

JOÃO RAMOS TORRES DE MELLO NETO

DINÂMICA DE PERTURBAÇÕES EXATAS EM  
MODELOS COSMOLÓGICOS DO TIPO BIANCHI IX

Tese de MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF/CNPq

RIO DE JANEIRO, 1985

– *A Helena, João*  
*e Roberta*

"....

Valeu a pena ? Tudo vale a pena

Se a alma não é pequena.

Quem quere passar além do Bojador

Tem que passar além da dor.

Deus ao mar o perigo e o abysmo deu,

Mas nelle é que espelhou o céu."

Fernando Pessoa

## AGRADECIMENTOS

— Ao Ívano Soares, por sua orientação dedicada e capaz, pelas críticas construtivas e pelo apoio nos momentos de desânimo;

— Ao Jair Koiller, nosso "consultor matemático";

— Ao grupo de Cosmologia do CBPF pelo convívio cientificamente estimulante;

— Aos amigos e colegas do CBPF Maurício, Mário Assad, Nelson Pinto, Caruso, Lêa, Renato Pires, Renato Portugal, Ignácio, Lú, Bartolomeu, Admir, Allan, Vander, Fernando, Cléber, Cláudia, Abílio, Djalma, Gérson, Collato, Tadeu, Sasse, Márcio, Gilvan, Henrique V. Gersdorff, Ismael, Nami, Conceição e Marçal, pela companhia fraterna;

— Aos colegas professores e pesquisadores Ildeu, Henrique, Darci, Marta, Carlos, Galvão, Mignaco, Annita Macedo, Barcellos, Donângelo, Yan, Penha, Salim, Arthur, Erly, Jader, Duílio e Brinnati, que mostraram-me algumas das alegrias da Física;

— À Fátima, Vera, Zé "Gordo", Elias, "Baiano", Werter, Celena, Myriam e Marilene, sem os quais nosso trabalho seria impossível;

— Aos meus queridos irmãos Ulisses, Fernando, Evangelina, Baby, Luzia, Adonis e Irene, meus primos Carlinhos, Álvaro, Sergio, Sonia, Dedê, Ronaldo e Andréa, Primavera, Denise e à toda a minha família;

— Aos meus outros amigos Moacir, Beto, Sandra, Nelsão, Kid, Mônica e Jussara;

— À Helena, pela impecável datilografia;

— Agradeço, finalmente, ao CNPq pela bolsa e ao "Seu" Manoel pelas intermináveis "penduras"

## RESUMO

Estudamos a dinâmica de uma classe de modelos cosmológicos do tipo Bianchi IX, após reduzirmos as equações de Einstein a um sistema hamiltoniano. Através do método de Melnikov comprovamos a existência de caos na dinâmica destes modelos e em seguida, realizamos alguns experimentos numéricos.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
INTRODUÇÃO .....	1
- Referências .....	6
<u>CAPÍTULO I</u> - A MÉTRICA DE UM ESPAÇO-TEMPO $M^4$ COM TOPOLOGIA $R \times S^3$ .....	8
1.1 - Introdução .....	8
1.2 - Bases Invariantes de Campos de Um-Formas para a Variedade de $M^4$ .....	9
1.3 - A Métrica da Variedade $M^4$ .....	14
- Referências .....	18
<u>CAPÍTULO II</u> - A DINÂMICA DO MODELO .....	19
2.1 - Introdução .....	19
2.2 - As Equações de Einstein .....	19
2.3 - O Universo de Einstein, Perturbação Isotrópica e Perturbação de $S^1$ e $S^2$ .....	21
2.4 - Interação Gravitacional entre $S^1$ e $S^2$ .....	29
- Referências .....	34
<u>CAPÍTULO III</u> - ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS .....	35
3.1 - Introdução .....	35
3.2 - Sistemas Hamiltonianos e Toros Invariantes .....	35
3.3 - Teoria de Perturbação para Sistemas Não-Integráveis e o Problema dos Pequenos Divisores .....	44
3.4 - O Teorema KAM .....	48
3.5 - Mapeamentos que Preservam Área, O Teorema de Poincaré-Birkhoff e os Fenômenos Homoclínicos .....	51

3.6 - O Método de Melnikov .....	65
- Referências .....	71
<u>CAPÍTULO IV</u> - CAOS E BIFURCAÇÕES EM NOSSO MODELO DE UNIVERSO .....	72
4.1 - Introdução .....	72
4.2 - Movimentos Regulares e Caóticos do Nosso Modelo de Universo .....	72
4.3 - Equação de Movimento com Parâmetro Perturbativo Qualquer..	77
- Referências .....	93
<u>APÊNDICE A</u> - O CÁLCULO DOS TENSORES DE RIEMANN E RICCI .....	94
- Referências .....	98
<u>APÊNDICE B</u> - CÁLCULOS DO CAPÍTULO II .....	99
<u>APÊNDICE C</u> - O MAPEAMENTO "FERRADURA" .....	106
- Referências .....	113
<u>APÊNDICE D</u> - CONDIÇÕES DE ENERGIA .....	114
- Referências .....	117

## LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PÁG.</u>
2.3.1 - O potencial $V(B)$ para perturbações isotrópicas .....	23
2.3.2 - O potencial $V(A)$ .....	25
2.3.3 - Plano de fase $\dot{A} \times A$ .....	25
2.3.4 - O potencial $V(q)$ .....	28
2.3.5 - Plano de fase $\dot{q} \times q$ .....	28
3.2.1 - O toro bi-dimensional e as coordenadas geográficas .....	41
3.2.2 - O plano $\theta_1, \theta_2$ .....	42
3.2.3 - Movimento com razões de frequências racionais .....	43
3.2.4 - Movimento com razões de frequências variacionais .....	44
3.5.1 - Mapeamento de Poincaré .....	52
3.5.2 - Curvas invariantes .....	56
3.5.3 - As curvas $\mathbb{R}_\varepsilon$ e $T_\varepsilon^S \mathbb{R}_\varepsilon$ .....	57
3.5.4 - Curvas em torno de um ponto fixo elítico .....	59
3.5.5 - Ponto hiperbólico ordinário e com reflexão .....	60
3.5.6 - Os pontos elíticos em torno de um ponto elítico .....	61
3.5.7 - O ponto hiperbólico e as variedades $H^+$ e $H^-$ .....	62
3.5.8 - Conjunto de pontos hiperbólicos .....	62
3.5.9 - A faixa de instabilidade .....	63
3.5.10 - Sistema integrável perturbado .....	64
3.6.1 - Geometria do cálculo da distância de Melnikov .....	66
4.3.1 - Trajetórias no plano $A \times \dot{A}$ , $\varepsilon = 0.01$ (0.1, 0.0) .....	82
4.3.2 - Estruturas nas trajetórias sobre $A \times \dot{A}$ , $\varepsilon = 0.1$ (0.4, -0.3) .....	83
4.3.3 - Ampliações da Figura 4.2.3 .....	84

4.3.4 - Trajetórias sobre $A \times \dot{A}$ para $\epsilon = 0.8$ , $(0.8, 0.3)$ .....	85
4.3.5 - Bifurcação de um toro em três toros .....	86
4.3.6 - Mapeamento de Poincaré para $\epsilon = 0.992$ , $(0.542, 1.3820)$ .....	87
4.3.7 - Mapeamento de Poincaré para $\epsilon = 2.8$ , $(0.8, 0.1)$ .....	88
4.3.8 - Mapeamento de Poincaré e trajetórias para $\epsilon = 2.8$ , $(0.8, 0.1)$ ...	89
4.3.9 - Três pontos fixos, $\epsilon = 2.828$ , $(1.1664, -0.002)$ .....	90
4.3.10 - Mapeamento de Poincaré para diferentes parâmetros .....	91
4.3.11 - Mapeamento de Poincaré, $\epsilon = 1.5$ , $(0.5, 0.0)$ .....	92
C.1 - Definição do mapeamento "ferradura" .....	110
C.2 - Mapeamento "ferradura" para n positivo .....	111
C.3 - Mapeamento "ferradura" para n negativo .....	112



## INTRODUÇÃO

A Cosmologia Relativística, baseada na concepção de gravitação como curvatura do espaço-tempo, surge como uma das mais impressionantes e belas contribuições da Física Moderna ao acervo cultural da humanidade. Herdeira das pretensões milenares do Homem de explicar o Universo como um todo e armada pela matemática, ela nos oferece uma concepção dinâmica do Cosmos, com profundos reflexos em todos os níveis do conhecimento <sup>(1)</sup>.

Uma das características mais notáveis da Teoria da Gravitação de Einstein é sua não-linearidade intrínseca: todas as formas de energia contribuem para a geração do campo gravitacional - curvatura do espaço-tempo - inclusive a própria energia deste campo ! As equações de Einstein (veja Capítulo II), equações diferenciais parciais acopladas de segunda ordem, não-lineares, relacionam as fontes de energia com suas manifestações gravitacionais.

Equações não-lineares ordinárias e parciais descrevem inúmeros fenômenos físicos, do pêndulo simples à curvatura do espaço-tempo, de partículas num sincrotron a movimentos turbulentos de um fluido. Em Mecânica Clássica, por exemplo, os problemas levam a equações não-lineares que se dividem em duas classes. A primeira, conhecida por todos os físicos, se compõe dos problemas *integráveis* (por exemplo, o de Kepler). Contrariamente à impressão deixada pela maioria dos livros-textos, os problemas não-integráveis (por exemplo, os três corpos da Mecânica Celeste) de modo algum são casos patológicos ou mera curiosidade. De um modo geral,

são fisicamente mais relevantes que os primeiros <sup>(2)</sup> e mais, constituem a classe genérica dos sistemas mecânicos, como mostraremos no Capítulo III, para sistemas Hamiltonianos. O espaço de fase destes sistemas apresenta em geral uma estrutura altamente complexa, com regiões nas quais se desenvolvem movimentos caóticos <sup>(\*)</sup> (também chamados estocásticos). Tal resultado já era conhecido por Poincaré <sup>(3)</sup>, porém nossa compreensão destes sistemas somente avançou com o trabalho de Kolmogorov, Arnold e Moser, que trataram dos efeitos de perturbações não-integráveis e explicaram quando a teoria tradicional de perturbação diverge <sup>(4)</sup>. O principal resultado deles é a prova de que existem regiões regulares no espaço de fase apesar das regiões caóticas. Isto se segue do chamado teorema KAM que afirma a permanência quase inalterada das soluções "quase periódicas" dos sistemas integráveis nos sistemas não-integráveis, em geral.

O advento de computadores de grande porte permitiu o estudo numérico das soluções dos sistemas não-integráveis, confirmando as previsões de Poincaré, Birkoff e do KAM de um espaço de fase onde se misturam regiões estocásticas, regiões bem-comportadas, pontos fixos, etc.

Nos últimos anos assistimos à lenta penetração dessas idéias, que emanaram da Mecânica Clássica, entre os vários ramos da Física e algumas áreas próximas, destacando-se o movimento planetário, feixes e aceleradores, confinamento e aquecimento de partículas carregadas, dinâmica química e sistemas quânticos <sup>(5)</sup>.

Em Cosmologia as propriedades estocásticas foram trata-

---

<sup>(\*)</sup> Este e outros conceitos aqui mencionados serão definidos oportunamente.

das primeiramente nos artigos de Belinskii, Khalatnikov e Lifshitz <sup>(6)</sup>, quando discutiram o colapso gravitacional de uma classe de modelos cosmológicos. Eles mostraram que uma solução cosmológica das equações de Einstein do tipo Bianchi IX se aproxima da singularidade ( $t \rightarrow 0$ ) de uma forma oscilatória, consistindo de uma sequência infinita de períodos, chamados "eras" durante os quais duas das funções de escala (da métrica) oscilam e a terceira decresce monotonicamente. Ao se passar de uma era para outra o comportamento monotônico é transferido para outra das três funções de escala. O tamanho de cada era é determinado por uma sequência de números  $\{X_s \mid 0 < X_s < 1, s = \text{inteiro}\}$ , cada um deles obtido do precedente pela transformação (ou mapeamento)  $X_{s+1} = \text{parte fracionária de } 1/X_s$ . Das propriedades desta transformação os autores citados anteriormente concluíram que o comportamento do modelo se torna estocástico ao se aproximar da singularidade para uma condição inicial arbitrária dada num tempo  $t_0 > 0$ .

Mais tarde, Chernoff e Barrow <sup>(7)</sup> obtiveram um mapeamento que simula o comportamento do Universo Mixmaster <sup>(8)</sup>, apresentando fortes propriedades estocásticas.

Estes trabalhos sugerem que a estocasticidade é uma característica dos mapeamentos que aproximam a dinâmica dos modelos de Universo (descritos pelas equações de Einstein) perto da singularidade cosmológica.

Pretendemos exibir aqui um exemplo de modelo cosmológico no qual o comportamento estocástico no colapso gravitacional deve-se aos fenômenos homoclínicos de Poincaré <sup>(9)</sup>. Como o nosso mapeamento provém diretamente das equações diferenciais acreditamos que estes fenômenos são a característica básica do comportamento caótico no caso geral.

O nosso modelo, que pertence à classe Bianchi IX<sup>(10)</sup> aparece como uma generalização (ou perturbação na geometria) do conhecido Universo de Einstein<sup>(11)</sup>.

O primeiro trabalho sobre perturbações em modelos cosmológicos foi o de Lemaitre<sup>(12)</sup>, no qual ele examinou o Universo de Einstein e demonstrou sua instabilidade<sup>(13)</sup>, pois as equações de Einstein implicam que a amplitude das perturbações iniciais, em primeira ordem, da densidade de matéria do modelo crescem exponencialmente com o tempo, a taxa de crescimento dependendo somente da densidade de matéria presente inicialmente.

A seguir, Lifshitz<sup>(14)</sup> e Lifshitz e Khalatnikov<sup>(15)</sup> analisaram a estabilidade das soluções cosmológicas das equações de Einstein desenvolvendo um método geral de se tratar perturbações em primeira ordem em modelos isotrópicos. Hawking<sup>(16)</sup> também tratou perturbações de modelos cosmológicos usando a formulação quase-Maxwelliana das equações de campo de Einstein<sup>(17)</sup>.

Nos trabalhos citados acima as perturbações são todas em primeira ordem, isto é, apenas termos lineares nas perturbações são mantidos e a dinâmica se dá através das equações de campo linearizadas.

Utilizaremos aqui um tipo de perturbação que denominaremos "exata", a ser discutido oportunamente.

A métrica do nosso espaço-tempo, junto com um exame detalhado da topologia do modelo cosmológico, será apresentada no Capítulo I.

No capítulo seguinte obteremos as equações de evolução do nosso modelo, as quais reduziremos a um sistema Hamiltoniano dependente do tempo no plano. Já então escolhemos o modo particular (e mais simples) de vibração das seções  $S^2$  e  $S^1$  cujo produto

topológico, localmente, compõe  $S^3$ , nossa variedade espacial.

Estabelecidas as equações que estudaremos, faremos um breve apanhado de alguns resultados da teoria de Sistemas Dinâmicos que resultará no Capítulo III. Lá discutiremos sistemas Hamiltonianos, teoria de perturbações para sistemas não-integráveis, o teorema de Poincaré-Birkoff e o teorema KAM, mostraremos a forma genérica de um espaço de fase para sistemas não-integráveis e obteremos a expressão da função "distância de Melnikov".

Finalmente, no Capítulo IV, provaremos a emergência de movimentos estocásticos no sistema em consideração. Discutiremos as implicações físicas de tais movimentos e apresentaremos, a título de ilustração, alguns experimentos numéricos.

A técnica de tetradas ortonormais e os cálculos do Capítulo I estão no Apêndice A. Os cálculos do Capítulo II estão no Apêndice B. Uma breve discussão do mapeamento "ferradura" de Smale ocupa o Apêndice C. Por último, as condições de energia são tratadas no Apêndice D.

## REFERÊNCIAS

- (1) - Gal-Or, B. - *Cosmology, Physics and Physophy*, 1ª edição, Springer-Verlag (1981).
- (2) - Helleman, R.H.G. - *Self-generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics*, em *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 5; E.G.D. Cohen, North-Holland Publ., (1980).
- (3) - Poincaré, H. - *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*. V3, Gauthier-Villars, Paris (1899).
- (4) - Whiteman, K.J. - *Invariant and Stability in Classical Mechanics*, *Rep. Prog. Phys.* 1977, 40, 1033-1069.
- (5) - A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman - *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, (1983), Apêndice A.
- (6) - Belinskii, V.A., Khalatnikov, I.M. e Lifshitz, E.M., *Adv. Phys.* 19, 525 (1970); *Adv. Phys.* 31, 639 (1982). Khalatnikov, I.M., Lifshitz, E.M., Khanin, K.M., Shchur, L.N., Sinai, Ya.G., *Journal of Statistical Physics*, 38, 97 (1985).
- (7) - Chernoff, C.W., e Barrow, J.D., *Phys. Rev. Lett.* 50, 134 (1983); Barrow, J.D., *Phys. Rep.* 85C, 1 (1982).
- (8) - Misner, C.W., *Phys. Rev. Lett.* 22, 1071 (1969).
- (9) - Berry, M.J., "Regular and Irregular Motion", em *Topics in Nonlinear Dynamics*, Ed. S. Jorna, AIP Conference Proceedings (NY, 1978).
- (10) - Bianchi, L. - *Sugli Spazi a tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti*, *Mem. Soc. It. delle Sc. (dei XL)*, 3, (1897), 267.
- (11) - Einstein, A., *Berlin Sitz* (1917), p. 142.
- (12) - G. Lemaître, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 19, 1217 (1917).
- (13) - Novello, M. - *Cosmologia Relativista*, II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, ed. por Novello, M.
- (14) - Lifshitz, E.M., *J. Phys. (URRS)* 10, 116 (1946).

- (15) - Lifshitz, E.M. e Khalatinikov, I.N., Adv. Phys. 12,185 (1963).
- (16) - Hawking, S.W., Ap. J. 145 (1966).
- (17) - M. Novello, J.M. Salim e H. Heintzmann, a ser publicado em "Astronomy and Astrophysics".

## CAPÍTULO I

### A MÉTRICA DE UM ESPAÇO-TEMPO $M^4$ COM TOPOLOGIA $RS^3$

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é a construção de um modelo de universo espacialmente homogêneo <sup>(18)</sup>. Assim o denominaremos porque a variedade espaço-tempo provém do produto topológico de uma reta por uma hipersuperfície tri-dimensional que é órbita de um grupo de isometrias de dimensão três.

Tal modelo possui uma foliação de hipersuperfícies do tipo espacial, cada uma delas homogênea. Todos os pontos nesta seção espacial são fisicamente equivalentes, evoluindo globalmente no tempo à medida que passamos de uma seção espacial à outra.

Utilizaremos como hipersuperfície espacial a tri-esfera  $S^3$ , de modo que teremos seções espaciais fechadas (compactas).

Após definirmos nossa variedade como um grupo de Lie, exibiremos os campos vetoriais invariantes sobre  $S^3$  e então, examinando a topologia de  $S^3$ , postularemos a métrica de nosso modelo de universo.

Nossas principais referências serão Oszvath e Schüking <sup>(19)</sup>, e Assad <sup>(20)</sup>.



## 1.2 - BASES INVARIANTES DE CAMPOS DE UM-FORMAS PARA A VARIEDADE $M^4$

O espaço-tempo de nosso modelo de Universo será definido como o grupo de Lie <sup>(21)</sup> simplesmente conexo  $S^3 \times R$ , com uma métrica invariante à esquerda introduzida sobre  $M^4 = R \times S^3$  que é solução das equações de campo de Einstein para um fluido perfeito.

Seja  $E^4$  o espaço euclidiano quadridimensional com coordenadas cartesianas

$$a = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad . \quad (1.2.1)$$

Definimos  $S^3$  como o conjunto de pontos em  $E^4$  que satisfazem

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1 \quad . \quad (1.2.2)$$

Para quaisquer  $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ ,  $b = (b^0, b^1, b^2, b^3) \in S^3$  definimos a lei de multiplicação

$$ab = \left\{ \begin{array}{l} a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 , \\ a^0 b^1 + a^1 b^0 + a^2 b^3 - a^3 b^2 , \\ a^0 b^2 - a^1 b^3 + a^2 b^0 + a^3 b^1 , \\ a^0 b^3 + a^1 b^2 - a^2 b^1 + a^3 b^0 \end{array} \right\} \quad (1.2.3)$$

Sob a operação (3),  $S^3$  torna-se um grupo atuando sobre si mesmo por multiplicação à esquerda, ou seja: para um dado  $v \in S^3$ , uma translação à esquerda de  $S^3$  em si mesmo é expressa por

$$a' = va \quad (1.2.4)$$

e de (3) temos que  $a' \in S^3$ , para todo  $a \in S^3$ . Como para qualquer  $a \neq 0$  existe uma única translação à esquerda de  $a \in S^3$  para um dado  $a' \in S^3$ ,  $S^3$  é um grupo simplesmente transitivo.

$S^3$  agindo sob si mesmo pela multiplicação à esquerda (3) é um grupo de Lie com os três campos vetoriais independentes invariantes à esquerda sobre  $S^3$  que se seguem:

$$\begin{aligned} e_1^\mu &= (-a^1, a^0, a^3, -a^2) \\ e_2^\mu &= (-a^2, -a^3, a^0, a^1) \\ e_3^\mu &= (-a^3, a^2, -a^1, a^0) \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

onde um campo vetorial invariante à esquerda  $X$  sobre um grupo  $G$  é definido por

$$vX(a) = X(va) \quad , \quad (1.2.6)$$

para quaisquer  $v, a \in G$ .

Os campos vetoriais (5) são obtidos por uma translação arbitrária à esquerda a dos três vetores unitários independentes  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  que definem o espaço tangente a  $S^3$  numa vizinhança da identidade  $(1, 0, 0, 0)$ .

Para translações à direita do grupo de Lie  $S^3$  em si mesmo temos resultados análogos. Seguindo (4), definiremos tal translação por

$$a' = av \quad (1.2.7)$$

com os campos vetoriais independentes invariantes à direita sobre  $S^3$  correspondentes

$$\begin{aligned} f_1^\mu &= (-a^1, a^0, -a^3, a^2) \\ f_2^\mu &= (-a^2, a^3, a^0, -a^1) \\ f_3^\mu &= (-a^3, -a^2, a^1, a^0) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Definindo o comutador de dois campos vetoriais  $e, f$  por

$$[e, f] = L_e f \quad , \quad (1.2.9)$$

onde  $L_e f$  é a derivada de Lie de  $f$  com relação a  $e$ , temos que

$$[e_i, f_j] = 0 \quad . \quad (1.2.10)$$

As bases (5) e (8) expressas como

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{2} e_1^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \\ X_2 &= -\frac{1}{2} e_3^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \\ X_3 &= -\frac{1}{2} e_2^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

e

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{1}{2} f_1^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \\ Y_2 &= -\frac{1}{2} f_3^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \\ Y_3 &= -\frac{1}{2} f_2^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

fornecem as representações da álgebra de  $S^3$

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k \quad (1.2.13)$$

e

$$[Y_i, Y_j] = -\varepsilon_{ijk} Y_k \quad . \quad (1.2.14)$$

O fato de o grupo de rotações tri-dimensional ser o  $S^3$  nos motiva a introduzir os ângulos de Euler  $(\chi, \theta, \phi)$ , com  $0 < \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \chi, \phi < 2\pi$  como coordenadas sobre nossa variedade. As transformações de coordenadas cartesianas de  $E^4$  para coordenadas sobre  $S^3$  são dadas por (22)

$$\begin{aligned} a^0 &= \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi + \chi}{2} \\ a^1 &= -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi - \chi}{2} \\ a^2 &= \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi - \chi}{2} \\ a^3 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \chi}{2} \quad . \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Os campos vetoriais invariantes à esquerda (10), nessas coordenadas, são (20):

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial \chi} \\ X_2 &= \cos \chi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \operatorname{cotg} \theta \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \\ X_3 &= -\sin \chi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \operatorname{cotg} \theta \cos \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

com as um-formas invariantes correspondentes

$$\begin{aligned} \omega^1 &= d\chi + \cos \theta d\phi \\ \omega^2 &= \cos \chi d\theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi d\phi \\ \omega^3 &= -\operatorname{sen} \chi d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \chi d\phi \quad . \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

(16) e (17) são duais

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i \quad (1.2.18)$$

e (17) satisfaz

$$d\omega^i = -\varepsilon^{ijk} \omega^j \wedge \omega^k .$$

Sobre a variedade unidimensional  $R$ , isomorfa à reta infinita, introduzimos a coordenada  $t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) com campo vetorial e um-forma associada dados por, respectivamente

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2.19)$$

$$\omega^0 = dt$$

que satisfazem

$$[X_0, X_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2.20)$$

$$d\omega^0 = 0 .$$

Portanto, a variedade  $R \times S^3$  é o grupo de cobertura universal da álgebra (13) e (20), com

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) \quad (1.2.21)$$

e

$$(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (1.2.22)$$

constituindo, respectivamente, as bases para os campos vetoriais e um-formas sobre a variedade  $M^4$ .

### 1.3 - A MÉTRICA DA VARIEDADE $M^4$ (24)

Vamos introduzir inicialmente sobre a variedade  $M^4 = R \times S^3$  uma métrica Lorentziana estática invariante à esquerda, usando para isto as um-formas (22) e os campos vetoriais (20), que são bases, respectivamente, para as um-formas e para os campos vetoriais sobre a variedade.

Este elemento de linha é dado por (19)

$$g = (\omega_0)^2 - \lambda^2 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] \quad (1.3.1)$$

ou

$$g(X_a, X_b) = \text{diag}(1, -\lambda^2, -\lambda^2, -\lambda^2) \quad a, b=0, 1, 2, 3 \quad (1.3.2)$$

onde  $\lambda^2 = \text{constante}$ . Por construção, este elemento de linha claramente terá os vetores (2.12) como vetores de Killing devido a (2.10).

Sabemos que a tri-esfera  $S^3$  possui estrutura de um fibrado, de base  $S^2$  e fibra homeomorfa a  $S^1$  (23). Isto significa que, localmente,  $S^3$  possui a estrutura  $S^1 \times U$ , onde  $U \subset S^2$ .

Para explicitarmos a decomposição da métrica (1) ou (2) de acordo com a fatoração  $S^3 = S^1 \times U$ ,  $U \subset S^2$ , notemos inicialmente que o campo vetorial  $X_1$  é definido sobre  $S^1$ . Vamos então decompor o espaço vetorial tangente a  $S^3$  relativamente a  $X_1$ .

É claro que podemos sempre decompor um vetor deslocamento arbitrário  $dx^\alpha$  num certo ponto do espaço tangente a  $S^3$ , do seguinte modo:

$$dx^\alpha = \alpha X_1^\alpha + \beta^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.3.3)$$

onde

$$\beta_{\alpha} X_1^{\alpha} = 0 \quad , \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (1.3.4)$$

e  $X_1$  é o campo vetorial definido sobre  $S^1$ .

As equações (4) e (5) implicam em

$$\alpha = dx^{\alpha} X_{1\alpha} \quad (1.3.5)$$

e

$$\beta^{\alpha} = \left( g^{\alpha}_{\lambda} - \frac{X_{1\lambda} X_1^{\alpha}}{(X_1)^2} \right) dx^{\lambda} \quad (1.3.6)$$

onde a métrica  $g_{\alpha\lambda}$  vem ao escrevermos a expressão (2) para  $t = cte$  na forma

$$-d\Sigma^2 = g_{\alpha\lambda} \sigma^{(\alpha)}_{\sigma} \sigma^{(\lambda)}_{\sigma} \quad (1.3.7)$$

$$g_{\alpha\lambda} = \text{diag}(1, 1, \text{sen}^2\theta) \quad (1.3.8)$$

e definimos as novas um-formas como

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &\equiv \omega^1 = d\chi + \cos\theta d\phi \\ \sigma^{(2)} &= d\theta \\ \sigma^{(3)} &= d\phi \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Aqui definimos um operador de projeção  $h^{\alpha}_{\lambda}$  sobre o espaço local ortogonal a  $X_1$ :

$$h^{\alpha}_{\lambda} = g^{\alpha}_{\lambda} - \frac{X_{1\lambda} X_1^{\alpha}}{(X_1)^2} \quad (1.3.10)$$

Assim, temos o espaço vertical paralelo a  $\alpha X_1^{\alpha}$ , gerado pelo vetor  $X_1$ , possuindo um-forma associada  $\sigma^{(1)}$  e métrica

$$g_V : g_V(X_1, X_1) = 1 \quad (1.3.11)$$

e o espaço horizontal, perpendicular a  $X_1$ , possuindo métrica

$$g_H: (g_H)_{mn} \equiv h_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.3.12)$$

(m,n=2,3)

que reconhecemos como a da esfera  $S^2$ . Este espaço é gerado pelos campos vetoriais

$$Y_{(2)} = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$Y_{(3)} = \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \chi} \quad . \quad (1.3.13)$$

Podemos então reescrever a expressão (2) como

$$-d\Sigma^2 = g_V(X_1, X_1) (\sigma^{(1)})^2 + (g_H)_{mn} \sigma^{(m)} \sigma^{(n)} \quad (1.3.14)$$

(m,n=2,3)

de acordo com a decomposição local  $S^1 \times U$ ,  $U \subset S^2$ .

