} \Gamma[\frac{4-D}{2}]$

$$(20) = i\pi \frac{D}{2} \Gamma[\frac{4-D}{2}] \cdot \int_0^1 dx ([m_2^2 - m_1^2]x + m_1^2 + k^2[x^2 - x])^{\frac{D-4}{2}} \cdot \\ \cdot \{ x^2 k^2 [1 + \frac{D}{D-2}] + \frac{x D}{D-2} [m_2^2 - m_1^2 - k^2] + \frac{D m_1^2}{D-2} \}$$

Filtrando o polo,

$$(20) \oplus \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \int_0^1 dx \{ \underbrace{x^2 k^2 [1 + \frac{D}{D-2}]}_{=3} + x \underbrace{\frac{D}{D-2} [m_2^2 - m_1^2 - k^2]}_{=2} + \underbrace{\frac{D}{D-2} m_1^2}_{=2} \}$$

$$\oplus \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \{ k^2 + m_2^2 - m_1^2 - k^2 + 2m_1^2 \} = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} (m_1^2 + m_2^2)$$

$$(20) \oplus \frac{2i\pi^2}{\epsilon} (m_1^2 + m_2^2) = I_{18} (m_1^2 + m_2^2)$$

Utilizando o caminho alternativo mencionado em (19)bis:

O numerador  $p^2$  se reescreve:

$$p^2 = -[m_1^2 - p^2] + m_1^2.$$

Substituindo em (20) obtemos duas integrais:

$$(20) = \int d^D p \frac{-1}{[m_2^2 - (p+k)^2]} + m_1^2 \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2][m_2^2 - (p+k)^2]}$$

A primeira obtem-se de (1) e a segunda de (18).

$$(20) = -i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{2-D}{2}\right] \cdot (m_2^2)^{\frac{D-2}{2}} + m_1^2 \cdot i\pi \frac{D}{2} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] \int_0^1 dx ([m_2^2 - m_1^2]x + m_1^2 + k^2(x^2 - x))^{\frac{D-4}{2}}$$

que é o mesmo resultado numa forma mais simples.

Filtrando o polo, obtemos diretamente:

$$(20) = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} [m_1^2 + m_2^2].$$

Calculo da integral (21):

$$(21) = \int d^D p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m_1)(\not{p} + \not{k} + m_2)]}{[m_1^2 - p^2][m_2^2 - (p+k)^2]}$$

Lembrando que o traço do produto de um número ímpar de matrizes é nula, temos para o traço:

$$\text{Tr}[\dots] = \text{Tr}[p^2 + pk + m_1 m_2] = D \cdot (p^2 + p \cdot k + m_1 m_2)$$

onde D é a dimensão do espaço.

Assim, a integral (21) abre-se em 3 integrais que coincidem com (20), (19)bis e  $m_1 m_2$ , de modo que a parte infinita é a soma das três partes infinitas multiplicadas por D=4.

$$(21) = I_{18} \cdot 4 \cdot (m_1 m_2 - \frac{k^2}{2} + m_1^2 + m_2^2)$$

Em particular, se as duas massas são iguais a  $M$ , temos:

$$(21)_{\text{part.}} \quad \neq I_{18} (12M^2 - 2k^2).$$

Cálculo da integral (22)

$$(22) = \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma_5 (\not{p} + m_1) \gamma_5 (\not{p} + \not{k} + m_2)]}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]}$$

Lembrando que  $\gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu$  e que  $\gamma_5^2 = -1$  o traço pode ser reescrito:

$$\text{Tr}[\dots] = \text{Tr}[p^2 + \not{p}\not{k} - m_1 m_2] = \mathcal{D}[p^2 + \not{p}\not{k} - m_1 m_2]$$

De modo que

$$(22) = \mathcal{D} \cdot \{ (20) + (19)_{\text{bis}} - m_1 m_2 (18) \}.$$

Filtrando o polo:

$$(22) \neq I_{18} \cdot 4(m_1^2 + m_2^2 - \frac{k^2}{2} - m_1 m_2)$$

Se as massas são iguais

$$(22) \neq I_{18} [4m^2 - 2k^2]$$

$$(23) \int d^D p \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]}$$

Arrumando o numerador,

$$p^2 = -[m_1^2 - p^2] + m_1^2$$

$$(23) = - \int d^D p \frac{1}{[m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} +$$

$$+ m_1^2 \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2] [m_1^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]}$$

$$= -(18) + m_1^2 (16) \oplus -I_{18}$$

$$(24) \int d^D p \frac{p \cdot k}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]}$$

