

MARCO AURÉLIO DO REGO MONTEIRO

ANOMALIA QUIRAL, DETERMINANTE FERMIÔNICO E
MODELOS BIDIMENSIONAIS

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

— 1985 —

AGRADECIMENTOS

- Aos Professores Carlos G. Bollini e Juan J. Giambiagi, com quem tive a oportunidade de desfrutar inesquecíveis anos de profícua convivência científica e relação humana, a quem dedico profunda admiração e respeito.

- Ao grande companheiro de trabalho Prof. Juan A. Mignaco, a quem tenho enorme carinho e amizade, pela importante contribuição na minha formação científica.

- Ao amigo Prof. Carlos A.P. Galvão pelas inúmeras discussões sobre a física e a vida.

- Ao Prof. Fidel A. Schaposnik pelas diversas valiosas correspondências científicas.

- Ao Prof. Rajat Chanda pela importante contribuição no início desse trabalho.

- Ao Prof. Eduardo C. Marino pelas discussões sobre teorias bidimensionais.

- Aos amigos Profs. César A. Linhares, Itzak Roditi, Luis Boanerges P. Jr. e Stênio Wulck A.M. por diversas discussões sobre física.

- Ao amigo Prof. Saul J. Gdanski pela discussão sobre a molécula de poliacetileno.

- Aos amigos Profs. Fernando A. Simão e José de S. Borges por discussões sobre física.

- A todos os colegas do Trilateral, DCP e do CBPF.

- À Rosangela C. Marques, secretária do DCP, pela paciência que sempre me dispensou.

- A meus pais Ricardo W. do Rego Monteiro e Helena C. do Rego Monteiro pelo apoio nos momentos difíceis.

- À Baixinha por muitas e muitas coisas.

- À Helena S. Ferreira pelo excelente trabalho datilográfico.

- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho analisamos a anomalia quiral em dimensão par arbitrária. Calculamos essa anomalia perturbativamente através do método de Regularização Dimensional.

Desenvolvemos um novo método para o cálculo não-perturbativo do Jacobiano de uma transformação quiral geral, isto é, finita e não-Abeliana, e utilizamos esse método para o cálculo não-perturbativo da anomalia quiral, como uma alternativa à bosonização de teorias bidimensionais com fermions sem massa e para estudo do fenômeno da fracionalização do número fermiônico.

Estudamos ainda o determinante fermiônico da Cromodinâmica Quântica bidimensional calculando-o exatamente, tanto no gauge desacoplante quanto sem referência a um gauge particular.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO À TEORIA DE GAUGE	11
1.1 - O Lagrangiano da Teoria de Campos de Gauge Não-Abelianos.	11
1.2 - Introdução à Quantização das Teorias de Gauge	14
1.3 - Divergências em Teorias de Campos	17
<u>CAPÍTULO II</u> - A ANOMALIA QUIRAL EM DIMENSÃO ARBITRÁRIA	21
2.1 - Introdução	21
2.2 - A Anomalia Quiral	21
2.3 - Cálculo Perturbativo da Anomalia em Dimensão Arbitrária..	23
2.4 - Cálculo Não-Perturbativo da Anomalia em Dimensão Arbitrária	30
<u>CAPÍTULO III</u> - DETERMINANTES FUNCIONAIS	34
3.1 - Introdução	34
3.2 - Regularização de Integrais de Trajetórias Quadráticas....	34
3.3 - "A Equação de Calor"	38
3.4 - Determinante Fermiônico da QCD Bidimensional	41
<u>CAPÍTULO IV</u> - O JACOBIANO DE UMA TRANSFORMAÇÃO QUIRAL GERAL POR DETERMINANTES FERMIONICOS E ALGUMAS APLICAÇÕES	52
4.1 - Introdução	52
4.2 - O Jacobiano de uma Transformação Quiral Geral	53
4.3 - A Anomalia Quiral em Dimensão Arbitrária	58
4.4 - Aplicações a Modelos Bidimensionais	61
O Modelo de Schwinger	61
O Modelo de Thirring	65

QCD Bidimensional	70
4.5 - Fracionalização do Número Fermiônico	72
<u>CAPÍTULO V</u> - DETERMINANTE FERMIÔNICO BIDIMENSIONAL	77
5.1 - Introdução	77
5.2 - O Determinante Fermiônico do Modelo de Schwinger	78
5.3 - O Determinante Fermiônico da QCD Bidimensional sem Referência a um Gauge Particular	81
<u>CAPÍTULO VI</u> - CONCLUSÕES	91
6.1 - Comentários e Conclusões	91
<u>APÊNDICE A</u> - ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MATRIZES γ DE DIRAC EM DIMENSÃO $N > n$	99
<u>APÊNDICE B</u> - CÁLCULO DE UMA EXPANSÃO ASSINTÓTICA DE SEELEY	103
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	107

INTRODUÇÃO

O conceito de campo desempenha um papel importante na compreensão dos fenômenos físicos desde o tempo de Newton com a teoria da Gravitação, passando por Maxwell com a teoria Eletromagnética e se mantém até nossos dias.

No começo desse século nasceu a teoria quântica da matéria que se mostrou, com o correr dos anos, adequada para a descrição dos fenômenos atômicos. Como é bem conhecido, nessa teoria a posição e a velocidade de um sistema de partículas não podem ser determinadas com uma precisão acima de um determinado limite.

Se queremos incorporar os princípios básicos da teoria quântica na teoria eletromagnética temos que quantizar esses campos eletromagnéticos, pois, por exemplo, se pudéssemos medir, de maneira exata e simultânea, os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} de uma partícula carregada poderíamos determinar exatamente sua posição e velocidade.

Em 1930, Oppenheimer⁽¹⁾ e Waller⁽²⁾, independentemente, observaram que as teorias quântica de campos quando calculadas, além da ordem mais baixa de aproximação, produziam resultados divergentes. A posteriori se compreendeu que essas divergências eram independentes do método de aproximação usado e que eram inerentes a estrutura da teoria.

No final da década de 40, Tomonaga⁽³⁾, Schwinger⁽⁴⁾ e Feynman⁽⁵⁾, introduziram um procedimento sistemático para calcular qualquer elemento da matriz S a uma ordem arbitrária de apro-

ximação. Neste procedimento qualquer processo é caracterizado por uma família de diagramas de eventos desenhados em uma dimensão es p a c i a l e uma dimensão temporal com um certo número de linhas ex - ternas incidentes e emergentes. Para cada tal diagrama há associa do uma expressão analítica bem definida que pode ser traduzida nu ma forma analítica com a ajuda das "Regras de Feynman".

Em termos desses diagramas as divergências encontradas nas teorias quântica de campos, as divergências ultravioletas, po dem ser identificadas como aparecendo em certos diagramas de Feynman com "loops", isto é, diagramas com pelo menos uma alça de senhada no gráfico do espaço-tempo que pode ser formada, quando por exemplo, um fóton virtual é emitido e mais tarde reabsorvido pelo mesmo elétron.

As divergências encontradas nessas teorias conduziram, inicialmente, a predições que não tinham interpretações razoáveis como quantidades físicas. Por exemplo, toda a interação entre elê trons e fótons conduziam a resultados que divergiam e até mesmo deixava sem significado físico a descrição de um elétron isolado pois este podendo emitir e reabsorver, mais tarde, partículas vir tuais teria uma carga e massa infinitas.

A solução para este problema é um procedimento chamado de renormalização. Resumidamente, para uma teoria renormalizável, todos os infinitos residem somente na relação entre as massas e constantes de acoplamento, com a qual a teoria começa, e as novas massas e constantes de acoplamento, as quais adquirem agora um significado físico, tendo o valor medido no laboratório.

Desta maneira, para teorias renormalizáveis a renormali zação isola as partes divergentes das integrais em uns poucos pa râ me tro s, as massas e constantes de acoplamento. Entretanto, as

integrais divergentes têm que ser regularizadas para extrairmos delas os resultados finitos, e para fazer isto temos que ter um processo para regularizar essas integrais divergentes.

Diversos métodos de regularização foram desenvolvidos e, em 1971, Bollini e Giambiagi ⁽⁶⁾, 't Hooft e Veltman ⁽⁷⁾, desenvolveram um método chamado de Regularização Dimensional que mantinha, não só a covariância relativística, como também a invariância de gauge de teorias de campos de gauge em todos os estágios do cálculo.

Neste método a dimensão do espaço-tempo é tomada como um parâmetro de regularização. Os objetos que aparecem na teoria como as matrizes de Dirac, o tensor métrico, são estendidos ao espaço n-dimensional de tal forma que seja possível manipular esses objetos como em 4-dimensões. As integrais divergentes são calculadas em n-dimensão e as divergências usuais aparecem então como polos na dimensão do espaço tempo físico. As partes finitas podem, finalmente, ser extraídas.

Em 1954, Yang e Mills ⁽⁸⁾ propuseram uma generalização da idéia já conhecida de invariância de gauge no eletromagnetismo clássico. A proposta era construir uma teoria que fosse invariante perante transformações não-Abelianas de maneira equivalente à invariância do eletromagnetismo perante transformações Abelianas. O modelo considerado era baseado na simetria de isospin, tendo como grupo de simetria o SU(2).

Aparentemente as idéias de Yang e Mills não eram aplicáveis à descrição das interações fracas e nucleares pois na teoria de Yang e Mills os bósons mediadores das interações permaneciam sem massa, analogamente ao fóton no eletromagnetismo, o que não poderia acontecer nas interações fracas e nucleares devido ao

curto alcance dessas interações.

Já nessa época se conhecia a Teoria de Fermi para as interações fracas, a idéia de Yukawa para a interação entre nucleons e foram desenvolvendo-se métodos e teorias para o estudo e a classificação das partículas elementares como a teoria da Matriz S, a teoria perturbativa à la Feynman das interações fortes, a aplicação de princípios gerais como a unitariedade, causalidade, invariância de Lorentz e a classificação das partículas com interação forte, os hadrons, com base no grupo de simetria interna SU(3).

Em 1961, Goldstone⁽⁹⁾ desenvolveu a idéia de quebra espontânea de simetria em teoria de campos. Ele mostrou, considerando o campo escalar complexo, que através de uma redefinição do campo, obtínhamos massa para uma das componentes do campo e anulávamos a massa da outra componente do campo, sendo esta última componente conhecida como bóson de Goldstone.

Higgs em 1964, aplicando a idéia de Goldstone para uma teoria com simetria de gauge local, mostrou que embora os bósons de Goldstone existam formalmente, eles podem ser "eliminados" por uma transformação de gauge, tal que eles não aparecem como partículas físicas. Os bósons de Goldstone "eliminados" aparecem como estados extra de helicidade necessário para que esse bóson vetorial seja massivo.

Em 1967, Salam⁽¹¹⁾ e independentemente Weinberg⁽¹²⁾, propuseram um modelo para os leptons o qual unificava as interações fracas e eletromagnéticas. Essa teoria possui uma invariância de gauge local com grupo de simetria do SU(2)×U(1) em que os bósons vetoriais, descobertos experimentalmente somente em 1984 no CERN, que mediam as interações fracas ganham massa através do mecanismo

estabelecido por Higgs.

Uma das façanhas dessa teoria foi a predição de correntes neutras, já especuladas em 1937 por Gamow, e em 1958, por Leite Lopes ⁽¹³⁾, primeiramente observadas em 1973, no CERN.

Colocava-se então a questão sobre a renormalizabilidade da teoria desenvolvida por Salam e Weinberg. Já se sabia na época, pelos trabalhos de Fadeev e outros, que teorias de gauge com simetria não quebrada eram renormalizáveis. Sabia-se, ainda dos trabalhos de Veltman e Bell, que se partíssemos desde o princípio com campos vetoriais massivos a teoria, além de não ser invariante de gauge, também não era renormalizável.

No período de 1971 a 1972, t Hooft, Veltman, B. Lee e outros, mostraram que uma teoria de gauge com simetria espontaneamente quebrada era renormalizável ⁽¹⁴⁾.

Em 1973, diversos grupos ⁽¹⁵⁾ propuseram independentemente uma teoria de gauge baseada no grupo de simetria SU(3) de cor para a descrição das interações fortes. Essa teoria levou o nome de Cromodinâmica Quântica (QCD) ⁽¹⁶⁾.

Na QCD, os hádrons são vistos como objetos extensos consistindo de um pequeno número de partículas fundamentais, os quarks, os quais possuem números quânticos como carga, estranheza, sabor e cor e os gluons, campos vetoriais coloridos que, analogamente aos fótons na eletrodinâmica, mediam as interações entre os quarks. De forma diferente da eletrodinâmica em que os campos elétricos e magnéticos atuam somente sobre a dinâmica da carga elétrica, sem alterar o seu sinal e sua magnitude, na QCD, o campo colorido age não só sobre a dinâmica dos quarks como também altera sua cor, pois ele próprio carrega cor.

Ainda nessa teoria, como sabemos que os hádrons não pos

suem o número quântico de cor eles são formados por combinações descoloridas de quarks, por exemplo, os mésons são supostos serem formados por um quark e um anti-quark. Além disso como até hoje não observamos partícula alguma com o número quântico de cor, esses quarks e glúons são esperados estarem permanentemente confinados.

O fenômeno do confinamento poderia, a princípio, ser atribuído à natureza não-Abeliana da interação que com a autointeração para os glúons não permitiria a dissipação do campo gluônico no espaço concentrando-se em estreitos tubos que se ligam às fontes dos campos como acontece nos supercondutores de segunda espécie com as linhas do campo magnético. Se isto acontece, é possível mostrar que a energia de ligação de um sistema de dois corpos cresce linearmente com a separação e, nesse caso, nenhuma força externa, por maior que fosse, seria capaz de retirar um quark individual dentro de um méson, por exemplo.

Diversas teorias como a QCD, QED, o modelo de Salam-Weinberg e outras, em que temos campos fermiônicos, possuem uma invariância perante transformações quirais globais, a invariância quiral. De acordo com o teorema de Noether, a invariância quiral implica na existência de uma corrente conservada, a corrente pseudo-vetorial.

Como descoberto por Schwinger, em 1951, e explicitamente estudado por Adler⁽¹⁷⁾ na eletrodinâmica (QED) e Bell e Jackiw⁽¹⁸⁾ no modelo σ , há cerca de quinze anos atrás em conexão com o decaimento do pión neutro, devido aos efeitos quânticos associados com a regularização, essa corrente pseudo-vetorial não é conservada, e a esse fenômeno chamamos de anomalia quiral, ou axial.

Desde os trabalhos de Adler, Bell e Jackiw as anomalias

quirais vêm desempenhando um papel de crescente importância na física de partículas. Em particular, depois dos trabalhos de Gross e Jackiw⁽¹⁹⁾, Georgi e Glashow⁽²⁰⁾ e Bouchiat, Iliopoulos e Meyer⁽²¹⁾ sua importância na renormalização de teorias de gauge tornou-se manifesta.

Mais recentemente, depois do trabalho de 't Hooft⁽²²⁾ sobre quebra de simetria através da anomalia quiral, seu significado matemático foi esclarecido. Através do estudo de 't Hooft, e de Jackiw e Rebbi⁽²³⁾, e Callan, Dashen e Gross⁽²⁴⁾, nos quais foram estudadas as contribuições dos instantons⁽²⁵⁾, foram enfatizadas a relação entre a anomalia e o teorema de índice e analisados muitos fatos importantes deste aspecto matemático.

A relevância de anomalias na fracionalização do número fermiônico⁽²⁶⁻²⁹⁾ em modelos compostos (condições de 't Hooft⁽³⁰⁾), em lagrangeano efetivo da QCD⁽³¹⁾, e na catálise do decaimento de prótons por monopolos⁽³²⁾ foram descobertos recentemente. O assunto está sendo estudado também nos dias atuais em conexão com a supersimetria⁽³³⁾, em teorias com espaço-tempo de dimensão maior do que quatro⁽³⁴⁻³⁸⁾ e com férmions de Dirac-Kähler⁽³⁹⁾.

Os trabalhos originais sobre anomalia quiral eram baseados na análise perturbativa e somente em 1979, com o trabalho de Fujikawa⁽⁴⁰⁾ iniciou-se o desenvolvimento de uma metodologia que permite estudar a anomalia quiral através das integrais de trajetória independentemente da teoria de perturbação. Neste trabalho ele fez a observação importante de que a medida na integração de trajetória - o único lugar onde o aspecto quântico intervém neste tratamento - não é invariante segundo as rotações quirais. Ele mostrou que o Jacobiano associado à transformação quiral era responsável pelo termo anômalo nas identidades de Ward-Takahashi.

No início dessa década, Roskies e Schaposnik ⁽⁴¹⁾ observaram que escolhendo-se um gauge particular e generalizando-se o método de Fujikawa para transformações quirais mais amplas este método poderia ser aplicado, como um método alternativo e simples, à bosonização do modelo de Schwinger ⁽⁴²⁻⁴³⁾. A partir dessa observação, desenvolveram-se métodos para o cálculo do Jacobiano de transformações quirais gerais, encontrando-se soluções do modelo de Thirring ⁽⁴⁴⁾ de maneira bem simples e novas informações da QCD bidimensionais ⁽⁴⁴⁻⁴⁵⁾ e de outros modelos ⁽⁴⁴⁾ não completamente solúveis.

No período de 1983 a 1984, com os trabalhos de Polyakov e Wiegman ⁽⁴⁶⁾, Alvarez ⁽⁴⁷⁾, e Witten ⁽⁴⁸⁻⁴⁹⁾, renasce o interesse em modelos bidimensionais ^(28,29,50-53), e no cálculo do determinante fermiônico ^(46,47,50,52), que vem da integração funcional nas variáveis fermiônicas nas teorias que dependam bilinearmente nos campos fermiônicos, que quando possível desvendam propriedades físicas importantes da teoria ⁽⁵⁴⁾.

Neste trabalho analisamos a anomalia quiral em dimensão par, arbitrária, perturbativamente e não perturbativamente, sua relação com a bosonização de teorias bidimensionais, com o fenômeno da fracionalização do número fermiônico, e o determinante fermiônico da QCD bidimensional. Os resultados originais obtidos foram:

- (i) Cálculo perturbativo da anomalia quiral em dimensão arbitrária ⁽³⁸⁾ pelo método de Regularização Dimensional, apresentado no Capítulo II.
- (ii) Cálculo do determinante fermiônico para a QCD bidimensional ⁽⁵²⁾, no gauge desacoplante ^(45,55), através de um procedimento não perturbativo que faz uso do método do tempo -

-próprio ⁽⁵⁶⁾ para a regularização de determinantes funcionais e a expansão assintótica de Seeley ⁽⁵⁷⁾, apresentado no Capítulo III.

- (iii) Desenvolvimento de um método ⁽²⁹⁾ para o cálculo do Jacobiano de uma transformação quiral geral, isto é, finita e não-Abeliana, regularizando o determinante fermiônico pelo método do tempo-próprio e usando a expansão assintótica de Seeley. Esse método tem a vantagem de ser muito simples pois não necessitamos conhecer o cálculo perturbativo de determinantes ⁽⁵⁸⁾, como é usado no método desenvolvido nas referências ^(50,53) e quase todas as expansões assintóticas ⁽⁵⁷⁾ envolvidas estão tabeladas ^(54,59). Além disso esse método nos permite não só o cálculo não perturbativo da anomalia em dimensão, par, arbitrária, como nos fornece uma análise alternativa de modelos bidimensionais com férmions sem massa e do fenômeno da fracionalização do número fermiônico. Esta análise é feita no Capítulo IV.
- (iv) Cálculo do determinante fermiônico do modelo de Schwinger e da QCD bidimensional sem referência a um gauge particular, apresentado no Capítulo V.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo I, apresentamos sucintamente alguns elementos clássicos e quânticos das teorias de gauge.

No Capítulo II discutimos a anomalia quiral em dimensão, par, arbitrária, calculamos essa anomalia perturbativamente pelo método de Regularização Dimensional e apresentamos sucintamente o método de Fujikawa para o cálculo da anomalia sem referência à teoria perturbativa.

No Capítulo III descrevemos os métodos da função zeta generalizada e do tempo-próprio para a regularização de integrais de trajetória quadrática, discutimos o papel da "equação de calor" para as integrais de trajetória quadrática e usando os métodos desenvolvidos nesse capítulo, calculamos o determinante fermiônico para a QCD bidimensional no gauge desacoplante.

No Capítulo IV desenvolvemos um método bem simples para o cálculo do Jacobiano de transformações quirais gerais, isto é, finita e não-Abeliana. Aplicamos esse método para o cálculo não perturbativo da anomalia quiral em dimensão, par, arbitrária, também como um tipo de bosonização dos modelos de Schwinger, Thirring e QCD bidimensional, e por último para o estudo do problema da fracionalização do número fermiônico num modelo abeliano simples.

No Capítulo V, a partir da observação de que o operador de Dirac em 2-dimensões, Abeliano e não-Abeliano, pode ser escrito de uma maneira conveniente, calculamos o determinante fermiônico para o caso Abeliano e não-Abeliano sem referência a um gauge particular.

Finalmente, no Capítulo VI, comentamos sucintamente os resultados obtidos, discutimos brevemente algumas dificuldades para o cálculo do determinante fermiônico em quatro dimensões e explicitamos os resultados originais obtidos nesse trabalho.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À TEORIA DE GAUGE

1.1 - O LAGRANGEANO DA TEORIA DE GAUGE NÃO-ABELIANA ⁽⁶⁰⁾

É um fato bem conhecido de que o Eletromagnetismo clássico possui uma invariância perante a transformação do campo de gauge A_μ por um gradiente de uma função $\alpha(x)$. Quando incluímos os campos de matéria, a teoria permanece invariante quando, além da transformação descrita acima, simultaneamente multiplicamos o campo de matéria pela exponencial de $i\alpha(x)$. Como $\alpha(x)$ é uma função, essa teoria é dita possuir uma simetria em relação ao grupo Abeliano $U(1)$.

Essas transformações nos campos elementares da teoria são chamadas de transformações de gauge e a invariância perante essas transformações dão lugar, através do teorema de Noether, à conservação da corrente elétrica.

A generalização da idéia de invariância de gauge a grupos mais gerais, não-Abelianos, foi primeiramente proposta por Yang e Mills ⁽⁸⁾ em 1954. O modelo considerado era baseado na simetria de isospin tendo como grupo de simetria o $SU(2)$.

Hoje, acredita-se que o isospin não é uma simetria de gauge, e não pode ser, pois não é uma simetria exata da natureza. Mas a idéia de Yang e Mills, aplicada a outras simetrias internas, nos fornece as teorias de gauge das interações.

Nesta seção descreveremos algumas das propriedades clássicas mais elementares do lagrangeano que hoje acredita-se poderá descrever as interações fortes.

A simetria interna desse lagrangeano é dada pelo grupo SU(3). Um grupo SU(N) é aquele que consiste de todas as matrizes U, unitárias, com determinante um. Para o caso N = 2, os geradores do grupo SU(2) são as três matrizes de Pauli τ^a , e para o grupo SU(3) são as oito matrizes de Gell-Mann λ^a .