Finalmente, usando a propriedade de  $S^3$  discutida acima, definiremos nosso elemento de linha (\*)

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - A^2(t) g_V(X_1, X_1) (\sigma^{(1)})^2 - B^2(t) (g_H)_{mn} \sigma^{(m)} \sigma^{(n)}, \quad (1.3.15)$$

onde fizemos os raios dos setores da geometria  $S^1$  e  $S^2$ , A e B, respectivamente, dependentes do tempo, de modo que as seções  $t = \text{constante}$  têm a estrutura de  $S^3$ .

Esta construção é equivalente à escolha das componentes não-nulas do tensor métrico, descritas na base dos campos vetoriais invariantes à esquerda, eq. (2.21), como sendo

---

(\*) Faremos sempre  $c = 1$ .



$$g_{00} = g (X_0, X_0) = 1$$

$$g_{11} = g (X_1, X_1) = -B^2(t)$$

$$g_{22} = g (X_2, X_2) = -B^2(t)$$

$$g_{33} = g (X_3, X_3) = -A^2(t) \quad .$$

(1.3.16)

## REFERÊNCIAS

- (18) - Ryan Jr., M.P.; Shepley, L.C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princeton University Press, 1975.
- (19) - Schüking, E.; Ozsvath, I. - The Finite Rotating Universe , Ann. Phys., 55, (1969), 166.
- (20) - Assad, M.J.D., Tese de Mestrado, CBPF, 1980.
- (21) - Cohn, P.M. - Lie Groups, 1ª edição, Cambridge University Press, (1957).
- (22) - Goldstein, H. - Classical Mechanics, 2ª edição, Addison Wesley Publishing Company, (1980).
- (23) - N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, Princeton (N.J., 1951).
- (24) - Soares, I.D.S. e de Mello Neto, J.R.T., The Stability of the Einstein Universe RBF, 14, (1984), 377.

## CAPÍTULO II

### A DINÂMICA DO MODELO

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Usando as equações de Einstein estabeleceremos neste capítulo a dinâmica de nosso modelo de Universo. Discutiremos os casos do Universo de Einstein e perturbações em sua geometria. Inicialmente estudaremos o caso isotrópico quando identificaremos numa mesma função do parâmetro temporal os raios dos setores  $S^1$  e  $S^2$ . A seguir faremos os raios dos setores  $S^1$  e  $S^2$  dependentes do tempo, separadamente, e finalizaremos com as equações do movimento do setor  $S^1$  sendo excitado gravitacionalmente pelo movimento do setor  $S^2$ .

#### 2.2 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Nas equações de campo da teoria da gravitação de Einstein ( $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  são índices de coordenadas)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (2.2.1)$$

$R_{\alpha\beta}$  é o tensor de Ricci,  $R = R^\alpha_\alpha$  o escalar de curvatura,  $\Lambda$  a "constante cosmológica" e  $T_{\alpha\beta}$  o tensor momento-energia <sup>(25)</sup>.

Como conteúdo material de nosso modelo tomamos um fluido perfeito com densidade de matéria-energia  $\rho$  e pressão  $p$ , medidas localmente pelos observadores co-móveis com campo de quadri-velocidade  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Num referencial de Lorentz local adaptado ao campo  $\frac{\partial}{\partial t}$  (ver Apêndice A) o tensor momentum-energia terá a forma prescrita pela Relatividade Restrita (18)

$$T_{AB} = (\rho+p)\delta_A^0\delta_B^0 - p\eta_{AB} \quad (2.2.2)$$

(A,B=0,1,2,3)

onde  $\delta_A^0$  possui componentes (1,0,0,0). As componentes não-nulas de  $T_{AB}$  são

$$T_{00} = \rho \quad , \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = p \quad . \quad (2.2.3)$$

As equações de Einstein no referencial de Lorentz local definido por (A.26)

$$R_{AB} - \frac{1}{2}R\eta_{AB} + \Lambda\eta_{AB} = \kappa T_{AB} \quad (A,B=0,1,2,3)$$

para o elemento de linha (1.3.15) e para o fluido acima, se reduzem às seguintes equações independentes (\*) (as componentes do tensor de Ricci e o escalar de curvatura estão calculados no Apêndice A)

---

(\*) o ponto denota derivação relativamente à coordenada  $t$ .

(A = B = 0)

$$-\frac{A^2}{4B^4} + \frac{2\ddot{A}\dot{B}}{AB} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \frac{1}{B^2} + \Lambda = \kappa\rho \quad (2.2.4)$$

(A = B = 1)

$$-\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{3}{4}\frac{A^2}{B^4} - \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} - \Lambda = \kappa\rho \quad (2.2.5)$$

(A = B = 2) = (A = B = 3)

$$-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{A^2}{4B^4} - \frac{\ddot{A}\dot{B}}{AB} - \Lambda = \kappa\rho \quad . \quad (2.2.6)$$

Tomaremos as equações (4) e (5) como definições da densidade de matéria-energia  $\rho$  e pressão  $p$ , respectivamente.

Uma expressão que relacione apenas A, B e suas derivadas pode ser obtida se subtrairmos a eq. (6) da eq. (5), obtendo

$$\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{A^2}{B^4} - \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} + \frac{\ddot{A}\dot{B}}{AB} = 0 \quad . \quad (2.2.7)$$

Esta equação, que relaciona de uma forma não-trivial os movimentos dos setores  $S^1$  e  $S^2$  em interação via gravitação, ocupa um lugar de destaque neste trabalho.

### 2.3 - O UNIVERSO DE EINSTEIN, PERTURBAÇÃO ISOTRÓPICA E PERTURBAÇÃO DE $S^1$ E $S^2$ (24)

Quando  $A^2 = B^2 = L^2$  na métrica (1.3.15), obtemos o Uni -

verso de Einstein, com a eq. (2.7) satisfeita identicamente. As equações (2.4.5 e 6) fornecem as bem conhecidas relações <sup>(26)</sup>:

$$\frac{1}{2L^2} = -2\Lambda = \kappa\rho$$

com  $p = 0$ .

Examinemos as perturbações na geometria deste modelo

a) Perturbação Isotrópica ( $A = B$ )

Faremos aqui a versão exata (sem aproximações) das perturbações de Lemaitre <sup>(12)</sup>.

Para  $A = B$  a equação (2.7) é satisfeita identicamente. As equações (2.5 e 6), com  $p = 0$ , fornecem

$$4 \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 + \frac{1}{2B^2} + 2\Lambda = 0 \quad . \quad (2.3.1)$$

Introduzindo um novo parâmetro temporal,  $\eta$ , definido por

$$d\eta = B^{-1/2} dt \quad (2.3.2)$$

a equação (1) se torna <sup>(\*)</sup>

$$B'' + \frac{\Lambda}{2} B^2 + \frac{1}{8} = 0$$

que provém do hamiltoniano independente do tempo

$$H = \frac{1}{2} (B')^2 + V(B) = C \quad (2.3.3)$$

---

<sup>(\*)</sup> o sinal ' significa derivada com relação a  $\eta$ .

com

$$V(B) = \frac{1}{8} B + \frac{\Lambda}{6} B^3, \quad (2.3.4)$$

onde  $C$  é uma constante.

O caso de interesse físico é o de  $\Lambda = \Lambda_E < 0$  (o índice  $E$  sempre se referirá ao modelo de Einstein).

Para este caso, a Figura 1 mostra o gráfico  $V(B)$  e as regiões de  $B$  onde surgem as soluções do tipo Friedmann, soluções tipo de Sitter e o caso limite da solução de Sitter.

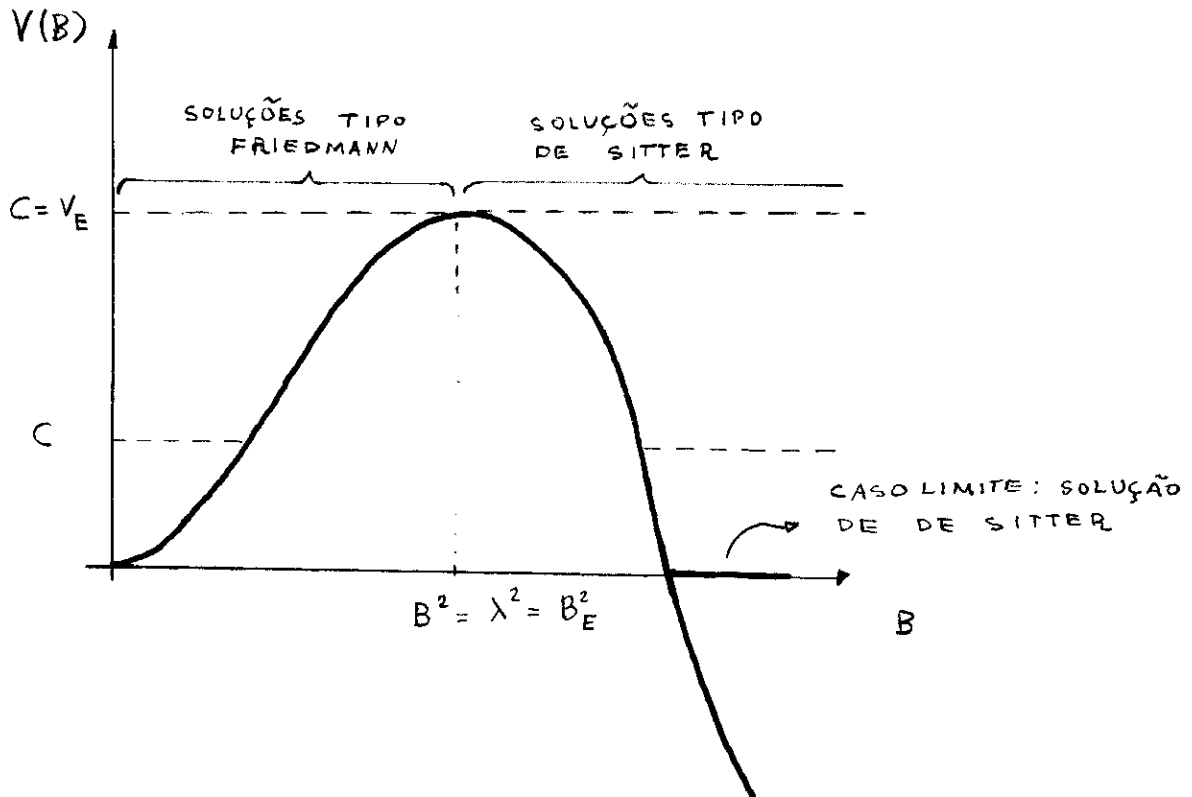


FIGURA 2.3.1 - O potencial  $V(B)$  para perturbações isotrópicas.

Este caso limite se aclara quando usando as expressões (3) e (2.4), calculamos a expressão da densidade de matéria-energia

$$\kappa\rho = \frac{6C}{B^3}$$

para este modo de perturbação.

As perturbações de Lemaitre correspondem a perturbações linearizadas na vizinhança de  $B^2 = \lambda^2 = B_E^2$ . Nestas, a perturbação na densidade de matéria-energia cresce exponencialmente (27):

$$\delta\rho = \delta\rho_0 e^{\sqrt{\kappa\rho_0} t} \quad . \quad (2.3.5)$$

#### b) Perturbação Exata do Setor $S^1$

Suponhamos que apenas o raio do setor  $S^1$  varie no tempo. Faremos então o raio da 2-esfera permanecer fixo,  $B^2 = L^2 = B_E^2$ . Assim a eq. (2.7) se torna

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{A^2}{L^4} - \frac{1}{L^2} = 0 \quad , \quad (2.3.6)$$

que provém do hamiltoniano independente do tempo

$$H = \frac{(\dot{A})^2}{2} + V(A) = D \quad (2.3.7)$$

onde

$$V(A) = \frac{A^4}{4L^4} - \frac{A^2}{2L^2} \quad (2.3.8)$$

e  $D$  é uma constante.



A Figura 2 apresenta um esboço de  $V(A)$ . O plano de fase associado ao movimento sob a influência desse potencial está na Figura 3.

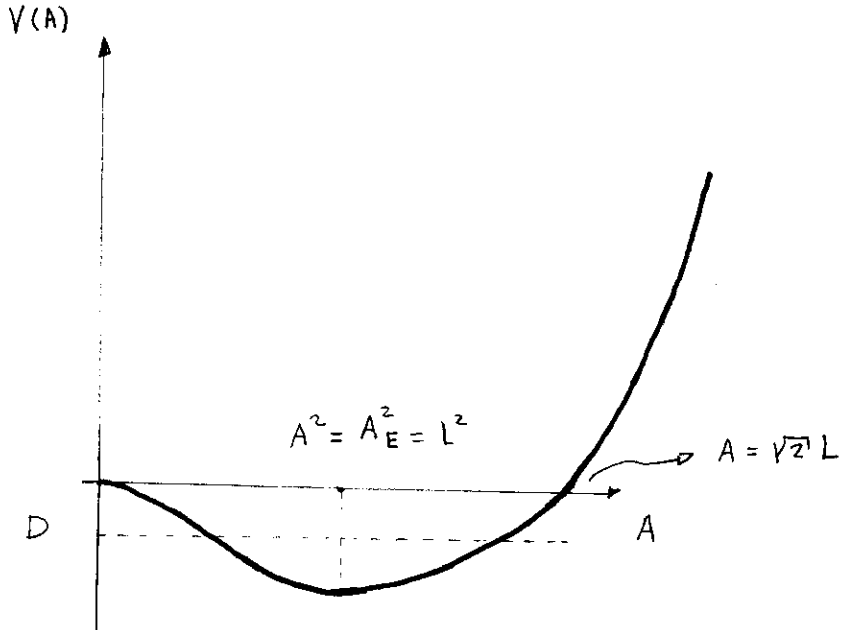


FIGURA 2.3.2 - O potencial  $V(A)$ .

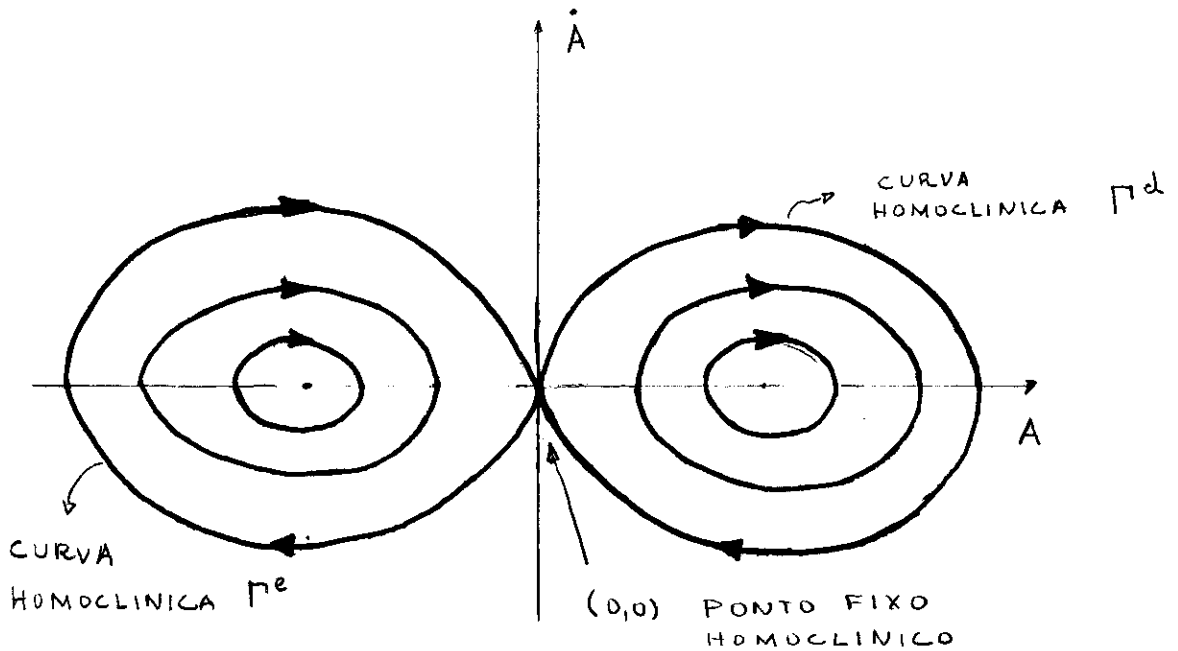


FIGURA 2.3.3 - Plano de fase  $\dot{A} \times A$ .

Embora do ponto de vista de sistemas dinâmicos, tanto o domínio não-positivo quanto o não-negativo sejam igualmente admissíveis, nos restringiremos ao último já que o eixo  $A = 0$  corresponde a uma singularidade física do modelo: divergência de  $\rho, p$  e dos invariantes geométricos.

Observe que o mínimo do potencial na Figura 2 se dá quando  $A = L = A_E$ , ou seja, a configuração do universo de Einstein é um ponto de estabilidade desta classe de modelos.

Por outro lado, na Figura 3 temos curvas fechadas em torno do ponto  $(A_E, 0)$  limitadas pela curva homoclínica (\*)  $\Gamma^d$ . Cada trajetória periódica corresponde a uma solução cosmológica exata e estável, dependendo do parâmetro de "energia"  $D$  e que pode ser confinada em qualquer vizinhança do ponto de estabilidade  $(A_E, 0)$  por uma escolha conveniente da constante de integração.

Para este modo de perturbação, a expressão (2.4), definição de  $\rho$ , se torna

$$\kappa\rho = \Lambda + \frac{1}{L^2} - \frac{A^2}{4L^4} \quad (2.3.9)$$

e a pressão

$$\kappa p = -\Lambda - \frac{1}{L^2} + \frac{3}{4} \frac{A^2}{L^4} \quad (2.3.10)$$

Nestas trajetórias periódicas podemos sempre fazer com que as condições de energia sejam obedecidas por intermédio de uma escolha conveniente dos parâmetros  $\Lambda$  e  $D$  (veja Apêndice D).

---

(\*) curva homoclínica será definida no próximo capítulo.

c) Perturbação Exata do Setor  $S^2$

Agora faremos com que apenas o raio de  $S^2$  dependa do parâmetro temporal, enquanto mantemos o de  $S^1$  constante,  $A^2=L^2=A_E^2$ . Neste caso a equação (2.7) aparece como

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \frac{1}{B^2} - \frac{L^2}{B^4} = 0 \quad . \quad (2.3.11)$$

A expressão

$$\dot{B}^2 = -1 + \frac{2L^2 \ln B}{B^2} + \frac{E}{B^2} \quad (2.3.12)$$

é uma integral primeira de (11), E sendo uma constante de integração. Se introduzirmos uma nova variável  $q = B^2(t)$ , a equação (3) é reescrita como

$$\ddot{q} = -2 + \frac{2L^2}{q} \quad . \quad (2.3.13)$$

O hamiltoniano

$$H = \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q) = 2E \quad (2.3.14)$$

com

$$V(q) = 2q - 2L^2 \ln q$$

fornece a equação de movimento (13). O gráfico do potencial e o plano de fase associado são dados pelas Figuras 4 e 5, respectivamente.

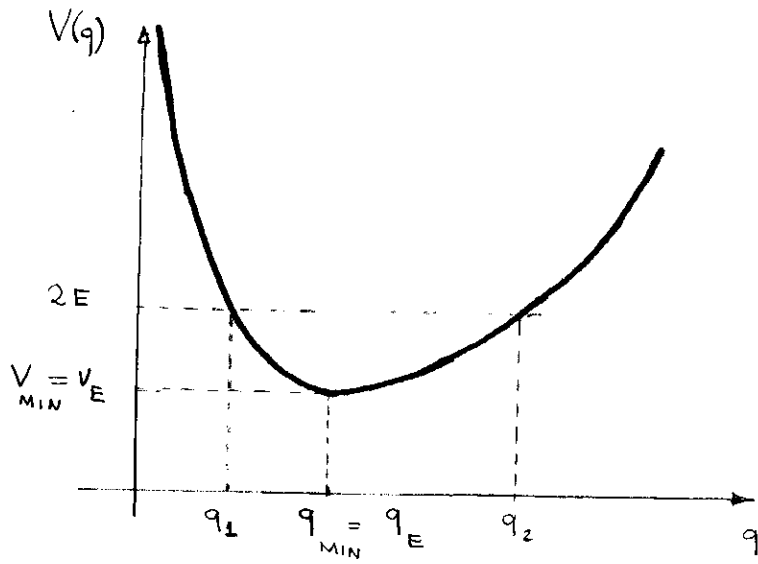


FIGURA 2.3.4 - O potencial  $V(q)$ .

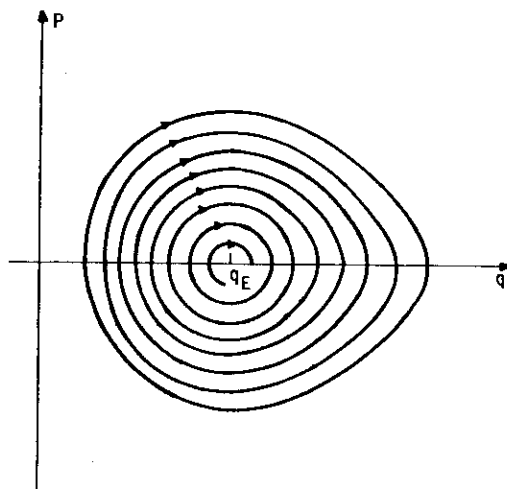


FIGURA 2.3.5 - Plano de fase  $\dot{q} \times q$ .

Usando as equações (12) e (13) expressamos  $\rho$  e  $p$  em função de  $q$ :

$$\kappa\rho = \frac{2L^2 \ln q + 2E - L^2/2}{2q^2} + \Lambda$$

$$\kappa p = \frac{2L^2 \ln q + 2E - 5L^2/2}{2q^2} - \Lambda$$

Para as trajetórias periódicas  $B(t)$  também a configuração do Universo de Einstein é um ponto de estabilidade desta classe de modelos. Elas também correspondem a uma solução cosmológica exata e estável, como discutido no caso anterior, obedecendo às condições de energia (veja Apêndice D), selecionadas pelo parâmetro  $\epsilon^2 = 2E - V_{\min.}$  e com um período de oscilação dado por

$$T = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2E - V(q)}}$$

(ver Figura 4), onde  $q_1$  e  $q_2$  são os pontos de retorno de um movimento neste poço com energia  $2E$ .

## 2.4 - INTERAÇÃO GRAVITACIONAL ENTRE $S^1$ E $S^2$

Passaremos agora ao tratamento de um tipo mais complicado de movimento. Trata-se da oscilação do setor  $S^1$  excitado pelo setor  $S^2$ . Essa excitação se dá via gravitação no sentido de que é governada pela equação (2.7).

Se supusermos que conhecemos uma solução periódica exata

(3.12),  $B(t, \epsilon)$ , podemos substituir o termo  $\frac{\ddot{B}}{B}$  (retirado de (3.4))

$$\frac{\ddot{B}}{B} = - \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} + \frac{L^2}{B^4}$$

na equação (2.7) e obter

$$\ddot{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{B} + \frac{1}{B^4} \{A^3 - L^2 A\} = 0 \quad . \quad (2.4.1)$$

Definindo um novo parâmetro temporal,  $\eta$ , através de

$$d\eta = B^{-1}(t, \epsilon) dt \quad (2.4.2)$$

a equação (1) pode ser reescrita como<sup>(\*)</sup> (ver Apêndice B)

$$A'' + \frac{1}{B^2(t, \epsilon)} \{A^3 - L^2 A\} = 0 \quad . \quad (2.4.3)$$

É claro que para  $B^2(t, \epsilon) = L^2$  recaímos no caso (b), analisado na seção anterior.

Discutamos a aproximação linear da equação (3). Suponhamos que os setores  $S^1$  e  $S^2$  oscilem nas vizinhanças do Universo de Einstein:  $A = B = L$ . No Apêndice B mostramos que, em primeira ordem em  $\epsilon$ , a função  $B^2(t, \epsilon)$  é dada por

$$B_{(1)}^2(\eta, \epsilon) = 1 + \epsilon \cos(\nu_0 \eta) + O(\epsilon^2) \quad , \quad (2.4.4)$$

(\*)

O sinal (·) significa derivação relativamente à variável  $\eta$ .

na qual o índice (') indica primeira aproximação e  $v_0 = \sqrt{2}$ . (Fizemos o raio do universo de Einstein  $L = 1$ .)

Para um movimento na vizinhança do ponto  $(1,0)$ , desenvolvendo-se no fundo do poço da Figura 3.2, definimos uma nova variável

$$u = A - L = A - 1 \quad ,$$

de tal modo que reescrevemos a equação (1) - retendo apenas termos em primeira ordem em  $u$  quando expandimos  $V(A)$ , eq. (3.8) em torno de  $A = 1$  - na forma

$$u'' + \frac{2}{B_{(1)}^2(\eta, \epsilon)} u = 0 \quad . \quad (2.4.5)$$

Como estamos supondo a perturbação  $\epsilon$  muito pequena, a equação (5) se torna

$$u'' + 2(1 - \epsilon \cos \sqrt{2} \eta) u = 0 \quad , \quad (2.4.6)$$

que é uma equação de Mathieu<sup>(28)</sup> com parâmetros na região de instabilidade: a amplitude de oscilação cresce pois há ressonância entre frequência de oscilação natural do sistema e a da perturbação.

Fisicamente, temos que qualquer flutuação do raio  $A$  em torno da posição de equilíbrio  $(1,0)$  - para o modo particular de interação entre  $S^1$  e  $S^2$  que estamos examinando - leva ao crescimento do raio  $A$  e portanto, a equação aproximada (5) não mais se aplica. Estudaremos esta situação no Capítulo 4.

O próximo passo consiste no estabelecimento da função  $B^2(t, \epsilon)$ . Ela depende do tempo cosmológico  $t$ , o mesmo utilizado na equação (1).

A primeira aproximação para  $B^2(t, \epsilon)$  só pode ser um movimento harmônico de amplitude muito pequena, correspondendo a uma leve oscilação do setor  $S^2$  em torno de sua posição de equilíbrio. Assim,

$$B_{(1)}^2(t, \epsilon) = L^2 + L\epsilon \cos v_0 t + O(\epsilon^2) \quad (2.4.7)$$

com  $v_0 = \sqrt{2}/L$  (ver Apêndice B).

Também no Apêndice B mostramos que a aproximação em segunda ordem em  $\epsilon$  para a função  $B^2(t, \epsilon)$  é

$$B^2(t, \epsilon) = L^2 + L \cos v_0 t + \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2v_0 t \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.4.8)$$

Por outro lado, as derivadas na equação (3) são realizadas relativamente ao parâmetro temporal  $\eta$ . Seria conveniente, portanto, possuímos as expressões das funções  $B_{(1)}^2(t, \epsilon)$  e  $B_{(2)}^2(t, \epsilon)$  em termos do parâmetro  $\eta$ , ao estudarmos a eq. (3) no Capítulo 4.

Mais uma vez nos referimos ao Apêndice B para o cálculo das expressões análogas às equações (7) e (8) em termos da variável  $\eta$ , uma das quais antecipamos em (4), a outra sendo

$$B_{(2)}^2(\eta, \epsilon) = L^2 + L\epsilon \cos Lv_0 \eta + \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 Lv_0 \eta - \frac{1}{6} \cos 2Lv_0 \eta \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.4.9)$$

A expressão (4) nos informa que em primeira ordem em  $\epsilon$



a troca do parâmetro  $t$  pelo parâmetro  $\eta$  não modifica a forma da expressão (4). No entanto a equação (9) difere significativamente da equação (8).

Reduzimos a equação de Einstein (2.7) à equação diferencial (1), para o modo de interação particular que escolhemos. No próximo capítulo veremos alguns resultados da teoria de sistemas dinâmicos planares, principalmente hamiltonianos, que empregamos no estudo da equação acima a ser realizado no Capítulo 4.

