

CESAR AUGUSTO LINHARES DA FONSECA JUNIOR

ANOMALIA AXIAL E TEOREMA DO ÍNDICE PARA
FÉRMIONS DE DIRAC-KÄHLER

TESE DE
DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

FEVEREIRO DE 1985

Aos meus pais

À Elisabeth

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Juan Alberto Mignaco, pela dedicação e interesse na condução do tema de tese, pelo muito que me ensinou e pela amizade consolidada nos últimos anos.
- Aos Profs. J.J. Giambiagi e C.G. Bollini, pela acolhida no Departamento de Campos e Partículas do CBPF, sempre que necessária.
- Aos Profs. Garth Baker e Josef Dodziuk, pelas discussões sobre Dirac-Kähler e problemas da rede.
- Ao Marco Aurélio do Rego Monteiro, com quem muito conversei sobre o determinante fermiônico.
- Ao Prof. Jair Koiller, pelas exposições sobre teoria de fibrados.
- Ao Prof. Brett Carlson, pela paciência e comentários sobre partes desta tese.
- Aos amigos Márcia, Malena, Rubinho, Rogério, Miltão, Jair, Luiz, Ricardo, Izi, Alexandre e Galvão e demais colegas no CBPF e no IEAv.
- Ao IEAv, por fornecer as condições de trabalho necessárias para que fosse possível a realização desta tese. Em particular, ao saudoso Brig. J.A.A. Amarante, pelo incentivo

e apoio na constituição do Grupo de Partículas e Campos da
Divisão de Física Teórica do IEAv.

- À Marilene Pereira, pela ajuda na datilografia da tese.
- Ao CNPq, pelo apoio no início deste trabalho.
- À Beth, por tudo.

RESUMO

Estudou-se, neste trabalho, alguns aspectos da influência da topologia em teoria de campos de gauge. Para isso, adotaram-se os métodos da geometria e da topologia diferenciais. Uma revisão dos conceitos de formas diferenciais, espaços fibrados, conexão e curvatura é apresentada e mostra-se como se interpreta uma teoria de gauge por este enfoque.

Em seguida, estuda-se a questão dos fêrmions neste contexto: é analisada detalhadamente a equação de Dirac-Kähler, na qual a partícula fermiônica é considerada uma forma diferencial geral. Mostra-se, aqui, como as expressões explícitas destas, em função das componentes do espinor de Dirac, variam com a representação das matrizes de Dirac. A equação de Dirac-Kähler contém 4 vezes (em quatro dimensões) a equação de Dirac, cada partícula estando associada a um ideal à esquerda da álgebra das formas diferenciais gerais. Estes ideais e a simetria $SU(4)$ entre eles são também estudados do ponto de vista dos espinores e o grupo de redução a um dos ideais é identificado como a subálgebra de Cartan deste $SU(4)$.

Finalmente, calcula-se a anomalia axial através do determinante funcional dado pelo operador de Dirac-Kähler. O método de regularização é o dos coeficientes de Seeley. Daí resulta uma comparação dos teoremas do índice para os complexos "torcidos" de assinatura e de spin, cuja proporcionalidade é dada pelo número de ideais da álgebra contida na equação de Dirac-Kähler e que também se manifesta nas respectivas equações da anomalia axial.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1. Diagrama básico de espaço fibrado	29
Fig. 1.2. Diagrama básico de espaço fibrado principal	32
Fig. 1.3. Seções de um fibrado principal	34
Fig. 1.4. Diagrama de fibrado vetorial associado	37
Fig. 3.1. Gráficos de triângulo anômalos	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Formas de Kähler na representação de Kramers
(espaço euclidiano 4-dimensional) 72

Tabela 2. Formas de Kähler na representação de Pauli -
Dirac (espaço euclidiano 4-dimensional)..... 73

Tabela 3. Formas adjuntas de Kähler na representação de
Kramers (espaço euclidiano 4-dimensional)..... 77

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I. FATOS BÁSICOS DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS</u> <u>TEORIAS DE GAUGE</u>	6
1.0. Introdução às teorias de gauge	9
1.1. Espaços tangente e cotangente	14
1.2. Formas diferenciais	16
1.3. Grupos de Lie e álgebras de Lie	24
1.4. Espaços fibrados	28
1.5. Conexão e curvatura	38
1.6. Teorias de gauge - visão geométrica	49
<u>CAPÍTULO II. EQUAÇÃO DE DIRAC-KÄHLER</u>	60
2.1. Álgebra de Kähler-Atiyah e o teorema de Graf	62
2.2. Construção de Rabin da equação de Dirac-Kähler	68
2.3. Formulação de Becher-Joos	79
2.4. Simetria SU(4) para formas e espinores	83

<u>CAPÍTULO III. TEOREMA DO ÍNDICE E A ANOMALIA AXIAL</u>	91
3.1. Classes características	93
3.2. Operadores diferenciais elípticos	106
3.3. Teorema do índice de Atiyah-Singer	115
3.4. A anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw	129
3.5. Teorema do índice e anomalia axial para férmions de Dirac-Kähler	150
CONCLUSÕES	172
BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS	177

INTRODUÇÃO

Recentemente, muita ênfase tem sido dada aos aspectos geométricos e topológicos das teorias de gauge no contexto das teorias quânticas de campo relativísticas (1,2). A linguagem natural para se tratar estas questões é a da geometria diferencial moderna (3). Após o trabalho pioneiro de Lubkin (4,5,6), desde o início da década de 1970, vários autores têm ressaltado que uma teoria de gauge possui sua descrição matemática precisa em termos de geometria diferencial, através do conceito de espaço fibrado. Da geometria do espaço fibrado principal correspondente a uma dada teoria de gauge, infere-se que os campos de gauge estão relacionados à forma de conexão do fibrado, com a qual se constróem as derivadas covariantes de gauge (que aparecem na lagrangiana invariante de gauge e geram a interação entre os campos de gauge e outros campos dinâmicos da teoria). Também se constata que as intensidades de campo de gauge estão associadas à curvatura do fibrado principal (com a qual é construída a parte da lagrangiana de gauge puro).

A descrição de uma teoria de gauge para partículas elementares não estaria completa sem a inclusão dos chamados "campos de matéria", tanto bosônicos como fermiônicos. Estes são descritos como seções de fibrados vetoriais associados ao

fibrado principal, surgindo, então, geometricamente, a interação entre os campos de matéria e os campos de gauge. Um exemplo de campo de matéria bosônico é o campo de Higgs, escalar e complexo, importante no modelo eletrofraco de Glashow-Weinberg-Salam pelo efeito de geração de massa para os outros campos do modelo (ver, por exemplo, Abers e Lee ou Giambiagi); mais importantes são os campos fermiônicos, quarks e léptons, na cromodinâmica quântica, principal candidata a teoria das interações fortes, e em outros esquemas de unificação.

Férmions, em particular, podem ter uma descrição mais adequada à geometria diferencial que a formulação usual através de espinores. Os chamados "férmions geométricos" foram introduzidos, no início dos anos 60 pelo matemático Erich Kähler, em trabalhos sem grande repercussão na época, que mostram como as equações de Dirac poderiam ser obtidas a partir da soma coerente de formas diferenciais (tensores covariantes totalmente anti-simétricos), isto é, a soma de formas diferenciais dos vários graus, desde zero até o grau máximo, igual à dimensão do espaço-tempo. O correspondente ao operador de Dirac seria, para Kähler, o operador $d+\delta$, sendo d a derivada exterior e δ a coderivada. Um amplo desenvolvimento do formalismo de Kähler foi apresentado no trabalho de Becher e Joos, os quais deram a esta versão geométrica da equação

de movimento para férmions o nome de "equação de Dirac-Kähler".

Através de uma delicada análise da álgebra do espaço das formas diferenciais, que, além da usual álgebra de Grassmann, passa a incluir também uma álgebra de Clifford (denominada álgebra de Kähler-Atiyah), foi possível demonstrar (17) a relação entre as equações de Dirac-Kähler e Dirac. Resulta daí que Dirac-Kähler contém uma multiplicidade de férmions de Dirac igual a $2^{n/2}$, onde n é o número de dimensões do espaço-tempo.

Um dos pontos de interesse do formalismo de Kähler (o qual não desenvolveremos neste trabalho) é que esta multiplicidade se mantém inalterada quando se toma um espaço-tempo discretizado. É bastante conhecido, em teorias de gauge na rede, o problema da multiplicidade do espectro (18) fermiônico. Na formulação de Kogut-Susskind para férmions (19,20) na rede, em que esta multiplicidade é reduzida (embora não eliminada), o número de espécies fermiônicas ("sabores") restantes é igual ao dos férmions de Dirac-Kähler. Na verdade, (16) foi demonstrado por Becher e Joos que a equação de Dirac-Kähler na rede é equivalente ao esquema de Kogut-Susskind.

Embora a aplicação da formulação geométrica das teorias de gauge seja realizada em seu nível clássico, ela se torna adequada ao estudo de propriedades topológicas que sobrevivem à quantização e fornecem vínculos ao comportamento

da teoria, de natureza não perturbativa. Um bom exemplo é o do fenômeno da anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw (21-27) : a nível quântico, a corrente definida a partir da simetria $U(1)$ da transformação quiral dos campos fermiônicos (sem massa) numa teoria de gauge não é conservada. Este resultado constitui, na verdade, um vínculo não perturbativo à teoria quântica fornecido pela topologia do espaço fibrado de definição da teoria. Isto ocorre porque o termo que destrói a conservação da corrente quiral vem a ser um invariante topológico (e, também, um invariante de gauge), cujo estudo geral pode ser feito através das chamadas "classes características" do fibrado em questão. De fato, a própria equação da anomalia quiral, devidamente integrada em todo o espaço-tempo, se identifica com (28) o importante teorema do índice de Atiyah-Singer, que mostra como o espectro de soluções de um operador diferencial (no caso, o operador de Dirac covariante) é restringido pela topologia do espaço fibrado no qual ele atua.

O objetivo deste trabalho de tese é duplo: primeiramente, fazer um estudo detalhado da equação de Dirac-Kähler, sobretudo quanto à origem dos múltiplos férmions da teoria, problema de interesse para os desenvolvimentos na rede.

(16)

Becher e Joos mostraram a existência de uma simetria $SU(4)$ entre os diferentes "sabores". Uma análise análoga é realizada para a formulação espinorial da equação de Dirac.

O outro objetivo é obter a equação da anomalia quiral através do teorema do índice para o operador da equação de Dirac-Kähler covariante. Ocorre que este é conhecido como o operador de assinatura de Hirzebruch na literatura matemática (28) e seu teorema do índice em espaço-tempo plano resulta ser proporcional ao teorema do índice correspondente ao operador de Dirac. Pretende-se, aqui, estabelecer que esta relação de proporcionalidade está ligada ao número de férmions de Dirac contido na equação de Dirac-Kähler.

O trabalho está dividido em três partes. No Capítulo I são explicados, de maneira sucinta (sem o devido rigor matemático), os conceitos de geometria diferencial necessários ao desenvolvimento de uma teoria de gauge. Mostramos, no Capítulo II, a construção dos férmions de Dirac-Kähler e a discussão a respeito dos sabores e suas simetrias, tanto no formalismo de formas diferenciais quanto no espinorial. Finalmente, o Capítulo III é dedicado ao estudo do teorema do índice e da anomalia quiral para os férmions geométricos e sua comparação com os cálculos análogos com a equação de Dirac.

CAPÍTULO I

FATOS BÁSICOS DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS TEORIAS DE GAUGE

Desenvolveremos, neste capítulo, os principais elementos da descrição em termos de conceitos da geometria diferencial das teorias de gauge clássicas (não quânticas).^{*} Detalhes da matemática envolvida podem ser encontrados nos livros de Kobayashi-Nomizu (29), Steenrod (30), Spivak (31), Bishop-Crittenden (32). A interpretação geométrica das teorias de gauge clássicas é descrita com todo o detalhe nos artigos de revisão de Mayer (33), Eguchi, Gilkey e Hanson (34) e Daniel e Viallet (35). Ver, também, as referências (36-46,5).

A principal característica de uma teoria de gauge é o fato de que, nela, os campos físicos assumem valores em certos espaços "internos", os quais induzem graus de liberdade restritos a uma condição de simetria: no caso dos campos de gauge, este espaço interno seria o próprio grupo de simetria de gauge, G , um grupo de Lie; em se tratando de campos de matéria, seria um espaço vetorial, V , no qual supõe-se a atuação dos

^{*} O estudo da formulação geométrica das teorias de gauge se restringe a seu nível clássico, pois é neste nível que as propriedades geométricas se tornam evidentes. Ver, contudo, Doebner e Pasemann⁽⁴⁷⁾ e Pasemann⁽⁴⁸⁾.

elementos do grupo G . Na teoria de Yang-Mills, a simetria de gauge é implementada localmente, significando que o valor assumido pelos campos no espaço interno varia (suavemente) de ponto a ponto no espaço-tempo. Deste ponto de vista, o espaço natural de definição dos campos seria o produto cartesiano do espaço-tempo (ou, pelo menos, de uma região do espaço-tempo) com o espaço de simetria interna da teoria.

Na verdade, os campos estão definidos num espaço que é uma generalização do conceito de produto cartesiano, os espaços fibrados: principal, se o espaço interno for o grupo de gauge; ou associado, se o espaço interno for V . A geometria diferencial destes espaços fibrados, sendo não trivial (curvatura não nula, mesmo para espaço-tempo plano) nos leva a associar, devido a suas propriedades de transformação, o potencial de gauge com a forma de conexão do fibrado e sua intensidade de campo com a forma de curvatura. Uma das equações de movimento de Yang-Mills para o campo de gauge (sem interação com campos de matéria) surge como a identidade de Bianchi da geometria e a outra provém do princípio de ação aplicado à norma da forma de curvatura. Desta maneira, são obtidas as equações da teoria de gauge de Yang-Mills a partir de objetos geométricos definidos num espaço fibrado, composto pelo espaço-tempo e pelo espaço de simetria interna.

Faremos, a seguir, um resumo dos conceitos

matemáticos necessários para a descrição da geometria dos espaços fibrados e que serão úteis nos capítulos posteriores. Noções básicas de topologia e da teoria de variedades diferenciáveis podem ser encontradas na bibliografia já citada e não serão desenvolvidas aqui. Em princípio, o espaço-tempo deve ser considerado como uma variedade diferenciável real, de quatro dimensões, com métrica pseudo-riemanniana. Entretanto, as discussões relacionadas às partículas fermiônicas (no Capítulo II) e à anomalia axial (no Capítulo III) serão realizadas no espaço-tempo plano, já que não nos interessaremos pela influência da gravitação nestas questões. Tomamos, ainda, a continuação analítica usual ao espaço euclidiano, em que se substitui a coordenada temporal x^0 por $-ix^4$. Quando necessário, suporemos também uma compactação do espaço euclidiano a uma esfera.

Na seção introdutória 1.0, apresentamos os fatos principais de uma teoria de gauge. Na seção 1.1, iniciamos a descrição da geometria diferencial, com as noções de vetor tangente e de 1-forma; na seção 1.2, desenvolvemos a álgebra exterior das formas diferenciais e as principais conseqüências da atuação de operadores diferenciais sobre elas. Em seguida, damos as definições dos elementos dos fibrados principal e associado, na seção 1.3. A introdução de conexão e curvatura nos espaços fibrados constitui a seção 1.4 e encerramos o

capítulo reconstruindo uma teoria de campo de gauge a partir dos conceitos geométricos definidos, na seção 1.5.

1.0. Introdução às teorias de gauge.

O conceito de invariância de gauge é antigo: em 1929, Weyl analisou-o no contexto do eletromagnetismo clássico. As equações de Maxwell para os campos elétrico e magnético ($c=1$),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 4\pi\vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

de acordo com a teoria da relatividade restrita, podem ser expressas de forma invariante sob o grupo de Lorentz em termos de um tensor de segunda ordem, anti-simétrico, de componentes $F_{\mu\nu}$, $\mu, \nu=0, \dots, 3$ (tensor de intensidade de campo eletromagnético), em que $F_{0i} = -E_i$ e $F_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_k$, $i, j, k=1, 2, 3$:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 4\pi J_\mu \tag{0.2a}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \tag{0.2b}$$

onde J_μ são as componentes do 4-vetor corrente $J = (\rho, \vec{J})$. É muitas vezes conveniente utilizar a descrição da teoria através dos potenciais escalar e vetor, Φ e \vec{A} , definidos por

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (0.3a)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (0.3b)$$

que vêm a constituir um 4-vetor potencial eletromagnético $A=(\Phi, \vec{A})$, ou seja,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (0.4)$$

Observe-se, da equação acima, que o tensor de intensidade de campo permanece inalterado (e, conseqüentemente, também as equações de Maxwell) se, ao potencial A for acrescentado o gradiente de uma função escalar real (contínua e diferenciável) arbitrária, α :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (0.5)$$

A essa liberdade na definição do potencial dá-se o nome de "invariância de gauge" da teoria eletromagnética. No formalismo lagrangiano, as equações de Maxwell (0.2a) são deduzidas do princípio de mínima ação aplicado à densidade lagrangiana (invariante de gauge)

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (0.6)$$

(a eq. (0.2b) constitui, na verdade, uma identidade, a "identidade de Bianchi", que pode ser mostrada usando (0.4)). Segundo o teorema de Noether, a invariância de gauge de \mathcal{L}_{em} implica a conservação do 4-vetor corrente,

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad (0.7)$$

que inclui a conservação da carga elétrica.

Numa teoria que considere a interação de A_μ com

outros campos físicos, por exemplo, um campo escalar complexo, ϕ , as equações de movimento são deduzidas a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2. \quad (0.8)$$

A parte cinética de ϕ em \mathcal{L} é invariante sob uma transformação de fase arbitrária, ou seja, por um elemento do grupo unitário abeliano $U(1)$:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp(ie\alpha) \phi(x), \quad (0.9)$$

com α constante ("transformação de gauge global" ou "de primeira espécie"). No entanto, se tomarmos uma função α dependente da posição:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp(ie\alpha(x)) \phi(x), \quad (0.10)$$

podemos compensar o termo de não invariância da parte cinética de ϕ se, simultaneamente, realizarmos nos termos de interação de (0.8), a transformação (0.5) no potencial eletromagnético, com a mesma função α . A este conjunto de transformações damos o nome de "transformações de gauge locais" ou "de segunda espécie". A lagrangiana (0.8) é, portanto, também invariante de gauge. A combinação

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (0.11)$$

é chamada derivada covariante de gauge. Podemos utilizar o seguinte princípio para construir lagrangianas invariantes de gauge: substituir todas as derivadas ∂_μ da lagrangiana original por um acoplamento mínimo com o campo eletromagnético dado pela

derivada covariante D_μ ("princípio de gauge"). Observemos a propriedade seguinte:

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (0.12)$$

O próximo passo importante no desenvolvimento das teorias de gauge foi dado por Yang e Mills em 1954⁽⁵⁰⁾, ao generalizar a idéia de invariância de gauge para transformações dos campos por elementos de grupos de Lie não abelianos. Suponhamos que o campo escalar ϕ tome valores no espaço de representação de algum grupo de Lie, G , não abeliano, em geral. Escrevendo, neste caso, a derivada covariante de ϕ como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi, \quad (0.13)$$

o potencial de campo de gauge, A_μ , tomará valores na álgebra de Lie, \mathcal{G} , do grupo considerado. \mathcal{G} possui a estrutura de espaço vetorial de dimensão finita, do qual os geradores infinitesimais do grupo, T^a , $a=1, \dots, \dim \mathcal{G}$, formam uma base. Assim, o potencial terá a expansão

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a, \quad (0.14)$$

em que T^a satisfaz a relação

$$[T^a, T^b] = c^{abc} T^c, \quad (0.15)$$

onde c^{abc} são as constantes de estrutura do grupo. Desta maneira, sob uma transformação de gauge, para $g \in G$ (identificando o elemento do grupo com sua imagem no espaço de representação),

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = g(x)\phi(x), \quad (0.16)$$

para que a eq. (0.13) possua covariância de gauge, isto é,

$$D'_\mu \phi'(x) = g(x) D_\mu \phi(x), \quad (0.17)$$

é necessário que o potencial $A_\mu(x)$ se transforme como

$$A'_\mu(x) = g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x) + \partial_\mu g g^{-1}(x). \quad (0.18)$$

O campo de gauge de Yang-Mills, dado em termos de seu tensor de intensidade de campo, $F_{\mu\nu}$, é definido pela não comutatividade do operador de derivada covariante, (0.13):

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}, \quad (0.19)$$

ou seja,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (0.20)$$

O tensor $F_{\mu\nu}$ também toma valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G e, portanto, possui uma expansão na base $\{T^a\}$. Suas componentes se escrevem, pois,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + c^{bca} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (0.21)$$

Sob uma transformação de gauge por um elemento $g(x) \in G$, $F_{\mu\nu}$ é covariante:

$$F'_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1}. \quad (0.22)$$

Uma das equações de movimento para o campo de Yang-Mills é a versão covariante da identidade de Bianchi (0.2b):

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (0.23)$$

ou, definindo o tensor dual $*F_{\mu\nu}$,

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (0.24)$$

a eq. (0.23) se escreve como

$$D_\mu *F^{\mu\nu} = 0. \quad (0.25)$$

A outra equação de movimento de Yang-Mills decorre de princípio variacional. A generalização natural da densidade lagrangiana (0.6) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \end{aligned} \quad (0.26)$$

Com um 4-vetor corrente $J = \delta\mathcal{L}/\delta A^\mu$, as equações de Euler-Lagrange para (0.26) fornecem

$$D_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu. \quad (0.27)$$

Maiores detalhes podem ser obtidos em vários artigos (7,51,52) de revisão.

1.1. Espaços tangente e cotangente.

Consideremos, inicialmente, uma variedade diferenciável n -dimensional riemanniana, M , a qual pode ser recoberta por conjuntos abertos (vizinhanças) que sejam homeomorfos a subconjuntos abertos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , definindo, assim, um conjunto de coordenadas $\{x^\mu\}$, $\mu=1,\dots,n$, em cada vizinhança, bem como a regra de transformação entre coordenadas de vizinhanças não disjuntas. Em cada ponto da variedade M , serão definidos os vários "objetos geométricos": vetores, formas, tensores, etc.

Seja $F(M)$ o conjunto de todas as funções reais C^∞ sobre M . Para cada curva C sobre M que passa por um ponto $p \in M$, definimos como vetor em p o operador de derivada direcional ao longo de C . Assim, para uma função qualquer $f \in F(M)$, o vetor $u(p)$, tangente à curva C em p , é dado por

$$u(p)f \equiv \partial_{u(p)} f. \quad (1.1)$$

O espaço vetorial n -dimensional gerado pelo conjunto de todos os operadores de derivação direcional em p denomina-se o espaço tangente à variedade M no ponto p e é denotado por $T_p(M)$. Introduzindo, numa vizinhança de p , um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, $\mu=1, \dots, n$, o conjunto de n vetores linearmente independentes $\{\partial_\mu\} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$, $\mu=1, \dots, n$, forma uma base para este espaço e um vetor tangente $u(p)$ obtém uma realização em coordenadas:

$$u(p) = u^\mu(p) \partial_\mu. \quad (1.2)$$

Um campo vetorial sobre M é definido como uma escolha de um vetor tangente para cada ponto de M .

O espaço dos covetores em $p \in M$ constitui um espaço vetorial n -dimensional, o espaço cotangente $T_p^*(M)$, dual a $T_p(M)$. Isto é, um elemento σ de $T_p^*(M)$, também denominado uma 1-forma, é um operador linear σ que, atuando sobre um vetor $u \in T_p(M)$, produz um número real:

$$\sigma(u) \equiv \langle \sigma, u \rangle = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Em particular, se $\{e_\mu\}$ constituir uma base para $T_p(M)$ e a base

$\{\omega^\mu\}$ de $T_p^*(M)$, dual à $\{e_\mu\}$, elas satisfarão a condição

$$\langle \omega^\mu, e_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \quad (1.4)$$

Denotaremos a base dual à $\{\partial_\mu\}$ pelos elementos diferenciais $\{dx^\mu\}$ e, portanto, temos

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \quad (1.4')$$

Nesta base, uma 1-forma genérica σ se escreve

$$\sigma = \sigma_\mu dx^\mu. \quad (1.5)$$

1.2. Formas diferenciais.

Muitos tensores em física exibem a propriedade de anti-simetria por uma permutação ímpar de seus índices. Daí a utilidade de objetos tais como as formas diferenciais e do cálculo (diferencial e integral), denominado "exterior" sobre eles, introduzido por Elie Cartan.*

Definimos, primeiramente, o produto exterior de duas 1-formas α e β como o produto tensorial anti-simetrizado:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad (2.1a)$$

$$= -\beta \wedge \alpha. \quad (2.1b)$$

Em termos de componentes relacionadas a uma base $\{dx^\mu\}$,

* Referências clássicas mostrando a conexão entre formas e grandezas físicas incluem Flanders⁽⁵³⁾, Misner, Thorne e Wheeler⁽⁵⁴⁾, Arnol'd⁽⁵⁵⁾.

$\mu=1, \dots, n$:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2!} (\alpha_\mu \beta_\nu - \alpha_\nu \beta_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.2)$$

Vemos que se trata de um objeto cujas componentes na base $\{dx^\mu \wedge dx^\nu\}$, $\mu, \nu=1, \dots, n$, constituem um tensor anti-simétrico de segunda ordem. Este objeto se denomina, pois, uma 2-forma. A construção pode ser generalizada, tomando o produto exterior de várias 1-formas, criando, assim, objetos sempre totalmente anti-simétricos. Em geral, uma k-forma será escrita

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.3a)$$

ou

$$\alpha = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.3b)$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k.$$

Observemos que, numa variedade n-dimensional, o grau máximo de uma forma é $k=n$, já que o produto exterior de k 1-formas, para $k > n$, é sempre nulo, devido à anti-simetria total do tensor obtido a cada produto.

O produto exterior de uma p-forma α e uma q-forma β resulta, portanto, numa $(p+q)$ -forma e possui a seguinte propriedade:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (2.4)$$

O diferencial de uma função $f \in F(M)$, num ponto p da variedade M, denotado por $df|_p$, é dado por um mapa linear do espaço tangente em p na reta real,

$$df|_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para qualquer vetor $u \in T_p(M)$, obtenhamos a derivada direcional de f na direção de u :

$$df|_p(u) = \langle df, u \rangle \equiv \partial_u f. \quad (2.5)$$

Assim, numa base coordenada $\{dx^\mu\}$ em torno de p , temos, usando (1.4'):

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_p dx^\mu \equiv \partial_\mu f \Big|_p dx^\mu. \quad (2.6)$$

O resultado é uma 1-forma, que dá o gradiente de f . Considerando a união de todos os espaços tangentes a M para cada ponto p de M ,

$$T(M) = \bigcup_p T_p(M)$$

o diferencial df de f sobre M é um mapa linear

$$df: T(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

diferenciável e linear em cada espaço tangente $T_p(M)$.

Este é um exemplo de uma 1-forma diferencial: uma 1-forma (algébrica) em $T_p(M)$, diferenciável em p , no sentido acima. Formas diferenciais de graus superiores são construídas a partir de produtos exteriores de 1-formas diferenciais, tal como em (2.3).

Denotando por $\Lambda^k(p)$, $k=0, \dots, n$, o conjunto de todas as k -formas diferenciais em p , este é um espaço vetorial de dimensão $n!/k!(n-k)!$. O espaço $\Lambda^0(p)$, das 0-formas em p , é o espaço das funções suaves de M em p . Logo, $\Lambda^0(p) \equiv F(M)$. O

espaço

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \dots \oplus \Lambda^n \quad (2.7)$$

constitui uma álgebra graduada e é denominado a álgebra exterior das formas diferenciais.

Nos capítulos concernentes à equação de Dirac-Kähler, lidaremos com formas diferenciais gerais ϕ , elementos gerais da álgebra Λ^* :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots + \phi^{(n)} \\ &= f(p) + f_{\mu}(p) dx^{\mu} + \frac{1}{2!} f_{\mu\nu}(p) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} + \dots + \\ &\quad + f_{i_1 \dots i_n}(p) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde se vê que cada $\phi^{(k)} \in \Lambda^{(k)}(p)$.

Como já vimos, o diferencial total de uma 0-forma (função escalar) é uma 1-forma. Obtemos, em geral, uma $(k+1)$ -forma a partir de uma k -forma, $k > 0$, através de um operador linear $d: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$, denominado diferenciação exterior. Numa base coordenada, sua atuação sobre uma k -forma arbitrária $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ é a seguinte:

$$d\alpha = \frac{1}{(k+1)!} \partial_{\nu} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{\nu} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.9)$$

Esta operação satisfaz as propriedades:

i) se α for uma k -forma e β uma forma de qualquer grau,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta; \quad (2.10)$$

ii) (Lema de Poincaré) para qualquer k -forma α , $k=0, \dots, n$,

$$d(d\alpha) \equiv d^2\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Numa variedade riemanniana, a existência de um tensor

métrico g nos permite definir a operação de dualidade de formas, denotada por $*$, a estrela de Hodge. Observando a igualdade de dimensões de Λ^k e Λ^{n-k} , a $*$ de Hodge constitui um mapa linear entre estes dois espaços:

$$*: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

com as seguintes propriedades:

i) atuando numa k -base coordenada:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{1}{(n-k)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_k i_{k+1} \dots i_n} dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}. \quad (2.12)$$

onde ε é o objeto totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, de modo que, para uma k -forma α , dada por (2.3),

$$*\alpha = \frac{1}{k!(n-k)!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}. \quad (2.13)$$

ii) A inversa de $*$, $*^{-1}$, quando atua sobre uma k -forma α , é $(-1)^{k(n-k)} *$; portanto, $**^{-1}\alpha = \alpha = (-1)^{k(n-k)} **\alpha$, donde

$$**\alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha. \quad (2.14)$$

iii) Sejam duas k -formas α e β . Construimos a n -forma

$$\alpha \wedge *\beta = k! \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta^{i_1 \dots i_k} \varepsilon, \quad (2.15)$$

onde ε é o elemento de volume n -dimensional:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon. \quad (2.16)$$

De (2.15), temos que

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha \quad (2.17)$$

$$\alpha \wedge *\alpha = \|\alpha\|^2 \varepsilon, \quad (2.18)$$

onde $\|\alpha\| = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k}$ é a norma da k -forma α .

Isto nos permite definir o produto interno entre duas

k-formas α e β (supondo M compacta) como

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta, \quad (2.19)$$

com as propriedades:

$$i) \quad (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \quad (2.20)$$

$$ii) \quad (*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta) \quad (2.21)$$

$$iii) \quad (\alpha, \alpha) \geq 0; \quad (\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \quad (2.22)$$

Introduzimos, agora, um outro operador linear, $\delta: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}$, que seja o adjunto do operador d com respeito ao produto interno (2.19). Para uma k -forma α e uma $(k-1)$ -forma β ,

$$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta). \quad (2.23)$$

Como $d(\beta \wedge * \alpha) = d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d* \alpha$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int d(\beta \wedge * \alpha) = (d\beta, \alpha) + (-1)^{k-1} (-1)^{(n-k+1)(k-1)} \int \beta \wedge * d* \alpha \\ &= (d\beta, \alpha) + (\beta, (-1)^{kn+n} * d* \alpha) \end{aligned} \quad (2.24)$$

e deduzimos que o operador adjunto (ou codiferencial) se escreve

$$\delta = (-1)^{kn+n+1} * d*. \quad (2.25)$$

Como nos interessaremos sempre por variedades de dimensão par, (2.25) se reduz a

$$\delta = - * d*. \quad (2.26)$$

As propriedades do codiferencial são:

$$i) \quad \delta\delta = \delta^2 = 0 \quad (2.27)$$

$$ii) \quad \delta f = 0, \quad f \in \Lambda^0 \quad (2.28)$$

$$\text{iii) } * \delta d = d \delta *; \quad * d \delta = \delta d * \quad (2.29)$$

$$\text{iv) } d * \delta = \delta * d = 0. \quad (2.30)$$

Definimos, ainda, o operador de Laplace-Beltrami (ou laplaciano) sobre formas da variedade M como um mapa linear

$$\Delta \equiv (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^p, \quad p = 0, \dots, n, \quad (2.31)$$

com as propriedades

$$\text{i) } d\Delta = \Delta d = d\delta d \quad (2.32)$$

$$\text{ii) } \delta\Delta = \Delta\delta = \delta d \delta \quad (2.33)$$

$$\text{iii) } *\Delta = \Delta*. \quad (2.34)$$

Soluções do laplaciano, $\Delta\alpha = 0$, são ditas harmônicas.

Considerando uma k -forma α , temos que

$$\begin{aligned} (\alpha, \Delta\alpha) &= (\alpha, d\delta\alpha + \delta d\alpha) = (\alpha, d\delta\alpha) + (\alpha, \delta d\alpha) \\ &= (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Portanto, α será uma forma harmônica se, tanto $d\alpha$ quanto $\delta\alpha$ forem nulos.

Há dois subespaços especiais de Λ^k . O primeiro é o das k -formas que satisfazem

$$d\alpha = 0. \quad (2.36)$$

Estas formas são ditas fechadas. O segundo subespaço é o de formas que se escrevem, globalmente, como a derivada exterior de formas de um grau inferior, i.e., para uma k -forma α e uma $(k-1)$ -forma β ,

$$\alpha = d\beta. \quad (2.37)$$

Neste caso, α é dita uma forma exata. Naturalmente, dada a propriedade $d^2=0$, toda forma exata é, também, fechada. (Analogamente, definem-se formas cofechadas e co-exatas, em relação ao operador δ).

Um importante teorema devido a Hodge estabelece que qualquer k -forma α pode ser unicamente decomposta como soma de uma forma exata, uma co-exata e uma harmônica, ou seja, para uma $(k-1)$ -forma β e uma $(k+1)$ -forma γ ,

$$\alpha = d\beta + \delta\gamma + \omega, \quad (2.38)$$

onde a k -forma ω satisfaz $\Delta\omega=0$.

Introduzimos, enfim, os grupos de co-homologia de de Rham da variedade M . Sejam $Z^k(M)$ o espaço das k -formas fechadas e $B^k(M)$ o espaço das k -formas exatas sobre M . Como toda forma exata é necessariamente fechada, $B^k(M) \subset Z^k(M)$, e definimos o k -ésimo grupo de co-homologia de de Rham de M , $\mathcal{H}^k(M)$, como

$$\mathcal{H}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M). \quad (2.39)$$

Os elementos de $\mathcal{H}^k(M)$ são classes de equivalência, denotadas por \sim , de k -formas fechadas que diferem apenas por formas exatas, i.e., para α e β k -formas sobre M ,

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha = \beta + d\gamma, \quad (2.40)$$

γ sendo uma $(k-1)$ -forma. Esta classe de equivalência, chamada k -ésima classe de co-homologia, induz sobre $\mathcal{H}^k(M)$ as estruturas de grupo e espaço vetorial. Portanto, a dimensão de $\mathcal{H}^k(M)$ é o

número de classes de co-homologia não triviais de formas fechadas linearmente independentes, que é um número finito se a variedade M for compacta, denominado k -ésimo número de Betti de M , b_k :

$$b_k = \dim \mathcal{H}^k(M). \quad (2.41)$$

A quantidade

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k \quad (2.42)$$

é conhecida como o característico de Euler de M .

1.3. Grupos de Lie e álgebras de Lie.

O grupo de gauge, G , é sempre suposto ser um grupo de Lie, que, além das propriedades algébricas de grupo, também possui as propriedades topológicas de uma variedade diferenciável riemanniana. Nele, as operações de grupo atuam diferencialmente, i.e., mapas

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

são de classe C .

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial L , no qual é definido um mapa bilinear, dito comutador,

$$[,] : L \times L \rightarrow L$$

que satisfaz as propriedades

$$i) [X, Y] = -[Y, X] \quad (3.2)$$

ii) (identidade de Jacobi):

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (3.3)$$

para $X, Y, Z \in L$.