Para um grupo geral SU(N) existem $M = N^2 - 1$ geradores que chamaremos de T^a e estes satisfazem:

$$\begin{aligned} T^{a\dagger} &= T^a \\ \text{Tr}(T^a T^b) &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \\ [T^a, T^b] &= i f^{abc} T^c \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo sendo totalmente antissimétricas com respeito aos índices a, b e c. Para o caso do SU(2), $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ sendo ϵ^{abc} o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

Consideremos agora uma teoria de campos de gauge e de matéria com o grupo de simetria do SU(N), consistindo de campos fermiônicos de spin-1/2 ψ^l e campos de gauge vetoriais A_μ^a pertencendo respectivamente às representações dimensionais N e $M = N^2 - 1$ do grupo.

A densidade de lagrangeano da teoria é dada por:

$$L = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \bar{\Psi} (\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (1.2)$$

onde

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

com cada ψ^ℓ , $\ell = 1, \dots, N$, um spinor de Dirac a $2^{n/2}$ -componentes, γ_μ as matrizes de Dirac $2^{n/2} \times 2^{n/2}$ onde n é a dimensão do espaço-tempo par. Temos ainda,

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (1.4)$$

$$D_\mu \equiv i\partial_\mu + g T^a A_\mu^a$$

μ, ν variando de zero a $n-1$, a, b, c de 1 a M , e m a massa dos férmions.

A teoria descrita pela densidade de lagrangeano (1.2) é sabida ser invariante perante as transformações locais, nos campos, do grupo $SU(N)$, chamadas de transformações de gauge e dadas por:

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) \quad (1.5)$$

$$A^\mu(x) \rightarrow U(x)A^\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{1}{g} U(x)\partial^\mu U^{-1}(x)$$

com $A^\mu = A_a^\mu T^a$ e

$$U(x) = e^{-i\omega^a T^a} \quad (1.6)$$

sendo $\omega^a = \omega^a(x)$ funções reais do espaço-tempo.

Essa invariância tem como consequência, analogamente à conservação da carga elétrica no eletromagnetismo, a conservação de N cargas chamadas de coloridas.

Quando o grupo de simetria é o $SU(3)$ os férmions elementares dessa teoria são chamados de quarks, os campos de gauge cor

respondem aos campos dos glúons e a teoria é chamada de Cromodinâmica (15,16).

Hoje, acredita-se que a Cromodinâmica, quando quantizada, venha descrever as interações das partículas que interagem fortemente, isto é, os hadrons. Esses hadrons seriam estados ligados dos quarks que estariam permanentemente confinados.

1.2 - INTRODUÇÃO À QUANTIZAÇÃO DAS TEORIAS DE GAUGE (60)

Quando quantizamos uma teoria de campos pelo método das integrais de trajetória construímos o que chamamos de funcional geratriz da teoria. Essa funcional é obtida pela integração funcional sobre os campos de exponencial de iS/\hbar onde S é a ação clássica da teoria e \hbar é a constante de Planck.

Se agora considerarmos uma teoria de campos de gauge como descrito na seção anterior, teremos que levar em conta que agora a ação é invariante perante as transformações dadas em (1.5). O que essa invariância nos diz é que existem classes de campos $\{A_a^\mu\}$, nas quais os campos dentro dessas classes podem ser relacionados uns aos outros através das transformações (1.5), produzindo o mesmo resultado físico visto que a teoria é invariante perante essas transformações. Se agora incluirmos esses campos na integral de trajetória, estaremos contando diversas vezes a mesma informação física.

A discussão acima sugere que para quantizarmos uma teoria de gauge temos que impor alguma condição sobre os campos de gauge A_a^μ , isto é, fixar o gauge, e extrair os graus de liberdade espúrios da ação da teoria. Fadeev e Popov (61) nos mostraram como

isto pode ser feito e é o que passaremos a descrever sucintamente aqui.

Consideremos, por simplicidade, a densidade de Lagrangeano (1.2) sem campos de matéria,

$$L = - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} \quad . \quad (1.7)$$

Sabemos que segundo a transformação de gauge

$$U(x) = e^{-i\omega_a T_a} \quad (1.8)$$

os campos de gauge se transformam como

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U\partial_\mu U^{-1} \quad . \quad (1.9)$$

Como já dissemos anteriormente, devido à invariância perante as transformações (1.9) precisamos fixar o gauge e eliminar os graus de liberdade espúrios. Fixar o gauge significa que impomos alguma condição sobre A_a^μ , chamada de condição de gauge. Algumas condições comumente usadas são:

$$\begin{aligned} \text{Gauge de Lorentz:} & \quad \partial_\mu A_a^\mu = 0 \\ \text{Gauge de Coulomb:} & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a = 0 \\ \text{Gauge axial:} & \quad A_a^3 = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Uma condição de gauge geral pode ser representada na forma

$$\hat{f}_a A = 0 \quad (a = 1, \dots, N) \quad (1.11)$$

onde \hat{f}_a é um mapeamento do espaço das funções de A_a^μ nele mesmo. Os A admissíveis são aqueles que são mapeados em zero por cada \hat{f}_a .

A funcional geratriz da teoria descrita pela densidade de lagrangeano (1.7) é

$$Z = \int DA e^{iS[A]} \Delta_f[A] \prod_{a=1}^N \delta[\hat{f}_a A] \quad (1.12)$$

onde

$$S[A] \equiv \int d^n x L(x) \quad (1.13)$$

O Jacobiano $\Delta_f[A]$ definido por

$$\int DA \Delta_f[A] \prod_{a=1}^N \delta[\hat{f}_a A] = 1 \quad (1.14)$$

é mostrado ser proporcional a um determinante funcional da matriz contínua $\delta f_a(x)/\delta \omega_b(y)$, com as linhas etiquetadas por (a,x) e as colunas por (b,y) , isto é,

$$\Delta_f[A] = \det \left(\frac{\delta f}{\delta \omega} \right)_{\omega=0} \quad (1.15)$$

para A satisfazendo a condição de gauge (1.11).

Tendo apresentado a maneira pela qual uma teoria com campos de gauge pode ser tratada através do método das integrais de trajetória, incluímos agora os campos fermiônicos ψ e introduzimos a funcional geratriz para a densidade de lagrangeano (1.2) com fontes de férmions, η e $\bar{\eta}$, e fontes para os campos vetoriais, J_μ^a :

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J_\mu^a) = \int DA D\bar{\psi} D\psi \Delta_F[A] \prod_{a=1}^N \delta[\hat{f}_a A] e^{\frac{i}{\hbar} S[A, \bar{\psi}, \psi, \bar{\eta}, \eta, J]} \quad (1.16)$$

onde S é:

$$S[A, \bar{\psi}, \psi, \bar{\eta}, \eta] = \int d^n x [L(A, \bar{\psi}, \psi) + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} + J_\mu^a A_\mu^a] \quad (1.17)$$

com L dado em (1.2).

As funções de Green a n-pontos dos campos são então pro

porcionais a derivadas funcionais da funcional geratriz em relação às fontes convenientes desligando-se essas fontes ao final.

Um método comumente usado para, por exemplo, o cálculo das funções de Green é o método perturbativo. Separamos a lagrangeana do sistema numa parte livre e noutra com interação e fazemos uma expansão na exponencial do lagrangeano de interação.

Obtemos dessa maneira uma série onde cada termo é identificado com um conjunto de diagramas, chamados de diagramas de Feynman, com regras bem definidas para o seu cálculo.

1.3 - DIVERGÊNCIAS EM TEORIAS DE CAMPOS ⁽⁶⁰⁾

A maior parte dos cálculos perturbativos em teoria dos campos envolvem integrais que são divergentes no limite superior de integração. Nas teorias renormalizáveis, as partes divergentes podem ser isoladas em alguns parâmetros da teoria, as massas e constantes de acoplamento.

Entretanto, para realizarmos cálculos, temos que extrair as partes finitas das integrais divergentes e para isso temos que dispor de um método de regularização da teoria.

Passaremos agora a descrever através de um exemplo, o cálculo do diagrama de polarização do vácuo, um método para regularização de integrais divergentes introduzido primeiramente por Bollini e Giambiagi ⁽⁶⁾, e a posteriori, mas independentemente, por 'tHooft e Veltman ⁽⁷⁾, conhecido como o Método de Regularização Dimensional. Este método tem a vantagem de preservar a invariância de gauge nas teorias de campos de gauge e isto, em geral, representa uma vantagem, como veremos no próximo capítulo sobre a simetria axial.

Vamos iniciar considerando, por simplicidade, o caso em que o grupo de simetria da teoria de gauge é o grupo abeliano U(1). A teoria, com esse grupo de simetria, consistindo de campos fermiônicos de spin-1/2 e campos de gauge A_μ é a eletrodinâmica que tem como densidade de lagrangeano

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi \quad (1.18)$$

onde A_μ , $\mu = 0, \dots, n-1$, funções do espaço-tempo, $F_{\mu\nu}$ dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.19)$$

ψ é um spinor de Dirac a $2^{n/2}$ -componentes, γ_μ as matrizes de Dirac $2^{n/2} \times 2^{n/2}$, onde n é dimensão do espaço-tempo, obedecendo a

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

com $g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$.

Consideremos agora a correção perturbativa em ordem mais baixa ao propagador livre do fóton. Representamos essa correção como desenhado na Figura 1.1, e ela é chamada comumente de diagrama de polarização do vácuo.

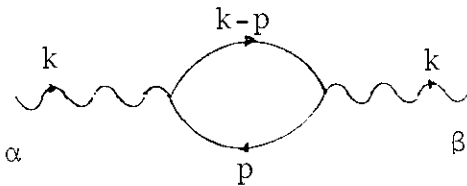


Figura 1.1 - Diagrama de polarização do vácuo.

As regras de Feynman nos levam à integral

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2} \gamma_\beta \frac{\gamma \cdot (p-k) + m}{(p-k)^2 - m^2} \right\} \quad (1.21)$$

Esta integral é divergente no limite superior de integração e pa-

ra regularizá-la a estendemos a uma dimensão n arbitrária

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^n p \frac{\text{Tr } \gamma_\alpha (\gamma, p+m) \gamma_\beta [\gamma, (p-k)+m]}{(p^2-m^2) [(p-k)^2-m^2]} \quad (1.22)$$

Usando as propriedades das matrizes γ a uma dimensão arbitrária, a parametrização de Feynman e passando para a métrica Euclideana, podemos escrever:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-in\pi^{n/2} e^2}{(2\pi)^4} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx 2x(x-1) [m^2 + x(x-1)k^2]^{\frac{n}{2}-2} \quad (1.23)$$

onde $\Gamma(x)$ representa a função gama. Mas para $n \approx 4$ temos:

$$a^{\frac{n}{2}-2} = 1 + (\frac{n}{2} - 2) \ln a + (\frac{n}{2} - 2)^2 (\ln a)^2 + \dots \quad (1.24)$$

e

$$\Gamma(2 - \frac{n}{2}) \approx \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} - \gamma_e \quad (1.25)$$

com γ_e a constante de Euler. Usando agora (1.24) e (1.25), podemos extrair as partes finita e divergente de $\Pi_{\alpha\beta}$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-4i\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) [C(n) + \pi_f] \quad (1.26)$$

onde

$$C(n) = \frac{2}{3(n-4)} \quad (1.27)$$

e

$$\Pi_f = \frac{\gamma_e}{3} - \int_0^1 dx 2x(x-1) \ln [m^2 + x(x-1)k^2] \quad (1.28)$$

Vemos assim por (1.26) que calculamos as partes finita, Π_f , e divergente $C(n)$ do diagrama de polarização do vácuo. E ,

por este método, a parte divergente aparece como um polo na dimensão do espaço-tempo $n = 4$.

CAPÍTULO II

A ANOMALIA QUIRAL EM DIMENSÃO ARBITRÁRIA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos a anomalia axial para teorias de Yang e Mills com dimensionalidade de espaço-tempo maiores do que quatro. A motivação para o estudo dessas anomalias vem da especulação de que essas teorias podem fornecer elementos para a unificação da gravitação com outras forças elementares (34-36,62).

Apesar dessas teorias serem não renormalizáveis, mostraremos aqui, através do cálculo perturbativo e não perturbativo, que essas anomalias são bem determinadas e finitas.

2.2 - A ANOMALIA QUIRAL

Consideremos a densidade de lagrangeano da teoria de gauge não abeliana com campos de matéria, apresentada no capítulo anterior, numa dimensão n par arbitrária

$$L = - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + g\cancel{A} - m)\psi \quad (1.2)$$

se tomamos a massa dos fêrmions, m , nula esse lagrangeano apresenta uma invariância perante a transformação quiral

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\omega\gamma_{n+1}} \psi(x) \quad (2.1)$$

onde γ_{n+1} é o análogo a γ_5 em dimensão n e é dado por

$$\gamma_{n+1} = C \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \quad (2.2)$$

com $\mu_i = 0, \dots, n-1$, C é um fator de normalização, escolhido tal que $\gamma_{n+1}^2 = 1$, e $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita de ordem n .

De acordo com o teorema de Noether, essa invariância de (1.2) perante a transformação quiral (2.1), invariância quiral, implica na conservação da corrente pseudo-vetorial

$$j_{n+1}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_{n+1} \psi \quad (2.3)$$

Usando as equações de movimento dessa teoria podemos deduzir a identidade formal de operadores

$$\partial_\mu j_{n+1}^\mu = 2m j_{n+1} \quad (2.4)$$

onde j_{n+1} é a pseudo corrente

$$j_{n+1} = i \bar{\psi} \gamma_{n+1} \psi \quad (2.5)$$

Esperamos então obter $\partial_\mu j_{n+1}^\mu \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow 0$. Entretanto, isto não acontece. Como veremos, o resultado correto é (29, 37) :

$$\partial_\mu j_{n+1}^\mu = 2m j_{n+1} + C_n \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \text{Tr}_C \left\{ F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{n-1} \mu_n} \right\}, \quad (2.6)$$

onde C_n é uma constante que depende da dimensionalidade do espaço-tempo. O último termo de (2.6) é a anomalia axial e sua presença reflete o conflito entre a invariância de gauge e a invariância quiral (63) como ficará claro ao final do capítulo.

2.3 - CÁLCULO PERTURBATIVO DA ANOMALIA EM DIMENSÃO ARBITRÁRIA ⁽³⁸⁾

Em quatro dimensões do espaço-tempo, a manifestação mais elementar da anomalia axial é o gráfico triangular ^(17,18). Neste, temos um "loop" fermiônico fechado com um vértice pseudo-vetorial e dois vértices vetoriais como mostrado na Figura 2.1, onde os dois gráficos diferem somente pela troca dos fótons externos.

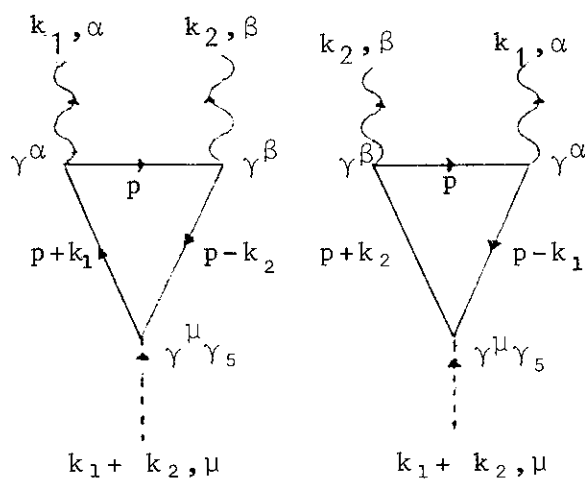


Figura 2.1 - Diagrama triangular para $n = 4$ diferindo apenas pela troca dos fótons externos.

É bem conhecido que é a divergência linear da integral de Feynman fornecida por estes gráficos que permite termos uma contribuição não nula para essa integral.

Para dimensões do espaço-tempo, pares, maiores de quatro teremos que descobrir qual diagrama de Feynman poderá nos fornecer a anomalia axial. Passaremos, agora, a descrever alguns dos passos realizados na referência ⁽³⁴⁾ que cumpriram com esse objetivo.

Por simplicidade consideraremos as anomalias axiais em teorias abelianas, pois a generalização para teorias não-abelianas envolvem somente um fator global de grupo multiplicativo. Quando a dimensão do espaço-tempo é seis, $n=6$, os diagramas com possibilidade de serem linearmente divergentes são para $j=3,4$ e 5 , onde j é o número de propagadores fermiônicos no "loop" de férmions.

O diagrama com 3 lados, $j=3$, nos dá a seguinte integral de Feynman

$$R_{\mu\beta\alpha} = \frac{2!}{(2\pi)^6} \int d^6 p \frac{\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_7 (\not{p}-k_2) \gamma_\beta \not{p} \gamma_\alpha (\not{p}+k_1)}{(p-k_2)^2 p^2 (p+k_1)^2} \quad (2.7)$$

onde γ_7 é dado por (2.2) e estamos tomando, por simplicidade, férmions sem massa pois a anomalia é independente da massa. Como $\text{Tr } \gamma_7 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_6}$ é totalmente antissimétrico com respeito a μ_1, \dots, μ_6 (análogo à antissimetria de $\text{Tr} \gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4}$) e temos somente dois quadrimomentum independentes, k_1 e k_2 , vemos que (2.7) é nulo.

O diagrama de 4 lados (Figura 2.2), é superficialmente quadráticamente divergente mas é realmente linearmente divergente pois no numerador da integral de Feynman temos:

$$\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_7 \not{p} \gamma_\sigma (\not{p}+k_3) \gamma_\beta (\not{p}+k_2+k_3) \gamma_\alpha (\not{p}+k_1+k_2+k_3) \underset{|p| \rightarrow \infty}{\sim} |p|^3 \quad (2.8)$$

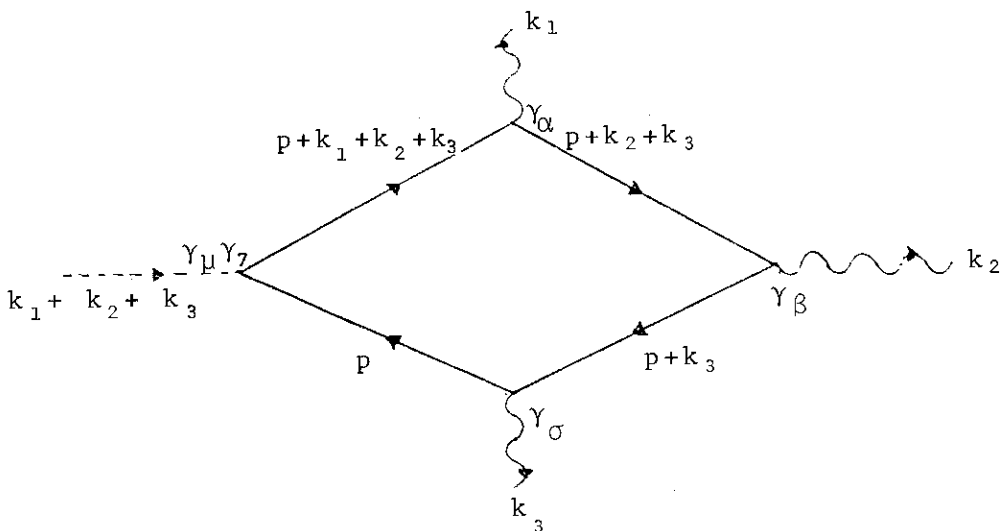


Figura 2.2 - Diagrama de 4 lados, relevante para dimensão $n = 6$.

devido ao fato de que esse traço é dado pela soma de termos em que aparecem o tensor métrico vezes o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita com seis índices. Mostraremos, no final dessa seção, que é realmente desse diagrama que teremos a anomalia para $n = 6$.

O pentágono, $j=5$, é linearmente divergente, mas como mostrado na ref. (34), esse diagrama é gerado por um acoplamento não renormalizável. Estando então ligado às propriedades de não-renormalizabilidade da teoria, perde-se o interesse de estudar esse caso. Os diagramas poligonais com $j \geq 6$ não têm divergência linear, não sendo esperado pois que tenham anomalia.

Podemos continuar a fazer essa análise para dimensões mais altas do espaço-tempo, e o resultado que encontramos é que os diagramas relevantes para uma dimensão arbitrária $n = 2j$, são aqueles diagramas poligonais de $j+1$ lados ou propagadores fermiônicos.

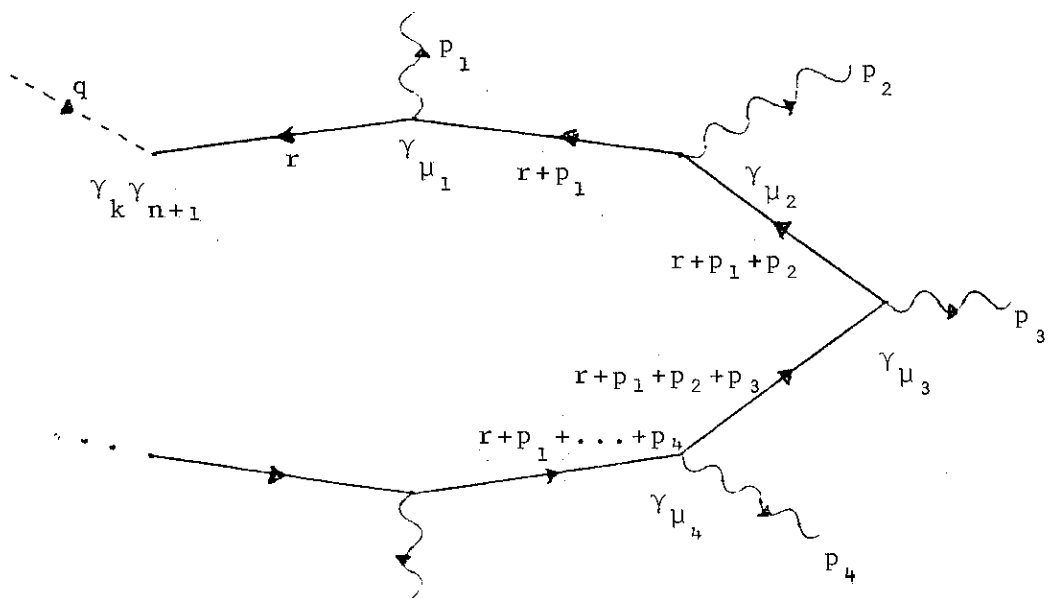


Figura 2.3 - Diagrama de $j+1$ lados, $n = 2j$, relevante para dimensão n .

Passaremos agora a calcular, por um procedimento análogo ao realizado por Bollini e Giambiagi ⁽⁶⁴⁾ para o cálculo da anomalia em 4-dimensões com o método de Regularização Dimensional, a contribuição anômala desse diagrama poligonal de $j+1$ lados, como representado na Figura 2.3. Em um de seus vértices temos uma partícula pseudo-vetorial com momentum q e acoplamento $\gamma_k \gamma_{n+1}$. Para cada j vértices vetoriais emerge uma partícula com momentum p_i ($i = 1, \dots, j$) e o "loop" fermiônico leva uma variável de integração r .