## REFERÊNCIAS

- (25) - Soares, I.D.S. - Notas do Curso de Relatividade Geral, CBPF 1982.
- (26) - Anderson, J.L. - Principles of Relativity Physics, 1ª edição, Academic Press (1967).
- (27) - Novello, M. - Cosmologia Relativista, II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, 1979.
- (28) - Campbell, R. - Théorie Générale de l'Equation de Mathieu, Masson & Cie. Éditeurs, 1955.

## CAPÍTULO III

### ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Apresentaremos a descrição hamiltoniana de um sistema dinâmico clássico com a qual discutiremos rapidamente a teoria de perturbação para sistemas não-integráveis. Aqui mostraremos de onde surge o problema dos pequenos divisores da Mecânica Celeste como motivação para abordarmos qualitativamente o teorema KAM e o teorema de Poincaré-Birkoff, que serão estudados na versão de mapeamentos.

A seguir digressionaremos de forma qualitativa sobre movimentos altamente irregulares (caóticos) de natureza homoclínica. Finalmente, de um modo bastante simples, deduziremos a função distância de Melnikov, um resultado da teoria de perturbação em sistemas dinâmicos que indica a presença de fenômenos homoclínicos.

Utilizaremos como principais referências Berry<sup>(30)</sup>, Lichtenberg e Lieberman<sup>(9)</sup> e Arnold e Avez<sup>(31)</sup>.

#### 3.2 - SISTEMAS HAMILTONIANOS E TOROS INVARIANTES

Vamos supor que o sistema dinâmico em consideração seja

hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade. Para descrevê-lo necessitamos de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$  e seus  $n$  momentos conjugados  $p_i$ . Neste espaço de dimensão  $2n$ , denominado espaço de fases, o estado do sistema num determinado instante pode ser pensado como um ponto cujo movimento informa a evolução temporal deste sistema. Obtém-se tal movimento através da função hamiltoniana  $H(q_i, p_i, t)$  que o determina com as seguintes equações <sup>(22)</sup>:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.2.1a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.2.1b)$$

Como é sempre possível converter uma hamiltoniana dependente do tempo numa que não o seja pela adição de mais um grau de liberdade ao sistema, utilizaremos em nossas discussões uma hamiltoniana  $H = H(\vec{q}, \vec{p})$ , independente do tempo.

Um sistema hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade possui localmente  $2n-1$  constantes de movimento independentes do tempo. A questão crucial é quantas destas podem ser definidas globalmente.

Tal sistema é dito completamente integrável quando existirem  $n$  integrais primeiras, independentes, analíticas, monovalentes e em involução, ou seja,  $n$  funções

$$F_m(q_i, p_i) \quad , \quad m = 1, \dots, n \quad (3.2.2)$$

que são constantes,  $f_m$ , ao longo de cada trajetória do sistema. Dizemos que um conjunto de funções está em involução quando o parêntesis de Poisson de quaisquer duas delas for identicamente nulo:

$$\{F_m, F_n\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_m}{\partial p_i} \frac{\partial F_n}{\partial q_i} - \frac{\partial F_n}{\partial p_i} \frac{\partial F_m}{\partial q_i} \right) \quad . \quad (3.2.3)$$

Se fizermos uma transformação canônica para um novo conjunto de variáveis,  $\bar{q}_i$  e  $\bar{p}_i$ , considerando os novos momentos conjugados  $\bar{p}_i$  as próprias constantes  $f_m$ , teremos como solução do nosso problema

$$q_i = q_i(t; f_i, \delta_i) \quad , \quad (3.2.4)$$

onde os  $\delta_i$  são constantes de integração que, junto com as constantes  $f_i$ , são determinadas pelas condições iniciais.

Todos os sistemas que podem ser resolvidos exatamente, em Mecânica Clássica, são integráveis deste modo.

A existência dessas  $n$  constantes de movimento  $F_m$  em involução restringe o movimento do ponto representativo do sistema no espaço das fases (dimensão  $2n$ ) a, no máximo, uma variedade  $m_f$  de dimensão  $n$ .

Mostraremos a seguir que essa variedade  $m_f$  é um toro de dimensão  $n$ . Dadas estas  $n$  constantes  $F_m$  em involução, construíamos  $n$  campos vetoriais  $V_m$  de  $2n$  componentes no espaço de fase:

$$V_m = \left( \frac{\partial F_m}{\partial p_i} , - \frac{\partial F_m}{\partial q_i} \right) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (3.2.5)$$

Sobre cada variedade  $m_f$ , definida ao fixarmos os valores das constantes  $f_m$  em (2), os campos vetoriais  $V_m$  são "bem comportados" e independentes (pois assim são as funções  $F_m$ ). Além disso são tangentes à variedade  $m_f$ , já que por (3) cada  $V_m$  é perpendicular a todos os campos vetoriais normais a  $M_F$ , definidos por

$$N_m = \left( \frac{\partial F_m}{\partial q_i}, \frac{\partial F_m}{\partial p_i} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.6)$$

pois

$$V_m \cdot N_n = \{F_m, F_n\} = 0 \quad (3.2.7)$$

para todo  $m$  e  $n$ . Os campos vetoriais  $V_m$  são paralelizáveis no sentido de que

$$\varepsilon \frac{V_m}{V_n} = 0, \quad \forall m, n.$$

$m_f$  é então dita ser paralelizável.

Restringir-nos-emos a sistemas que utilizam uma região finita do espaço de fases. Portanto  $m_f$  é uma variedade compacta. Aqui usaremos um teorema de topologia que afirma que uma variedade compacta paralelizável com  $n$  campos vetoriais independentes e "bem-comportados" deve ser um toro de dimensão  $n$  <sup>(31)</sup>.

Estes toros são chamados invariantes porque uma órbita cujas condições iniciais a situaram num determinado toro continua indefinidamente sobre o mesmo toro. Costuma-se utilizar neles as chamadas variáveis ângulo-ação,  $\theta_i$  e  $I_i$ , as primeiras ângulos sobre o toro e as segundas, as ações, que podem ser imaginadas como "raios" do toro em questão.

Podemos ver que estas variáveis são topologicamente naturais porque sabemos da existência de  $n$  circuitos  $\gamma_i$  que não podem ser deformados a um ponto, e isto define  $n$  incrementos  $\Delta_i S$  que a função geradora  $S(q_i, I_i)$ , utilizada na obtenção dessas coordenadas ângulo-ação, pode ganhar ao dar uma volta sobre  $\gamma_i$  e retornar ao mesmo ponto  $q_i$ . (Os  $\gamma_i$  estão sobre um toro de dimensão  $n$ .)

Definiremos as ações  $I_i$  na forma usual

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} p_i dq_i = \frac{\Delta S}{2\pi} \quad (3.2.8)$$

que relaciona os  $n$   $I_i$  com as  $n$  constantes  $f_m = p_m$ .

Até aqui apenas explicitamos o Teorema de Liouville sobre os sistemas integráveis, cujo enunciado completo é o seguinte (31):

Sejam dadas  $n$  funções em involução  $F_1, \dots, F_n$ ;  $\{F_i, F_j\} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  sobre o espaço de fase de dimensão  $2n$ . Consideremos o conjunto dos toros  $m_f$  de dimensão  $n$  caracterizados pelas funções  $F_i$ .

Suponhamos que sobre  $m_f$  as  $n$  funções  $F_i$  sejam independentes (ou seja, as  $n$  1-formas  $dF_i$  são linearmente independentes em cada ponto de  $m_f$ ).

Então

- 1 -  $m_f$  é uma variedade diferenciável invariante pelo fluxo da hamiltoniana  $H = F_1$ .
- 2 - Se a variedade  $m_f$  é compacta e conexa, então é difeomorfa a um toro de dimensão  $n$   $T^n = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \text{ mod } 2\pi\}$ .
- 3 - O fluxo da hamiltoniana  $H$  define sobre  $m_f$  um movimento quase periódico, dado em coordenadas angulares  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  por  $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$ ,  $\omega_i = \omega_i(f_i)$ .
- 4 - As equações canônicas de Hamilton são integráveis por quadraturas.

Para um sistema conservativo a energia  $H$  é uma das constantes  $f_m$  e pode ser expressa como uma função das ações  $I_i$ :

$$H = H(I_i) \quad (3.2.9)$$

Os  $I_i$  definem o toro  $m_f$ . As coordenadas sobre  $m_f$  são os ângulos  $\theta_i$  canonicamente conjugados aos  $I_i$ :

$$\theta_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}(q_i, I_i) \quad (3.2.10)$$

que mudam de  $2\pi$  se percorremos o circuito  $\gamma_i$  e permanecem os mesmos se percorremos outro,  $\gamma_j$ ,  $j \neq i$ .

Deste modo, na transformação canônica de  $(q_i, p_i)$  para  $(\theta_i, I_i)$  os  $q_i$  e os  $p_i$  são funções periódicas de  $\theta_i$  com período  $2\pi$ , ou seja

$$\vec{q} = \sum_{\vec{m}} \vec{q}_{\vec{m}}(\vec{I}) e^{i \vec{m} \cdot \vec{\theta}} \quad (3.2.11)$$

e

$$\vec{p} = \sum_{\vec{m}} \vec{p}_{\vec{m}}(\vec{I}) e^{i \vec{m} \cdot \vec{\theta}}$$

onde  $\vec{m}$  é um vetor de dimensão  $n$  com componentes inteiras<sup>(\*)</sup>.

A hamiltoniana (9) nos fornece as seguintes equações de movimento:

$$\dot{\vec{I}} = \text{const.}$$

e

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{\partial H(\vec{I})}{\partial \vec{I}} = \text{const.} \quad (3.2.12)$$

ou seja

$$\vec{\theta}(t) = \vec{\omega}(\vec{I})t + \vec{\delta} \quad (3.2.13)$$

(\*)

A notação  $\sum_{\vec{m}}$  significa  $\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty}$ .



onde os  $\delta_i$  são n constantes de integração e os  $\omega_i(\vec{I})$  são as frequências sobre o toro dado por  $\vec{I}$ . As equações (11) se tornam

$$\vec{q}(t) = \sum_{\vec{m}} \vec{q}_{\vec{m}}(\vec{I}) e^{i(\vec{m} \cdot \vec{\omega}t + \vec{m} \cdot \vec{\delta})}$$

e

(3.2.14)

$$\vec{p}(t) = \sum_{\vec{m}} \vec{p}_{\vec{m}}(\vec{I}) e^{i(\vec{m} \cdot \vec{\omega}t + \vec{m} \cdot \vec{\delta})}$$

Temos, portanto, uma órbita multiplamente periódica com os n períodos

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

(3.2.15)

associados às n coordenadas  $\theta_i$ .

Discutiremos agora os dois tipos básicos de movimento sobre um toro dado por  $\vec{I}$ . Particularizaremos o nosso sistema ( $n = 2$ ) de modo que possamos visualizá-lo. Já definimos sobre um toro as coordenadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (denominadas geográficas neste caso), longitude e latitude, respectivamente. Estes ângulos serão expressos em radianos, com identificação de múltiplos de  $2\pi$  (ver Fig. 1).

O quadrado  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$  no plano  $\theta_1, \theta_2$  pode ser visto como um mapeamento do toro. Também é conveniente usar todo o plano  $\theta_1, \theta_2$  dividido em quadrados de lado  $2\pi$ . Cada ponto do toro é representado em cada quadrado de tal mapeamento (ver Figura 2).

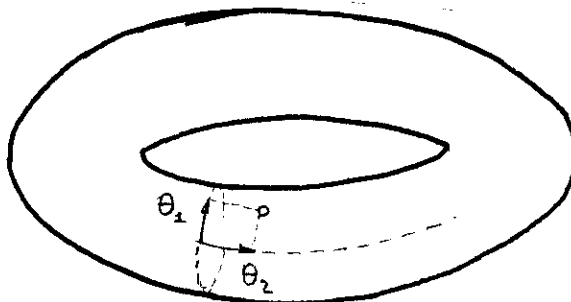


FIGURA 3.2.1 - O toro bi-dimensional e as coordenadas geográficas.

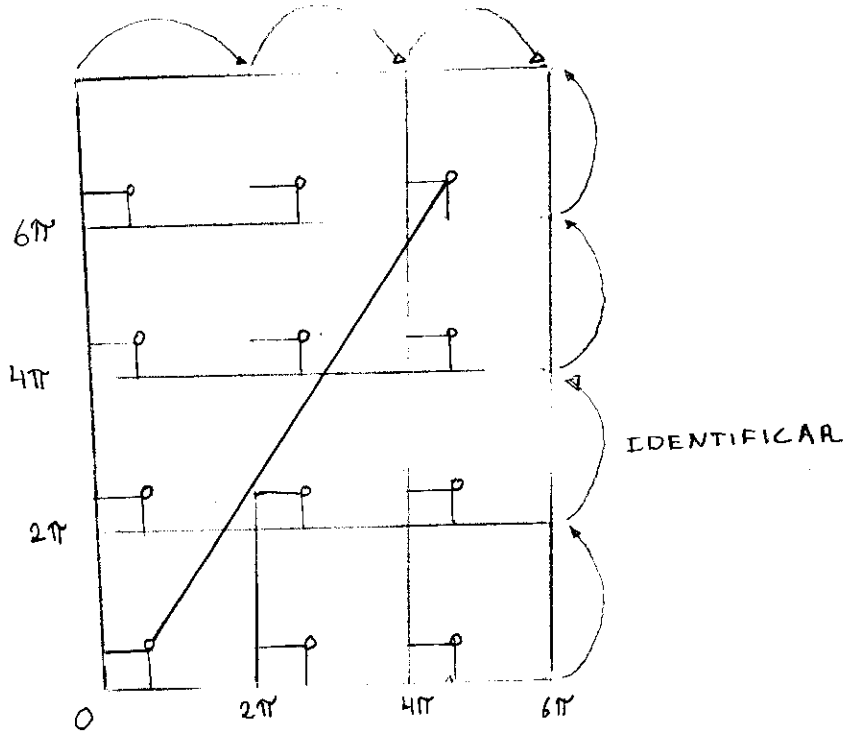


FIGURA 3.2.2 - O plano  $\theta_1, \theta_2 \mathbb{R}^2/Z^2$ .

Consideremos o ponto  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  movendo-se ao longo do toro de modo que suas coordenadas variem uniformemente:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (3.2.16)$$

Sobre o plano  $\theta_1, \theta_2$  tal movimento é representado por uma linha reta. Se  $\omega_1/\omega_2 = a/b$ , onde a e b são números inteiros, então no tempo  $t = 2\pi \frac{a}{\omega_1} = 2\pi \frac{b}{\omega_2}$  o ponto retornará à sua posição original, tendo feito a revoluções ao longo do paralelo e b revoluções ao longo do meridiano (a = 2, b = 3 na Figura 2). Neste caso (16) define um movimento periódico.

Se, entretanto,  $\omega_1/\omega_2$  é irracional, o ponto em movimento jamais retorna à sua posição original. Neste caso o movimento (16) é denominado condicionalmente periódico com duas frequências

$\omega_1$  e  $\omega_2$ , ou também, ergódico sobre o toro.

Podemos agora generalizar os resultados anteriores para um sistema com  $n$  graus de liberdade. Num toro de dimensão  $n$ ,  $m_f$ , existem basicamente dois tipos de movimento:

1 - movimento com razões de frequências racionais (comensuráveis): quando existirem  $n-1$  relações do tipo

$$\vec{\omega} \cdot \vec{m} = 0 \quad , \quad |\vec{m}| \neq 0 \quad , \quad (3.2.17a)$$

ou, equivalentemente,

$$\vec{\omega} = \vec{N}\omega \quad , \quad (3.2.17b)$$

onde  $\vec{N}$  é um vetor de componentes inteiras. Num certo tempo  $\tau$ , teremos em (13)

$$\vec{\theta}(\tau) = \vec{\theta}(0) + 2\pi\kappa$$

$\kappa$  inteiro diferente de zero: a trajetória sobre o toro se fecha.

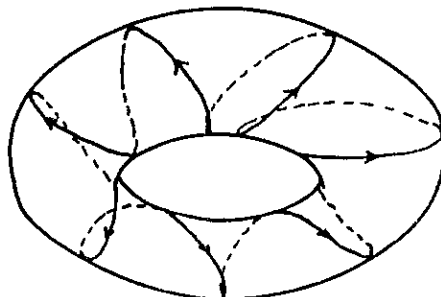


FIGURA 3.2.3 - Movimento com razões de frequências racionais.

2 - Movimento com razões de frequência irracionais (incomensuráveis): se a órbita nunca se fecha, ela se desenvolve como uma

héllice sobre  $m_f$  e a cobre densamente após um tempo infinito<sup>(\*)</sup> (ver Figura 4). Denominamos tal situação de ergodicidade sobre  $m_f$ . Como o conjunto dos números racionais é denso e de medida nula no conjunto dos números reais, a comensurabilidade das frequências é a exceção ao invés da regra.

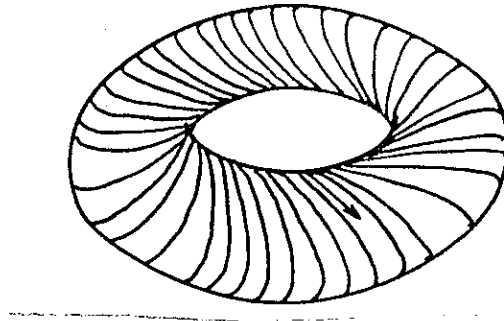


FIGURA 3.2.4 - Movimento com razões de frequências irracionais.

Resumindo, podemos afirmar que as condições iniciais num sistema integrável determinam sobre qual toro, dentre uma infinidade deles, o movimento se dará. O conjunto de toros nos quais o movimento é fechado possui medida nula dentro do conjunto de toros possíveis.

### 3.3 - TEORIA DE PERTURBAÇÃO PARA SISTEMAS NÃO-INTEGRÁVEIS E O PROBLEMA DAS PEQUENOS DIVISORES

Suponhamos um sistema integrável dado pela hamiltoniana

$$H_0(\vec{I}) \quad , \quad (3.3.1)$$

<sup>(\*)</sup> Estamos supondo que não há nenhuma relação do tipo (17). O caso intermediário não será discutido aqui.

ao qual adicionamos uma perturbação não-integrável (no sentido de não haver as  $n$  constantes  $F_m$  definidas anteriormente)

$$\varepsilon H_1(\vec{I}, \vec{\theta}) \quad . \quad (3.3.2)$$

No novo sistema

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{I}, \vec{\theta}) \quad (3.3.3)$$

e devemos notar que  $\vec{I}$  e  $\vec{\theta}$  são coordenadas canônicas mas não variáveis ângulo-ação pois os  $\theta_i$  aparecem em  $H$  e portanto os  $I_i$  não são constantes de movimento.

Se ainda existem toros invariantes neste sistema perturbado, podemos encontrar novas variáveis ângulo-ação  $I'_i, \theta'_i$ , tal que

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H'(\vec{I}') \quad (3.3.4)$$

e essas variáveis devem estar relacionadas às antigas por uma transformação canônica gerada por uma função  $S(\theta'_i, I'_i)$ , de modo que

$$I_i = \frac{\partial S}{\partial \theta'_i}(\vec{\theta}', \vec{I}') \quad (3.3.5)$$

e

$$\theta'_i = \frac{\partial S}{\partial I'_i}(\vec{\theta}', \vec{I}') \quad .$$

Substituindo-se (4) em (5) vemos que  $S$  deve satisfazer

$$H \left( \frac{\partial S}{\partial \vec{\theta}}, \vec{I}' ; \vec{\theta} \right) = H'(\vec{I}') \quad (3.3.6)$$

e esta equação deve poder ser resolvida para que continuem a existir toros invariantes no novo sistema.

Procuraremos uma solução para  $S$  na forma de uma série de potências do parâmetro perturbativo  $\varepsilon$ , com o termo de ordem zero sendo  $\vec{\theta} \cdot \vec{I}'$  (que gera a transformação identidade). Assim, ao substituirmos

$$S = \vec{\theta} \cdot \vec{I}' + \varepsilon S_1(\vec{\theta}, \vec{I}') + \dots \quad (3.3.7)$$

em (6) e usando (3), temos

$$H_0(\vec{I}' + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\theta}} + \dots) + \varepsilon H_1(\vec{I}' + \dots, \vec{\theta}) = H'(\vec{I}') \quad (3.3.8)$$

ou (conservando termos até primeira ordem em  $\varepsilon$ )

$$H_0(\vec{I}') + \varepsilon \left( \frac{\partial H_0(\vec{I}')}{\partial \vec{I}'} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\theta}} + H_1(\vec{I}', \vec{\theta}) \right) = H'(\vec{I}') \quad (3.3.9)$$

No entanto

$$\frac{\partial H_0(\vec{I}')}{\partial \vec{I}'} = \vec{\omega}_0(\vec{I}') \quad (3.3.10)$$

é o vetor frequência dos movimentos não-perturbados, e

$$H_1(\vec{I}', \vec{\theta}) = \sum_{\vec{m}} H_{1\vec{m}}(\vec{I}') e^{i\vec{m} \cdot \vec{\theta}} \quad (3.3.11)$$

já que  $H_1$  é função de  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ , periódicas em  $\vec{\theta}$ .  $S_1$  também é periódica em  $\vec{\theta}$  com uma constante arbitrária que faremos igual a zero. Portanto,

$$S_1(\vec{\theta}, \vec{I}') = \sum_{\vec{m} \neq 0} S_{1\vec{m}}(\vec{I}') e^{i\vec{m} \cdot \vec{\theta}} \quad (3.3.12)$$

Igualando os coeficientes de Fourier em (9) obtemos

$$(\vec{m} = 0) \quad H'(\vec{I}') = H_0(\vec{I}') + \varepsilon H_{10}(\vec{I}') + \dots \quad (3.3.13)$$

$$(\vec{m} \neq 0) \quad S_{1\vec{m}}(\vec{I}') = \frac{i H_{1\vec{m}}(\vec{I}')}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{I}')} + \dots \quad (3.3.14)$$

e a função geradora é dada por

$$S(\vec{\theta}, \vec{I}') = \vec{\theta} \cdot \vec{I}' + \varepsilon i \sum_{\vec{m} \neq 0} \frac{H_{1\vec{m}}(\vec{I}') e^{i\vec{m} \cdot \vec{\theta}}}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{I}')} + \dots \quad (3.3.15)$$

Nesta expressão reconhecemos o problema dos "pequenos divisores" da Mecânica Celeste. Claro está que se as frequências  $\vec{\omega}_0$  do movimento sobre o toro não-perturbado forem comensuráveis - isto é, se as órbitas forem fechadas com as frequências fundamentais em ressonância - então há sempre termos  $\vec{m}$  para os quais

$$\vec{\omega}_0 \cdot \vec{m} = 0 \quad (\text{conforme (2.16)}).$$

A série (15) diverge e não temos toros invariantes para o sistema perturbado: Pior ainda, mesmo com  $\vec{\omega}_0$  incomensuráveis é sempre pos

sível encontrar  $\vec{m}$  de modo que  $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{m}$  seja tão pequeno quanto queiramos.

Já em primeira ordem em  $\epsilon$  a série (7) apresenta os problemas levantados acima com o somatório em  $\vec{m}$ . Há que se acrescentar ainda a questão da convergência da própria série (7).

### 3,4 - O TEOREMA KAM

O problema dos pequenos divisores foi resolvido por Kolmogorov, Arnold e Moser. O primeiro aspecto importante da solução foi a introdução de um esquema perturbativo que converge mais rapidamente. Isto é equivalente a trocarmos o método de interação linear pelo método de Newton (com convergência quadrática) no problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica estudado em análise numérica. O método de Newton foi estendido a espaços de funções de modo que é também possível demonstrar a existência de soluções de conjuntos de equações diferenciais do tipo que surge na Mecânica <sup>(32)</sup>.

Uma taxa de convergência mais rápida reduz o efeito dos pequenos divisores porém não o elimina.

O segundo aspecto importante foi considerar apenas aqueles toros invariantes cujas frequências satisfazem certas condições. Se as frequências  $\omega_{0_i}$  são "suficientemente irracionais" então se pode mostrar que existem constantes  $\gamma$  e  $\tau$  tal que

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0| > \gamma |\vec{m}|^{-\tau} \quad (3.4.1)$$

para todos os vetores  $\vec{m}$  de números inteiros.



É possível mostrar que com  $\tau > n-1$  a "maioria" dos vetores  $\vec{\omega}_0$  irracionais podem satisfazer tal condição. Os vetores  $\vec{\omega}_0$  que não satisfazem a desigualdade (1) constituem um conjunto cuja medida é da ordem de  $\varepsilon$ . No entanto, com a condição (1) sobre as frequências não-perturbadas se mostra que, para parâmetros perturbativos  $\varepsilon$  suficientemente pequenos, os "pequenos divisores" não ocasionam as divergências mencionadas na seção anterior. Termos como (3.14) fazem contribuições finitas à série (3.15). Daí pode-se provar que, se  $\vec{\omega}_0$  é suficientemente irracional, o toro invariante original modifica sua forma porém não é destruído.

Portanto deve existir um toro invariante  $(\vec{I}', \vec{\theta}')$  parametrizado por  $\vec{\theta}$ , satisfazendo às relações

$$\vec{I}' = I + v(\vec{\theta}, \varepsilon) \tag{3.4.2}$$

e

$$\vec{\theta}' = \vec{\theta} + u(\vec{\theta}, \varepsilon)$$

onde  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são periódicos em  $\vec{\theta}$ , indo a zero com  $\varepsilon = 0$ , e  $\vec{\theta}' = \vec{\omega}$ , as frequências não-perturbadas sobre o toro. Para tal as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(1) independência linear das frequências

$$\sum_i m_i \omega_i(I') \neq 0 \tag{3.4.3}$$

em algum domínio de  $\vec{I}'$  (suficiente não-linearidade), onde os  $\omega_i$  são as componentes de  $\vec{\omega} = \partial H_0 / \partial \vec{I}'$  e os  $m_i$  são as componentes (inteiras) do vetor  $\vec{m}$ ;

(2) a perturbação deve ser "bem-comportada": existe um número suficiente de derivadas contínuas de  $H_1$ ;

(3) as condições iniciais devem estar longe de ressonâncias para satisfazerem a relação (1), para todo  $\vec{m}$ , onde  $\tau$  depende do número de graus de liberdade e do "bom-comportamento" de  $H_1$  e  $\gamma$  depende de  $\varepsilon$ , da magnitude da hamiltoniana perturbativa  $H_1$  e da não-linearidade da hamiltoniana não-perturbada  $H_0$  <sup>(9)</sup>.

O teorema KAM afirma, portanto, que a "maioria" (no sentido de medida) dos toros, cujas frequências são suficientemente irracionais, sobrevivem, com a "maioria" das órbitas se desenvolvendo sobre eles. Aquelas que não se desenvolvem sobre um toro no espaço de fase formam um conjunto pequeno porém finito distribuído patologicamente no espaço de fase perto de cada toro não-perturbado cujas órbitas eram fechadas (ou parcialmente fechadas) <sup>(33)</sup>.

Um enunciado rigoroso do teorema KAM na versão de mapeamentos e a estrutura do conjunto mencionado no parágrafo anterior serão apresentados na seção seguinte.

Agora, porém, gostaríamos de observar que qualquer órbita que se encontra entre dois toros não-destruídos, mesmo se for uma órbita altamente irregular que não se desenvolva sobre nenhum toro, ficará limitada entre eles caso  $n \leq 2$ . Para sistemas de dimensões maiores ocorre a "difusão de Arnold". Este é o fenômeno de órbitas que são capazes de percorrer toda a superfície de energia, pois para sistemas com dimensão  $n > 2$  os toros invariantes não a estratificam <sup>(33)</sup>.

Como explicitamos no início do capítulo, simplificamos nossas discussões ao considerarmos apenas sistemas independentes do tempo.

No entanto, o sistema dinâmico obtido na Capítulo II não é conservativo, daí convém fazermos alguns comentários relativos

a sistemas hamiltonianos da forma (3.3) que dependam do tempo

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}, t) = H_0(\vec{I}) + \epsilon H_1(\vec{I}, \vec{\theta}, t) \quad (3.4.4)$$

com a perturbação temporal de período  $T_0 = 2\pi$ .

Segundo Arnold <sup>(31)</sup>, para um grau de liberdade é natural considerar o sistema perturbado no espaço de fase de dimensão três  $\{(I, \theta, t)\} = \mathbb{R} \times T^2$ , onde os toros invariantes terão dimensão dois.

Para a validade do teorema neste caso são necessárias as mesmas hipóteses anteriores.