Arrumando o numerador:

$$pk = \frac{1}{2} [ [(p+k)^2 - m_2^2] + [m_1^2 - p^2] + [m_2^2 - m_1^2 - k^2] ]$$

$$\Rightarrow (24) = \frac{1}{2} \left\{ \int d^D p \frac{-1}{[m_1^2 - p^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} + \int d^D p \frac{1}{[m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} \right. \\ \left. + (m_2^2 - m_1^2 - k^2) \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]} \right\}$$

As duas primeiras integrais são do tipo (18) de modo que seus polos se cancelam mutuamente devido ao sinal - na primeira. A terceira é (16) e então convergente de modo que esta integral (24) é convergente.

$\Rightarrow (24) =$  convergente.

$$(25) \int d^D p \frac{\text{Tr} [ \not{p} + M ] [ \not{p} + K + M ] [ \not{p} + K + Q + M ]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2] [M^2 - (p+k+q)^2]}$$

Lembrando que

$$\text{Tr} \gamma^n = 0 \text{ se } n = \text{ímpar} \text{ e } \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} = Dg^{\mu\nu} \text{ (em dimensão } D)$$

$$\Rightarrow \text{Tr} [\dots] = \text{Tr} [ (3\not{p}\not{p} + 4\not{p}\not{K} + 2\not{p}\not{Q} + \not{K}\not{K} + \not{K}\not{Q}) M + M^3 ]$$

$$\Rightarrow D \left\{ (3p^2 + 2p(q+2k) + k(k+q)) M + M^3 \right\}$$

Ou seja (25) = soma de 4 integrais. A primeira é do tipo (23) enquanto que a segunda é do tipo (24) e a terceira e a quarta são do tipo (16). Como a única que tem parte infinita é (23), temos:

$$(25) \quad \left. \begin{array}{l} \text{---} 3.D \\ \text{---} \end{array} \right|_{D=4} .M. \quad (23) = -12 I_{18}^M$$

$$\Rightarrow (25) = -12 I_{18} . M$$

$$(26) \quad \int d^D p \frac{\text{Tr}[[\cancel{p}-M][\cancel{p}+k+M][\cancel{p}+k+\cancel{q}+M]]}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)^2][M^2-(p+k+q)^2]}$$

A diferença com a integral anterior é que em vez de aparecer  $3\cancel{p}\cancel{p}$  dentro do traço, aparece somente  $\cancel{p}\cancel{p}$  devido ao sinal negativo na massa do primeiro propagador.

Assim,

$$(26) \quad \text{---} - 4M I_{18}$$

$$(27) \quad \int d^D p \frac{[\cancel{p}+M][\cancel{p}+k+M]}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)^2][m^2-(p+k+q)]}$$

O numerador é igual a:

$$\begin{aligned} & p^2 + pk + 2\cancel{p}M + kM + M^2 \\ & = p^2 + p(k+2m\gamma) + (kM + M^2) \end{aligned}$$

O primeiro termo conduz a uma integral do tipo (23). O segundo conduz a (24) e o terceiro a (16). Assim,

$$(27) \quad \text{---} (23) \quad \text{---} - I_{18}$$

$$\Rightarrow (27) \quad \text{---} - I_{18}$$

## APÊNDICE B

### B.1) Cálculo da parte infinita do produto de dois propagadores

De acordo com as convenções utilizadas nesta tese, o propagador é definido como:

$$D(x) = -i \overline{[A(x_1)A(x_2)]} = -i \langle 0 | T A(x_1) A(x_2) | 0 \rangle$$

onde  $x_1 - x_2 = x$       $A(x)$  = Operador de campo de spin arbitrário

Em representação de Fourier:

$$D(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Delta(p)$$

$$\text{Então: } \overline{[A(x_1)A(x_2)]} \overline{[B(x_2)B(x_1)]}$$

$$= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Delta_A(p) \cdot \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} e^{ip'x} \Delta_B(p')$$

$$\text{Fazendo } p' = p-k \quad d^4 p' = d^4 k$$

$$= - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left\{ \int \Delta_A(p) \cdot \Delta_{B(p+k)} \cdot d^D p \right\}$$

Onde  $D$  é a dimensão do espaço na integral entre colchetes. A sua introdução deve-se ao método de regularização dimensional aqui utilizado.