Uma translação à esquerda no grupo de Lie G por um de seus elementos, a , é definida como um mapa $L_a: G \rightarrow G$ tal que $L_a(g) = ag$. Portanto, dado um vetor $X(g)$, tangente à variedade G no ponto g , i.e., $X(g) \in T_g(G)$, construímos outro vetor tangente, agora no ponto transladado ag , utilizando o mapa diferencial de L_a :

$$dL_a: T_g(G) \rightarrow T_{ag}(G)$$

de modo que

$$dL_a X(g) = X(L_a g) = X(ag). \quad (3.4)$$

Dizemos, então, que um campo vetorial X sobre G é invariante à esquerda se, para todo $a \in G$ e todo $g \in G$, valer a eq. (3.4). Em particular, se $g = e =$ identidade do grupo,

$$dL_a X(e) = X(a), \quad \forall a \in G. \quad (3.4')$$

(Definições análogas podem ser feitas para translações à direita R_a em G).

Define-se a álgebra de Lie \mathfrak{g} do grupo de Lie G como a álgebra de Lie de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G . Sendo G um grupo k -dimensional, \mathfrak{g} será um espaço vetorial k -dimensional isomorfo ao espaço tangente a G no elemento identidade, $T_e(G)$. A definição é consistente com

(3.2) e (3.3) pois o comutador de dois campos vetoriais invariantes à esquerda é, também, um campo vetorial invariante à esquerda: se $u=dL_a u$, $v=dL_a v$, então

$$dL_a [u, v] = [dL_a u, dL_a v] = [u, v]. \quad (3.5)$$

Seja $\{X_i\}$, $i=1, \dots, k=\dim \mathfrak{g}$ uma base para a álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então existem números c_{ij}^k tais que

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k. \quad (3.6)$$

Estes números são denominados constantes de estrutura da álgebra de Lie com relação à base $\{X_i\}$. As propriedades (3.2) e (3.3) do comutador se refletem nas constantes de estrutura:

$$\begin{aligned} \text{i) } [X_i, X_j] + [X_j, X_i] = 0 &\Rightarrow c_{ij}^k X_k + c_{ji}^k X_k = 0 \\ &\Rightarrow c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ii) identidade de Jacobi \Rightarrow

$$\Rightarrow c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0. \quad (3.8)$$

Uma álgebra de Lie é dita abeliana se todas as suas constantes de estrutura forem nulas, ou seja,

$$[X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (3.9)$$

Consideremos, agora, o automorfismo interno de G dado

por

$$\begin{aligned} L_a R_a^{-1} : G &\rightarrow G \\ \mathfrak{g} &\mapsto a \mathfrak{g} a^{-1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seu diferencial $d(L_a R_a^{-1})$ é, portanto, um mapeamento de $T_e(G)$ em si próprio. A menos de um isomorfismo, temos $T_e(G) \cong \mathfrak{g}$. Assim,

definimos

$$Ad_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

como tal que

$$Ad_a = d(L_a R_a^{-1})(e). \quad (3.11)$$

Sendo $GL(\mathfrak{g})$ o espaço vetorial das transformações lineares de \mathfrak{g} ,

o mapa

$$\begin{aligned} Ad: G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad_g \end{aligned} \quad (3.12)$$

é denominado a representação adjunta de G em \mathfrak{g} . Seu diferencial constituirá a representação adjunta de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} ad = d(Ad): \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}(k, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \\ X &\mapsto ad_X \end{aligned} \quad (3.13)$$

e é tal que

$$ad_X Y = [X, Y]. \quad (3.14)$$

O centro de um grupo (qualquer) é definido como o conjunto dos elementos do grupo que comutam com todos os elementos do grupo. No caso de um grupo de Lie G , seu centro será dado pelo núcleo do homomorfismo $g \mapsto \text{aga}^{-1}$.

De uma maneira análoga ao caso de campos vetoriais, definimos formas diferenciais invariantes à esquerda. Para uma 1-forma $\alpha(e) \in T_e^*(G)$, construímos a 1-forma invariante à esquerda $\alpha(g) \in T_g^*(G)$, denominada forma de Maurer-Cartan, através do mapa transposto (ou "pullback"):

$$L_g^* \alpha(g) = \alpha(e) \quad (3.15)$$

ou

$$L_{g^{-1}}^* \alpha(e) = \alpha(g). \quad (3.15')$$

O conjunto de todas as 1-formas invariantes à esquerda sobre G forma o espaço vetorial \mathfrak{g}^* , dito espaço dual de \mathfrak{g} . Então, para

$X \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $\alpha(X) = \text{cte}$. Se G for o grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$, ou um subgrupo seu, os elementos de sua álgebra de Lie serão as matrizes $n \times n$ não singulares e a forma de Maurer-Cartan se torna

$$\alpha = \bar{g}^{-1} dg, \quad g \in G. \quad (3.16)$$

Seja $\Lambda^q(p)$ o espaço das q -formas no ponto p da variedade M . Consideremos, também, um espaço vetorial k -dimensional V . Uma q -forma diferencial com valores em V no ponto p será um elemento de $\Lambda^q(p) \otimes V$, que também é um espaço vetorial. Sendo $\{e_i\}$, $i=1, \dots, k$, uma base para V , uma q -forma α , com valores em V , será escrita como

$$\alpha = \alpha^i \otimes e_i, \quad \alpha^i \in \Lambda^q(p), \quad (3.17)$$

ou

$$\alpha = \alpha^i_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \otimes e_i. \quad (3.17')$$

Se o espaço vetorial V em questão for a álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G , teremos definido uma q -forma com valores em \mathfrak{g} . O comutador de duas formas, α e β , com valores em \mathfrak{g} se escreve, portanto:

$$[\alpha, \beta] = [\alpha^i X_i, \beta^j X_j] = \alpha^i \wedge \beta^j [X_i, X_j] = \alpha^i \wedge \beta^j c^k_{ij} X_k, \quad (3.18)$$

onde $\{X_i\}$ constitui uma base de \mathfrak{g} .

1.4. Espaços fibrados.

Já mencionamos que a característica de uma teoria de

gauge é a existência de um espaço de simetria "interno". Podemos imaginar uma cópia deste espaço para cada ponto do espaço-tempo, de modo que os campos físicos, além de variarem de ponto a ponto, também possam assumir diferentes valores no espaço interno. Geometricamente, isto nos levaria a pensar num produto cartesiano topológico entre o espaço-tempo e o espaço interno. No entanto, para descrevermos corretamente uma teoria de gauge com base na geometria diferencial, necessitamos de uma noção que generaliza o produto cartesiano, que é a de um espaço fibrado.

Um espaço fibrado é dado por uma tripla $\lambda = (E, B, \pi)$, que consiste de duas variedades regulares, E e B , e de um mapa contínuo sobrejetor $\pi: E \rightarrow B$. A figura básica que representa este fibrado é a seguinte (Fig. 1.1):

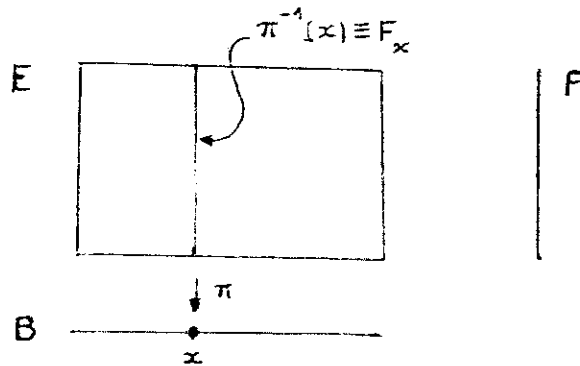


Fig. 1.1. Diagrama básico de espaço fibrado.

B é denominado espaço-base e E espaço total do fibrado. π é a projeção do espaço total E sobre o espaço-base B .

A imagem inversa $\pi^{-1}(x)$, $x \in B$, forma uma subvariedade fechada de E , denominada a fibra sobre x . Os espaços definidos por $\pi^{-1}(x)$, para todo $x \in B$, serão considerados todos difeomorfos a uma variedade F , dita fibra típica. A fibra sobre x será, então, denotada por F_x . No caso em que F for dotado de uma estrutura de espaço vetorial, diremos que se trata de um fibrado vetorial.

O clássico exemplo que ilustra um caso de espaço fibrado cujo espaço total não é um simples produto topológico entre o espaço-base e a fibra típica é o da faixa de Möbius, comparada com o cilindro. Um cilindro pode ser obtido por colagem de uma fita de papel consigo mesma, unindo as pontas, ou seja, o produto cartesiano de uma 1-esfera (círculo) S^1 e um segmento de reta I ; a tripla λ é, pois, representada neste exemplo por $(S^1 \times I, S^1, \pi)$, com a projeção atuando sobre S^1 . A faixa de Möbius também pode ser construída pela colagem das pontas da fita, mas em posição invertida. O espaço total, neste caso, não pode mais ser um produto de dois espaços, já que a projeção leva ao mesmo espaço-base: há que se levar em conta a inversão da fita. Entretanto, localmente, isto é, para um subconjunto aberto $U \subset S^1$ do espaço-base, o produto $U \times I$ descreve um trecho da faixa de Möbius. Desde que o espaço-base possa ser dado como a união de vários abertos (o que é o caso de S^1), os vários produtos $U \times I$ correspondentes descrevem a

faixa de Möbius integralmente.

Fibrados cujos espaços totais podem ser globalmente dados como um produto são denominados triviais. Para os demais, exige-se a condição de trivialidade local, ou seja, que o espaço-base pode ser inteiramente recoberto por abertos; o produto de cada um destes com a fibra típica dará uma parte do espaço total.

Usualmente, os fibrados que aparecem nas teorias de gauge são triviais; no entanto, em casos de campos com singularidades, tais como os monopólos magnéticos, ou os instantons, devemos utilizar fibrados não triviais, pois, subdividindo a variedade-base em diversas regiões, podemos, por transformações de gauge, descrever os campos sem que surjam as singularidades em qualquer das regiões $(6,34)$.

Para descrevermos um campo de gauge (clássico), necessitamos de fibrados com uma estrutura mais sofisticada. Assim, definimos:

Um espaço fibrado principal consiste de uma quádrupla (P, M, G, π) , que satisfaz os seguintes requisitos:

(a) P e M são variedades diferenciáveis (espaço total e espaço-base);

(b) G é um grupo de Lie, denominado grupo de estrutura, que atua livremente (i.e., tal que se $R_a(p)=p$, então a é o elemento identidade de G) sobre P à direita: para $p \in P$, $a \in G$, temos

$$p \mapsto R_a(p) = pa;$$

(c) $\pi : P \rightarrow M$ é um mapa C^∞ sobrejetor de projeção;

(d) é válida a seguinte condição de trivialidade local, ou seja, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta U de x e existe um difeomorfismo

$$k: U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U) \quad (4.1)$$

tal que, para cada ponto $u \in U$ e elementos $g, g' \in G$, temos

$$\pi(k(u, g)) = u \quad (4.2)$$

$$k(u, gg') = k(u, g)g', \quad (4.3)$$

esta última equação mostrando como g' atua no elemento $k(u, g)$ de P . A variedade $P_x = \pi^{-1}(x)$, a fibra sobre x , é, por esta construção, isomorfa ao grupo de estrutura G . Assim, o espaço tangente a qualquer fibra é isomorfo à álgebra de Lie \mathfrak{g} de G .

É preciso, ainda, que o fibrado P possa ser composto pela "colagem" dos subfibrados triviais definidos localmente

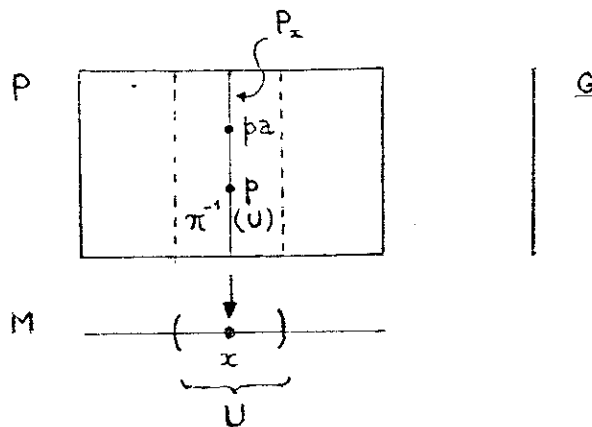


Fig. 1.2. Diagrama de espaço fibrado principal.

sobre vizinhanças de M . Suponhamos, então, que a variedade-

base M seja recoberta (i.e., consiste da união de) por conjuntos abertos $\{U_i\}$, para os quais existem os mapas de trivialização $k_i: U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$. Se considerarmos um ponto fixo $u \in U_i$, k_i torna-se um mapa de G em $\pi^{-1}(u)$, que denotaremos por $k_{i,u}$. Desta maneira, para cada ponto u fixo, na superposição de duas vizinhanças U_i e U_j , de interseção não nula, definimos as funções de transição

$$\psi_{ij,u} = k_{i,u}^{-1} k_{j,u}: G \rightarrow G. \quad (4.4)$$

Em todo o conjunto $U_i \cap U_j$, a função $\psi_{ij}: U_i \times G \rightarrow U_j \times G$ relaciona, pois, a estrutura local de produto cartesiano sobre U_i à sobre U_j . Por (4.4), vemos que ψ_{ij} toma valores em G . Além disso, satisfaz as chamadas condições de cociclo:

$$\psi_{ii} = \text{id}_{\pi^{-1}(U_i)} \quad (4.5a)$$

$$\psi_{ij} \psi_{jk} = \psi_{ik}, \quad \forall u \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (4.5b)$$

Nas teorias de gauge, fazemos, portanto, as seguintes identificações:

$$\text{espaço-base} \equiv \text{espaço-tempo}$$

grupo de estrutura (fibra típica) \equiv grupo de simetria de gauge.

Uma seção de um fibrado principal é um mapa C^∞

$$S: M \rightarrow P \quad (4.6)$$

tal que

$$\pi \circ S = \text{id}_M, \quad (4.7)$$

em que id_M significa o mapa identidade sobre M . Em termos locais, a seção é dada por

$$s(x) = (x, g(x)) \quad (4.8)$$

onde g é uma função de $x \in C^\infty$ com valores em G , definida numa vizinhança de x . Se considerarmos duas vizinhanças abertas $U, U' \subset M$, com interseção não nula e duas seções locais s, s' definidas em U e U' , respectivamente, na região de interseção $U \cap U'$ existe uma função g que, para cada $x \in U \cap U'$, é atribuído um elemento do grupo G que transforma s em s' .

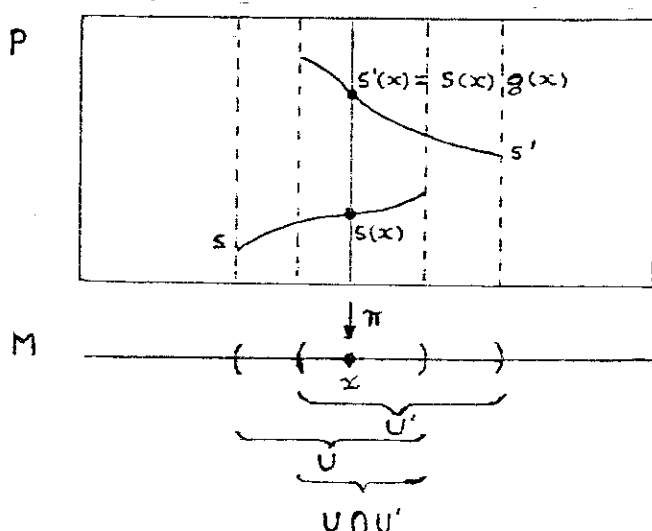


Fig. 1.3. Seções de um fibrado principal.

Fisicamente, a escolha de uma seção local de um fibrado principal equivale a uma escolha de gauge e transformações de gauge locais são entendidas segundo o mecanismo de troca de vizinhança descrito acima.

Como já mencionamos, os fibrados vetoriais são aqueles nos quais a fibra típica é um espaço vetorial. Ou seja, o espaço total E sobre M é formado pela união disjunta das fibras $\pi^{-1}(x)$ sobre cada ponto x de M , que são espaços

vetoriais. Seções neste tipo de fibrado são definidas de maneira análoga a (4.6) e (4.7) e satisfazem

$$(S_1 + S_2)(x) = S_1(x) + S_2(x) \quad (4.9a)$$

$$(\lambda S)(x) = \lambda S(x). \quad (4.9b)$$

Neste caso, o grupo de estrutura será um subgrupo do grupo linear geral, $GL(n, \mathbb{R})$, ou $GL(n, \mathbb{C})$.

Introduzimos na seção 1.1 os espaços tangente e cotangente num determinado ponto x da variedade M , $T_x(M)$ e $T_x^*(M)$. Os fibrados tangente e cotangente sobre M , $T(M)$ e $T^*(M)$, serão definidos como a união disjunta dos espaços tangente e cotangente, respectivamente, de todos os pontos de M . Estes são fibrados vetoriais reais cujas fibras, num dado ponto x de M , são os seus respectivos espaços tangente, $T_x(M)$, e cotangente, $T_x^*(M)$. Bases canônicas para estes fibrados podem ser determinadas localmente pelas coordenadas $\{x^\mu\}$ de M : $\{\partial_\mu\}$ para $T(M)$ e $\{dx^\mu\}$ para $T^*(M)$, $\mu=1, \dots, n=\dim M$. Também utilizamos os fibrados tangente e cotangente complexificados, $T(M) \otimes \mathbb{C}$ e $T^*(M) \otimes \mathbb{C}$, onde se supõe que os coeficientes das bases acima podem assumir valores complexos.

As seções do fibrado tangente formam, portanto, campos vetoriais diferenciáveis sobre a variedade M , enquanto que as do fibrado cotangente formam um campo de 1-formas diferenciais sobre M . Fibrados tensoriais são construídos através da união de produtos tensoriais (de várias ordens) em

cada ponto de M . Assim, um fibrado tensorial de ordem (r,s) sobre M será

$$T_S^r(M) = \bigcup_{x \in M} T_S^r(x),$$

em que

$$T_S^r(x) = \underbrace{T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M)}_{r \text{ vezes}} \otimes \underbrace{T_x^*(M) \otimes \dots \otimes T_x^*(M)}_{s \text{ vezes}}.$$

As seções de $T(M)$ definirão campos tensoriais de ordem (r,s) .

Geralmente trabalhamos com um grupo de gauge G através de uma representação de seus elementos em algum espaço vetorial (de dimensão finita) V . Desse ponto de vista, sendo G o grupo de estrutura de um fibrado principal P , com projeção $\pi: P \rightarrow M$, seria interessante construirmos um outro tipo de fibrado sobre M , cujas fibras fossem todas isomorfas a V , e que mantivesse as propriedades (pelo menos, as topológicas) do fibrado P . Introduzimos, assim, os fibrados vetoriais associados.

Seja, então, $r: G \rightarrow GL(V)$ o mapa de representação, através do qual o grupo G atua sobre V à esquerda. Consideremos o produto $P \times V$ e definamos sobre ele a ação de G à direita: para $(p,v) \in P \times V$, $g \in G$, tal que $\pi(p) = x$, temos

$$(p,v)g = (pg, r(g^{-1})v), \quad (4.10)$$

que é outro ponto de $P \times V$. Esta ação determina uma relação de equivalência entre os pontos de $P \times V$:

$$(p,v) \approx (p',v') \text{ se e só se } (p',v') = (p,v)g.$$

Assim, podemos formar o espaço quociente de $P \times V$ sob esta

equivalência (espaço das órbitas):

$$E = (P \times V) / G.$$

Se associarmos a cada ponto de $P \times V$ a sua órbita, obtemos um fibrado principal $P \times V$ com base E , grupo de estrutura G e projeção

$$\begin{aligned} \tau: P \times V &\rightarrow (P \times V) / G = E \\ (p, v) &\mapsto (p, v)G, \end{aligned} \quad (4.11)$$

que é uma variedade localmente isomorfa ao produto de uma vizinhança $U \subset M$ com V . Logo, $E = (P \times V) / G$ pode ser considerado um espaço fibrado sobre M , com fibra típica V e com mapa de

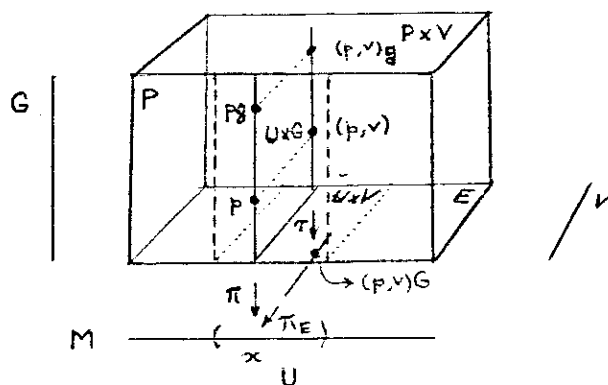


Fig. 1.4. Diagrama de fibrado vetorial associado.

projeção $\pi_E: E \rightarrow M$, tal que

$$\pi_E(\tau(p, v)) = \pi(p) = x.$$

Temos, para E , a propriedade de trivialidade local: para cada ponto $x \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$, para a qual $\pi^{-1}(U) \subset P$ é difeomorfo a $U \times G$. Portanto, devido a (4.11), $\pi_E^{-1}(U) \subset E$ é

difeomorfo ao produto $U \times V$. Ou seja, a trivialidade local de P implica a trivialidade local de E .

O fibrado E é, pois, denominado o fibrado vetorial associado ao principal P .

As seções de E são analogamente definidas como mapas diferenciáveis de valor vetorial $s_E: M \rightarrow E$, dados pelo par $(x, s_E(x))$, tais que $\pi_E(s_E(x)) = x$. O espaço das seções de um fibrado associado E constitui, portanto, um espaço vetorial, que denotaremos por $\Gamma(E)$.

Com o formalismo desenvolvido até aqui, podemos já fazer a definição do que seja um campo clássico: é uma seção de um fibrado vetorial E associado a um fibrado principal cujo grupo de estrutura G é o grupo de simetria da teoria considerada. No caso geral, este grupo de estrutura poderá incluir o grupo de Lorentz ou o $SO(4)$, que levaria em conta os efeitos gravitacionais. Nos problemas estudados nesta tese, contudo, serão desprezados estes efeitos, salvo menção explícita.

1.5. Conexão e curvatura.

O ponto central de interesse do formalismo da geometria diferencial, no que concerne às teorias de gauge,

está nas noções de conexão e curvatura em espaços fibrados. Elas representam geometricamente os conceitos físicos de potencial e intensidade de campo de gauge, respectivamente. Do ponto de vista matemático, necessitamos da introdução da noção de conexão num espaço fibrado para que se possa definir o transporte paralelo de um vetor, entre pontos do fibrado, ao longo de uma curva dada na variedade-base, ou seja, comparar vetores de fibras diferentes. Há várias definições equivalentes de conexão; primeiramente, trataremos do caso de fibrados vetoriais.

Seja E um fibrado vetorial sobre M , com projeção π_E e fibra típica V . Uma conexão, ou operador de derivada covariante, sobre E é um operador diferencial ∇ , o qual, atuando sobre uma dada seção suave de E , resulta numa 1-forma diferencial com valor em E :

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*(M)), \quad (5.1)$$

de modo que, para qualquer função f sobre M e quaisquer seções s, s' de E , satisfaça as propriedades de linearidade,

$$\nabla(as + bs') = a\nabla s + b\nabla s', \quad (5.2a)$$

a, b reais, e da regra de Leibniz,

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s. \quad (5.2b)$$

Estendendo esta definição a uma p -forma α , seção suave de E ,

$$\nabla(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \wedge \nabla s, \quad (5.2c)$$

obtemos, assim, uma seção de $\Gamma(E \otimes \Lambda^{p+1}(M))$.

Em cada vizinhança $U \subset M$ podemos escolher um referencial local $\{e_a(x)\}$, $a=1, \dots, m=\dim V$, $x \in U$, como um conjunto de m seções locais de E linearmente independentes, restritas a $\pi_E^{-1}(U)$. Uma seção local genérica s , mapa de U a $\pi_E^{-1}(U)$, é, portanto, decomposta em componentes segundo $\{e_a(x)\}$:

$$s(x) = s^a(x) e_a(x). \quad (5.3)$$

Fazendo o operador ∇ atuar sobre as seções do referencial local $\{e_a(x)\}$, temos como resultado uma nova seção de $\pi_E^{-1}(U)$, que, portanto, também podemos expandir no mesmo referencial local. Pela definição (5.1), os coeficientes desta expansão assumirão valores em $T^*(M)$. Seja, pois:

$$\nabla e_b = \Gamma_b^a \otimes e_a, \quad (5.4)$$

onde se define a matriz de 1-formas Γ sobre U . A ela se dá o nome de 1-forma de conexão do fibrado E . Definindo um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, $\mu=1, \dots, n=\dim M$, para U , temos ainda que

$$\Gamma_b^a = \Gamma_{\mu b}^a dx^\mu. \quad (5.5)$$

Os objetos $\Gamma_{\mu b}^a$ são, neste contexto, os análogos dos símbolos de Christoffel da geometria diferencial clássica, que ocorrem na teoria da relatividade geral.

A lei de diferenciação covariante de um campo vetorial (seção) s de E é, usando (5.2), (5.3) e (5.4):

$$\begin{aligned} \nabla s &= \nabla(s^a e_a) = ds^a \otimes e_a + s^b \nabla e_b \\ &= (ds^a + s^b \Gamma_b^a) \otimes e_a. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Num sistema de coordenadas local na base, introduzimos derivadas direcionais covariantes, $\nabla = dx^\mu \nabla_\mu$, onde ∇_μ significa a derivada covariante na direção x^μ . Por (5.6), vem

$$\nabla s = (\partial_\mu s^a + s^b \Gamma_{\mu b}^a) dx^\mu \otimes e_a. \quad (5.7)$$

Estabelecemos, agora, as regras de transformação da 1-forma de conexão quando se faz uma mudança de referencial:

$$e'_a = \Phi_a^b(x) e_b, \quad (5.8)$$

onde $\Phi(x) \in GL(m, \mathbb{R})$. Diferenciando (5.8), vem que

$$\begin{aligned} \nabla e'_a &= d\Phi_a^b(x) \otimes e_b + \Phi_a^b(x) \nabla e_b \\ &= (d\Phi_a^b \Phi_b^{-1c} + \Phi_a^b \Gamma_b^d \Phi_d^{-1c}) \otimes e'_c, \end{aligned} \quad (5.9)$$

e, pondo

$$\nabla e'_a = \Gamma'^c_a \otimes e'_c, \quad (5.10)$$

temos que

$$\Gamma'^c_a = d\Phi_a^b \Phi_b^{-1c} + \Phi_a^b \Gamma_b^d \Phi_d^{-1c}. \quad (5.11)$$

Neste esquema, define-se a matriz 2-forma de curvatura pela diferenciação de (5.4), usando (5.2c):

$$\begin{aligned} \nabla^2 e_b &= d\Gamma^a_b \otimes e_a - \Gamma^c_b \otimes \nabla e_c \\ &= (d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b) \otimes e_a. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos escrever

$$\nabla^2 e_b = \nabla \Gamma^a_b \otimes e_a \equiv \Omega^a_b \otimes e_a; \quad (5.13)$$

assim definida, a matriz de curvatura Ω , cujos elementos são 2-

formas sobre M, é dada por

$$\Omega^a_b \equiv \nabla \Gamma^a_b = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b. \quad (5.14)$$

Os coeficientes da 2-forma Ω^a_b numa base canônica são

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} \Omega^a_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (5.15)$$

As eqs. (5.14) e (5.5) nos fornecem, então,

$$\begin{aligned} \Omega^a_b &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Gamma^a_{\nu b} - \partial_\nu \Gamma^a_{\mu b}) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma^a_{\mu c} \Gamma^c_{\nu b} - \Gamma^a_{\nu c} \Gamma^c_{\mu b}) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \quad (5.16)$$

e, portanto,

$$\Omega^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^a_{\nu b} - \partial_\nu \Gamma^a_{\mu b} + \Gamma^a_{\mu c} \Gamma^c_{\nu b} - \Gamma^a_{\nu c} \Gamma^c_{\mu b} \quad (5.17)$$

é o tensor de curvatura do fibrado E, análogo ao tensor de Riemann-Christoffel da geometria diferencial clássica.

Numa mudança de referencial local, (5.8), ao tomarmos a diferenciação de (5.9) e pondo

$$\nabla^2 e'_a = \Omega'^b_a \otimes e'_b, \quad (5.18)$$

obtemos, em notação matricial, a regra de transformação da 2-forma de curvatura:

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}' &= \Phi (d\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma} \wedge \underline{\Gamma}) \Phi^{-1} \\ &= \Phi \underline{\Omega} \Phi^{-1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Finalmente, podemos observar que a diferenciação da 2-forma de curvatura é nula: introduzindo um conjunto $\{e^a\}$ de seções "duais" a $\{e_a\}$, para as quais

$$\nabla e^a = -\Gamma^a_b e^b, \quad (5.20)$$

temos que

$$\underline{\Omega} = e^b \otimes \underline{\Omega}^a_b \otimes e_a \quad (5.21)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \underline{\Omega} &\equiv e^b \otimes \nabla \underline{\Omega}^a_b \otimes e_a \\ &= \nabla e^b \otimes (\underline{\Omega}^a_b \otimes e_a) + e^b \otimes \nabla (\underline{\Omega}^a_b \otimes e_a) \\ &= e^b \otimes (d\underline{\Omega}^a_b + \Gamma^a_c \wedge \underline{\Omega}^c_b - \underline{\Omega}^a_c \wedge \Gamma^c_b) \otimes e_a \end{aligned} \quad (5.22)$$

Substituindo (5.14) em (5.22), resulta

$$\begin{aligned} \nabla \underline{\Omega}^a_c &= d\Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b - \Gamma^a_c \wedge d\Gamma^c_b + \Gamma^a_c \wedge d\Gamma^c_b + \\ &\quad + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_d \wedge \Gamma^d_b - d\Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b - \Gamma^a_d \wedge \Gamma^d_c \wedge \Gamma^c_b \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\nabla \underline{\Omega} = 0. \quad (5.23)$$

A esta propriedade dá-se o nome de identidade de Bianchi e sua importância está no fato de constituir a equação sem fontes do eletromagnetismo ou da teoria de Yang-Mills, dependendo do grupo de gauge considerado.

Passamos, agora, a considerar as noções de conexão e curvatura sobre fibrados principais. Seja P um fibrado principal sobre M , com grupo de estrutura G e projeção π .

Para qualquer ponto $p \in P$, pode-se definir um subespaço, $\text{ver}(P)$, chamado subespaço vertical, de seu espaço tangente, $T_p(P)$, que satisfaça a condição de vetores

verticais, isto é, tangentes à fibra na qual se situa p , neste ponto. Então,

$$\text{ver}_p(P) = \left\{ v \in T_p(P) \mid d\pi(v) = 0 \right\}, \quad (5.24)$$

onde $d\pi$ é o mapa entre os espaços tangentes $T_p(P)$ e $T_{\pi(p)}(M)$ induzido pela projeção π , também chamado mapa diferencial, que foi introduzido na eq. (3.4). (Neste caso, podemos dizer que, sendo o ponto p do fibrado P projetado sobre M em $\pi(p)$, o vetor v do espaço tangente de P tem anulada sua projeção no espaço tangente de $\pi(p)$, dada por $d\pi(v)$.)

Uma conexão sobre o fibrado principal P é definida como uma família suave de subespaços $\text{hor}_p(P)$ de $T_p(P)$, denominados horizontais, tais que

(i) para todo $p \in P$, $\text{hor}_p(P)$ é o complemento linear de $\text{ver}_p(P)$ em $T_p(P)$, ou seja, o espaço tangente $T_p(P)$ possui uma única decomposição em subespaços horizontal e vertical:

$$T_p(P) = \text{hor}_p(P) \oplus \text{ver}_p(P), \quad (5.25a)$$

de modo que um vetor $u \in T_p(P)$ admite a decomposição

$$u = \text{hor } u + \text{ver } u; \quad (5.25b)$$

(ii) $\text{hor}_p(P)$ é invariante sob a ação de G : para qualquer $g \in G$,

$$dR_g \text{hor}_p(P) = \text{hor}_{pg}(P), \quad (5.26)$$

onde R_g é a ação à direita de g sobre pontos de P ;

(iii) se o campo vetorial u de (5.25b) for C^∞ , suas componentes horizontal e vertical também o serão.

Observe-se que, dada a condição de trivialidade local

do fibrado, e lembrando que a álgebra de Lie \mathfrak{g} do grupo G é isomorfa a seu espaço tangente e, portanto, aos subespaços verticais $\text{ver}_p(P)$, $\dim \text{hor}_p(P) = \dim T_{\pi(p)}(M)$; na verdade, $\text{hor}_p(P)$ se projeta sobre o espaço tangente à base M em (p) :

$$d\pi(\text{hor}_p(P)) = T_{\pi(p)}(M). \quad (5.27)$$

Do ponto de vista do espaço cotangente de $p \in P$, $T_p^*(P)$, dizemos que uma 1-forma de $T_p^*(P)$ é vertical se seu valor sobre um vetor horizontal de $\text{hor}_p(P)$ for nulo. Assim, dado o isomorfismo entre $\text{ver}_p(P)$ e \mathfrak{g} , podemos definir formas diferenciais verticais (i.e., com valores na álgebra de Lie) através de mapas entre $T_p(P)$ e \mathfrak{g} . Desta maneira,

$$\omega_p: T_p(P) \rightarrow \mathfrak{g} \quad (5.28)$$

será a 1-forma de conexão dada pela família $\text{hor}(P)$, desde que:

(a) ω seja vertical: para $u \in T_p(P)$,

$$\begin{aligned} \langle \omega_p, u \rangle &= \langle \omega_p, \text{hor } u \rangle + \langle \omega_p, \text{ver } u \rangle \\ &= \langle \omega_p, \text{ver } u \rangle \in \mathfrak{g}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

de modo que $\langle \omega_p, u \rangle = 0$ se e só se $u \in \text{hor}_p(P)$.

(b) ω seja equivariante, i.e., a ação de G à direita sobre P seja dada pelo elemento da álgebra de Lie

$$\langle \omega_{pg}, dR_g u \rangle = \text{Ad}_{g^{-1}} \langle \omega_p, u \rangle, \quad (5.30)$$

onde Ad é a representação adjunta de G em \mathfrak{g} , eq. (3.11).

Portanto, para u horizontal, a forma ω é invariante sob G :

$$\langle \omega_{pg}, dR_g u \rangle = 0. \quad (5.31)$$

(c) ao atuar sobre um vetor vertical $v \in \mathfrak{g}$, ω tem a propriedade

$$\omega_p(v) = \langle \omega_p, v \rangle = v. \quad (5.32)$$

Assim, ω_p é uma 1-forma invariante à esquerda, ou forma de Maurer-Cartan, eq. (3.15) e, portanto,

$$\omega_p = \tilde{g}^{-1} dg. \quad (5.33)$$

Observe-se que poderíamos ter adotado as propriedades acima da 1-forma ω para defini-la como a conexão do fibrado principal P e, em seguida, introduzir o subespaço $\text{hor}_p(P)$ como seu núcleo:

$$\begin{aligned} \text{hor}_p(P) &= \ker \omega \subset T_p(P) \\ &= \{u \in T_p(P) \mid \omega(u) = 0\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definamos, agora, a $(k+1)$ -forma $D\alpha$, a derivada exterior covariante de uma k -forma $\alpha \in \Lambda^k(P)$, por

$$D\alpha = \text{hor } d\alpha, \quad (5.35a)$$

ou

$$\langle D\alpha, u_1 \wedge \dots \wedge u_{k+1} \rangle \equiv \langle d\alpha, \text{hor } u_1 \wedge \dots \wedge \text{hor } u_{k+1} \rangle, \quad (5.35b)$$

onde os $u_i \in T_p(P)$, que é a projeção horizontal da derivada exterior de α sobre o fibrado P . Se α for uma forma vertical, a expressão acima se anula.