Como a anomalia é independente da massa, tomamos por simplicidade, $m = 0$, então a contribuição do diagrama dado na Figura 2.3 e dos outros obtidos pela permutação do momentum do "fóton" e índices de polarização é, em dimensão N ($N > n$)

$$R_{k\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{j!}{(2\pi)^{2j}} \int d^N r \frac{\text{Tr} \gamma_k \gamma_{n+1} \not{x} \gamma_{\mu_1} (\not{x} + \not{p}_1) \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_j} (\not{x} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_j)}{r^2 (r+p_1)^2 \dots (r+p_1 + \dots + p_j)^2} . \quad (2.8)$$

Usamos a seguinte prescrição para γ_{n+1} (o análogo a γ_5 em dimensão n):

$$\gamma_{n+1} = C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \quad (2.9)$$

onde $\mu_i = 0, \dots, N-1$, C é um fator de normalização e $\tau^{\mu_1 \dots \mu_n}$ é um tensor totalmente antissimétrico de n índices que é igual ao tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita, com n índices, quando $N = n$. Podemos mostrar que com essa prescrição (vide Apêndice A) que quando $N > n$ temos

$$\{\gamma_{n+1}, \gamma_\mu\} \neq 0 \quad (\text{evanescente}) \quad . \quad (2.10)$$

Tomando agora a divergência da corrente pseudo-vetorial em (2.8), e notando que $q = \sum_i p_i$, obtemos:

$$q^k R_{k\mu_1 \dots \mu_j} \equiv A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{j!}{(2\pi)^{2j}} \int \frac{d^N r}{D} \text{Tr}\{(\not{p}_1 + \dots + \not{p}_j) \gamma_{n+1} [] \} \quad (2.11)$$

onde

$$[] \equiv \not{x} \gamma_{\mu_1} (\not{x} + \not{p}_1) \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_j} (\not{x} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_j)$$

e

$$D \equiv r^2 (r+p_1)^2 \dots (r + p_1 + \dots + p_j)^2 .$$

O numerador do integrando em (2.11) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & (\not{x} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_j) \gamma_{n+1} [] - \not{x} \gamma_{n+1} [] = \\ & = - \{ \gamma_{n+1}, \not{x} \} [] + \gamma_{n+1} \not{x} [] + (\not{x} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_j) \gamma_{n+1} [] . \end{aligned} \quad (2.12)$$

A contribuição do último termo em (2.12) para a integral (2.11) é proporcional a

$$\int d^N r \frac{\text{Tr} \gamma_{n+1} \not{x} \gamma_{\mu_1} (\not{x} + \not{p}_1) \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{j-1}} (\not{x} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_{j-1}) \gamma_{\mu_j}}{r^2 (r+p_1)^2 \dots (r+p_1 + \dots + p_{j-1})^2} . \quad (2.13)$$

Note que p_j desapareceu de (2.13). O fato de que $\text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n}$ é antissimétrico nos índices a_i (vide Apêndice A), implica que a integral pode somente depender linearmente em cada p_i ($i=1, \dots, j-1$), e como o termo linear em r desaparece depois da integração em r , vemos que a contribuição de (2.13) é zero. Da mesma maneira, o segundo termo no lado direito de (2.12) pode ser mostrado dar uma

contribuição nula para (2.11). Então ficamos com

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{-j!}{(2\pi)^{2j}} \int \frac{d^N r}{D} \text{Tr} \{ \gamma_{n+1}, \gamma_{\mu} \} [] \quad (2.14)$$

Note que se escolhêssemos em dimensão N $\{ \gamma_{n+1}, \gamma_{\mu} \} = 0$ teríamos um valor nulo para a anomalia.

Usando agora que $\text{Tr} \{ \gamma_{n+1}, \gamma_{\alpha} \} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}}$ é totalmente antissimétrico nos índices a_i (vide Apêndice A) e a parametrização de Feynman, obtemos

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{-(j!)^2}{(2\pi)^{2j}} p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \text{Tr} \{ \gamma_{n+1}, \gamma_{\beta} \} \gamma_{\alpha_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_j} \gamma_{\alpha_j} \int_0^1 dx_1 \dots$$

$$\dots dx_{j+1} \delta \left(\sum_{i=1}^{j+1} x_i - 1 \right) \int d^N r \frac{r^{\beta} r^{\alpha_0}}{\left(\sum_{i=1}^{j+1} D_i x_i \right)^{j+1}} \quad (2.15)$$

com $D_1 = r^2$ e $D_i = (r+p_1+\dots+p_{i-1})^2$ para $i = 2, \dots, j+1$. Completando os quadrados podemos reescrever o denominador do integrando de (2.15) como

$$\sum_{i=1}^{j+1} D_i x_i = [r+p_1 x_2 + (p_1+p_2)x_3 + \dots + (p_1+\dots+p_j)x_{j+1}]^2 - a \equiv (r+b)^2 - a \quad (2.16)$$

Fazendo agora a transformação

$$r \rightarrow r-b$$

obtemos:

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{-(j!)^2}{(2\pi)^{2j}} p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \text{Tr}\{\gamma_{n+1}, \gamma_\beta\} \gamma_{\alpha_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_j} \gamma_{\alpha_j}$$

$$\int_0^1 dx_1 \dots dx_{j+1} \delta\left(\sum_{i=1}^{j+1} x_i - 1\right) \left\{ \int d^N r \frac{r^\beta r^{\alpha_0}}{(r^2 - a)^{j+1}} \right.$$

$$\left. + b^\beta b^{\alpha_0} \int d^N r \frac{1}{(r^2 - a)^{j+1}} \right\} \quad (2.17)$$

Agora, a fim de realizar a integral em r em (2.17) passamos para a métrica Euclideana e fazemos a substituição

$$r^\beta r^{\alpha_0} \rightarrow -\frac{r_E^2}{N} \delta^{\beta\alpha_0} \quad (2.18)$$

Usando ainda

$$\int d^N k \frac{(k^2)^m}{(k^2 + a)^p} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2+m) \Gamma(p-m-n/2)}{\Gamma(p) a^{p-m-n/2}} \quad (2.19)$$

Vemos que a segunda integral em r em (2.17) é finita quando $N = n$ e, nesse caso, podemos fazer o limite $N \rightarrow n$. Mas como $\{\gamma_{n+1}, \gamma_\mu\} = 0$ quando $N = n$ esse termo desaparece e ficamos somente com

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{(-1)^j i^j \pi^{N/2} j!}{2 (2\pi)^{2j}} \Gamma\left(\frac{n-N}{2}\right) p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \text{Tr}\{\gamma_{n+1}, \gamma_\beta\} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\alpha_1} \dots$$

$$\dots \gamma_{\mu_j} \gamma_{\alpha_j} \int_0^1 dx_1 \dots dx_{j+1} a^{(N-n)/2} \delta\left(\sum_{i=1}^{j+1} x_i - 1\right) \quad (2.20)$$

Através da definição de γ_{n+1} dada em (2.9), e usando as propriedades das matrizes γ , é fácil mostrar (veja Apêndice A) que:

$$\gamma_\alpha \gamma_{n+1} \gamma^\alpha = (N-2n) \gamma_{n+1} \quad (2.21)$$

tal que

$$\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} \gamma^\alpha = 2(N-n) \gamma_{n+1} \quad . \quad (2.22)$$

Então

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{(-1)^j 2^{i\pi} N/2 j!}{(2\pi)^{2j}} \left(\frac{n-N}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-N}{2}\right) p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\alpha_1} \dots$$

$$\dots \gamma_{\mu_j} \gamma_{\alpha_j} \int_0^1 dx_1 \dots dx_{j+1} \delta\left(\sum_{i=1}^{j+1} x_i - 1\right) a^{(N-n)/2} \quad (2.23)$$

Como a expressão (2.23) é agora finita, podemos tomar o limite $N \rightarrow n$. Então, usando

$$\text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n} = (-i)^j 2^j \epsilon_{a_1 \dots a_n} \quad (2.24)$$

obtemos para a anomalia

$$A_{\mu_1 \dots \mu_j} = \frac{(i)^{j+1}}{2^{j-1} \pi^1} p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \epsilon_{\mu_1 \alpha_1 \dots \mu_j \alpha_j} \quad , \quad (2.25)$$

que dá o valor usual para $n = 4$, e valores iguais aos obtidos na referência (36) para $n = 6, 8, 10$.

2.4 - CÁLCULO NÃO PERTURBATIVO DA ANOMALIA EM DIMENSÃO ARBITRÁRIA ^(29,37)

Nosso propósito, nesta seção, é derivar a anomalia axial em dimensão par arbitrária através do método de integrais de trajetória ^(29,37).

A derivação da anomalia axial em quatro dimensões por

esse método foi extensivamente estudado por Fujikawa ⁽⁴⁰⁾. O ponto essencial para compreendermos a anomalia por integrais de trajetória é que ela aparece como consequência da não invariância da medida de integração, o conteúdo quântico nesse tratamento, em relação a transformações quirais locais nos campos.

Consideremos o Lagrangeano da teoria de gauge não abeliana com campos de matéria, numa dimensão par arbitrária n :

$$L = - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D}-m)\psi \quad (1.2)$$

onde o operador $\cancel{D} = \cancel{\partial} - ig\cancel{A}$ quando analiticamente estendido para o espaço-Euclidiano torna-se um operador hermitiano.

A variação de (1.2), segundo as transformações quirais locais:

$$\psi \rightarrow \exp[i\alpha(x)\gamma_{n+1}]\psi \quad (2.26)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp[i\alpha(x)\gamma_{n+1}]$$

é dada por

$$L \rightarrow L - \partial_\mu \alpha(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_{n+1} \psi - 2m\alpha(x) \bar{\psi} \gamma_{n+1} \psi \quad (2.27)$$

para α infinitesimal.

Na integral de trajetória, a medida fermiônica de integração, $D\bar{\psi}D\psi$, pode ser definida expandindo-se os campos fermiônicos em termos de um conjunto completo de autofunções, ϕ_k e $\bar{\phi}_k$

$$\psi(x) = \sum_k a_k \phi_k(x) \quad (2.28)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_k \bar{\phi}_k(x) \bar{a}_k \quad ,$$

onde a_k e \bar{a}_k são elementos da álgebra de Grassmann. A medida fer-

miônica pode então ser definida por

$$d\mu = \prod_k d\bar{a}_k da_k \quad . \quad (2.29)$$

Segundo as transformações quirais (2.26), os coeficientes a_k e \bar{a}_k se transformam por:

$$\begin{aligned} a_k &\rightarrow a'_k = \sum_m C_{km} a_m \\ \bar{a}_k &\rightarrow \bar{a}'_k = \sum_m C_{mk} \bar{a}_m \quad , \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde

$$C_{km} = \int d^n x \bar{\phi}_k(x) e^{i\gamma_{n+1}\alpha(x)} \phi_m(x) \quad , \quad (2.31)$$

e devido às propriedades da álgebra de Grassmann, temos:

$$\prod_k da'_k = (\det C)^{-1} \prod_k da_k \quad . \quad (2.32)$$

Então, para $\alpha(x)$ infinitesimal, temos:

$$(\det C)^{-1} = \prod_k [1 - i \int d^n x \alpha(x) \bar{\phi}_k(x) \gamma_{n+1} \phi_k(x)] = \exp -i \int d^n x \alpha(x) A(x) \quad (2.33)$$

com

$$A(x) = \sum_k \bar{\phi}_k(x) \gamma_{n+1} \phi_k(x) \quad . \quad (2.34)$$

Como a soma em (2.34) está mal definida ⁽⁴⁰⁾, devemos regularizá-la. Escolhendo-se o conjunto completo de autofunções $\phi_k(x)$ como sendo autofunções do operador \not{D} , isto é,

$$\not{D}\phi_k = \lambda_k \phi_k \quad , \quad (2.35)$$

podemos regularizar $A(x)$ como:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_k \bar{\phi}_k(x) \gamma_{n+1} e^{-\lambda_k^2/M^2} \phi_k(x) = \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_k \bar{\phi}_k(x) \gamma_{n+1} e^{-\not{D}^2/M^2} \phi_k(x) .
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Usando a completicidade de $\phi_k(x)$ e a propriedade dos traços das matrizes de Dirac em dimensão par arbitrária n , dadas na seção anterior, obtemos (29, 38):

$$A(x) = \frac{(i)^{n/2}}{(2^2 \pi)^{n/2} (n/2)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \text{Tr}_c (F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{n-1} \mu_n}) . \tag{2.37}$$

Considerando agora a funcional geratriz depois de realizada a transformação quiral (2.26) obtemos:

$$Z = \int DAD\bar{\psi}D\psi \exp\left\{- \int [L + \alpha(x) (\partial_\mu j_{n+1}^\mu - 2mj_{n+1} + 2iA(x))] \right\} , \tag{2.38}$$

com j_{n+1} dado por (2.5) e $A(x)$ por (2.37). Como o termo entre parênteses deve se anular, obtemos a expressão da anomalia axial em dimensão arbitrária par:

$$\partial_\mu j_{n+1}^\mu = 2mj_{n+1}^\mu - 2i A(x) . \tag{2.39}$$

É útil ainda mencionar que se escolhêssemos o conjunto $\phi_k(x)$ como auto-estados, não de \not{D} , mas sim de $\not{\gamma}$ regularizando como em (2.36), obteríamos um valor nulo para a anomalia (63). Interpretamos isso como um procedimento de regularização em que a invariância quiral pode ser satisfeita a despeito da perda da invariância de gauge. Devido ao fato de que $\not{\gamma}$ não se transforma covariantemente segundo as transformações de gauge (e, \not{D} sim) então não esperamos que seus autovalores sejam invariantes de gauge.

CAPÍTULO III

DETERMINANTES FUNCIONAIS

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos dois métodos para regularização de integrais de trajetória quadráticas: o método da função zeta generalizada ⁽⁵⁶⁾ e o método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾. Discutimos como a partir da solução do "kernel" da "equação de calor" podemos obter informações sobre essas integrais de trajetória quadráticas.

Na última seção, aplicamos as informações desenvolvidas nas seções anteriores para o cálculo do determinante fermiônico funcional, que vem da integração funcional das variáveis fermiônicas na integral de trajetória, da Cromodinâmica Quântica bidimensional. Encontramos que, regularizando esse determinante fermiônico pelo método do tempo-próprio, a solução é dada basicamente pela solução assintótica ⁽⁵⁷⁾ da "equação de Calor" que é bem conhecida. A solução desse determinante ^(46,47,50,52) dá lugar a uma extensão não-Abeliana do mecanismo de Schwinger ^(42,43) e à funcional de Wess-Zumino ⁽⁶⁵⁾.

3.2 - REGULARIZAÇÃO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA QUADRÁTICA ⁽⁵⁶⁾

O método de Feynman de Integrais de Trajetória é um mé-

todo de formulação de uma teoria quântica equivalente ao método da quantização canônica.

Na teoria quântica de campos consideramos a Funcional Geratriz, Z , da teoria com fontes dada por:

$$Z[j] = \int D\phi \exp\left\{- \int d^4x [L(\phi, \partial_\mu \phi) + j\phi]\right\} \quad , \quad (3.1)$$

onde $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ é o lagrangeano clássico da teoria de campo escalar ϕ , j uma fonte externa desse campo e toda informação física pode ser, em princípio, extraída convenientemente de $Z[j]$.

Integrais de trajetória do tipo Gaussiano podem ser calculadas por uma extensão da fórmula da integral Gaussiana ordinária. Tomemos uma forma quadrática, $Q(x)$, em uma variável:

$$Q(x) = \frac{1}{2} ax^2 - bx = -\frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2} a(x-x_0)^2 \quad (3.2)$$

com

$$x_0 = b/a \quad . \quad (3.3)$$

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Q(x)} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right) \quad (3.4)$$

Para um campo real $\phi(x)$ definimos uma forma quadrática $Q[\phi]$ por:

$$Q[\phi] = \frac{1}{2} (\phi, A\phi) - (b, \phi) \quad (3.5)$$

onde A é hermitiano e

$$(\phi_1, \phi_2) = \int d^4x \phi_1(x) \phi_2(x) \quad . \quad (3.6)$$

Podemos reescrever $Q[\phi]$ como:

$$Q[\Phi] = -\frac{1}{2} (b, A^{-1}b) + \frac{1}{2} ((\Phi - \Phi_0), A(\Phi - \Phi_0)) \quad (3.7)$$

com

$$\Phi_0 = A^{-1}b \quad .$$

Então:

$$\int D\Phi e^{-Q[\Phi]} = N(\det A)^{-1/2} \exp \frac{1}{2} (b, A^{-1}b) \quad . \quad (3.8)$$

O elemento de volume $D\Phi$ pode ser definido a menos de uma constante multiplicativa, como $\prod_x d\phi(x)$ sendo essa constante absorvida na constante de normalização N .

No caso em que temos férmions levando em conta as propriedades da álgebra de Grassman ⁽⁶⁶⁾ poderíamos mostrar que:

$$\int D\psi D\bar{\psi} \exp\{-[\bar{\psi}, D\psi] + (\bar{J}, \psi) + (\bar{\psi}, J)\} = N \det D \exp\{-(\bar{J}, D^{-1}J)\} \quad , \quad (3.9)$$

onde ψ e J são campos fermiônicos e fontes desses campos.

Os determinantes que aparecem em (3.8) e (3.9) divergem devido ao fato de que o produto dos autovalores dos operadores A e D , que aparecem em (3.8) e (3.9), $\prod_j \lambda_j$, cresce sem limite. É entretanto necessário adotar um procedimento de regularização desses determinantes. Uma técnica que mostrou ser útil é o método de regularização pela função zeta generalizada ⁽⁵⁶⁾.

Dado um operador, D , elíptico e inversível de ordem $m > 0$ definido num espaço compactificado sem fronteira, M , de dimensão n , formamos uma função zeta generalizada, ζ , dos autovalores de D como:

$$\zeta(s, D) = \sum_j \lambda_j^{-s} \quad . \quad (3.10)$$

Esta série converge somente para $\text{Re } s > n/m$, mas $\zeta(s, D)$ pode ser estendida analiticamente para uma função meromórfica de

s em todo plano complexo ⁽⁵⁷⁾. Em particular, ζ é regular em $s = 0$ e sua derivada em $s = 0$ é formalmente igual a

$$\left. \frac{d}{ds} \zeta(s, D) \right|_{s=0} = - \sum_j \ln \lambda_j \quad . \quad (3.11)$$

Podemos então definir o determinante de D, regularizado, por:

$$\det D = \exp \left\{ - \left. \frac{d\zeta(s, D)}{ds} \right|_{s=0} \right\} \quad . \quad (3.12)$$

Para os casos em que conhecemos os autovalores do operador D a função zeta generalizada pode ser calculada explicitamente ^(56,67) e em outros casos podemos obter alguma informação sobre a função zeta generalizada estudando-se a "equação de calor", como ficará claro mais adiante.

Um outro método muito útil para a regularização de determinantes funcionais é o método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾. Consideremos a seguinte identidade:

$$\ln \lambda = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon/\lambda} \frac{dt}{t} e^{-\lambda t} \quad (3.13)$$

para $\lambda > 0$, que é óbvia se fazemos a expansão da exponencial e integramos em t.

Esta identidade (3.13) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\lambda t} - \int_{\epsilon/\lambda}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\lambda t} \right\} = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\lambda t} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde na última integral fizemos a mudança de variáveis $\lambda t \rightarrow t$.

Agora como:

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A \quad , \quad (3.15)$$

uma definição razoável do determinante de um operador A com autovalores positivos, λ_j , é:

$$\ln \det A = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \lambda_n = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} \text{Tr} e^{-tA} \quad , \quad (3.16)$$

onde abandonamos o último termo em (3.14) pois é uma constante divergente independente de A. Sempre estaremos interessados em calcular $\ln \det A$ a menos de uma constante independente de A.

O logarítmo do determinante de A, definido por (3.16) , conterá termos divergentes quando $\epsilon \rightarrow 0$ e estes termos terão que ser tratados pela renormalização, assim ϵ funciona como um parâmetro de corte usualmente conhecido como o parâmetro de corte do tempo-próprio.

3.3 - "A EQUAÇÃO DE CALOR"

Em algumas situações em que não conhecemos os autovalores do operador A, podemos ter alguma informação acerca da função zeta generalizada, através do estudo da "equação de calor"

$$\frac{d}{dt} F(x, y, t) + AF(x, y, t) = 0 \quad , \quad (3.17)$$

onde x e y representam pontos no espaço quadridimensional, t é um parâmetro de quinta dimensão e supõe-se que o operador A atue no primeiro argumento de F. Com as condições iniciais

$$F(x,y,0) = \delta(x,y) \quad (3.18)$$

o "kernel" da "equação de calor" F representa a difusão no espaço-tempo com parâmetro de tempo t de uma unidade de calor situada no ponto y em $t = 0$.

Consideremos as autofunções, $\phi_n(x)$, do operador A

$$A\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \quad . \quad (3.19)$$

Podemos representar F em termos dessas autofunções e autovalores como:

$$F(x,y,t) = \sum_n \exp(-\lambda_n t) \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) \quad . \quad (3.20)$$

Definamos agora:

$$\zeta(s,A;x,y) = \sum_n \lambda_n^{-s} \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) \quad , \quad (3.21)$$

que é a função de Green do operador A^s , isto é,

$$A^s \zeta(s,A;x,y) = \delta(x-y) \quad . \quad (3.22)$$

Através da transformação de Mellin ^(54,56,68) de $\exp(-\lambda_n t)$:

$$\lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-\lambda_n t) dt \quad (3.23)$$

podemos obter a seguinte relação:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} F(x,y,t) dt = \sum_n \lambda_n^{-s} \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) \quad ,$$

ou seja,

$$\zeta(s, A; x, y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} F(x, y, t) dt \quad (3.24)$$

Vemos assim que o "kernel" da equação de calor está relacionado às funções de Green do operador A^S , dado pela fórmula (3.24).

Como veremos mais adiante, em alguns casos fisicamente importantes, necessitamos obter informações sobre o "kernel" da "equação de calor" para o caso assintótico $t \rightarrow 0$. Nesse caso, é bem conhecido que $F(x, y, t \rightarrow 0)$ tem uma expansão assintótica dependente obviamente do operador A (57).

A fim de ver como podemos construir a expansão assintótica de $F(x, y, t \rightarrow 0)$, consideremos (69)

$$A = (i\gamma_{\mu} D_{\mu})^2 = \not{D}^2 \quad (3.25)$$

com

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + A_{\mu} \quad (3.26)$$

A solução da "equação de calor" (3.17) com as condições iniciais (3.18), onde x e y representam pontos num espaço de dimensão $2n$, para $A_{\mu} = 0$ é:

$$F_0(x, y, t) = (4\pi)^{-n} t^{-n} \exp[-(x-y)^2/4t] \quad (3.27)$$

Escolhamos, agora, o ansatz:

$$F = F_0 \sum_{\ell} a_{\ell}(x, y) t^{\ell} \quad ; \quad (3.28)$$

substituindo esse ansatz na "equação de calor" (3.17), obtemos:

$$[(x-y)_{\mu} D_{\mu} + \ell] a_{\ell}(x, y) = -\not{D}^2 a_{\ell-1}(x, y) \quad , \quad (3.29)$$

que nos fornece uma relação de recorrência para os coeficientes

de F em (3.28) solução da "equação de calor".

3.4 - DETERMINANTE FERMIÔNICO DA QCD BIDIMENSIONAL ⁽⁵²⁾

Como um exemplo da aplicação do material desenvolvido neste capítulo, passaremos agora a calcular o determinante funcional fermiônico da Cromodinâmica Quântica bidimensional ^(46,47,50,52), utilizando o método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ e os coeficientes da expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ da "equação de calor".

A motivação para o estudo de modelos bidimensionais, já que estamos interessados em teorias com dimensão do espaço-tempo quatro, vem do fato de que esses modelos podem servir como um "laboratório teórico" para teorias mais realísticas.