### 3.5 - MAPEAMENTOS QUE PRESERVAM ÁREA, O TEOREMA DE POINCARÉ-BIRKOFF E OS FENÔMENOS HOMOCLÍNICOS

Visando simplificar o estudo das trajetórias dinâmicas no espaço de fase, Poincaré introduziu uma técnica conhecida por mapeamento de Poincaré na qual ao invés de examinarmos toda a trajetória no espaço de fase, selecionamos alguns pontos sobre a órbita (numa espécie de amostragem da órbita) e reduzimos o problema da dinâmica ao estudo de transformações do espaço de fase no espaço de fase. Ou seja, a trajetória dinâmica no espaço de fase é substituída por um mapeamento (grupo de transformações) do plano de fase no plano de fase. Um determinado plano de fase escolhido como o plano no qual dar-se-á o mapeamento é denominado superfície de seção.

Estabeleçamos o mapeamento de Poincaré de uma forma mate

maticamente rigorosa. Consideremos o sistema dinâmico dado por

$$\dot{\vec{x}} = f(x, t) \quad , \quad (3.5.1)$$

onde  $x \in$  espaço de fase  $\subset \mathbb{R}^{2n}$  e

$$f(x, t+T) = f(x, t) \quad . \quad (3.5.2)$$

Seja  $\vec{\phi}(t)$  uma solução do sistema. Definimos

$$g^t: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (3.5.3)$$

$$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow g^t \vec{x}_0 \equiv \vec{\phi}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$$

onde  $\vec{\phi}(t)$  é a solução do sistema que possui condição inicial  $\vec{\phi}(0) = \vec{x}_0$  (ver Figura 1).

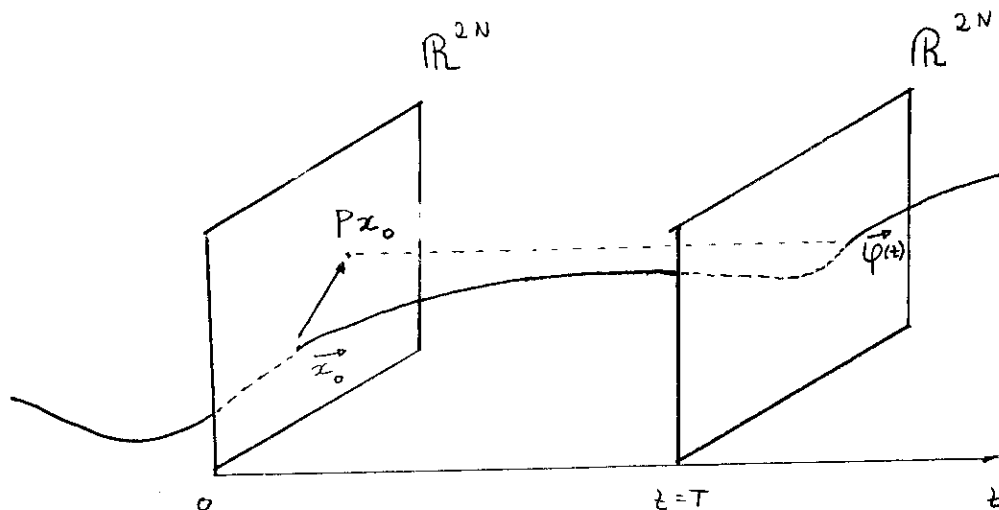


FIGURA 3.5.1 - Mapeamento de Poincaré.

Pode-se demonstrar que

- 1 - Uma condição necessária e suficiente para que  $\{g^t\}$  seja um grupo é que o segundo membro de (1),  $\vec{f}$ , não dependa do tempo;
- 2 - Se  $T$  é o período de  $\vec{f}$ , então  $g^{T+s} = g^s \cdot g^T$  e, em particular,  $g^{kT} = (g^T)^k$ , de modo que as aplicações  $g^{kT}$  formam um grupo ( $k$  inteiro).

O mapeamento (ou aplicação)

$$g^T: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

é o mapeamento de Poincaré a um período, denotado por

$$P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$P\vec{x}(0) = \vec{x}(T)$$

onde  $\vec{x}(t)$  é uma solução de (1).

Listaremos, a seguir, algumas propriedades importantes do mapeamento de Poincaré <sup>(31)</sup>, relativas ao sistema (1):

- 1 - Se  $\vec{x}_0$  é ponto fixo de  $P^n$  ( $P^n \vec{x}_0 = \vec{x}_0$ ) então a solução do sistema com condição inicial  $\vec{x}_0$  é periódica de período  $nT$ . Portanto a procura de pontos fixos de  $P$  e/ou de suas iteradas equivale à procura de soluções periódicas para o sistema dado por (1);
- 2 - Se o sistema é linear,  $\vec{f}(\vec{x}, t) = f(t)\vec{x}$ , então  $P$  é linear;
- 3 - Se  $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t)$  é um sistema hamiltoniano então  $P$  preserva áreas no espaço de fase ( $\det P = 1$ );
- 4 - Se o movimento do sistema se realiza sobre toros, então os ma-

peamentos sucessivos  $P, \dots, P^k, \dots$  da condição inicial  $\vec{x}_0$  são pontos sobre uma seção do toro. Estes pontos formam uma curva "bem-comportada" e fechada,  $C$ .

Como já afirmamos anteriormente, se o movimento é periódico, isto é, a órbita é fechada sobre o toro, então alguma iteração  $P^k \vec{x}_0$  coincidirá com  $\vec{x}_0$  (o número  $k$  dependendo da relação entre as frequências). Portanto  $\vec{x}_0$  é um ponto fixo do mapeamento  $P^k$ .

Porém a maioria das curvas  $C$  são seções de toros "irracionais" geradas por iterações de qualquer ponto  $\vec{x}_0$  que pertença a uma delas. Denominamo-las curvas invariantes do mapeamento, pois  $P$  leva  $C$  nela mesma,  $P(C) = C$ .

Escolhamos sobre a superfície de seção coordenadas do tipo ângulo-ação. Logo as curvas invariantes serão círculos concêntricos. Uma órbita do sistema interceptará um destes círculos (ao se espiralar sobre um toro invariante) em pontos cujo ângulo polar aumenta de  $2\pi\alpha$  a cada iteração. Assim, o mapeamento  $T$  da superfície de seção em si mesma é definido por

$$(r_1, \theta_1) = T(r_0, \theta_0) \tag{3.5.1}$$

com

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\alpha(r_0) \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Este é o conhecido "twist-mapping". O ângulo  $2\pi\alpha$  em geral depende do raio e varia suavemente de um toro para outro, passando por um contínuo de valores, alguns racionais e outros irracionais. Todo ponto numa curva invariante  $C$  cujo ângulo de rotação seja dado por  $\alpha = m/n$ , ( $m$  e  $n$  inteiros) é periódico de período

dò n, sob o mapeamento.

Definamos, agora, um novo mapeamento,  $T_\epsilon$ , que é o mapeamento  $T$  perturbado:

$$(r_1, \theta_1) = T_\epsilon(r_0, \theta_0) \quad (4.5.3)$$

com

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + \epsilon f(r_0, \theta_0) \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\alpha(r_0) + \epsilon g(r_0, \theta_0) \quad , \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções periódicas de período  $2\pi$  em  $\theta_0$ . As funções  $f$  e  $g$  são escolhidas de forma que o mapeamento continue preservando área. Para que  $r_0 = 0$  continue um ponto fixo temos que  $f = g = 0$  em  $r_0 = 0$ .

Aqui enunciaremos o teorema KAM na versão de mapeamentos:

"A aplicação  $T_\epsilon$ , para  $\epsilon$  muito pequeno, possui curvas analíticas invariantes  $C_\epsilon$ , vizinhas das curvas  $C$  invariantes por  $T$ . Além disso, para  $\epsilon$  muito pequeno, estas curvas  $C_\epsilon$  preenchem o espaço de fase em consideração a menos de um conjunto de medida de Lebesgue não nula que tende para zero quando  $\epsilon$  tende para zero" (30).

Deste modo podemos recuperar os resultados anteriores para o teorema KAM: a maioria dos pontos na superfície de seção está sobre curvas suaves invariantes de  $T_\epsilon$ ,  $C_\epsilon$ , (seções de toros) que são deformações dos círculos invariantes de  $T, C$ . As únicas exceções se localizam perto de antigos círculos invariantes que possuam  $\alpha(r_0)$  racional.

A vantagem dessa linguagem geométrica é que ela nos permite entender o que acontece nos intervalos onde existiam toros "racionais". Suponhamos uma curva invariante  $C$  associada a um destes toros, tal que  $\alpha(r_0) = r/s$ , ( $r, s$  inteiros).

Todo ponto de  $C$  é um ponto fixo de  $T^S$ , já que

$$\begin{aligned} T^S(r_0, \theta_0) &= (r_0, \theta_0 + 2\pi s \alpha(r_0)) \\ &= (r_0, \theta_0) \end{aligned}$$

Considerando agora uma perturbação no mapeamento, o teorema dos pontos fixos de Poincaré-Birkoff nos assegura que nem todos estes pontos serão destruídos: em geral restam  $2\kappa s$  ( $\kappa = 1, 2, \dots$ ) pontos fixos.

Para provarmos tal afirmação vamos supor que o número de rotação  $\alpha(r_0)$  cresça com  $r_0$  (por exemplo). Tomemos duas curvas invariantes relativamente a  $T$  e vizinhas de  $C$ , as curvas  $C^+$  e  $C^-$ , de modo que um ponto sobre  $C^+$  seja mapeado no sentido anti-horário e sobre  $C^-$  no sentido horário por  $T^S$ .

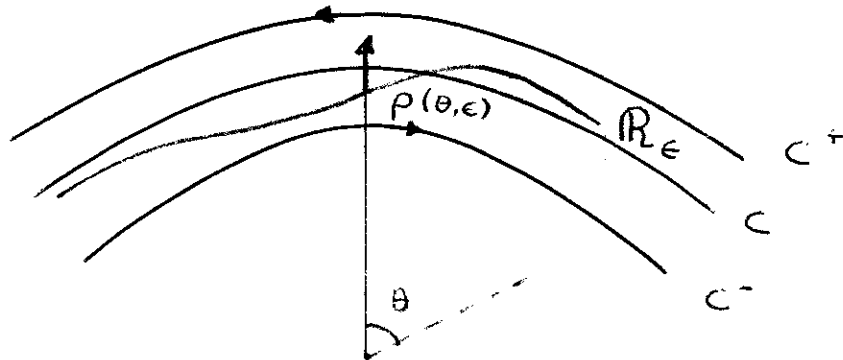


FIGURA 3.5.2 - Curvas invariantes.



Esta propriedade continua válida para  $T_\epsilon^S$ , se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Assim, existe sobre cada raio  $\theta = \text{cte.}$  um ponto  $\rho(\theta, \epsilon)$  que se desloca sob a ação de  $T_\epsilon^S$  na direção do raio ( ver Figura 2).

$$\theta(T_\epsilon^S \rho(\theta, \epsilon)) = \theta \quad . \quad (3.5.5)$$

Além disso, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, os pontos  $\rho(\theta, \epsilon)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) formam uma curva analítica fechada  $\mathbb{R}_\epsilon$ , vizinha de  $C$ . Como a aplicação  $T_\epsilon^S$  conserva área, a imagem  $T_\epsilon^S \mathbb{R}_\epsilon$  da curva  $\mathbb{R}_\epsilon$  não pode estar situada nem no interior nem no exterior de  $\mathbb{R}_\epsilon$ . Portanto, ela intercepta  $\mathbb{R}_\epsilon$  um número par de vezes ( ver Figura 3). Mas como  $T_\epsilon^S$  desloca cada ponto de  $\mathbb{R}_\epsilon$  ao longo do raio  $\theta = \text{cte.}$ , os pontos de  $\mathbb{R}_\epsilon$  e  $T_\epsilon^S \mathbb{R}_\epsilon$  são os pontos fixos de  $T_\epsilon^S$ . Cada ponto fixo, após  $s$  iterações de  $T_\epsilon^S$ , é mapeado sobre si mesmo, de forma tal que cada um dos  $s$  pontos é um ponto fixo.

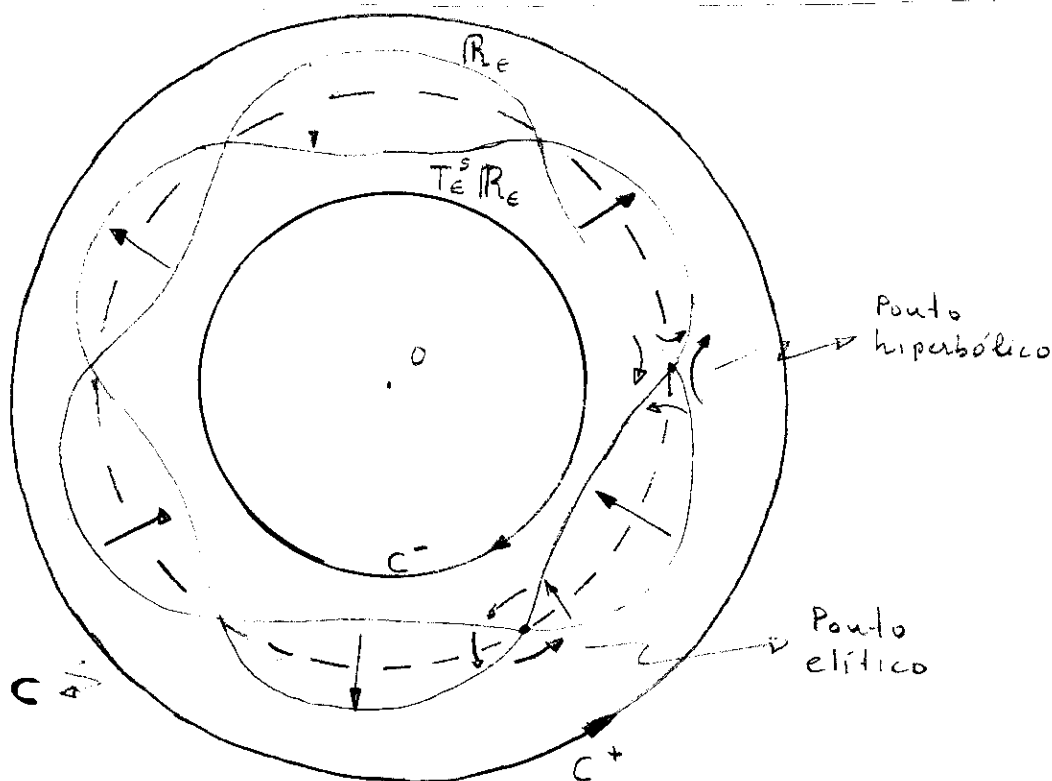


FIGURA 3.5.3 - As curvas  $\mathbb{R}_\epsilon$  e  $T_\epsilon^s \mathbb{R}_\epsilon$

Logo, como há um número par de interseções de  $\mathbb{R}_\varepsilon$  e  $T_\varepsilon^s \mathbb{R}_\varepsilon$ , temos no total  $2ks$  pontos fixos.

Se examinarmos o mapeamento na vizinhança dos pontos fixos, notaremos na Figura 3 que há dois tipos de comportamento. Pontos vizinhos ao ponto fixo denominado elítico são levados pelo mapeamento a acompanhar a transformação radial descrita acima de modo a girarem em torno dele. Por outro lado, quase todo ponto na vizinhança do ponto fixo hiperbólico é levado pelas transformações sucessivas, para fora dessa vizinhança.

Assim a alternância de pontos elíticos e hiperbólicos sobre uma curva ressonante é uma propriedade genérica do sistema.

A natureza dos pontos fixos e a estrutura das curvas invariantes na vizinhança destes pontos ficam melhor caracterizadas se linearizarmos o mapeamento em torno deles.

Tomemos um ponto fixo  $x_0 = (r_0, \theta_0)$  de período  $s$ , ou seja,

$$T^s(x_0) = x_0 \quad . \quad (3.5.6)$$

Podemos expandir as coordenadas um ponto  $x$  na vizinhança de  $x_0$  como  $x = x_0 + \Delta x$ . Conservando apenas os termos lineares em  $\Delta x$ , obtemos uma equação da forma

$$\Delta x_s = A \Delta x \quad , \quad (3.5.7)$$

onde  $A$  é uma matriz independente de  $\Delta x$  com  $\det A = 1$ , já que a área se conserva. De (7) obtemos a equação característica

$$\lambda^2 + \text{Tr}A + \det A = 0 \quad ,$$

cujos autovalores podem ser

i) complexos conjugados sobre o círculo unitário

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma} \quad (3.5.8)$$

de modo que obtemos transformações do tipo

$$\Delta r = a \cos \sigma + b \sin \sigma \quad (3.5.9)$$

$$\Delta \theta = c \cos \sigma + d \sin \sigma$$

que representam uma curva elítica em torno do ponto fixo. Após algumas transformações reduzimos a órbita a um círculo (ver Figura 4).

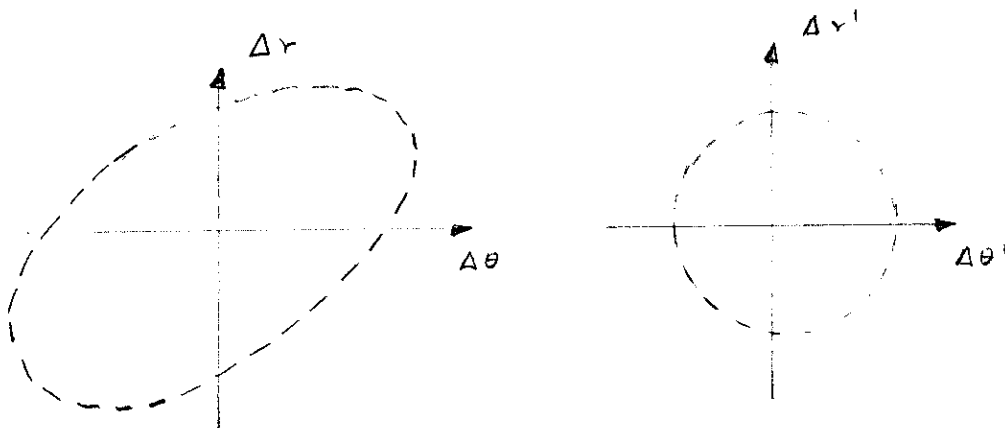


FIGURA 3.5.4 - Curvas em torno de um ponto fixo elítico.

ii) reais e recíprocos

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \quad (3.5.10)$$

tal que

$$|\lambda_{1,2}| = e^{\pm\sigma} \quad (3.5.11)$$

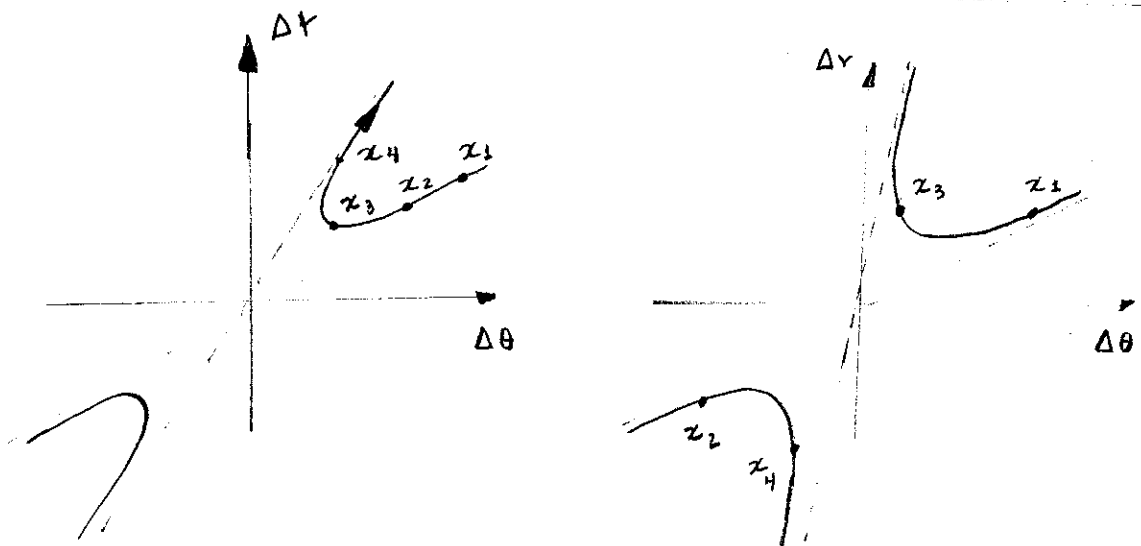
Combinando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , obtemos transformações da forma

$$\Delta r = a \lambda_1 + b \lambda_1^{-1} \quad (3.5.12)$$

$$\Delta \theta = c \lambda_1 + d \lambda_1^{-1}$$

que representa um deslocamento sob o mapeamento linearizado em um ou ambos os ramos de uma hipérbole. Se  $\lambda_1$  for positivo, o deslocamento se dá sobre um único ramo de hipérbola (ver Figura 5).

Se  $\lambda_1$  é negativo, entretanto, o deslocamento se dá sobre os dois ramos da hipérbole, alternadamente (ver Fig. 5).



ponto hiperbólico ordinário

ponto hiperbólico com reflexão

FIGURA 3.5.5 - Ponto hiperbólico ordinário e com reflexão.

Para que a estrutura completa do "twist mapping" perturbado - ou seja, um sistema integrável perturbado - fique aparente, faltam ainda duas etapas.

A primeira diz respeito aos pontos elíticos e segue da consideração simultânea dos teoremas KAM e Poincaré-Birkoff, que se aplicam a todo ponto elítico em cuja vizinhança existem curvas "irracionais" invariantes. Onde estavam as antigas curvas "racionais" se encontra agora um conjunto de pontos fixos, do qual metade são pontos elíticos. Em torno de cada um destes pontos elíticos existem também curvas invariantes "irracionais", pontos hiperbólicos e pontos elíticos. Nestes, tudo se repete, cada vez em menor escala, ad infinitum.

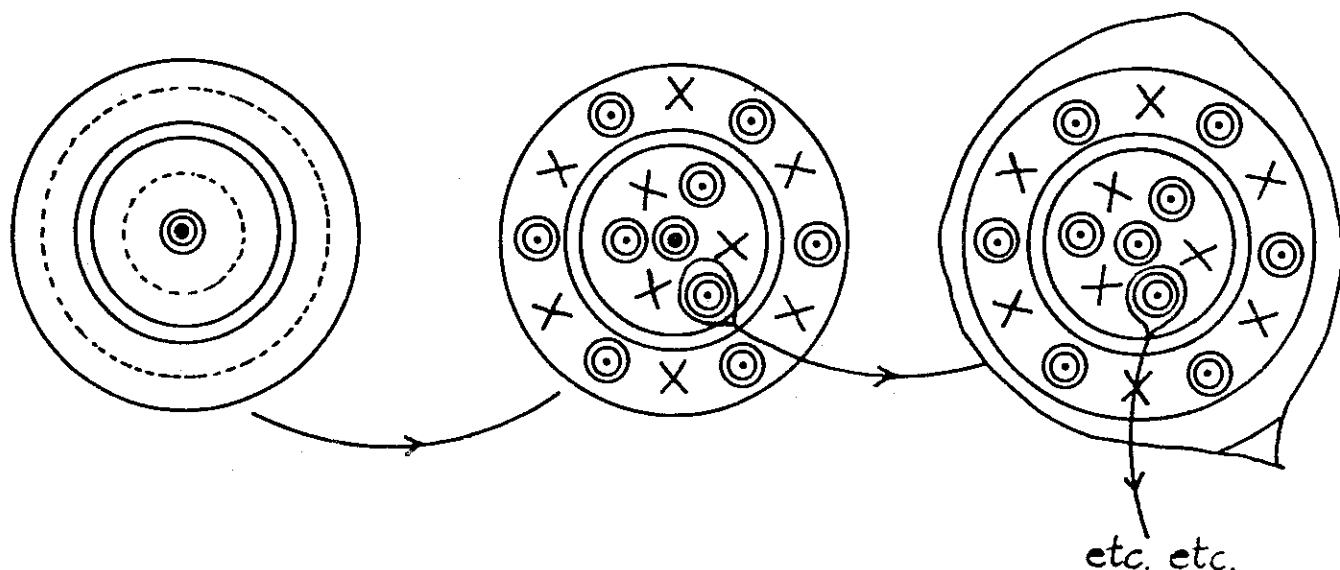


FIGURA 3.5.6 - Os pontos elíticos em torno de um ponto elítico.

Passemos, finalmente, à segunda etapa onde discutiremos a estrutura das curvas do mapeamento na vizinhança dos pontos hiperbólicos.

Pode-se provar que na vizinhança de um ponto hiperbólico  $h$  existem duas variedades unidimensionais  $H^+$  sob o mapeamento que tendem assintoticamente para  $h$  e duas variedades unidimensionais  $H^-$  que se afastam de  $h$  (ver Figura 7). Estas curvas são tangentes às

assíntotas do mapeamento linearizado (34, 35).

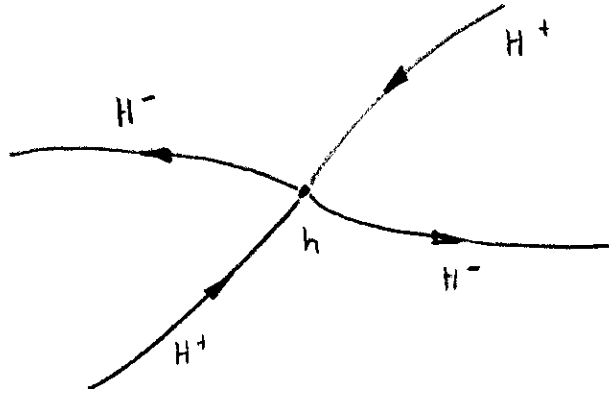


FIGURA 3.5.7 - O ponto hiperbólico e as variedades  $H^+$  e  $H^-$ .

Um ponto sobre  $H^+$  se aproxima de  $h$  e sobre  $H^-$  se afasta de  $h$ .

Como se comportam  $H^+$  e  $H^-$  fora das vizinhanças de  $h$ ? Para um sistema integrável elas se identificam, como mostra a Figura 7.

Mais geralmente, quando  $h$  é um ponto fixo de  $T^S$ ,  $h$  é um membro de um conjunto de  $s$  pontos fixos hiperbólicos de modo que uma curva invariante  $H^-$  de um deles chegue noutro como  $H^+$  e vice-versa (ver Figura 8).

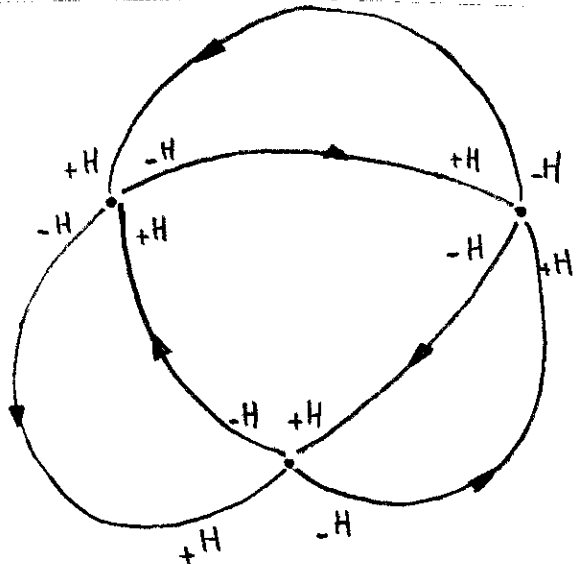


FIGURA 3.5.8 - Conjunto de pontos hiperbólicos.

Porém esta situação é altamente instável e qualquer perturbação pode levar à intersecção dos arcos  $H^+$  e  $H^-$ . Pontos  $X$  onde esta interação ocorre são chamados homoclínicos se os arcos pertencem ao mesmo ponto fixo  $h$  (como na Fig. 7) ou a pontos diferentes da mesma órbita fechada instável, e heteroclínicos se os arcos pertencem a dois pontos fixos que não estão associados à mesma órbita.

Tomemos um ponto homoclínico  $X$  e mapeamentos  $T^s$  ( $-\infty < s < +\infty$ ) da vizinhança de  $X$ . Por continuidade essas vizinhanças iteradas devem se assemelhar à vizinhança de  $X$ . Portanto,  $H^+$  e  $H^-$  devem se cruzar em todas estas vizinhanças: pode-se mostrar que, geralmente, a existência de um ponto homoclínico implica numa infinidade de outros. Assim,  $H^+$  oscila em torno de  $H^-$  interceptando-a repetidamente e vice-versa (ver Figura 9). Além disso, todo ponto do arco  $H^-$  entre duas intersecções de  $H^+$  é outra intersecção, fato este decorrente da propriedade que  $T$  possui de conservar área.