Consideremos, em particular, a ação de D sobre a 1-forma de conexão ω . Isto define a 2-forma de curvatura Ω :

$$\Omega = D\omega. \quad (5.36)$$

Ela satisfaz a equação de estrutura de Maurer-Cartan,

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \quad (5.37a)$$

$$= d\omega + \frac{1}{2} \omega^i \wedge \omega^j c_{ij}^k T_k, \quad (5.37b)$$

por (3.18), onde $\{T_k\}$, $k=1, \dots, \dim G$, constitui uma base para a álgebra de Lie \mathfrak{g} e c_{ij}^k são suas constantes de estrutura. Neste contexto, a identidade de Bianchi é trivialmente demonstrada:

$$\begin{aligned} \langle D\Omega, u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \rangle &= \langle Dd\omega, u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle D[\omega, \omega], u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \rangle \\ &= \langle d^2\omega, \text{hor } u_1 \wedge \text{hor } u_2 \wedge \text{hor } u_3 \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle d[\omega, \omega], \text{hor } u_1 \wedge \text{hor } u_2 \wedge \text{hor } u_3 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $d^2=0$ e $[\omega, \omega]$ é uma 2-forma vertical. Portanto,

$$D\Omega = 0. \quad (5.38)$$

Uma conexão ω é dita plana se sua 2-forma de curvatura for identicamente nula: $\Omega \equiv 0$.

Enfim, introduzimos uma 1-forma com valores em \mathfrak{g} sobre a variedade M , associada à forma de conexão ω . Tomemos uma seção local s de P , definida sobre uma vizinhança $U \subset M$. Seja, pois, a 1-forma $s^*\omega$ sobre U , com valores em \mathfrak{g} , dada pelo retrocesso ("pullback") de ω por s , isto é, sendo u um vetor de $T_x(M)$, $x \in U$,

$$\langle s^*\omega(x), u \rangle = \langle \omega(s(x)), df \cdot u \rangle. \quad (5.39)$$

Dada uma família de vizinhanças $\{U_i\}$ que recobrem a base M , para cada uma podem-se definir mapas de trivialização local k_i do fibrado P , $k_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$. Se, ainda, considerarmos um mapa

$$\begin{aligned} \rho : U_i &\rightarrow U_i \times G \\ x &\mapsto (x, e), \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde e é o elemento identidade do grupo G , a trivialização local k_i induz uma seção $s_i: U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, através da definição

$$s_i(x) = k_i(e(x)). \quad (5.41)$$

Podemos, então, associar a cada trivialização k_i de P uma 1-forma $\tilde{\omega}_i \in T^*(U_i)$, chamada forma de conexão local, dada por:

$$\tilde{\omega}_i = s_i^* \omega. \quad (5.42)$$

Analogamente, obtemos uma representação sobre U_i da 2-forma de curvatura Ω :

$$\tilde{\Omega} = s_i^* \Omega \quad (5.43)$$

$$= d\tilde{\omega}_i + \frac{1}{2} [\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_i]. \quad (5.44)$$

Na região de superposição de duas vizinhanças U_i e U_j , as trivializações k_i e k_j definem conexões sobre a base $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$, respectivamente. Temos, assim, conexões locais em diferentes "gauges". A relação entre elas é

$$\tilde{\omega}_i = Ad_{\psi_{ij}^{-1}} \tilde{\omega}_j + \psi_{ij}^{-1} d\psi_{ij} \quad (5.45a)$$

$$= \psi_{ij}^{-1} \tilde{\omega}_j \psi_{ij} + \psi_{ij}^{-1} d\psi_{ij}, \quad (5.45b)$$

onde ψ_{ij} são as funções de transição (elementos de G) entre U_i e U_j . Esta relação é conhecida em física como uma transformação de gauge. A 2-forma de curvatura é claramente equivariante:

$$\tilde{\Omega}_i = Ad_{\psi_{ij}^{-1}} \tilde{\Omega}_j \quad (5.46a)$$

$$= \psi_{ij}^{-1} \tilde{\Omega}_j \psi_{ij}. \quad (5.46b)$$

1.6. Teorias de gauge - visão geométrica.

Resumimos, aqui, as características geométricas das teorias de gauge clássicas, exibidas nos parágrafos anteriores.

Em primeiro lugar, estabelecemos que o grupo de simetria de gauge, G , é adotado como a fibra típica de um fibrado principal, P , do qual o espaço-tempo, M , constitui a variedade-base. Podemos recobrir totalmente esta base com um conjunto arbitrário de vizinhanças que se superpõem e, em cada vizinhança, requeremos que o fibrado P seja trivial. Isto é, a cada vizinhança U_i é associado um mapa de trivialização k_i , que vai definir o sistema de coordenadas na fibra, na porção de P sobre U_i . Define-se, assim, um gauge local. Portanto, uma seção local s_i sobre U_i terá seus valores determinados pela escolha de coordenadas induzida por k_i . Se s_j for uma seção sobre uma outra vizinhança, U_j , de interseção não vazia com U_i , relacionada a outra trivialização, k_j , as funções de transição g_{ij} , que são elementos do grupo G , fazem a transformação de s_i para s_j na região de interseção $U_i \cap U_j$. Isto constitui uma transformação de gauge. Logo, se G for um grupo de Lie, denotado por sua representação exponencial, uma função de transição de $U_i \cap U_j$ é dada por

$$g_{ij}(x) = \exp i\alpha^a(x)T^a, \quad (6.1)$$

sendo α uma função real, com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G ,

cuja base é $\{T^a\}$.

O potencial e a intensidade de campo de gauge podem ser facilmente tratados com o cálculo exterior de formas diferenciais, mais adequado ao ponto de vista geométrico. Introduzimos a 1-forma potencial que assume valores em \mathfrak{g} :

$$A = A_\mu^a dx^\mu \otimes T^a \quad (6.2)$$

para um dado conjunto de coordenadas $\{x^\mu\}$ do espaço-tempo. Formamos com esta 1-forma o diferencial exterior covariante de gauge ("acoplamento mínimo"):

$$D = d + A \wedge. \quad (6.3)$$

A 2-forma

$$F = DA \quad (6.4)$$

possui, como componentes, o tensor (anti-simétrico) de intensidade de campo:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (6.5a)$$

$$= dA + A \wedge A. \quad (6.5b)$$

Substituindo (6.2) em (6.5b) e comparando com (6.5a), reobtemos (0.21).

As formas A e F são o retrocesso por intermédio de uma seção local s das formas de conexão, ω , e de curvatura, Ω , do fibrado P :

$$A = s^* \omega, \quad (6.6a)$$

$$F = s^* \Omega. \quad (6.6b)$$

A mudança de seção local realiza uma transformação na conexão ω dada por (5.45), implicando uma transformação de gauge (0.18) nas componentes do potencial. Analogamente, as equações (5.46) implicam, por sua vez, a covariância do tensor de intensidade de campo, eq. (0.22).

Um campo de matéria (Higgs), ϕ^i , é considerado como uma seção de um fibrado vetorial E , complexo, associado ao fibrado P através de um mapa de representação r do grupo G sobre o espaço vetorial V , fibra típica de E . Utilizando uma seção local s , temos que $\phi(x) \equiv \phi(s(x))$ possui como diferencial exterior covariante, na representação adjunta,

$$\begin{aligned} D\phi &= s^* D\phi \\ &= (\partial_\mu \phi^i + c_{jk}^i A_\mu^k \phi^j) dx^\mu \otimes T^i, \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde c_{jk}^i são as constantes de estrutura de \mathfrak{g} .

A integral de ação para o campo de gauge é dada pela norma da curvatura de P ; sua 4-forma densidade lagrangiana é, pois, escrita

$$\mathbb{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{tr} F \wedge *F, \quad (6.8)$$

onde $*$ é a estrela de Hodge, e as componentes de $*F$ são as do tensor dual a $F_{\mu\nu}$. Pelo princípio variacional, de (6.8) resulta, como equação de campo de Yang-Mills,

$$D*F = d*F + A \wedge *F - *F \wedge A = 0. \quad (6.9)$$

A identidade de Bianchi se escreve, pois,

$$DF = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0. \quad (6.10)$$

Podemos, enfim, construir uma 4-forma densidade lagrangiana covariante de gauge para o campo ϕ :

$$\mathbb{L}_{\text{mat}} = -D\phi^a \wedge *D\phi^b. \quad (6.11)$$

Ilustramos os conceitos geométricos apresentados neste capítulo através dos exemplos dos fibrados do monopolo de Dirac e da solução de íntanton às equações de Yang-Mills (34). O caso do monopolo magnético na teoria de gauge abeliana consiste do seguinte potencial para uma carga magnética, g , situada na origem:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{2r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi}, \quad (6.12)$$

expressa nas coordenadas polares (r, θ, ϕ) do espaço euclidiano tridimensional. O potencial acima possui uma óbvia singularidade para $\theta = \pi$, isto é, em todo o eixo z negativo. Isto pode ser remediado, considerando duas regiões do $\mathbb{R} - \{0\}$,

$$\begin{aligned} U_+ &: z > -\varepsilon \\ U_- &: z < +\varepsilon \end{aligned} \quad (6.13)$$

em que a região de interseção $U_+ \cap U_-$ corresponde a uma estreita faixa de largura $\varepsilon \rightarrow 0$ em torno do plano xy , do qual se exclui a origem. Podemos, então, escrever duas expressões do potencial (6.12), \vec{A}_\pm , cada uma regular nas respectivas regiões. Em linguagem de formas diferenciais ($\hat{\phi} = r \sin \theta d\phi$):

$$A_\pm = \frac{1}{2} g (\pm 1 - \cos \theta) d\phi. \quad (6.14)$$

Vemos que A_+ possui singularidade em $\theta=\pi$ e, portanto, é regular em U_+ , enquanto que A_- seria singular em $\theta=0$, regular, desta maneira em U_- . Na região de superposição das regiões, onde ambos os potenciais são regulares, A_+ e A_- são relacionados por uma transformação de gauge:

$$\begin{aligned} A_+ - A_- &= \frac{1}{2} g (1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta) d\phi \\ &= g d\phi. \end{aligned} \quad (6.15)$$

O campo correspondente é dado por

$$\begin{aligned} F &= dA_{\pm} \\ &= \frac{1}{2} g \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (6.16)$$

ou

$$\vec{B} = \frac{g}{2r^3} \vec{r}. \quad (6.17)$$

Em termos de fibrados, o potencial do monopolo é uma conexão de um fibrado principal com grupo de estrutura $U(1)$ sobre a esfera S^2 . A variedade-base é tomada como a esfera S^2 , pois consiste da união de duas vizinhanças (que a recobrem completamente), H_{\pm} , seus hemisférios, tais que $H_+ \cap H_-$ é uma faixa muito estreita em torno de seu equador. H_{\pm} são as projeções estereográficas de U_{\pm} . Definimos, em S^2 , as coordenadas polares θ e ϕ , com $0 \leq \theta < \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. A fibra típica será, aqui, o grupo $U(1)$, já que o campo é abeliano. Este grupo de Lie possui apenas um parâmetro e , topologicamente, equivale ao círculo (1-esfera) S^1 . É, pois, descrito pela coordenada $e^{i\psi}$.

Assim, construímos um fibrado principal, o qual, localmente, é dado pelos produtos topológicos

$$H_+ \times S^1 \quad (6.18a)$$

$$H_- \times S^1. \quad (6.18b)$$

As coordenadas na fibra serão designadas diferentemente, de acordo com a porção do fibrado: $e^{i\psi_+}$ para (6.18a) e $e^{i\psi_-}$ para (6.18b). Estas são relacionadas, no equador de S^2 (círculo parametrizado pelo ângulo ϕ), por funções de transição dadas por elementos do $U(1)$:

$$e^{i\psi_-} = e^{in\phi} e^{i\psi_+}, \quad n \text{ inteiro.} \quad (6.19)$$

A 1-forma de conexão, $\omega = iA$, para cada porção do fibrado, é dada por ($g^{-1} dg = i d\psi$):

$$A_+ + d\psi_+ \quad \text{sobre } H_+ \quad (6.20a)$$

$$A_- + d\psi_- \quad \text{sobre } H_- \quad (6.20b)$$

e, por diferenciação de (6.19), temos a transformação de gauge

$$A_+ = A_- + n d\phi, \quad (6.21)$$

que, comparando com (6.15), identificamos n com a carga do monopolo, g . O fato de n ser um número inteiro implica a condição de quantização do monopolo.

A 2-forma de curvatura é, neste caso, $\Omega = iF$, com F dada por (6.16). Este é um exemplo de forma fechada, mas exata apenas localmente.

A caracterização de topologia não trivial do fibrado do monopolo está contida na equação

$$g = \int_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Ela é consequência apenas das regras de transformação de gauge e não da expressão explícita do potencial (ou seja, se o potencial é ou não solução local das equações de Maxwell). Consideremos a integral em toda a variedade-base da quantidade

$$-c_1 = \frac{1}{2\pi} F \quad (6.22)$$

(primeira classe de Chern do fibrado em questão; ver Cap. III).

Daí resulta, usando o teorema de Stokes:

$$-c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{H_+} dA_+ + \int_{H_-} dA_- \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{S^1} A_+ + \oint_{S^1} A_- \right] \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{S^1} (A_+ - A_-) \right] = \frac{1}{2\pi} g \int_0^{2\pi} d\phi = g, \quad (6.24)$$

relação equivalente à (6.22).

O exemplo da solução de íntanton às equações de Yang-Mills para o grupo de gauge não abeliano $SU(2)$ tem uma interpretação geométrica semelhante à do monopolo magnético. Tomemos uma compactação do espaço-tempo euclidiano quadridimensional, por projeção estereográfica, à esfera S^4 . Esta será a variedade-base. A fibra típica e o grupo de estrutura serão o grupo de Lie $SU(2)$, que equivale, topologicamente, à esfera S^3 . Novamente recobrimos S^4 com seus dois "hemisférios", H_{\pm} , os quais se interseccionam numa pequena região em torno do "equador" de S^4 , uma esfera S^3 . Esta pode ser parametrizada por seus ângulos de Euler (θ, ϕ, ψ) . Um

elemento do $SU(2)$ pode ser escrito como

$$h(x) = \frac{x_4 + i \vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{r}, \quad (6.25)$$

$$r = \sqrt{x^2}$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. As coordenadas na fibra, g , são dadas em função dos ângulos de Euler, α_{\pm} , β_{\pm} , γ_{\pm} , da variedade de grupo, S^3 , de acordo com o hemisfério H_{\pm} . Assim, formamos um fibrado principal, o qual, localmente, compõe-se dos produtos

$$\begin{aligned} H_+ \times S^3 \\ H_- \times S^3. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Na região de interseção $H_+ \cap H_-$, temos as funções de transição

$$g_-(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-) = h^k g_+(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+), \quad (6.27)$$

com k inteiro.

A solução de instanton é obtida nas expressões para a 1-forma de conexão em ambos os hemisférios,

$$\omega_+ = g_+^{-1} A g_+ + g_+^{-1} dg_+ \quad (6.28a)$$

$$\omega_- = g_-^{-1} A' g_- + g_-^{-1} dg_-; \quad (6.28b)$$

logo, por (6.27), A e A' estão relacionadas por uma transformação de gauge

$$A' = h^k A h^{-k} + h^k dh^{-k}. \quad (6.29)$$

A solução procurada, para $k=1$, deve tender a um gauge puro no infinito, para que a ação de Yang-Mills, integral em toda a variedade-base da 4-forma (6.8), seja finita:

$$A \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} h^{-1} dh \quad (6.30a)$$

$$F \underset{|x| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \quad (6.30b)$$

O resultado é ⁽⁶²⁾ :

$$A = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} h^{-1} dh, \quad (6.31)$$

analítico em H_+ , e, por (6.29),

$$A' = - \frac{dh h^{-1}}{1 + r^2/\lambda^2}, \quad (6.32)$$

analítico em H_- . A 2-forma de curvatura F é obtida em cada hemisfério usando (6.5) e se relacionam por

$$F_- = h F_+ h^{-1}. \quad (6.33)$$

Este campo possui a propriedade de autodualidade:

$$F = * F. \quad (6.34)$$

Tal como a carga do monopolo, o fibrado do íntanton é caracterizado topologicamente pelo número inteiro k ("carga topológica"). Este é obtido através da forma de curvatura da quantidade

$$-c_2 = - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} F \wedge F \quad (6.35)$$

(segunda classe de Chern do fibrado $SU(2)$, ver Cap. III).

Temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(F \wedge F) &= \text{tr}(F \wedge (dA + A \wedge A)) \\ &= \text{tr}(d(F \wedge A) - dF \wedge A + F \wedge A \wedge A) \\ &= \text{tr}(d(F \wedge A) + A \wedge dA \wedge A + A \wedge A \wedge A \wedge A) \end{aligned} \quad (6.36)$$

e como

$$\text{tr } d(A \wedge A \wedge A) = -3 \text{tr } (A \wedge dA \wedge A) \quad (6.37)$$

$$\text{tr } (A \wedge A \wedge A \wedge A) = 0, \quad (6.38)$$

a eq. (6.36) torna-se

$$\text{tr } (F \wedge F) = d \text{tr } (F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A). \quad (6.39)$$

Então,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr } F \wedge F = \frac{1}{8\pi^2} \left[\int_{H_+} \text{tr } (F_+ \wedge F_+) + \int_{H_-} \text{tr } (F_- \wedge F_-) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \left[\text{tr } (F_+ \wedge A_+ - \frac{1}{3} A_+ \wedge A_+ \wedge A_+) + \right. \\ &\quad \left. - \text{tr } (F_- \wedge A_- - \frac{1}{3} A_- \wedge A_- \wedge A_-) \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Pela transformação de gauge (6.29),

$$\begin{aligned} \text{tr } (F_- \wedge A_-) &= \text{tr } \left[h^k F_+ h^{-k} \wedge (h^k A_+ h^{-k} + h^k dh^{-k}) \right] \\ &= \text{tr } \left[F_+ \wedge A_+ + dA_+ \wedge dh^{-k} h^k + A_+ \wedge A_+ \wedge dh^{-k} h^k \right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } (A_- \wedge A_- \wedge A_-) &= \text{tr } (A_+ \wedge A_+ \wedge A_+ + 3A_+ \wedge A_+ \wedge dh^{-k} h^k + \\ &\quad + 3A_+ \wedge dh^{-k} h^k \wedge dh^{-k} h^k + \\ &\quad + dh^{-k} h^k \wedge dh^{-k} h^k \wedge dh^{-k} h^k) \end{aligned} \quad (6.42)$$

de modo que

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \left[\frac{1}{3} dh^{-k} h^k \wedge dh^{-k} h^k \wedge dh^{-k} h^k - d(A_+ \wedge dh^{-k} h^k) \right] \quad (6.43)$$

Sendo S^3 uma variedade fechada, a integral do segundo termo é

nula e, portanto,

$$C_2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (h^k dh^{-k} \wedge h^k dh^{-k} \wedge h^k dh^{-k})$$

Realizando a integral nos ângulos de Euler do grupo, obtemos, finalmente,

$$C_2 = -k.$$

CAPÍTULO II

EQUAÇÃO DE DIRAC-KÄHLER

No espírito do formalismo de espaços fibrados, descrito no capítulo anterior, deveríamos igualmente considerar campos fermiônicos como seções (locais) de algum fibrado vetorial associado. Férmions são usualmente representados por espinores, de modo que, neste caso, a fibra típica do fibrado seria o espaço dos espinores e o grupo de estrutura o grupo de spin $SU(2)$.

A transposição do formalismo espinorial para a rede, no entanto, não se mostrou satisfatória. Wilson, ao fazer a discretização usual (transformação de derivadas em diferenças finitas) à equação e à lagrangiana de Dirac ⁽⁵⁷⁾ verificou a existência de polos espúrios no propagador fermiônico, todos com a mesma energia. Esta "duplicação do espectro" foi ⁽¹⁸⁾ eliminada pelo próprio Wilson posteriormente, adicionando novos termos à ação (os quais não comprometiam o limite ao contínuo nem a invariância de gauge da teoria). Estes termos, entretanto, quebram a invariância quiral da ação quando a massa do férmion é nula, implicando a impossibilidade de a teoria

tratar partículas como neutrinos, que possuem quiralidade bem definida. Teoremas foram demonstrados sob condições bastante gerais por Nielsen e Ninomiya (58,59,60), segundo os quais é totalmente impossível conciliar, na rede, a simetria quiral e a simetria de gauge, sem haver duplicação do espectro.

Novas formulações de férmions na rede se seguiram à de Wilson, todas apresentando algumas vantagens, mas sempre com alguma desvantagem; por exemplo, há a proposta do grupo do SLAC (61) de uma ação, invariante de gauge, com simetria quiral e sem duplicação do espectro que, no entanto, é não local.

Outra formulação é a de (Casher-Banks)-Kogut-Susskind (19,20), que coloca cada componente do espinor de Dirac num sítio distinto da rede, alternadamente, gerando subredes para cada componente, desacopladas entre si. O problema é parcialmente resolvido: a degenerescência espectral é reduzida (em 4 dimensões) de 16 para 4 e há uma simetria quiral discreta, mas não a contínua, como desejado.

Neste capítulo, estudaremos a equação introduzida pelo matemático Erich Kähler (13,14,15), que descreve os férmions em termos de formas diferenciais, utilizando, assim, o cálculo exterior apresentado no capítulo precedente, além de ter-se que introduzir uma álgebra mais geral no fibrado cotangente, de modo a incluir produtos de Clifford (álgebra de Kähler-Atiyah). É, portanto, uma descrição não-espinorial de

férmions, baseada apenas em objetos geométricos já conhecidos; daí o nome, eventualmente utilizado, de férmions geométricos. Esta formulação reproduz a equação de Dirac com o mesmo grau de degenerescência espectral que os férmions de Kogut-Susskind, constituindo, pois, uma versão destes no contínuo. Mostraremos a argumentação dada por Graf para a relação entre o operador de Kähler e o de Dirac; em seguida, descreveremos a maneira "heurística" de se chegar aos férmions geométricos e sua equação, formulada por Rabin e exibiremos como as formas de Dirac-Kähler variam com a representação das matrizes γ^μ de Dirac. O formalismo mais preciso, devido a Becher e Joos, mostrando como se reduz a degenerescência dos férmions para 4 (em quatro dimensões), é apresentada a seguir. A degenerescência residual das formas de Dirac-Kähler é, então, colocada sob a forma de uma simetria SU(4), e mostramos como tal simetria pode ser extraída da própria equação de Dirac, em sua formulação original.

2.1. A álgebra de Kähler-Atiyah e o teorema de Graf.

Suponhamos que o espaço-tempo seja dado por uma variedade M , de dimensão n par (tipicamente $n=2$ ou 4), com

métrica plana. Consideremos o fibrado cotangente sobre esta variedade, $T^*(M)$; como já vimos, podemos construir o fibrado de álgebra exterior $\Lambda^*(M) \equiv \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T^*(M)$, gerado pelas sucessivas aplicações do produto exterior de formas diferenciais. Uma base para $\Lambda^*(M)$ pode ser escolhida num sistema de coordenadas $\{x^\mu, \mu=0,1,\dots,n-1\}$ como

$$\{1, dx^\mu, dx^\mu \wedge dx^\nu, \dots, dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}\}. \quad (1.1)$$

Ou seja, em duas dimensões, isto é simplesmente

$$\{1, dx^0, dx^1, dx^0 \wedge dx^1\} \quad (1.1')$$

e, em quatro dimensões,

$$\{1, dx^\mu, dx^\mu \wedge dx^\nu (\mu < \nu), dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho (\mu < \nu < \rho), dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}, \quad \mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3. \quad (1.1'')$$

O primeiro passo para a descrição de férmions em termos de formas diferenciais vem da observação de que, em quatro dimensões, podemos definir um isomorfismo entre o conjunto das 16 formas diferenciais que compõem a base de $\Lambda^*(M)$ com o conjunto das 16 matrizes 4x4 independentes de Dirac

$$\{I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma_5 \gamma^\mu, \gamma_5\}. \quad (1.2)$$

Ou seja,

$$\gamma^\mu \mapsto dx^\mu \quad (1.3)$$

é um isomorfismo. No entanto, este isomorfismo só estará bem definido se os diferenciais dx^μ obedecerem à mesma álgebra que os γ^μ . Como se sabe, estas matrizes satisfazem a álgebra de

Clifford,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde $g^{\mu\nu}$ são as componentes da métrica de M . É necessário, portanto, que tal álgebra seja implementada no espaço dos diferenciais. (Em duas dimensões a correspondência é realizada com as matrizes de Pauli $\{1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3 = i\sigma^1\sigma^2\}$).

(13)

Assim, definimos, segundo Kähler, o produto de Clifford entre diferenciais:

$$dx^\mu \vee dx^\nu + dx^\nu \vee dx^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot 1 \quad (1.5a)$$

$$1 \vee 1 = 1 \quad (1.5b)$$

$$1 \vee dx^\mu = dx^\mu \vee 1 = dx^\mu, \quad \mu=0, \dots, n-1 \quad (1.5c)$$

O produto \vee se relaciona trivialmente com o produto exterior \wedge através da relação

$$dx^\mu \vee dx^\nu = dx^\mu \wedge dx^\nu + g^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

de modo que, para 1-formas α, β ,

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &= \alpha_\mu dx^\mu \vee \beta_\nu dx^\nu = \alpha_\mu dx^\mu \wedge \beta_\nu dx^\nu + g^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta_\nu \\ &= \alpha \wedge \beta + \alpha \cdot \beta. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Portanto, temos o espaço $\Lambda^*(M)$, que, junto com as operações \wedge , \vee e o produto escalar entre formas \cdot , forma um espaço fibrado sobre M cujas seções satisfazem as álgebras de Grassmann e Clifford, relacionadas por (1.7). Esta álgebra se denomina álgebra de Kähler-Atiyah e o espaço fibrado passa a se chamar fibrado de Kähler-Atiyah.

Como vimos no capítulo anterior, os elementos de $\Lambda^*(M)$ são formas diferenciais gerais, i.e.,

$$\phi = \varphi(x)1 + \varphi_\mu(x)dx^\mu + \frac{1}{2!}\varphi_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu + \dots + \varphi_{12\dots n}(x)\varepsilon, \quad (1.8)$$

onde ε significa o elemento de volume de M , $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Há

dois automorfismos de $\Lambda^*(M)$ que é interessante introduzir: o automorfismo principal A ,

$$\begin{aligned} A\phi &= (-1)^p \phi \\ &= \phi^{(0)} - \phi^{(1)} + \phi^{(2)} - \dots + \phi^{(n)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

e o anti-automorfismo principal B ,

$$\begin{aligned} B\phi &= (-1)^{\binom{p}{2}} \phi \\ &= \phi^{(0)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)} - \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

com as propriedades

$$A^2 = B^2 = 1 \quad (1.11a)$$

$$AB = BA \quad (1.11b)$$

$$A(\alpha \wedge \beta) = (A\alpha) \wedge (A\beta) \quad (1.11c)$$

$$B(\alpha \wedge \beta) = (B\alpha) \wedge (B\beta), \quad \alpha, \beta \in \Lambda^*(M). \quad (1.11d)$$

É conveniente definirmos uma operação de contração entre um vetor do fibrado tangente a M , $X = x^\mu e_\mu$, $\mu = 0, \dots, n-1$, e uma p -forma diferencial $\phi^{(p)}$:

$$\begin{aligned} i_X \phi^{(p)} &\equiv X \lrcorner \phi^{(p)} = (x^\mu e_\mu) \lrcorner \left(\frac{1}{p!} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \right) \\ &= \frac{1}{p!} x^\mu \varphi_{\nu_1 \dots \nu_p} e_\mu \lrcorner dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p-1)!} x^\mu \varphi_{\nu_1 \dots \nu_p} \langle dx^{\nu_1}, e_\mu \rangle dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\
&= \frac{1}{(p-1)!} x^\mu \varphi_{\mu \nu_2 \dots \nu_p} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

onde \langle , \rangle é a contração definida em (1.1.4). Podemos estender esta notação a um "produto interno" entre formas, que nada mais seria que uma "diferenciação" de formas (já que satisfaz as regras de Leibniz): tomemos $e^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu$ e seja

$$e^\mu \lrcorner dx^\nu = g^{\mu\nu} \tag{1.13a}$$

$$e^\mu \lrcorner 1 = 0. \tag{1.13b}$$

Vemos que, de acordo com (1.12),

$$e^\mu \lrcorner (\phi + \omega) = e^\mu \lrcorner \phi + e^\mu \lrcorner \omega \tag{1.14a}$$

$$e^\mu \lrcorner (\phi \wedge \omega) = (e^\mu \lrcorner \phi) \wedge \omega + (\lrcorner \phi) \wedge e^\mu \lrcorner \omega \tag{1.14b}$$

$$(e^\mu \lrcorner e^\nu \lrcorner + e^\nu \lrcorner e^\mu \lrcorner) \phi = 0, \tag{1.14c}$$

$$\phi, \omega \in \Lambda^*(M).$$

Podemos, portanto, usando (1.13a), reescrever a fórmula (1.6) do produto de Clifford como

$$dx^\mu \vee dx^\nu = dx^\mu \wedge dx^\nu + e^\mu \lrcorner dx^\nu, \tag{1.15}$$

que pode ser generalizada, usando (1.14a), para

$$dx^\mu \vee \phi = dx^\mu \wedge \phi + e^\mu \lrcorner \phi, \tag{1.16}$$

$$\phi \vee dx^\mu = \phi \wedge dx^\mu - e^\mu \lrcorner \lrcorner \phi. \tag{1.17}$$

Enfim, o produto de Clifford entre duas formas diferenciais gerais $\phi, \omega \in \Lambda^*(M)$ se escreve:

$$\phi \vee \omega = \sum_p \frac{1}{p!} (-1)^{\binom{p}{2}} \lrcorner^p (e_{\mu_1} \lrcorner \dots \lrcorner e_{\mu_p} \lrcorner \phi) \wedge (e^{\mu_1} \lrcorner \dots \lrcorner e^{\mu_p} \lrcorner \omega) \tag{1.18}$$

consistentemente com os casos particulares acima. Com isto, resultam ainda as propriedades

$$e^{\mu} \lrcorner (\phi \vee \omega) = (e^{\mu} \lrcorner \phi) \vee \omega + (\mathcal{A}\phi) \vee e^{\mu} \lrcorner \omega, \quad (1.19a)$$

$$\mathcal{A}(\phi \vee \omega) = \mathcal{A}\phi \vee \mathcal{A}\omega, \quad (1.19b)$$

$$\mathcal{B}(\phi \vee \omega) = \mathcal{B}\omega \vee \mathcal{B}\phi. \quad (1.19c)$$

O cálculo exterior sobre formas é naturalmente estendido a $\Lambda^*(M)$. O diferencial exterior, atuando em $\phi \in \Lambda^*(M)$ é, simplesmente,

$$d\phi = dx^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \phi. \quad (1.20)$$

O operador codiferencial δ , adjunto de d em relação ao produto escalar (1.2.19), atuando em $\phi \in \Lambda^p(M)$, resulta em

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{1}{(p-1)!} \partial_{\mu} \phi^{\nu_2 \dots \nu_p} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} g^{\mu\nu_1} \partial_{\mu} \phi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} (e^{\mu} \lrcorner dx^{\nu_1}) \partial_{\mu} \phi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\ &= e^{\mu} \lrcorner \partial_{\mu} (\phi_{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}) \\ &= e^{\mu} \lrcorner \partial_{\mu} \phi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Pela relação (1.16), definimos então um operador diferencial sobre $\Lambda^*(M)$ que respeite a álgebra de Kähler-Atiyah, usando (1.20) e (1.21):

$$\begin{aligned} dx^{\mu} \vee \partial_{\mu} &= (dx^{\mu} \wedge + e^{\mu} \lrcorner) \partial_{\mu} \\ &= d + \delta. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Levando em conta o isomorfismo $\gamma^{\mu} \mapsto dx^{\mu}$, poderíamos dizer que o operador de Kähler $d + \delta$ atuando sobre formas diferenciais gerais corresponde ao operador de Dirac $\gamma^{\mu} \partial_{\mu}$. Entretanto, esta

correspondência não é tão direta, pois, como mostraremos a seguir, várias cópias das equações de Dirac surgem em decorrência da aplicação de $d+\delta$ sobre formas gerais.

2.2. Construção de Rabin da equação de Dirac-Kähler.

(56)

Rabin mostrou a relação explícita entre a equação de Kähler-Dirac e a formulação espinorial de Dirac, que, embora não estritamente correta, fornece uma visão intuitiva de como esta relação se processa.

Consideremos a equação de Dirac, em quatro dimensões, num espaço-tempo plano de métrica euclidiana:*

$$(i\gamma^\mu \partial^\mu - m)\psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (2.1)$$

onde as matrizes γ^μ de Dirac satisfazem a álgebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

e ψ é um espinor de quatro componentes,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

* Utilizamos, aqui, notação e convenções do livro de Itzykson e Zuber⁽⁶²⁾. A métrica de Minkowski, $\text{diag}(+---)$, é levada à métrica euclidiana, $\text{diag}(----)$ pela rotação de Wick $x^0 \mapsto -ix^4$. Escrevemos a matriz $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ como $\gamma_5^{\text{Eucl}} = \gamma^4\gamma^1\gamma^1\gamma^3$.

Escolhendo, por exemplo, a representação quiral de Kramers para

$$\gamma^\mu, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

onde I é a unidade 2×2 e σ_i , $i=1,2,3$, são as matrizes de Pauli, a equação (2.1) constitui uma notação compacta para o conjunto de equações

$$\begin{aligned} \partial_4 \psi_3 + i \partial_3 \psi_3 + i \partial_1 \psi_4 + \partial_2 \psi_4 &= m \psi_1 \\ i \partial_1 \psi_3 - \partial_2 \psi_3 + \partial_4 \psi_4 - i \partial_3 \psi_4 &= m \psi_2 \\ \partial_4 \psi_1 - i \partial_3 \psi_1 - i \partial_1 \psi_2 - \partial_2 \psi_2 &= m \psi_3 \\ -i \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_1 + \partial_4 \psi_2 + i \partial_3 \psi_2 &= m \psi_4. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A equação de Dirac pode ser equivalentemente reescrita se, em vez do espinor coluna ψ , utilizarmos a seguinte matriz 4×4 :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

a qual pode ser expandida na base (1.2):

$$\Psi = f I + f_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2!} f_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{3!} f_{\mu\nu\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + f_5 \gamma_5, \quad (2.7)$$

onde os coeficientes são determinados pelos elementos ψ_i do

espinor.

Dado o isomorfismo $\gamma^\mu \mapsto dx^\mu$, podemos passar da expansão (2.7) da matriz Ψ a uma forma diferencial geral

$$\begin{aligned} \phi &= f \cdot 1 + f_\mu dx^\mu + \frac{1}{2!} f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{3!} f_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho + \\ &+ f_5 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\equiv \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)}. \quad (2.8')$$

Explicitamente, na representação de Kramers das matrizes ψ^μ , determinamos as formas

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{4} \psi_1 \quad (2.9a)$$

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{4} (i\psi_3 dx^4 - \psi_4 dx^1 + i\psi_4 dx^2 - \psi_3 dx^3) \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \frac{1}{4} (-i\psi_2 dx^4 \wedge dx^1 - \psi_2 dx^4 \wedge dx^2 - i\psi_1 dx^4 \wedge dx^3 + \\ &+ i\psi_4 dx^1 \wedge dx^2 - \psi_2 dx^1 \wedge dx^3 + i\psi_2 dx^2 \wedge dx^3) \end{aligned} \quad (2.9c)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} &= \frac{1}{4} (-\psi_3 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - i\psi_4 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \\ &- \psi_4 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - i\psi_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \end{aligned} \quad (2.9d)$$

$$\phi^{(4)} = \frac{1}{4} \psi_1 \varepsilon. \quad (2.9e)$$

Como visto no parágrafo anterior, foi demonstrado por (17) Graf que a ação do operador $\gamma^\mu \partial_\mu$ sobre Ψ é equivalente à do operador $d+\delta$ sobre a forma ϕ , e, assim, obtemos a equação de Dirac na linguagem de formas diferenciais, a equação de Dirac-Kähler:

$$i(d+\delta)\phi = m\phi, \quad (2.10)$$

que compreende, na verdade, o conjunto de equações

$$i(d\phi^{(p-1)} + \delta\phi^{(p+1)}) = m\phi^{(p)}, \quad p = 0, \dots, 4, \quad (2.11)$$

ou seja,

$$i\delta\phi^{(1)} = m\phi^{(0)} \quad (2.12a)$$

$$i(d\phi^{(0)} + \delta\phi^{(2)}) = m\phi^{(1)} \quad (2.12b)$$

$$i(d\phi^{(1)} + \delta\phi^{(3)}) = m\phi^{(2)} \quad (2.12c)$$

$$i(d\phi^{(2)} + \delta\phi^{(4)}) = m\phi^{(3)} \quad (2.12d)$$

$$i\delta\phi^{(3)} = m\phi^{(4)}. \quad (2.12e)$$

Por exemplo, da eq. (2.12a) resulta uma das quatro eqs. (2.5):

$$\partial_4\psi_3 + i\partial_1\psi_4 + \partial_2\psi_4 + i\partial_3\psi_3 = m\psi_1.$$

Entretanto, é 16 o número de formas independentes em (2.9), fazendo com que (2.10) contenha 16 equações ao todo. Ou seja, cada uma das eqs. (2.5) ocorre quatro vezes em (2.10). Surge, então, uma degenerescência de ordem quatro no espectro fermiônico.