Devido à estrutura algébrica mais simples desses modelos, há maior facilidade de investigação e, em alguns casos, podemos resolvê-los exatamente nos permitindo formular questões, por exemplo, acerca do confinamento e natureza do espectro hadrônico observado.

O estudo da Cromodinâmica Quântica bidimensional, além de esperarmos que exiba as já conhecidas propriedades de alguns modelos bidimensionais Abelianos, modelo de Schwinger ^(42,43) por exemplo, como o confinamento e a liberdade assintótica, tem a vantagem de possuir um espectro mais rico e ter uma natureza não-Abeliana na qual nos interessamos em compreender suas consequências.

Consideremos o lagrangeano da QCD Euclideana bidimensional com o grupo de simetria de gauge, o grupo $SU(N)$

$$L = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu, a} F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} i (\not{\partial} + \not{A}) \psi \quad . \quad (3.30)$$

As matrizes gama de Dirac são as matrizes de Pauli dadas por:

$$\gamma_0 = \sigma_x \quad , \quad \gamma_1 = \sigma_y \quad e \quad \gamma_5 = \sigma_z \quad . \quad (3.31)$$

Essas matrizes possuem a seguinte relação:

$$\epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu = i \gamma_\mu \gamma_5 \quad . \quad (3.32)$$

Escolhemos para o campo de gauge o gauge desacoplante introduzido por Gamboa-Saraví, Schaposnik, Solomin ⁽⁴⁵⁾ e Roskies ⁽⁵⁵⁾; neste gauge o campo de gauge se escreve como:

$$\mathbb{A} = e^{-\gamma_5 \Phi(x)} \not{\partial} e^{-\gamma_5 \Phi(x)} \quad (3.33)$$

com $\Phi(x) = \Phi^a(x) \lambda_a$ e λ_a os geradores do grupo SU(N). Neste gauge o operador de Dirac pode ser escrito na notação compacta de operadores como

$$\not{D} = i\not{\partial} + i\mathbb{A} = i e^{-\gamma_5 \Phi(x)} \not{\partial} e^{-\gamma_5 \Phi(x)} \quad , \quad (3.34)$$

onde o último membro de (3.34) está escrito na notação de operadores.

A funcional Geratriz da teoria sem fontes fica:

$$Z = \int DAD\bar{\psi}D\psi \exp\left\{- \int d^2x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu, a} F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} \not{D} \psi + \text{termos fixam gauge} \right] \right\} . \quad (3.35)$$

Integrando sobre as variáveis fermiônicas temos:

$$Z = \int DA \det \not{D} \exp\left\{- \int d^2x \left[- \frac{1}{4} F_{\mu\nu, a} F_a^{\mu\nu} + \text{termos fixam gauge} \right] \right\} . \quad (3.36)$$

Com o propósito de calcular o determinante funcional fermiônico, dado em (3.36), introduzimos um operador dependente de

um parâmetro r ($0 \leq r \leq 1$), dado por:

$$D_r = i e^{-r\gamma_5 \phi} \not{D} e^{-r\gamma_5 \phi}, \quad (3.37)$$

onde para $r = 1$

$$D_{r=1} = \not{D} \quad (3.38)$$

com \not{D} dado em (3.34).

Esse operador D_r , dado em (3.37), tem a propriedade de que (47):

$$\frac{d}{dr} D_r = \dot{D}_r = f D_r + D_r f \quad (3.39)$$

com $f = -\gamma_5 \phi$.

Como discutido anteriormente, o determinante do operador D_r diverge e deve ser regularizado. Regularizamos esse determinante pelo método do tempo-próprio (56), estudado na Seção 3.2

$$\ln \det D_r^2 = \text{Tr} \ln D_r^2 = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-sD_r^2}. \quad (3.40)$$

Derivando (3.40) em relação a r , usando a propriedade (3.39) e a propriedade cíclica do traço funcional, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det D_r^2 &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [D_r \dot{D}_r \exp(-sD_r^2)] = \\ &= 4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [f D_r^2 \exp(-sD_r^2)] = \\ &= -4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \frac{d}{ds} \text{Tr} [f \exp(-sD_r^2)] = \\ &= 4 \text{Tr} [f \exp(-\epsilon D_r^2)]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Integrando em relação à variável r de zero a um, temos:

$$\ln \det \not{D} - \ln \det i \not{D} = -2 \int_0^1 dr \int dx \operatorname{tr}_{C_X \gamma} [\gamma_5 \Phi(x) \langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle] \quad , \quad (3.42)$$

onde o traço no integrando de (3.42) é tomado nas matrizes de Dirac e nas matrizes coloridas. No integrando de (3.42) temos ainda a parte diagonal do "kernel" da equação de calor que, como vimos na Seção 3.3, tem uma expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ com coeficientes da expansão calculados por (3.29).

Definamos agora um vetor V_μ^r e um pseudo-vetor P_μ^r , dado por:

$$e^{r\gamma_5 \Phi} \partial_\mu e^{-r\gamma_5 \Phi} = V_\mu^r + P_\mu^r \quad (3.43)$$

com $V_\mu^r = V_{\mu,a}^r \lambda_a$ e $P_\mu^r = P_{\mu,a}^r \gamma_5 \lambda_a$.

Usando as propriedades das matrizes γ em duas dimensões, podemos definir um campo vetorial A_μ^r em termos dos campos V_μ^r e P_μ^r :

$$A_\mu^r = \gamma_\mu A_\mu^r = e^{-r\gamma_5 \Phi} \not{\partial} e^{-r\gamma_5 \Phi} = \gamma_\mu (V_\mu^r + i \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 P_\nu^r) \quad (3.44)$$

de tal maneira que:

$$D_r = i \gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu^r) \quad . \quad (3.45)$$

Podemos então, com um pouco de álgebra das matrizes γ , encontrar D_r^2 :

$$D_r^2 = -(\partial_\mu + A_\mu^r)^2 + X^r \quad (3.46)$$

com

$$X^r = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 F_{\mu\nu}^r \quad (3.47)$$

$$F_{\mu\nu}^r = \partial_\mu A_\nu^r - \partial_\nu A_\mu^r + [A_\mu^r, A_\nu^r] \quad ,$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita a dois índices.

Para D_r^2 , dado em (3.46), a expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ da parte diagonal do "kernel" da "equação de calor" é tabelada ^(54,59) e em duas dimensões temos:

$$\langle x | \exp(-\varepsilon D_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} [1 - \varepsilon X^r + O(\varepsilon^2)] . \quad (3.48)$$

É ainda conveniente fazer algumas manipulações na expressão (3.48). Podemos escrevê-la como:

$$\langle x | \exp(-\varepsilon D_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + i\varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 (\partial_\mu A_\nu^r + A_\mu^r A_\nu^r) + O(\varepsilon) \right] . \quad (3.49)$$

Usando as propriedades das matrizes de Pauli

$$\begin{aligned} \langle x | \exp(-\varepsilon D_r^2) | x \rangle &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \partial_\mu A_\nu^r + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] A_\mu^r A_\nu^r + O(\varepsilon) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \not{\partial} A^r + A^r A^r - \partial_\mu A_\mu^r - A_\mu^r A_\mu^r + O(\varepsilon) \right] . \quad (3.50) \end{aligned}$$

Substituindo (3.50) em (3.42)

$$\frac{\det \not{D}}{\det i \not{D}} = \frac{-1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dr \operatorname{tr}_{CXY} [\not{D}(\gamma_5 \Phi) A^r + \gamma_5 \Phi A^r A^r] . \quad (3.51)$$

Mas o campo de gauge dependente de r definido em (3.44) tem a propriedade:

$$A^r \frac{d}{dr} A^r = - A^r \gamma_5 \Phi - A^r A^r \gamma_5 \Phi - A^r \not{D}(\gamma_5 \Phi) , \quad (3.52)$$

que nos conduz a:

$$\text{Tr}_{C_{XY}} \mathbb{A}^r \frac{d}{dr} \mathbb{A}^r = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \text{Tr}_{C_{XY}} (\mathbb{A}^r \mathbb{A}^r) = -2 \text{Tr}_{C_{XY}} (\mathbb{A}^r \mathbb{A}^r \gamma_5 \Phi) - \text{Tr}_{C_{XY}} [\not{\partial} (\gamma_5 \Phi) \mathbb{A}^r] . \quad (3.53)$$

Então, substituindo (3.53) em (3.51), e realizando a integração em r em um dos termos, obtemos:

$$\ln \frac{\det \not{\partial}}{\det i \not{\partial}} = \frac{-1}{2\pi} \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}_{C_{XY}} (\mathbb{A} \mathbb{A}) - \int_0^1 dr \text{tr}_{C_{XY}} (\mathbb{A}^r \mathbb{A}^r \gamma_5 \Phi) \right\} . \quad (3.54)$$

O primeiro termo de (3.54) mostra que os campos de gauge passaram a possuir massa, isto é, o conhecido mecanismo de Schwinger ^(42,43) na Eletrodinâmica bidimensional aparece também na Cromodinâmica em duas dimensões. O segundo termo em combinação com o primeiro em (3.54) pode ser mostrado gerar o análogo, em duas dimensões, do funcional de Wess-Zumino ⁽⁶⁵⁾ que também aparece na solução do modelo sigma não-linear de Polyakov e Wiegman ⁽⁴⁶⁾, e em outros cálculos não-Abelianos ^(47,48,50,69).

Fazendo uma expansão perturbativa:

$$e^{-\gamma_5 \Phi} = 1 - \gamma_5 \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{1}{3!} \gamma_5 \Phi^3 + \dots \quad (3.55)$$

podemos calcular o campo de gauge

$$\mathbb{A} = e^{-\gamma_5 \Phi} \not{\partial} e^{-\gamma_5 \Phi} \quad (3.56)$$

Usando (3.55) e a propriedade das matrizes de Dirac em duas dimensões, dada em (3.32), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = & i \epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \partial_\mu \Phi + \frac{1}{2} \gamma_\mu \partial_\mu \Phi \Phi - \frac{1}{2} \gamma_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + \frac{i}{3!} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \partial_\mu \Phi \Phi^2 - \\ & - \frac{i}{3} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \Phi \partial_\mu \Phi \Phi + \frac{i}{3!} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \Phi^2 \partial_\mu \Phi + O(\Phi^4) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Usando agora (3.57) as propriedades das matrizes γ , dada em (3.31) e (3.32), obtemos:

$$\text{tr}_{CXY} (\cancel{A}) = -2 \text{tr}_C (\partial_\mu \Phi)^2 + 4i \epsilon_{\mu\nu} \text{tr}_C (\Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) + O(\Phi^4) \quad (3.58)$$

e

$$\int_0^1 dr \text{tr}_{CXY} (\cancel{A}^r \cancel{A}^r \gamma_5 \Phi) = -\frac{2i}{3} \epsilon_{\mu\nu} \text{tr}_C (\Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) + O(\Phi^4) \quad (3.59)$$

Assim até ordem de Φ^3 o determinante fermiônico fica:

$$\ln \frac{\det \cancel{D}}{\det i \cancel{D}} = -\frac{1}{\pi} \int d^2x \text{tr}_C \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{2i}{3} \epsilon_{\mu\nu} \Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right\} \quad (3.60)$$

Para calcular o lagrangeano efetivo em termos do campo Φ dentro da expansão perturbativa considerada, devemos ainda calcular o lagrangeano dos campos de gauge. Com um pouco de álgebra temos que:

$$F_{\mu\nu} = i \epsilon_{\alpha\nu} \partial_\mu \partial_\alpha \Phi - i \epsilon_{\alpha\mu} \partial_\nu \partial_\alpha \Phi - \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi - [\partial_\mu \Phi, \partial_\nu \Phi] \quad (3.61)$$

Então

$$-\frac{1}{2} \text{tr}_C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \text{tr}_C (\Phi \partial^2 \partial^2 \Phi + 8i \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial^2 \Phi \partial_\nu \Phi + 8i \epsilon_{\mu\nu} \Phi \partial_\alpha \partial_\mu \Phi \partial_\alpha \partial_\nu \Phi) \quad (3.62)$$

Então, levando em conta (3.60) e (3.62), obtemos para o lagrangeano efetivo

$$L_{\text{ef}} = \text{tr}_c [\Phi \partial^2 \partial^2 \Phi - \frac{1}{2\pi} \Phi \partial^2 \Phi - \frac{2i}{3\pi} \epsilon_{\mu\nu} \Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \\ + 8i \epsilon_{\mu\nu} \Phi \partial_\mu \partial^2 \Phi \partial_\nu \Phi + 8i \epsilon_{\mu\nu} \Phi \partial_\alpha \partial_\mu \Phi \partial_\alpha \partial_\nu \Phi] \quad . \quad (3.63)$$

Como de hábito na bosonização por integrais de traço - tória (41,44,45,47,50,52,53,70) obtemos um lagrangeano efetivo com termos de derivadas de quarta ordem. A função de Green livre associada ao lagrangeano (3.63) satisfaz:

$$[\partial^2 \partial^2 - \frac{1}{2\pi} \partial^2] \Delta_F(x) = \delta(x) \quad , \quad (3.64)$$

e podemos mostrar facilmente que

$$\Delta_F(x) = 2\pi [\Delta_F(x,0) - \Delta_F(x,1/2\pi)] \quad , \quad (3.65)$$

onde

$$(\partial^2 - m^2) \Delta_F(x,m^2) = \delta(x) \quad . \quad (3.66)$$

Além disso, em contraste com a Eletrodinâmica bidimensional onde o campo escalar com massa é livre, aqui (3.63), temos uma autointeração vindo do determinante fermiônico (3.54) e a parte comutativa do termo em $F_{\mu\nu}^2$.

Para o cálculo de Fadeev-Popov relativo ao gauge que escolhemos (55), o gauge desacoplante (45,55), devemos conhecer a condição de gauge relativo a (3.32).

Expandindo $\exp(\gamma_5 \Phi)$ como:

$$e^{\gamma_5 \vec{\Phi} \cdot \vec{\lambda}} = \cosh|\Phi| + \gamma_5 \frac{\vec{\Phi} \cdot \vec{\lambda}}{|\Phi|} \sinh|\Phi| \quad (3.67)$$

com $\Phi = \Phi^a \lambda_a$ e λ_a os geradores do grupo SU(2), tomando a deriva-

da de (3.67) e usando as propriedades, bem conhecidas das matrizes de Pauli, encontramos:

$$e^{\gamma_5 \vec{\phi} \cdot \vec{\lambda}} \partial_\mu e^{-\gamma_5 \vec{\phi} \cdot \vec{\lambda}} = -i \frac{(\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}) \cdot \vec{\lambda}}{|\phi|^2} \sinh^2 |\phi| + \gamma_5 \frac{1}{|\phi|} [\vec{\phi} \cdot \vec{\lambda} \partial_\mu |\phi| + (\vec{\phi} \cdot \vec{\lambda} \frac{\partial_\mu |\phi|}{|\phi|} - \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\lambda}) \sinh |\phi| \cosh |\phi|] \quad . \quad (3.68)$$

Agora, usando a propriedade (3.32) o campo de gauge $A_\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{\lambda}$, com A_μ dado em (3.33), pode ser escrito como:

$$\vec{A}_\mu = \frac{\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}}{|\phi|^2} \sinh^2 |\phi| + \epsilon_{\mu\nu} \frac{\vec{\phi}}{|\phi|} \partial_\nu |\phi| + \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\nu \vec{\phi} - \vec{\phi} \frac{\partial_\nu |\phi|}{|\phi|}) \times \sinh |\phi| \cosh |\phi| \quad . \quad (3.69)$$

Esta equação (3.69) expressa seis funções (as componentes de \vec{A}_μ) em termos de três funções $\vec{\phi}$. Devem existir então três condições subsidiárias em \vec{A}_μ as quais são as condições de gauge. Lembre-se que no caso do gauge de Lorentz da Eletrodinâmica bidimensional temos duas funções (as componentes de A_μ) em termos de uma função ϕ , existindo uma condição subsidiária adicional que é a condição de Lorentz $\partial_\mu A_\mu = 0$.

Definindo

$$\vec{Z} = \frac{\vec{\phi} \operatorname{tgh} |\phi|}{|\phi|} \quad , \quad (3.70)$$

então (3.69) pode ser reescrita como

$$\partial_\mu \vec{Z} = - \vec{A}_\mu \times \vec{Z} + \epsilon_{\mu\nu} (\vec{Z} \cdot \vec{Z} \cdot \vec{A}_\nu - \vec{A}_\nu) \quad . \quad (3.71)$$

Se supomos que

$$\partial_{\mu} \partial_{\nu} \vec{Z} = \partial_{\nu} \partial_{\mu} \vec{Z} \quad (3.72)$$

é válido, isto nos conduz a

$$\partial_{\mu} \vec{A}_{\mu} + \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \vec{A}_{\mu} \times \vec{Z} = 0 \quad . \quad (3.73)$$

Antes de ir mais adiante é interessante notar que no caso Abeliano (todos os vetores do SU(2) são paralelos), a condição de gauge (3.73) torna-se:

$$\partial_{\mu} A_{\mu} = 0 \quad , \quad (3.74)$$

e como (3.74) é independente de Z, não necessitamos de outras condições. Ainda nesse caso (3.69) fica

$$A_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \Phi \quad , \quad (3.75)$$

o que era esperado, pois (3.74) é a condição de gauge para o campo escolhido no gauge de Lorentz como em (3.75).

De volta ao caso totalmente não-Abeliano, definamos:

$$\vec{F} = \partial_{\mu} \vec{A}_{\mu} \quad (3.76)$$

$$\vec{G} = \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \vec{A}_{\mu} \quad .$$

Com essas definições podemos escrever (3.73) como:

$$\vec{F} + \vec{G} \times \vec{Z} = 0 \quad , \quad (3.77)$$

tal que

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = 0 \quad (3.78)$$

é uma condição necessária. Segue-se ainda que, se $\vec{G} \neq 0$, temos:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{G} \times \vec{F}}{G^2} + \beta \vec{G} \quad , \quad (3.79)$$

que é a solução geral de (3.77) com β uma função arbitrária. Se substituimos (3.79) em (3.71), temos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\vec{G} \times \vec{F}}{G^2} \right) + \partial_\mu \beta \vec{G} + \beta \partial_\nu \vec{G} = - \vec{A}_\mu \times \left(\frac{\vec{G} \times \vec{F}}{G^2} + \beta \vec{G} \right) + \epsilon_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\vec{G} \times \vec{F}}{G^2} + \beta \vec{G} \right) \left(\frac{\vec{G} \times \vec{F}}{G^2} + \beta \vec{G} \right) \cdot \vec{A}_\nu - \vec{A}_\nu \right] \quad (3.80)$$

Se multiplicamos agora essas equações (3.80) vetorialmente por \vec{G} , os termos em $\partial_\mu \beta$ no lado esquerdo se anulam, bem como o termo quadrático em β no lado direito de (3.80). Temos então um conjunto de equações lineares em β em termos de \vec{A}_μ, \vec{F} e \vec{G} . Resolvendo uma dessas equações para β em termos de \vec{A}_μ, \vec{F} e \vec{G} , usando (3.76) que define \vec{F} e \vec{G} em termos de \vec{A}_μ , substituindo β em (3.79) e depois em (3.73), temos uma especificação diferencial completa das condições de gauge que \vec{A}_μ deve satisfazer.

Dessa maneira não é possível encontrar uma caracterização diferencial elegante para esse gauge. No entanto, esses argumentos mostram que essas condições não envolvem derivadas de ordem acima de segunda nos campos \vec{A}_μ .

CAPÍTULO IV

O JACOBIANO DE UMA TRANSFORMAÇÃO QUIRAL GERAL POR DETERMINANTES FERMIÔNICOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

Ultimamente, depois dos trabalhos de Kazuo Fujikawa ⁽⁴⁰⁾ no qual mostrava que a anomalia quiral era gerada pelo Jacobiano de uma transformação quiral, têm sido desenvolvidos alguns métodos para o cálculo desse Jacobiano ^(29,41,53).

Um método de particular importância, devido à sua generalidade e solidez matemática, é o método recentemente desenvolvido pelo grupo da Universidade de La Plata ⁽⁵³⁾ (Gamboa-Saravi, Muschietti, Schaposnik e Solomin) que usa a função zeta ⁽⁵⁶⁾ para a regularização de determinantes funcionais e o cálculo direto dos conhecidos coeficientes de Seeley ⁽⁵⁷⁾.

Neste capítulo desenvolvemos uma técnica ⁽²⁹⁾ para o cálculo desses Jacobianos, usando o método de Alvarez ⁽⁴⁷⁾ para o cálculo de determinantes, através do uso do método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ para a regularização de determinantes e a expansão assintótica de Seeley ⁽⁵⁷⁾.

Através desse método, no presente capítulo estudamos, de maneira não perturbativa, a anomalia quiral em dimensão arbitrária, bosonização de algumas teorias bidimensionais para fêr -

mions sem massa com o método de integrais de trajetória e o fenômeno da fracionalização da carga.

Há algumas vantagens com esse método:

(i) Para operadores de Dirac normais o Jacobiano calculado por esse método é diretamente identificado com o Jacobiano regularizado por Fujikawa ⁽⁴⁰⁾ no caso particular considerado por aquele autor.

(ii) As expansões assintóticas ⁽⁵⁷⁾ estão tabeladas ^(54,59) para diversos operadores fisicamente interessantes.

(iii) Quando calculamos o Jacobiano de rotações quirais finitas não necessitamos de qualquer informação acerca do cálculo perturbativo de determinantes ⁽⁵⁸⁾ como é feito nas referências ^(50,53).

A desvantagem desse método é que não podemos calcular o Jacobiano para qualquer operador de Dirac não-normal, como é feito na referência ⁽⁵³⁾, por exemplo, para a teoria fisicamente importante que tem um acoplamento pseudo-vetorial, a não ser que sejamos capazes de fazer uma continuação analítica deste operador para uma região onde este seja normal.

4.2 - O JACOBIANO DE UMA TRANSFORMAÇÃO QUIRAL GERAL ⁽²⁹⁾

Vimos, no final do segundo capítulo, que a anomalia quiral abeliana vem da não invariância da medida fermiônica da integral de trajetória segundo transformações quirais abelianas e infinitesimais.

No entanto, existem diversas informações físicas, que se acredita hoje em dia serem relevantes, que não poderiam ser extraídas com as transformações ditas no parágrafo anterior. Atual-

mente sabemos que para termos informações, no contexto de integral de trajetória, da bosonização de teorias bidimensionais ⁽⁵³⁾, da fracionalização do número fermiônico ⁽²⁸⁾ e do Lagrangeano de Wess-Zumino ⁽⁵⁰⁾, um dos métodos que podemos utilizar é o do cálculo do Jacobiano de transformações quirais finitas e não-Abelianas. Reside aí, então, o interesse do cálculo do Jacobiano dessas transformações quirais gerais.

Começamos considerando a parte fermiônica da funcional geratriz de uma teoria tipo Dirac num espaço Euclideano:

$$G = \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{- \int \bar{\psi}D\psi d^{\nu}x\right\} \quad , \quad (4.1)$$

e introduzimos uma transformação quiral finita local não-Abeliana sobre os campos fermiônicos:

$$\begin{aligned} \psi &= e^{r\gamma_{\nu+1}\Phi} \eta_r \\ \bar{\psi} &= \bar{\eta}_r e^{r\gamma_{\nu+1}\Phi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

com $\Phi = \Phi^a(x)\lambda_a$, λ_a os geradores do grupo de interesse, e r um parâmetro real variando de 0 a 1.