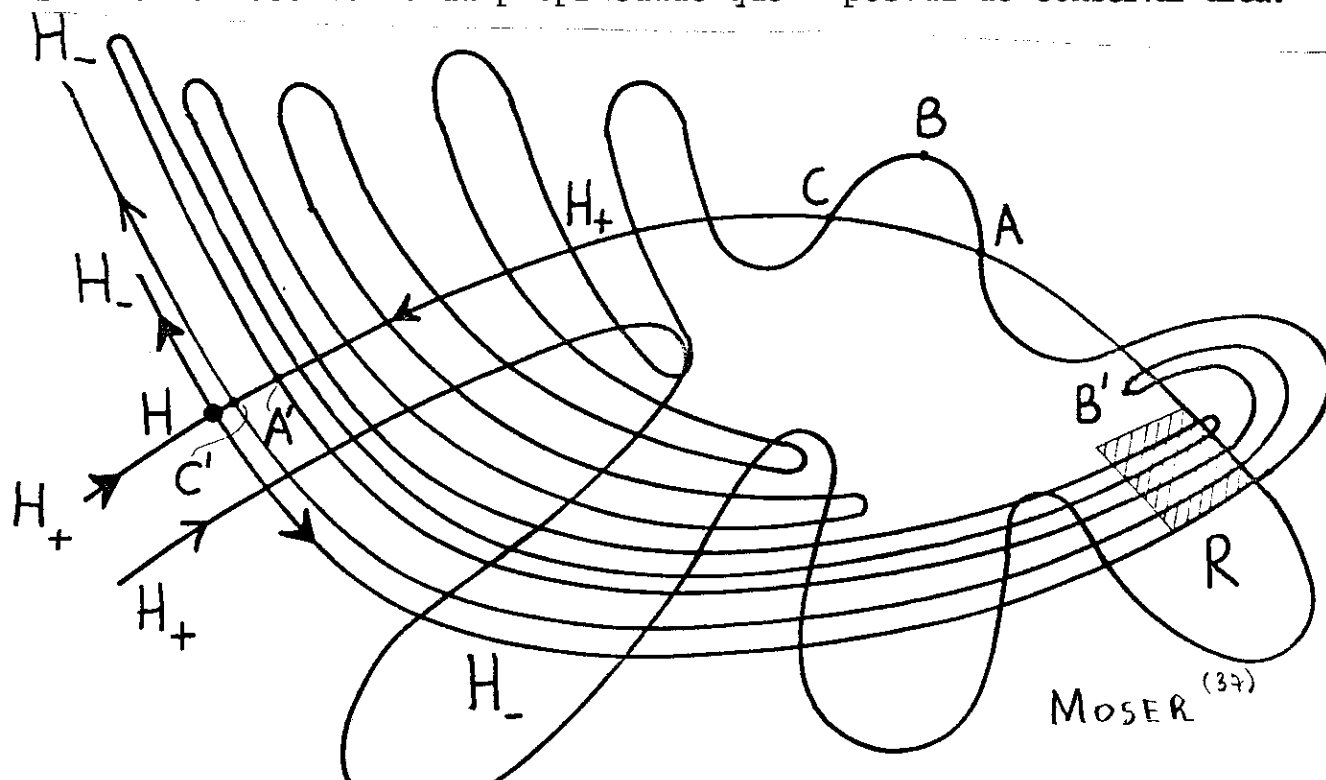


FIGURA 3.5.9 - A faixa de instabilidade.

Portanto, agora podemos completar os espaços em torno dos pontos hiperbólicos da Figura 6 com um conjunto denso de pontos homoclínicos, e o retrato final do plano de fase tem o aspecto abaixo, figura clássica em todas as discussões do assunto:

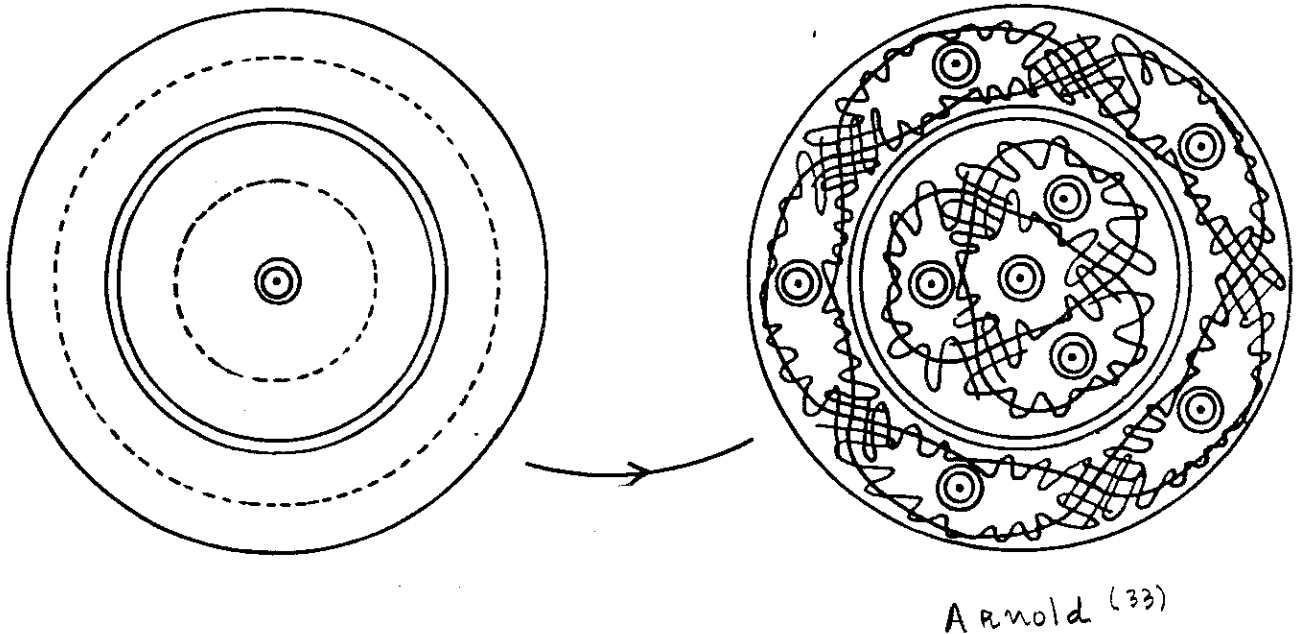


FIGURA 3.5.10 - Sistema integrável perturbado.

Segundo Smale <sup>(36)</sup> na vizinhança de um ponto homoclínico existe um conjunto invariante  $I_2$  para alguma potência fixa,  $T^e$ , de um mapeamento de Poincaré  $T$  tal que sob o mapeamento  $T^e$ , os pontos de  $I_2$  estão em correspondência um a um com sequências duplamente infinitas de dois símbolos. Se permitirmos uma potência qualquer de  $T$ , foi demonstrado por Conley <sup>(37)</sup> que existe um conjunto invariante  $I_\infty$  cujos pontos estão em correspondência um a um com sequências duplamente infinitas de infinitos símbolos. Os conjuntos  $I_2$  e  $I_\infty$  possuem as mesmas propriedades que o conjunto  $\Lambda$  do mapeamento "ferradura" de Smale (ver Apêndice C). Portanto, não apenas há uma infinidade de pontos periódicos (um resultado já obtido por Birkoff <sup>(38)</sup>), porém mais importante ainda, o comportamento



do mapeamento de Poincaré é da mesma natureza caótica do mapeamento "ferradura", descrito no Apêndice C.

Garantimos a existência do cruzamento de  $H^+$  e  $H^-$ , referido anteriormente, usando a função de Melnikov, que será apresentada a seguir.

Finalizando esta seção, observamos que a região na qual se desenvolvem estes movimentos caóticos é uma faixa cuja largura é da ordem do parâmetro perturbativo  $\epsilon$ , denominada "faixa de instabilidade".

### 3.6 - O MÉTODO DE MELNIKOV <sup>(39,9)</sup>

Para o estudo de um sistema dinâmico específico dos poucos resultados analíticos para a detecção de fenômenos caóticos é a função de Melnikov. Esta função mede a distância entre as variedades unidimensionais  $H^+$  e  $H^-$  nas vizinhanças da separatriz, para uma pequena perturbação do sistema, no nosso caso, hamiltoniano. Se as variedades  $H^+$  e  $H^-$  se cruzarem surgirá uma "faixa de instabilidade" nas vizinhanças da separatriz.

Num particular sistema hamiltoniano podemos usar o método de Melnikov que nos garante a possível existência dos fenômenos caóticos já estabelecidos de forma genérica anteriormente.

Suporemos que o plano de fase para o sistema integrável seja o da Figura 2.3.3 que possui além de um ponto hiperbólico fixo  $\vec{X}_0$  uma curva separatriz (integrável)  $\vec{x}_0(t)$ .

Perturbaremos então este sistema com uma função periódica no tempo de período  $T$ . O sistema que estudaremos será regido

pelas seguintes equações:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}_0(\vec{x}) + \epsilon f_1(\vec{x}, t) \quad (3.6.1)$$

onde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e  $\epsilon^2 \ll \epsilon$ .

Vamos considerar o mapeamento de Poincaré  $P_\epsilon: \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t_0}$ , onde a superfície de seção  $\Sigma_{t_0} = \{(x, t) \mid t = t_0 \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$  é o plano de fase do sistema (1) num certo tempo  $t_0$  no espaço de fase estendido.

As órbitas  $\vec{x}^e(t, t_0)$ , (estável) e  $\vec{x}^i(t, t_0)$ , (instável), "perfuram" a superfície de seção desenhando as variedades  $H^+$  e  $H^-$ .

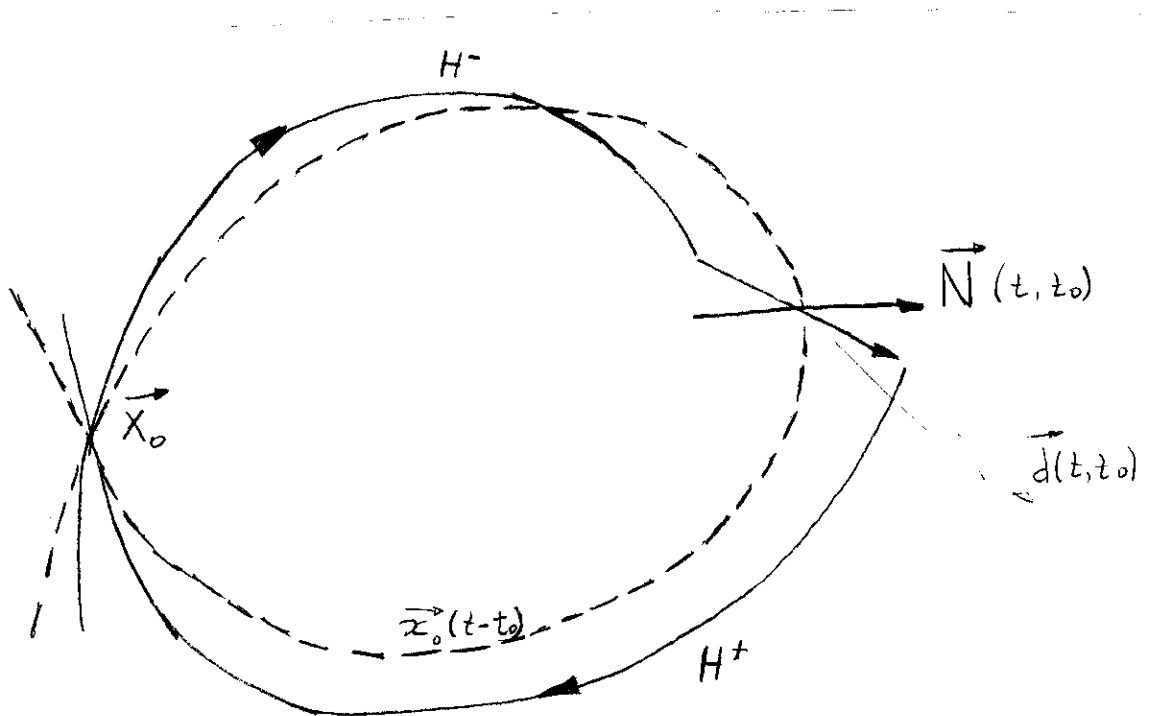


FIGURA 3.6.1 - Geometria do cálculo da distância de Melnikov.

Em primeira ordem, as órbitas estável e instável são dadas por

$$\vec{x}^e(t, t_0) = \vec{x}_0(t-t_0) + \varepsilon \vec{x}_1^e(t, t_0)$$

e

$$(3.6.2)$$

$$\vec{x}^i(t, t_0) = \vec{x}_0(t-t_0) + \varepsilon \vec{x}_1^i(t, t_0)$$

para um tempo inicial  $t_0$  arbitrário.

Substituindo (2) em (1), obtemos em primeira ordem

$$\frac{d\vec{x}_1^e}{dt} = M(x_0) \cdot \vec{x}_1^e + \varepsilon \vec{f}_1(\vec{x}_0(t-t_0), t)$$

e

$$(3.6.3)$$

$$\frac{d\vec{x}_1^i}{dt} = M(x_0) \cdot \vec{x}_1^i + \varepsilon \vec{f}_1(x_0(t-t_0), t)$$

sendo

$$M(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{01}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_{01}}{\partial x_{02}} \\ \frac{\partial f_{02}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_{02}}{\partial x_{02}} \end{bmatrix}$$

o jacobiano de  $\vec{f}_0$  calculado em  $\vec{x}_0(t-t_0)$ , no qual o segundo índice se refere à componente de  $\vec{f}_0$  ou  $\vec{x}_0$ . Devemos resolver (3) para  $\vec{x}^e$  quando  $t > t_0$  e para  $\vec{x}^i$  quando  $t < t_0$ , sujeitos à condição

$$\vec{x}^e(t \rightarrow +\infty) = \vec{x}^i(t \rightarrow -\infty) = \vec{X}_p$$

onde  $\vec{X}_p$  é a posição perturbada do ponto fixo hiperbólico<sup>(\*)</sup>. As du

<sup>(\*)</sup> Em particular, no sistema que consideraremos no Capítulo IV  $\vec{X}_p \equiv \vec{X}_0$ .

as soluções diferem por

$$\begin{aligned} \vec{d}(t, t_0) &= \vec{x}^e(t, t_0) - \vec{x}^i(t, t_0) \\ &= x_1^e(t, t_0) - \vec{x}_1^i(t, t_0) \quad . \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

que é a separação entre as variedades  $H^+$  e  $H^-$  sobre a superfície de seção.

Definimos a função "distância" de Melnikov  $D(t, t_0)$  como

$$D(t, t_0) = \vec{N} \cdot \vec{d} \quad (3.6.5)$$

que é a projeção de  $\vec{d}$  ao longo da normal  $\vec{N}$  à órbita não-perturbada  $\vec{x}_0(t-t_0)$  em  $t$ . Da equação (1), com  $\varepsilon = 0$ , uma normal à  $\vec{x}_0(t-t_0)$  é

$$\vec{N}(t, t_0) = \begin{bmatrix} -f_{02}(\vec{x}_0) \\ f_{01}(\vec{x}_0) \end{bmatrix} \quad (3.6.6)$$

Substituindo a eq. (6) na definição (5) podemos escrever

$$D(t, t_0) = \vec{f}_0 \wedge \vec{d} \quad , \quad (3.6.7)$$

onde o produto " $\wedge$ " é definido por

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ou, usando (4)

$$D(t, t_0) = D^e(t, t_0) - D^i(t, t_0) \quad (3.6.8)$$

com

$$D^e(t, t_0) = \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^e \quad (3.6.9a)$$

e

$$D^i(t, t_0) = \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^i \quad (3.6.9b)$$

Derivando (9a) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{D}^e &= \dot{\vec{f}}_0 \wedge \vec{x}_1^e + \vec{f}_0 \wedge \dot{\vec{x}}_1^e \\ &= M(x_0) \cdot \dot{\vec{x}}_0 \wedge \vec{x}_1^e + \vec{f}_0 \wedge \dot{\vec{x}}_1^e \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Usando que  $\dot{\vec{x}}_0 = \vec{f}_0$  e substituindo (3) em (10) resulta em

$$\dot{D}^e = M(x_0) \cdot \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^e + \vec{f}_0 \wedge M(x_0) \cdot \vec{x}_1^e + \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 \quad (3.6.11)$$

que um cálculo direto mostra ser redutível a

$$\dot{D}^e = \text{tr } M(x_0) \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^e + \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 \quad (3.6.12)$$

onde  $\text{tr } M(x_0)$  é o traço do jacobiano de  $\vec{f}_0$ , que, no nosso problema, é nulo na separatriz já que tratamos um sistema hamiltoniano. Como  $D^e$  segue da órbita estável devemos integrar (12) de  $t_0$  até  $+\infty$ .

Integrando a eq. (12), obtemos

$$D^e(+\infty, t_0) - D^e(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 dt$$

Porém

$$D^e(+\infty, t_0) = \vec{f}_0(\vec{x}_0(+\infty - t_0)) \wedge \vec{x}_1^e = 0$$

porque  $\vec{F}_0(\vec{X}_0) = 0$ . Assim

$$D^e(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} \vec{F}_0 \wedge \vec{F}_1 dt \quad (3.6.13)$$

Procedendo de modo similar chegamos a

$$D^i(t_0, t_0) = - \int_{-\infty}^{t_0} \vec{F}_0 \wedge \vec{F}_1 dt \quad (3.6.14)$$

As equações (13) e (14) em (8) dão

$$D(t_0, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_0 \wedge \vec{F}_1 dt \quad (3.6.15)$$

que é a função "distância" de Melnikov para um sistema integrável Hamiltoniano (e portanto  $\vec{F}_0 = (\frac{\partial H_0}{\partial x_2}, -\frac{\partial H_0}{\partial x_1})$ ).

Particularmente, quando a própria perturbação também é Hamiltoniana, ou seja  $\vec{F}_1 = (\frac{\partial H_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial H_1}{\partial x_1})$ , a eq. (15) pode ser reescrita na forma

$$D(t_0, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_1, H_0\} dt \quad (3.6.16)$$

com o integrando calculado em  $t-t_0$ .

Se  $D(t_0, t_0)$  trocar de sinal existe movimento caótico na vizinhança da separatriz.

## REFERÊNCIAS

- (29) - Berry, M.J. - "Regular and Irregular Motion", em Topics in Nonlinear Dynamics, Ed. S. Jorua, AIP Conference Proceedings (NY, 1978).
- (30) - Arnold, V.I. e Avez.A. - "Ergodic Problems in Classical Mechanics", Benjamin (NY, 1968).
- (31) - Arnold, V.I. - "Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique", Edições MIR (Moscou, 1976).
- (32) - Moser, J. - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. III, 20, 499-535.
- (33) - Arnold, V.I. - Russian Math. Surveys, 18, 85-193.
- (34) - Hartman, P. - Ordinary Differential Equations - Wiley & Sons, N.Y., 1964.
- (35) - Guckenheimer, J. e Holmes, P.J. - "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, (Nova York, 1983).
- (36) - Smale, S. - Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967) 747-817.
- (37) - Citado em Moser, J., - Stable and Random Motions in Dynamical Systems", Princeton University Press, Princeton 1973.
- (38) - Birkhoff, G.D., Collected mathematical papers, Amer. Math. Soc., Providence 1950.
- (39) - Melnikov, V.K. - Trans. Mosc. Math. Soc. 12, 1(1963).

## CAPÍTULO IV

### CAOS E BIFURCAÇÕES EM NOSSO MODELO DE UNIVERSO

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Na primeira parte deste capítulo aplicaremos ao nosso problema os resultados estabelecidos no capítulo precedente <sup>(40)</sup>. Em seguida discutiremos alguns experimentos numéricos.

#### 4.2 - MOVIMENTOS REGULARES E CAÓTICOS DO NOSSO MODELO DE UNIVERSO

Conforme estabelecido na seção 3.6, a função de Melnikov indica a presença de fenômenos homoclínicos. Mostraremos que o sistema dinâmico dado pela equação (2.4.3) apresenta tais fenômenos. Esta equação provém de um sistema cuja função hamiltoniana é

$$H(A, P_A, \eta) = \frac{P_A^2}{2} + \frac{1}{B_1^2(\epsilon, \eta)} \left( \frac{A^4}{4} - \frac{A^2}{2} \right), \quad (4.2.1)$$

onde  $P_A = A'$  e empregamos a expressão (2.4.4) para  $B_{(1)}^2(\eta, \epsilon)$ .

Como estamos considerando apenas termos em primeira ordem em  $\epsilon$ , temos



$$H(A, A', \eta) = \frac{A'^2}{2} + \left(\frac{A^4}{4} - \frac{A^2}{2}\right) - \varepsilon \cos \sqrt{2} \eta \left(\frac{A^4}{4} - \frac{A^2}{2}\right) . \quad (4.2.2)$$

A função de Melnikov é dada por

$$D(\eta_0, \eta_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_1, H_0\} \Big|_{\eta-\eta_0} d\eta . \quad (3.6.16)$$

Neste problema

$$H_0 = \frac{A'^2}{2} + \left(\frac{A^4}{4} - \frac{A^2}{2}\right) . \quad (4.2.3)$$

Sabemos que na separatriz, a função hamiltoniana é identicamente zero:

$$H_0 = 0 . \quad (4.2.4)$$

Ao resolvermos a equação acima para  $\dot{A}$  obtemos

$$\frac{dA}{d\eta} = \mp A \left(1 - \frac{A^2}{2}\right)^{1/2} , \quad (4.2.5)$$

ou seja,

$$A(\eta) = \sqrt{2} \operatorname{sech} \eta \quad (4.2.6a)$$

$$A'(\eta) = -\sqrt{2} \operatorname{sech} \eta \operatorname{tgh} \eta . \quad (4.2.6b)$$

Neste cálculo usamos o sinal menos na expressão (5), que corresponde ao lado direito do plano de fase da Figura 2.3.3. O cálculo da função de Melnikow para a separatriz do lado esquerdo é idêntico ao que faremos a seguir.

O parênteses de Poisson da hamiltoniana não-perturbada  $H_0$

com a hamiltoniana perturbadora  $H_1$  é dado por

$$\{H_1, H_0\} = -\varepsilon \cos \omega \eta (A^3 - A) A' \quad .$$

Com a utilização das expressões (6) a função  $D(\eta_0, \eta_0)$  se escreve como

$$\begin{aligned} D(\eta_0, \eta_0) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \eta (4 \operatorname{sech}^3(\eta - \eta_0) - 2 \operatorname{sech}(\eta - \eta_0)) \operatorname{sech}(\eta - \eta_0) \operatorname{tgh}(\eta - \eta_0) d\eta \\ &= -4\varepsilon \operatorname{sen} \omega \eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega \eta \operatorname{senh} \eta}{\cosh^5 \eta} d\eta + \\ &+ 2\varepsilon \operatorname{sen} \omega \eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega \eta \operatorname{senh} \eta}{\cosh^3 \eta} d\eta \quad , \end{aligned}$$

que, após alguma manipulação e o uso da integral (41)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh^{\nu} \beta x} = \frac{2^{\nu-2}}{\beta \Gamma(\nu)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{ai}{2\beta}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{ai}{2\beta}\right) \quad [R_e \beta > 0, R_e \nu > 0, a > 0]$$

resulta em

$$D(\eta_0, \eta_0) = \varepsilon \operatorname{sen} \omega \eta_0 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{\omega i}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\omega i}{2}\right) + \frac{2}{3} \Gamma\left(2 + \frac{\omega i}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\omega i}{2}\right) \right] \quad . \quad (4.2.7)$$

Mostra-se facilmente que a expressão entre chaves é real.

Vemos que a expressão acima possui infinitos zeros sim-

ples - infinitos pontos homoclínicos - conforme afirmamos anteriormente.

Portanto, o movimento do setor  $S^1$  excitado pelo setor  $S^2$  no modo considerado no Capítulo II, regido pela equação (2.4.3) pode se desenvolver numa das seguintes formas (dependendo das condições iniciais):

- movimento caótico sobre a "faixa de instabilidade" na vizinhança da separatriz da Figura 2.3.2. De acordo com o exposto na seção 4.5, na vizinhança  $V$  de qualquer ponto homoclínico existe um conjunto  $I_2$ , invariante sob iterações do mapeamento de Poincaré de modo que cada elemento desse conjunto corresponda a uma sequência duplamente infinita de dois símbolos. Ao introduzirmos a notação de dinâmica simbólica <sup>(35)</sup> onde +1 (respectivamente -1) corresponde a uma trajetória que permanece numa vizinhança (da ordem de  $\varepsilon$ ) da separatriz  $\Gamma^d$  (respectivamente separatriz  $\Gamma^e$ ) até atingir a vizinhança  $V$  de novo, podemos sempre encontrar pontos de  $I_2$  tal que as órbitas destes pontos passem nas vizinhanças de  $\Gamma^d$  e  $\Gamma^e$  em qualquer ordem especificada.

Assim, para uma dada sequência de símbolos 1 e -1, por exemplo (...11-11-1-11111...) haverá um ponto em  $I_2$  tal que sua órbita permaneça nas vizinhanças de  $\Gamma^d$  e  $\Gamma^e$  na ordem pré-fixada. O aparecimento de dois símbolos 1-1 adjacentes nesta sequência significa que a órbita cruza o eixo  $A = 0$  ao passar da vizinhança de  $\Gamma^d$  para a vizinhança de  $\Gamma^e$ .

Porém sabemos que  $A = 0$  corresponde à singularidade física do modelo cosmológico (divergência da densidade de energia, dos invariantes de curvatura, etc.). Assim, o surgimento do símbolo -1 pela primeira vez na sequência simbólica corresponde ao colapso gravitacional do sistema. Condições iniciais que corres

pondam a sequências de símbolos do tipo 11111....11-1... imprimem ao nosso modelo de universo  $N$  oscilações não-periódicas na vizinhança da separatriz  $H^+$  (cada oscilação levando um longo tempo) antes do colapso gravitacional.

O caso  $N = \infty$  merece destaque. É um fato matemático notável <sup>(36)</sup> que a sequência simbólica duplamente infinita composta por 1 corresponda a uma trajetória periódica para a qual  $A > 0$ . Portanto este caso corresponde a um universo oscilando periodicamente sem colapsar.

- Movimento sobre um dos toros não-destruídos (garantidos pelo teorema KAM). Partindo do ponto elítico 0 do lado direito da Figura 2.3.1, temos um conjunto denso de toros "sobreviventes" neste plano de fase perturbado nos quais o sistema executa oscilações quase-periódicas sem a possibilidade de colapso gravitacional.
- Movimento na zona estocástica entre dois toros não-destruídos. Aqui temos dois tipos possíveis de movimento. Num o modelo oscilará de uma forma estocástica, igualmente proibido de colapsar, pois suas condições iniciais o situaram na vizinhança de pontos homoclínicos secundários entre dois toros invariantes (ver Figura 3.5.10). Como vimos na seção 3.5, nesta zona também existem pontos elíticos secundários, em torno dos quais o mapeamento de Poincaré (de ordem mais alta) se desenvolve sobre elipses invariantes: o sistema também pode oscilar de forma quase-periódica, sem poder colapsar.

Discutidos todos os movimentos possíveis no plano de fase da equação (1) para um parâmetro perturbativo pequeno, passaremos a examinar na seção seguinte os fenômenos que surgem ao trabalharmos com  $\varepsilon$  não-infinitesimal.

#### 4.3 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO COM PARÂMETRO PERTURBATIVO QUALQUER

Queremos estudar o plano de fase regido pela equação (2.4.3) para valores não-infinitesimais do parâmetro perturbativo  $\epsilon$ . Nesta equação utilizaremos a expressão (2.4.9) para a função  $B_{(2)}^2(\eta, \epsilon)$ , que considera contribuições até segunda ordem do parâmetro  $\epsilon$ .

Fisicamente, substituímos o poço de potencial  $V(B^2)$  que interage com o poço  $V(A)$  perturbando o movimento que se desenrola sobre a ação deste por um outro similar que o aproxima até valores de segunda ordem em  $\epsilon$ .

Claro está que para valores muito grandes do parâmetro  $\epsilon$  (como alguns usados em breve) a aproximação referida anteriormente não mais vale. Neste caso estudaremos o sistema dinâmico

$$A'' + \frac{1}{B_{(2)}^2(\eta, \epsilon)} (A^3 - A) = 0 \quad (4.3.1)$$

a título de experimento numérico.