Além disso, as formas (2.9) não são as únicas a fornecer o mesmo conjunto de equações de Dirac, pois a matriz Ψ foi escolhida arbitrariamente, já que as componentes do espinor poderiam compor quaisquer das quatro colunas de uma matriz 4x4 com zeros nas outras componentes. Cada uma destas matrizes teria sua própria expansão (2.7) e, conseqüentemente, cada uma definiria uma forma geral (2.8) diferente. Na tabela 1 mostramos, na representação de Kramers, as formas diferenciais para as quatro matrizes $\Psi^{(b)}$, $b=1, \dots, 4$:

TABELA 1 - Formas de Kähler na Representação de Kramers. (Espaço euclidiano 4-dimensional)

	$\psi^{(1)}$	$\psi^{(2)}$	$\psi^{(3)}$	$\psi^{(4)}$
$\phi^{(0)}$	$\frac{1}{4} \psi_1$	$\frac{1}{4} \psi_2$	$\frac{1}{4} \psi_3$	$\frac{1}{4} \psi_4$
$\phi^{(1)}$	$\frac{1}{4}(i\psi_3 dx^4$ $- \psi_4 dx^1$ $+ i\psi_4 dx^2$ $- \psi_3 dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_4 dx^4$ $- \psi_3 dx^1$ $- i\psi_3 dx^2$ $+ \psi_4 dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_1 dx^4$ $+ \psi_2 dx^1$ $- i\psi_2 dx^2$ $+ \psi_1 dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_2 dx^4$ $+ \psi_1 dx^1$ $+ i\psi_1 dx^2$ $- \psi_2 dx^3)$
$\phi^{(2)}$	$\frac{1}{4}(-i\psi_2 dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_2 dx^4 \wedge dx^2$ $- i\psi_1 dx^4 \wedge dx^3$ $+ i\psi_1 dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_2 dx^1 \wedge dx^3$ $+ i\psi_2 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_1 dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_1 dx^4 \wedge dx^2$ $+ i\psi_2 dx^4 \wedge dx^3$ $- i\psi_2 dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_1 dx^1 \wedge dx^3$ $+ i\psi_1 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_4 dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_4 dx^4 \wedge dx^2$ $+ i\psi_3 dx^4 \wedge dx^3$ $+ i\psi_3 dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_4 dx^1 \wedge dx^3$ $+ i\psi_4 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_3 dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_3 dx^4 \wedge dx^2$ $- i\psi_4 dx^4 \wedge dx^3$ $- i\psi_4 dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_3 dx^1 \wedge dx^3$ $+ i\psi_3 dx^2 \wedge dx^3)$
$\phi^{(3)}$	$\frac{1}{4}(-\psi_3 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $- i\psi_4 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_4 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $- i\psi_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(\psi_4 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+ i\psi_3 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_3 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $- i\psi_4 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-\psi_1 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $- i\psi_2 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_2 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+ i\psi_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(\psi_2 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+ i\psi_1 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_1 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+ i\psi_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$
$\phi^{(4)}$	$\frac{1}{4} \psi_1 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_2 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_3 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_4 \varepsilon$

TABELA 2 - Formas de Kähler na Representação de Pauli-Dirac. (Espaço euclí
diano 4-dimensional)

	$\Psi^{(1)}$	$\Psi^{(2)}$	$\Psi^{(3)}$	$\Psi^{(4)}$
$\phi^{(0)}$	$\frac{1}{4} \psi_1$	$\frac{1}{4} \psi_2$	$\frac{1}{4} \psi_3$	$\frac{1}{4} \psi_4$
$\phi^{(1)}$	$\frac{1}{4}(-i\psi_1 dx^4$ $- \psi_4 dx^1$ $+i\psi_4 dx^2$ $- \psi_3 dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_2 dx^4$ $- \psi_3 dx^1$ $-i\psi_3 dx^2$ $+ \psi_4 dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_3 dx^4$ $+ \psi_2 dx^1$ $-i\psi_2 dx^2$ $+ \psi_1 dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_4 dx^4$ $+ \psi_1 dx^1$ $+i\psi_1 dx^2$ $- \psi_2 dx^3)$
$\phi^{(2)}$	$\frac{1}{4}(-i\psi_4 dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_4 dx^4 \wedge dx^2$ $-i\psi_3 dx^4 \wedge dx^3$ $+i\psi_1 dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_2 dx^1 \wedge dx^3$ $+i\psi_2 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_3 dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_3 dx^4 \wedge dx^2$ $+i\psi_4 dx^4 \wedge dx^3$ $-i\psi_2 dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_1 dx^1 \wedge dx^3$ $+i\psi_1 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_2 dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_2 dx^4 \wedge dx^2$ $-i\psi_1 dx^4 \wedge dx^3$ $+i\psi_3 dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_4 dx^1 \wedge dx^3$ $+i\psi_4 dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_1 dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_1 dx^4 \wedge dx^2$ $+i\psi_2 dx^4 \wedge dx^3$ $-i\psi_4 dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_3 dx^1 \wedge dx^3$ $+i\psi_3 dx^2 \wedge dx^3)$
$\phi^{(3)}$	$\frac{1}{4}(\psi_1 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+i\psi_2 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_2 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $-i\psi_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-\psi_2 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $-i\psi_1 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_1 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $-i\psi_4 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-\psi_3 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $-i\psi_4 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_4 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+i\psi_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(\psi_4 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+i\psi_3 dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $- \psi_3 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+i\psi_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$
$\phi^{(4)}$	$\frac{1}{4} \psi_3 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_4 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_1 \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_2 \varepsilon$

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(1)} &= \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Psi^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \Psi^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_4 & 0 \end{pmatrix}, & \Psi^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Obviamente, ao mudar a representação das matrizes γ , muda-se a base da expansão (2.7) e novo conjunto de formas diferenciais é obtido. Apresentamos, na tabela 2, as formas relativas à representação de Pauli-Dirac (62).

A equação de Dirac adjunta,

$$i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} = -m\bar{\Psi}, \tag{2.14}$$

também terá seu correspondente em termos de formas diferenciais. Lembremos que o espinor adjunto $\bar{\Psi}$ é definido como

$$\bar{\Psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^0, \tag{2.15}$$

e como, no espaço euclidiano, $\gamma^4 = i\gamma^0$ reescrevemos como

$$\bar{\Psi} = -i\psi^{\dagger}\gamma^4.$$

Dado ψ como o espinor coluna (2.3), temos, na representação de Kramers, que $\bar{\psi}$ é representado como um espinor linha:

$$\bar{\Psi} = -(\psi_3^* \ \psi_4^* \ \psi_1^* \ \psi_2^*). \tag{2.16}$$

A eq. (2.14) constitui, portanto, o seguinte conjunto de equações:

$$\partial_4 \psi_1^* - i\partial_3 \psi_1^* - i\partial_1 \psi_2^* + \partial_2 \psi_2^* = -m\psi_3^* \quad (2.17a)$$

$$-i\partial_1 \psi_1^* - \partial_2 \psi_1^* + \partial_4 \psi_2^* + i\partial_3 \psi_2^* = -m\psi_4^* \quad (2.17b)$$

$$\partial_4 \psi_3^* + i\partial_3 \psi_3^* + i\partial_1 \psi_4^* - \partial_2 \psi_4^* = -m\psi_1^* \quad (2.17c)$$

$$i\partial_1 \psi_3^* + \partial_2 \psi_3^* + \partial_4 \psi_4^* - i\partial_3 \psi_4^* = -m\psi_2^* \quad (2.17d)$$

(56)

O procedimento de Rabin , aplicado à determinação das formas diferenciais correspondentes a (2.16), segue as mesmas linhas gerais que para ψ . Constrói-se uma matriz 4x4 $\bar{\Psi}$, com uma de suas linhas preenchida pelas componentes de $\bar{\psi}$, p.ex.,

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_3^* & \psi_4^* & \psi_1^* & \psi_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Em seguida, desenvolve-se $\bar{\Psi}$ numa base definida por alguma representação das matrizes γ^μ de Dirac,

$$\bar{\Psi} = \bar{f}I + \bar{f}_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2!} \bar{f}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{3!} \bar{f}_{\mu\nu\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \bar{f}_5 \gamma_5. \quad (2.19)$$

E, finalmente, utilizando os coeficientes \bar{f} de (2.19), monta-se a forma adjunta $\bar{\phi}$, de maneira quase análoga à definição (2.8) de ϕ :

$$\bar{\phi} = \bar{f}1 + \bar{f}_\mu dx^\mu - \frac{1}{2!} \bar{f}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu - \frac{1}{3!} \bar{f}_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho + \bar{f}_5 \varepsilon, \quad (2.20)$$

ou seja,

$$\bar{\phi} = \mathcal{B}(\bar{\phi}^{(0)} + \bar{\phi}^{(1)} + \bar{\phi}^{(2)} + \bar{\phi}^{(3)} + \bar{\phi}^{(4)})$$

$$= \bar{\phi}^{(0)} + \bar{\phi}^{(1)} - \bar{\phi}^{(2)} - \bar{\phi}^{(3)} + \bar{\phi}^{(4)}. \quad (2.20')$$

Aplicando sobre a forma diferencial geral o operador $d+\delta$, temos a equação adjunta de Dirac-Kähler:

$$i(d+\delta)\bar{\phi} = -m\bar{\phi}, \quad (2.21)$$

que gera quatro vezes cada uma das equações adjuntas de Dirac (2.17). A tabela 3 a seguir mostra o conjunto de formas que pode ser obtido ao escolher as respectivas linhas de $\bar{\psi}^{(b)}$, $b=1, \dots, 4$, como as que contêm os componentes do espinor adjunto $\bar{\psi}$, na representação de Kramers das γ^μ .

Todo o formalismo acima descrito é igualmente válido no espaço de Minkowski. Para se obter as formas ϕ e $\bar{\phi}$ na métrica $\text{diag}(+---)$, basta fazer a substituição $dx^4 \leftrightarrow idx^0$ nas tabelas 1,2,3. As equações de Dirac-Kähler fornecerão as eqs. (2.5) ou (2.17) com a troca de ∂_4 por $-i\partial_0$.

Na situação de férmions em interação com um campo de gauge, temos a equação de Dirac para campos definidos como seções de um fibrado vetorial associado ao fibrado principal de gauge (Cap. I), em que as derivadas parciais são substituídas por derivadas covariantes de gauge. O potencial de gauge é descrito pela 1-forma de conexão $A=A_\mu dx^\mu = A_\mu T^a dx^\mu$, em que T^a forma uma base na álgebra de Lie do grupo de gauge, e a equação de Dirac covariante se escreve

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi = m \psi. \quad (2.22)$$

Na descrição de férmions por formas diferenciais,

TABELA 3 - Formas Adjuntas de Kähler na Representação de Kramers. (Espaço euclidiano 4-dimensional)

	$\bar{\psi}^{(1)}$	$\bar{\psi}^{(2)}$	$\bar{\psi}^{(3)}$	$\bar{\psi}^{(4)}$
$\bar{\phi}^{(0)}$	$\frac{1}{4} \psi_3^*$	$\frac{1}{4} \psi_4^*$	$\frac{1}{4} \psi_1^*$	$\frac{1}{4} \psi_2^*$
$\bar{\phi}^{(1)}$	$\frac{1}{4}(i\psi_1^* dx^4$ $+ \psi_2^* dx^1$ $+ i\psi_2^* dx^2$ $+ \psi_1^* dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_2^* dx^4$ $+ \psi_1^* dx^1$ $- i\psi_1^* dx^2$ $- \psi_2^* dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_3^* dx^4$ $- \psi_4^* dx^1$ $- i\psi_4^* dx^2$ $- \psi_3^* dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_4^* dx^4$ $- \psi_3^* dx^1$ $+ i\psi_3^* dx^2$ $+ \psi_4^* dx^3)$
$-\bar{\phi}^{(2)}$	$\frac{1}{4}(i\psi_4^* dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_4^* dx^4 \wedge dx^2$ $+ i\psi_3^* dx^4 \wedge dx^3$ $- i\psi_3^* dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_4^* dx^1 \wedge dx^3$ $- i\psi_4^* dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(i\psi_3^* dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_3^* dx^4 \wedge dx^2$ $- i\psi_4^* dx^4 \wedge dx^3$ $+ i\psi_4^* dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_3^* dx^1 \wedge dx^3$ $- i\psi_3^* dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_2^* dx^4 \wedge dx^1$ $+ \psi_2^* dx^4 \wedge dx^2$ $- i\psi_1^* dx^4 \wedge dx^3$ $- i\psi_1^* dx^1 \wedge dx^2$ $- \psi_2^* dx^1 \wedge dx^3$ $- i\psi_2^* dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-i\psi_4^* dx^4 \wedge dx^1$ $- \psi_1^* dx^4 \wedge dx^2$ $+ i\psi_2^* dx^4 \wedge dx^3$ $+ i\psi_2^* dx^1 \wedge dx^2$ $+ \psi_1^* dx^1 \wedge dx^3$ $- i\psi_1^* dx^2 \wedge dx^3)$
$-\bar{\phi}^{(3)}$	$\frac{1}{4}(\psi_1^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $- i\psi_2^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_2^* dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $- i\psi_1^* dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-\psi_2^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+ i\psi_1^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_1^* dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $- i\psi_2^* dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(\psi_3^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $- i\psi_4^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_4^* dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+ i\psi_3^* dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	$\frac{1}{4}(-\psi_4^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $+ i\psi_3^* dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ $+ \psi_3^* dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $+ i\psi_4^* dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$
$\bar{\phi}^{(4)}$	$\frac{1}{4} \psi_3^* \varepsilon$	$\frac{1}{4} \psi_4^* \varepsilon$	$-\frac{1}{4} \psi_1^* \varepsilon$	$-\frac{1}{4} \psi_2^* \varepsilon$

temos o acoplamento mínimo

$$d \rightarrow d + A \quad (2.23)$$

e a equação de Dirac-Kähler passa a

$$i(d + A + \delta - *A \wedge *)\phi = m\phi \quad (2.24)$$

ou

$$i(d\phi^{(p-1)} + A \wedge \phi^{(p-1)} + \delta\phi^{(p+1)} - *A \wedge *\phi^{(p+1)}) = m\phi^{(p)}. \quad (2.24')$$

As cinco equações de Dirac-Kähler são, portanto:

$$\begin{aligned} i(\delta\phi^{(1)} - *A \wedge *\phi^{(1)}) &= m\phi^{(0)} \\ i(d\phi^{(0)} + A \wedge \phi^{(0)} + \delta\phi^{(2)} - *A \wedge *\phi^{(2)}) &= m\phi^{(1)} \\ i(d\phi^{(1)} + A \wedge \phi^{(1)} + \delta\phi^{(3)} - *A \wedge *\phi^{(3)}) &= m\phi^{(2)} \\ i(d\phi^{(2)} + A \wedge \phi^{(2)} + \delta\phi^{(4)} - *A \wedge *\phi^{(4)}) &= m\phi^{(3)} \\ i(d\phi^{(3)} + A \wedge \phi^{(3)}) &= m\phi^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Surgem daí as quatro cópias das eqs. (2.5) com $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + A_\mu$.

Para a completa equivalência entre os formalismos espinorial e de formas diferenciais, é necessário que se eliminem as multiplicidades de equações de Dirac, inevitáveis (56) na construção de Rabin. No artigo de Rabin, que estuda apenas as formas de matriz $\bar{\psi}^{(1)}$, é mostrado que a degenerescência de ordem 4 é mantida na discretização da equação de Dirac-Kähler, e o autor propõe que esta discretização seja equivalente à formulação de Kogut-Susskind de férmions na rede. No entanto, a análise do problema da degenerescência deve levar em conta as formas provenientes das

outras matrizes $\bar{\Psi}^{(2)}$, $\bar{\Psi}^{(3)}$ e $\bar{\Psi}^{(4)}$. Isto é realizado, juntamente com uma redução do grau de degenerescência, na formulação de (16) Becher e Joos, que será desenvolvida no parágrafo seguinte.

2.3. Formulação de Becher-Joos.

(16) Becher e Joos atacaram o problema da multiplicação de equações de Dirac provenientes do esquema de Kähler, considerando, primeiramente, que o espaço das formas diferenciais Λ^* , no espaço euclidiano de quatro dimensões, pode ser considerado como decomponível em quatro subespaços invariantes:

$$\Lambda^* = \bigoplus_{b=1}^4 \Lambda^{*(b)}. \quad (3.1)$$

Isto pode ser sugerido pela abordagem de Rabin, já que as formas deduzidas para cada matriz $\Psi^{(b)}$, $b=1, \dots, 4$, eram independentes entre si. Assim, designemos cada conjunto de formas obtido no esquema de Rabin por um índice $b=1, \dots, 4$, relacionado com a coluna da matriz 4×4 na qual foram dispostas as componentes do espinor, i.e.,

$$\phi_{\text{Rabin}} \longrightarrow \phi^b.$$

Em seguida, faz-se uma mudança de base em Λ^* : no lugar da base canônica, introduz-se uma base matricial $Z=(Z_{ab})$,

$a, b=1, \dots, 4$, definida em termos das transpostas das matrizes de Dirac:

$$Z_i = 1 + \delta_\mu^\top dx^\mu + \frac{1}{2!} \delta_\mu^\top \delta_\nu^\top dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{3!} \delta_\mu^\top \delta_\nu^\top \delta_\rho^\top dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho + \delta_5^\top \varepsilon. \quad (3.2)$$

Se escrevermos

$$\phi^b = \sum_a \psi_a^{(b)} Z_{ab} \quad (b \text{ fixo}), \quad (3.3)$$

(onde agora distinguimos as componentes de ψ de acordo com sua posição na matriz Ψ), o resultado obtido é que, em cada b , i.e., em cada coluna da tabela 1 (ou 2), são resumidas as formas com o mesmo coeficiente. Por exemplo: pela definição (3.2), o elemento Z_{11} é, na representação quiral das γ^μ ,

$$Z_{11} = 1 - i dx^4 \wedge dx^3 + i dx^1 \wedge dx^2 + \varepsilon \quad (3.4)$$

e, como se verifica na tabela 1, constitui a soma das formas da primeira coluna cujos coeficientes são ψ_1 . Analogamente, nesta mesma coluna, Z_{21} , Z_{31} e Z_{41} são a soma das formas com o mesmo coeficiente ψ_2, ψ_3 e ψ_4 , respectivamente.

Ao escrever (3.3), portanto, Becher e Joos eliminaram a fonte da multiplicidade de equações "por coluna" na tabela: ao aplicar o operador $[i(d+\delta)-m]$ à forma (3.3), obtemos exatamente um conjunto de equações de Dirac, para cada b .

Definindo a forma diferencial geral

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_b \phi^b \\ &= \sum_{a,b} \psi_a^{(b)} Z_{ab}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

observa-se que a nova base (Z_{ab}) realiza a decomposição do

espaço das formas diferenciais em quatro subespaços invariantes, também chamados ideais à esquerda.

A equação de Dirac-Kähler, aplicada a ϕ , definida por (3.5),

$$[i(d+\delta) - m]\phi = 0, \quad (3.6)$$

vem, portanto, a ser equivalente à equação de Dirac apenas em cada subespaço invariante: por (1.22), (3.6) se escreve

$$i[dx^\mu \vee \partial_\mu - m]\phi = 0 \quad (3.7)$$

e, pela relação, provada por Becher e Joos,

$$dx^\mu \vee (Z_{ab}) = \delta^{\mu\tau} Z_\tau, \quad (3.8)$$

temos que

$$\begin{aligned} i \sum_{a,b} (\partial_\mu \psi_a^{(b)}) dx^\mu \vee Z_{ab} &= i \sum_{a,b} (\partial_\mu \psi_a^{(b)}) \sum_c (\delta^{\mu\tau})_{ac} Z_{cb} \\ &= m \sum_{c,b} \psi_c^{(b)} Z_{cb}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Daí,

$$i \sum_a (\delta^\mu)_{ca} \partial_\mu \psi_a^{(b)} = m \psi_c^{(b)}$$

ou

$$i \delta^\mu \partial_\mu \psi^{(b)} = m \psi^{(b)}, \quad (3.10)$$

onde

$$\psi^{(b)} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(b)} \\ \psi_2^{(b)} \\ \psi_3^{(b)} \\ \psi_4^{(b)} \end{pmatrix}, \quad b = 1, \dots, 4. \quad (3.11)$$

Assim, pois, associando um fêrmion a cada ideal à esquerda, está reduzida a degenerescência espectral de 16 (na formulação de Rabin) para 4 (na de Becher e Joos). A

degenerescência residual de 4 é inevitável, já que este é o número de ideais à esquerda mínimos (i.e., que não podem, por sua vez, ser reduzidos a subideais à esquerda).

Os vários ideais à esquerda $\Lambda^{*(b)}$ podem ser caracterizados por um conjunto de projetores $\{P^{(b)}\}$, idempotentes sob multiplicação de Clifford, que se projetem sobre os $\Lambda^{*(b)}$. Ou seja, tais que

$$P^{(b)} \vee P^{(b')} = \delta_{bb'} P^{(b)} \quad (3.12a)$$

$$\sum_b P^{(b)} = 1, \quad (3.12b)$$

com a propriedade de que

$$Z_{ac} \vee P^{(b)} = Z_{ab} \delta_{bc}. \quad (3.13)$$

Desta maneira, $P^{(b)}$ projetam, de fato, as formas sobre o respectivo ideal:

$$\begin{aligned} \phi \vee P^{(b)} &= \sum_{a,b'} \psi_a^{(b')} Z_{ab'} \vee P^{(b)} = \sum_{a,b'} \psi_a^{(b')} Z_{ab} \delta_{bb'} \\ &= \sum_a \psi_a^{(b)} Z_{ab} = \phi^b. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos também observar que os projetores podem ser dados pelos elementos diagonais de Z :

$$P^{(b)} = \frac{1}{4} Z_{bb}, \quad (3.15)$$

o que pode ser verificado pela expressão em formas de $P^{(b)}$.

Os férmions definidos pelos ideais à esquerda, além de serem independentes entre si, são, também, idênticos e, portanto, a escolha de um deles, através de uma projeção $P^{(b)}$,

é arbitrária. Desta maneira, fica caracterizada uma simetria da formulação de Becher-Joos.

2.4. Simetria SU(4) para formas e espinores.

Becher e Joos observaram que, ao se tomar a multiplicação de Clifford à direita de uma forma geral por uma outra forma geral, constante, C , com representação matricial (\hat{C}_{ab}),

$$\phi' = \phi \vee C, \quad (4.1)$$

realiza uma transformação entre subespaços invariantes:

$$\psi_a'^{(b)} = \sum_d \hat{C}_{bd} \psi_a^{(d)}. \quad (4.2)$$

As matrizes \hat{C} , unitárias, formam um grupo de transformações SU(4). Este grupo foi identificado por Becher e Joos como o grupo de simetria de "sabores" (i.e., das espécies de férmions associados a cada subespaço invariante $\Lambda^{*(b)}$), (19,20,63) proposto por Susskind para sua formulação de férmions na rede.

Como vimos no parágrafo anterior, uma forma pertencerá a um dos subespaços se satisfizer à eq. (3.14). Isto é equivalente a impor que a forma seja um autovetor de dois operadores, $\tau = i dx^1 \wedge dx^2$ e ϵ , os quais, junto com a identidade (de formas) e seu produto de Clifford formam um

grupo abeliano, denominado "grupo de redução" por Becher e Joos. Explicitamente: desdobrando (3.15), temos que

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 - i dx^4 \wedge dx^3 + i dx^1 \wedge dx^2 + \varepsilon) \\
 P^{(2)} &= \frac{1}{4} (1 + i dx^4 \wedge dx^3 - i dx^1 \wedge dx^2 + \varepsilon) \\
 P^{(3)} &= \frac{1}{4} (1 + i dx^4 \wedge dx^3 + i dx^1 \wedge dx^2 - \varepsilon) \\
 P^{(4)} &= \frac{1}{4} (1 - i dx^4 \wedge dx^3 - i dx^1 \wedge dx^2 - \varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{4.3a}$$

Estas expressões podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 + i dx^1 \wedge dx^2) \vee (1 + \varepsilon) \\
 P^{(2)} &= \frac{1}{4} (1 - i dx^1 \wedge dx^2) \vee (1 + \varepsilon) \\
 P^{(3)} &= \frac{1}{4} (1 + i dx^1 \wedge dx^2) \vee (1 - \varepsilon) \\
 P^{(4)} &= \frac{1}{4} (1 - i dx^1 \wedge dx^2) \vee (1 - \varepsilon)
 \end{aligned}
 \tag{4.3b}$$

ou, compactamente, como o fazem Becher e Joos:

$$P^{(b)} = \frac{1}{4} (1 + i \text{sinal}(12) dx^1 \wedge dx^2) \vee (1 + \text{sinal}(4123) \varepsilon), \tag{4.4}$$

onde $(\text{sinal}(12), \text{sinal}(4123)) = (++) , (-+) , (+-) , (--)$,

para $b = 1, 2, 3, 4$,

ou seja, os $P^{(b)}$ são gerados pelo grupo de redução, \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \{1, \tau, \varepsilon, \tau \vee \varepsilon\} \tag{4.5}$$

O propósito deste parágrafo é mostrar que o anel

formado pelas matrizes de Dirac constitui uma representação da álgebra de Lie dos geradores do grupo $SU(4)$. Devido a suas propriedades de anticomutatividade (1.4), as matrizes γ^μ e seus produtos formam um anel ("anel de Clifford").

Denotemos por γ^H o elemento genérico do anel. O conjunto de todos os γ^H independentes mais a matriz identidade 4×4 é o das 16 matrizes de Dirac dadas em (1.2). Todas as matrizes do anel de Clifford têm traço nulo e determinante unitário (62). No parágrafo 2.2 usamos o fato de que qualquer matriz 4×4 pode ser unicamente expressa em termos das γ^H e da identidade. As matrizes do anel também formam uma álgebra:

$$[\gamma^H, \gamma^K] = c^{HK} \gamma^L. \quad (4.6)$$

Em qualquer representação das matrizes de Dirac, três das matrizes γ^H do anel são diagonais e proporcionais a

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Nas representações utilizadas neste trabalho, estas são, respectivamente,

$-i\gamma^4\gamma^3, i\gamma^1\gamma^2, \gamma_5$ na representação quirial de Kramers

$\gamma^4\gamma^1\gamma^2, i\gamma^1\gamma^2, -i\gamma^4$ na representação de Pauli-Dirac.

O conjunto acima é escolhido como o subconjunto diagonal das matrizes que satisfazem as regras de comutação seguintes:

$$\begin{aligned}
[\gamma^4, \gamma^k \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^4, \gamma^4 \gamma^k \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^k, \gamma^4 \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^k, \gamma^m \gamma^n] &= 0 & (k \neq m \neq n) \\
[\gamma^k, \gamma^4 \gamma^k \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^k, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] &= 0 \\
[\gamma^4 \gamma^k, \gamma^m \gamma^n] &= 0 \\
[\gamma^4 \gamma^k, \gamma^4 \gamma^k \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^4 \gamma^k, \gamma_5] &= 0 \\
[\gamma^k \gamma^m, \gamma^4 \gamma^k \gamma^m] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^k \gamma^m, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^k \gamma^m, \gamma_5] &= 0 & (k \neq m) \\
[\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \gamma_5] &= 0 .
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

De acordo com o teorema sobre classificação de álgebras de grupos simples $(64,65)$, a álgebra das quinze matrizes hermitianas e de traço nulo γ^H , (4.6), é isomorfa à álgebra de Lie do grupo $SU(4)$.

O subconjunto (4.7) de matrizes diagonais comutativas (4.8) constituem uma subálgebra abeliana conhecida como $(64,65)$ (66) subálgebra de Cartan ou tronco e correspondem às três raízes nulas; seus índices indicam a representação usada das matrizes de Dirac.

A equação de Dirac (2.1) é invariante sob a

multiplicação à esquerda por qualquer matriz γ^H do anel:

$$\gamma^H i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = m \gamma^H \psi \quad (4.9)$$

Pondo

$$\gamma^{\mu'} = \gamma^H \gamma^\mu \gamma^{H\dagger} \quad (4.10a)$$

$$\psi' = \gamma^H \psi, \quad (4.10b)$$

temos

$$i \gamma^{\mu'} \partial_\mu \psi' = m \psi'. \quad (4.11)$$

Como qualquer elemento do $SU(4)$ pode ser escrito como uma combinação linear das γ^H , esta propriedade de invariância pode ser tomada como uma invariância sob o grupo $SU(4)$. Estas transformações também se aplicam ao hamiltoniano de Dirac.

Para tornar clara a relação desta invariância $SU(4)$ com a da equação de Dirac-Kähler, relembremos o conceito de ^(67,64) ideais: um ideal à esquerda é um subconjunto L do anel \mathcal{R} tal que, sob multiplicação à esquerda por qualquer matriz do anel, obtemos um membro do subconjunto L :

$$\mathcal{R}L \rightarrow L. \quad (4.12a)$$

Um ideal mínimo à esquerda é aquele que não possui um subconjunto com esta propriedade. Analogamente, para ideais à direita, temos

$$R\mathcal{R} \rightarrow R. \quad (4.12b)$$

Um ideal mínimo à esquerda para o anel de Dirac pode ser dado, por exemplo, pelas combinações lineares (com coeficientes complexos) das matrizes

$$L_1^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \dots, L_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

isto é,

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

com a_i , $i=1, \dots, 4$, números complexos. Outros ideais são dados por matrizes com uma das outras colunas não nula:

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, L^{(3)} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_3 & 0 \\ c_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, L^{(4)} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

A qualquer subálgebra de Cartan, diagonal numa dada representação, corresponde um conjunto de ideais mínimos à esquerda. Uma mudança de representação faz com que estes sejam transformados em ideais não mínimos.

Qualquer matriz de Dirac do anel pode ser representada em termos de ideais à esquerda :

$$\gamma^H = \sum_{k=1}^4 c_k^H L^{(k)} \{h\}, \quad (4.16)$$

onde os $L^{(k)} \{h\}$ são membros dos ideais mínimos à esquerda de uma dada subálgebra de Cartan h .

Um espinor pode ser posto em correspondência com um único dos quatro possíveis ideais mínimos à esquerda. As transformações (4.10) (que equivalem a uma mudança de

representação das γ^μ) permitem que um espinor associado a um dado ideal na "representação original" seja representado pelo ideal mínimo correspondente na "representação nova". A arbitrariedade na escolha de um ideal mínimo, correspondente a um dado espinor, é uma manifestação da simetria $SU(4)$ da equação de Dirac.

Os ideais à esquerda podem ser caracterizados por operadores idempotentes ("projeções") construídos a partir das matrizes de uma subálgebra de Cartan. Os idempotentes agem através de multiplicação à direita:

$$L_m^{(k)} \varepsilon^{(n)} = \delta^{kn} L_m^{(n)}. \quad (4.17)$$

Outras de suas propriedades são:

$$\varepsilon^{(k)} \varepsilon^{(m)} = \delta^{km} \quad (4.18)$$

$$\sum_m \varepsilon^{(m)} = I \quad (4.19)$$

$$\varepsilon^{(k)} L_m^{(k)} = R_{(k)}^m, \quad (4.20)$$

ou seja, ideais à direita são operadores que transformam um ideal à esquerda em outro.

Na representação quirial, os idempotentes são:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{4} (I - i\gamma^4\gamma^3 + i\gamma^1\gamma^2 + \gamma_5)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{4} (I + i\gamma^4\gamma^3 - i\gamma^1\gamma^2 + \gamma_5)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + i\gamma^4\gamma^3 + i\gamma^1\gamma^2 - \gamma_5) \quad (4.21)$$

$$\varepsilon^{(4)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} - i\gamma^4\gamma^3 - i\gamma^1\gamma^2 - \gamma_5)$$

e, na representação de Dirac-Pauli,

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} - i\gamma^4 + i\gamma^1\gamma^2 + \gamma^4\gamma^1\gamma^2)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} - i\gamma^4 - i\gamma^1\gamma^2 - \gamma^4\gamma^1\gamma^2) \quad (4.22)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + i\gamma^4 + i\gamma^1\gamma^2 - \gamma^4\gamma^1\gamma^2)$$

$$\varepsilon^{(4)} = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + i\gamma^4 - i\gamma^1\gamma^2 + \gamma^4\gamma^1\gamma^2).$$

Estas relações são as mesmas dos projetores $P^{(b)}$ do grupo de redução aos ideais mínimos à esquerda do formalismo de formas diferenciais, eqs. (4.3), levando em conta o isomorfismo $\gamma^\mu \mapsto dx^\mu$. Ou seja, podemos identificar o grupo de redução como a subálgebra de Cartan da simetria $SU(4)$ da equação de Dirac-Kähler.

CAPÍTULO III

TEOREMAS DE ÍNDICE E A ANOMALIA AXIAL

Um dos problemas centrais atualmente em teoria quântica de campos é a questão da anomalia axial de Adler, Bell (21,22) e Jackiw, que ocorre nas teorias com invariância sob transformações quirais dos campos fermiônicos, que é o caso, por exemplo, das teorias de gauge para férmions sem massa (26,27) e do modelo de Gell-Mann e Lévy (68).

A anomalia refere-se ao fato de que, embora a densidade lagrangiana da teoria seja invariante sob transformações quirais, o que, pelo teorema de Noether, levaria a uma corrente axial (clássica) conservada, as correções quânticas de 1 loop destróem esta lei de conservação, gerando um termo, dito "anômalo", relacionado com o campo de gauge. No caso do modelo σ , no entanto, a equação anômala controla corretamente o decaimento do píon neutro em dois fótons, enquanto que, no contexto da cromodinâmica quântica, influencia o decaimento da partícula η em três píons (69), reproduzindo os resultados da física hadrônica em baixas energias descritos

(70-73)
 pela álgebra de correntes . O cálculo é, no entanto,
 exato, não havendo correções radiativas de ordens superiores
 (74)
 (teorema de Adler-Bardeen).*

(76,77)
 Mais recentemente, Fujikawa mostrou, sem
 utilizar a teoria de perturbação, como a anomalia de Adler-
 Bell-Jackiw pode ser obtida a partir da medida da integral
 funcional euclidiana para a função de partição de uma teoria de
 gauge com férmions. Sendo a medida não invariante sob
 transformações quirais dos campos fermiônicos, o jacobiano daí
 resultante pode ser relacionado ao termo anômalo na divergência
 da corrente axial.

A anomalia axial é, pois, um resultado não
 perturbativo. Reflete, na verdade, uma propriedade mais
 profunda das teorias de gauge, relativa à sua estrutura
 topológica (i.e., a dos espaços fibrados onde são definidas):
 a equação anômala da divergência da corrente axial seria a
 (78-80)
 "versão local" do teorema do índice de Atiyah-
 (81-88)
 Singer . O teorema relaciona propriedades analíticas de
 operadores elípticos (o índice analítico) sobre fibrados
 vetoriais com os invariantes topológicos destes fibrados
 (34)
 determinados pelas suas classes características ; no caso da
 anomalia quiral, o operador em questão é o operador de Dirac
 euclidiano $\gamma^\mu \partial_\mu$.

 *Ver, no entanto, Huang⁽⁷⁵⁾, §11.3.

Artigos de revisão recentes sobre as anomalias são os cursos de Les Houches de Jackiw (1) e Zumino (2).