O produto de propagadores, por ordem de aparição na tese, é calculado com o auxílio do formulário, do seguinte modo:

$$1) \quad \overline{[\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)]} \overline{[\phi(x_2)\phi(x_1)]} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot e^{-ikp} \left\{ \int d^Dp \cdot \frac{\not{p}+M}{[M^2-p^2]} \cdot \frac{1}{[m_1^2-(p+k)^2]} \right\}.$$

A integral entre chaves é dada por:

$$\{\dots\} = \{\gamma_{\mu.19}\}_{f+M. 18)}_f\}$$

De modo que a parte infinita de  $\{\dots\}$  é igual a:

$$\{\dots\} \oplus I_{18} \cdot \left(-\frac{k}{2} + M\right).$$

$$\Rightarrow 1) = \frac{-I_{18}}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left(M - \frac{k}{2}\right)$$

A primeira integral dá  $-M \cdot \delta(x) \cdot \frac{I_{18}}{(2\pi)^4}$ .

A segunda, dá  $+\frac{i}{2} \frac{I_{18}}{(2\pi)^4} \cdot \not{x} \delta(x)$

$$\Rightarrow 1) \quad \left(-\frac{i}{2} \not{x}^{-M}\right) \delta(x) \cdot \frac{I_{18}}{(2\pi)^4} = (i \not{x}^{-2M}) \delta(x) \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4 \epsilon}$$

$$2) \quad \overline{\gamma_5[\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)]} \overline{\gamma_5[\eta(x_1)\eta(x_2)]} = + \overline{[\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)]} \star \overline{[\eta(x_1)\eta(x_2)]}$$

Onde  $[\dots]_\star$  significa o propagador com o sinal da massa trocado.

$$\Rightarrow 2) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left\{ \int d^Dp \frac{\not{p}-M}{[M^2-p^2]} \cdot \frac{1}{[m_2^2-(p+k)^2]} \right\}$$

Por inspeção em 1), o resultado de 2) obtem-se do resultado de 1) trocando M por -M. Assim,

$$2) = [i \not{x} + 2M] \beta \quad \beta = \frac{i\pi^2}{2\pi^4 \epsilon} \delta(x)$$

$$3) \overline{[F(x_1)F(x_2)]} \overline{[\phi(x_2)\phi(x_1)]} =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left\{ \int d^D p \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2]} \frac{1}{[m_1^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} = 20) \int \oplus + I_{18} \cdot 2m_1^2$$

$$3) = - \frac{2I_{18}m_1^2}{(2\pi)^4} \delta(x) = -4m_1^2\beta$$

$$4) \overline{[F(x_1)\phi(x_2)]}^2 = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left\{ \int d^D p \frac{m_1^2}{[m_1^2 - p^2][m_1^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} = 18) \cdot m_1^2 \oplus m_1^2 I_{18}$$

$$\Rightarrow 4) = \frac{-I_{18}m_1^2}{(2\pi)^4} \delta(x) = -2m_1^2\beta$$

$$5) \overline{[G(x_1)G(x_2)]} \overline{[\eta(x_2)\eta(x_1)]}$$

Por inspeção coincide com 3) trocando  $m_1$  por  $m_2$ .

$$\Rightarrow 5) = -4m_2^2\beta;$$

$$6) \overline{[\eta(x_1)G(x_2)]}^2.$$

Por inspeção coincide com 4) trocando  $m_1$  por  $m_2$ .