A transformação (4.2) na funcional geratriz (4.1) introduz um Jacobiano

$$G = \int D\bar{\eta}_r D\eta_r J(r) \exp\left\{- \int \bar{\eta}_r D_r \eta_r d^{\nu}x\right\} \quad (4.3)$$

com

$$D_r = e^{r\gamma_{\nu+1}\Phi} D e^{r\gamma_{\nu+1}\Phi} \quad . \quad (4.4)$$

Integramos agora sobre os campos fermiônicos em (4.1) e (4.3). O resultado é formalmente o determinante do operador de Dirac:

$$G = \det D = J(r) \det D_r \quad . \quad (4.5)$$

Então, obtemos uma expressão formal para o Jacobiano da transformação (4.2) em termos dos determinantes funcionais

$$\ln J(r) = \ln \det D_{r=0} - \ln \det D_r \quad . \quad (4.6)$$

Os determinantes funcionais que aparecem em (4.6), como já explicamos no capítulo anterior, divergem e devem ser regularizados. Para a regularização desses determinantes pelo método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ devemos construir um operador quadrático, DD^\dagger , e desde que $\ln \det D^\dagger$ seja proporcional a $\ln \det D$, temos:

$$\ln \det D_r^2 = \ln \det D_r D_r^\dagger = \text{Tr} \ln D_r D_r^\dagger = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} [\exp(-sD_r D_r^\dagger)] \quad , \quad (4.7)$$

com ϵ um parâmetro de corte do ultravioleta na integração do tempo-próprio.

Mas, o operador dado em (4.4) tem a propriedade, que se mostrará útil, de que ⁽⁴⁷⁾

$$\frac{d}{dr} D_r = \dot{D}_r = f D_r + D_r f \quad , \quad (4.8)$$

com $f = \gamma_{\nu+1} \phi$. Então derivando (4.7) em relação a r e usando a propriedade (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det D_r^2 &= \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [(D_r \dot{D}_r^\dagger + \dot{D}_r D_r^\dagger) \exp(-sD_r D_r^\dagger)] = \\ &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [(f D_r D_r^\dagger + D_r f D_r^\dagger) \exp(-sD_r D_r^\dagger)] \quad , \quad (4.9) \end{aligned}$$

onde usamos ainda a propriedade cíclica do traço funcional.

Se supomos ainda que

$$\int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [D_r f D_r^{\dagger} \exp(-s D_r D_r^{\dagger})] = \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [f D_r D_r^{\dagger} \exp(-s D_r D_r^{\dagger})] , \quad (4.10)$$

que é válida por exemplo, quando D_r é um operador normal, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det D_r^2 &= 4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [f D_r D_r^{\dagger} \exp(-s D_r D_r^{\dagger})] = \\ &= -4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \frac{d}{ds} \text{Tr} [f \exp(-s D_r D_r^{\dagger})] = \\ &= 4 \text{Tr} [f \exp(-\epsilon D_r D_r^{\dagger})] . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mas como f é uma função matricial, temos:

$$\frac{d}{dr} \ln \det D_r^2 = 4 \int d^{\nu} x \text{tr}_{C_{x\gamma}} [f \langle x | \exp(-\epsilon D_r D_r^{\dagger}) | x \rangle] , \quad (4.12)$$

onde $\text{tr}_{C_{x\gamma}}$ significa o traço sobre as matrizes de cor e γ de Dirac. No integrando de (4.12) temos o traço de f vezes a parte assintótica ⁽⁵⁷⁾ da solução diagonal do "kernel" da "equação de calor" que, como vimos no capítulo anterior, tem uma expansão ^(54,57,59,68):

$$\langle x | \exp(-\epsilon D_r D_r^{\dagger}) | x \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\nu/2}} [a_0^r(x) + \epsilon a_1^r(x) + \epsilon^2 a_2^r(x) + \dots] \quad (4.13)$$

com os coeficientes dessa expansão, $a_i^r(x)$, dependentes do operador em consideração, D_r , e tabelados para diversos operadores fisicamente interessantes ^(54,59) ou possíveis de serem calculados.

Integrando a expressão (4.12) em relação a r de 0 a 1, obtemos o Jacobiano de interesse dado em (4.6):

$$\ln J(r=1) = -2 \int_0^1 dr \int d^{\nu} x \text{tr}_{C_{x\gamma}} [\gamma_{\nu+1} \phi(x) \langle x | \exp(-\epsilon D_r D_r^{\dagger}) | x \rangle] . \quad (4.14)$$

A fim de comparar este Jacobiano com o Jacobiano regularizado por Fujikawa ⁽⁴⁰⁾, como dado na última seção do Capítulo 2, nós consideramos transformações quirais Abelianas locais e infinitesimais.

Como o campo infinitesimal $\phi(x)$ aparece diretamente no integrando em (4.14), é somente necessário considerar o termo independente de ϕ da parte diagonal do "kernel" da equação de calor. Agora, para D_r , dado por (4.4), tomando a parte independente de ϕ , temos:

$$D_r(\phi=0) = D \quad . \quad (4.15)$$

Escolhamos agora um conjunto completo, $\langle \lambda_k | x \rangle$ de autofunções de D com autovalores λ_k :

$$D \langle \lambda_k | x \rangle = \lambda_k \langle \lambda_k | x \rangle \quad . \quad (4.16)$$

Então, integrando (4.14) sobre r e expandindo sobre autofunções de D , como dado em (4.16), obtemos:

$$\ln J = -2 \int d^V x \phi(x) \text{tr}_{CXY} [\gamma_{V+1} \cdot \sum_k \langle x | \lambda_k \rangle \exp(-\epsilon \lambda_k^2) \langle \lambda_k | x \rangle] \quad , \quad (4.17)$$

que é a expressão de Fujikawa para o Jacobiano regularizado de uma transformação quiral local Abeliana e infinitesimal ⁽⁴⁰⁾.

A expressão (4.14) aparece então como uma extensão natural do método de Fujikawa ⁽⁴⁰⁾ para o cálculo de Jacobiano regularizado de uma transformação quiral local finita e não-Abeliana.

Entretanto, nos casos em que o operador D seja não-normal, como já dissemos, devemos ter cuidado para que $\ln \det D$ seja proporcional a $\ln \det D^\dagger$ e que a expressão dada em (4.10) seja válida. Isto coloca algumas dúvidas acerca da validade geral do

método de Fujikawa para o cálculo de Jacobiano regularizado quando temos operadores não-hermitianos ⁽⁷¹⁾, pois o que é feito é regularizar $A(x)$ (veja fórmula (2.36)) introduzindo o regularizador

$$e^{-DD^\dagger/M^2} \quad , \quad (4.18)$$

e, como vimos, isto, pelo menos através da regularização de determinantes pelo método do tempo-próprio, deve ser feito criteriosamente.

4.3 - ANOMALIA QUIRAL EM DIMENSÃO ARBITRÁRIA ⁽²⁹⁾

Consideremos o lagrangeano da QCD numa dimensão arbitrária, ν par, com o grupo de gauge, o grupo $SU(N)$, no espaço Euclídeano

$$L = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu, a} F^{\mu\nu}_a + \bar{\psi} D \psi \quad , \quad (4.19)$$

onde

$$D = i(\not{\partial} + \not{A}) \quad . \quad (4.20)$$

A variação de (4.19), segundo as transformações quirais locais Abelianas e infinitesimais

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp[\Phi(x)\gamma_{\nu+1}]\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp[\Phi(x)\gamma_{\nu+1}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

com $\gamma_{\nu+1}$ dado em (2.2), é dada por:

$$L \rightarrow L + i\partial_\mu \Phi(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_{\nu+1} \psi \quad . \quad (4.22)$$

De acordo com a seção anterior, o Jacobiano relativo a essa transformação é não trivial e é dado por:

$$\ln J = -2 \int d^v x \Phi(x) \operatorname{tr}_{C_{x\gamma}} [\gamma_{\nu+1} \langle x | \exp(-\epsilon D^2) | x \rangle] . \quad (4.23)$$

Usando a álgebra das matrizes de Dirac, encontramos

$$D^2 = -D_\mu D_\mu + X , \quad (4.24)$$

com

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \quad (4.25)$$

$$X = -\frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [D_\mu, D_\nu] .$$

A expansão assintótica (4.13) para a parte diagonal do "kernel" da equação de calor relativo ao operador D , tem os coeficientes bem conhecidos, tabelados, dados por (54,59):

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -X$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{12} \partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \partial^2 X$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} X^3 - \frac{1}{45} (\partial_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{180} \partial_\nu F_{\mu\nu} \partial_\alpha F_{\mu\alpha} - \frac{1}{60} \partial^2 (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) +$$

$$+ \frac{1}{30} F_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu} - \frac{1}{60} \partial^4 X - \frac{1}{12} \partial^2 X^2 - \frac{1}{12} (\partial_\mu X)^2 -$$

$$- \frac{1}{30} X F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{60} F_{\mu\nu} X F_{\mu\nu} - \frac{1}{30} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} X + \frac{1}{60} \partial_\nu X \partial_\mu F_{\mu\nu} -$$

$$- \frac{1}{60} \partial_\mu F_{\mu\nu} \partial_\nu X \quad (4.26)$$

.....

$$a_{\nu/2} = -\frac{1}{(\nu/2)!} X^{\nu/2} + \text{termos que não contribuem para a anomalia } \underline{(69)} .$$

Então, substituindo (4.13), (4.26) em (4.23), temos:

$$\ln J = \frac{2}{(4\pi)^{v/2}} \frac{1}{(v/2)!} \frac{(-1)^{v/2}}{2^v} \int d^v x \phi(x) \text{tr}_{\text{CXY}} \left\{ \gamma_{v+1} [\gamma_{\mu_1}, \gamma_{\mu_2}] \dots \right. \\ \left. \dots [\gamma_{\mu_{v-1}}, \gamma_{\mu_v}] \times F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{v-1} \mu_v} \right\} \quad (4.27)$$

Usando ainda que

$$\text{Tr} \gamma_{v+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_v} = (-1)^{v/2} 2^{v/2} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_v} ,$$

obtemos

$$\ln J = \frac{2(i)^{v/2}}{(2^2 \pi)^{v/2} (v/2)!} \int d^v x \phi(x) \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_v} \text{tr}_C (F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{v-1} \mu_v}) \quad (4.28)$$

Considerando agora a funcional geratriz da QCD depois da transformação quiral (4.21), obtemos:

$$Z = \int DAD\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ - \int d^v x [L - i\phi(x) \partial_\mu j_{v+1}^\mu - I(\ln J)] \right\} \quad (4.29)$$

onde $I(\ln J)$ quer dizer o integrando do logaritmo do Jacobiano da da em (4.28).

Então, como a funcional geratriz é independente de ϕ , obtemos:

$$\partial_\mu j_{v+1}^\mu = \frac{2(i)^{\frac{v}{2}+1}}{(2^2 \pi)^{v/2} (v/2)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_v} \text{tr}_C (F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{v-1} \mu_v}) , \quad (4.30)$$

que é o valor usual da anomalia em dimensão arbitrária (29, 34-38).

4.4 - APLICAÇÕES A MODELOS BIDIMENSIONAIS ⁽²⁹⁾

Passaremos agora a estudar o efeito de transformações quirais finitas em modelos bidimensionais ^(16,72). A motivação para o estudo de tais modelos está dada no final da última seção do capítulo precedente, e poderíamos resumir, correndo o risco de uma simplificação exagerada, dizendo que esses modelos podem servir como um "laboratório teórico" para teorias mais realísticas.

Foi mostrado em diversos trabalhos recentes ^(41,53) que através de uma transformação quiral nas variáveis fermiônicas em teorias tipo Dirac com férmions sem massa em duas dimensões, podemos, escolhendo-se adequadamente o campo de gauge, desacoplar a nível clássico os férmions dos outros campos presentes nessas teorias.

O aspecto quântico desta transformação é dado pelo Jacobiano correspondente ao qual passaremos a calcular pelo método desenvolvido na seção 2 do presente capítulo, para alguns modelos bidimensionais.

Modelo de Schwinger ^(42,43)

O modelo de Schwinger é a eletrodinâmica em duas dimensões para férmions sem massa; o lagrangeano da teoria é:

$$L = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\not{A}) \psi \quad (4.31)$$

com

$$\gamma_{\mu}^{\dagger} = \gamma_{\mu} \quad , \quad A_{\mu}^{\dagger} = A_{\mu} \quad \text{e} \quad i\gamma_{\mu}\gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu}\gamma_{\nu} \quad . \quad (4.32)$$

Realizando a transformação quiral

$$\begin{aligned}\psi &= e^{r\gamma_5\Phi} \eta_r \\ \bar{\psi} &= \bar{\eta}_r e^{r\gamma_5\Phi}\end{aligned}\tag{4.33}$$

no lagrangeano (4.31) e escolhendo o gauge de Lorentz

$$A_\mu = \frac{1}{e} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi, \tag{4.34}$$

e usando (4.32), obtemos:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\eta}_r (i\cancel{\gamma} + e(1-r)\cancel{A}) \eta_r. \tag{4.35}$$

Vemos então, explicitamente em (4.35) que para $r = 1$ o fêrmion se desacopla do campo de gauge.

O Jacobiano que aparece na funcional geratriz correspondente à transformação (4.33) é dado por:

$$\ln J = -2 \int_0^1 dr \int d^2x \Phi(x) \text{tr}_\gamma [\gamma_5 \langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle] \tag{4.36}$$

com

$$D_r = i\gamma_\mu D_\mu^r = i\gamma_\mu [\partial_\mu + ie(r-1)A_\mu] \tag{4.37}$$

Usando agora que

$$D_r^2 = -D_\mu^r D_\mu^r - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu^r, D_\nu^r], \tag{4.38}$$

e as propriedades das matrizes γ em 2 dimensões, obtemos:

$$D_r^2 = -D_\mu^r D_\mu^r + X^r, \tag{4.39}$$

com

$$X^r = (1-r)\partial^2\Phi\gamma_5. \tag{4.40}$$

Mas sabemos que para um operador do tipo dado em (4.39) a parte diagonal da expansão assintótica do "kernel" da "equação

de calor" é conhecida e tem o valor

$$\langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - X^r - O(\epsilon) \right] . \quad (4.41)$$

Se agora substituimos (4.40), (4.41) em (4.36), encontramos para o Jacobiano:

$$\ln J = - \frac{e^2}{2\pi} \int d^2x A_\mu A_\mu . \quad (4.42)$$

Usando então (4.35) e (4.42) a funcional geratriz após a transformação quiral dada em (4.33) para $r = 1$ fica:

$$Z(\bar{\theta}, \theta) = \int D\bar{\psi} D\psi D A \exp \left[- \int d^2x \left(- \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu^2 + \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \bar{\psi} e^{\gamma_5 \Phi} \theta + \bar{\theta} e^{\gamma_5 \Phi} \psi \right) \right] \quad (4.43)$$

com θ e $\bar{\theta}$ fontes de férmions.

Passamos agora das variáveis A_μ para Φ . O Jacobiano dessa transformação é uma constante infinita independente dos campos que pode ser absorvida pela constante de normalização infinita de (4.43). A parte dos campos de gauge escritos em termos de Φ , ficam:

$$\begin{aligned} \int d^2x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 &= \int d^2x \frac{1}{2e^2} \Phi \partial^2 \partial^2 \Phi \\ \int d^2x \frac{e^2}{2\pi} A_\mu^2 &= - \int d^2x \frac{1}{2\pi} \Phi \partial^2 \Phi . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Então, em termos de Φ a funcional geratriz fica:

$$Z(\theta, \bar{\theta}) = \int D\bar{\psi} D\psi D\Phi \exp \left[- \int d^2x \left(\frac{1}{2e^2} \Phi \partial^2 \partial^2 \Phi - \frac{1}{2\pi} \Phi \partial^2 \Phi + \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \bar{\psi} e^{\gamma_5 \Phi} \theta + \bar{\theta} e^{\gamma_5 \Phi} \psi \right) \right] . \quad (4.45)$$

Qualquer função de Green pode ser obtida facilmente de (4.45). Por exemplo, a função de dois pontos é dada por (43):

$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(0) \rangle &= \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z(\theta, \bar{\theta})}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{x}) \delta \theta(0)} \Bigg|_{\bar{\theta}=\theta=0} = \\ &= \langle e^{\gamma_5 \Phi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(0) e^{\gamma_5 \Phi(0)} \rangle = \langle \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(0) \rangle_0 e^{-\Delta(\mathbf{x})} \quad , \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde expandimos a exponencial em (4.46) e desprezamos os termos que contêm campos no mesmo ponto que devido à regularização se anulam, e $\langle \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(0) \rangle_0$ é a função de Green para o férmion livre dada por:

$$\langle \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(0) \rangle_0 = G_0(\mathbf{x}) = \text{const.} \frac{\gamma_\mu X^\mu}{X^2} \quad (4.47)$$

e $\Delta(\mathbf{x})$ é o propagador escalar satisfazendo a

$$\left(\frac{1}{e^2} \partial^2 \partial^2 - \frac{1}{\pi} \partial^2 \right) \Delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad , \quad (4.48)$$

que podemos facilmente mostrar que

$$\Delta(\mathbf{x}) = \pi \left\{ \Delta_F \left(\frac{e^2}{\pi}, \mathbf{x} \right) - \Delta_F(0, \mathbf{x}) \right\} \quad , \quad (4.49)$$

onde

$$\begin{aligned} (\partial^2 - m^2) \Delta_F(m^2, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}) \\ \partial^2 \Delta_F(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Assim, aparte de um setor fermiônico livre, existe uma partícula escalar massiva, com $\Delta_F(0, \mathbf{x})$ a manifestação de uma excitação de gauge sem massa. Esta última contribuição pode ser explicitamente calculada e corresponde a:

$$\Delta_F(0, x) = -\frac{1}{4\pi} \ln(\mu^2 X_\mu X^\mu) \quad . \quad (4.51)$$

Por outro lado, $\Delta_F(m^2, x)$ é proporcional à função de Bessel de ordem zero e seu comportamento para x pequeno é

$$\Delta_F(m^2, x) - \Delta_F(0, x) \rightarrow 0 \quad ; \quad (4.52)$$

então para esse caso a função de dois pontos torna-se

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle \approx G_0(x) \quad (4.53)$$

isto é, os férmions são livres a pequenas distâncias.

O Modelo de Thirring ⁽⁷³⁾

O modelo de Thirring é um modelo puramente fermiônico com lagrangeano:

$$L_{th} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 \quad . \quad (4.54)$$

Podemos, agora, introduzir um campo vetorial auxiliar A_μ na funcional geratriz

$$Z_{th} = \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left\{- \int L_{th} d^2x\right\} \quad (4.55)$$

através da identidade

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{g^2}{2} \int (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 d^2x\right\} &= \\ &= \int DA_\mu \exp\left\{- \int [g\bar{\psi} \not{A} \psi + \frac{1}{2} A_\mu A_\mu] d^2x\right\} \quad , \quad (4.56) \end{aligned}$$

e assim passando para uma teoria vetorial efetiva:

$$Z_{th} = \int D\bar{\psi}D\psi DA_{\mu} \exp \left\{ - \int [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} + g\cancel{A})\psi + \frac{1}{2} A_{\mu}^2] d^2x \right\} . \quad (4.57)$$

Esse novo lagrangeano efetivo não é invariante de gauge e de fato, o campo auxiliar A_{μ} possui dois graus de liberdade. Apesar dessas diferenças, da mesma maneira como acontece na teoria de gauge análoga (o modelo de Schwinger ^(42,43)), A_{μ} se desacopla dos férmions fazendo-se uma mudança de variáveis do tipo

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{i r \eta(x) + r \gamma_5 \phi(x)} \chi_r(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\chi}_r(x) e^{-i r \eta(x) + r \gamma_5 \phi(x)} \\ A_{\mu} &= \frac{1}{g} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi(x) - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \eta(x) . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Assim as novas variáveis são agora os férmions χ_r e $\bar{\chi}_r$ e os escalares ϕ e η . Em termos dessas novas variáveis, o lagrangeano do modelo pode ser escrito como

$$L_{th} = \bar{\chi}_r [i\cancel{\partial} + (1-r)g\cancel{A}] \chi_r + \frac{1}{2g^2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi + \frac{1}{2g^2} \partial_{\mu} \eta \partial_{\mu} \eta + \frac{1}{g^2} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \eta . \quad (4.59)$$

Vemos então explicitamente de (4.59) que os campos ϕ e η se desacoplam dos férmions para $r = 1$.

O preço pago para esse desacoplamento é o aparecimento de um Jacobiano não trivial correspondendo mudança de variável dada em (4.58). O Jacobiano referente à mudança das variáveis fermiônicas pode ser calculado de uma maneira equivalente à descrita na seção 2 do presente capítulo.

O operador de Dirac transformado é dado por:

$$D_r = e^{-i r \eta + r \phi} D e^{i r \eta + r \phi} . \quad (4.60)$$

com $f = \gamma_5 \phi$ e

$$D = i\not{\partial} + g\not{A} \quad .$$

Esse operador dado em (4.60) obedece a

$$\frac{d}{dr} D_r = \dot{D}_r = (-i\not{\eta} + f) D_r + D_r (i\not{\eta} + f) \quad . \quad (4.61)$$

Regularizando o determinante funcional pelo método do tempo-próprio⁽⁵⁶⁾ temos:

$$\ln \det D_r^2 = \text{Tr} \ln D_r^2 = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} [\exp(-sD_r^2)] \quad . \quad (4.62)$$

Diferenciando em relação a r e usando (4.61), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det D_r^2 &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [D_r \dot{D}_r \exp(-sD_r^2)] = \\ &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} \{ [D_r (-i\not{\eta} + f) D_r + D_r^2 (i\not{\eta} + f)] \exp(-sD_r^2) \} = \\ &= 4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr} [f D_r^2 \exp(-sD_r^2)] = -4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \frac{d}{ds} \text{Tr} [f \exp(-sD_r^2)] = \\ &= 4 \int d^2x \text{tr}_{\gamma} [\gamma_5 \phi(x) \langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle] \quad , \quad (4.63) \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço funcional. Então o Jacobiano da mudança de variável fermiônica (4.58) é dado por:

$$\ln J_F = -2 \int_0^1 dr \int d^2x \phi(x) \text{tr}_{\gamma} [\gamma_5 \langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle] \quad . \quad (4.64)$$

Da mesma maneira como no modelo de Schwinger para

$$D_r = i\gamma_{\mu} [\partial_{\mu} + i(r-1)gA_{\mu}] = i\gamma_{\mu} D_{\mu}^r \quad (4.65)$$

para A_{μ} dado em (4.58), temos:

$$D_r^2 = - D_{\mu}^r D_{\mu}^r + (1-r)\gamma_5 \partial^2 \phi \quad . \quad (4.66)$$

Usando a expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ da solução diagonal do "kernel" da "equação de calor" e as propriedades das matrizes γ em duas dimensões, temos, analogamente ao que fizemos para o modelo de Schwinger (4.39), (4.40) e (4.41):

$$\ln J_F = - \frac{1}{2\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2 \quad (4.67)$$

Em relação ao campo vetorial, vemos que a transformação (4.58) gera o seguinte Jacobiano:

$$DA_0 DA_1 = \det \left[- \frac{1}{g^2} (\partial_0^2 + \partial_1^2) \right] D\Phi D\eta \quad (4.68)$$

Reconhecemos em (4.68) o determinante de Fadeev-Popov do gauge de Lorentz, e isto não é coincidência pois (4.58) expressa o fato de que o campo vetorial foi decomposto nas suas partes transversas e longitudinais.