A proposta deste capítulo é estudar a anomalia quiral do ponto de vista da equação de Dirac-Kähler. Adotamos a estratégia de Fujikawa (76,77) de buscar o termo anômalo no jacobiano da integral funcional fermiônica, embora o procedimento de regularização de determinantes seja o desenvolvido por Gamboa-Saraví, Muschietti e Solomin (89). O jacobiano é obtido segundo os métodos de Seeley (90), seguindo os cálculos da anomalia realizados para diversos modelos por Gamboa-Saraví, Muschietti, Schaposnik e Solomin (91) e Rego Monteiro (92). A anomalia quiral na rede para o operador de Dirac-Kähler, usando os métodos habituais, foi estudada por Gökeler (93).

3.1. Classes características.

Antes de entrarmos na discussão do teorema do índice propriamente dito, é necessário considerar alguns aspectos de invariantes topológicos de um espaço fibrado (este parágrafo), bem como algumas definições da teoria dos operadores diferenciais que agem sobre fibrados vetoriais (parágrafo seguinte).

Vimos, no Capítulo I, nos exemplos do monopolo de Dirac e do íntanton, que sua interpretação em termos de conexões de espaços fibrados requerem que estes sejam não triviais: o fato de que estas soluções das equações de campo de gauge das respectivas teorias possuam singularidades em certas regiões do espaço-tempo exige a introdução de mais de uma vizinhança no espaço-base para que as soluções possam ser descritas de maneira suave (embora apenas localmente) em todo o espaço-tempo. A relação entre as conexões em cada vizinhança é dada, na região de superposição, pelas funções de transição do fibrado, i.e., por transformações de gauge. Os espaços fibrados nos quais estas conexões são definidas têm, portanto, uma topologia não trivial: há uma atribuição de ordem global, a "carga do monopolo" ou a "carga topológica do íntanton", que é um número que caracteriza a construção do fibrado em questão.

Estas quantidades podem ser determinadas por integrais sobre invariantes topológicos construídos a partir da forma de curvatura Ω do fibrado, chamados classes características. Por invariantes topológicos de um espaço fibrado, entendemos quantidades que:

- (1) não dependem da escolha da forma de conexão ω (ou seja, da escolha de gauge);
- (2) sejam conservadas sob difeomorfismos entre fibrados.

As classes características virão a ser classes de co-homologia

de formas fechadas do fibrado cotangente (complexificado) da variedade-base.

Faremos, aqui, resumidamente, a construção das principais classes características, de interesse para este trabalho. Maiores detalhes podem ser obtidos nos livros de (94) (95) (96) Milnor e Stasheff, Chern, Kobayashi-Nomizu, (97) (34,37) Hirzebruch e, também, nas referências .

Dado um fibrado vetorial E sobre a variedade M , $\dim M = n$, as quatro principais classes características de E são:

- a.) Classes de Chern: c_1, \dots, c_n , para E complexo, $c_i \in \mathcal{H}^{2i}(M)$;
- b.) Classes de Pontrjagin: $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, para E real, $p_i \in \mathcal{H}^{4i}(M)$;
- c.) Classe de Euler: e , para E real e orientável, $e \in \mathcal{H}^n(M)$;
- d.) Classes de Stiefel-Whitney: w_1, \dots, w_n , para E real, $w_i \in \mathcal{H}^i(M; \mathbb{Z}_2)$.

Todas estas classes, com exceção das de Stiefel-Whitney, podem ser expressas em termos da 2-forma de curvatura Ω do fibrado E (na verdade, de seu retrocesso sobre a base, $F = d\pi\Omega$, sendo π a projeção $E \rightarrow M$). Elas são construídas a partir do conceito de polinômios invariantes pela ação adjunta do grupo linear, que desenvolveremos em seguida, para o qual são exibidas suas propriedades co-homológicas e topológicas.

Seja, pois, uma função multilinear (de ordem r) $P(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, cujos argumentos são matrizes $k \times k$ complexas α_i , $i=1, \dots, r$. Esta função será dita um polinômio invariante se,

para qualquer matriz $k \times k$ $g \in GL(k, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} P(\text{Ad}_g \alpha_1, \dots, \text{Ad}_g \alpha_r) &\equiv P(g \alpha_1 g^{-1}, \dots, g \alpha_r g^{-1}) \\ &= P(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Se P se mantiver inalterado por qualquer permutação de seus argumentos, P será um polinômio invariante simétrico.

Sendo P um polinômio invariante homogêneo de grau r , usemos a propriedade (1.1) no caso em que g é uma transformação infinitesimal:

$$g = I + g' \quad (1.2a)$$

$$g^{-1} = I - g' + \dots \quad (1.2b)$$

onde I é a matriz identidade $k \times k$. Desprezando termos de ordem quadrática e superiores em g' , temos que:

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= P((I+g')\alpha_1(I-g'), \dots, (I+g')\alpha_r(I-g')) \\ &= P(\alpha_1 + g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, \alpha_r + g'\alpha_r - \alpha_r g'). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dada a multilinearidade de P , desdobramos (1.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) &= P(\alpha_1, \dots, \alpha_i + g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r + g'\alpha_r - \alpha_r g') + \\ &\quad + P(g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, \alpha_i + g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r + g'\alpha_r - \alpha_r g') \\ &= \dots = P(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + \\ &\quad + P(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, g'\alpha_r - \alpha_r g') + \dots + P(\alpha_1, \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r) + \dots + \\ &\quad + P(\alpha_1, \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, g'\alpha_r - \alpha_r g') + \dots + P(g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P(g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, \alpha_i, \dots, g'\alpha_r - \alpha_r g') + \dots + P(g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r) \\
& + \dots + P(g'\alpha_1 - \alpha_1 g', \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, g'\alpha_r - \alpha_r g') \\
& = P(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + \sum_{i=1}^r P(\alpha_1, \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r), \quad (1.4)
\end{aligned}$$

onde foram mantidos apenas os polinômios lineares em g' .

Portanto, de (1.4):

$$\sum_{i=1}^r P(\alpha_1, \dots, g'\alpha_i - \alpha_i g', \dots, \alpha_r) = 0. \quad (1.5)$$

A eq. (1.5) é igualmente válida se os elementos das matrizes forem formas diferenciais.

Supondo, então, que cada α_i seja uma matriz $k \times k$ de formas de grau d_i e introduzindo uma matriz $k \times k$ de 1-formas $\theta = g'\alpha$, onde α é uma 1-forma escalar, deduzimos de (1.5) a relação

$$\begin{aligned}
0 & = \alpha \wedge \left[\sum_{i=1}^r P(\alpha_1, \dots, g'\alpha_i, \dots, \alpha_r) - \sum_{i=1}^r P(\alpha_1, \dots, \alpha_i g', \dots, \alpha_r) \right] \\
& = \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, g'\alpha \wedge \alpha_i, \dots, \alpha_r) + \\
& \quad - \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_i} P(\alpha_1, \dots, \alpha_i \wedge g'\alpha, \dots, \alpha_r),
\end{aligned}$$

e, assim, provamos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, \theta \wedge \alpha_i, \dots, \alpha_r) - \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_i} P(\alpha_1, \dots, \alpha_i \wedge \theta, \dots, \alpha_r) \\
& = \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, \theta \wedge \alpha_i - (-1)^{d_i} \alpha_i \wedge \theta, \dots, \alpha_r) = 0. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

De (1.6), vemos que, se θ for a 1-forma de conexão ω , o diferencial exterior do polinômio invariante é:

$$\begin{aligned}
 dP(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, d\alpha_i, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, d\alpha_i + \omega \wedge \alpha_i - (-1)^{d_i} \alpha_i \wedge \omega, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, D\alpha_i, \dots, \alpha_r), \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

onde $D\alpha_i$ é a derivada exterior covariante de α_i . No caso em que $\alpha_i = \Omega$, a 2-forma de curvatura, a derivada exterior da 2r-forma $P(\Omega) \equiv P(\Omega, \dots, \Omega)$ é nula, devido à identidade de Bianchi, $D\Omega = 0$:

$$dP(\Omega) = \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\Omega, \dots, D\Omega, \dots, \Omega) = 0. \quad (1.8)$$

Assim, $P(\Omega)$ é uma forma fechada sobre M e, por conseguinte, define uma classe de co-homologia, ou seja, $P(\Omega) \in \mathcal{H}^{2k}(M)$.

Devemos mostrar, ainda, que a integral de $P(\Omega)$ não depende da forma de conexão definida no fibrado vetorial E . Sejam, portanto, duas formas de conexão ω, ω' sobre E e Ω, Ω' as respectivas formas de curvatura. Tomemos uma família de formas de conexão fazendo uma interpolação entre ω e ω' , introduzindo um parâmetro $t \in [0, 1]$:

$$\omega_t = \omega + t\eta, \quad \eta = \omega' - \omega, \quad (1.9)$$

cujas formas de curvatura são dadas por

$$\begin{aligned}
 \Omega_t &= d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t \\
 &= d\omega + \omega \wedge \omega + t(d\eta + \omega \wedge \eta + \eta \wedge \omega) + t^2 \eta \wedge \eta \\
 &= \Omega + tD\eta + t^2 \eta \wedge \eta. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Seja, agora, $P(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ um polinômio simétrico e definamos

$$P(\alpha) \equiv P(\alpha, \dots, \alpha) \quad (1.11)$$

$$q(\beta, \alpha) \equiv r P(\beta, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{r-1}). \quad (1.12)$$

Observemos que

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = D\eta + 2t\eta \wedge \eta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} P(\Omega_t, \dots, \Omega_t) = r P\left(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \dots, \Omega_t\right) \\ &= r P(D\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) + 2tr P(\eta \wedge \eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \\ &= q(D\eta, \Omega_t) + 2tq(\eta \wedge \eta, \Omega_t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Tomemos

$$D\Omega_t = tD^2\eta + t^2(D\eta \wedge \eta - \eta \wedge D\eta)$$

e, como

$$\begin{aligned} D^2\eta &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \eta - \eta \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \eta - \eta \wedge \Omega, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} D\Omega_t &= t[(\Omega + tD\eta) \wedge \eta - \eta \wedge (\Omega + tD\eta)] \\ &= t[(\Omega + tD\eta + t^2\eta \wedge \eta) \wedge \eta - \eta \wedge (\Omega + tD\eta + t^2\eta \wedge \eta)] \\ &= t(\Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

De acordo com a eq. (1,7), fazendo $\alpha_1 = \eta, \alpha_2, \dots, \alpha_r = \Omega_t$, temos

$$dP(\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) = P(D\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) - (r-1)P(\eta, D\Omega_t, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \quad (1.15)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} dq(\eta, \Omega_t) &= r dP(\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \\ &= q(D\eta, \Omega_t) - r(r-1)t P(\eta, (\Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t), \Omega_t, \dots, \Omega_t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Usando (1.6), com $\theta = \alpha_1 = \eta$, $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = \Omega_t$, obtemos

$$2P(\eta \wedge \eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) + (r-1)P(\eta, (\Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t), \Omega_t, \dots, \Omega_t) = 0$$

ou

$$2q(\eta \wedge \eta, \Omega_t) + r(r-1)P(\eta, (\Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t), \Omega_t, \dots, \Omega_t) = 0. \quad (1.17)$$

Substituindo (1.17) em (1.16), vem que

$$\begin{aligned} dq(\eta, \Omega_t) &= q(D\eta, \Omega_t) + 2tq(\eta \wedge \eta, \Omega_t) \\ &= \frac{d}{dt} P(\Omega_t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

por (1.13). Integrando em t ,

$$\begin{aligned} P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= P(\Omega') - P(\Omega) = \int_0^1 dq(\eta, \Omega_t) dt \\ &= d \int_0^1 q(\omega' - \omega, \Omega_t) dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

o que mostra que $P(\Omega')$ e $P(\Omega)$ diferem apenas por uma forma exata. Pertencem, pois, à mesma classe de co-homologia. Se tomarmos a integral de (1.19) sobre M , para M compacta, sem bordos,

$$\int_M P(\Omega') = \int_M P(\Omega). \quad (1.20)$$

Portanto, as integrais de polinômios invariantes simétricos na forma de curvatura de um fibrado vetorial não dependem da escolha da forma de conexão para este fibrado (o que equivale a uma escolha de gauge).

O elemento do anel de co-homologia $\mathbb{R}^*(M) = \bigoplus \mathbb{R}^i(M)$ representado por $P(\Omega)$ é chamado classe característica do fibrado e constitui um invariante topológico deste fibrado: ele

depende apenas do próprio fibrado e da função P . É possível, então, definir um homomorfismo entre o anel dos polinômios invariantes simétricos e o anel de co-homologia do fibrado. Na literatura matemática, este é conhecido como o homomorfismo de Weil.

Passamos, agora, à construção das classes de Chern. Um exemplo de polinômio invariante é dado pelo determinante $\det(I+\alpha)$, onde α é uma matriz $k \times k$ e I é a identidade $k \times k$, e que pode ser escrito como

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi} \alpha\right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^j P_j(\alpha), \quad (1.21)$$

onde $P_j(\alpha) = P_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) = P_j(\alpha, \dots, \alpha)$ é um polinômio de grau j nos elementos de α (que podem ser formas diferenciais), o qual satisfaz, devido às propriedades do determinante, a condição (1.1). Os $P_j(\alpha)$ são calculados em termos da diagonalização da matrix α : sendo $\{\lambda_i\}, i=1, \dots, k$, os autovalores de α , podemos escrever

$$\begin{aligned} \det\left(I + \frac{i}{2\pi} \alpha\right) &= \left(1 + \frac{i}{2\pi} \lambda_1\right) \left(1 + \frac{i}{2\pi} \lambda_2\right) \cdots \left(1 + \frac{i}{2\pi} \lambda_k\right) \\ &= 1 + \frac{i}{2\pi} P_1(\lambda) + \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 P_2(\lambda) + \cdots + \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k P_k(\lambda), \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde

$$P_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i = \text{tr } \alpha \quad (1.23a)$$

$$P_2 = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_k^2) \right]$$

$$= \frac{i}{2} [(\text{tr } \alpha)^2 - \text{tr } \alpha^2], \quad (1.23b)$$

etc. Desta maneira, ao considerar um fibrado vetorial complexo E sobre M , com 2-forma de curvatura Ω (que vem a ser uma matriz da álgebra de Lie de $GL(k, \mathbb{C})$), definimos a forma de Chern total de E , $c(E)$, fazendo a substituição de α por Ω em (1.21):

$$c(E) = \det \left(I + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) \quad (1.24a)$$

$$= 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots, \quad (1.24b)$$

onde identificamos $c_j(\Omega) \equiv P_j(\Omega)$. Os $c_j(\Omega)$, as formas de Chern, são sempre formas de grau par, pois Ω é 2-forma, e são dadas por (1.22) e (1.23):

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \text{tr } \Omega, \quad (1.25a)$$

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}(\Omega \wedge \Omega) - \text{tr } \Omega \wedge \text{tr } \Omega], \quad (1.25b)$$

⋮

A soma (1.24b) é certamente finita: como os $c_j(\Omega) \in \Lambda^{2j}(M)$, temos que os $c_j = 0$ para $2j > n = \dim M$. Cada $c_j(\Omega)$ constitui uma forma fechada e, portanto, define uma classe de cohomologia, $c_j(E)$, do fibrado vetorial E que, como vimos, independe da conexão escolhida sobre E .

Podemos associar às classes características certos números inteiros, que caracterizam o fibrado em questão, por serem também invariantes topológicos: a integral de um representante de uma classe de Chern c_j sobre um $2j$ -ciclo (superfície fechada de dimensão $2j$) de M é um inteiro. Dá-se o

nome de número de Chern de um fibrado quando esta integral varrer toda a variedade M , de dimensão n ; o integrando é, portanto, um representante de classe característica dado por uma n -forma. Como vimos no Capítulo I, estes números ocorrem em física, por exemplo, como a carga do monopolo (fibrado eletromagnético, $G=U(1)$), ou o número do íntanton (fibrado de Yang-Mills, $G=SU(N)$).

Voltando à eq. (1.24), a classe total de Chern pode ser escrita em termos de variáveis $x_j \equiv \frac{i}{2\pi} \Omega_j$, onde Ω_j são as formas autovalores de Ω , como

$$c(E) = \prod_{j=1}^n (1+x_j) \quad (1.26)$$

e possui a propriedade

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F), \quad (1.27)$$

quando se toma a "soma de Whitney" dos fibrados vetoriais E e F (isto é, a soma direta das fibras de E e F sobre cada ponto de M ; sua curvatura é a soma direta das respectivas curvaturas de E e F), pois $\det(I + \Omega_{E \oplus F}) = \prod_j (1+x_j^E) \prod_j (1+x_j^F)$.

A expressão (1.26) é a mesma que se obtém se admitirmos que o fibrado E venha a ser "desdobrado" em uma soma direta de fibrados-linha (fibrados com fibras unidimensionais), L_j :

$$E = L_1 \oplus \dots \oplus L_k, \quad (1.28)$$

já que a classe total de Chern de um fibrado-linha L é

$$c(L) = 1 + c_1(L)$$

$$= 1 + \frac{i}{2\pi} \Omega = 1 + x \quad (1.29)$$

e, então, por (1.27),

$$c(E) = \prod_j c(L_j) = \prod_j (1 + x_j). \quad (1.30)$$

Mesmo que o fibrado considerado não seja "desdobrável", no sentido acima, podemos manipular suas classes de Chern como se (97,98) o fosse .

De acordo com esse "princípio de desdobramento", podem ser definidas outras classes de co-homologia características associadas à de Chern. As principais são:

a.) o caráter de Chern:

$$ch(E) = \sum_{j=1}^n e^{x_j} \quad (1.31a)$$

$$= n + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(E) + \dots \quad (1.31b)$$

b.) a classe de Todd:

$$td(E) = \prod_{j=1}^n \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \quad (1.32a)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} c_1(E) + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2)(E) + \dots \quad (1.32b)$$

Dado que, para o produto tensorial de fibrados-linha L_1 e L_2 ,

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2), \quad (1.33)$$

temos que, se E e F forem somas de fibrados-linha,

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F) \quad (1.34)$$

$$ch(E \otimes F) = ch(E) \cdot ch(F) \quad (1.35)$$

$$td(E \oplus F) = td(E) \cdot td(F). \quad (1.36)$$

Pelo princípio de desdobramento, estas relações são válidas para qualquer fibrado complexo.

Seja E , agora, um fibrado vetorial real. Suas classes de Pontrjagin são definidas de maneira análoga às de Chern, ou em termos destas, tomando a complexificação de E :

$$p_i(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C}), \quad (1.37)$$

$j=0, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Por (1.37), vê-se que $p_i(E) \in \mathcal{L}^{4i}(M)$.

Para E real e orientável, de dimensão par $n=2r$, a classe de Euler de E é dada por

$$e(E) = \prod_{j=1}^r x_j \quad (1.38)$$

e satisfaz

$$e(E \oplus F) = e(E)e(F) \quad (1.39)$$

$$e(E) = c_n(E \otimes \mathbb{C}), \quad (1.40)$$

(E e F reais e orientáveis), de modo que

$$\begin{aligned} e^2(E) &= (-1)^r e(E \otimes \mathbb{C}) \\ &= (-1)^r c_n(E \otimes \mathbb{C}) = p_r(E). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Em dimensões ímpares, definimos $e(E)=0$.

Enfim, as classes de Stiefel-Whitney w_i , $i=1, \dots, n-1$, que assumem valores em \mathbb{Z}_2 , não são expressas, como as outras classes de co-homologia apresentadas, em termos da forma de curvatura. Seu estudo requer a teoria geral das classes de co-homologia (94). A importância destas classes se resume em dois aspectos, relativos ao fibrado tangente de M .

$$(1) \quad w_1(TM)=0 \iff M \text{ é orientável}; \quad (1.42)$$

(2) $w_2(TM)=0 \Rightarrow$ o transporte paralelo de espinores de Dirac em torno de algum caminho em M está bem definido globalmente.

O espaço que satisfizer as duas condições acima costuma ser denominado uma variedade de spin. No caso em que $w_2(TM) \neq 0$ há ambigüidades no transporte paralelo de espinores e, assim, a variedade M não admite uma estrutura espinorial.

3.2. Operadores diferenciais elípticos.

Sejam E e F dois fibrados vetoriais complexos sobre a mesma variedade-base riemanniana M (espaço-tempo), suposta compacta. Consideremos os conjuntos de seções globais C^∞ de E e F , $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$, respectivamente; suponhamos, também, que os elementos de $\Gamma(E)$ e suas primeiras ℓ derivadas, bem como os de $\Gamma(F)$ e suas primeiras ℓ' derivadas, sejam funções de quadrado integrável (na norma definida pelo produto interno de funções calculado em cada fibra de E ou F). Isto confere a $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ a estrutura de espaços de Sobolev H^ℓ , $H^{\ell'}$, que são espaços de Hilbert (99,37) :

$$\Gamma(E) \equiv H^\ell(E) \quad (2.1a)$$

$$\Gamma(F) \equiv H^{\ell'}(F). \quad (2.1b)$$

Definimos um operador diferencial, de ordem m , D entre os fibrados E e F como um mapa linear entre os espaços de

seções globais acima; como operadores diferenciais não mantêm necessariamente a estrutura de espaços L^2 , escrevemos

$$D: H^{\ell}(E) \rightarrow H^{\ell-m}(F). \quad (2.2)$$

(Em situações físicas, usualmente utilizamos operadores diferenciais de primeira ou segunda ordem, de modo que basta $\ell \geq 2$).

Em termos de coordenadas numa vizinhança local U da base M , $\{x^{\alpha}\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $n = \dim M$, o operador diferencial D se escreve, de maneira geral,

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha} D^{\alpha}, \quad (2.3)$$

onde definimos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} D^{\alpha} &= \prod_{i=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i} \\ &= (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

e A^{α} são coeficientes matriciais C^{∞} . Ou seja, para $u \in H^{\ell}(E)$, $Du \in H^{\ell-m}(F)$ é então dado por

$$[Du(x)]_i = \sum_{|\alpha| \leq m} A_{ij}^{\alpha}(x) (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} u_j(x), \quad (2.6)$$

com $i=1, \dots, \dim F$, $j=1, \dots, \dim E$, onde $\dim E$ e $\dim F$ são as dimensões das respectivas fibras de E e F . (Usualmente, E e F

terão o mesmo espaço vetorial como fibra típica e A^α será, então, uma matriz quadrada).

Tomando a transformada de Fourier de $u(x) \in H^l(E)$ na vizinhança U :

$$u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (2.7)$$

definimos o símbolo do operador D , $\sigma(D)$, por

$$Du(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(D) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (2.8)$$

Aplicando (2.6) em (2.7), vem

$$\begin{aligned} Du(x) &= \int \sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha \xi^\alpha \right] \hat{u}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde, comparando com (2.8), temos a expressão para o símbolo $\sigma(D)$:

$$\sigma(D)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha \xi^\alpha, \quad (2.10)$$

que constitui uma matriz $(\dim F) \times (\dim E)$. É, portanto, um polinômio em ξ de ordem m que, em geral, será função de x .

Observe que

$$\xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \quad (2.11)$$

e cada ξ deve ser interpretado como elemento do fibrado cotangente sobre M , i.e., é uma 1-forma.

A eq. (2.8) serve, igualmente, dadas expressões arbitrárias C^∞ para $\sigma(D)$, para definir uma classe de operadores mais geral que a dos operadores diferenciais (para os quais a eq. (2.10) é obrigatória). Estes operadores são conhecidos na literatura matemática como operadores pseudodiferenciais ou operadores de Calderón-Zygmund (28,99). Os resultados subseqüentes podem ser determinados em geral para os operadores pseudodiferenciais; no entanto, como estes não serão utilizados neste trabalho, aplicaremos livremente as expressões restritas aos operadores diferenciais.

Um operador é dito elíptico se o termo de ordem mais alta, m , de seu símbolo ("símbolo principal" ou "polinômio característico" do operador),

$$\tilde{\sigma}(D)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} A^\alpha(x) \xi^\alpha \quad (2.12)$$

for uma matriz inversível, para $\xi \neq 0$. Fisicamente, isto significa que o operador no espaço de Minkowski que corresponde a D possui funções de Green livres bem definidas, permitindo a introdução de propagadores dos campos nos quais o operador atua. Também implica que a camada de massa do operador é única.

Assim, vemos que o laplaciano (euclidiano), $-\partial_\lambda \partial_\lambda = (-i\partial_\lambda)(-i\partial_\lambda)$ é elíptico, já que seu símbolo é ξ^2 .

O fato de os conjuntos das seções globais dos fibrados E e F serem espaços de Hilbert confere a eles uma

estrutura hermitiana em suas fibras. Dado, portanto, o produto interno no fibrado E , para $f, g \in H^l(E)$,

$$\langle f, g \rangle_E = \int_M (f, g)_E = \int_M (f(x), g(x))_E, \quad (2.13)$$

podemos considerar o operador D^* , adjunto formal a D : se $D: E \rightarrow F$, então $D^*: F \rightarrow E$ é tal que

$$\langle Df, g \rangle_F = \langle f, D^*g \rangle_E. \quad (2.14)$$

(99)

O símbolo do operador adjunto, $\sigma(D^*)$, é dado por :

$$\sigma(D^*) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \bar{\xi}^{\alpha}} D^{\alpha} [\sigma(D)(x, \bar{\xi})]^* \quad (2.15)$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. De acordo com (2.15), o polinômio característico de D^* é, então,

$$\tilde{\sigma}(D^*) = \tilde{\sigma}(D)^*. \quad (2.16)$$

A estrela em (2.15) e (2.16) significa adjunção com respeito ao produto escalar $(\ , \)$. Para zero-formas, isto é simples conjugação complexa. No caso de formas de grau superior, $\omega = \xi \wedge \dots \wedge \xi$, além da conjugação complexa, há que se tomar a (28) contração i_{ω} , eq. (2.1.12).

Sejam, agora, o núcleo do operador D como seu espaço nulo (i.e., espaço das soluções, ou dos modos zero):

$$\ker D = \{ u \in H^l(E) \mid Du = 0 \} \quad (2.17)$$

e a imagem de D :

$$\text{im } D = \{ v \in H^{l-m}(F) \mid v = Du, u \in H^l(E) \}. \quad (2.18)$$

Definimos, ainda, o co-núcleo de D como o espaço quociente de

$H^{\ell-m}(F)$ por $\text{im } D$:

$$\text{coker } D = H^{\ell-m}(F)/\text{im } D \quad (2.19a)$$

$$= \ker D^*. \quad (2.19b)$$

Ambos $\ker D$ e $\text{coker } D$ são espaços de dimensão finita para M compacta.

Consideremos, pois, uma seqüência finita de fibrados vetoriais complexos $\{E_i\}$ sobre M , e um operador diferencial D_i , indexado de acordo com o fibrado em que atua: $D_i: E_i \rightarrow E_{i+1}$:

$$0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{D_0} E_1 \xrightarrow{D_1} E_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{n-1}} E_n \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Esta seqüência constitui um complexo elíptico se

$$i) \quad D_{i+1} D_i = 0; \quad (2.21)$$

ii) o laplaciano associado a D_i :

$$\Delta_i = D_i^* D_i + D_{i-1} D_{i-1}^*, \quad (2.22)$$

onde $D_i^*: E_{i+1} \rightarrow E_i$ é o adjunto formal de D_i , for um operador elíptico; ou seja, a seqüência de símbolos relativa a (2.20) é exata:

$$\ker \tilde{\sigma}(D_i) = \text{im } \tilde{\sigma}(D_{i-1}), \quad \forall i. \quad (2.23)$$

Os principais complexos elípticos, ditos "clássicos", para os quais costuma-se discutir o teorema do índice de Atiyah-Singer, são:

a. O complexo de de Rham.

A álgebra exterior das formas diferenciais complexas, $\Lambda^*(M) = \bigoplus_k \Lambda^k(T^*(M) \otimes \mathbb{C})$, eq. (2.2.7), pode ser decomposta na

álgebra exterior das formas de grau par e de grau ímpar:

$$\Lambda^* = \Lambda^{\text{par}} \oplus \Lambda^{\text{ímpar}}, \quad (2.24)$$

$$\Lambda^{\text{par}} = \Lambda^0 \oplus \Lambda^2 \oplus \dots \quad (2.25a)$$

$$\Lambda^{\text{ímpar}} = \Lambda^1 \oplus \Lambda^3 \oplus \dots \quad (2.25b)$$

Podemos gerar um complexo elíptico a partir do operador (elíptico) $d+\delta$, onde d é a derivação exterior e δ seu adjunto formal, e dos fibrados sobre M definidos por (2.25):

$$d+\delta: \Gamma\Lambda^{\text{par}} \rightarrow \Gamma\Lambda^{\text{ímpar}} \quad (2.26)$$

onde $\Gamma\Lambda^{\text{par}}$ e $\Gamma\Lambda^{\text{ímpar}}$ são os espaços das seções dos fibrados (2.25).

b. O complexo de Hirzebruch.

É possível obter uma outra decomposição da álgebra exterior $\Lambda^*(M)$ em variedades de dimensão par ($n=2\ell$): seja o mapa $\alpha: \Lambda^* \rightarrow \Lambda^*$ tal que, sobre cada Λ^k ,

$$\alpha = i^{k(k-1)+\ell} *, \quad (2.27)$$

onde $*$ é a estrela de Hodge (1.2.13), que possui as propriedades:

$$i) \alpha^2 = 1 \quad (2.28a)$$

$$ii) \alpha(d+\delta) = -(d+\delta)\alpha. \quad (2.28b)$$

Este operador α define dois subfibrados de Λ^* :

$$\Lambda^* = \Lambda^+ \oplus \Lambda^- \quad (2.29)$$

para os quais

$$\alpha(u) = +u, \quad u \in \Lambda^+; \quad (2.30a)$$

$$\alpha(u) = -u, \quad u \in \Lambda^-. \quad (2.30b)$$

Pela propriedade de anticomutatividade (2.28b), o operador $d+\delta$ define dois mapas entre fibrados

$$d+\delta: \Gamma\Lambda^+ \rightarrow \Gamma\Lambda^- \quad (2.31a)$$

$$d+\delta: \Gamma\Lambda^- \rightarrow \Gamma\Lambda^+ \quad (2.31b)$$

e como $d+\delta: \Gamma\Lambda^* \rightarrow \Gamma\Lambda^*$ é auto-adjunto, os mapas (2.31) são adjuntos entre si.

c. O complexo de Dolbeault.

Embora não o utilizemos neste trabalho, mencionamos, por uma questão de completeza, o complexo de Dolbeault. No caso em que a variedade-base M for uma variedade complexa de dimensão (real) n , teremos coordenadas complexas $z = x^a + iy^a$ e $\bar{z}^a = x^a - iy^a$. Elementos das bases dos espaços tangente e cotangente de M poderão ser definidos em termos das coordenadas z, \bar{z} como

$$\frac{\partial}{\partial z^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} - i \frac{\partial}{\partial y^a}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} + i \frac{\partial}{\partial y^a} \quad (2.32)$$

$$dz^a = dx^a + i dy^a; \quad d\bar{z}^a = dx^a - i dy^a, \quad (2.33)$$

respectivamente, e a derivação exterior neste caso é dada por

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial z^a} dz^a + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^a} d\bar{z}^a \\ &= \partial f + \bar{\partial} f. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, introduzem-se formas diferenciais complexas, $\omega \in \Lambda^{p,q}$,

onde, na expansão de ω nas bases (2.33), há p fatores do tipo dz^a e q fatores do tipo dz^{-a} . E os operadores $\partial, \bar{\partial}$ definidos em (1.34) são interpretados como

$$\partial : \Lambda^{p,q} \rightarrow \Lambda^{p+1,q} \quad (2.35a)$$

$$\bar{\partial} : \Lambda^{p,q} \rightarrow \Lambda^{p,q+1} \quad (2.35b)$$

Com a propriedade

$$\partial\partial\omega = 0$$

$$\bar{\partial}\bar{\partial}\omega = 0,$$

vemos que estes operadores podem formar um complexo. O complexo de Dolbeault é aquele definido por $\bar{\partial}$ atuando em espaços $\Lambda^{0,q}$.
(34,99,28)

Para maiores detalhes sobre este complexo ver .

d. O complexo de spin.

Em variedades riemannianas M que permitem a construção de uma estrutura de álgebra de Clifford podemos ter espaços fibrados vetoriais cujas seções sejam espinores de Dirac ψ_a . Em espaços de dimensão 4, $a=1,\dots,4$. Estes objetos sofrem a ação do operador de Dirac euclidiano covariante em M , i.e., dada uma base de referenciais ortonormais $\{\hat{e}_a^\mu\}$ em cada ponto de M

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \gamma^a \hat{e}_a^\mu(x) D_\mu \\ &= \gamma^a \hat{e}_a^\mu(x) \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} [\gamma_b, \gamma_c] \omega_\mu^{bc}(x) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

As matrizes $\{\gamma^a\}$ são elementos de álgebra de Clifford euclidiana (2.2.2) e a combinação $\gamma^a \hat{e}_a^\mu = \gamma^\mu$ são as matrizes de Dirac no espaço euclidiano, p.ex., as dadas em (2.2.4). ω_μ^{bc} são os

coeficientes de conexão de Ricci de M .

Na representação quiral de Kramers, a matriz γ_5 é usada para definir a quiralidade de um espinor ψ , de acordo com o seu autovalor ± 1 :

$$\gamma_5 \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}. \quad (2.37)$$

Há, portanto, uma decomposição do espaço dos espinores $\{\psi\}$ em espinores de quiralidade positiva $\{\psi_+\}$ e negativa $\{\psi_-\}$, o que induz a decomposição análoga do fibrado vetorial de que os são seções C^∞, Δ , em dois subfibrados Δ_+ e Δ_- .

O operador D , (2.36), é elíptico e define o chamado complexo de spin

$$D^+ : \Delta_+ \rightarrow \Delta_- \quad (2.38a)$$

$$D^- : \Delta_- \rightarrow \Delta_+. \quad (2.38b)$$

3.3 Teorema do índice de Atiyah-Singer.

Como já foi dito, o teorema do índice de Atiyah-Singer relaciona propriedades analíticas de um operador elíptico com as propriedades topológicas do fibrado onde ele atua.

Consideremos, pois, uma variedade riemanniana, compacta, orientável, M , sobre a qual definem-se dois fibrados

vetoriais complexos, E e F , de mesma dimensão, cujas seções sejam infinitamente diferenciáveis. Admitimos a existência de um operador diferencial elíptico D entre E e F , tal como no parágrafo anterior, que pode ser descrito em termos de coordenadas determinadas numa vizinhança $U \subset M$. D possui um adjunto formal D^* em relação ao produto interno hermitiano definido nos dois fibrados.

Entendemos como o índice analítico de D , $i_a(D)$, a diferença entre o número de soluções de D e o de D^* , i.e., a diferença entre as dimensões dos núcleos de D e D^* :

$$i_a(D) = \dim \ker D - \dim \ker D^*. \quad (3.1a)$$

Como $\ker D = \ker D^*D$ e $\ker D^* = \ker DD^*$, estes núcleos são os espaços das seções harmônicas de E e F , únicas representantes das respectivas classes de co-homologia de E e F , $\mathcal{H}(E)$ e $\mathcal{H}(F)$. Podemos escrever, então, alternativamente,

$$i_a(D) = \dim \mathcal{H}(E) - \dim \mathcal{H}(F). \quad (3.1b)$$

Obviamente, se o operador for auto-adjunto, $D=D^*$, seu índice analítico é nulo.

O índice topológico de D , $i_t(D)$, será definido em termos de classes de co-homologia características do fibrado cotangente sobre M . Seja $td(M)$ a classe de Todd do fibrado cotangente complexificado de M , $\Psi(M) = T^*(M) \otimes \mathbb{C}$, ou seja, de acordo com (1.32) e (1.36),

$$td(M) = \prod \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \cdot \frac{-x_j}{1 - e^{x_j}}. \quad (3.2)$$

Podemos construir um fibrado-símbolo $\Sigma(D)$ com relação ao operador D (i.e., um fibrado cuja função de transição é o símbolo principal de D), sobre $\Psi(M)$. Seja $ch(D)$ o caráter de Chern do fibrado-símbolo. O índice topológico $i_t(D)$ é definido, então, como

$$i_t(D) = ch(D) \wedge td(M) [\Psi(M)]. \quad (3.3)$$

O lado direito de (3.3) significa que se deve extrair a componente de grau n (a n -forma) da classe característica $ch(D) \wedge td(M)$ e toma-se seu valor sobre o ciclo fundamental de $\Psi(M)$ (i.e., $u[X] = \int_X u$, para u uma classe de co-homologia de um fibrado sobre a variedade X). Pode-se mostrar que, quando a classe de Euler $e(TM)$ é não nula, a expressão (3.3) é equivalente a

$$i_t(D) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_M (ch(E) - ch(F)) \frac{td(M)}{e(TM)}. \quad (3.4)$$

Assim, o índice topológico é calculado a partir de uma integral de um polinômio definido pela curvatura dos fibrados envolvidos.