$$6) = -2m_2^2\beta$$

$$7) \overline{[\phi(x_1)\phi(x_2)]} \cdot \overline{[N(x_2)N(x_1)]}$$



$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left\{ \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2]} \right\} \cdot$$

$$\{ \dots \} = 1)_{\text{f}} \text{ do formulário} = i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left[\frac{2-D}{2}\right] \cdot m_1^{D-2} =$$

$$= \frac{2m_1^2}{2-D} \cdot [i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left[\frac{4-D}{2}\right] m_1^{D-4}] = -m_1^2 \cdot 18)_{\text{f}}$$

A expressão entre colchetes é 18)  $\left. \vphantom{\int} \right|_{k=0} = \int d^D p \frac{1}{[m_1^2 - p^2]^2}$

e como 18)  $\text{f} \oplus I_{18}$  não depende de  $k$ , temos diretamente:

$$7) = m_1^2 \cdot \frac{I_{18}}{(2\pi)^4} \delta(x) = 2m_1^2 \beta.$$

$$8) \text{Tr} [\overline{[\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)]} [\overline{[\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)]}]] = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ikx} \left\{ \int d^D p \cdot \frac{\text{Tr} [[\not{p} + M] [\not{p} + \not{k} + M]]}{[M^2 - p^2] [M^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} 21)_{\text{f}} \oplus I_{18} (12M^2 - 2k^2)$$

$$\Rightarrow 8) = (4 \square - 24M^2) \beta$$

$$9) \overline{[F(x_1) F(x_2)]} \cdot \overline{[\eta(x_2) \bar{\eta}(x_1)]} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left\{ \int d^D p \cdot \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2] [m_2^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} = 20) \oplus [m_1^2 + m_2^2] I_{18}$$

$$\Rightarrow 9) = -2[m_1^2 + m_2^2] \beta$$

$$10) \quad [\overline{G(x_1)G(x_2)}] [\overline{\phi(x_2)\phi(x_1)}]$$

É idêntica a 9) trocando  $m_1$  e  $m_2$  entre si.

$$\Rightarrow 10) = -2[m_1^2 + m_2^2] \beta.$$

$$11) \quad [\overline{F(x_1)\phi(x_2)}] [\overline{G(x_2)\eta(x_1)}] = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left\{ \int d^D p \cdot \frac{m_1 m_2}{[m_1^2 - p^2] \cdot [m_2^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} = m_1 m_2 \quad 18) \oplus m_1 m_2 I_{18}$$

$$\Rightarrow 11) = -2m_1 m_2 \beta.$$

$$12) = [\overline{\eta(x_1)\eta(x_2)}] [\overline{N(x_2)N(x_1)}]$$

Coincide com 7) trocando  $m_1$  por  $m_2$ .

$$\Rightarrow 12) = 2m_2^2 \beta.$$

$$13) = \text{Tr} [\overline{[\psi(x_2)\overline{\psi}(x_1)]} \gamma_5 [\overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)] \gamma_5] =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left\{ \int d^D p \cdot \frac{[\not{p} + M] \gamma_5 [\not{p} + \not{k} + M] \gamma_5}{[M^2 - p^2] \cdot [M^2 - (p+k)^2]} \right\}$$

$$\{\dots\} = 22)_{\text{f}} \ominus [4M^2 - 2k^2] I_{18}$$

$$13) [4 \square_x - 8M^2] \beta.$$

$$14) [\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}]^2.$$

Obtem-se de 4) dividindo por  $m_1^2$ .

$$\Rightarrow 14) = -2\beta.$$

$$15) [\overline{\eta(x_1) \eta(x_2)}]^2$$

Coincide com 14) trocando  $m_1$  por  $m_2$ .

$$\Rightarrow 15) = -2\beta.$$

$$16) = 14)$$

$$17) = 15)$$

$$18) [\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}] [\overline{\eta(x_2) \eta(x_1)}] = \frac{11}{m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow 18) = -2\beta.$$

$$19) [\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}] [\overline{F(x_2) \phi(x_1)}] = 14) \cdot (-m_1)$$

$$\Rightarrow 19) = 2m_1 \beta.$$

$$20) [\overline{\eta(x_1) \eta(x_2)}] [\overline{G(x_2) \eta(x_1)}] = 15) \cdot (-m_2)$$

$$\Rightarrow 20) = 2m_2\beta.$$

$$21) = 20)$$

$$22) = 19)$$

$$23) = [\overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}] [\overbrace{[G(x_2)\eta(x_1)]}] = 18 \cdot (-m_2)$$