Para o cálculo das funções de Green, partimos da funcional geratriz:

$$Z(\bar{\theta}, \theta) = \int D\bar{\psi} D\psi DA_\mu \exp \left\{ - \int L_{th}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) d^2x \right\} \exp \left\{ \int [\bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta] d^2x \right\}, \quad (4.69)$$

onde θ e $\bar{\theta}$ são fontes fermiônicas. Fazemos a mudança de variáveis (4.58)

$$\begin{aligned} Z(\bar{\theta}, \theta) = & \int D\bar{\chi} D\chi D\Phi D\eta J_F J_A \exp \left\{ - \int \bar{\chi} i \not{\partial} \chi d^2x \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{1}{2g^2} \int [(\partial_\mu \phi)^2 + (\partial_\mu \eta)^2] d^2x \right\} \exp \left\{ \int [\bar{\theta} e^{\gamma_5 \Phi + i\eta} \chi + \bar{\chi} e^{\gamma_5 \Phi - i\eta} \theta] d^2x \right\} \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde J_F e J_A são dados por (4.67) e (4.68), e note que da mesma

maneira que no modelo de Schwinger estamos desprezando termos de fronteira. Então $Z(\bar{\theta}, \theta)$ é finalmente escrito como:

$$Z(\bar{\theta}, \theta) = \int D\bar{\chi} D\chi D\phi D\eta \exp\left\{- \int L_{\text{eff}} d^2x\right\} \times \\ \times \exp\left\{ \int [\bar{\theta} e^{\gamma_5 \phi + i\eta} \chi + \bar{\chi} e^{\gamma_5 \phi - i\eta} \theta] d^2x \right\} \quad (4.71)$$

com:

$$L_{\text{eff}} = \bar{\chi} i \not{\partial} \chi + \frac{1}{2g^2} \left(1 + \frac{g^2}{\pi}\right) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \eta)^2 \quad (4.72)$$

Podemos então calcular as funções de correlação da teoria. Por exemplo, a função de dois pontos é dada por:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\theta}(x) \delta \theta(0)} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \\ = \langle e^{i\eta(x) + \gamma_5 \phi(x)} \chi(x) \bar{\chi}(0) e^{-i\eta(0) + \gamma_5 \phi(0)} \rangle = \\ = \langle \chi(x) \bar{\chi}(0) \rangle_0 \langle e^{i[\eta(x) - \eta(0)] + \gamma_5 [\phi(x) - \phi(0)]} \rangle \quad (4.73)$$

onde $\langle \chi(x) \bar{\chi}(0) \rangle_0$ é a função de Green para férmions livres dada por

$$\langle \chi(x) \bar{\chi}(0) \rangle_0 = \text{const.} \frac{\gamma_\mu x^\mu}{x} \quad (4.74)$$

Para calcular o segundo fator em (4.73), usamos a expressão para a função de Green do campo escalar sem massa em duas dimensões:

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \mu |x| \quad (4.75)$$

satisfazendo

$$\partial^2 D(x) = -\delta(x) \quad . \quad (4.76)$$

Chamando

$$\alpha^2 = \frac{1}{g^2} \quad , \quad \beta^2 = \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{\pi}\right) \quad (4.77)$$

temos:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \ln \mu |x|\right\} \langle \chi(x) \bar{\chi}(0) \rangle_0 \quad (4.78)$$

onde expandimos a exponencial no segundo fator de (4.73), desprezamos os termos que contêm os campos no mesmo ponto que devido à regularização se anulam, e reexponenciamos a série que obtemos. Este valor (4.78) é aquele conhecido para a função de dois pontos para o modelo de Thirring ⁽⁴⁴⁾. É importante notar que é a contribuição vinda de J_F que evita (4.78) de ser apenas a função de Green do férmion livre, pois é devido à sua presença que $\alpha^2 \neq \beta^2$.

QCD Bidimensional

Consideramos agora o lagrangeano da QCD em duas dimensões com o grupo de gauge, o grupo SU(N)

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu, a} F^{\mu\nu}_a + \bar{\psi} (i\not{\partial} + \not{A}) \psi \quad . \quad (4.79)$$

Para o campo de gauge escolhemos o gauge desacoplante introduzido por Gamboa-Saraví, Schaposnik, Solomin ⁽⁴⁵⁾ e Roskies ⁽⁵⁵⁾. Neste gauge o campo A_μ se escreve como:

$$\not{A} = i e^{-\gamma_5 \Phi(x)} \not{\partial} e^{\gamma_5 \Phi(x)} \quad (4.80)$$

com $\Phi(x)$ tomando valores na álgebra de Lie do SU(N).

Realizando a transformação quirial não-Abeliana, dada em (4.2), o lagrangiano fica:

$$L = \bar{\eta}_r [i\not{\partial} + ie^{\gamma_5(r-1)\Phi} \not{\partial} e^{\gamma_5(r-1)\Phi}] \eta_r - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F^{\mu\nu}_a \quad (4.81)$$

Novamente, para $r = 1$ o fêrmion se desacopla de A_μ . Definimos um vetor V_μ^r e um pseudo-vetor P_μ^r por

$$e^{-\gamma_5(r-1)\Phi} \partial_\mu e^{\gamma_5(r-1)\Phi} = V_\mu^r + P_\mu^r \quad (4.82)$$

com $V_\mu^r = V_{\mu,a}^r \lambda_a$ e $P_\mu^r = P_{\mu,a}^r \gamma_5 \lambda_a$.

O quadrado do operador de Dirac D_r é dado como de hábito:

$$D_r^2 = -(\partial_\mu + A_\mu^r)^2 - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 F_{\mu\nu}^r \quad (4.83)$$

com

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^r &= \partial_\mu A_\nu^r - \partial_\nu A_\mu^r + [A_\mu^r, A_\nu^r] \\ A_\mu^r &= V_\mu^r + i \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 P_\nu^r \end{aligned} \quad (4.84)$$

O Jacobiano relativo à transformação quirial (4.2) pode ser calculado usando-se (4.13), (4.14), (4.26) e a propriedade dada em (4.8), com o resultado:

$$\ln J = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}_{CXY} (\not{A}\not{A}) - \int_0^1 dr \text{Tr}_{CXY} (\not{A}^r \not{A}^r \gamma_5 \Phi) \right\} \quad (4.85)$$

Este resultado é o mesmo resultado que calculamos para o determinante fermiônico para a QCD bdimensional no fim do capítulo anterior, e vemos então que por tras do cálculo do determinante fermiônico que fizemos no mesmo capítulo estão as propriedades de quiralidade e desacoplamento do gauge escolhido.

4.5 - FRACIONALIZAÇÃO DO NÚMERO FERMIÔNICO ⁽²⁶⁻²⁹⁾

Um exemplo do fenômeno que estamos considerando pode ser dado através de sólitons com carga fracionária na molécula de poliacetileno ^(27a).

Um modelo esquemático dessa molécula é mostrado na Figura 4.1, na qual temos ligações simples e duplas, alternando-se no estado fundamental que podem ser dispostas em formas A e B degeneradas mas não equivalentes.



Figura 4.1 - Os dois estados degenerados da estrutura eletrônica da molécula de poliacetileno.

Se há uma imperfeição, como mostrado na Figura 4.2, partimos da configuração A no lado esquerdo para a configuração B no lado direito. Esta configuração (Fig. 4.2) não pode ser levada a uma configuração tipo A ou tipo B por qualquer rearranjo finito de elétrons, e assim relaxará numa configuração estável.



Figura 4.2 - Uma imperfeição interpolando entre os dois estados fundamentais.

Na linguagem de teoria de Campos temos uma configuração estável que interpola entre dois vácuos da teoria. Reconhecemos assim um sóliton.

Se colocamos duas imperfeições juntas, como na Figura 4.3, encontramos uma configuração que começa e termina como A.



Figura 4.3 - Uma cadeia com duas imperfeições.

Comparado ao segmento correspondente de puro A está faltando uma ligação. Se acrescentamos um elétron à imperfeição, podemos

deformar esta configuração por um rearranjoamento finito numa configuração de puro A (estamos supondo, por simplicidade, que cada ligação represente um único elétron ao invés de um par). Interpretando isso, vemos que um estado de dois sólitons (sóliton e anti-sóliton) é equivalente ao estado fundamental se acrescentamos um elétron. Assim, cada sólition separadamente deve carregar uma carga elétrica $e/2$ (estamos supondo, por simplicidade, que o sóliton e o antisóliton que têm carga topológica oposta, carregam a mesma carga elétrica).

É natural perguntarmos se existe um fenômeno correspondente na teoria de campos. Consideremos um modelo bidimensional de fêrmions sem massa, interagindo com um campo de sóliton θ ; o lagrangeano é dado por

$$L = \bar{\psi}(i\not{\partial} + g e^{\gamma_5 \theta})\psi \quad . \quad (4.86)$$

Para calcular a corrente fermiônica definimos a funcional geratriz ⁽²⁸⁾

$$Z[s] = \int D\bar{\psi}D\psi \exp[- \int \bar{\psi}(i\not{\partial} + \not{s} + g e^{\gamma_5 \theta})\psi d^2x] \quad (4.87)$$

com o termo de fonte S_μ para a forma bilinear $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

Realizamos então a rotação quirial:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp(-\gamma_5 \frac{\theta}{2} r) \eta_r(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\eta}_r(x) \exp(-\gamma_5 \frac{\theta}{2} r) \quad , \end{aligned} \quad (4.88)$$

onde r é um parâmetro real variando de 0 a 1. O Jacobiano relativo à esta transformação pode ser então calculado pelo método desenvolvido na seção 2 do presente capítulo

$$\ln J = \int_0^1 dr \int d^2x \operatorname{tr}_\gamma [\gamma_5 \theta \langle x | \exp(-\epsilon D_r^2) | x \rangle] \quad (4.89)$$

com D_r dado por (veja (4.4)):

$$D_r = i\not{\partial} + \not{\partial} + \frac{r}{2} \gamma_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \theta + g e^{-(r-1)\theta} \gamma_5 \quad (4.90)$$

Para um operador da forma

$$A = -\partial^2 + P_\mu \partial_\mu + Q \quad (4.91)$$

com P_μ e Q matrizes cujos elementos são funções; seguindo os passos tradicionais é simples tabelar a parte diagonal da expansão assintótica; o resultado é (veja Apêndice B)

$$\langle x | e^{-\epsilon A} | x \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \{ 1 - \epsilon [Q - \frac{1}{4} (2\partial_\mu P_\mu - P_\mu P_\mu)] + O(\epsilon^2) \} \quad (4.92)$$

Então calculando D_r^2 e usando (4.89), (4.91) e (4.92), encontramos:

$$\ln J = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \theta \partial^2 \theta - 2S_{\nu\mu} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \theta + g^2 (1 - \cosh 2\theta) \right] \quad (4.93)$$

Agora, em termos das novas variáveis η e $\bar{\eta}$, a funcional geratriz é:

$$\begin{aligned} Z[s] = & \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \theta \partial^2 \theta - 2S_{\mu\alpha} \epsilon_{\alpha\mu} \partial_\alpha \theta + g^2 (1 - \cosh 2\theta) \right] \right\} \times \\ & \times \int D\bar{\eta} D\eta \exp \left[- \int \bar{\eta} (i\not{\partial} + \not{\partial} + \not{a} + g)\eta d^2x \right] \end{aligned} \quad (4.94)$$

com

$$a_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \theta \quad (4.95)$$

Então, diferenciando (4.94) em relação a S_μ e desligando a fonte externa S ao final temos:

$$J_\mu = -\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta S_\mu} \Big|_{S=0} = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \theta + j_\mu \quad , \quad (4.96)$$

com

$$j_\mu = \frac{\delta}{\delta a_\mu} \ln \det (i\cancel{\not{a}} + \cancel{A} + g) \quad . \quad (4.97)$$

Considerando que o campo θ varia lentamente, pode ser mostrado, por exemplo, através do método do tempo fictício de Schwinger ⁽⁷⁴⁾, que ⁽²⁷⁾

$$j_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu [\text{const.} \frac{\partial^2 \theta}{g} + \text{termos de ordem mais alta em } \partial^2 \theta] \quad . \quad (4.98)$$

Assim, levando em conta somente as derivadas de ordem mais baixa em θ , obtemos:

$$J_\mu \cong \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \theta \quad . \quad (4.99)$$

Então, para um campo de sôliton com θ variando de 0 a π o número fermiônico é:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J_0 dx_1 = \frac{1}{2\pi} [\theta(\infty) - \theta(-\infty)] = \frac{1}{2} \quad . \quad (4.100)$$

É claro que poderíamos obter qualquer outro valor apenas mudando as condições para $X_1 = \pm\infty$, variando-se os parâmetros do potencial na equação que o sôliton é solução.

Poderíamos interpretar ^(27b) esse resultado (4.100) que obtivemos, dizendo que a propagação de férmions leves num campo de fundo de sôliton causa uma instabilidade no "mar de Dirac" de

fêrmions resultando em excitações topológicas que adquirem uma carga global fracionária.

Da mesma maneira que fizemos essa análise para o lagrangeano (4.86), poderíamos fazê-la para uma extensão não-Abeliana desse lagrangeano ⁽²⁷⁾ e para outros modelos bidimensionais ⁽²⁸⁾, encontrando os resultados conhecidos sobre a fracionalização da carga.

CAPÍTULO V

DETERMINANTE FERMIONICO BIDIMENSIONAL

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo fazemos a observação de que o operador de Dirac em duas dimensões pode ser escrito convenientemente, no caso Abeliano através de exponenciais do campo de gauge, e no caso não-Abelianos através do produto ordenado do campo de gauge sobre uma curva, sem referência a um gauge particular.

Através da observação descrita no parágrafo anterior, usando o método apresentado no Capítulo 3, calculamos o determinante fermiônico funcional, tanto para o caso Abelianos quanto para o não-Abelianos sem referência a um gauge particular.

Testando-se o método, na Seção 2, para o modelo de Schwinger ^(42,43) encontramos o resultado bem conhecido na literatura que é o mecanismo de Schwinger ^(42,43). Quando aplicamos para o caso não-Abelianos, QCD bidimensional, somos levados a considerar o produto ordenado sobre curvas ⁽⁷⁵⁾, e o resultado final é dado por um lagrangeano efetivo com a forma do lagrangeano fenomenológico da QCD a baixas energias ⁽⁴⁸⁾, mas só que ao invés de termos a exponencial do campo do pión ^(48,69) temos o produto ordenado sobre uma curva do campo de gauge.

5.2 - DETERMINANTE FERMIONICO DO MODELO DE SCHWINGER

Até agora consideramos o modelo de Schwinger quando o campo de gauge é escolhido no gauge de Lorentz. Vamos agora mostrar nesta seção, como podemos generalizar nossa análise do determinante fermiônico desse modelo para o campo de gauge, A_μ , qual quer sem referência a um gauge particular.

Devido ao fato de que

$$\partial_\mu e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} = -\gamma_5 e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} \epsilon_{\alpha\mu} A_\alpha(x) \quad , \quad (5.1)$$

e usando ainda que

$$i\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \quad . \quad (5.2)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \not{D} &= e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} i\not{\partial} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} = \\ &= i\not{\partial} - e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} i\gamma_\mu \gamma_5 e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} \epsilon_{\alpha\mu} A_\alpha(x) = \\ &= i\not{\partial} - i\gamma_\mu \gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_\alpha(x) = i\not{\partial} + \not{A} \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde na primeira linha de (5.3) estamos usando a notação de operadores.

Vemos então que o operador de Dirac \not{D} pode ser escrito como:

$$\not{D} = i\not{\partial} + \not{A} = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} i\not{\partial} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} \quad . \quad (5.4)$$

Parametrizemos esse operador dado em (5.4) com uma vari

ável real r ($0 \leq r \leq 1$):

$$\not{D}_r = e^{-r\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} i \not{\partial} e^{-r\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} . \quad (5.5)$$

Este operador \not{D}^r coincide com o operador de Dirac para $r = 1$, para $r = 0$ torna-se $\not{D}^{r=0} = i \not{\partial}$ e tem a propriedade útil de que:

$$\dot{\not{D}}_r = \frac{d}{dr} \not{D}_r = f(x) \not{D}_r + \not{D}_r f(x) , \quad (5.6)$$

onde

$$f(x) = -\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta . \quad (5.7)$$

Então:

$$\not{D}_r \dot{\not{D}}_r = \not{D}_r f(x) \not{D}_r + \not{D}_r^2 f(x) . \quad (5.8)$$

Regularizando o $\det(\not{D}^r)^2$ pelo método do tempo-próprio⁽⁵⁶⁾

temos:

$$\ln \det (\not{D}^r)^2 = - \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} [\exp(-s\not{D}_r^2)] . \quad (5.9)$$

Diferenciando (5.9) em relação a r , usando (5.8) e a propriedade cíclica do traço funcional, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 &= 2 \int_\epsilon^\infty ds \text{Tr} [\not{D}_r \dot{\not{D}}_r \exp(-s\not{D}_r^2)] = \\ &= 4 \int_\epsilon^\infty ds \text{Tr} [f(x) \not{D}_r^2 \exp(-s\not{D}_r^2)] = -4 \int_\epsilon^\infty ds \frac{d}{ds} \text{Tr} [f(x) \exp(-s\not{D}_r^2)] = \\ &= 4 \text{Tr} [f(x) \exp(-\epsilon \not{D}_r^2)] , \end{aligned} \quad (5.10)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 = 4 \int d^2x \operatorname{tr}_\gamma [f(x) \langle x | \exp(-\varepsilon \not{D}_r^2) | x \rangle] \quad , \quad (5.11)$$

onde tr_γ significa o traço sobre as matrizes γ de Dirac.

Mas observando que

$$\not{D}_r = \gamma_\mu D_\mu^r = \gamma_\mu (i\partial_\mu + rA_\mu) \quad (5.12)$$

temos

$$\not{D}_r^2 = D_\mu^r D_\mu^r + \frac{ir}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (5.13)$$

Mas como sabemos que

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2i \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \quad (5.14)$$

podemos escrever (5.13) como:

$$\not{D}_r^2 = D_\mu^r D_\mu^r - r \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \partial_\mu A_\nu \quad (5.15)$$

Para esse caso, sabemos que a parte diagonal do "kernel" da equação de calor que aparece em (5.11) tem a expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ dada por:

$$\langle x | \exp(-\varepsilon \not{D}_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} + \frac{r}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \partial_\mu A_\nu + O(\varepsilon) \quad . \quad (5.16)$$

Substituindo (5.16) em (5.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 &= -\frac{2r}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \int d^2x \partial_\mu A_\nu \left[\int_0^x A_\alpha dz_\beta \right] = \\ &= \frac{2r}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\mu} \int d^2x A_\nu A_\alpha = -\frac{2r}{\pi} \int d^2x A_\mu A_\mu \quad , \end{aligned}$$

onde estamos desprezando os termos de fronteira.

Integrando agora com respeito a r obtemos:

$$\frac{\det \not{D}}{\det i \not{D}} = - \frac{1}{2\pi} \int d^2x A_\mu A_\mu$$

que é o resultado obtido (29, 53, 70) através de outros métodos para o modelo de Schwinger e que tem a interpretação física já considerada no capítulo anterior.

5.3 - DETERMINANTE FERMIÔNICO DA QCD BIDIMENSIONAL SEM REFERÊNCIA A UM GAUGE PARTICULAR

Da mesma maneira que comentamos no início da seção anterior para o modelo de Schwinger, na análise que fizemos do determinante fermiônico da QCD bidimensional (29, 52) nos dois capítulos precedentes, sempre consideramos essa teoria para o campo de gauge, A_μ , no gauge desacoplante (45, 55).

Quando escolhemos para o caso do modelo de Schwinger o gauge de Lorentz isto não representava nenhuma perda de informação física pois sabemos calcular o determinante de Fadeev-Popov para esse gauge. No entanto, para o caso da QCD bidimensional, não se conhece o determinante de Fadeev-Popov para o gauge desacoplante (55), e isto limita as possíveis análises que possam ser feitas nesse gauge, resultando daí o interesse no cálculo do determinante fermiônico da QCD bidimensional sem referência a um gauge particular.

Primeiramente, é importante observar que devido à natureza não-Abeliana da teoria para representarmos o operador de

Dirac em termos de exponenciais teremos que usar o produto ordenado e não exponenciais de integrais.

Consideremos o produto ordenado sobre a curva C_1 :

$$U(C_1; 0, x) = P e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} \quad (5.17)$$

onde

$$P e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} \int_0^x A_\alpha dz_\beta} = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta^0} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^1 \Delta^1} \dots e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta^x} \quad (5.18)$$

com Δ^i a i -ésima partição da curva C_1 definida de zero a x , como mostrado na Figura 5.1.

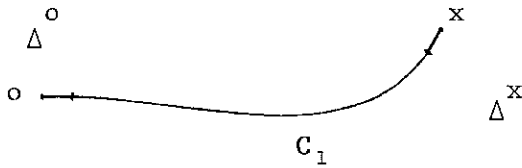


Figura 5.1 - Curva espaço-temporal de zero a x , onde indicamos as partições Δ^i .