(100)

Gel'fand havia lançado a conjectura de que o

índice analítico poderia ter uma interpretação topológica. (83-87)

Isto veio a ser comprovado por Atiyah e Singer. O

teorema do índice de Atiyah-Singer estabelece que, sendo D um operador elíptico sobre uma variedade compacta M , os índices analítico e topológico são iguais:

$$\hat{i}_a(D) = \hat{i}_t(D). \quad (3.5)$$

A demonstraçãõ do teorema de Atiyah-Singer, eq. (3.5), bem como a motivaçãõ para a definiçãõ do índice topol3gico, eq. (3.3), baseia-se em conceitos discutidos por Atiyah (101), constituindo o que vem a ser conhecido em matemática como a "teoria K", sobre o que nãõ pretendemos discorrer neste trabalho. Estes e outros desenvolvimentos pertinentes podem ser encontrados nos artigos de revisãõ do assunto (28,98).

Algumas observações:

a.) Há uma possível generalizaçãõ do teorema do índice de Atiyah-Singer quando se considera um complexo elíptico $\{E_i, D_i\}$ como em (2.20). Neste caso, o índice analítico do complexo se define como

$$\hat{i}_a(E_i, D_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim \ker \Delta_i \quad (3.6)$$

e o índice topol3gico*

$$\hat{i}_t(E_i, D_i) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_M \text{ch} \left(\bigoplus_i (-1)^i E_i \right) \frac{\text{Td}(M)}{e(T^*M)} \quad (3.7a)$$

$$= (-1)^{n(n+1)/2} \int_M \left(\sum_i (-1)^i \text{ch}(E_i) \right) \frac{\text{Td}(M)}{e(T^*M)}. \quad (3.7b)$$

* Na teoria K, define-se a "diferença formal" de dois fibrados $E \ominus F$ em termos de complementaridade em relaçaõ a somas de Whitney: se $F \oplus G = E$, entãõ $G = E \ominus F$; para estes fibrados-diferença, vale a relaçaõ $\text{ch}(E \ominus F) = \text{ch}(E) - \text{ch}(F)$.

b.) O índice, devido à sua relação com as classes características, é uma quantidade que depende apenas dos fibrados que surgem no problema tratado e da existência de um operador elíptico entre os fibrados vetoriais E e F (e não da expressão exata do operador).

c.) O índice de um operador elíptico de uma variedade compacta de dimensão ímpar é sempre zero.

d.) O teorema de índice também se generaliza para uma variedade M com bordo ∂M (102,34). Neste caso, há três tipos de contribuição ao índice topológico: uma, proveniente de uma integração em ∂M de classes características ditas secundárias, ou de Chern-Simons, definidas não apenas pela curvatura, mas também pela conexão e a segunda forma fundamental normal a ∂M ; e, finalmente, o termo do chamado invariante η , ligado à parte tangente do operador D no bordo ∂M .

e.) Um teorema de índice para variedades abertas de dimensão ímpar foi desenvolvido por Callias (103) e Bott e Seeley (104) com promissoras aplicações em física. O problema da fracionização de férmions em interação com sólitons, efeito previsto em teoria de campos por Jackiw e Rebbi (105) e em matéria condensada por Su, Schrieffer e Heeger (106) (ver também, Jackiw e Schrieffer (107)) tem sido interpretado como uma manifestação do teorema de Callias (108).

O teorema do índice pode ser entendido como uma

generalização dos conhecidos teoremas de geometria algébrica de Hopf-Poincaré e Gauss-Bonnet. Seja M uma variedade compacta e orientada. Tínhamos definido, em (1.2.42), o característico de Euler(-Poincaré) de M como

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i, \quad (3.8)$$

onde os b_i são os números de Betti de M . O teorema de Gauss-Bonnet (109) diz que, se M for uma superfície (compacta, orientada, riemanniana) bidimensional, e $K=2\mathcal{R}$ sua curvatura gaussiana (\mathcal{R} é o escalar de curvatura), então

$$\chi(M) = 1 - b_1 + b_2 \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_M K dx^1 dx^2.$$

Ora, a classe de Euler $e=e(T(M))$ do fibrado tangente da superfície M é

$$e = \chi_1 = \frac{1}{2\pi} R_{12} = \frac{1}{2\pi} K dx^1 dx^2, \quad (3.10)$$

de modo que $e[M] = \int_M e(TM)$, o valor de e na classe de orientação de M , satisfaz à relação

$$\chi(M) = e[M]. \quad (3.11)$$

A eq.(3.11) é válida, na verdade, para variedades de qualquer dimensão par (teorema de Gauss-Bonnet-Chern-Avez-Allendoerfer-Weil). Daí podemos extrair como caso particular o teorema de Hopf-Poincaré (110), segundo o qual, o número de zeros de um

campo vetorial (suave) sobre M é igual ao característico de Euler, ou, por outra, M admite campos de vetores não nulos se e só se $\chi(M) \neq 0$, pois, nesse caso, $e(TM) \neq 0$. (94)

Ocorre que (3.11) é, por sua vez, um caso particular do teorema de índice de Atiyah-Singer, quando este é aplicado ao complexo de de Rham (2.26). Como definido no parágrafo 3.2, este complexo é gerado pelo operador $D = d + \delta: \Gamma \Lambda^{\text{par}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Gamma \Lambda^{\text{ímpar}} \otimes \mathbb{C}$; $\ker D$ é dado por $d\alpha = \delta\alpha = 0$, de modo que α é uma forma harmônica e já que, pelo teorema da decomposição de Hodge, toda classe de co-homologia de de Rham possui apenas um representante, b_i é igual ao número formas harmônicas independentes de grau i . Assim, o índice analítico do complexo de de Rham é o característico de Euler $\chi(M)$. Para calcularmos o índice topológico, usemos a fórmula do princípio de desdobramento (1.31):

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Gamma \Lambda^{\text{par}}) - \text{ch}(\Gamma \Lambda^{\text{ímpar}}) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \text{ch}(\Gamma \Lambda^j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_j=1}^n (-1)^j e^{\chi_{i_1} + \dots + \chi_{i_j}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

pois

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Gamma \Lambda^j) &= \text{ch}(T^*M \otimes \dots \otimes T^*M) = \prod_1^j \text{ch}(T^*M) = \\ &= \prod_1^j \sum_{i=1}^n e^{\chi_i} = \sum_{i=1}^n e^{\chi_{i_1} + \dots + \chi_{i_j}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A eq. (3.12) ainda se escreve como

$$\text{ch}(\Lambda^{\text{par}}) - \text{ch}(\Lambda^{\text{ímpar}}) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{\chi_i}). \quad (3.14)$$

e, levando em conta que os fibrados são complexificados:

$$\text{ch}(\Lambda^{\text{par}} \otimes \mathbb{C}) - \text{ch}(\Lambda^{\text{ímpar}} \otimes \mathbb{C}) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{x_i})(1 - e^{-x_i}). \quad (3.15)$$

Substituindo, enfim, (3.15), (3.2) e (1.38) em (3.4), vem que

$$\begin{aligned} \hat{a}_t(D) &= (-1)^{r(n+1)} (-1)^r \prod_1^r x_i [M] \\ &= e(TM) [M]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Portanto, o teorema de Atiyah-Singer nos dá que $\chi(M) = e[M]$, reproduzindo, então, o teorema de Gauss-Bonnet.

Outros teoremas podem ser obtidos, se aplicarmos o teorema de Atiyah-Singer aos outros complexos definidos no parágrafo anterior. Assim, para o complexo de Dolbeault, (97,96) extraímos o teorema de Riemann-Roch .

No caso do complexo de Hirzebruch, o teorema de Atiyah-Singer fornece uma fórmula topológica para a assinatura da variedade M . Para um espaço vetorial V , de dimensão finita, no qual se pode introduzir uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então, se o conjunto $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n\}$ formar uma base para V , tal que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.17a)$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = -\delta_{ij} \quad (3.17b)$$

$$\langle e_i, f_j \rangle = 0, \quad (3.17c)$$

define-se como a assinatura do bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o inteiro

$$\tau = m - n \quad (3.18)$$

que não depende da escolha da base. Tomemos uma variedade de dimensão par $n=2\ell$ e definamos sobre M a forma bilinear conhecida por produto interno de Poincaré (36) para elementos ϕ, θ do grupo de co-homologia, $\mathcal{H}^\ell(M, \mathbb{R})$, ("produto copa"),

$$\begin{aligned} \phi \cup \theta [M] &= \int_M \phi \wedge \theta \\ &= (\phi, * \theta), \end{aligned} \quad (3.19)$$

que é simétrica para ℓ par e anti-simétrica para ℓ ímpar. A assinatura de M , $\tau(M)$, será a assinatura da forma bilinear definida em (3.19).

Lembremo-nos de que o complexo de Hirzebruch é gerado pelos operadores elípticos $D^\pm = d + \delta : \Gamma \Lambda^\pm \rightarrow \Gamma \Lambda^\pm$, onde $\Lambda^*(T^*(M) \otimes \mathbb{C}) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, esta decomposição dada pelo autovalores da involução α , eq. (2.27). Como $\ker d + \delta = \ker \Delta$, o índice analítico de D^+ é

$$\hat{i}_a(D^+) = \dim H^+ - \dim H^-, \quad (3.20)$$

em que H^\pm é o subespaço das formas harmônicas de $\Gamma \Lambda^\pm$, i.e., $H^\pm = \ker D^\pm$. Denotando por H_k o subespaço das k -formas harmônicas, que se decompõe em $H_k = H_k^+ \oplus H_k^-$, consideremos que

$$H^+ = H_\ell^+ \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} (H_k^+ \oplus H_{2\ell-k}^+). \quad (3.21)$$

Ocorre que

$$\alpha(H_k^+ \oplus H_{2\ell-k}^+) = H_{2\ell-k}^- \oplus H_k^-, \quad 0 \leq k < \ell, \quad (3.22)$$

de modo que

$$\dim(H_k^+ \oplus H_{2\ell-k}^+) = \dim(H_k^- \oplus H_{2\ell-k}^-) \quad (3.23)$$

e, portanto, apenas as ℓ -formas harmônicas contribuem para

(3.20):

$$i_a(D^+) = \dim H_\ell^+ - \dim H_\ell^- \tag{3.24}$$

Se ℓ for ímpar, $\alpha = \pm i^*$, $** = -1$, $\dim H_\ell^+ = \dim H_\ell^-$ e o índice se anula neste caso. Se ℓ for par (i.e., $n = 4k$), $\alpha = *$. Então, se $\phi \in H_+^{2k}$,

$$\int_M \bar{\phi} \wedge \phi = \int_M \bar{\phi} \wedge * \phi = (\phi, \phi) > 0 \tag{3.25a}$$

e se $\phi \in H_-^{2k}$

$$\int_M \bar{\phi} \wedge \phi = - \int_M \bar{\phi} \wedge * \phi = -(\phi, \phi) < 0 \tag{3.25b}$$

Portanto, H^\pm são os subespaços de $\mathbb{R}^\ell \otimes \mathbb{C}$ nos quais a forma bilinear $\int_M \bar{\phi} \wedge \theta$ (sobre $\mathbb{R}^\ell \otimes \mathbb{C}$) é positiva ou negativa definida, respectivamente. Assim, o índice analítico de $D^+ = d + \delta$ é a assinatura de M ($\dim M = 4k$):

$$i_a(D^+) = \tau(M) \tag{3.26}$$

(28)

O índice topológico de D^+ é calculado em (98) ou (85) ou, ainda, , e é dado, usando o princípio de

desdobramento, pelo chamado gênero L de Hirzebruch:

$$i_f(D) = L[M] = \prod_j \frac{x_j}{\tanh x_j} [M] \tag{3.27a}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) + \dots \tag{3.27b}$$

onde os p_i são as classes de Pontrjagin de $T^*(M)$. O teorema de Atiyah-Singer resulta, então, no teorema de Hirzebruch, o qual estabelece que, para uma variedade compacta e orientável M , de dimensão $4k$,

$$\tau(M) = L[M]. \quad (3.28)$$

Assim, denotando por R a 2-forma de curvatura de M , temos:

(i) para $n=2$:

$$\tau(M) = 0 \quad (3.29)$$

(ii) para $n=4$:

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \frac{1}{3} P_1[M] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_M \text{tr } R \wedge R. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Finalmente, chegamos à aplicação do teorema do índice do operador de Dirac $\gamma^\mu \partial_\mu$. Sendo M agora uma variedade riemanniana de dimensão n sobre a qual se define o complexo de spin dado pelos operadores $D^\pm = \gamma^\mu D_\mu : \Lambda_\pm \rightarrow \Lambda_\pm$, onde Λ_\pm são os subespaços dos espinores de quiralidade positiva e negativa, respectivamente. O índice analítico de D^+ é, segundo considerações análogas às do complexo de Hirzebruch,

$$\begin{aligned} \hat{i}_a(D^+) &= \dim H^+ - \dim H^- \\ &= n_+ - n_- \equiv \tau(M), \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que H^\pm são os espaços dos espinores de Dirac harmônicos de quiralidade ± 1 , ou, por outra, n_\pm são os números de soluções da equação de Dirac sem massa ("modos zero" do operador de Dirac) sobre um espaço-tempo curvo, de quiralidade positiva e negativa, respectivamente. A eq. (3.31) define uma quantidade denominada índice espinorial de M , $\text{Spin}(M) \equiv \nu(M)$. O índice topológico de D^+ , calculado pelo princípio de desdobramento (98,85) é dado pelo gênero \hat{A} de M :

$$i_t(D^+) = \hat{A}[M] = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2} \quad (3.32a)$$

$$= 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760} (-4p_2 + 7p_1^2) - \dots, \quad (3.32b)$$

em termos das classes de Pontrjagin de $T^*(M)$, para n par; $i_t(D^+) = 0$ em variedades de dimensão ímpar. O teorema de Atiyah-Singer dá, então,

$$\text{Spin}(M) = \hat{A}[M]. \quad (3.33)$$

Em termos da 2-forma de curvatura R de M , para $n=2$,

$$\nu = \text{Spin}(M) = 0 \quad (3.34)$$

e, para $n=4$,

$$\nu = \text{Spin}(M) = \frac{1}{24 \cdot 8\pi^2} \int_M \text{tr } R \wedge R. \quad (3.35)$$

Os teoremas de índice exibidos até aqui mostram restrições a certas quantidades analíticas como consequência da topologia do fibrado cotangente da variedade M . No caso das teorias de gauge, contudo, em que os campos de matéria transformam-se sob um grupo de gauge G , dito "grupo de cor", de acordo com uma representação de G sobre um espaço vetorial (complexo) V , o teorema de Atiyah-Singer passa a receber, também, contribuições provenientes da curvatura do fibrado vetorial associado \tilde{V} sobre M (com fibra típica V), do qual os campos de matéria são seções diferenciáveis. Se (88)
 tivermos um complexo elíptico dado por um operador $A: E \rightarrow F$, passamos, agora, a um complexo elíptico "torcido" ("twisted

complex") gerado por um operador correspondente, covariante de gauge, $A_V: E \otimes \tilde{V} \rightarrow F \otimes \tilde{V}$.

O teorema de Atiyah-Singer para o complexo de Hirzebruch torcido, dado por

$$(d+\delta)_V: \Gamma(\Lambda^+ \otimes \tilde{V}) \rightarrow \Gamma(\Lambda^- \otimes \tilde{V}), \quad (3.36)$$

(88,34)

torna-se, pois :

$$\tau(M; V) = L(M) \wedge \text{ch}'(\tilde{V}) [M], \quad (3.37)$$

onde

$$\text{ch}'(\tilde{V}) = \sum_k \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \frac{2^k}{k!} \text{tr}(\Omega^k), \quad (3.38)$$

sendo Ω a 2-forma de curvatura de \tilde{V} . Assim, para $n=2$,

$$\tau = \frac{i}{\pi} \int_M \text{tr} \Omega \quad (3.39)$$

e $n=4$,

$$\tau = - \frac{\dim V}{24\pi^2} \int_M \text{tr} R \wedge R - \frac{1}{2\pi^2} \int_M \text{tr} \Omega \wedge \Omega. \quad (3.40)$$

Para o operador de Dirac, o complexo de spin torcido (88,34)

é $D_V^+: \Delta_+ \otimes \tilde{V} \rightarrow \Delta_- \otimes \tilde{V}$. O teorema do índice passa a

$$\nu(M; V) = \hat{A}(M) \wedge \text{ch}(\tilde{V}) [M], \quad (3.41)$$

de modo que, para $n=2$, temos

$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_M \text{tr} \Omega \quad (3.42)$$

e, em $n=4$

$$\nu = \frac{\dim V}{24 \cdot 8\pi^2} \int_M \text{tr} R \wedge R - \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr} \Omega \wedge \Omega. \quad (3.43)$$

A partir deste ponto, passaremos a trabalhar exclusivamente com uma variedade riemanniana plana M (i.e., $R \equiv 0$). Isto significa que não nos interessaremos, neste trabalho, pelos aspectos gravitacionais do teorema do índice, pois nos concentraremos no problema da anomalia axial das teorias de gauge, cuja discussão ocupará o restante deste capítulo.

A relação explícita entre a anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw e o teorema de Atiyah-Singer para o complexo de spin (torcido) foi mostrada por (79,80,111). As fórmulas aqui exibidas tiveram sua aplicação no estudo de "anomalias gravitacionais", como uma nova abordagem ao problema da "correção gravitacional ao PCAC" (112-114). Além da corrente axial relacionada com o operador de Dirac covariante, correntes anômalas numa variedade riemanniana curva foram relacionadas à assinatura de Hirzebruch e ao característico de Euler, de acordo com o teorema de Atiyah-Singer (78,115,116). Teoremas de índice para correntes de campos de spin inteiro e semi-inteiro, qualquer, foram desenvolvidos por Dowker, Nielsen, Grisaru, Römer e van Nieuwenhuizen, respectivamente; para spin arbitrário, através de argumentos de supersimetria, por Christensen e Duff (117). A importância destes teoremas em supergravidade foi ressaltada por van Nieuwenhuizen (118) (119) (120,121). Um importante resultado, obtido por Witten é

que, em teorias de campos supersimétricas, a quebra espontânea da supersimetria está ligada a um vínculo segundo o qual a quantidade $\text{Tr}(-1)^F$, onde F é o número fermiônico, é igual à diferença entre os números de modos zero bosônico e fermiônico. $\text{Tr}(-1)^F$ constitui um índice topológico e é possível deduzir, a partir deste vínculo, o teorema de Atiyah-Singer para todos os complexos clássicos e suas generalizações (122-126).

3.4. A anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw.

Em teorias de gauge, como a eletrodinâmica ou a cromodinâmica, que podem ser descritas por densidades lagrangianas da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \text{tr} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu(x)) - m] \Psi(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$, g é a constante de acoplamento férmion-campo de gauge e o traço tr é tomado no espaço das cores (i.e., no espaço interno da álgebra de Lie de gauge; inócuo no caso abeliano), existe a possibilidade de que estas teorias sejam invariantes sob transformações quirais dos campos espinoriais,

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha\gamma_5} \Psi \quad (4.2a)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{i\alpha\gamma_5}, \quad (4.2b)$$

α sendo um número real, quando a massa m destes campos for nula. Esta simetria global $U(1)$ implicaria, de acordo com o teorema de Noether que a corrente axial, invariante de gauge,

$$j_{\mu}^5(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi(x) \quad (4.3)$$

seria conservada: $\partial^{\mu} j_{\mu}^5 = 0$. Se a massa for diferente de zero, teríamos

$$\partial^{\mu} j_{\mu}^5(x) = 2imj^5(x), \quad (4.4)$$

onde j^5 é a corrente pseudoescalar

$$j^5(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x). \quad (4.5)$$

A anomalia axial surge, no contexto da teoria de perturbação, quando somos levados a incluir correções quânticas dadas por gráficos de Feynman do tipo triângulo, com um vértice de vetor axial e os outros dois vértices vetoriais (fig. 3.1).

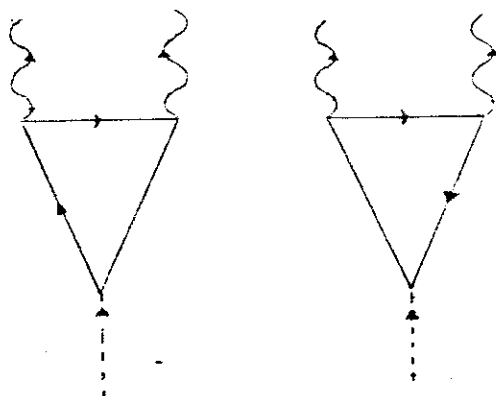


Fig. 3.1. Gráficos de triângulo anômalos.

A existência destes gráficos na eletrodinâmica faz com que a divergência da corrente axial j_{μ}^5 possua um termo "anôma

(21,127)
 1o" :

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = \lim j^5(x) - \frac{\alpha}{2\pi} *F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

onde α é a constante de estrutura fina e $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$. O resultado em teorias de gauge não abelianas é análogo :

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = \lim j^5(x) - \frac{g^2}{8\pi^2} \text{tr} *F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

O fenômeno da anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw ocorre, na teoria de perturbação, apenas ao nível de 1 loop fermiônico; suas correções radiativas são nulas (teoremas de Adler-Bardeen). A expressão (4.7) é, pois, exata e pode ser obtida não perturbativamente. Fujikawa notou que a anomalia poderia ser extraída da medida do funcional gerador das funções de Green euclidianas dos campos fermiônicos, não invariante sob transformações quirais. É este método de cálculo que passaremos a descrever.

Supomos que o comportamento dos campos no infinito seja tal que nos permita compactar o espaço euclídiano \mathbb{R}^4 a uma esfera S^4 , através de uma projeção estereográfica. Tomando, na lagrangiana (4.1), uma rotação de Wick $x^0 \rightarrow -ix^4$; $A_0 \rightarrow iA_4$, temos que o funcional gerador para os campos fermiônicos acoplados ao campo de gauge (ignoramos os termos de gauge puro, já que nada contribuem à anomalia) é dado pela integral funcional

$$Z[\not{D}] = \int d\mu \exp \left[- \int d^4x \ i\bar{\psi} (\not{D} - m)\psi \right], \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned}\not{D} &= \gamma_\mu D_\mu \\ &= \gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu)\end{aligned}\quad (4.9)$$

e D_μ é a derivada covariante de gauge e as matrizes γ_μ são hermitianos; $d\mu$ é a medida fermiônica,

$$d\mu = \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi, \quad (4.10)$$

que será definida da seguinte maneira: seja um conjunto completo de autofunções de \not{D} :

$$\not{D}\phi_r(x) = \lambda_r \phi_r(x) \quad (4.11a)$$

$$\int d^4x \phi_r^\dagger(x) \phi_s(x) = \delta_{rs} \quad (4.11b)$$

$$\sum_r \phi_r(x) \phi_s^\dagger(y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (4.11c)$$

Os campos ψ e $\bar{\psi}$ são, então, expandidos neste conjunto:

$$\psi(x) = \sum_r a_r \phi_r(x) \quad (4.12a)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_r \bar{b}_r \phi_r^\dagger(x), \quad (4.12b)$$

a_r , \bar{b}_r pertencentes a uma álgebra de Grassmann. A medida $d\mu$ é, então, definida como

$$d\mu = \prod_r d\bar{b}_r da_r \quad (4.13)$$

Tomemos, agora, uma transformação quiral local dos campos fermiônicos

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x) \quad (4.14a)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5}. \quad (4.14b)$$

Os coeficientes a_r , \bar{b}_r se transformam como

$$\begin{aligned} a'_r &= \sum_s \int d^4x \phi_r^\dagger(x) e^{i\alpha(x)\delta_5} \phi_s(x) a_s \\ &\equiv \sum_s C_{rs} a_s \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$\bar{b}'_r = \sum_s \bar{b}_s C_{sr} \quad (4.15b)$$

Assim,

$$\prod_r da'_r = (\det C_{rs})^{-1} \prod_s da_s \quad (4.16)$$

e, para $\alpha(x)$ infinitesimal,

$$\begin{aligned} C_{rs} &\cong \int d^4x \phi_r^\dagger(x) (1 + i\alpha(x)\delta_5) \phi_s(x) \\ &= \delta_{rs} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_r^\dagger(x) \delta_5 \phi_s(x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Usando que $\det C = \exp \operatorname{tr} \ln C$, temos

$$\begin{aligned} (\det C)^{-1} &= \det C^{-1} = \\ &= \exp \left[-\operatorname{tr} \ln \left(1 + i \int d^4x \alpha(x) \phi_r^\dagger(x) \delta_5 \phi_s(x) \right) \right] \\ &= \exp \left[-i \operatorname{tr} \left(\int d^4x \alpha(x) \phi_r^\dagger(x) \delta_5 \phi_s(x) \right) \right] \\ &= \exp \left[-i \sum_r \int d^4x \alpha(x) \phi_r^\dagger(x) \delta_5 \phi_r(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Definindo a quantidade

$$A(x) \equiv \sum_r \phi_r^\dagger(x) \delta_5 \phi_r(x), \quad (4.19)$$

escrevemos

$$(\det C)^{-1} = \exp \left[-i \int d^4x \alpha(x) A(x) \right] \quad (4.20)$$

Como a contribuição de \bar{b}_r para o jacobiano J ,

$$d\mu = J d\mu', \quad (4.21)$$

é idêntica à de a_r , temos que

$$J = \exp \left[-\partial_i \int d^4x \alpha(x) A(x) \right]. \quad (4.22)$$

A expressão acima, contudo, carece de melhor significado. A quantidade $A(x)$ está mal definida e requer uma prescrição de regularização. Fujikawa escolheu uma regularização invariante de gauge em termos dos autovalores do operador \not{D} , eq. (4.11), introduzindo um corte pra autovalores grandes, da maneira

abaixo:

$$A(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_r \phi_r^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\lambda_r^2 t} \phi_r(x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_r \phi_r^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\lambda_r^2 t} \phi_r(x).$$

Com este tipo de regularização, Fujikawa mostrou que, desenvolvendo os campos de base ϕ_r , ϕ_r^\dagger em série de ondas planas, obtêm-se

$$A(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \text{tr} * F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

sendo $F_{\mu\nu}$ a intensidade do campos de gauge que toma valores na álgebra de Lie do grupo $SU(N)$. Um cálculo análogo em duas dimensões para um campo de gauge com valores na álgebra de Lie de $U(1)$ resulta em

$$A(x) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.25)$$

Temos, portanto, para o jacobiano da transformação quiral:

$$J = \exp \left[\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \text{tr} * F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]. \quad (4.26)$$

Incluindo este fator no funcional gerador (invariante sob transformações quirais), obtém-se, usando que $\left. \frac{\delta Z}{\delta \alpha(x)} \right|_{\alpha=0} = 0$, identidades de Ward-Takahashi(-Slavnov-Taylor) quirais anômalas, as quais fornecem o mesmo resultado para a divergência da corrente axial $j_{\mu}^5 = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi$ que a teoria de perturbação, cf. eq. (4.7) ($g=1$):

$$\partial_{\mu} j_{\mu}^5 = \text{Lim} j^5 - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} *F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (4.27)$$

O termo anômalo provém justamente do jacobiano (4.26), ou seja, a anomalia de Adler-Bell-Jackiw é conseqüência da não invariância da medida funcional fermiônica do funcional gerador da teoria.

A conexão da anomalia com o teorema do índice de Atiyah-Singer é agora imediata: tomando a integral em todo o espaço (lembrando que estamos numa variedade compacta) de (4.19),

$$\begin{aligned} \int d^4x A(x) &= \sum_r \int d^4x \phi_r^{\dagger}(x) \gamma_5 \phi_r(x) \\ &= \sum_{\substack{\text{modos} \\ \text{zero}}} \int d^4x \phi_0^{\dagger}(x) \gamma_5 \phi_0(x) + \\ &\quad + \sum_{r \neq 0} \int d^4x \phi_r^{\dagger}(x) \gamma_5 \phi_r(x), \end{aligned} \quad (4.28)$$

e separando os campos de acordo com sua quiralidade, isto é,

$$\gamma_5 \phi_{\pm}(x) = \pm \phi_{\pm}(x), \quad (4.29)$$

observamos que contribuem a (4.28) apenas os modos zero. Usando

a relação de ortogonalidade (4.11b) e (4.24), chegamos a

$$n_+ - n_- = \nu, \quad (4.30)$$

onde n_{\pm} são os números de modo zero do operador \not{D} de quiralidade positiva e negativa, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \nu &= - \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr} *F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= - \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\ &= - \frac{1}{8\pi^2} \int \operatorname{tr} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= - \frac{1}{8\pi^2} \int \operatorname{tr} F \wedge F \end{aligned} \quad (4.31)$$

é o negativo do segundo número de Chern do fibrado de gauge do qual F é sua 2-forma de curvatura.

Uma maneira mais rigorosa de se calcular a anomalia axial em teorias de gauge através de métodos não perturbativos está contida no tratamento do índice topológico baseado na assintotia da equação do calor, utilizada por Atiyah, Bott e Patodi (88) para redescobrir o teorema do índice seguindo um caminho alternativo. Uma longa exposição do assunto, visto por este ângulo, está em Gilkey (99). O cálculo da anomalia axial por este método, para vários modelos em teoria de campos (sobretudo bidimensionais) é revisto por Gamboa-Saraví, Muschietti, Schaposnik e Solomin (91). Estes autores também mostram que este cálculo é essencialmente equivalente ao de Fujikawa.

O cálculo se baseia na regularização da integral funcional $Z[A]$ através da função zeta, ζ_A , generalização, para um operador A , da função zeta de Riemann (129,130). Esta função é bastante utilizada na regularização de determinantes fermiônicos para correções quânticas de 1 loop ao potencial (131,42) efetivo em teorias de campos .

Consideremos a integral funcional (n =dimensão do espaço-tempo euclidiano)

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \left(\int d^n x \bar{\Psi} A \Psi \right), \quad (4.32)$$

onde A é um operador linear de ordem m , com autofunções ϕ_r , que formam um conjunto completo, e autovalores reais λ_r :

$$A \phi_r = \lambda_r \phi_r. \quad (4.33)$$

Usando as expressões (4.12), temos que

$$\begin{aligned} \int d^n x \bar{\Psi} A \Psi &= \int d^n x \sum_{r,r'} \bar{b}_r \phi_r^\dagger A a_{r'} \phi_{r'} \\ &= \sum_r \bar{b}_r a_r \lambda_r \end{aligned} \quad (4.34)$$

e, pelas regras de integração funcional de variáveis de Grassmann (132),

$$\begin{aligned} Z[A] &= \prod_r \lambda_r \\ &= \det A. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Contudo, os autovalores λ_r podem crescer sem limitações e o determinante assim obtido é divergente.

Introduz-se, então, a função zeta associada ao operador A , $\zeta_A(s)$:

$$\zeta_A(s) = \sum_r \lambda_r^{-s}, \quad (4.36)$$

onde s é um número complexo. Esta é uma série que converge para $\text{Re } s > n/m$, mas pode ser estendida analiticamente a todo o plano complexo (99). Como

$$\left. \frac{d\zeta_A(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \sum_r \ln \lambda_r = - \ln \prod_r \lambda_r, \quad (4.37)$$

temos que

$$\det A = \prod_r \lambda_r = \exp \left(- \left. \frac{d\zeta_A(s)}{ds} \right|_{s=0} \right). \quad (4.38)$$

Como a função ζ_A é regular, em particular, em $s=0$, o determinante definido pela equação acima está regularizado.

Podemos escrever, então,

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi \exp \left(- \int d^n x \Psi A \Psi \right) &= \det A \\ &= \exp \left(- \zeta'_A(0) \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Seja A um operador elíptico não negativo sobre uma variedade n -dimensional compacta, sem bordos, M , i.e., construímos um fibrado vetorial complexo E sobre M e A é uma aplicação no espaço das seções suaves de E , $\Gamma(E)$. A função ζ_A será obtida a partir de sua relação com a equação do calor.

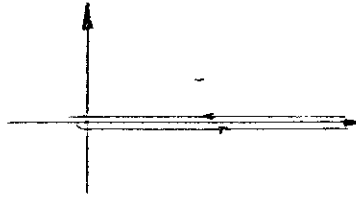
Consideremos, primeiramente, a construção do núcleo de operadores sobre variedades compactas. Tomemos a fórmula integral de Cauchy, da teoria de variáveis complexas,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda, \quad (4.40)$$

onde $f(z)$ é analítica em vizinhanças do caminho fechado Γ . Definimos, por analogia, para o operador A ,

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda I - A} d\lambda, \quad (4.41)$$

em que a integração é sobre um "raio de crescimento mínimo": uma curva no plano complexo que percorre, desde o infinito até a origem ao longo de um eixo, o qual não contém autovalores de A , faz um círculo em torno da origem e volta ao infinito pelo mesmo eixo:



$f(A)$ é analítica nas vizinhanças dos autovalores de A e temos que, para autofunções ϕ_r de A ,

$$f(A)\phi_r = f(\lambda_r)\phi_r. \quad (4.42)$$

Tomemos ($\text{Re } t > 0$):

$$f = e^{-tA}. \quad (4.43)$$

Então, por (4.41),

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda. \quad (4.44)$$

Queremos definir para e^{-tA} uma função núcleo $K(t, x, y)$; para isso, devemos ter uma expressão

$$(e^{-tA}\phi)(x) = \int_M K(t, x, y)\phi(y) d\mu_y, \quad (4.45)$$

onde ϕ é uma seção suave de E e $d\mu_y$ é uma medida sobre M na variável y . Decompondo ϕ na base completa de autofunções de A ,

$$\phi = \sum_r a_r \phi_r, \quad (4.46)$$

obtemos, por (4.42),

$$(e^{-tA}\phi)(x) = \sum_r a_r e^{-t\lambda_r} \phi_r(x). \quad (4.47)$$

Supondo uma estrutura L^2 em $\Gamma(E)$,

$$a_r = (\phi_r, \phi) = \int_M \phi_r^*(y) \phi(y) d\mu_y \quad (4.48)$$

e, assim,

$$(e^{-tA}\phi)(x) = \int_M \left(\sum_r e^{-\lambda_r t} \phi_r(x) \otimes \phi_r^*(y) \right) \phi(y) d\mu_y \quad (4.49)$$

está na forma da eq. (4.46). Portanto, o núcleo de e^{-tA} é

$$K(t, x, y) = \sum_r e^{-\lambda_r t} \phi_r(x) \phi_r^*(y). \quad (4.50)$$

Ocorre que $K(t, x, y)$ é solução da chamada "equação do calor" associada ao operador A :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) K(t, x, y) = 0, \quad (4.51)$$

onde A atua no argumento x de K , com as condições iniciais

$$K(0, x, y) = \delta(x-y). \quad (4.52)$$

A eq. (4.51) é uma equação de difusão sobre o espaço-tempo M de acordo com o parâmetro t .