$$\Rightarrow 23) = 2m_2\beta.$$

$$24) [\overbrace{\eta(x_1)\eta(x_2)}] [\overbrace{[F(x_2)\phi(x_1)]}] = 18) \cdot (-m_1)$$

$$\Rightarrow 24) = 2m_1\beta.$$

$$25) = 18)$$

$$26) = 18)$$

B,2) Cálculo da parte infinita do produto de três propagadores

Consideremos agora, o produto de três propagadores na forma:

$$I = [\overbrace{A(x_1)A(x_2)}] [\overbrace{B(x_2)B(x_3)}] [\overbrace{C(x_3)C(x_1)}] =$$

$$= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipkx_{12}} \Delta_A(p) \cdot \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} e^{-i\ell x_{23}} \Delta_B(\ell) \cdot \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} e^{-itx_{31}} \Delta_C(t)$$

onde  $x_{ab} = x_a - x_b$

$$I = \frac{-i}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \cdot \int d^D p \Delta_A(p) \Delta_B(\ell) \Delta_C(t) e^{-i(px_{12} + \ell x_{23} + tx_{31})}$$

fazendo as mudanças de variáveis

$$\ell \rightarrow p+k \quad d^4 \ell \rightarrow d^4 k \quad t \rightarrow p+k+q \quad d^4 t \rightarrow d^4 q$$

O expoente da exponencial fica:

$$p(x_{12} + x_{23} + x_{31}) + k(x_{23} + x_{31}) + q x_{31} \equiv kx_{21} + qx_{31}$$

de modo que I fica:

$$I = \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{d^4 k d^4 q}{(2\pi)^8} e^{-i(kx_{21} + qx_{31})}}_{\equiv \Delta} \cdot \left\{ \int d^D p \cdot \Delta(p) \Delta(p+k) \Delta(p+k+q) \right\}$$

Assim, os produtos que envolvem 3 propagadores são calculados (por ordem de aparição na tese), do seguinte modo:

$$27) \overline{[F(x_1)F(x_2)]} \overline{[\phi(x_2)\phi(x_3)]} \overline{[\phi(x_3)\phi(x_1)]}$$

$$= -\Delta \cdot \left\{ \int d^D p \cdot \frac{p^2}{[m_1^2 - p^2][m_1^2 - (p+k)^2][m_1^2 - (p+k+q)^2]} \right\}$$

$$\{\dots\} = 23)_{\text{f}} \ominus - I_{18}$$

$$\Rightarrow 27) = -i \frac{I_{18}}{(2\pi)^4} \cdot \delta(x_2 - x_1) \delta(x_3 - x_1) \equiv +\alpha$$

$$28) \overline{[G(x_1)G(x_2)]} \overline{[\eta(x_2)\eta(x_3)]} \overline{[\eta(x_3)\eta(x_1)]}$$

Coincide com 27) trocando  $m_1$  por  $m_2$ .

$$\Rightarrow 28) = +\alpha$$

$$29) = \overline{[F(x_1)F(x_2)]} \overline{[\eta(x_2)\eta(x_3)]} \overline{[\eta(x_3)\eta(x_1)]}$$

Coincide com 28) a menos da massa do propagador de  $F(m_1)$  enquanto que a do propagador  $G$  é  $m_2$ . No entanto a parte infinita não

depende das massas, de modo que:

$$29) = +\alpha$$

$$30) [\overline{G(x_1)G(x_2)}] [\overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}] [\overline{\phi(x_3)\phi(x_1)}]$$