Antes de prosseguirmos, um breve comentário sobre as aproximações da função  $B^2(t, \epsilon)$ .

Nas seções 3.4 e 3.5, quando discutíamos o estudo de um sistema dinâmico pelo mapeamento de Poincaré, observamos que o período  $T$  utilizado no mapeamento era dado, de uma forma natural, pelo período do poço perturbador. Assim, a equação (2.4.3), junto com (2.4.9) forneceriam um sistema dinâmico que deveria ser integrado a períodos dados por

$$T = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2E - V(q)}} ,$$

onde  $V(q) = 2q - 2\ln q$  (ver Figura 2.3.4) e  $q_1$  e  $q_2$  são os pontos de retorno de um movimento neste poço com energia  $2E$ . Infelizmente, as dificuldades deste cálculo numérico são proibitivas, o que nos levou a uma aproximação do problema.

A seguir descreveremos os fenômenos que obtivemos nos experimentos numéricos, em ordem crescente do parâmetro perturbativo  $\varepsilon$ .

Na Figura 1 temos a integração do sistema (3.4.3) para dez períodos da função perturbativa  $B_{(2)}^2(\eta, \varepsilon)$ , com  $\varepsilon = 0.01$  e condições iniciais ( $A = 0.1$ ;  $\dot{A} = 0.0$ ). Os pontos sobre as curvas no plano  $A \times \dot{A}$  são o mapeamento de Poincaré, sugerindo um toro do tipo que mencionamos ao enunciarmos o teorema KAM. Convém lembrar que o sistema (1) recai no sistema dado pela hamiltoniana (2.2) para valores muito pequenos do parâmetro perturbativo  $\varepsilon$ , sistema este para o qual valem as conclusões do Teorema KAM.

Porém, o teorema KAM não especifica os valores possíveis do parâmetro perturbativo  $\varepsilon$ , de forma que nunca teremos a certeza de estarmos usando um parâmetro perturbativo suficientemente pequeno.

Com o aumento do parâmetro  $\varepsilon$ , observamos o aparecimento de estruturas nas curvas do plano  $A \times \dot{A}$ . A Figura 2, com algumas pequenas partes ampliadas na Figura 3, mostra estas estruturas para  $\varepsilon = 0.1$ ,  $(0.4, -0.3)$ . O mapeamento de Poincaré parece continuar sobre uma espécie de toro — isto fica claro ao vermos a geração deste desenho na tela de um terminal de computador, onde os pontos tendem a preencher uma curva fechada — embora provavelmente o teorema KAM não se aplique aqui.

Para  $\varepsilon = 0.8$ ,  $(0.8, 0.3)$  observamos um movimento bastante interessante: temos uma oscilação na direção de um eixo que au-

menta de amplitude, troca de direção para a do outro eixo, diminui a amplitude e assim por diante. O mapeamento de Poincaré se apresenta sobre uma curva fechada. Encontramos este comportamento para vários valores de  $\epsilon$  e de condições iniciais.

Outro fenômeno que detectamos em várias integrações no espaço de fase foram  $n$ -furcações por  $n$ -plicação do período. Na Figura 5 temos um esquema que ilustra a situação para  $n = 3$ . A parte superior da figura ilustra os toros no espaço de fase estendido enquanto na inferior temos as intersecções com o plano de fase  $A \times \dot{A}$ . Cabe observar que estes toros se desenvolvem em torno de uma órbita periódica de período  $T$  e que, por variação do parâmetro  $\epsilon$ , tal órbita passa a ser periódica de período  $3T$ . Como está claro da Fig. 5, não identificamos na figura superior direita os planos de fase período a período e sim de três em três períodos, por simplicidade de representação.

Apresentamos a seguir dois exemplos do que discutimos. Na Figura 6 temos o mapeamento de Poincaré para  $\epsilon = 0.992$ ,  $(0.524, 1.3820)$ , quando  $n = 4$  e na Figura 7 temos o mapeamento de Poincaré para  $\epsilon = 2.8$ ,  $(0.8, 0.1)$  quando  $n = 3$ . Para maior clareza, na Figura 8 superporemos ao mapeamento de Poincaré da Fig. 7 a projeção das trajetórias (que se desenrolam no espaço de fase estendido) no plano de fase.

Como seria de se esperar, uma busca cuidadosa revelaria  $n$  pontos fixos (elíticos) do mapeamento de Poincaré para cada  $n$ -furcação. Apresentamos na Figura 9, 3 pontos fixos para  $\epsilon = 2.828$ ,  $(1.1664, -0.002)$  juntamente com a projeção das trajetórias no plano de fase. Aqui temos  $S^1$  oscilando com período  $T = 1$  e por variação de  $\epsilon$  para o valor  $\epsilon = 2.828$  nosso modelo de universo passa a oscilar com período  $T = 3$ . Das  $n$ -furcações que temos, estes são os pontos fixos do mapeamento de Poincaré mais evidentes. A amplia

ção à direita da figura mostra a superposição de todos os pontos do mapeamento.

Quando provamos o teorema de Poincaré-Birkoff supusemos a existência de duas curvas invariantes do mapeamento de Poincaré que possuíam ângulos de rotação em direções opostas (ver Figura 3.5.2). Conseguimos observar numericamente um comportamento similar a este no sistema que estudamos.

As Figuras 10a e 10b mostram toros que, para o mesmo valor do parâmetro perturbativo  $\epsilon = 2.51$  e condições iniciais muito próximas  $(0.8, 0.128)$  e  $(0.8, 0.1)$  são preenchidos pelo mapeamento em direções opostas. Esta é uma indicação de que há uma curva invariante do mapeamento de Poincaré composta somente de pontos fixos, para este valor de  $\epsilon$  e entre as condições iniciais acima. Uma comparação entre as Figuras 10b,c,d, com as mesmas condições iniciais, evidencia a sensibilidade do sistema ao parâmetro perturbativo  $\epsilon$ .

Até aqui nenhum dos movimentos no plano de fase  $A \times \dot{A}$  se desenvolveu no lado esquerdo do plano,  $A < 0$ . Isto porque escolhemos condições iniciais próximas ao ponto elítico  $(1.0, 0.0)$  do plano de fase da Figura 2.3.3.

Porém se nos afastarmos deste ponto e utilizarmos um parâmetro  $\epsilon$  grande, provavelmente as projeções das trajetórias no plano de fase cruzarão o eixo  $A = 0$ . A Figura 11 ilustra este fato com o mapeamento de Poincaré para  $\epsilon = 1.5$ ,  $(0.5, 0.0)$ . Além disso, vemos nesta figura que a "faixa de instabilidade" cresce com o parâmetro  $\epsilon$ .

Finalizaremos este capítulo ressaltando que o estudo numérico do plano de fase  $A \times \dot{A}$  será retomado de forma sistemática



oportunamente. Aqui pretendemos apenas apresentar o grau de complexidade dos movimentos que nele se desenrolam, dependentes do valor do parâmetro perturbativo  $\epsilon$  e das condições iniciais.

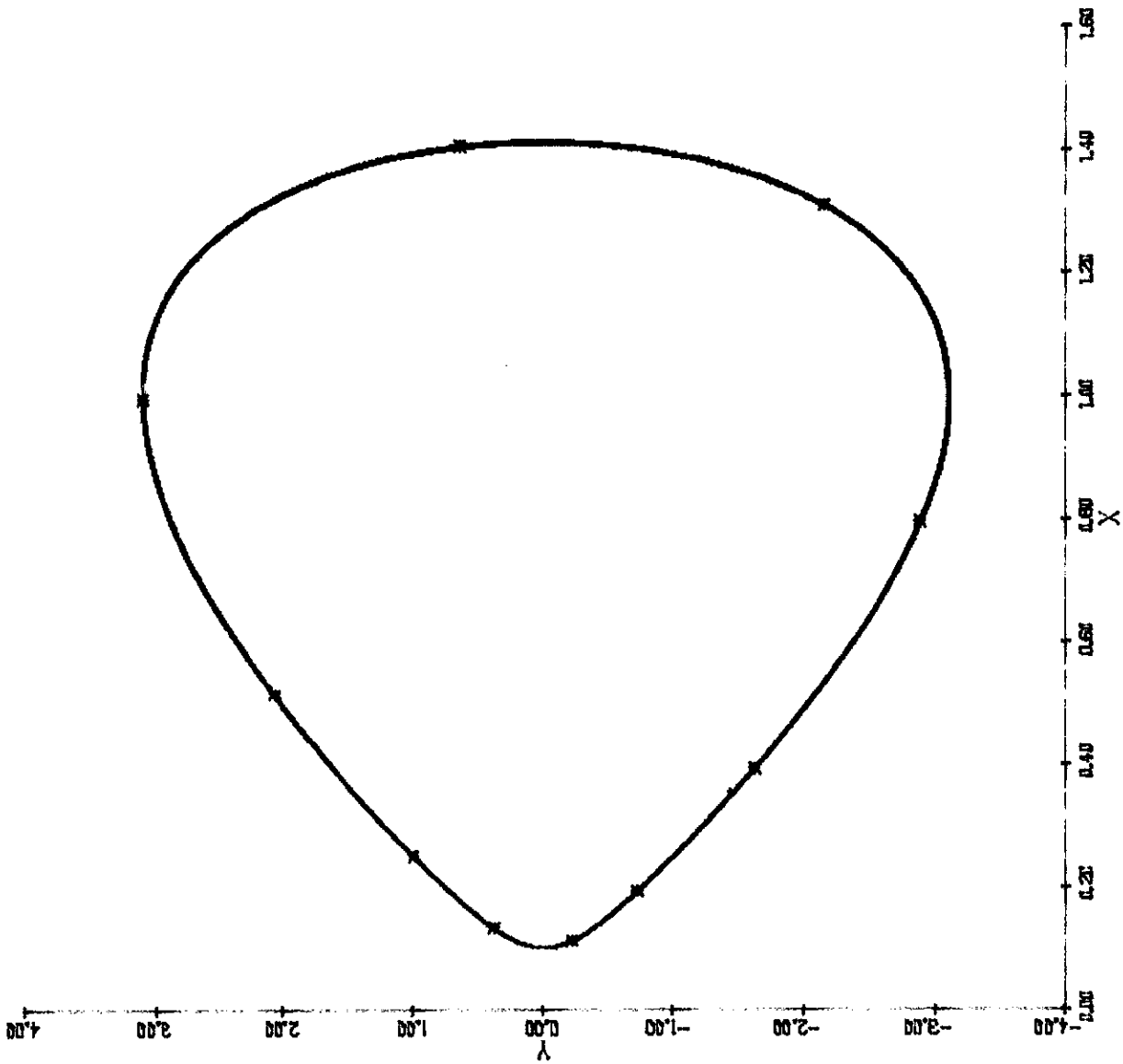


FIGURA 4.3.1 - Trajetórias no plano  $A \times \dot{A}$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (0.1, 0.0).

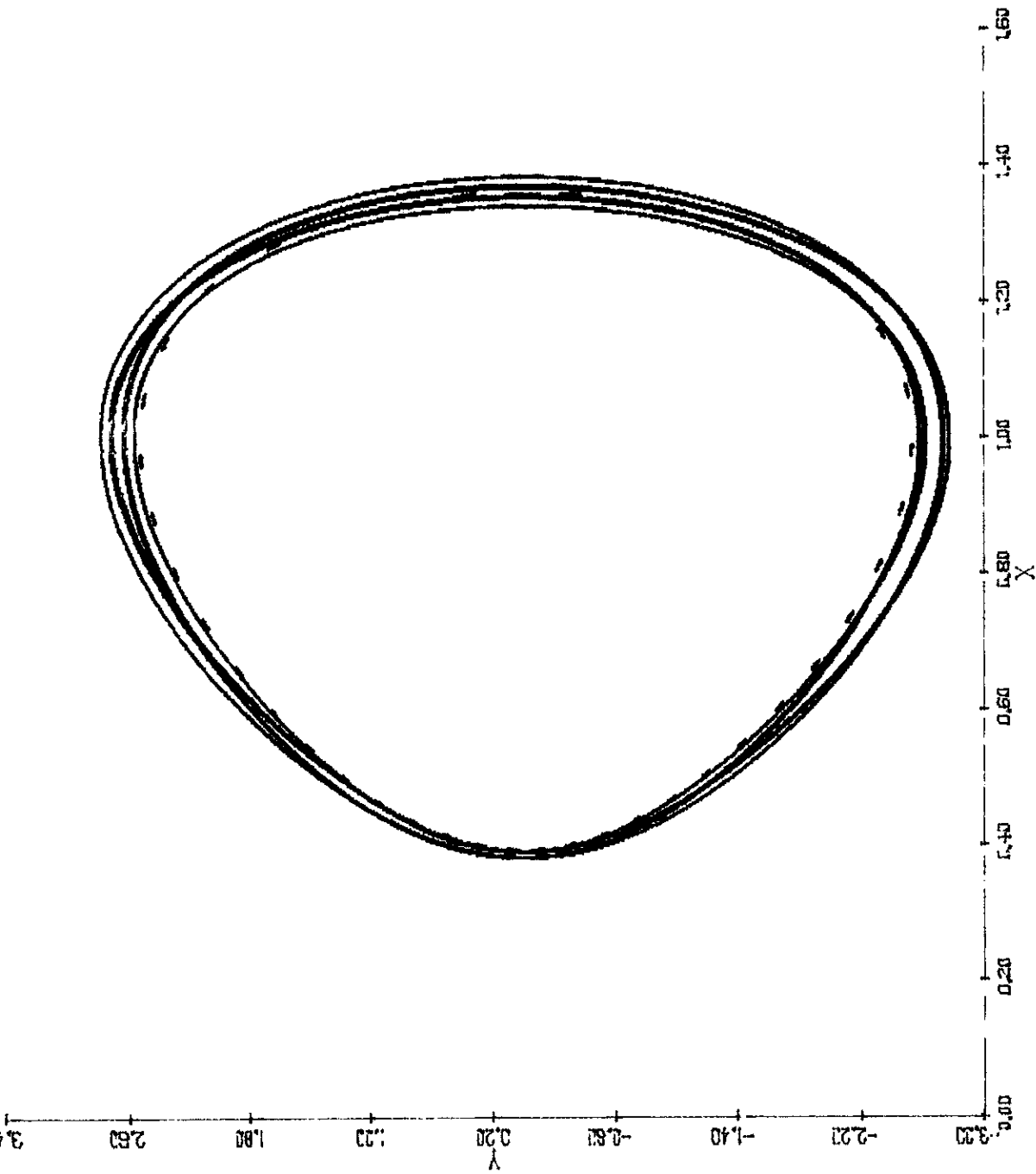


FIGURA 4.3.2 - Estruturas nas trajetórias sobre  $Ax\dot{A}$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $(0.4, -0.3)$ .

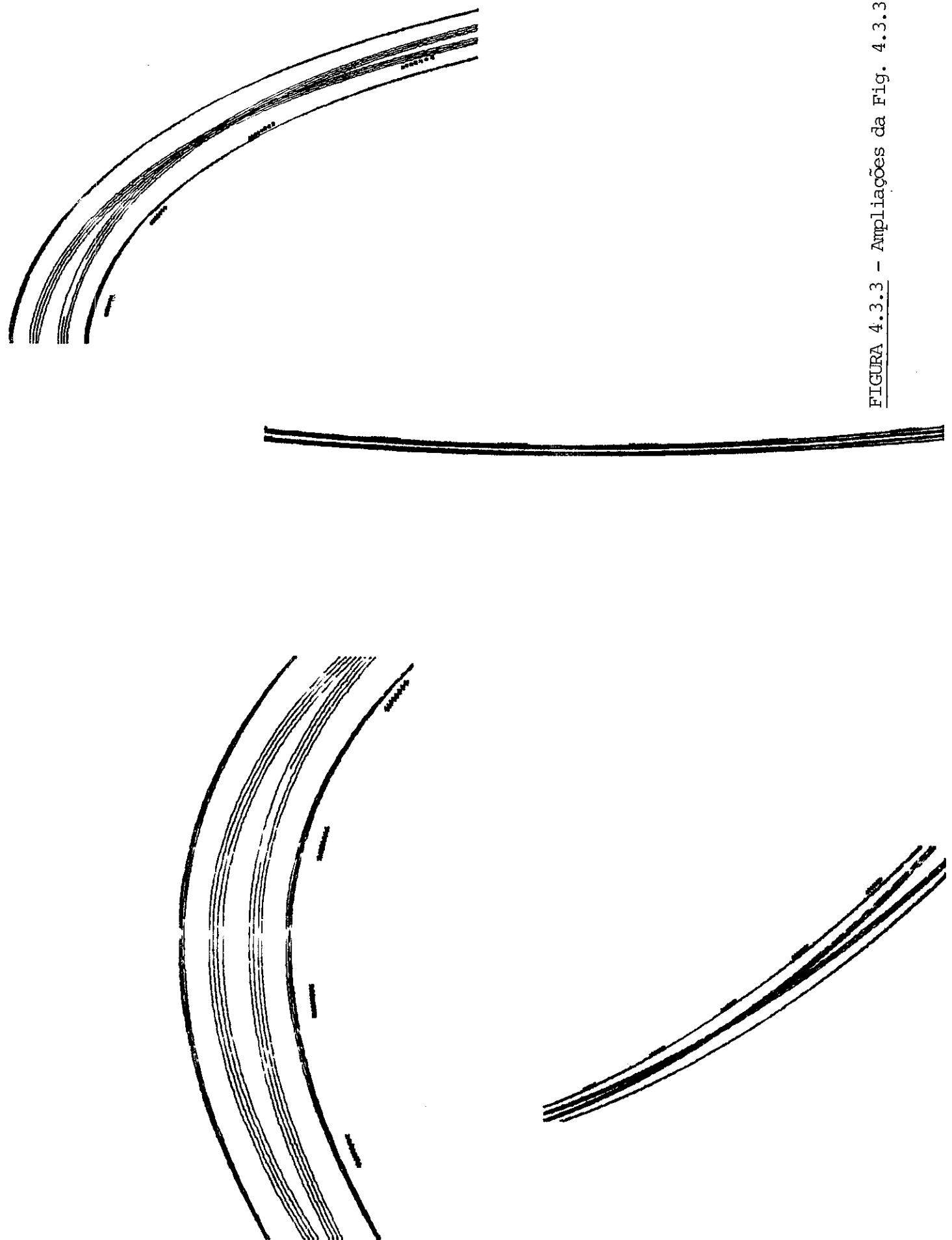


FIGURA 4.3.3 - Ampliações da Fig. 4.3.3.

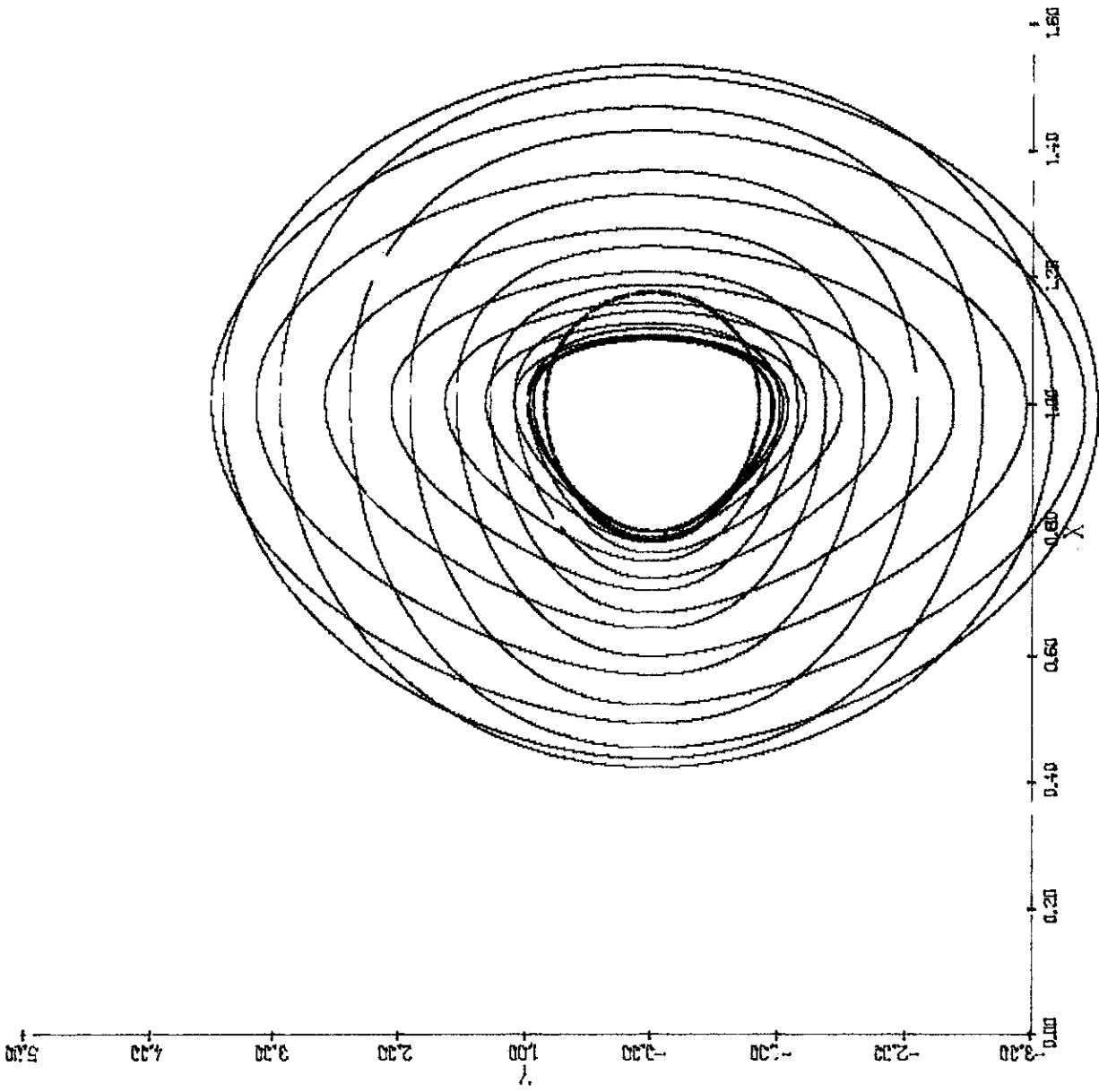


FIGURA 4.3.4 - Trajetórias sobre  $A \times \dot{A}$  para  $\varepsilon = 0.8, (0.8, 0.3)$ .

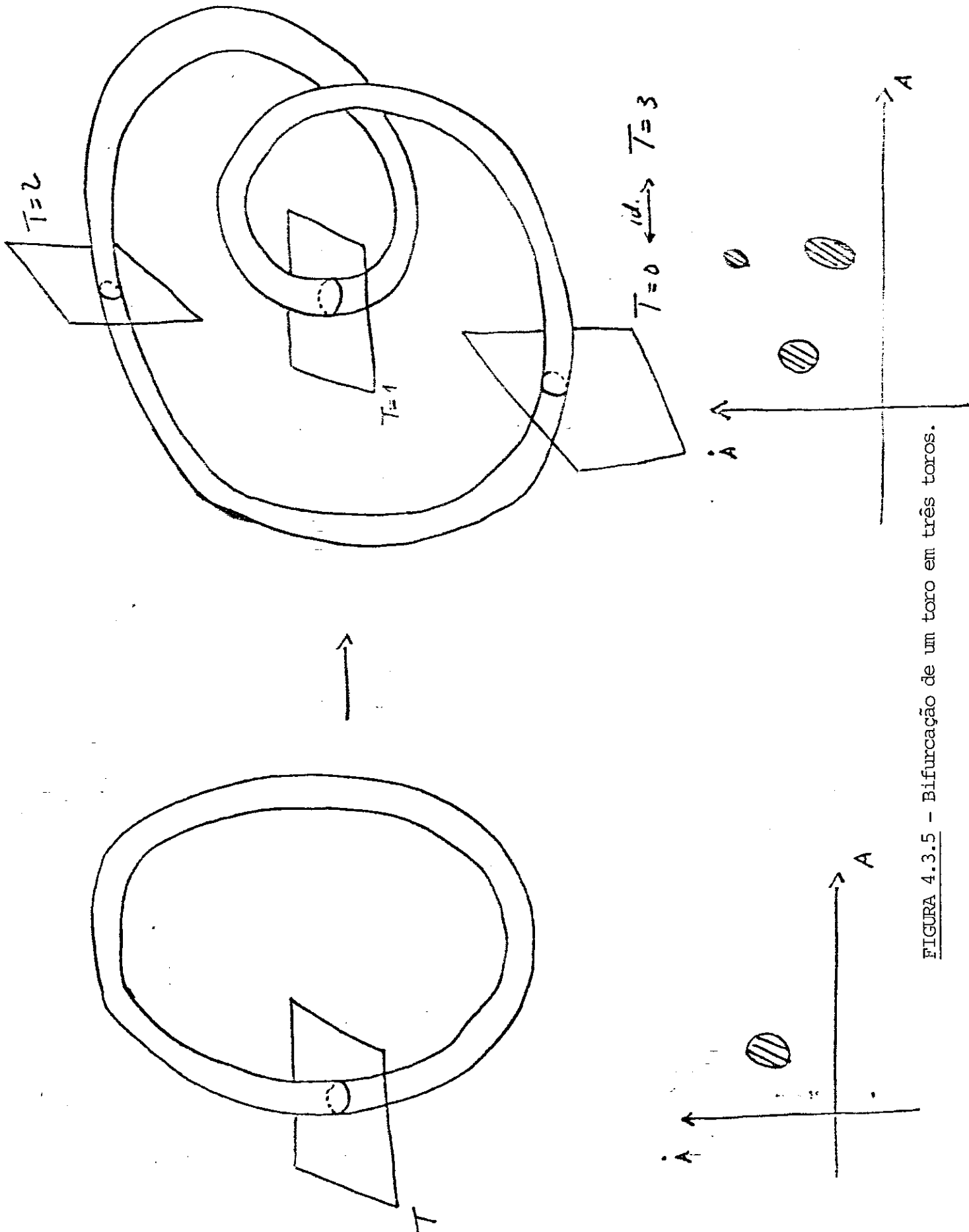


FIGURA 4.3.5 - Bifurcação de um toro em três toros.

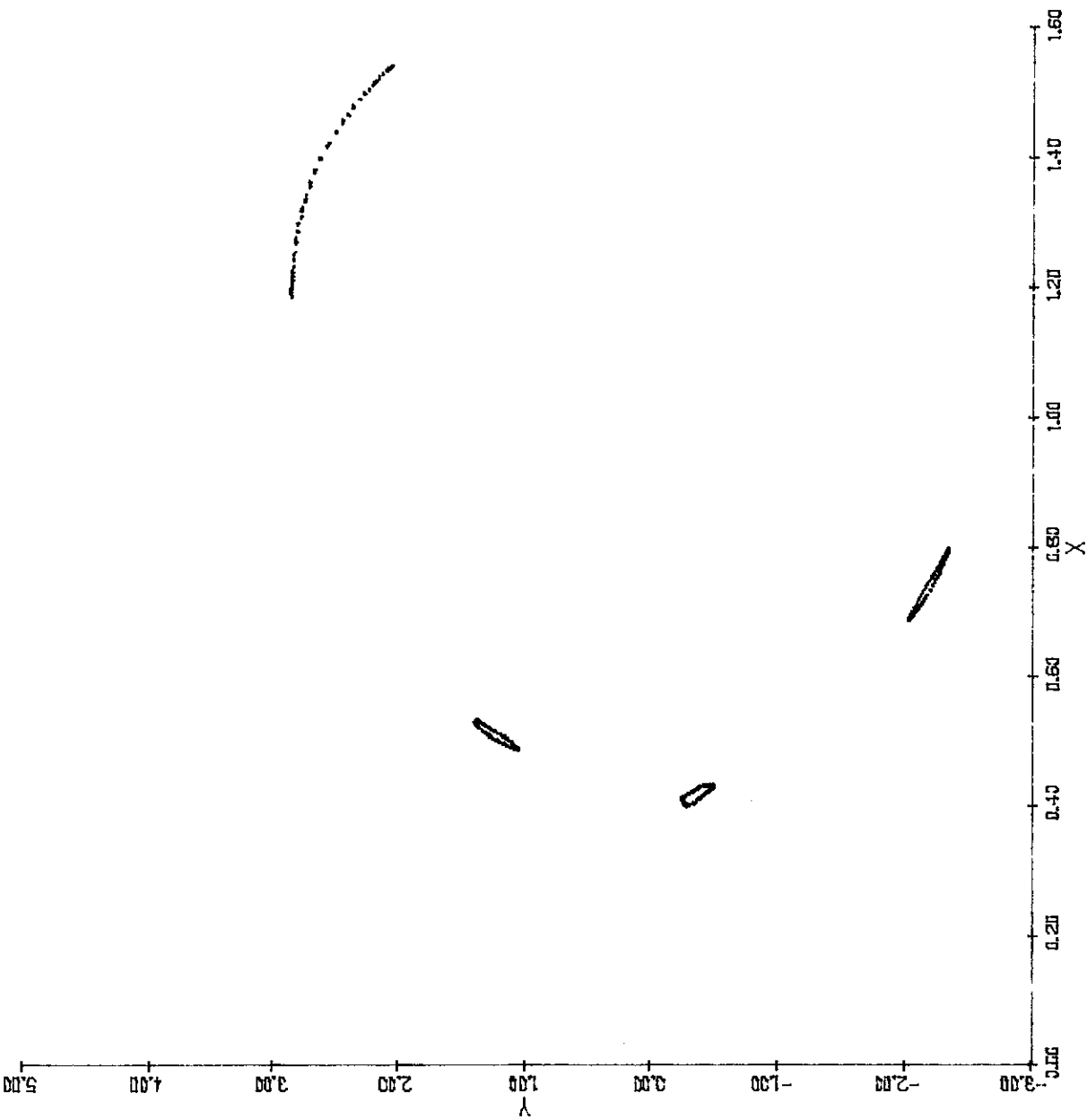


FIGURA 4.3.6 - Mapeamento de Poincaré para  $\epsilon = 0.992$ ,  $(0.524, 1.3820)$ .