Tomando a transformada de Mellin de e^{-tA} , passamos a

um operador "potência complexa de A " :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-tA} t^{s-1} dt = A^{-s}. \quad (90) \quad (4.53)$$

Este tipo de operador foi estudado por Seeley . De (4.33),

temos

$$A^s \phi_r = \lambda_r^s \phi_r \quad (4.54)$$

e, por (4.41),

$$A^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^s (\lambda I - A)^{-1} d\lambda. \quad (4.55)$$

Seu núcleo se escreve

$$K_s(x, y; A) \equiv K(s, x, y) = \sum_r \lambda_r^s \phi_r(x) \phi_r^*(y) \quad (4.56)$$

e, tomando $x=y$ e integrando sobre toda a variedade M , obtemos o traço funcional

$$\int_M \text{Tr} K_s(x, x; A) d\mu_x = \sum_r \lambda_r^s, \quad (4.57)$$

pela relação de ortogonalidade das autofunções $\phi_r(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \sum_r \lambda_r^{-s} \\ &= \int_M \text{Tr} K_{-s}(x, x; A) d\mu_x. \end{aligned} \quad (4.58)$$

A relação com o teorema do índice provém das seguintes considerações. Tomando $A: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ como um operador diferencial elíptico de ordem m não negativo, onde E e F são fibrados vetoriais sobre o espaço-tempo compactado M , sobre os quais podem ser definidas estruturas hermitianas que permitam a introdução de um produto interno e, conseqüentemente, a definição de um operador adjunto formal $A^*: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ com respeito a este produto interno, como vimos no parágrafo 3.2, podemos definir dois laplacianos

$$\begin{aligned} \Delta_E &: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) && \text{sobre } E, \\ \Delta_F &: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F) && \text{sobre } F, \end{aligned}$$

com

$$\Delta_E = A^* A, \quad (4.59a)$$

$$\Delta_F = AA^* \quad (4.59b)$$

ambos elípticos, auto-adjuntos e positivos. Introduzimos o subespaço de $\Gamma(E)$,

$$\Gamma_\lambda(E) = \left\{ s \in \Gamma(E) \mid \Delta_E s = \lambda s \right\}, \quad (4.60)$$

espaço das auto-seções do laplaciano Δ_E associadas ao autovalor λ . $\Gamma_\lambda(F)$ é definido analogamente.

Para $\lambda=0$,

$$\Gamma_0(E) = \ker A \quad (4.61a)$$

$$\Gamma_0(F) = \ker A^*, \quad (4.61b)$$

enquanto que, para $\lambda \neq 0$,

$$\Delta_E \phi_r = A^* A \phi_r = \lambda \phi_r \quad (4.62a)$$

$$\Delta_F (A \phi_r) = (AA^*) A \phi_r = A(A^* A) \phi_r = \lambda (A \phi_r) \quad (4.62b)$$

(aqui ϕ_r é uma das autofunções ortonormais de Δ_E ou Δ_F), o que mostra que tanto Δ_E como Δ_F possuem os mesmos autovalores, com as mesmas multiplicidades. Logo, $A: \Gamma_\lambda(E) \rightarrow \Gamma_\lambda(F)$, $\lambda \neq 0$, é um isomorfismo e $\dim \Gamma_\lambda(E) = \dim \Gamma_\lambda(F)$. O índice analítico de A se escreve, portanto,

$$i_\alpha(A) = \dim \Gamma_0(E) - \dim \Gamma_0(F), \quad (4.63)$$

ou, para qualquer função $f(\lambda)$ com $f(0)=1$,

$$i_\alpha(A) = \sum_\lambda f(\lambda) (\dim \Gamma_\lambda(E) - \dim \Gamma_\lambda(F)). \quad (4.64)$$

Definindo a função θ associada a Δ como

$$\theta_\Delta(t) = \sum_r e^{-t\lambda_r}, \quad (4.65)$$

relacionada à função zeta por uma transformada de Mellin, o

índice torna-se

$$\chi_a(A) = \theta_{\Delta_E}(t) - \theta_{\Delta_F}(t), \quad t \geq 0. \quad (4.66)$$

Além disso, como o índice não deve depender de t , somente contribuem a (4.66) os termos em que $t=0$.

Ora, sendo dado o núcleo do (operador da equação de) calor por (4.45) e (4.50), temos, ao fazer cálculo análogo a (4.56)-(4.58),

$$\theta_{\Delta}(t) = \sum_r e^{-\lambda_r t} = \int_M \text{Tr } K(t, x, x) d\mu_x. \quad (4.67)$$

A determinação do índice fica, portanto, dependente do cálculo do traço do núcleo do calor $K(t, x, x)$ ou, equivalentemente, do núcleo do operador potência $K_s(x, x)$. Isto se consegue através (133, 99, 90, 88, 134) da expansão assintótica que possui a função θ quando $t \rightarrow 0^+$. Por (4.45) e, usando (2.88), numa vizinhança U de M ,

$$\begin{aligned} (e^{-tA} \phi)(x) &= \int_U K(t, x, y) \phi(y) d\mu_y \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(e^{-tA}) \hat{\phi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Pela inversa de (2.7),

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U e^{-iy \cdot \xi} \phi(y) d\mu_y, \quad (4.69)$$

a qual, substituída em (4.68), fornece

$$\int_U K(t, x, y) \phi(y) d\mu_y = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int_U e^{i(x-y) \cdot \xi} \sigma(e^{-tA}) \phi(y) d\mu_y d\xi. \quad (4.70)$$

Tomando $x=y$ na equação acima,

$$\int_U K(t, x, x) \phi(x) d\mu_x = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_U \sigma(e^{-tA}) \phi(x) d\mu_x d\xi, \quad (4.71)$$

donde

$$K(t, x, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \sigma(e^{-tA}) d\xi. \quad (4.72)$$

O símbolo de e^{-tA} , por (4.44), é

$$\sigma(e^{-tA}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} \sigma[(A - \lambda I)^{-1}] d\lambda. \quad (4.73)$$

Precisamos, portanto, inverter o símbolo de $A - \lambda I$.

Seja, pois, o operador A_ε^ξ definido na vizinhança U , onde são introduzidas coordenadas $\{x^\mu\}$, $\mu=1, \dots, n$, por

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^\xi &= e^{-ix \cdot \xi / \varepsilon} A e^{ix \cdot \xi / \varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^m} a_m(\xi) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} a_{m-1}(\xi) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} a_1(\xi) + a_0(\xi) \\ &= \sum_{j=0}^m \varepsilon^{m-j} a_{m-j}(\xi). \end{aligned} \quad (4.74)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 1$, obtemos daí o símbolo de A :

$$A(\xi) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} A_\varepsilon^\xi = \sum_{j=0}^m a_{m-j}(\xi) = \sigma(A) \quad (4.75)$$

e vemos que $a_m(\xi)$ é o símbolo principal de A . Sendo este elíptico, a_m é inversível, para $\xi \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(e^{-tA}) &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (A(\xi) - \lambda I)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (A_\varepsilon^\xi - \lambda \varepsilon^{-m})^{-1} d\lambda \end{aligned} \quad (4.76)$$

e

$$K(t, x, x) = \frac{i}{(2\pi)^{n+1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int d\xi \int e^{-\lambda t} (A_\varepsilon^\xi - \lambda \varepsilon^{-m})^{-1} d\lambda. \quad (4.77)$$

Definimos, então, a quantidade $B(x, \xi, \lambda)$, tal que

$$B_\varepsilon(x, \xi, \lambda) (A_\varepsilon^\xi - \lambda \varepsilon^{-m}) \equiv 1. \quad (4.78)$$

B_ε será considerada uma boa aproximação para a inversa do símbolo de $A - \lambda I$, no limite $\varepsilon \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow 0^+$:

$$K(t, x, x) \sim \frac{i}{(2\pi)^{n+1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\Gamma} d\xi \int e^{-\lambda t} B_\varepsilon d\lambda. \quad (4.79)$$

A solução de (4.78) é dada por uma série de potências de ε :

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x, \xi, \lambda) &= \sum_{j \geq 0} \varepsilon^{m+j} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) \\ &= \varepsilon^m b_{-m} + \varepsilon^{m+1} b_{-m-1} + \dots \end{aligned} \quad (4.80)$$

Substituindo (4.80) e (4.74) em (4.78), obtemos

$$b_{-m}(a_m - \lambda) = 1 \quad (4.81a)$$

$$b_{-m-1}(a_m - \lambda) + b_{-m} a_{m-1} = 0 \quad (4.81b)$$

⋮

Os coeficientes b_{-m-j} , ditos coeficientes de Seeley, podem, pois, ser calculados recursivamente através das relações

$$b_{-m}(a_m - \lambda) = 1 \quad (4.82a)$$

$$b_{-m-l}(a_m - \lambda) + \sum \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha b_{-m-j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha a_{m-k} \frac{1}{\alpha!} = 0 \quad (4.82b)$$

onde a soma é tomada para $j < l$, com a restrição $j+k+|\alpha|=l$.

As fórmulas análogas para o operador potência são

$$\begin{aligned}\sigma(A^s) &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\Gamma} \lambda^s B_{\varepsilon}(x, \xi, \lambda) d\lambda \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_j \int_{\Gamma} \lambda^s b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda\end{aligned}\quad (4.83a)$$

e

$$K_s(x; A) \equiv K_s(x, x) = \frac{i}{(2\pi)^{n+1}} \sum_j \int d\xi \int_{\Gamma} \lambda^s b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda, \quad (4.83b)$$

com os b_{-m-j} calculados por (4.82).

O caminho Γ passa por um raio de crescimento mínimo caracterizado por $\arg \lambda = \theta$; passamos, então, a uma variável λ' dada por $\lambda = \lambda' e^{i\theta}$. A integração em ξ é realizada em coordenadas polares; o resultado, após eliminação da parte radial e cálculo de resíduos ⁽⁹⁰⁾, é

$$K_s(x; A) = (-1)^s \frac{1}{m(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} d\xi' \int_0^{\infty} \lambda'^s b_{-m-sm-n}(x, \xi', \lambda' e^{i\theta}) d\lambda'. \quad (4.84)$$

Substituindo s por $-s$, e por integração do traço de (4.84), obtemos a função zeta relativa ao operador A , eq. (4.58). Tomando $\theta = \pi/2$ e suprimindo as linhas das variáveis, chegamos, para $s=0$, à expressão

$$K_0(x; A) = \frac{(-i)^{\frac{n}{2}+1}}{m(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^{\infty} b_{-m-n}(x, \xi, i\lambda) d\lambda. \quad (4.85)$$

(133,88)

De acordo com um teorema (generalizado) de Gilkey, os coeficientes de Seeley b_{-m-n} podem ser expressos em termos das classes características dos fibrados envolvidos.

Uma outra fórmula que será útil no cálculo do

determinante fermiônico, deduzida por Gamboa-Saraví, Muschietti (89) e Solomin, diz respeito ao núcleo de potência de um operador elíptico A , de ordem m , ao qual se adiciona um operador diferencial A_1 , de ordem menor ou igual a $m-1$, ambos atuando no espaço das seções (globais) de um fibrado vetorial sobre o espaço-tempo compacto M . O resultado é

$$K_s(x; A + \varepsilon A_1) = K_s(x; A) + \varepsilon F_1(x, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.86)$$

$$\operatorname{Re} s \in \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right],$$

onde $F_1(x, s)$ é a extensão analítica em s da quantidade

$$K\left(x, \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^s (\lambda I - A)^{-1} A_1 (\lambda I - A)^{-1} d\lambda\right) \quad (4.87)$$

e os termos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ têm normas limitadas para ε pequeno. Por integração de (4.86) em M :

$$\zeta_{A + \varepsilon A_1}(s) = \zeta_A(s) + \varepsilon \zeta_1(s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.88)$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) &= \int_M \operatorname{Tr} K\left(x; \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (\lambda I - A)^{-1} A_1 (\lambda I - A)^{-1} d\lambda\right) d\mu_x \\ &= -s \operatorname{Tr} (A^{-s-1} A_1). \end{aligned} \quad (4.89)$$

O formalismo acima exposto foi aplicado no cálculo do determinante fermiônico, em vários modelos (sobretudo, bidimensionais), nos quais o operador em questão é, naturalmente, o operador de Dirac covariante correspondente (89, 91, 92, 135). Pode ser traçada uma correspondência entre este formalismo e certos desenvolvimentos devidos a De Witt (136, 137).

Retomando a teoria definida pela função de partição (4.8), com massa nula e em n dimensões (n par), temos, por (4.39),

$$\begin{aligned} Z[\mathcal{D}] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int d^n x \bar{\psi} \mathcal{D}\psi\right) = \det \mathcal{D} \\ &= \exp\left(-\zeta'_{\mathcal{D}}(0)\right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

com a função zeta dada por (4.58). Uma transformação quiral infinitesimal sobre os campos fermiônicos,

$$\psi \rightarrow e^{\delta_5 \alpha(x)} \psi \quad (4.91a)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{\delta_5 \alpha(x)} \quad (4.91b)$$

induz, sobre $Z[\mathcal{D}]$, um jacobiano J :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{D} &= J \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int d^n x \bar{\psi} e^{\delta_5 \alpha} \mathcal{D} e^{\delta_5 \alpha} \psi\right) \\ &= J \det\left(e^{\delta_5 \alpha(x)} \mathcal{D} e^{\delta_5 \alpha(x)}\right), \end{aligned} \quad (4.92)$$

pelas regras de Berezin de integração funcional de variáveis de Grassmann. J é finito, pois é a razão de dois determinantes regularizados. Sendo $\alpha(x)$ infinitesimal, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{\delta_5 \alpha(x)} \mathcal{D} e^{\delta_5 \alpha(x)} &= (1 + \delta_5 \alpha(x)) \mathcal{D} (1 + \delta_5 \alpha(x)) \\ &= \mathcal{D} + \delta_5 \alpha(x) \mathcal{D} + \mathcal{D} \delta_5 \alpha(x) + O(\alpha^2) \\ &\equiv \mathcal{D} + A_1, \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde

$$A_1 \equiv \delta_5 \alpha(x) \mathcal{D} + \mathcal{D} \delta_5 \alpha(x) \quad (4.94)$$

e os termos $O(\alpha^2)$ são desprezados. Assim, o determinante do

lado direito de (4.92) é o de um operador da forma $A + \epsilon A_1$, com $\epsilon=1$, e se encaixa nas condições para que sua função zeta seja dada por (4.88). Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \ln J &= \ln \det \mathcal{D} - \ln \det (\mathcal{D} + A_1) \\ &= \zeta'_{\mathcal{D} + A_1}(0) - \zeta'_{\mathcal{D}}(0) \\ &= \zeta'_1(0), \end{aligned} \quad (4.95)$$

usando (4.88). Logo, pelo resultado (4.89),

$$\begin{aligned} \ln J &= - \frac{d}{ds} \left[s \operatorname{Tr} (D^{-s-1} A_1) \right]_{s=0} \\ &= - \frac{d}{ds} \left\{ s \operatorname{Tr} \left[\mathcal{D}^{-s-1} (\gamma_5 \alpha(x) \mathcal{D} + \mathcal{D} \gamma_5 \alpha(x)) \right] \right\}_{s=0} \\ &= - 2 \operatorname{Tr} \left(\mathcal{D}^{-s} \gamma_5 \alpha(x) \right)_{s=0}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Devido aos desenvolvimentos mostrados nas eqs. (4.55)-(4.58),

$$\operatorname{Tr} (\mathcal{D}^s \gamma_5 \alpha(x)) = \int d\mu_x \alpha(x) \operatorname{tr} (K_{-s}(x; \mathcal{D}) \gamma_5) \quad (4.97)$$

e, conseqüentemente,

$$J = \exp \left\{ - 2 \int d\mu_x \alpha(x) \operatorname{tr} (K_0(x; \mathcal{D}) \gamma_5) \right\}, \quad (4.98)$$

onde o núcleo K_0 pode ser obtido através dos coeficientes de Seeley (4.81), tomando $s=0$ e $m=1$ em (4.85):

$$K_0(x; A) = \frac{(-i)^{\frac{n}{2}+1}}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^\infty b_{-1-n}(x, \xi, i\lambda) d\lambda. \quad (4.99)$$

Os cálculos de b_{-3} e b_{-5} fornecem, respectivamente, para duas e quatro dimensões, as mesmas expressões para J obtidas por Fujikawa, eqs. (4.24)-(4.26), e, portanto, as equações corretas

da divergência anômala da corrente axial.

O objetivo da seção seguinte é mostrar o estudo, por intermédio destes métodos, da anomalia axial e do teorema do índice, do ponto de vista da equação de Dirac-Kähler.

3.5. Teorema do índice e anomalia axial para férmions de Dirac-Kähler.

A questão da anomalia axial para partículas fermiônicas descritas pelo formalismo geométrico apresentado inicialmente por Kähler e desenvolvido posteriormente por Becher e Joos, exposto no Capítulo II deste trabalho, deve ser encarada com cuidado, devido a seus possíveis desdobramentos na rede. É importante considerar que, como já foi aqui dito, a discretização dos férmions de Dirac-Kähler é equivalente à formulação de Kogut e Susskind para férmions na rede e esta formulação tem sido preferida às demais para simulações de Monte Carlo de teorias de gauge nos estudos da quebra de simetria quiral (ver, p.ex., (138)). Trataremos, neste parágrafo final, esta questão, utilizando a técnica dos coeficientes de Seeley.

Adotando, então, como equação de movimento para um férmion, dado por uma forma diferencial geral ϕ , a equação de

Dirac-Kähler,

$$i(d+\delta)\phi = m\phi, \quad (5.1)$$

passamos a considerar, do ponto de vista do teorema do índice, não mais o complexo de spin gerado pelo operador $\gamma^\mu \partial_\mu$, e sim o complexo da assinatura de Hirzebruch, gerado por $d+\delta$, ambos descritos no parágrafo 3.2. Observe-se que ambos os complexos são, de fato, semelhantes. Não só existe uma profunda ligação da equação de Dirac-Kähler, (5.1), com a equação de Dirac, amplamente detalhada no Capítulo II, como também os espaços de definição dos férmions (seções dos fibrados vetoriais correspondentes) são decompostos analogamente, de acordo com os autovalores de um mapa de involução: o mapa α , no caso do complexo de Hirzebruch, e o operador de quiralidade, a matriz γ_5 , no caso do complexo de spin. Devemos notar que γ_5 possui as mesmas propriedades que α , dadas pelas eqs. (2.28): anticomuta com o operador da equação de movimento e seu quadrado é unitário. Na verdade, o operador α está realmente relacionado ao operador de quiralidade no espaço das formas diferenciais gerais.

(16) Este pode ser definido no formalismo de Becher e Joos. Consideremos as formas como seções do fibrado cotangente (com álgebra de Kähler-Atiyah) do espaço-tempo plano n -dimensional, $n=2$. Partimos da expressão (139) do operador quiral γ_χ ($\equiv \gamma_5$, em $n=4$):

$$\gamma_\chi = -i^{l+1} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{n-1}, \quad (5.2a)$$

se a métrica for minkowskiana, ou, tomando a rotação de Wick, $\gamma^0 \rightarrow -i\gamma_E^0$,

$$\gamma_\chi = -i^l \gamma_E^0 \gamma^1 \dots \gamma^{n-1}, \quad (5.2b)$$

no espaço euclidiano. Segundo o isomorfismo $\gamma^\mu \leftrightarrow dx^\mu \gamma_V$, vemos, então, que, a operação $\gamma_\chi \psi$, corresponde tomar o produto de Clifford da forma geral ϕ com o elemento de n-volume:

$$\gamma_\chi \psi \longmapsto -i^l \epsilon \vee \phi, \quad (5.3)$$

onde $\epsilon = dx_E^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ ($dx_E^0 \equiv dx^4$, para 4 dimensões, na notação e com as convenções das tabelas do Capítulo II). De acordo com Becher e Joos, a operação (5.3) pode ser expressa, também, em termos do operador de dualidade de Hodge: a forma ϕ_χ , transformada quiral de ϕ , se escreve

$$\begin{aligned} \phi_\chi &= \star \phi \\ &\equiv -i^{n/2} \star B \phi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que $\phi_\chi^{(p)} = \star \phi^{(n-p)}$ e B é o antiautomorfismo principal da álgebra de Kähler-Atiyah.* Podemos, agora, relacionar α com \star . Por exemplo, em duas e quatro dimensões, usando a definição de α , eq. (2.28):

$$n=2: \quad \alpha \phi = i(\star \phi^{(0)} + \star \phi^{(1)} - \star \phi^{(2)}) = i \star B \phi = -\star \phi \quad (5.5a)$$

* Estas fórmulas podem ser verificadas diretamente, em quatro dimensões, para as formas da tabela 1 do Capítulo II. Em duas dimensões, devemos nos lembrar que a representação quiral das matrizes γ é dada por $\gamma_E^0 = -i\sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, donde $\gamma_\chi = \sigma_3$, onde σ_i , $i=1,2,3$, são as matrizes de Pauli. Podemos, ainda, constatar que $\phi_\chi^{(p)} = i \mathcal{A} \phi^{(p)}$, com o sinal positivo para as duas primeiras colunas da tabela 1 e negativo para as duas últimas.

$$\begin{aligned}
 n=4: \quad \alpha \phi &= - (*\phi^{(0)} + *\phi^{(1)} - *\phi^{(2)} - *\phi^{(3)} + *\phi^{(4)}) \\
 &= - *\mathcal{B}\phi = - *\phi.
 \end{aligned} \tag{5.5b}$$

Assim, vemos que as formas de quiralidade positiva correspondem às de autovalor negativo de α , e vice-versa.

Comparemos, no entanto, os teoremas de índice para os respectivos complexos torcidos no espaço euclidiano compactado. Pelas eqs. (3.39) e (3.42); (3.40) e (3.43),

$$n=2: \quad \tau = \frac{i}{\pi} \int \text{tr } \Omega \tag{5.6a}$$

$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int \text{tr } \Omega \tag{5.6b}$$

$$n=4: \quad \tau = - \frac{1}{2\pi^2} \int \text{tr } \Omega \wedge \Omega \tag{5.6c}$$

$$\nu = - \frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr } \Omega \wedge \Omega \tag{5.6d}$$

Verifica-se, pois, que há uma relação entre os índices:

$$\tau = 2^{n/2} \nu, \tag{5.8}$$

proveniente da redefinição do caráter de Chern para o índice topológico do complexo de Hirzebruch torcido, eq. (3.38). O fator $2^{n/2}$ pode ser explicado, levando-se em conta que este é o número de ideais mínimos à esquerda nos quais se decompõe a álgebra de Clifford das formas diferenciais gerais (ou, ainda, a ordem da degenerescência residual dos férmions no esquema de Kogut-Susskind na rede), seções dos fibrados do complexo de Hirzebruch. A conexão fica clara quando se escreve, de acordo com (2.3.5),

$$\phi = \bigoplus_{b=1}^{2^{n/2}} \phi^b \quad (5.9)$$

e que, por (3.10),

$$(\mathcal{d} + \delta)\phi = \sum_{a,b} \delta^{\mu} \partial_{\mu} \psi_a^{(b)} Z_{ab}, \quad (5.10)$$

ou, se tomarmos a derivada covariante de gauge $d_A = \mathcal{d} + A$, eqs. (2.2.22), (2.2.23), que é o caso do complexo torcido,

$$(d_A + \delta_A)\phi = \sum_{a,b} \delta^{\mu} (\partial_{\mu} + A_{\mu}) \psi_a^{(b)} Z_{ab}, \quad (5.11)$$

onde $\delta_A = -*d_A*$. O índice analítico de $d_A + \delta_A$ é, portanto,

$$\begin{aligned} i_a(d_A + \delta_A) &= \sum_{b=1}^{2^{n/2}} i_a(\phi) \\ &= 2^{n/2} i_a(\phi), \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde obtemos novamente (5.8).

Antes de aplicarmos o método de Seeley ao operador de Dirac-Kähler covariante, é necessário tecer algumas considerações ainda sobre operadores elípticos que atuam em fibrados vetoriais. Precisamos, primeiramente, calcular os símbolos dos operadores relevantes ao problema. Lembremo-nos de que d e δ atuam sobre formas complexas $\phi \in \Lambda^* \equiv \bigoplus_k \Lambda^k(T^*(M) \otimes \mathbb{C})$, sendo M o espaço-tempo euclidiano compactado. No caso da derivação exterior, devemos considerar, por conformidade à definição de operador elíptico, (2.5), o símbolo de $\frac{1}{i}d$:

$$\sigma\left(\frac{1}{i}d\right)(\xi, \chi) = \sigma\left(\frac{1}{i}dx^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\right) = dx^{\mu} \xi_{\mu} \wedge \chi = \xi \wedge \chi, \quad (5.13)$$

usando diretamente (2.10). Definimos, agora, uma operação de contração entre formas, semelhante à introduzida em (2.1.13) (28)

(ver Palais, Cap. IV): para um conjunto de vetores ortonormais $\{e_i\}$, $i=1, \dots, p$, seja

$$\xi \lrcorner (e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} (\xi, e_j) e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_p, \quad (5.14)$$

onde \hat{e}_j significa que este fator foi omitido. Esta operação é adjunta à multiplicação exterior por ξ , em relação ao produto interno \langle, \rangle do fibrado de definição das formas,

$$\xi \lrcorner = (\xi \wedge)^*, \quad (5.15)$$

no sentido de que

$$\langle \xi \wedge e, e' \rangle = \langle e, \xi \lrcorner e' \rangle, \quad (5.16)$$

para duas formas $e \in \Lambda^p$, $e' \in \Lambda^{p+1}$. Lembremo-nos, também, de que δ é d^* , o adjunto formal de d em relação a \langle, \rangle ; logo, $\frac{1}{i}\delta = -(\frac{1}{i}d)^*$ e, devido a (2.16), e usando (5.16),

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{1}{i}\delta\right)(\xi, \chi) &= -\sigma\left(\left(\frac{1}{i}d\right)^*\right) = -\sigma\left(\frac{1}{i}d\right)^* \\ &= -(\xi \wedge)^* = -\xi \lrcorner. \end{aligned} \quad (5.17)$$

O símbolo de $\frac{1}{i}(d+\delta)$ é, portanto,

$$\sigma\left(\frac{1}{i}(d+\delta)\right) = \xi \wedge - \xi \lrcorner. \quad (5.18)$$

Considerando, agora, que os operadores elípticos do problema atuam sobre seções de fibrados associados \tilde{V} , cuja fibra típica é um espaço vetorial V (de representação do grupo de gauge), no qual é definida uma estrutura hermitiana, vamos ter as formas diferenciais gerais como seções de $\eta \equiv \bigoplus_k \Lambda^k(T^*(M)) \otimes \tilde{V}$. A conexão sobre o fibrado principal induz, sobre o associado η , a 1-forma de conexão A (identificamos com seu retrocesso sobre o fibrado cotangente à base):

$$A = -ig A_\mu^a dx^\mu \otimes T^a, \quad \mu = 1, \dots, n = 2l = \dim M \quad (5.19)$$

$$a = 1, \dots, \dim V,$$

com a qual se constrói a derivada covariante de gauge sobre as seções de η :

$$d_A = d + A \wedge. \quad (5.20)$$

Neste caso, o produto interno de k -formas $\alpha, \beta \in \Gamma(\eta)$ é definido como

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\eta = \int_M \alpha^\dagger \wedge * \beta, \quad (5.21)$$

em que α^\dagger significa tomar o conjugado hermitiano dos coeficientes (matriciais) da forma α . Calculemos o adjunto formal de d_A com respeito a \langle, \rangle_η : para α , $(k-1)$ -forma e β , k -forma de $\Gamma(\eta)$,

$$\begin{aligned} \langle d_A \alpha, \beta \rangle_\eta &= \langle d\alpha, \beta \rangle_\eta + \langle A \wedge \alpha, \beta \rangle_\eta \\ &= \langle \alpha, \delta \beta \rangle_\eta + \langle \alpha, -A \lrcorner \beta \rangle_\eta \\ &\equiv \langle \alpha, d_A^* \beta \rangle_\eta, \end{aligned} \quad (5.22)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d_A^* &= \delta - A \lrcorner \\ &= -*d* - *A \wedge * \\ &= -*d_A*. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Denotemos d_A^* por δ_A . Com isto, o operador de Dirac-Kähler (ou de assinatura) covariante se escreve:

$$\begin{aligned} d_A + \delta_A &: \Gamma(\eta) \rightarrow \Gamma(\eta) \\ d_A + \delta_A &= d + \delta + A \wedge - A \lrcorner \end{aligned} \quad (5.24)$$

Este é o operador que define o complexo de Hirzebruch torcido, (3.36), já que o mapa α decompõe, como antes, o fibrado η em dois subfibrados η^\pm , auto-espacos de α com autovalores ± 1 .

Ainda aqui,

$$\alpha(d_A + \delta_A) = -(d_A + \delta_A)\alpha \quad (5.25)$$

e, portanto, temos os isomorfismos (adjuntos formais entre si):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv d_A + \delta_A: \Gamma(\eta^+) \rightarrow \Gamma(\eta^-) \\ \mathcal{D}^* &\equiv d_A + \delta_A: \Gamma(\eta^-) \rightarrow \Gamma(\eta^+). \end{aligned} \quad (5.26)$$

O operador $d_A + \delta_A$ é elíptico e temos o símbolo, aplicado a uma forma geral $\phi \in \Gamma(\eta)$:

$$\sigma\left(\frac{1}{i}(d_A + \delta_A)\right)\phi = \sigma\left(\frac{1}{i}(d + \delta)\right)\phi + \frac{1}{i}A \wedge \phi - \frac{1}{i}A \lrcorner \phi. \quad (5.27)$$

As fibras de η dispõem, agora, da álgebra de Kähler-Atiyah. Podemos introduzir, pois, o produto de Clifford, \vee , nas fórmulas acima. Identificando $e^\mu \equiv -dx^\mu$ em (2.1.16) e (2.1.17), temos, para $\xi = \xi_\mu dx^\mu$,

$$\xi \vee \phi = \xi \wedge \phi - \xi \lrcorner \phi \quad (5.28a)$$

$$\phi \vee \xi = \phi \wedge \xi + \xi \lrcorner \lrcorner \phi. \quad (5.28b)$$

Assim, o símbolo de $\frac{1}{i}(d + \delta)$ se escreve

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{1}{i}(d + \delta)\right)\phi &= \xi \wedge \phi - \xi \lrcorner \phi \\ &= \xi \vee \phi \end{aligned} \quad (5.29)$$

e o de $\frac{1}{i}(d_A + \delta_A)$:

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{1}{i}(d_A + \delta_A)\right)\phi &= \xi \vee \phi + \frac{1}{i}A \wedge \phi - \frac{1}{i}A \lrcorner \phi \\ &= \xi \vee \phi + \frac{1}{i}A \vee \phi \end{aligned} \quad (5.30)$$

Seja, então, $\phi \in \Gamma(\eta)$ um campo de Dirac-Kähler, com forma adjunta $\bar{\phi}$. Introduzimos, agora, sua quantização formal (16). O funcional de ação da matéria, S_m , se escreve

$$S_m[\bar{\phi}, \phi] = \frac{1}{4} \int (\bar{\phi}, [i(d_A + \delta_A) - m]\phi)_0, \quad (5.31)$$

onde, na notação de Kähler,

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)_0 &= \sum_p \alpha^{(p)} \wedge \beta^{(p)} \\ &= \sum_H \alpha(x, H) \beta(x, H) \varepsilon \end{aligned} \quad (5.32)$$

em que $\alpha^{(p)}$ significa a parte de p-forma da forma geral α e ε é a forma de n-volume. Como vimos,

$$\begin{aligned} S_m[\bar{\phi}, \phi] &= \frac{1}{4} \int (\bar{\phi}, (i\gamma^\mu \nu D_\mu - m)\phi)_0 \\ &= \sum_b \int d^n x \bar{\psi}^{(b)}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi^{(b)}(x). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Construímos, então, o funcional gerador das funções de Green do operador de Dirac-Kähler:

$$\begin{aligned} Z[d_A + \delta_A] &= \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S_m[\bar{\phi}, \phi] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int (\bar{\phi}, [i(d_A + \delta_A) - m]\phi)_0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

que é, formalmente, igual ao determinante

$$\det \left\{ \frac{1}{4} [i(d_A + \delta_A) - m] \right\}. \quad (5.35)$$

Simetrias da ação $S_m[\bar{\phi}, \phi]$ se traduzem em leis de conservação de correntes. Estas são definidas no formalismo de Kähler (13-16) através dos produtos internos de formas gerais,

$(\phi, \rho)_p$, que são (n-p)-formas:

$$(\phi, \rho)_p \equiv e_{\mu_1} \wedge \dots \wedge e_{\mu_p} \wedge (dx^{\mu_1} \nu \dots \nu dx^{\mu_p} \nu \phi, \rho)_0. \quad (5.36)$$

Observemos que, para uma forma geral ϕ e sua adjunta $\bar{\phi}$ (quatro dimensões),

$$(\bar{\phi}, \phi)_1 = 4 \sum_b \bar{\psi}^{(b)} \gamma_\mu \psi^{(b)} (e^\mu \wedge \varepsilon) \quad (5.37)$$

e que, se ϕ satisfizer a equação de Dirac-Kähler e $\bar{\phi}$ a equação

adjunta, usando a relação abaixo, verificada por Kähler,

$$d(\phi, \rho)_1 = (\phi, i(d+\delta)\rho)_0 + (i(d+\delta)\phi, \rho)_0, \quad (5.38)$$

a 1-forma corrente $j = j_\mu dx^\mu$, definida por

$$j = \frac{1}{4} \star (\bar{\phi}, \phi)_1 \quad (5.39)$$

(já que $\star(e^\mu \lrcorner \varepsilon) = dx^\mu$) é conservada:

$$\begin{aligned} \delta j &= -\star d \star j = -\star d \star j \\ &= -\frac{1}{4} \star d(\bar{\phi}, \phi)_1 = -\frac{1}{4} \star [(\bar{\phi}, i(d+\delta)\phi)_0 + (i(d+\delta)\bar{\phi}, \phi)_0] \\ &= -\frac{1}{4} \star [\omega(\bar{\phi}, \phi)_0 - \omega(\bar{\phi}, \phi)_0] = 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

ou seja,

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (5.41)$$

Consideremos, então, uma transformação quirial, como em (5.4). A ela, analogamente, corresponde a corrente axial j^A , dada por ⁽¹⁶⁾

$$j^A = \frac{1}{4} \star (\bar{\phi}, \varepsilon \vee \phi)_1, \quad (5.42)$$

i.e., $j^A = j_\mu^5 dx^\mu$,

$$j_\mu^5 = \sum_b \bar{\psi}^{(b)} \delta_\mu \psi^{(b)}. \quad (5.43)$$

Para campos fermiônicos ϕ sem massa, usando (5.38), temos que

$$\delta j^A = 0. \quad (5.44)$$

Esta é a lei de conservação clássica que deixará de ter validade no contexto quântico, por restrições topológicas, de acordo com o teorema de Atiyah-Singer aplicado ao complexo de Hirzebruch torcido.