Tomemos agora a derivada de U , dado em (5.17):

$$\begin{aligned} \partial_\mu U(C_1; 0, x) &= \frac{1}{h} \left\{ e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta^0} \dots e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x (\Delta_\beta^x + h \delta_{\beta\mu})} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta^0} \dots e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x} \right\} = \\ &= \frac{1}{h} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta^0} \dots e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^{x-1} \Delta_\beta^{x-1}} \left\{ e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x (\Delta_\beta^x + h \delta_{\beta\mu})} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x} \right\} \quad (5.19) \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Backer-Campbell-Hausssdorf (BCH) ⁽⁷⁶⁾:

$$e^{A} e^{B} = e^{A+B + \frac{1}{12} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] - \frac{1}{12} [B, [A, B]] + \dots} \quad (5.20)$$

em (5.19) temos:

$$\begin{aligned}
 & e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x - \gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x h} - e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} = \\
 & = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} \left\{ e^{\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x - \gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x h} - 1 \right\} = \\
 & = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} \left\{ e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x h} - \frac{1}{2} [\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x, \gamma_5 \epsilon_{\nu\mu} A_{\nu}^x h] + O(h^2, \Delta^2) - 1 \right\} = \\
 & = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} \left\{ e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x h} - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\mu} \Delta_{\beta}^x h [A_{\alpha}^x, A_{\nu}^x] + O(\Delta^2, h^2) - 1 \right\} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Então, em primeira ordem em Δ^x temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h} \left\{ e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x (\Delta_{\beta}^x + h \delta_{\beta\mu})} - e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} \right\} = \\
 & = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_{\alpha}^x \Delta_{\beta}^x} \left(-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\mu} \Delta_{\beta}^x [A_{\alpha}^x, A_{\nu}^x] \right) \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

E a derivada de U fica:

$$\partial_{\mu} U(C_1; 0, x) = U(C_1; 0, x) \left(-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}^x - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\mu} \Delta_{\beta}^x [A_{\alpha}^x, A_{\nu}^x] \right) \quad (5.23)$$

Agora, usando (5.2) e (5.23) vemos que:

$$U(C_1; x, 0) i \not{\partial} U(C_1; 0, x) = i \not{\partial} + \not{A} + \frac{i}{2} \gamma_{\mu} \Delta_{\beta}^x [A_{\mu}^x, A_{\beta}^x] \quad (5.24)$$

Então, tomando o limite de curva contínua, temos:

$$\not{D} = i \not{\partial} + \not{A} = \lim_{\Delta^i \rightarrow 0} U(C_1; x, 0) i \not{\partial} U(C_1; 0, x) \quad (5.25)$$

Para definir agora um operador dependente de um parâmetro

tro r ($0 \leq r \leq 1$) analogamente ao que fizemos no caso Abelian, e que tenha a propriedade útil de diferenciação com respeito ao parâmetro r como dado em (5.6), vemos que se multiplicarmos por r todos os termos exponenciados no produto ordenado em (5.17), teremos, devido à fórmula de B.C.H., um polinômio de grau infinito em r , o que não nos interessa. Uma alternativa, então, que temos é multiplicar o último termo exponenciado no produto ordenado por r , para definir o operador de Dirac dependente de r , isto é,

$$\mathcal{D}_r = U(C_1; x_r, 0) i\mathcal{D}(C_1; 0, x_r) \quad , \quad (5.26)$$

com

$$\begin{aligned}
 U(C_1; x_r, 0) &= P e^{-\gamma_5 \int_{x_r}^0 A_\alpha dz_\beta} = e^{-r\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x} \dots \\
 &\dots e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^1 \Delta_\beta^1} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta_\beta^0} \\
 U(C_1; 0, x_r) &= P e^{-\gamma_5 \int_0^{x_r} A_\alpha dz_\beta} = e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta_\beta^0} e^{-\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^1 \Delta_\beta^1} \dots \\
 &\dots e^{-r\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x} \quad , \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

tal que:

$$\mathcal{D} = i\mathcal{D} + \mathcal{A} = \lim_{\Delta^1 \rightarrow 0} \mathcal{D}_{r=1} \quad . \quad (5.28)$$

Este operador \mathcal{D}_r , tal como definido em (5.26), tem a propriedade de que

$$\dot{\mathcal{D}}_r = \frac{d}{dr} \mathcal{D}_r = f_1(x) \mathcal{D}_r + \mathcal{D}_r f_1(x) \quad , \quad (5.29)$$

onde

$$f_1(x) = -\gamma_5 \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x \quad . \quad (5.30)$$

Nosso interesse é o de calcular o determinante de \not{D} , mas observemos que dado o determinante de $\not{D}_{r=1}$ obtemos o $\det \not{D}$ pois:

$$\det \not{D} = \lim_{\Delta^i \rightarrow 0} \det \not{D}_{r=1} \quad (5.31)$$

Regularizando o determinante de \not{D}_r pelo método de tempo-próprio (56) temos:

$$\ln \det \not{D}_r^2 = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr}[\exp(-s\not{D}_r^2)] \quad (5.32)$$

Diferenciando (5.32) em relação a r , usando (5.29) e a propriedade cíclica do traço funcional, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr}[\not{D}_r \dot{\not{D}}_r \exp(-s\not{D}_r^2)] = \\ &= 4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \text{Tr}[f_1(x) \not{D}_r^2 \exp(-s\not{D}_r^2)] = \\ &= -4 \int_{\epsilon}^{\infty} ds \frac{d}{ds} \text{Tr}[f_1(x) \exp(-s\not{D}_r^2)] = 4 \text{Tr}[f_1(x) \exp(-\epsilon \not{D}_r^2)] \quad (5.33) \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 = 4 \int d^2x \text{tr}_{C_{xy}} [f_1(x) \langle x | \exp(-\epsilon \not{D}_r^2) | x \rangle] \quad (5.34)$$

onde $\text{tr}_{C_{xy}}$ denota o traço sobre as matrizes de cor e de Dirac.

Agora, chamando

$$\not{D}_r = i\gamma_{\mu} (\partial_{\mu} + B_{\mu}^r) = i\gamma_{\mu} D_{\mu}^r \quad (5.35)$$

temos:

$$\not{D}_r^2 = D_{\mu}^r D_{\mu}^r - \frac{1}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] F_{\mu\nu}^r \quad (5.36)$$

com

$$F_{\mu\nu}^r = \partial_\mu B_\nu^r - \partial_\nu B_\mu^r + [B_\mu^r, B_\nu^r] \quad . \quad (5.37)$$

Como sabemos, dos Capítulos 3 e 4, a parte diagonal do "kernel" da "equação de calor" que aparece em (5.34) tem a expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾ dada por:

$$\langle x | \exp(-\varepsilon \not{D}_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu B_\nu^r + B_\mu^r B_\nu^r) + O(\varepsilon) \right] \quad (5.38)$$

mas,

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2\gamma_\mu \gamma_\nu - 2\delta_{\mu\nu} \quad (5.39)$$

então,

$$\langle x | \exp(-\varepsilon \not{D}_r^2) | x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \not{D} \not{D}^r + \not{D}^r \not{D} - \partial_\mu B_\mu^r - B_\mu^r B_\mu^r + O(\varepsilon) \right] \quad . \quad (5.40)$$

Substituindo (5.40) em (5.34), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \operatorname{tr}_{C_{XY}} [f_1(x) (\not{D} \not{D}^r + \not{D}^r \not{D})] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \operatorname{tr}_{C_{XY}} [\not{D} f_1(x) \not{D}^r + f_1(x) \not{D}^r \not{D}] \quad , \quad (5.41) \end{aligned}$$

onde estamos desprezando termos de fronteira.

Integrando (5.41) em relação a r, temos:

$$\ln \frac{\det \not{D}_{r=1}}{\det \not{D}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dr \operatorname{tr}_{C_{XY}} [\not{D} f_1(x) \not{D}^r + f_1(x) \not{D}^r \not{D}] \quad (5.42)$$

Mas como

$$\not{D}^r = U(C_1; x_r, 0) [\not{D} U(C_1; 0, x_r)] \quad (5.43)$$

temos:

$$\frac{d}{dr} \beta^r = f_1(x) \beta^r + \beta^r f_1(x) + \beta f_1(x) \quad . \quad (5.44)$$

Então:

$$\text{tr}_{Cx} \beta^r \frac{d}{dr} \beta^r = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \text{tr}_{Cx\gamma} \beta^r \beta^r = 2 \text{tr}_{Cx\gamma} [f_1(x) \beta^r \beta^r] + \text{tr}_{Cx\gamma} [\beta f_1(x) \beta^r] \quad . \quad (5.45)$$

Assim:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \text{tr}_{Cx\gamma} [\beta^r \beta^r] - \text{tr}_{Cx\gamma} [f_1(x) \beta^r \beta^r] = \text{tr}_{Cx\gamma} [f_1(x) \beta^r \beta^r + \beta f_1(x) \beta^r] \quad (5.46)$$

Agora, substituindo (5.46) em (5.42), obtemos:

$$\frac{\det \beta_{r=1}}{\det i \beta} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}_{Cx\gamma} \beta \beta - \int_0^1 dr \text{tr}_{Cx\gamma} [\beta^r \beta^r f_1(x)] \right\} \quad , \quad (5.47)$$

onde

$$\beta = \beta_{r=1} \quad . \quad (5.48)$$

Notemos, nesse ponto, que se fazemos a passagem para o caso Abelian na fórmula (5.47) obtemos exatamente o resultado do modelo de Schwinger (29,53,70), pois o último termo de (5.47) se anula devido às propriedades do traço de matrizes γ de Dirac e no primeiro termo do membro direito de (5.47) podemos fazer o limite para a curva contínua, obtendo-se o resultado esperado para o determinante fermiônico da eletrodinâmica bidimensional, que é a manifestação do mecanismo de Schwinger (42,43).

Podemos ainda escrever

$$f_1(x) = \gamma_5 V_r^{-1}(C_1; x_r, 0) \partial_r V_r(C_1; 0, x_r) \quad (5.49)$$

com

$$V_r(C_1; 0, x_r) = P e^{-\int_0^{x_r} \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha dz_\beta} \quad , \quad (5.50)$$

onde

$$P e^{-\int_0^{x_r} \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha dz_\beta} = e^{-\epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^0 \Delta_\beta^0} \dots e^{-r \epsilon_{\alpha\beta} A_\alpha^x \Delta_\beta^x} \quad , \quad (5.51)$$

e ∂_r denotando a derivada parcial em relação a r .

Se substituirmos agora (5.49) em (5.47), podemos fazer então o limite para a curva contínua, isto é, $\Delta^i \rightarrow 0$, obtendo-se o determinante fermiônico para a QCD bidimensional. No entanto, para realizarmos o traço nas matrizes γ de Dirac, é importante observarmos que os termos em (5.24) e (5.25) proporcionais a Δ^x não interferem no limite $\Delta^i \rightarrow 0$. Tendo isto em mente, podemos escrever \not{D}_r como

$$\begin{aligned} \not{D}_r &= P e^{\epsilon_{\alpha\beta} \int_0^{x_r} A_\alpha dz_\beta} \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu P e^{-\epsilon_{\alpha\beta} \int_0^{x_r} A_\alpha dz_\beta} \\ &= V_r^{-1}(C_1; x_r, 0) \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu V_r(C_1; 0, x_r) \quad . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Substituindo então (5.49), (5.52) em (5.47), e realizando os traços sobre as matrizes de Dirac, obtemos:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det \not{D}}{\det i \not{D}} &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \operatorname{tr}_C (\partial_\mu V \partial_\mu V^{-1}) + \\ &+ \frac{i}{\pi} \epsilon_{\mu\nu} \int d^2x \int_0^1 dr \operatorname{tr}_C (V_r^{-1} \partial_\mu V_r V_r^{-1} \partial_\nu V_r V_r^{-1} \partial_r V_r) \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde tr_C denota por traço sobre as matrizes de cor e

$$V = V_{r=1} \quad (5.54)$$

onde V_r é dado em (5.50).

Como estamos considerando o espaço-tempo bidimensional como uma grande esfera e $\pi_2(SU(N)) = 0$ ⁽¹⁶⁾ para $N \geq 2$, podemos imaginar V_r como um mapeamento de uma bola rígida B , cuja fronteira é o S^2 , no $SU(N)$, onde consideramos como coordenadas em B o parâmetro r e as 2 coordenadas do espaço-tempo. Então, analogamente ao que se faz na construção da Lagrangeana de Wess-Zumino ⁽⁶⁹⁾, não há ambiguidade na extensão considerada.

Dessa maneira podemos escrever

$$\ln \frac{\det \mathcal{D}}{\det i \not{\partial}} = \frac{1}{2\pi} \int_C d^2x \operatorname{tr} (\partial_\mu V \partial_\mu V^{-1}) + \frac{1}{3\pi} \epsilon_{ijk} \int_B d^3x \operatorname{tr} (V_r^{-1} \partial_i V_r V_r^{-1} \partial_j V_r V_r^{-1} \partial_k V_r) . \quad (5.54)$$

Agora, como não há razão para privilegiarmos, como fizemos de (5.17) até agora a curva C_1 em geral podemos considerar a contribuição de todas as curvas C_i de zero a x . Neste caso, obtemos o resultado

$$\ln \frac{\det \mathcal{D}}{\det i \not{\partial}} = \frac{1}{N} \sum_{C_i \in S^2} \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} (\partial_\mu V \partial_\mu V^{-1}) + \frac{1}{N} \sum_{C_i \in B} \frac{1}{3\pi} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} (V_r^{-1} \partial_i V_r V_r^{-1} \partial_j V_r V_r^{-1} \partial_k V_r) . \quad (5.55)$$

É um fato curioso que (5.54) tem a forma exatamente igual ao lagrangeano fenomenológico da QCD bidimensional a baixas energias ^(48,69), onde o segundo termo do membro direito de (5.54) é proporcional ao lagrangeano de Wess-Zumino ⁽⁶⁵⁾, recentemente considerado por Witten ⁽⁴⁸⁾ na QCD a quatro e duas dimensões ⁽⁴⁹⁾ diferindo pelo fato de que V e V_r estão definidas como produto orde-

nado sobre curvas do campo de gauge e não exponencial do campo do pión (48,69).

É importante enfatizar, como vimos no desenvolvimento desse cálculo, que no caso Abeliano não temos necessidade de expressar o resultado do determinante fermiônico em termos de produtos ordenados pois o termo que tem dependência explícita na curva é de caráter puramente não-Abeliano.

Podemos ainda dar uma interpretação para a dificuldade encontrada, quando no final do Capítulo 3 tentamos calcular o determinante de Fadeev-Popov relativo ao gauge desacoplante (55). Podemos dizer então que, essa dificuldade que encontramos está ligada ao fato de que na QCD bidimensional podemos ser levados naturalmente a considerar produtos ordenados devido à sua estrutura não-Abeliana.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

6.1 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos a anomalia quiral em teorias com dimensionalidade do espaço-tempo, par, maiores do que quatro, seu papel na bosonização de alguns modelos bidimensionais sem massa, e na fracionalização do número fermiônico, e discutimos também o determinante fermiônico da QCD bidimensional.

No segundo capítulo, apresentamos a anomalia quiral para espaço-tempo de dimensionalidade, par, maior do que quatro e calculamos essa anomalia perturbativamente ⁽³⁸⁾ através do método de Regularização Dimensional inspirado no cálculo, realizado por Bollini e Giambiagi ⁽⁶⁴⁾, dessa anomalia em quatro dimensões.

Apesar dos livros-textos básicos de Teoria de Campos afirmarem que esse método não é adequado para o cálculo da anomalia ^(60a,f), não encontramos nenhuma dificuldade, e, pelo contrário, como este método garante a invariância de gauge em todos os estágios do processo de cálculo, o termo anômalo é gerado automaticamente sem a necessidade da imposição da invariância de gauge nos vértices vetoriais, como é feito por outros métodos. O único cuidado a ser tomado é o de fazermos uma extensão adequada para a matriz de Dirac γ_{n+1} , tal que respeite suas propriedades na dimen

são arbitrária, n par, considerada.

No terceiro capítulo, discutimos dois métodos para regularização de integrais de trajetória quadráticas: os métodos da função zeta generalizada ⁽⁵⁶⁾ e o do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾; e como através da solução do "kernel da equação de calor" podemos ter informações sobre as funções de Green do operador que aparece na "equação de calor".

Ainda no terceiro capítulo, regularizando o determinante fermiônico da QCD bidimensional através do método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ e levando em conta uma propriedade que o operador de Dirac possui no gauge desacoplante, calculamos o determinante fermiônico ⁽⁵²⁾.

Vimos, então, que a solução desse determinante é dada basicamente pela solução assintótica ⁽⁵⁷⁾ da "equação de calor". O resultado desse determinante é dado por um lagrangeano efetivo, no qual aparece uma extensão não-Abeliana do mecanismo de Schwinger ^(46,47,50,52), isto é, o campo de gauge adquire uma massa, e o análogo em duas dimensões ao funcional de Wess-Zumino ⁽⁶⁵⁾ recentemente considerado por Witten ^(48,49) no contexto do lagrangeano fenomenológico da QCD em 4-dimensões a baixas energias e na bosonização não-Abeliana de teorias bidimensionais.

Analisamos ainda as primeiras dificuldades encontradas para o cálculo do determinante de Fadeev-Popov para o gauge considerado ⁽⁵⁵⁾, o gauge desacoplante ^(45,55).

No Capítulo 4 através da regularização do determinante fermiônico pelo método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ e do uso da expansão assintótica de Seeley ⁽⁵⁷⁾, desenvolvemos um método ⁽²⁹⁾, não-perturbativo, para o cálculo do Jacobiano de uma transformação quiral geral, isto é, finita e não-Abeliana. O interesse nesse ti-

po de transformação geral reside no fato de que alguns fenômenos como a bosonização ⁽⁷²⁾ e a fracionalização do número fermiônico ^(26,27), podem ser vistos com esse tipo de transformação ^(28,29).

Com esse método, não-perturbativo, é permitido checar como um caso particular o Jacobiano regularizado por Fujikawa ⁽⁴⁰⁾, elaborado através de outro método não-perturbativo, para teorias com operadores tipo Dirac hermitianos, e além disso, colocar algumas dúvidas acerca do método utilizado por Fujikawa ⁽⁷¹⁾, quando o operador tipo Dirac é não normal. Fornecendo, então, elementos para a discussão das discrepâncias encontradas quando os resultados, não-perturbativos, de Fujikawa são comparados com certos resultados perturbativos ⁽⁷⁷⁾ para o caso de operadores não normais.

Esse método é ainda implementado para fornecer uma alternativa ^(29,53) para a bosonização de teorias bidimensionais, com férmions sem massa, como é o caso do modelo de Schwinger ^(42, 43), Thirring ⁽⁷³⁾ e a QCD bidimensional. E, finalmente, através desse método estudamos o fenômeno da fracionalização do número fermiônico ^(27,28,29) que como vimos, está intimamente relacionado com a anomalia quiral.

No penúltimo capítulo, através da observação de que o operador de Dirac, em duas dimensões, pode ser escrito de uma maneira muito especial, isto é, através do uso da exponencial de uma integral do campo de gauge no caso Abelian e, no caso não-Abeliano, como o produto ordenado do campo de gauge sobre uma curva ⁽⁷⁵⁾, calculamos o determinante fermiônico funcional, tanto para o caso Abelian quanto para o não-Abeliano, sem referência a um gauge particular.

O fato de calcularmos o determinante fermiônico sem referência a um gauge particular para o modelo de Schwinger não é relevante, pois

já o tínhamos calculado implicitamente no Capítulo 4 no gauge de Lorentz e o determinante de Fadeev-Popov para esse caso sabemos que dá contribuição trivial. Esse cálculo é relevante para o caso da QCD bidimensional pois, como vimos no final do Capítulo 3, não sabemos calcular o determinante de Fadeev-Popov para o gauge usado ⁽⁵⁵⁾ que era o gauge desacoplante ^(45,55), e isto poderia esconder propriedades físicas importantes da teoria.

Quando calculamos esse determinante sem referência a um gauge particular para o caso Abelian, o modelo de Schwinger ^(42, 43), o resultado obtido é o já bem conhecido mecanismo de Schwinger ^(42,43), isto é, o campo de gauge adquire uma massa. Esse resultado já era esperado pois o operador de Dirac é escrito como:

$$\not{D} = e^{-\gamma_5 \varepsilon_{\alpha\beta} \int_0^X A_\alpha dZ_\beta} i\not{\partial} e^{-\gamma_5 \varepsilon_{\alpha\beta} \int_0^X A_\alpha dZ_\beta} \quad (6.1)$$

e considerando o campo de gauge no gauge de Lorentz

$$A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\mu} \partial_\mu \Phi \quad (6.2)$$

obtemos, substituindo (6.2) em (6.1) e realizando-se a integral

$$\not{D} = e^{-\gamma_5 \Phi} i\not{\partial} e^{-\gamma_5 \Phi} \quad (6.3)$$

que coincide exatamente com o caso analisado no Capítulo 4 para o modelo de Schwinger no gauge de Lorentz. Assim, este método para o caso Abelian pode ser considerado como uma generalização do método desenvolvido no Capítulo 4.

Quando aplicamos para a QCD bidimensional devido à estrutura não-Abeliana da teoria, para fazermos um raciocínio análogo ao caso Abelian, somos obrigados a considerar o produto orde-

nado, sobre curvas ⁽⁷⁵⁾, do campo de gauge e observamos durante o cálculo que para o cálculo do determinante fermiônico dessa teoria temos que fazer o limite de curva contínua, e somos obrigados a considerar o resultado final como produto ordenado sobre curvas.

O resultado final do determinante fermiônico da QCD bidimensional é um lagrangeano efetivo com a forma do lagrangeano da QCD em duas dimensões a baixas energias incluindo o termo de Wess-Zumino ⁽⁶⁵⁾, mas só que ao invés de termos a exponencial do campo do pión ^(48,69) temos o produto ordenado, sobre uma curva, do campo de gauge.

Concluindo, podemos dizer que este último método nos dá uma expressão formal para o determinante fermiônico da QCD bidimensional em termos de produto ordenado, sobre uma curva, do campo de gauge cuja análise parece ter algum interesse, e demanda um esforço adicional.

Uma das questões que evidencia por si própria, é se este último método poderia ser implementado para o cálculo do determinante fermiônico em quatro-dimensões. Alguns comentários poderiam ser feitos a esse respeito. Primeiramente, é possível expressar o operador de Dirac em termos de exponenciais em quatro dimensões; sua forma é:

$$\not{D} = i(\not{\beta} + \not{A}) = e^{\frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \int_0^x A_\rho dz_\mu} i \gamma_\mu \partial_\mu e^{\frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \int_0^x A_\rho dz_\mu} \quad (6.4)$$

onde no expoente o índice μ é somado conjuntamente com $\gamma_\mu \partial_\mu$. Essa expressão para o operador de Dirac torna-se mais clara se lembrarmos da seguinte expressão da álgebra das matrizes de Dirac ⁽⁴⁷⁾:

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta = \delta_{\mu\alpha} \gamma_\beta - \gamma_{\mu\beta} \gamma_\alpha + \gamma_{\alpha\beta} \gamma_\mu - \epsilon_{\mu\alpha\beta\tau} \gamma_\tau \gamma_5 \quad (6.5)$$

Se tentamos agora aplicar em (6.4) o método desenvolvido no capítulo precedente, encontramos dificuldades, pois chamando

$$\not{D}_r = e^{rf_\mu} i\gamma_\mu \partial_\mu e^{rf_\mu} = i\gamma_\mu D_\mu^r \quad (6.6)$$

onde

$$f_\mu = \frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \int_0^x A_\rho dz_\mu, \quad (6.7)$$

e, repare que o índice μ em (6.7) não está somado mas sim em (6.6).

Diferenciando (6.6) em relação a r obtemos:

$$\frac{d}{dr} \not{D}_r = \dot{\not{D}}_r = f_\mu i\gamma_\mu D_\mu^r + i\gamma_\mu D_\mu^r f_\mu. \quad (6.8)$$

Então,

$$\not{D}_r \dot{\not{D}}_r = \not{D}_r f_\mu i\gamma_\mu D_\mu^r + \not{D}_r i\gamma_\mu D_\mu^r f_\mu. \quad (6.9)$$

Regularizando o $\det \not{D}_r$ pelo método do tempo-próprio⁽⁵⁶⁾, e diferenciando em relação a r , obtemos:

$$\frac{d}{dr} \ln \det \not{D}_r^2 = 2 \int_\epsilon^\infty ds \text{Tr} [\not{D}_r \dot{\not{D}}_r \exp(-s\not{D}_r^2)]. \quad (6.10)$$

Agora, devido ao fato do índice μ em (6.9) estar somado com f_μ , se substituirmos (6.9) em (6.10) não é possível uma integração direta em s como fizemos no capítulo precedente. Assim, para o caso quadridimensional, utilizando-se a expressão (6.4), esse método tal qual foi desenvolvido não se aplica.