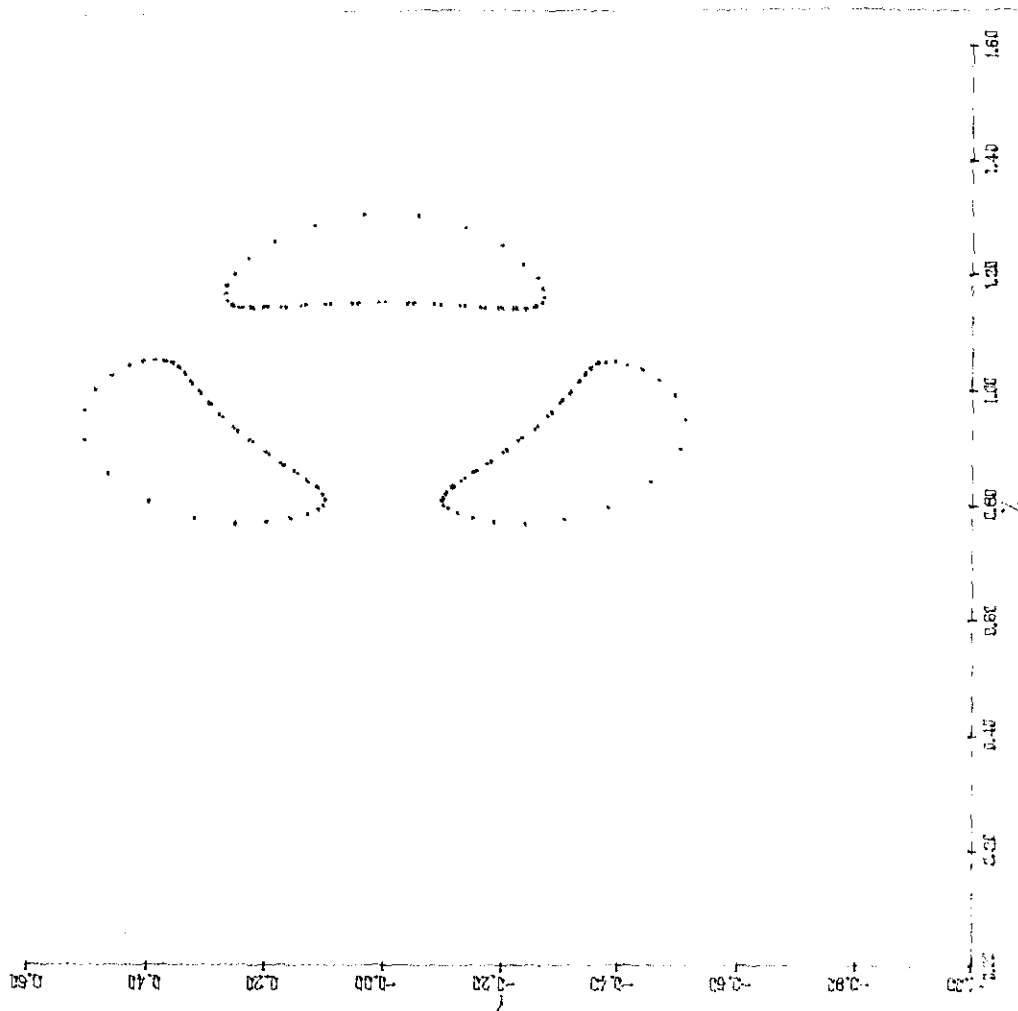


FIGURA 4.3.7 - Mapeamento de Poincaré para  $\epsilon = 2.8$ ,  $(0.8, 0.1)$ .



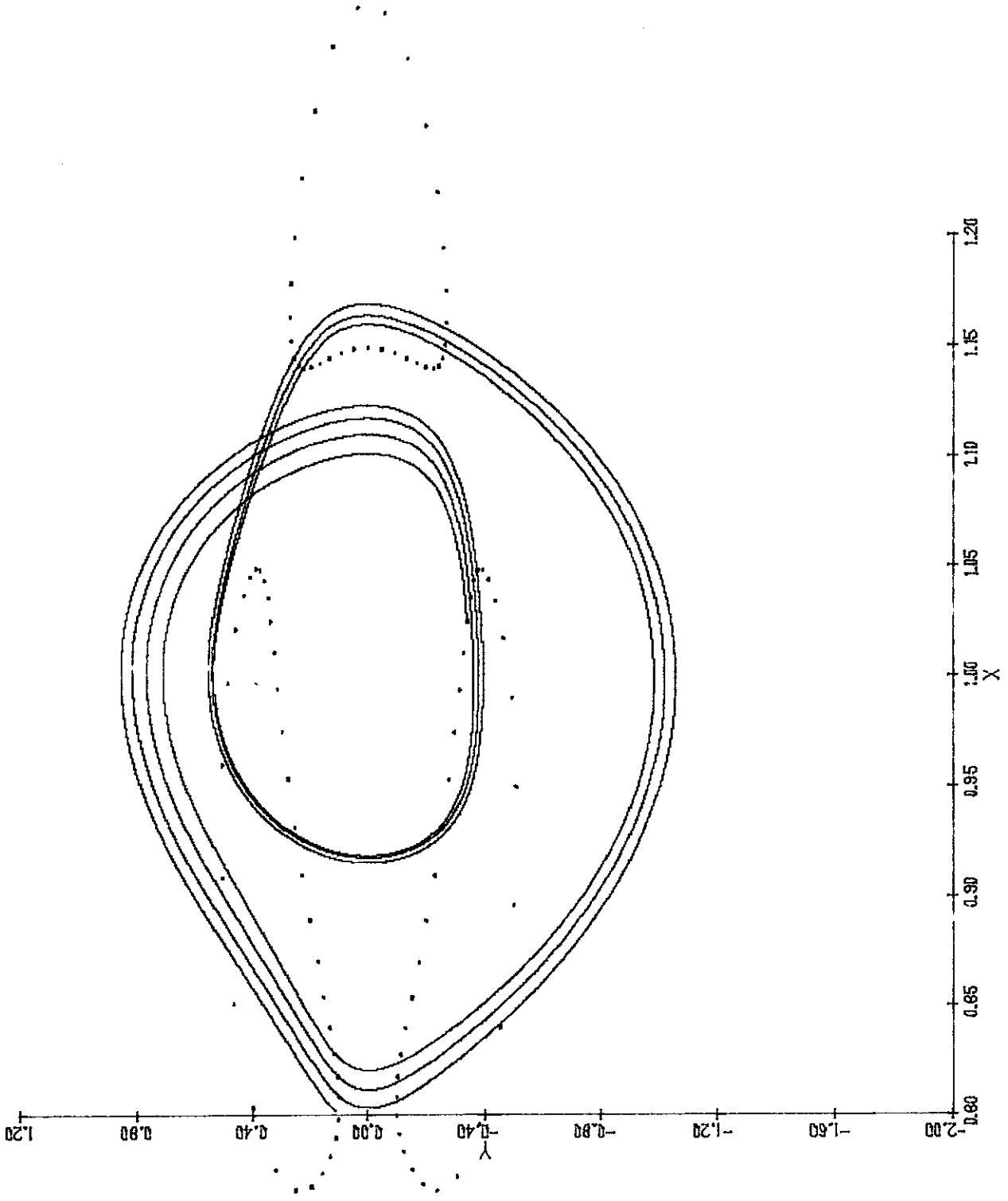


FIGURA 4.3.8 - Mapeamento de Poincaré e trajetórias para  $\epsilon = 2.8$  (0.8, 0.1).

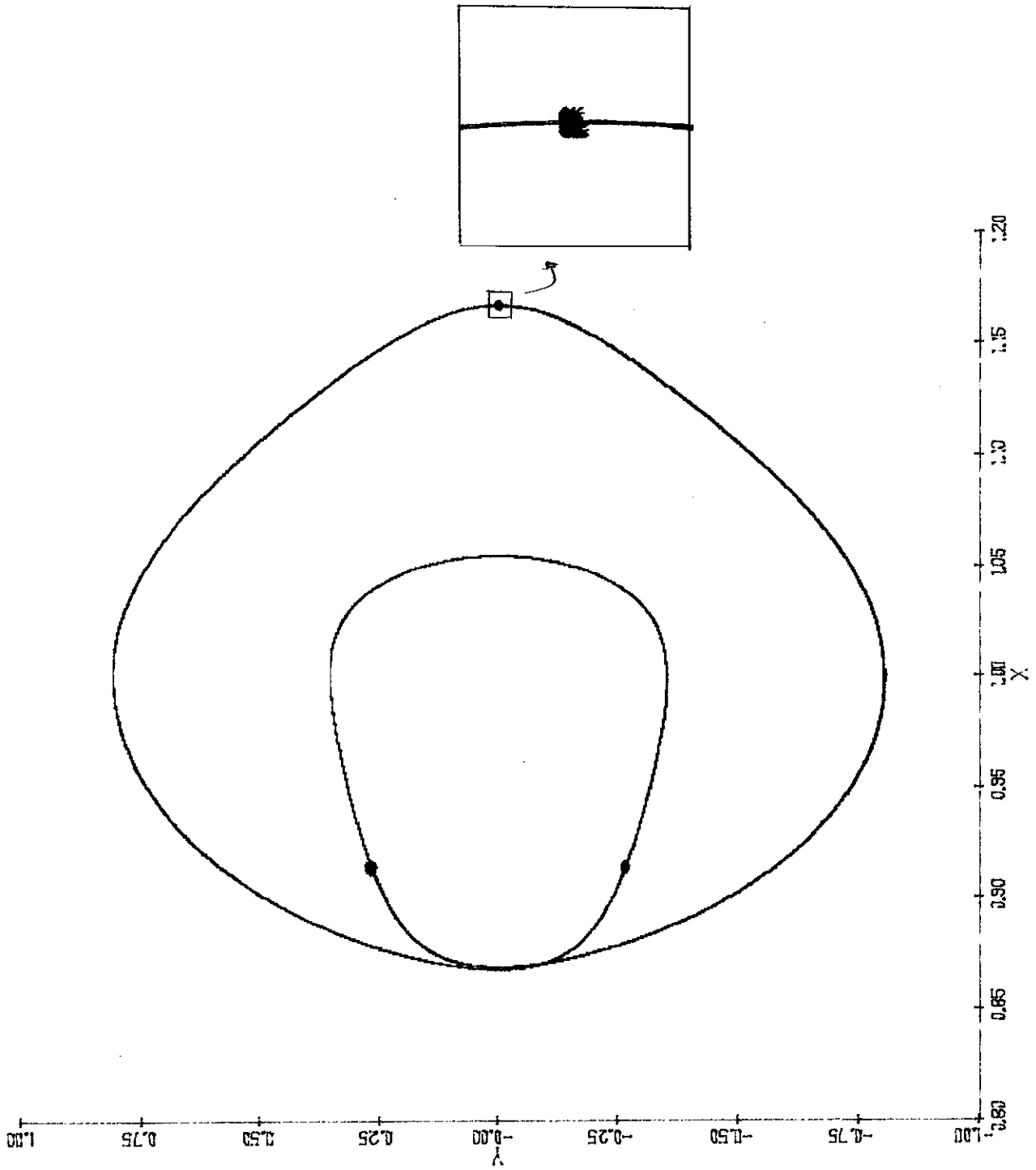


FIGURA 4.3.9 - Três pontos fixos,  $\varepsilon = 2.828, (1.1664, -0.002)$ .

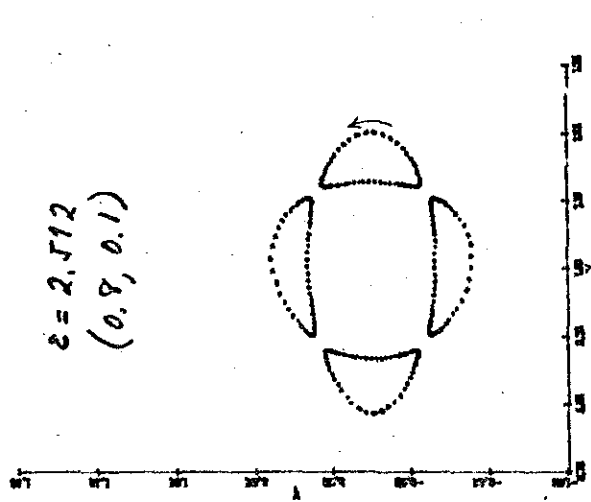
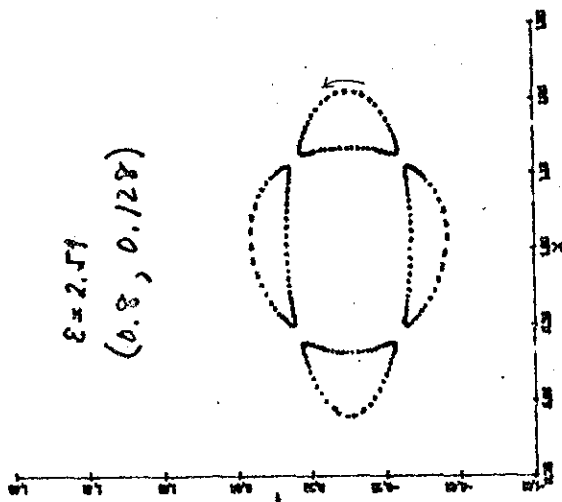
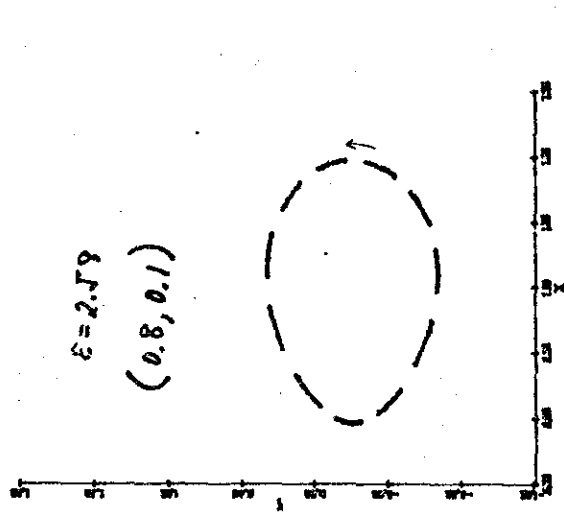
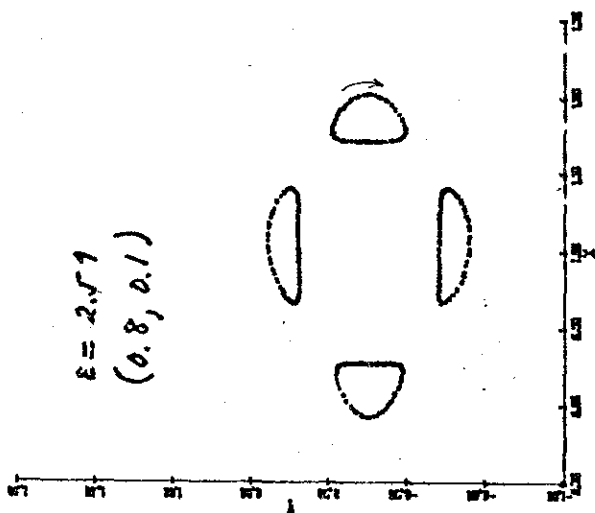


FIGURA 4.3.10 - Mapeamentos de Poincaré para diferentes parâmetros.

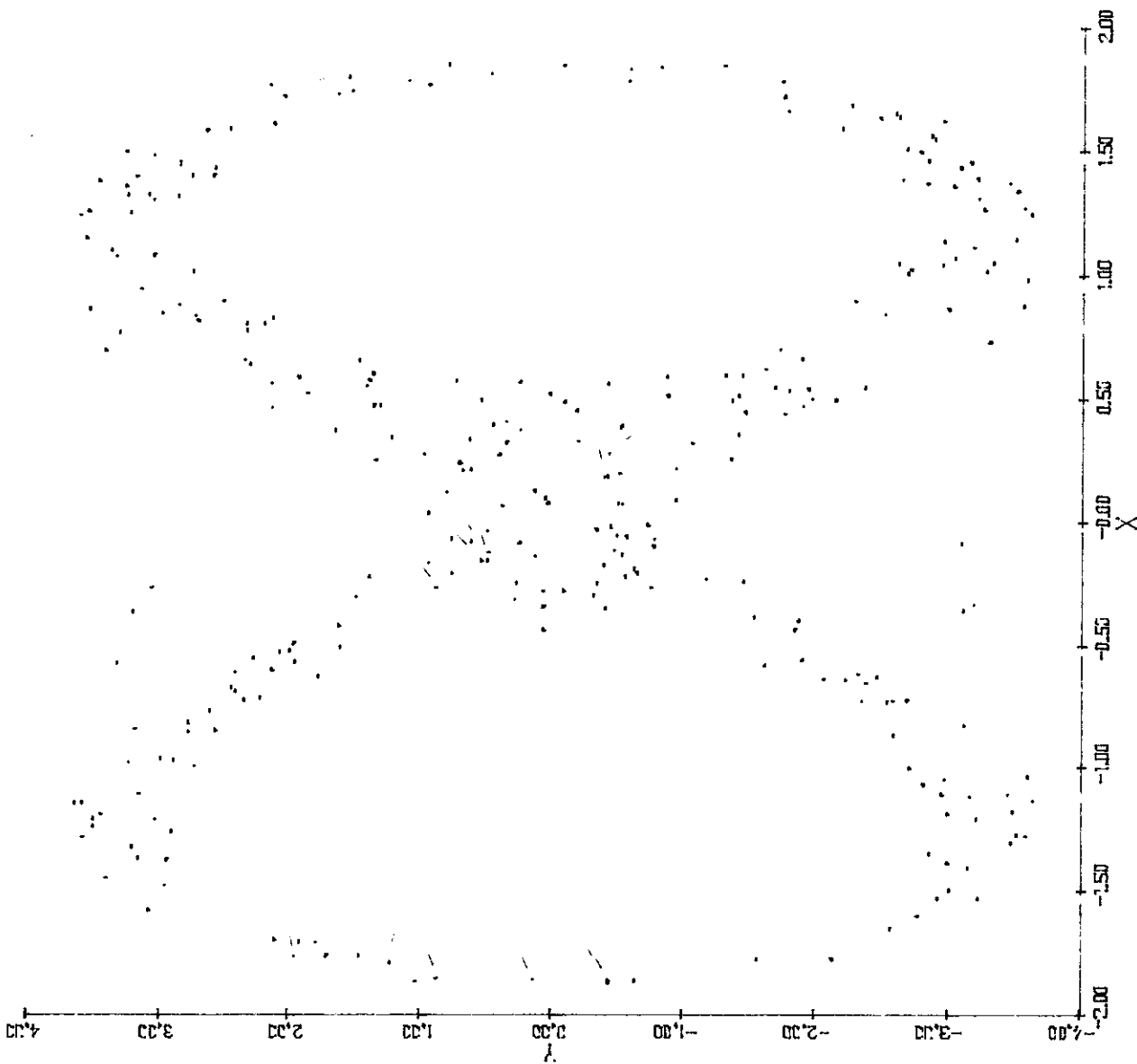


FIGURA 4.3.11 - Mapeamento de Poincaré,  $\varepsilon = 1.5$ ,  $(0.5, 0.0)$ .

## REFERÊNCIAS

- (40) - Koiller, J.; de Mello Neto, J.R.T., e Soares, I.D., Homoclinic Phenomena in the Gravitational Collapse - a ser publicado em Physics Letters A.
- (41) - Gradshtein, Ryzhik - Table of Integrals series and Products, 4ª edição - Academic Press, 1965.

## APÊNDICE A

### O CÁLCULO DOS TENSORES DE RIEMANN E RICCI

Aplicaremos a técnica de cálculo na base de tetradas <sup>(42)</sup> ao elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) (d\chi + \cos\theta d\phi)^2 + \\ - B^2(t) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$$

A métrica é reescrita como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

quando escolhermos as seguintes 1-formas

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= A(t) (d\chi + \cos\theta d\phi) \\ \theta^2 &= B(t) d\theta \\ \theta^3 &= B(t) \text{sen}\theta d\phi \end{aligned}$$

Suas derivadas exteriores são <sup>(\*)</sup>

---

(\*)

Um ponto significa derivada com relação à variável  $t$ .

$$d\theta = 0$$

$$d\theta^1 = \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{A}{B^2} \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\theta^2 = \frac{\dot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^2$$

$$d\theta^3 = \frac{\dot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\cotg\theta}{B} \theta^2 \wedge \theta^3$$

de onde retiramos os  $C^A_{BC} = -C^A_{CB}$

$$C^1_{01} = \frac{\dot{A}}{A} \quad C^1_{23} = \frac{A}{B^2}$$

$$C^2_{02} = \frac{\dot{B}}{B} \quad C^3_{03} = \frac{\dot{B}}{B}$$

A seguir, calculamos os  $\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{BAC}$

$$\Gamma_{101} = \frac{\dot{A}}{A} \quad \Gamma_{202} = -\frac{\dot{B}}{B}$$

$$\Gamma_{123} = -\frac{1}{2} \frac{A}{B^2} \quad \Gamma_{323} = \frac{-\cotg\theta}{B}$$

$$\Gamma_{132} = \frac{1}{2} \frac{A}{B^2} \quad \Gamma_{321} = -\frac{1}{2} \frac{A}{B^2}$$

$$\Gamma_{303} = -\frac{\dot{B}}{B}$$

As 1-formas de rotação  $\omega^A_B = \Gamma^A_{BC} \theta^C$  são

$$\omega^1_0 = \frac{\dot{A}}{A} \theta^1 \quad \omega^2_0 = \frac{\dot{B}}{B} \theta^2 \quad \omega^3_0 = \frac{\dot{B}}{B} \theta^3$$

$$\omega^1_3 = -\frac{1}{2} \frac{A}{B^2} \theta^2 \quad \omega^1_2 = \frac{1}{2} \frac{A}{B^2} \theta^3$$

$$\omega^3_2 = \frac{\cotg\theta}{B} \theta^3 + \frac{1}{2} \frac{A}{B^2} \theta^1$$

Da segunda equação de estrutura de Cartan,  $\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B$  construímos as 2-formas de curvatura

$$\Omega^1_0 = \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega^2_0 = \frac{\ddot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} \theta^3 \wedge \theta^1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{AB}}{B^3} \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^3_0 = \frac{\ddot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} \theta^2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{AB}}{B^3} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1_3 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2} \frac{\dot{AB}}{B^3} \theta^0 \wedge \theta^2 - \frac{1}{4} \frac{A^2}{B^4} \theta^3 \wedge \theta^1$$

$$+ \frac{\ddot{AB}}{AB} \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{1}{2} \frac{\dot{AB}}{B^3} \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4} \frac{A^2}{B^4} \theta^2 \wedge \theta^1 +$$

$$+ \frac{\ddot{AB}}{AB} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^3_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B} \theta^0 \wedge \theta^1 - \frac{\dot{AB}}{B^3} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{1}{2} \theta^2 \wedge \theta^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{1}{2} \frac{A^2}{B^4} \theta^2 \wedge \theta^3 +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{A^2}{B^4} \theta^2 \wedge \theta^3 + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 \theta^3 \wedge \theta^2$$

E finalmente, da definição  $\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D$  temos



$$\begin{aligned}
 R^1_{010} &= -\frac{\ddot{A}}{A} & R^2_{020} &= -\frac{\ddot{B}}{B} & R^3_{030} &= -\frac{\ddot{B}}{B} \\
 R^2_{013} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{A\dot{B}}{B^3} & R^3_{021} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{A\dot{B}}{B^3} \\
 R^1_{313} &= \frac{1}{4} \frac{A^2}{B^4} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} & R^1_{302} &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} + \frac{1}{2} \frac{A\dot{B}}{B^3} \\
 R^3_{223} &= \frac{3}{4} \frac{A^2}{B^4} - \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} \\
 R^3_{201} &= \frac{\dot{A}}{B^2} - \frac{A\dot{B}}{B^3} \\
 R^1_{203} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{A\dot{B}}{B^3} & R^1_{212} &= \frac{1}{4} \frac{A^2}{B^4} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}
 \end{aligned}$$

As componentes do tensor de Ricci,  $R_{AB} = R^C_{ACB} = \eta^{CD} R_{CADB}$  são

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\frac{\ddot{A}}{A} - 2\frac{\ddot{B}}{B} \\
 R_{11} &= \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{B^4} \\
 R_{22} = R_{33} &= \frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{1}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{A^2}{B^4}
 \end{aligned}$$

e o escalar de curvatura  $R = \eta^{AB} R_{AB}$  é dado por:

$$R = -2\frac{\ddot{A}}{A} - 4\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{4\dot{A}\dot{B}}{AB} - 2\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{2}{B^2} + \frac{A^2}{2B^4} .$$

REFERÊNCIA

- (42) - Soares, I.D. - O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos - II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, 1980.

## APÊNDICE B

### CÁLCULOS DO CAPÍTULO II

Partindo da equação (2.4.1)

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{1}{B^4} \{A^2 - L^2\} = 0 \quad (\text{B.1})$$

e usando a definição (2.4.2),  $d\eta = B^{-1}(t, \eta)dt$ , transformamos a equação (1) em

$$\frac{1}{B^2} \left[ \frac{A''}{A} + \frac{1}{B^2} \{A^2 - L^2\} \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

de modo que se supomos  $B^2(\epsilon, t)$  e  $A(t)$  diferentes de zero, obtemos a equação (2.4.3).

Agora mostraremos como calculamos a expressão (2.4.7) para  $B_{(1)}^2(t, \epsilon)$ . Expandindo o potencial  $V(q)$  - definido na expressão (2.3.14), com  $q = B^2(t, \epsilon)$  - em série de Taylor em torno de  $q_{\min} = L^2$ , obtemos

$$V(q) = V_{\min} + \frac{2}{L^2} (q - q_{\min})^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(q - q_{\min})^n}{(n+2)L^{2n}} \quad (\text{B.3})$$

que, em primeira aproximação ( $n=0$ ), fornece:

$$V_{(0)}(q) = V_{\min} + \frac{(q-q_{\min})^2}{L^2} \quad (\text{B.4})$$

Nas vizinhanças do fundo do poço temos um movimento harmônico com frequência  $\nu_0 = \sqrt{2}/L$ , com amplitude  $L\sqrt{2E-V_{\min}} = L\varepsilon$ , e é dado por

$$B_{(1)}^2(t, \varepsilon) = L^2 + L\varepsilon \cos \nu_0 t + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.5})$$

Efetuiremos a substituição do parâmetro  $t$  pelo parâmetro  $\eta$  em (5). Da definição de  $\eta$  temos

$$\begin{aligned} d\eta = B^{-1} dt &= \frac{dt}{\sqrt{L^2 + L\varepsilon \cos \nu_0 t}} \\ &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2L} \cos \nu_0 t\right) dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima, obtemos

$$t = L\eta + \frac{\varepsilon}{2\nu_0 L} \sin \nu_0 t + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.6})$$

Substituindo (6) em (5), obtemos

$$B_{(1)}^2(\eta, t) = L^2 + L\varepsilon \cos L\nu_0 \eta + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.7})$$

que é a equação (2.4.4).