Pelo mesmo raciocínio, comparando com 27) temos:

$$30) = +\alpha$$

$$31) [\overline{G(x_1)G(x_2)}] [\overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}] [\overline{\eta(x_3)\eta(x_1)}] = +\alpha$$

$$32) [\overline{F(x_1)F(x_2)}] [\overline{\eta(x_2)\eta(x_3)}] [\overline{\phi(x_3)\phi(x_1)}] = +\alpha$$

$$33) \text{Tr} [\overline{\Psi(x_1)\Psi(x_2)}] [\overline{\Psi(x_2)\Psi(x_3)}] [\overline{\Psi(x_3)\Psi(x_1)}] =$$

$$= - \bigcirc \left\{ \int d^D p \frac{\text{Tr} [(\not{p}+M) \cdot (\not{p}+\not{k}+M) \cdot (\not{p}+\not{k}+\not{q}+M)]}{[M^2-p^2] [M^2-(p+k)^2] [M^2-(p+k+q)^2]} \right\}$$

$$\{ \dots \} = 25)_{\text{f}} \oplus -12M I_{18}$$

$$\Rightarrow 34) = +12M\alpha.$$

$$35) [\overline{F(x_1)F(x_2)}] [\overline{\phi(x_2)F(x_3)}] [\overline{\phi(x_3)\phi(x_1)}] \oplus -m_1 \cdot 30)$$

$$35) = -m_1\alpha.$$

$$36) [\overline{G(x_1)G(x_2)}] [\overline{\eta(x_2)G(x_3)}] [\overline{\eta(x_3)\eta(x_1)}] \oplus -m_2 \cdot 30)$$

$$\Rightarrow 36) = -m_2\alpha.$$

Analogamente,

$$37) [\overline{F(x_1)F(x_2)}] [\overline{\phi(x_2)F(x_3)}] [\overline{\eta(x_3)\eta(x_1)}] = -m_1\alpha.$$

$$38) [\overline{G(x_1)G(x_2)}] [\overline{\eta(x_2)G(x_3)}] [\overline{\phi(x_3)\phi(x_1)}] = -m_2\alpha.$$

$$39) \overline{[\eta(x_1)\eta(x_2)]} \overline{[G(x_2)\eta(x_3)]} \overline{[F(x_3)F(x_1)]} = -m_2\alpha.$$

$$40) \overline{[F(x_1)F(x_2)]} \overline{[\phi(x_2)\phi(x_3)]} \overline{[G(x_3)\eta(x_1)]} = -m_2\alpha.$$

$$41) \overline{[\phi(x_1)\phi(x_2)]} \overline{[F(x_2)\phi(x_3)]} \overline{[G(x_3)G(x_1)]} = -m_1\alpha.$$

$$42) = \overline{[G(x_1)G(x_2)]} \overline{[\eta(x_2)\eta(x_3)]} \overline{[F(x_3)\phi(x_1)]} = m_1\alpha.$$

De fato, esta simplicidade de resultados decorre de:

$$\overline{[F(x_1)\phi(x_2)]} = -m_1 \overline{[\phi(x_1)\phi(x_2)]} \text{ assim como } \overline{[G(x_1)\eta(x_2)]} =$$

$$= -m_2 \overline{[\eta(x_1)\eta(x_2)]}$$

$$43) \text{Tr}[\overline{[\Psi(x_1)\Psi(x_2)]} \overline{[\Psi(x_2)\Psi(x_3)]} \overline{[\Psi(x_3)\Psi(x_1)]}]_* =$$

$$- \textcircled{\Delta} \cdot \left\{ \int d^D p \frac{\text{Tr}[[\not{p}+M][\not{p}+\not{k}+M][\not{p}+\not{k}+\not{q}-M]}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)^2][M^2-(p+k+q)^2]} \right\}$$

$$\{\dots\} = 26)_f \oplus -4M I_{18}$$

$$43) 4M\alpha.$$

$$44) \overline{[\Psi(x_1)\Psi(x_2)]} \overline{[\Psi(x_2)\Psi(x_3)]} \overline{[\phi(x_3)\phi(x_1)]} =$$

$$- \textcircled{\Delta} \cdot \left\{ \int d^D p \frac{[\not{p}+M][\not{p}+\not{k}+M]}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)]} \frac{1}{[m_1^2-(p+k+q)^2]} \right\}$$

$$\{\dots\} = 27)_f \oplus -I_{18}$$

$$44) = \alpha.$$

$$45) \overline{[\Psi(x_1)\Psi(x_2)]}_* \overline{[\Psi(x_2)\Psi(x_3)]}_* \overline{[\eta(x_3)\eta(x_1)]}$$