Finalmente, as contribuições originais envolvidas nesse trabalho são:

- (i) Cálculo perturbativo da anomalia quiral em dimensão arbitrária ⁽³⁸⁾ pelo método da Regularização Dimensional, apresentado no Capítulo 2.
- (ii) Cálculo do determinante fermiônico para a QCD bidimensional ⁽⁵²⁾ no gauge desacoplante apresentado na capítulo 3.
- (iii) Desenvolvimento ⁽²⁹⁾ de um método para o cálculo do Jacobiano de uma transformação quiral geral, isto é, finita e não-Abeliana regularizando o determinante fermiônico pelo método do tempo-próprio ⁽⁵⁶⁾ e usando a expansão assintótica de Seeley ⁽⁵⁷⁾. Esse método, como discutido no Capítulo 4, apresenta as seguintes vantagens:
 - a) - Simplicidade em relação a outros métodos, pois não necessitamos do cálculo perturbativo de determinantes ⁽⁵⁸⁾ como é usado no método desenvolvido nas refs. ^(50,53), e as expansões assintóticas ⁽⁵⁷⁾ usadas estão quase todas tabeladas ^(54,59).
 - b) - Como caso particular, coincide com o Jacobiano regularizado por Fujikawa ⁽⁴⁰⁾ para operadores hermitianos, o que nos permite considerá-lo como uma extensão ao método de Fujikawa para o caso de transformações quirais gerais.
 - c) - Fornece elementos novos para compreender as discrepâncias encontradas entre o método não-perturbativo de Fujikawa ⁽⁷¹⁾ e certos métodos perturbativos ⁽⁷⁷⁾ quando o operador tipo Dirac é não-hermitiano.
 - d) - Permite uma análise alternativa simples, via integrais de trajetória, de modelos bidimensionais sem massa ^(16,72) e

do fenômeno da fracionalização do número fermiônico.

- (iv) Cálculo do determinante fermiônico do modelo de Schwinger e da QCD bidimensional sem referência a um gauge particular apresentado no Capítulo 5.

APÊNDICE A

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MATRIZES

γ DE DIRAC EM DIMENSÃO $N > n$

A.1 - $\{\gamma_\alpha, \gamma_{n+1}\} \neq 0$ para $N > n$

onde

$$\gamma_{n+1} = C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$$

Podemos separar a soma na definição de γ_{n+1} numa soma onde o primeiro termo contém um índice bem definido " α " e o outro termo não, isto é,

$$\gamma_{n+1} = C \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \\ \text{pelo menos um} \\ \mu_i = \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} + C \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \\ \text{todos } \mu_i \neq \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$$

ou

$$\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}^{(=\alpha)} + \gamma_{n+1}^{(\neq\alpha)} \quad \text{onde} \quad \gamma_{n+1}^{(\neq\alpha)} = C \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \\ \text{todos } \mu_i \neq \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$$

Então

$$\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} = \{\gamma_{n+1}^{(=\alpha)}, \gamma_\alpha\} + \{\gamma_{n+1}^{(\neq\alpha)}, \gamma_\alpha\} \quad .$$

Vemos claramente que o primeiro termo é nulo e o segundo termo é diferente de zero, o termo chamado de evanescente, en-

tão:

$$\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} = 2\gamma_\alpha \gamma_{n+1}^{(\neq \alpha)} = 2\gamma_{n+1}^{(\neq \alpha)} \gamma_\alpha$$

$$A.2 - \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n} \propto \tau^{a_1 \dots a_n}$$

Tomemos o caso particular em que o tensor $\tau^{\mu_1 \dots \mu_n}$ que aparece na definição de γ_{n+1} é dado por:

$$\tau^{\mu_1 \dots \mu_n} = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

Se todos $\mu_1 \dots \mu_n = 0, \dots, n-1$ onde $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita, e:

$$\tau^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$$

se pelo menos um $\mu_i = n, \dots, N-1$. Nese caso:

$$\gamma_{n+1} \propto \gamma_0 \dots \gamma_{n-1}$$

Analisemos agora o valor de $\text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n}$. Quando todos os γ_{a_i} estiverem entre $a_i = 0, \dots, n-1$, teremos ± 1 , para o traço, de acordo com a posição dos γ_{a_i} . Quando pelo menos um γ_{a_i} tiver $a_i = n, \dots, N-1$, teremos para o traço considerado o traço de diferentes matrizes de Dirac, o que dá valor zero. Então:

$$\text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n} \propto \tau^{a_1 \dots a_n}$$

e podemos ver que isso acontecerá no caso geral.

$$A.3 - \text{Tr} \{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}}$$

é completamente antissimétrico em a_i

$$\text{Tr}\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} = \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_\alpha \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} + \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} \gamma_\alpha$$

Agora, passando o γ_α para a direita no primeiro traço do membro direito da expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_\alpha \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} &= 2g_{\alpha a_1} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_2} \dots \gamma_{a_{n+1}} - 2g_{\alpha a_2} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \gamma_{a_3} \\ &\dots \gamma_{a_{n+1}} + \dots - 2g_{\alpha a_{n+1}} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n-2}} \gamma_{a_n} + 2g_{\alpha a_n} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n-1}} - \\ &- \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} \gamma_\alpha \end{aligned}$$

Levando esse resultado à expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}} &= 2g_{\alpha a_1} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_2} \dots \gamma_{a_{n+1}} - \\ &+ 2g_{\alpha a_2} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \gamma_{a_3} \dots \gamma_{a_{n+1}} + \dots - 2g_{\alpha a_{n-1}} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n-2}} \gamma_{a_n} + \\ &+ 2g_{\alpha a_n} \text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n-1}} \end{aligned}$$

Como $\text{Tr} \gamma_{n+1} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_n}$ é totalmente antissimétrico nos índices a_i então $\text{Tr}\{\gamma_{n+1}, \gamma_\alpha\} \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{n+1}}$ é totalmente antissimétrico nos índices a_i .

$$A.4 - \gamma_\alpha \gamma_{n+1} \gamma^\alpha = (N-2n) \gamma_{n+1}$$

$$\gamma_\alpha \gamma_{n+1} \gamma^\alpha = C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_\alpha \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \gamma^\alpha$$

A estratégia é passar o último γ^α através dos γ_{μ_i} . Cada vez que passa por uma matriz γ_{μ_i} geramos um termo $-2\gamma_{n+1}$ menos o termo invertido pois

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{n+1} \gamma^{\alpha} = 2 C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\mu_n} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{n-1}} - C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{n-1}} \gamma^{\alpha} \gamma_{\mu_n} = -2 \gamma_{n+1} - C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{n-1}} \gamma^{\alpha} \gamma_{\mu_n}$$

Como passamos n vezes geramos um termo igual a $-2n\gamma_{n+1}$, ao final, teremos

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{n+1} \gamma^{\alpha} = -2n\gamma_{n+1} + C \tau^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_{\alpha} \gamma^{\alpha} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$$

com o sinal intermediário positivo pois passamos um número par de vezes, então, como $\gamma_{\alpha} \gamma^{\alpha} = N$, temos:

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{n+1} \gamma^{\alpha} = (N-2n)\gamma_{n+1} \quad .$$

APÊNDICE B

CÁLCULO DE UMA EXPANSÃO ASSINTÓTICA DE SEELEY

Descreveremos nesse Apêndice um método alternativo ^(57, 59, 68) àquele dado no Capítulo 3 para o cálculo da expansão assintótica ⁽⁵⁷⁾, e aplicaremos esse método para um caso de interesse no Capítulo 4.

Estaremos supondo todo o tempo que os campos envolvidos são suaves definidos em variedades compactas com métricas positiva definida, isto é, supomos que a rotação Euclideana foi realizada.

Seja A um operador diferencial de ordem $2m$ sobre uma variedade compacta M n -dimensional

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (B.1)$$

onde, $x = (x_1, \dots, x_n)$ são coordenadas locais, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um índice múltiplo, com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \quad (B.2)$$

e $a_\alpha(x) = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$ funções matriciais suaves.

Chamamos a função matricial

$$A(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \quad (B.3)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^n$, o símbolo completo ⁽⁵⁷⁾ do operador A, e a função matricial

$$A_0(x/\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha \quad (B.4)$$

o símbolo principal ⁽⁵⁷⁾. O operador A é dito elíptico se seu símbolo principal $A_0(x, \xi)$ é inversível para todo $\xi \neq 0$. Note que o requerimento da inversibilidade do símbolo principal está relacionado em diversos casos com a existência do propagador livre.

Se A é um operador elíptico positivo de ordem 2m sobre uma variedade compacta existe uma expansão assintótica quando $t \rightarrow 0$, dada por ⁽⁵⁷⁾:

$$\langle x | \exp(-tA) | x \rangle \cong \sum_{k \leq n/2m} \psi_k(x|A) t^{-k} \quad , \quad (B.5)$$

onde as funções $\psi_k(x/A)$ são calculadas através do seguinte procedimento ^(57, 59, 68). Introduzimos o operador A_ϵ^ξ obtido de A através de:

$$A_\epsilon^\xi = \exp(-i \frac{x \cdot \xi}{\epsilon}) A \exp(i \frac{x \cdot \xi}{\epsilon}) \quad , \quad (B.6)$$

onde $x \cdot \xi = \sum_i x_i \xi_i$.

Definimos agora a função $B_\epsilon(x, \xi, \lambda)$ como solução de:

$$(A_\epsilon^\xi - \lambda \epsilon^{-2m}) B_\epsilon(x, \xi, \lambda) = 1 \quad (B.7)$$

na forma de série de potências em ϵ :

$$B_\epsilon(x, \xi, \lambda) = \sum_{k \geq 0} \epsilon^{2m+k} B_k(x, \xi, \lambda) \quad (B.8)$$

De (B.7), obtemos relações de recorrência para $B_k(x, \xi, \lambda)$ e isto

faz possível calcular $B_\epsilon(x, \xi, \lambda)$ em qualquer ordem em ϵ . Os coeficientes na expansão (B.5) podem agora ser encontrados da relação:

$$\sum_{k \leq n/2m} \psi_k(x|A) t^{-k} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_C d^n \xi \int \frac{id\lambda}{2\pi} B_\epsilon(x, \xi, \lambda) \Big|_{\epsilon=1} \exp(-\lambda t) \quad , \quad (B.9)$$

onde integramos primeiramente em relação a λ ao longo de um contorno C que circunda paralelamente o semi-eixo real positivo e finalmente, realizamos a integral em relação a ξ .

Vamos agora calcular $\psi_k(x|A)$ para A dado por

$$A = -\partial^2 + P_\mu \partial_\mu + Q \quad (B.10)$$

em duas dimensões com P_μ e Q funções matriciais. Nesse caso A_ϵ^ξ definido por (B.6) é dado por

$$A_\epsilon^\xi = -\partial^2 - \frac{2i\xi_\mu}{\epsilon} \partial_\mu + P_\mu \partial_\mu + \frac{i\xi_\mu}{\epsilon} P_\mu + \frac{\xi^2}{\epsilon^2} + Q \quad . \quad (B.11)$$

Então:

$$A_\epsilon^\xi(\lambda) = A_\epsilon^\xi - \lambda \epsilon^{-2} = -\partial^2 + P_\mu \partial_\mu + Q - \frac{2i\xi_\mu}{\epsilon} \partial_\mu + \frac{i\xi_\mu}{\epsilon} P_\mu + (\xi^2 - \lambda) \epsilon^{-2} \quad . \quad (B.12)$$

Chamando

$$C_\mu(1) = -2i\xi_\mu \quad e \quad C(2) = i\xi_\mu P_\mu \quad (B.13)$$

A equação (B.7) torna-se:

$$1 = A_\epsilon^\xi(\lambda) B_\epsilon = \left[-\partial^2 + P_\mu \partial_\mu + Q + \frac{1}{\epsilon} C(1) \partial_\mu + \frac{1}{\epsilon} C(2) + \frac{1}{\epsilon^2} (\xi^2 - \lambda) \right] \times \\ \times \left[\epsilon^2 B_0 + \epsilon^3 B_1 + \epsilon^4 B_2 + \dots \right] \quad . \quad (B.14)$$

Resolvendo ordem a ordem em ϵ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= (\xi^2 - \lambda)^{-1} \\
 B_1 &= - \frac{C(2)}{(\xi^2 - \lambda)^2} \\
 B_2 &= \frac{C(2)^2 + C_\mu(1) \partial_\mu C(2)}{(\xi^2 - \lambda)^3} - \frac{Q}{(\xi^2 - \lambda)^2} .
 \end{aligned}
 \tag{B.15}$$

Devemos agora resolver as integrais dadas em (B.9), isto é:

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x|A)t^{-1} + \psi_0(x|A) + \dots &= \frac{\epsilon^2}{(2\pi)^2} \int d^2\xi \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} B_0 \exp(-\lambda t) + \\
 + \frac{\epsilon^3}{(2\pi)^2} \int d^2\xi \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} B_1 \exp(-\lambda t) &+ \frac{\epsilon^4}{(2\pi)^2} \int d^2\xi \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} B_2 \exp(-\lambda t) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{B.16}$$

Realizando essas integrais em (B.16) com os B_i dados em (B.15), encontramos:

$$\psi_1(x|A)t^{-1} + \psi_0(x|A) + \dots = \frac{1}{4\pi t} \{1 - t[Q + \frac{1}{4}(P^2 - 2\partial_\mu P_\mu)] + O(t^2)\} .
 \tag{B.17}$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Oppenheimer, Phys. Rev. 35, 461 (1930).
- (2) - Waller, Z. Physik 62, 673 (1930).
- (3) - S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. 1, 27 (1946).
- (4) - J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 1439 (1948).
- (5) - R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 769 (1949).
- (6) - C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566 (1972) ;
Nuovo Cim. 12B, 20 (1972).
- (7) - G. 't Hooft e M. Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972).
- (8) - C.N. Yang e R.L. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
- (9) - J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
- (10) - P.W. Higgs, Phys. Lett. 12, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. 13,
508 (1964).
- (11) - A. Salam, Proceeding of the eighth Nobel Symposium, John Wi
ley, New York (1968).
- (12) - S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
- (13) - J. Leite Lopes, Nucl. Phys. 8, 234 (1958).
- (14) - E.S. Abers e B.W. Lee, Phys. Rep. 9, 1(1973)...
- (15) - H. Fritzsch, M. Gell-Mann e H. Leutwyler, Phys. Lett. 47B ,
365 (1973); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31, 494 (1973) ;
Phys. Rev. D8, 4482 (1973); D.J. Gross e F. Wilczek, Phys.
Rev. D8, 3633 (1973).
- (16) - W. Marciano e H. Pagels, Phys. Rep. 36, 137 (1978).
- (17) - S. Adler, Phys. Rev. 177, 2426 (1969).
- (18) - J. Bell e R. Jackiw, Nuovo Cimento 60A, 47(1969).
- (19) - D. Gross e R. Jackiw, Phys. Rev. D6, 477 (1972).
- (20) - H. Georgi e S. Glashow, Phys. Rev. D6, 429 (1972).

- (38) - M.A. Rego Monteiro, Lett. Nuovo Cimento 40, 201 (1984).
- (39) - C.A. Linhares, J.A. Mignaco e M.A. Rego Monteiro, " Axial Anomaly and Index Theorem for Dirac Kähler Fermions" pré-publicação CTA; Cesar A. Linhares, Tese de Doutorado, CBPF 1985.
- (40) - K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979); Phys. Rev. D21, 2848 (1980); Phys. Rev. D22, 1499 (1980).
- (41) - R. Roskies e F.A. Schaposnik, Phys. Rev. D23, 558 (1981).
- (42) - J. Schwinger, Phys. Rev. 128, 2425 (1962).
- (43) - J.H. Lowenstein e J.A. Swieca, Ann. Phys. (N.Y.) 68, 172 (1971).
- (44) - K. Furuya, R.E. Gamboa Saraví e F.A. Schaposnik, Nucl. Phys. B208, 159 (1982).
- (45) - R.E. Gamboa Saraví, F.A. Schaposnik e J.E. Solomin, Nucl. Phys. B185, 239 (1981).
- (46) - A.M. Polyakov e P.B. Wilgman, Phys. Lett. 131B, 121 (1983).
- (47) - O. Alvarez, Nucl. Phys. B238, 61 (1984).
- (48) - E. Witten, Nucl. Phys. B233, 422 (1983); B233, 433 (1983).
- (49) - E. Witten, Commun. Math. Phys. 92, 455 (1984).
- (50) - R.E. Gamboa Saraví, F.A. Schaposnik e J.E. Solomin. Phys. Rev. D30, 1353 (1984).
- (51) - R.E. Gamboa Saraví, F.A. Schaposnik e H. Vucetich, Phys. Rev. D30, 363 (1984); R. Banerjee, Z. Phys. C25, 251 (1984); P. Di Vecchia, B. Durhuus e J.L. Petersen, "The Wess-Zumino Action in Two Dimensions and Non-Abelian Bosonization", pré-publicação NBI-HE-84-02; P. Di Vecchia e P. Rossi, "On the Equivalence Between the Wess-Zumino Action and the Free Fermi Theory in Two Dimensions", pré-publicação TH.3808 - CERN; D. Gonzalez e A.N. Redlich, "Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions Using Path Integrals", pré-publicação CTP ~~#~~ 1155; E.C. Marino, "Dynamical Mass Generation in the Thirring Model: A Functional Integral Approach", pré-publicação UF São Carlos; M.A. Rego Monteiro, "Fermionic

- (21) - C. Bouchiat, J. Iliopoulos e Ph. Meyer, Phys. Lett. 38B, 519 (1972).
- (22) - G.'t Hooft, Phys. Rev. Lett. 37, 8 (1976); Phys. Rev. D14, 3432 (1976).
- (23) - R. Jackiw e C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. 37, 172 (1976).
- (24) - C. Callan, R. Dashen e D. Gross, Phys. Lett. 63B, 334 (1976).
- (25) - E.C. Marino, Escola de Verão Jorge André Swieca.pág. 287, (1981).
- (26) - R. Jackiw e C. Rebbi, Phys. Rev. D13, 3398 (1976); R. Jackiw e J.R. Schrieffer, Nucl. Phys. B190, 253 (1981).
- (27) - a) J. Goldstone e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 47, 986 (1981);
b) W.A. Bardeen, S. Elitzur, Y. Frishman e E. Rabinovici, Nucl. Phys. B218, 447 (1983).
c) A. Zee, Phys. Lett. 135B, 307 (1984).
- (28) - F. A. Schaposnik, "Fermion Currents in Two-Dimensional Models", pré-publicação da Univ. de La Plata (1984).
- (29) - J.A. Mignaco e M.A. Rego Monteiro, "Chiral Anomaly, Bosonization and Fractional Charge", pré-publicação do CBPF, CBPF-NF-062/84.
- (30) - G.'t Hooft, "Recent Developments in Gauge Theories", Plenum Press, 1980.
- (31) - E. Witten, Nucl. Phys. B156, 262 (1979); P. Di Vecchia e G. Veneziano, Nucl. Phys. B171, 253 (1980).
- (32) - V.A. Rubakov, ZhETF Pisma 33, 658 (1981); Nucl. Phys. B209, 234 (1982); C. Callan, Phys. Rev. D25, 2141 (1982); Phys. Rev. D26, 2058 (1982).
- (33) - S. Ferrara e B. Zumino, Nucl. Phys. B87, 207 (1975).
- (34) - P.H. Frampton, Phys. Lett. 122B, 351 (1983).
- (35) - J. Preskill, P.H. Frampton e H. Dan, Phys. Lett. 124B, 209 (1983).
- (36) - P.H. Frampton e T.W. Kephart, Phys. Rev. Lett. 50, 1343 (1983); 1347 (1983).
- (37) - T. Matsuki, Phys. Rev. D28, 2107 (1983).

Determinant for Two-Dimensional Massive QED", pré-publicação CBPF-NF-020/84; M.A. Rego Monteiro, "Path-Integral Bosonization of Two-Dimensional Massive QCD", pré-publicação CBPF-NF-021/84.

- (52) - L.C.L. Botelho e M.A. Rego Monteiro, Phys. Rev. D30, 2242 (1984).
- (53) - R.E. Gamboa Saraví, M.A. Muschietti, F.A. Schaposnik e J. E. Solomin, Ann. Phys. 157, 360 (1984).
- (54) - K.D. Rothe e B. Schroer, em Field Theoretical Methods in Particle Physics, editado por Werner Rühl, NATO Advanced Study Institutes Series B, vol. 55 (Plenum, N.Y. 1980), p. 249.
- (55) - R. Roskies, Festschrift for Feza Gursey's 60th birthday(1982).
- (56) - S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. 55, 133 (1977).
- (57) - R.T. Seeley, Proc. Symp. Pure Math., vol. 10, Amer. Math. Soc., pg. 288 (1967).
- (58) - R.E. Gamboa Saraví, M.A. Muschietti e J.E. Solomin, Comm. Math. Phys. 89, 363 (1983).
- (59) - P.B. Gilkey, J. Differ. Geometry 10, 601 (1975); V.N. Romanov e A.S. Schwarz, Theor. and Math. Phys. 41,967(1979).
- (60) - a) C.Itzykson e J.B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw Hill (1980).
b) T.D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, harwood academic publishers (1981).
c) K. Huang, Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd. (1982).
d) C.G. Bollini, Teoria de Campos, a ser publicado.
e) J. Leite Lopes, Gauge Field Theories: An Introduction , Pergamon Press (1981).
f) C. Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press (1978).
- (61) - L. Fadeev e V.N. Popov, Phys. Lett. 25B, 29 (1967).
- (62) - Carlos A.P. Galvão, Strings Clássicos Relativísticos ou Histórias de Deixar Afta na Boca, CBPF (1983).
- (63) - G.A. Christos, Z. Phys. C18, 155 (1983).

- (64) - C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, Acta Phys. Austriaca 38,211 (1973).
- (65) - J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. 37B, 95 (1971).
- (66) - F.A. Berezin, Method of Second Quantization, Academic Press N.Y. (1966).
- (67) - C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, Revista Brasileira de Física, Volume Especial, julho de 1984 - Os 70 Anos de Mário Schönberg, pg. 364; C.A. Aragão de Carvalho, C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, Phase Transitions in Field Theory, prepublicação da PUC.
- (68) - M. Atiyah, R. Bott e V.K. Patodi, Inventiones Math. 19,279 (1973).
- (69) - J.L. Petersen, Non-Abelian Chiral Anomalies and Wess Zumino Effective Actions, pré-publicação NBI-HE-84-25.
- (70) - A.V. Kulikov, Theor. and Math. Phys. 55, 205 (1983).
- (71) - K. Fujikawa, Phys. Rev. D29, 285 (1984).
- (72) - J.A. Swieca, Obras Coligidas, Projeto Galileo Galilei, CNPq -CBPF (1981).
- (73) - W. Thirring, Ann. of Phys. 3, 91 (1958).
- (74) - J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951).
- (75) - Para uma boa discussão sobre variáveis definidas sobre curvas veja: L. Boanerges P. Jr., Tese de Doutorado, CBPF (1984).
- (76) - A. Galindo, P. Pascual, Mecanica Quantica, Editorial Alhambra, S.A. (1978).
- (77) - D. McKay e B.L. Young, Phys. Rev. D28, 1039 (1983); M. Einhorn e D. Jones, Phys. Rev. D29, 331 (1984).

“ANOMALIA QUIRAL, DETERMINANTE FERMIONICO E MODELOS BIDIMENSIONAIS”

MARCO AURÉLIO DO REGO MONTEIRO

Tese de doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Carlos Guido Bollini/CBPF

Eduardo Cantera Marino/USP

Rajat Chanda/UFRJ

Takecho Kodama/CBPF

Fernando Raimundo Aranha Simão/CBPF

Rio de Janeiro, 05 de março de 1985