Para levarmos esta aproximação mais longe, de modo a obtermos a eq. (2.4.8), definiremos uma nova variável,

$$\bar{v} = \frac{q - q_{\min}}{L^2} \quad (\text{B.8})$$

Inserindo a definição acima na expressão (3) e utilizando  $\ddot{q} = -\partial V(q)/\partial q$ , obtemos

$$\ddot{v} + \frac{2}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v^{n+1} = 0 \quad (\text{B.9})$$

ou, explicitamente,

$$\ddot{v} + \frac{2}{L^2} v = \frac{2}{L^2} \{v^2 - v^3 + v^4 - v^5 + \dots\} \quad (\text{B.10})$$

É claro que  $v = 0$  é uma solução da equação acima. Vamos, portanto, expressar a solução  $v$  em primeira ordem no parâmetro infinitesimal contínuo  $\epsilon'$  como

$$v = \epsilon' f \quad (\text{B.11})$$

onde  $f$  é uma função limitada, e quando  $\epsilon'$  é infinitesimal,  $v$  é infinitesimal, isto é, estamos numa vizinhança infinitesimal do mínimo do potencial.

Assim, a eq. (10) se torna

$$\ddot{f} + \frac{2}{L^2} f = \frac{2}{L^2} \{ \epsilon'^2 f^2 - \epsilon'^2 f^3 + \epsilon'^3 f^4 - \dots \} \quad (\text{B.12})$$

Suporemos que  $f$  é uma função analítica em  $\epsilon'$  e então

$$f = f_0 + \epsilon' f_1 + \epsilon'^2 f_2 + \dots \quad (\text{B.13})$$

Substituindo (13) em (12) e conservando termos até segunda ordem

em  $\varepsilon'$ , obtemos

$$\begin{aligned} (\ddot{f}_0 + \varepsilon' \ddot{f}_1 + \varepsilon'^2 \ddot{f}_2) + \frac{2}{L^2} (f_0 + \varepsilon' f_1 + \varepsilon'^2 f_2) &= \\ &= \frac{2}{L^2} (\varepsilon' f_0^2 + 2\varepsilon'^2 f_0 f_1 - \varepsilon'^2 f_0^3) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Igualando os coeficientes das potências em  $\varepsilon$  temos

$$\begin{aligned} \ddot{f}_0 + \frac{2}{L^2} f_0 &= 0 \\ \ddot{f}_1 + \frac{2}{L^2} f_1 &= \frac{2}{L^2} f_0^2 \\ \ddot{f}_2 + \frac{2}{L^2} f_2 &= \frac{2}{L^2} (2f_0 f_1 - f_0^3) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Resolveremos o sistema acima até segunda ordem no parâmetro  $\varepsilon$ . Tomaremos a seguinte solução para a primeira das equações (15):

$$f_0 = A_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t \quad (\text{B.16})$$

e a segunda das eqs. (15) se torna

$$\ddot{f}_1 + \frac{2}{L^2} f_1 = \frac{2}{L^2} A_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t \right) \quad (\text{B.17})$$

que possui como solução

$$f_1 = A_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + \frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{6} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t \quad (\text{B.18})$$

Não há necessidade do cálculo de  $f_2$ , pois este termo de (13) contribui em terceira ordem quando utilizarmos (11) para a solução  $v$ .

Assim, ao substituirmos (16) e (18) em (13), obtemos

$$f = A_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \varepsilon' A_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \varepsilon' \frac{A_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t\right) \quad (\text{B.19})$$

Agora utilizaremos a definição (8) e (11), além de  $q = B^2(t, \varepsilon')$ , para obtermos

$$B^2(t, \varepsilon') = L^2 + \varepsilon' L^2 A_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \varepsilon'^2 L^2 \left[ A_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \frac{A_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t\right) \right] \quad (\text{B.20})$$

Novamente usando a definição (2.4.2) mudaremos o parâmetro temporal de  $t$  para  $\eta$  em (20). Ou seja,

$$d\eta = B^{-1}(t, \varepsilon') dt = L^{-1} \left\{ 1 + \varepsilon'^2 A_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \varepsilon'^2 \left[ A_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \frac{A_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t\right) \right] \right\}^{-1/2} dt \quad (\text{B.21})$$

Expandindo (21) e mantendo termos até segunda ordem em  $\varepsilon'$  e integrando, obtemos

$$t = L\eta + \varepsilon' \left[ \frac{A_0 L}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{L} t \right] + \\ + \varepsilon'^2 \left[ -\frac{A_1 L}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{L} t - \frac{A_0^2}{16} t + A_0^2 \frac{13}{48} \frac{L}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{2\sqrt{2}}{L} t \right] \quad (\text{B.22})$$

Denotaremos o conteúdo do primeiro par de colchetes por  $K_1$  e o do segundo par por  $K_2$  e a expressão acima é reescrita como

$$t = L\eta + \varepsilon' K_1 + \varepsilon'^2 K_2 \quad (\text{B.23})$$

Inserindo (23) em (22) e mantendo termos até segunda ordem em  $\varepsilon'$ , temos

$$t = L\eta + \varepsilon' \left[ \frac{A_0 L}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} \eta \right] + \\ + \varepsilon'^2 \left[ \frac{L A_0^2}{4\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} \eta \cos \sqrt{2} \eta - \frac{A_1 L}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} \eta + \right. \\ \left. - \frac{A_0^2}{16} L\eta + \frac{13}{96} \frac{A_0^2 L}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} 2\sqrt{2} \eta \right] \quad (\text{B.24})$$

Denotaremos desta vez o conteúdo do primeiro par de colchetes por  $\Lambda_1$  e o do segundo por  $\Lambda_2$ . A expressão (24) é reescrita como

$$t = L\eta + \varepsilon' \Lambda_1 + \varepsilon'^2 \Lambda_2 \quad (\text{B.25})$$

Substituindo (25) em (20) e conservando termos até segunda ordem em  $\varepsilon'$ , obtemos



$$B^2(\eta, \varepsilon') = L^2 \{1 + \varepsilon' A_0 \cos \sqrt{2} \eta +$$

$$+ \varepsilon'^2 [-\frac{A_0^2}{2} \sin^2 \sqrt{2} \eta + A_1 \cos \sqrt{2} \eta + \frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{6} \cos 2\sqrt{2} \eta]\} \quad (B.26)$$

Desejamos que ao tomarmos as expressões (20) e (26) até primeira ordem, elas recaiam nas equações (5) e (7), respectivamente. Para tal, faremos  $\varepsilon = \varepsilon' L$  e  $A_0 = 1$ . O parâmetro  $A_1$  (constante de integração) será escolhido arbitrariamente igual a zero.

Assim, da equação (20) obtemos a expressão (2.4.8)

$$B_{(2)}^2(t, \varepsilon) = L^2 + L \varepsilon \cos \frac{\sqrt{2}}{L} t + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos \frac{2\sqrt{2}}{L} t \right]$$

e da equação (26) obtemos a expressão (2.4.9)

$$B_{(2)}^2(\eta, \varepsilon) = L^2 + L \varepsilon \cos \sqrt{2} \eta +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \sqrt{2} \eta - \frac{1}{6} \cos 2\sqrt{2} \eta \right] .$$

## APÊNDICE C

### O. MAPEAMENTO "FERRADURA"

Ao final do Capítulo III, afirmamos que na vizinhança de um ponto homoclínico observamos fenômenos caóticos associados com o mapeamento de Poincaré que descreve o sistema. Também nos referimos (seguindo Smale <sup>(36)</sup>, Conley <sup>(37)</sup>) à semelhança entre este mapeamento de Poincaré na vizinhança de um ponto homoclínico e o mapeamento "ferradura" de Smale: ambos possuem as mesmas propriedades. Neste Apêndice apresentaremos de uma forma heurística o mapeamento "ferradura", seguindo de perto Treve <sup>(43)</sup>.

Tomemos um quadrado  $Q$  do plano. O mapeamento dos pontos de  $Q$  será realizado como mostra a Figura C1. Do quadrado  $Q$  comprimido na vertical e esticado na horizontal, faremos uma faixa que, dobrada na forma de ferradura, será superposta a  $Q$ .

Por definição, a imagem de um ponto  $p$  de  $Q$ ,  $\phi(p)$ , será sua localização após as manipulações descritas acima. Se  $p$  for mapeado fora de  $Q$ ,  $\phi(p)$  não é definida.

No entanto, existe um subconjunto de  $Q$ ,  $\Lambda$ , com a propriedade de que todas as iterações  $\phi^n(p)$  de qualquer  $p \in \Lambda$  pertencem a  $Q$  para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , conforme verificaremos a seguir.

Consideremos primeiro as iterações para  $n$  positivo. Um ponto  $p$  de  $Q$  pertencerá a  $\Lambda$  se sua imagem  $\phi(p)$  estiver num dos retângulos  $Q_a$  ou  $Q_b$ . Assim,  $\phi(p) \in Q$  apenas quando  $p$  se situ-

ar numa das pré-imagens  $P_a = \phi^{-1}(Q_a)$  ou  $P_b = \phi^{-1}(Q_b)$ , faixas verticais no quadrado  $Q$ .

Suponhamos então que  $p \in P_a$  ou  $P_b$  de modo que  $\phi(p) \in Q_a$  ou  $Q_b$  e apliquemos  $\phi$  outra vez. Para que  $\phi^2(p)$  esteja em  $Q$ ,  $\phi(p)$  deve estar também ou  $P_a$  ou  $P_b$ . Daí  $p$  tem que estar em uma das pré-imagens dos retângulos  $Q_i \cap P_j$ ,  $i, j = a, b$ . Estas pré-imagens são quatro faixas verticais  $P_{ij}$  que são subconjuntos de  $P_i$ , ou seja,  $P_{ij} = \phi^{-1}(Q_i \cap P_j) \subset P_i$  (Figura C2).

Por outro lado, a imagem de  $Q_i$ ,  $i = a$  ou  $b$ , é uma ferradura que, superposta a  $Q$ , consiste de duas faixas horizontais  $Q_{ij}$ ,  $j = a, b$ , e podemos sempre rotular  $Q_{ij} \subset Q_i \subset Q$ ,  $i, j = a, b$ , como mostrado na Figura C3.

Se aplicarmos  $\phi$  uma vez mais,  $\phi^3(p)$  se situará em  $Q$  caso  $\phi^2(p)$  pertença a  $P_a$  ou  $P_b$ . Como antes, para que isto aconteça  $p$  deve pertencer a uma das oito faixas verticais

$$P_{ijk} = \phi^{-2}(\phi_{ij} \cap P_k) \subset P_{ij} \subset P_i, \quad i, j, k = a, b$$

Finalmente, ao aplicarmos  $\phi$  um número infinito de vezes obteremos um conjunto infinito  $\Lambda_1$  de faixas verticais de largura zero já que, por construção de  $\phi$ , as distâncias horizontais encolhem por um fator menor que um sob  $\phi^{-1}$ .

Os elementos  $P_{ijk} \dots$  do conjunto  $\Lambda_1$  estão numa correspondência um a um com o conjunto de sequências infinitas de dois símbolos

$$\{i, j, k, \dots\}, \quad \text{onde } i, j, k, \dots = a, b.$$

Porque os elementos do chamado conjunto ternário de Can-

tor estão também numa correspondência um a um com este conjunto de sequências, o conjunto  $\Lambda_1$  é equivalente ao conjunto ternário e por isso, também chamado de conjunto de Cantor. (Por conjunto de Cantor entendemos um conjunto fechado que não contém pontos interiores ou pontos isolados).

Agora discutiremos o mapeamento  $\phi^n(p)$ , para  $n$  negativo, de um ponto  $p \in Q$  sob o mapeamento inverso (Figura C3).

Como já sabemos,  $\phi^{-1}(p)$  é definido somente se  $p$  pertence a  $Q_a$  ou  $Q_b$ ,  $\phi^{-2}(p)$  é definido somente se  $p$  pertence a uma das quatro faixas horizontais  $Q_{ij}$ ,  $i, j = a, b$  e, no limite,  $\phi^{-\infty}(p)$  é definido somente se  $p$  pertence a uma das infinitas faixas horizontais  $Q_{ijk\dots}$ ,  $i, j, k = a, b$  que compõem este conjunto. Tal qual  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  é um conjunto de Cantor.

O conjunto  $\Lambda$  que procuramos é o conjunto intersecção de  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ , um conjunto de Cantor em duas dimensões, cujos pontos estão em correspondência um a um com os elementos do conjunto  $S$  de sequências duplamente infinitas de dois símbolos: se o ponto  $p$  for a intersecção da faixa vertical  $P_{s_1 s_2 \dots}$  com a faixa horizontal  $Q_{s_{-1} s_{-2} \dots}$ , (numa notação óbvia), tal ponto será associado com a sequência  $s = (\dots s_{-2} s_{-1}, s_1 s_2 \dots)$ . Assim,  $p$  será identificado biunivocamente com  $s$  e vice-versa.

A cada ponto de  $\Lambda$  corresponde uma sequência  $s$  e a sequência correspondente a  $\phi(p)$  é obtida de  $s$  por uma translação na vírgula.

O conjunto  $\Lambda$  possui as seguintes propriedades (35):

- i) ele contém um conjunto não enumerável de pontos periódicos de  $\phi$ , com períodos arbitrariamente grandes, que correspondem às sequências duplamente infinitas de  $S$  que são periódicas;

- ii) uma vizinhança arbitrariamente pequena de um ponto  $p$  de  $\Lambda$  contém pontos periódicos de  $\phi$ , ou seja, o conjunto de pontos periódicos de  $\phi$  é denso em  $\Lambda$  ;
- iii) o conjunto  $\Lambda$  é hiperbólico: se considerarmos o efeito de  $\phi$  numa pequena vizinhança de um ponto  $p \in \Lambda$ ,  $\phi$  contrai distâncias na direção vertical e as expande na direção horizontal. A importância da noção de hiperbolicidade advém do fato de que mapeamentos que possuem um conjunto hiperbólico invariante geralmente apresentam comportamento caótico sob iterações sucessivas e são ergódicos.

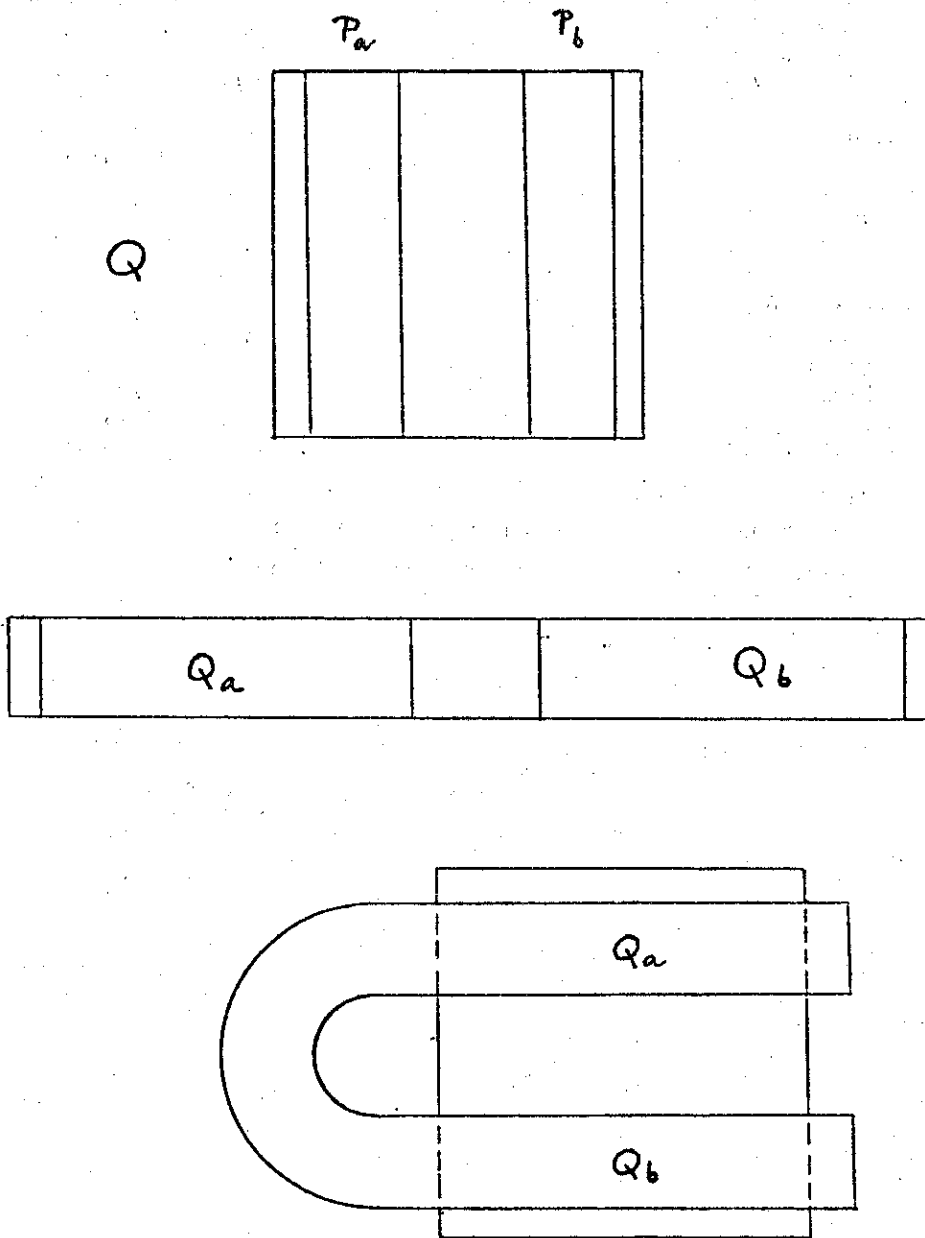


FIGURA C.1 - Definição do mapeamento "ferradura".

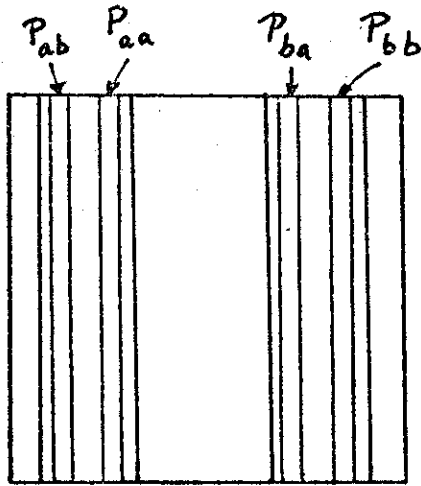
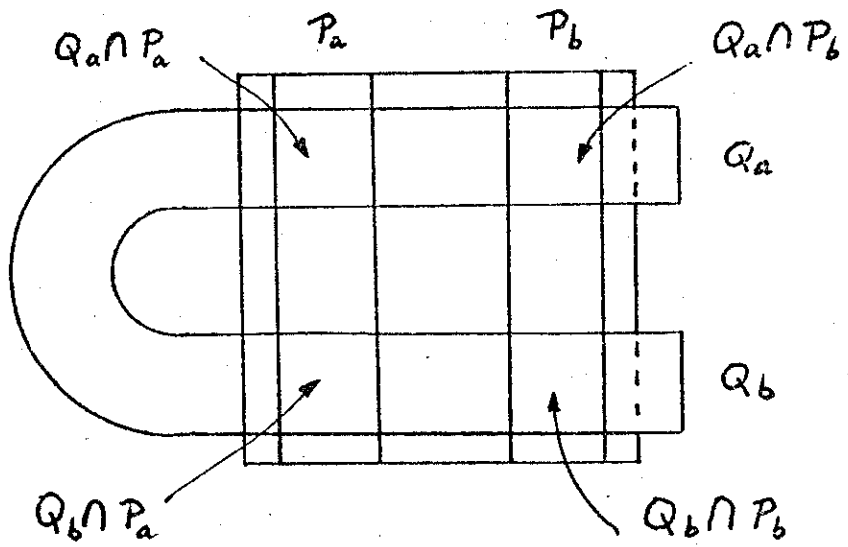


FIGURA C.2 - Mapeamento "ferradura" para n positivo.

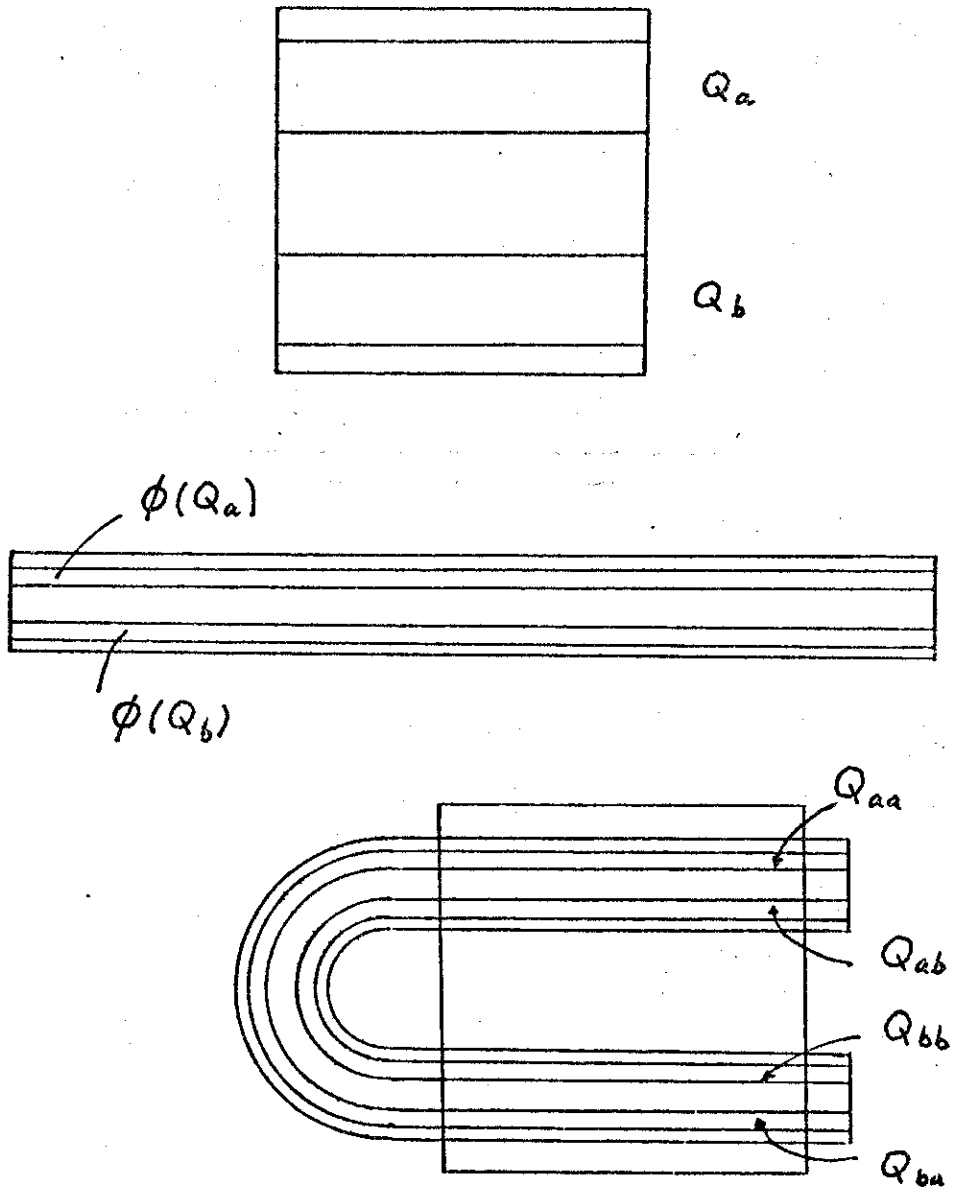


FIGURA C.3 - Mapeamento "ferradura" para  $n$  negativo.



REFERÊNCIAS

- (43) - Treve, Y.M. - "Theory of Chaotic Motion with Application to Controlled Fusion Research", em Topics in Nonlinear Dynamics, AIP Conference Proceedings nº 46, 1978.

## APÊNDICE D

### CONDIÇÕES DE ENERGIA

"Aceita, meu filho, um conselho final: o uso dos livros não tem fim e o estudo em demasia é enfadonho".

(Livro do Eclesiastes, 12:12).

Em princípio, qualquer métrica arbitrária para o espaço-tempo é solução das Equações de Einstein no sentido de que, substituindo a métrica no lado esquerdo das equações de Einstein obtemos, por definição, as expressões para as componentes do tensor momentum-energia (situado no lado direito das referidas equações). No entanto, as métricas admissíveis como solução das equações de Einstein devem ser tais que os tensores momentum-energia a elas associados obedecem a certas condições físicas que são denominadas condições de energia (Hawking e Ellis <sup>(43)</sup>).

No nosso caso, um modelo cujo conteúdo material é um fluido perfeito, as condições de energia a serem satisfeitas são expressas por

$$\rho > 0 \quad (D.1)$$

e

$$|p| \leq \rho \quad (D.2)$$

Vejamos em primeiro lugar que restrições teremos sobre os movimentos obtidos na perturbação exata do setor  $S^1$ . A condição

(1), para a expressão de  $\rho$  dada por (2.3.9) fornece

$$\Lambda + \frac{1}{L^2} - \frac{A^2}{4L^4} > 0 \quad (D.3)$$

Se a perturbação é tal que a constante cosmológica é a mesma do Universo de Einstein  $\Lambda = -1/4L^2$ , então devemos nos restringir a  $A \leq \sqrt{3} L$ .

Por outro lado, a condição (2), ao usarmos a expressão (2.3.10) para  $p$ , nos diz que

$$\frac{A^2}{L^4} \leq 2\Lambda + \frac{2}{L^2} \quad (D.4)$$

De novo supondo que a constante cosmológica continua com o mesmo valor que o do Universo de Einstein, teríamos  $A \leq \sqrt{3/2} L$ .

Observemos que não devemos, necessariamente, fazer  $\Lambda = \Lambda_E$ , e um valor maior da constante cosmológica nos possibilitaria satisfazer (1) e (2) para valores maiores da função escala  $A(t)$ . Por outro lado, o parâmetro  $D$  sempre pode ser escolhido de modo que o movimento dado pelo potencial (2.3.8) seja fisicamente admissível.

Vejamos agora a perturbação exata do setor  $S^2$ . A condição (1) para a densidade de energia (2.3.15) obriga que

$$2L^2 \ln q + 2E - \frac{L^2}{2} + 2\Lambda q^2 \geq 0 \quad (D.5)$$

Neste caso, como o parâmetro de "energia"  $2E$  aparece na expressão de  $\rho$ , procederemos de outro modo. Se desenhássemos o gráfico de  $2E \times q$ , os valores acima da curva seriam os de densida

de positiva. Portanto, os pontos fisicamente admissíveis no domínio do potencial seriam os pontos nos quais o potencial se encontrasse também acima da curva. Ou seja,

$$V(q) \geq 2E \quad (D.6)$$

Usando as expressões (5) e (2.3.14) em (6), obtemos

$$2\Lambda q^2 + 2q - \frac{L^2}{2} \geq 0 \quad (D.7)$$

Para  $\Lambda = \Lambda_E$ , temos que

$$(2-\sqrt{3})L^2 \leq q \leq (2+\sqrt{3})L^2 \quad (D.8)$$

Finalmente, a condição (2) nos impõe

$$-2L^2 \leq 4q^2 \Lambda \quad (D.9)$$

que, para  $\Lambda = \Lambda_E$  se transforma em

$$q^2 \leq 2L^4 \quad (D.10)$$

e impõe também que

$$4E \geq 3L^2 - 4L^2 \ln q \quad , \quad (D.11)$$

condição esta independente do valor de  $\Lambda$  e que sempre pode ser satisfeita.

Notemos mais uma vez que a perturbação considerada pode ser tal que o valor da constante cosmológica difere de  $\Lambda_E$  e portanto, podemos sempre aumentar os limites de (8) e (10).

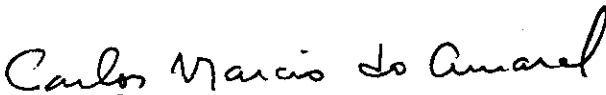
REFERÊNCIAS

- (43) - S.W. Hawking e G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge University Press, New York, USA (1973).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Ívano Damião Soares - Presidente

  
Gerson Francisco

  
Carlos Marcio do Amaral

Rio de Janeiro, 08 de outubro de 1985