Obtem-se de 44) trocando M por -M. Assim:

$$45) = \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 46) & \overline{[\Psi(x_1)\overline{\Psi}(x_2)]} \overline{[\Psi(x_2)\overline{\Psi}(x_3)]} \star \overline{[n(x_3)n(x_1)]} \\
 & = - \textcircled{\Delta} \left\{ \int d^D p \frac{[p+M][p+k-M]}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)^2][m_2^2-(p+k+q)^2]} \right\} \\
 & \{ \dots \} \oplus \left\{ \int d^D p \frac{p^2}{[M^2-p^2][M^2-(p+k)^2][m_2^2-(p+k+q)^2]} \right\} \\
 & \{ \dots \}' = 23)_{\text{f}} \oplus -I_{18}
 \end{aligned}$$

$$46) = \alpha.$$

$$47) \overline{[\Psi(x_1)\overline{\Psi}(x_2)]} \star \overline{[\Psi(x_2)\overline{\Psi}(x_3)]} \overline{[n(x_3)n(x_1)]}$$

Analogamente a 46)

$$47) = \alpha.$$



## REFERÊNCIAS


- 1 - BOGOLIUBOV N. N., SHIRKOV D. V.; Quantum Fields. 1a. edição. The Benjamin Cummings Publishing Company. Inc.. (1983). pág.: 137
- 2 - Ref. 1. pág.: 233
- 3 - Ref.: 1. pág.: 229
- 4 - LANDAU L., LIFCHITZ E.; Quantum Mechanics (Non Relativistic Theory). 3a. edição. Pergamon International Livrary. (1977)
- 5 - LANDAU L., LIFCHITZ E.; Teoria Clasica de los Campos . 2a. edição. Editorial Reverte S.A. (1973). pág. 51
- 6 - Ref. 1. pág.: 25
- 7 - ITZYKSON C., ZUBER J.B.; Quantum Field Theory. New York. Mc. Graw Hill. (1980)
- 8 - Ref. 1. pág.: 65
- 9 - Ref. 1. pág.: 118
- 10 - LANDAU L., LIFCHITZ E.; Théorie Quantique Relativiste (premiere partie). 1a. edição. Editions M.I.R. URSS. (1972)

- 11 - LEITE LOPES J.; Gauge Field Theories: an introduction.  
Oxford. Pergamon Press. (1981)
- 12 - Ref. 1. pág.: 294
- 13 - Ref. 10. pág.: 332
- 14 - Ref. 1. pág.: 167
- 15 - HUANG K.; Quarks Leptons & Gauge Fields. 1a. edição.  
World Scientific Publishing Co. (1982)
- 16 - Ref. 1. pág.: 169
- 17 - Ref. 1. pág.: 172
- 18 - Ref. 1. pág.: 173
- 19 - Ref. 1. pág.: 164
- 20 - Ref. 1. pág.: 210
- 21 - BOLLINI C. G., GIAMBIAGI J. J.; Phys. Lett. 40 B 566.  
(1972)
- 22 - G'THOOFF, VELTMAM M.; Regularization and Renormaliza-  
of Gauge Fields. Nuclear Physics. B 44 189. (1972)
- 23 - NASH C.; Relativistic Quantum Fields. London. Acade-

mic Press. (1978)

- 24 - BOLLINI C. G., GIAMBIAGI J. J.; Il Nuovo Cimento. 12 B 20.  
(1972)
  
- 25 - Ref. 1. pág.: 158
  
- 26 - Ref. 1. Cap.: VII
  
- 27 -
  
- 28 - SONHIUS M. F.; Supersymetry for beginners. The 1982 Trieste School on Supersymetry and Supergravity. (1983)
  
- 29 - SONHIUS M. F.; Supersymetry for beginners. The 1982 Trieste School on Supersymetry and Supergravity. (1983)  
pág.: 39
  
- 30 - WESS J. ZUMINO B.; Phys. Lett. 66 B 361. (1977)
  
- 31 - Ref. 15. pág.: 129
  
- 32 - Ref. 15. pág.: 144
  
- 33 - Ref. 1. pág.: 165
  
- 34 - Ref. 1. pág.: 188


Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Carlos Guido Bollini  
Presidente



Marcelo Caminha Gomes



Takeshi Kodama

Rio de Janeiro, 03 de outubro de 1985