Para comprovarmos isto, determinemos a equação da

anomalia axial através do formalismo de formas diferenciais, ao invés de utilizarmos espinores. Calculemos, então, tal como Fujikawa, o jacobiano J da função de partição (5.34) quando é realizada uma transformação quirial infinitesimal local sobre os campos ϕ e $\bar{\phi}$ ($n=2\ell$ dimensões):

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \phi + i\alpha(x) \star \phi \\ &= \phi + i\alpha(x) (-i^\ell \varepsilon) \vee \phi\end{aligned}\quad (5.45a)$$

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &\rightarrow \bar{\phi}' = \bar{\phi} - i\alpha(x) \star \bar{\phi} \\ &= \bar{\phi} - i\alpha(x) (-i)^\ell \varepsilon \vee \bar{\phi}\end{aligned}\quad (5.45b)$$

Seja

$$D = \frac{1}{2^\ell} i (d_A + \delta_A). \quad (5.46)$$

Como vimos,

$$\int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int (\bar{\phi}, D\phi)_0 \right] = \det D \quad (5.47)$$

e, também, para os campos transformados,

$$\int \mathcal{D}\bar{\phi}' \mathcal{D}\phi' \exp \left[- \int (\bar{\phi}', D\phi')_0 \right] = \det D. \quad (5.48)$$

Logo, para $\mathcal{D}\bar{\phi}' \mathcal{D}\phi' = J \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi$, temos que

$$\det D = J \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int (\bar{\phi} - i\alpha(-i)^\ell \varepsilon \vee \bar{\phi}, D[\phi + i\alpha(-i^\ell \varepsilon) \vee \phi])_0 \right\}. \quad (5.49)$$

Pela bilinearidade de $(\ , \)_0$, o integrando se escreve

$$(\bar{\phi}, D\phi)_0 - i(\alpha(-i)^\ell \varepsilon \vee \bar{\phi}, D\phi)_0 + i(\bar{\phi}, D[\alpha(-i^\ell \varepsilon) \vee \phi])_0 + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.50)$$

Temos que

$$\begin{aligned}-i(\alpha(-i)^\ell \varepsilon \vee \bar{\phi}, D\phi)_0 &= -i(-1)^{\ell-1} (B(\alpha(-i^\ell \varepsilon) \vee \bar{\phi}) \vee D\phi) \wedge \varepsilon \\ &= i(-1)^\ell ((B\bar{\phi}) \vee \alpha(-i^\ell) (B\varepsilon) \vee D\phi) \wedge \varepsilon \\ &= i(-1)^\ell ((B\bar{\phi}) \vee \alpha(-i^\ell) (-1)^\ell \varepsilon \vee D\phi) \wedge \varepsilon \\ &= i(\bar{\phi}, \alpha(-i^\ell \varepsilon) \vee D\phi)_0.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Portanto, levando (5.51) e (5.50) em (5.49),

$$\begin{aligned} \det D &= J \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int (\bar{\psi}, [D + i\alpha(-i^l \varepsilon) \nu D + i D \alpha(-i^l \varepsilon) \nu] \psi) \right\} \\ &= J \det (D + i\alpha(-i^l \varepsilon) \nu D + i D \alpha(-i^l \varepsilon) \nu). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Assim, o determinante do lado direito da eq. (5.52) fica sob a forma $D + A_1$, com $A_1 = -i\alpha(-i^l \varepsilon) \nu D + i D \alpha(-i^l \varepsilon) \nu$. Podemos utilizar, (89,91)

pois, a argumentação de Gamboa-Saraví et al., exposta na seção anterior. Por (4.95),

$$\begin{aligned} \ln J &= f'_1(0) \\ &= - \frac{d}{ds} \left[s \operatorname{Tr} (D^{-s-1} A_1) \right]_{s=0} = - \operatorname{Tr} (D^{-s-1} A_1)_{s=0} \\ &= -i \operatorname{Tr} (D^{-s-1} \alpha(-i^l \varepsilon) \nu D + D^{-s-1} D \alpha(-i^l \varepsilon) \nu)_{s=0} \\ &= -2i \operatorname{Tr} (D^{-s} \alpha(-i^l \varepsilon) \nu)_{s=0} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como na eq. (4.97), queremos calcular o traço do operador acima, de acordo com Seeley, em termos do núcleo do operador potência, dado por (4.84). No caso do operador de Dirac, $K_{-s} \gamma_5$ constituía uma matriz e, portanto, para se encontrar um valor escalar, havia a necessidade de se tomar seu traço matricial. Conforme as observações da seção 2.5, este traço corresponde a uma soma das contribuições (iguais) de cada ideal à esquerda da álgebra de Clifford determinada pelas matrizes $\tilde{\gamma}^\mu$ de Dirac. Precisamos, por conseguinte, da definição de uma operação análoga quando o núcleo é uma forma

diferencial, tal como ocorre para o operador de Dirac-Kähler.

Introduzimos, assim, o valor escalar de uma forma diferencial dada por um operador $\$$, o qual, atuando sobre o produto de Clifford de duas formas, realiza sua contração, eqs. (2.1.12-14), levando em conta que cada ideal à esquerda tem a mesma contribuição. O número de ideais à esquerda, $d(n)=2^{\ell}$, é igual à dimensão da representação espinorial no espaço-tempo de $n=2\ell$ dimensões. Assim,

$$\$(1) = d(n) \quad (5.54a)$$

$$\$(dx^{\mu}) = \$(dx^{\mu} \vee 1) = e^{\mu} \lrcorner 1 = 0 \quad (5.54b)$$

$$\$(dx^{\mu} \vee dx^{\nu}) = e^{\mu} \lrcorner dx^{\nu} \$(1) = d(n) g^{\mu\nu}. \quad (5.54c)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \$(dx^{\mu} \vee dx^{\nu} \vee dx^{\rho} \vee dx^{\sigma}) &= \$(e^{\mu} \lrcorner dx^{\nu} \vee dx^{\rho} \vee dx^{\sigma}) \\ &= \$(g^{\mu\nu} dx^{\rho} \vee dx^{\sigma} - g^{\mu\rho} dx^{\nu} \vee dx^{\sigma} + g^{\mu\sigma} dx^{\nu} \vee dx^{\rho}) \\ &= d(n)(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (5.55)$$

No caso particular em que $\mu \neq \nu \neq \rho \neq \sigma$, em 4 dimensões,

$$\begin{aligned} \$(\varepsilon) &= \$(dx^4 \vee dx^1 \vee dx^2 \vee dx^3) \\ &= 4(g^{41} g^{23} - g^{42} g^{13} + g^{43} g^{12}) = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

A aplicação de $\$$ sobre um número ímpar m de produtos de Clifford de diferenciais recai sempre na atuação de $\$$ em um número $m-2$ de produtos de Clifford, também ímpar, e assim por diante, até chegar à aplicação de $\$$ a um único diferencial que, por (5.54b), é nula. Logo, a atuação de $\$$ sobre um número ímpar qualquer de produtos de Clifford de diferenciais é sempre

zero. Em particular,

$$\$(dx^\mu \vee \varepsilon) = 0. \quad (5.57)$$

O valor escalar

$$\$(dx^\mu \vee dx^\nu \vee \varepsilon) = 0 \quad (5.58)$$

em quatro dimensões, mas em duas dimensões ($\varepsilon^{01}=+1$):

$$\begin{aligned} \$(dx^\mu \vee dx^\nu \vee \varepsilon) &= \$(e^\mu \rightarrow dx^\nu \vee dx^0 \vee dx^1) \\ &= \$(g^{\mu\nu} \varepsilon - g^{\mu 0} dx^\nu \vee dx^1 + g^{\mu 1} dx^\nu \vee dx^0) \\ &= 2 (-g^{\mu 0} g^{\nu 1} + g^{\mu 1} g^{\nu 0}) \\ &= -2 \varepsilon^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.58')$$

A propriedade análoga em $n=4$ é

$$\begin{aligned} \$(dx^\mu \vee dx^\nu \vee dx^\rho \vee dx^\sigma \vee \varepsilon) &= \\ &= \$(g^{\mu\nu} dx^\rho \vee dx^\sigma \vee \varepsilon - g^{\mu\rho} dx^\nu \vee dx^\sigma \vee \varepsilon + g^{\nu\rho} dx^\mu \vee dx^\sigma \vee \varepsilon - \varepsilon_\beta^{\mu\nu\rho} dx^\beta \vee dx^\sigma \vee \varepsilon) \\ &= -\varepsilon_\beta^{\mu\nu\rho} \$(dx^\beta \vee dx^\sigma) = -4 \varepsilon_\beta^{\mu\nu\rho} g^{\beta\sigma} = -4 \varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \\ &= 4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde foi usada a relação

$$dx^\mu \vee dx^\nu \vee dx^\rho = g^{\mu\nu} dx^\rho - g^{\mu\rho} dx^\nu + g^{\nu\rho} dx^\mu + \varepsilon_\beta^{\mu\nu\rho} dx^\beta \vee \varepsilon. \quad (5.60)$$

Observemos que a operação de valor escalar do produto de Clifford de formas diferenciais possui as mesmas propriedades formais que o traço de produtos de matrizes de Dirac.

Escrevemos, então, em analogia a (4.97),

$$\text{Tr} (D^S \alpha (-i^l \varepsilon) \vee) = \int_M \alpha(x) \$((-i^l \varepsilon) \vee K_{-S}(x; D)) \wedge \varepsilon \quad (5.61)$$

e, portanto,

$$\ln J = -2i \int_M \alpha(x) \$((-i^l \varepsilon) \vee K_0(x; D)) \wedge \varepsilon \quad (5.62)$$

com $K_0(x; D)$ dado por (4.99) em termos dos coeficientes de Seeley, b_{-1-n} , calculados através das fórmulas de recorrência (4.82). Assim,

$$\ln J = -\frac{2i^l}{(2\pi)^n} \int_M \alpha(x) \int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^\infty d\lambda \phi((-i^l \xi) \nu b_{-1-n}(x, \xi, i\lambda))^{\lambda \xi} \quad (5.63)$$

Sejam λ os autovalores de $i(d_A + \delta_A)$. A equação de autovalores para D (em n dimensões) é, portanto,

$$D\phi = \frac{1}{d(n)} i(d_A + \delta_A)\phi = \frac{\lambda}{d(n)} \phi. \quad (5.64)$$

Assim, o símbolo de D é, por (5.30),

$$\begin{aligned} \sigma(D) &= -\frac{1}{d(n)} \sigma \left[\frac{1}{i} (d_A + \delta_A) \right] \\ &= \frac{1}{d(n)} (-\xi \nu + iA \nu), \end{aligned} \quad (5.65)$$

donde

$$a_1 = -\frac{1}{d(n)} \xi \nu \quad (5.66a)$$

$$a_0 = \frac{1}{d(n)} iA \nu \quad (5.66b)$$

são os objetos com os quais construiremos os coeficientes de Seeley. Os primeiros destes são:

$$\begin{aligned} b_{-1}(x, \xi, \lambda) &= \left(a_1 - \frac{\lambda}{d(n)} \right)^{-1} = d(n) (-\xi \nu - \lambda)^{-1} \\ &= d(n) \frac{\xi - \lambda}{\lambda^2 - \xi^2} \nu \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} b_{-2}(x, \xi, \lambda) &= -b_{-1} a_0 b_{-1} \\ &= -d(n) \frac{\xi - \lambda}{\lambda^2 - \xi^2} \nu \frac{i}{d(n)} A \nu d(n) \frac{\xi - \lambda}{\lambda^2 - \xi^2} \nu \\ &= \frac{-i d(n)}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \left[(\lambda^2 - \xi^2) A + 2(\xi - \lambda) \xi \cdot A \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
b_{-3}(x, \xi, \lambda) &= -b_{-2} a_0 b_{-1} + i \frac{\partial b_{-1}}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial a_0}{\partial x^\mu} b_{-1} \\
&= \frac{i d(n)}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \left[(\lambda^2 - \xi^2) A + 2(\xi - \lambda) \xi \cdot A \right] \vee \frac{i A}{d(n)} \vee d(n) \frac{\xi - \lambda}{\lambda^2 - \xi^2} + \\
&+ \frac{i d(n)}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \left[(\lambda^2 - \xi^2) dx^\mu + 2(\xi - \lambda) \xi^\mu \right] \vee \frac{i \partial_\mu A}{d(n)} \vee d(x) \frac{\xi - \lambda}{\lambda^2 - \xi^2} \\
&= - \frac{d(n)}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \left[(\lambda^2 - \xi^2) A \vee A + 2(\xi - \lambda) \xi \cdot A \vee A \right] \vee (\xi - \lambda) + \\
&- \frac{d(n)}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} \left[(\lambda^2 - \xi^2) (d \vee A) + 2(\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) A \right] \vee (\xi - \lambda). \quad (5.69)
\end{aligned}$$

Já estamos prontos para o cálculo do jacobiano em duas dimensões ($d(2)=2$):

$$\ln J = \frac{-i}{2\pi^2} \int_M \alpha(x) \int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^\infty d\lambda \oint (-i\varepsilon) \vee b_{-3}(x, \xi, i\lambda) \wedge \varepsilon. \quad (5.70)$$

Obtemos, para campo de gauge abeliano,

$$\begin{aligned}
\oint (-i\varepsilon) \vee b_{-3}(x, \xi, i\lambda) \wedge \varepsilon &= d(2) \frac{i\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} \oint (-i\varepsilon \vee (d \vee A)) \wedge \varepsilon \\
&= -d(2) \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} dA \\
&= -d(2) \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} F, \quad (5.71)
\end{aligned}$$

onde usamos, de acordo com (5.58), que

$$\oint (a \vee b \vee \varepsilon) \wedge \varepsilon = -2 a \wedge b. \quad (5.72)$$

Com as integrais

$$\int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^2} = \int_{|\xi|=1} \frac{1}{2\xi^2} = \pi, \quad (5.73)$$

chegamos a

$$\ln J = \frac{2i}{\pi} \int_M \alpha F. \quad (5.74)$$

Daí, deduzimos que o índice do complexo de Hirzebruch torcido, a assinatura, τ , em $n=2$, vale

$$\tau = -\frac{1}{\pi} \int F \quad (5.75)$$

que é equivalente ao resultado do teorema do índice, eq. (5.6a), para a curvatura do fibrado de gauge abeliano $\Omega = iF$. Os mesmos métodos, aplicados ao complexo de spin (89), fornecem

$$\begin{aligned} \ln J &= \frac{i}{2\pi} \int_M \alpha \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x \\ &= \frac{i}{\pi} \int_M \alpha F, \end{aligned} \quad (5.76)$$

e o índice é

$$\nu = -\frac{1}{2\pi} \int F. \quad (5.77)$$

Está confirmado, portanto, o resultado $\tau = 2\nu$, previsto na análise dos teoremas do índice, eq. (5.8). O fator 2, lembremos, é o número de ideais mínimos à esquerda da álgebra que, no formalismo de Kähler, são todos sempre levados em conta.

A consequência física destes cálculos é, como vimos, a anomalia na lei de conservação da corrente axial, j^A . Em duas dimensões, no caso do operador de Dirac, temos que

$$\partial_\mu j_\mu^A = -\frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.78)$$

enquanto que, para o operador de Dirac-Kähler,

$$\partial_\mu j_\mu^A = -\frac{i}{\kappa} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.79)$$

A proporcionalidade entre os termos do lado direito de (5.78) e (5.79) é justificada, considerando que a cada ideal à esquerda é associada uma partícula fermiônica; em (5.79) haveria a contribuição à divergência da corrente j^A dessas partículas, cada uma igual ao lado esquerdo de (5.78).

Para obtermos o resultado análogo em quatro dimensões, necessitamos de prosseguir com o cálculo dos coeficientes de Seeley. Temos:

$$\begin{aligned} b_{-4}(x, \xi, \lambda) &= -b_{-3} a_0 b_{-1} + i \frac{\partial b_{-2}}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial a_0}{\partial x^\mu} b_{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{-1}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} \frac{\partial^2 a_0}{\partial x^\mu \partial x^\nu} b_{-1} \\ &= d(n) \left\{ \frac{i}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[2(\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) \vee A + (\lambda^2 - \xi^2) d \vee A \right] \vee (\xi \vee A - \lambda A) \vee (\xi - \lambda) + \right. \\ &\quad + \frac{i}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee A \vee A (\xi^2 - \lambda) + \\ &\quad - \frac{2i}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee (\xi \cdot A) A \vee (\xi - \lambda) + \\ &\quad + \frac{2i}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} \left[(\xi - \lambda) (A \cdot d) \vee A + A (\xi \cdot d) \vee A + (A \cdot \xi) d \vee A \right] \vee (\xi - \lambda) + \\ &\quad + \frac{8i}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} A \cdot \xi (\xi - \lambda) (\xi \cdot d) \vee A \vee (\xi - \lambda) + \\ &\quad \left. + \frac{i}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} \left[(\xi \cdot d) d \vee A + (\xi \cdot d) d \vee A + (\xi - \lambda) \vee \partial^2 A \right] \vee (\xi - \lambda) + \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{4i}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \{ (\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) (\xi \cdot d) \vee A \vee (\xi - \lambda) \} \quad (5.80)$$

$$b_{-5}(x, \xi, \lambda) = -b_{-4} a_0 b_{-1} + i \frac{\partial b_{-3}}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial a_0}{\partial x_\mu} b_{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{-2}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_\mu \partial x_\nu} b_{-1} +$$

$$- \frac{i}{6} \frac{\partial^3 b_{-1}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu \partial \xi_\rho} \frac{\partial^3 a_0}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\rho} b_{-1}$$

$$= d(n) \left\{ \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} \left[2(\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) \vee A + (\lambda^2 - \xi^2) d \vee A \right] \vee (\xi \vee A - \lambda A) \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) + \right.$$

$$+ \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee A \vee A (\xi^2 - \lambda^2) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$- \frac{2}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee (\xi \cdot A) A \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$+ \frac{2}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[(\xi - \lambda) (A \cdot d) \vee A + A (\xi \cdot d) \vee A + (A \cdot \xi) d \vee A \right] \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$+ \frac{8}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} A \cdot \xi (\xi - \lambda) (\xi \cdot d) \vee A \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[(\xi \cdot d) d \vee A + (\xi \cdot d) d \vee A + (\xi - \lambda) \vee \partial^2 A \right] \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$- \frac{4}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} (\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) (\xi \cdot d) \vee A \vee (\xi - \lambda) \vee A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$+ \frac{2}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[-\xi^\mu d \vee A + d x^\mu \vee (\xi \cdot d) A + (\xi - \lambda) \partial^\mu A \right] \vee (\xi - \lambda) \vee \partial_\mu A \vee (\xi - \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[(\lambda^2 - \xi^2) (d \vee A) + 2(\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) A \right] \vee (d \vee A) \vee (\xi - \lambda) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} \left[(\lambda^2 - \xi^2)(d \vee A) \vee (\xi - \lambda) + 2(\xi - \lambda) \vee (\xi \cdot d) A \right] \vee (d \vee A) \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{2}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee A \vee (d \vee A) \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{6}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} \left[2\lambda A \cdot \xi - (\lambda^2 - \xi^2) A - 2A \cdot \xi \xi \right] \vee (\lambda A - A \vee \xi) \vee (\xi \cdot d) A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} (A^m dx^v + A^v dx^m + g^{mv} A) \vee \partial_\mu \partial_\nu A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{4}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[(\xi - \lambda) (A^m \xi^v + A^v \xi^m + A \cdot \xi g^{mv}) + \xi^m \xi^v A + A \cdot \xi dx^m \xi^v + \right. \\
& \quad \left. + A \cdot \xi \xi^m dx^v \right] \vee \partial_\mu \partial_\nu A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{24}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} (\xi - \lambda) A \cdot \xi \xi^m \xi^v \vee \partial_\mu \partial_\nu A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} (g^{mp} dx^v + g^{vp} dx^m + g^{mv} dx^p) \vee \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{4}{3} \frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2)^4} \left[\xi^m \xi^p dx^v + \xi^v \xi^p dx^m + \xi^m \xi^v dx^p + (\xi - \lambda) (\xi^p g^{mv} + \right. \\
& \quad \left. + \xi^v g^{mp} + \xi^m g^{vp}) \right] \vee \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho A \vee (\xi - \lambda) + \\
& + \frac{8}{(\lambda^2 - \xi^2)^5} (\xi - \lambda) \xi^m \xi^v \xi^p \vee \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho A \vee (\xi - \lambda) \left. \right\}. \quad (5.81)
\end{aligned}$$

Poucos termos sobrevivem quando se toma o valor escalar da expressão acima. Obtemos, então,

$$\begin{aligned}
 & \oint (\varepsilon \nu b_{-5}(x, \xi, i\lambda)) \wedge \varepsilon = \\
 & = \frac{i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \oint \left[\varepsilon \nu (d\nu A) \nu (d\nu A) + (d\nu A) \nu A \nu A + A \nu A \nu (d\nu A) + A \nu A \nu A \nu A \right] \wedge \varepsilon \\
 & = \frac{i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \text{tr} \left[(\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\sigma) + (\partial_\mu A_\nu) A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\sigma) + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma \right] \times \\
 & \quad \times \oint (\varepsilon \nu dx^\mu \nu dx^\nu \nu dx^\rho \nu dx^\sigma) \wedge \varepsilon \tag{5.82}
 \end{aligned}$$

Por (5.59) e usando $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$,

$$\begin{aligned}
 & \oint (\varepsilon \nu b_{-5}(x, \xi, i\lambda)) \wedge \varepsilon = \\
 & = \frac{4i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \text{tr} \left(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \times \\
 & \quad dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\
 & = \frac{4i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \text{tr} \left(dA \wedge dA + A \wedge A \wedge dA + dA \wedge A \wedge A + A \wedge A \wedge A \wedge A \right) \\
 & = \frac{4i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \text{tr} \left[(dA + A \wedge A) \wedge (dA + A \wedge A) \right] \\
 & = \frac{4i\lambda d(n)}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} \text{tr} F \wedge F \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

O jacobiano é, portanto,

$$\ln J = \frac{1}{8\pi^4} \int_M \alpha(x) \int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^\infty d\lambda \oint (\varepsilon \nu b_{-5}(x, \xi, i\lambda)) \wedge \varepsilon \tag{5.84}$$

Com as integrais

$$\int_{|\xi|=1} d\xi \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^3} = \frac{\pi^2}{2} \tag{5.85}$$

e, com $d(4)=4$, chegamos a

$$\ln J = \frac{i}{\pi^2} \int_M \alpha \text{tr} F \wedge F. \tag{5.86}$$

A assinatura é, pois,

$$\tau = - \frac{1}{2\pi^2} \int \text{tr } F \wedge F$$

coincidente com o resultado obtido pelo teorema do índice, eq. (5.7), para curvatura $\Omega=F$. Como $\tau=4\nu$, novamente confirmamos a relação (5.8).

CONCLUSÕES

Este trabalho de tese procurou mostrar alguns aspectos da influência da topologia em teorias de campos de partículas elementares. Para tanto, foram adotados os métodos da geometria e da topologia diferenciais, aplicados às teorias de campos de gauge. Estes métodos tornam-se inevitáveis quando se considera que a topologia dos espaços fibrados de definição das teorias de gauge tem sido bastante relevante, por exemplo, no entendimento da física hadrônica de baixas energias (72,73,140-142). O estudo das propriedades topológicas destas teorias faz parte do esforço em se obter informações sobre teorias de campos sem que se proceda à costumeira expansão perturbativa na constante de acoplamento.

Coerentemente com este formalismo geométrico, adotamos, como equação de movimento para partículas fermiônicas, a equação de Dirac-Kähler, em termos de formas diferenciais. Ao longo dos Capítulos II e III, foi traçado em detalhe o paralelismo entre este formalismo e o espinorial.

O principal fenômeno a diferenciar os dois pontos de vista é que o espaço das formas diferenciais gerais, soluções da equação de Dirac-Kähler, é decomponível em setores relacionados aos chamados "ideais à esquerda" do anel de

Clifford (para diferenciais). Ou seja, a cada ideal à esquerda temos uma partícula fermiônica associada, esta sim, sendo uma solução da equação de Dirac. Como já haviam discutido Becher e Joos, aí está a origem da multiplicidade que ocorre no espectro fermiônico na rede, no esquema de Kogut-Susskind. Esta conclusão pode ser obtida, entretanto, a partir do próprio formalismo espinorial. Mostramos, então, que, do anel de Clifford (para matrizes de Dirac), podemos igualmente extrair seus ideais à esquerda, bem como a simetria $SU(4)$ entre eles, em quatro dimensões (também existente para formas). Identificamos, além disto, os elementos do grupo de redução, R , com os quais se constróem os projetores sobre cada ideal, com a subálgebra de Cartan deste grupo de simetria $SU(4)$. Interpretamos, assim, a equação de Dirac usual como já tendo sido projetada sobre algum dos ideais (e, em princípio, são todos equivalentes entre si). Resultados análogos para duas dimensões podem ser obtidos para o anel formado pelas matrizes de Pauli, havendo, neste caso, uma simetria $SU(2)$ entre os ideais.

A realidade física de alguma qualidade que diferencie fêrmions de ideais distintos, a que chamamos de "sabores", por falta de melhor denominação, é ainda algo a ser estudado. Pode-se notar, no entanto, uma semelhança entre o grupo de redução, R , eq. (2.4.5), e grupos de simetrias discretas, do

(143)
 tipo PT . Uma possível solução para se ter apenas um
 férmion descrito pela equação de Dirac-Kähler é a restrição a
 (144)
 um dos ideais realizada por Aratyn e Zimmerman , com a
 escolha de um ansatz na expressão da forma diferencial geral ϕ ,
 em que somente alguns de seus coeficientes sejam não nulos, de
 modo a formar um único ideal. Simulações numéricas de
 partículas fermiônicas pelo método de Monte Carlo poderiam
 levar este esquema em consideração.

Outro estudo comparativo realizado neste trabalho diz
 respeito à anomalia axial em teorias de gauge. Esta importante
 peculiaridade da teoria quântica de campos foi aqui calculada,
 pela primeira vez, no espaço-tempo contínuo, através do
 formalismo de férmions geométricos. No decorrer da execução
 deste cálculo, tornou-se imprescindível desenvolver um pouco
 mais o formalismo, introduzindo, para produtos de Clifford de
 formas diferenciais, a operação de valor escalar, que
 corresponde à tomada de traço de matrizes. Regularizando o
 determinante funcional fermiônico através dos métodos de Seeley
 e Gamboa-Saraví et al., obtivemos a equação da divergência
 anômala da corrente axial, em duas e quatro dimensões, que vem
 (93)
 a ser o limite ao contínuo do resultado de Gockeler para a
 equação de Dirac-Kähler na rede.

O limite ao contínuo da anomalia deduzida por
 Gockeler contém um fator (dependente da dimensão do espaço-

tempo) em relação às expressões análogas obtidas para a equação de Dirac. O cálculo apresentado nesta tese mostra claramente a origem deste fator como sendo o número de ideais à esquerda da álgebra de Clifford entre diferenciais, $d(n)=2^{n/2}$. Isto significa que os ideais têm uma contribuição idêntica e coerente, cada uma igual à única contribuição à equação da anomalia no formalismo usual de Dirac. Ou seja, no esquema de Kähler, tudo se passa como se houvesse um número de partículas (igual ao número de ideais) contribuindo coerentemente à anomalia.

Explicitamos este resultado, do ponto de vista matemático, como a relação de proporcionalidade entre os teoremas do índice de Atiyah-Singer para os complexos elípticos (torcidos) de assinatura (definido pelo operador da equação de Dirac-Kähler) e de spin (definido pelo operador da equação de Dirac), em espaço-tempo plano, a qual pode ser observada na literatura matemática. (A generalização para espaços-tempos curvos não parece trivial, já que as contribuições aos respectivos teoremas do índice provenientes da curvatura do espaço-tempo têm uma proporcionalidade diferente da do termo de curvatura de gauge. Sabe-se, no entanto, que a generalização para espaços curvos da equação de Dirac-Kähler não é equivalente à da equação de Dirac). A identificação de que esta constante de proporcionalidade é $d(n)$ foi aqui

mostrada, comparando, tanto o índice analítico, quanto o índice topológico dos dois complexos.

A sequência natural dos tópicos aqui abordados seria sua extensão para a rede. Há, entretanto, múltiplas dificuldades matemáticas a serem enfrentadas, que decorrem de não existir, ainda, desde uma formulação adequada de espaços fibrados associados sobre variedades discretizadas, até expressões de classes características na rede com um bom limite ao contínuo. Acreditamos, porém, que esta tese constitua um guia útil para a adaptação das entidades geométricas às necessidades de uma teoria de gauge na rede, bem como um avanço na compreensão do que sejam os férmions e de seus problemas relativos à discretização do espaço-tempo.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- (1) JACKIW, R., "Topological investigations of quantized gauge theories", Les Houches 1983, R. Stora e B. De Witt, eds., North Holland, Amsterdam (1985).
- (2) ZUMINO, B., "Chiral anomalies and differential geometry", Les Houches 1983, R. Stora e B. De Witt, eds., North Holland, Amsterdam (1985).
- (3) LUBKIN, E., "Geometric definition of gauge invariance", Ann. Phys., 23, 233-283 (1963).
- (4) HERMANN, R., Vector Bundles in Mathematical Physics, Vols. I e II, Benjamin, Reading (EUA) (1970).
- (5) TRAUTMAN, A., "Geometrical aspects of gauge configurations", Acta Physica Austriaca, Suppl. XXIII,
- (6) WU, T.T. e C.N. YANG, "Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields", Phys. Rev. D12, 3845-3857 (1975).
- (7) ABERS, E.S. e B.W. LEE, "Gauge theories", Phys. Rep. 9C, 1-141 (1973).
- (8) GIAMBIAGI, J.J., "Teoría unificada de interacciones débiles y electromagnéticas", Curso de Verão "Teoria de Campos de Gauge", Univ. Fed. São Carlos (1978).
- (9) MARCIANO, W. e H. PAGELS, "Quantum chromodynamics",

- Phys. Rep. 36, 137-276 (1978).
- (10) WILCZEK, F., "Quantum chromodynamics: the modern theory of the strong interactions", Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 32, 177-209 (1982).
- (11) LANGACKER, P., "Grand unified theories and proton decay", Phys. Rep. 72, 185-385 (1982).
- (12) VAN NIEUWENHUIZEN, P., "Supergravity", Phys. Rep. 68, 189-398 (1981).
- (13) KÄHLER, E., "Innerer und äusserer Differentialkalkül", Abh. Dt. Akad. Wiss. Berlin, Kl. für Math., Phys, u. Tech., Jahrg. 1960, Nr. 4 (1960).
- (14) KÄHLER, E., "Die Dirac-Gleichung", Abh. Dt. Akad. Wiss. Berlin, Kl. für Math., Phys. u. Tech., Jahrg. 1961, Nr. 1 (1961).
- (15) KÄHLER, E., "Der innere Differentialkalkül", Rendiconti di Matematica (Roma), Ser. V, 21, 425-523 (1962).
- (16) BECHER, P. e H. JOOS, "The Dirac-Kähler equation and fermions on the lattice", Z. Phys. C15, 343-365 (1982).
- (17) GRAF, W., "Differential forms as spinors", Ann. Inst. Henri Poincaré A 29, 85-109 (1978).
- (18) WILSON, K.G., "Quarks and strings on a lattice", in New Phenomena in Subnuclear Physics, Part A, Erice 1975, A. Zichichi, ed., Plenum Press, New York (1977).
- (19) SUSSKIND, L., "Lattice fermions", Phys. Rev. D16, 3031-

- 3039 (1977).
- (20) BANKS, T., L. SUSSKIND e J. KOGUT, "Strong-coupling calculations of lattice gauge theories: (1+1)-dimensional exercises", Phys. Rev. D 13, 1043-1053 (1976).
- (21) ADLER, S.L., "Axial-vector vertex in spinor electrodynamics", Phys. Rev. 177, 2426-2438 (1969).
- (22) BELL, J.S. e R. JACKIW, "A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model", N. Cim. A60, 47-61 (1969).
- (23) ADLER, S.L., "Perturbation theory anomalies", in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, eds., MIT Press, Cambridge (EUA) (1970).
- (24) JACKIW, R., "Field theoretic investigations in current algebra", in Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton (EUA) (1972).
- (25) SCHWINGER, J., "On gauge invariance and vacuum polarization", Phys. Rev. 82, 664-679 (1951).
- (26) BARDEEN, W.A., "Anomalous Ward identities in spinor field theories", Phys. Rev. 184, 1848-1859 (1969).
- (27) BARDEEN, W.A., "Anomalous currents in gauge field theories", Nucl. Phys. B75, 246-258 (1974).
- (28) PALAIS, R.S. (ed.), Seminar on the Atiyah-Singer Index

- Theorem, Princeton University Press, Princeton (EUA) (1965).
- (29) KOBAYASHI, S. e K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Vol. I, Wiley, New York (1963).
- (30) STEENROD, N., The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, Princeton (EUA) (1951).
- (31) SPIVAK, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vols. I e II, Publish or Perish, Waltham (EUA) (1970).
- (32) BISHOP, R.L. e R.J. CRITTENDEN, Geometry of Manifolds, Academic Press, New York.
- (33) MAYER, M.E., "Introduction to the fibre-bundle approach to gauge theories", in Lecture Notes in Physics 67, Springer-Verlag, Berlim (1977).
- (34) EGUCHI, T., P.B. GILKEY e A. HANSON, "Gravitation, gauge theories and differential geometry", Phys. Rep. 66, 213-393 (1980).
- (35) DANIEL, M. e C.M. VIALLET, "The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type", Rev. Mod. Phys. 52, 175-197 (1980).
- (36) VON WESTENHOLZ, C., Differential forms in Mathematical Physics, Rev. ed., North Holland, Amsterdam (1981).
- (37) CHOQUET-BRUHAT, Y., C. DEWITT-MORETTE e M. DILLARD-BLEICK, Analysis, Manifolds and Physics, Rev. ed., North

- Holland, Amsterdam (1982).
- (38) NASH, C. e S. SEN, Topology and Geometry for Physicists, Academic Press, Londres (1983).
- (39) ATIYAH, M.F., Geometry of Yang-Mills Fields, Academia Nazionale dei Lincei, Pisa (1979).
- (40) THOMAS, G.H., "Introductory lectures on fibre bundles and topology for physicists", Rev. Nuovo Cim. 3, no. 4 (1980).
- (41) TRAUTMAN, A., "Fiber bundles, gauge fields, and gravitation", in General Relativity and Gravitation, Vol. 1, A. Held, ed., Plenum Press, New York (1980).
- (42) MADORE, J., "Geometric methods in classical field theory", Phys. Rep. 75, 125-204 (1981).
- (43) MAYER, M.E., "Geometric aspects of gauge theory", Proceedings of the VIII International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Kiryat Anavim (Israel) 1979, L.P. Horowitz e Y. Ne'eman, eds., Adam Hilger, The Israel Physical Society e The American Institute of Physics (1980).
- (44) SCHUTZ, B.F., Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- (45) VANHECKE, F.J., "Geometrical aspects of gauge theories. I. Kinematics", Rev. Bras. Fís. 10, 885-909 (1980).
- (46) STORA, R., "Continuum gauge theories", in New

- Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Cargèse 1976, M. Lévy, P. Mitter, eds., Plenum Press, New York (1977).
- (47) DOEBNER, H.D. e F.B. PASEMANN, "Quantization of fields on principal bundles", Czech. J. Phys. B32, 430-438 (1982).
- (48) PASEMANN, F.B., "Generalized connection forms and linearly quantized gauge fields", preprint Clausthal (1982).
- (49) WEYL, H., "Elektron und gravitation. I", Z. Phys. 56, 330-352 (1929).
- (50) YANG, C.N. e R.L. MILLS, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance", Phys. Rev. 96, 191-195 (1954).
- (51) BOLLINI, C.G., "Teoría general de campos de medida", Curso de Verão "Teoria de campos de gauge", Universidade Federal de São Carlos (1978).
- (52) O'RAIFEARTAIGH, L., "Hidden gauge symmetry", Rep. Progr. Phys. 42, 159-223 (1979).
- (53) FLANDERS, H., Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, New York (1963).
- (54) MISNER, C.W., K.S. THORNE e J.A. WHEELER, Gravitation, Freeman, São Francisco (1973).
- (55) ARNOL'D, V.I., Mathematical Methods of Classical

- Mechanics, Springer-Verlag, New York (1978).
- (56) RABIN, J.M., "Homology theory of lattice fermion doubling", Nucl. Phys. B201, 315-332 (1982).
- (57) WILSON, K.G., "Theory of confinement", Phys. Rev. D10, 2445-2459 (1974).
- (58) NIELSEN, H.B. e M. NINOMIYA, "Absence of neutrinos on a lattice. I. Proof by homotopy theory", Nucl. Phys. B185, 20-40 (1981).
- (59) NIELSEN, H.B. e M. NINOMIYA, "Absence of neutrinos on a lattice. II. Intuitive topological proof", Nucl. Phys. B193, 173-194 (1981).
- (60) KARSTEN, L.H., "Lattice fermions in euclidean space-time", Phys. Lett. 104B, 315-319 (1981).
- (61) DRELL, S.D., M. WEINSTEIN e S. YANKIELOWICZ, "Strong-coupling field theories. II. Fermions and gauge fields on a lattice", Phys. Rev. D14, 1627-1647 (1976).
- (62) ITZYKSON, C. e J.B. ZUBER, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980).
- (63) SHARATCHANDRA, H.S., H.J. THUN e P. WEISZ, "Susskind fermions on a Euclidean lattice", Nucl. Phys. B192, 205-236 (1981).
- (64) NAIMARK, M. e A. STERN, Théorie des Représentations des Groupes, MIR, Moscou (1979).
- (65) GOURDIN, M., Basics of Lie Groups, Frontières, Gif-sur-

Yvette (França) (1982).

- (66) FREUDENTHAL, H. e H. DE VRIES, Linear Lie Groups, Academic Press, New York (1969).
- (67) CORSON, E.M., Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave Equations, Blackie and Son, Glasgow (1953).
- (68) GELL-MANN, M. e M. LÉVY, "The axial vector current in beta decay", N. Cim. 41, 705-725 (1960).
- (69) KAWARABAYASHI, K. e N. OHTA, "The η problem in the large- N limit: effective lagrangian approach", Nucl. Phys. B175, 477-492 (1980).
- (70) ADLER, S.L. e R.F. DASHEN, Current Algebra, Benjamin, New York (1968).
- (71) DE ALFARO, V., S. FUBINI, G. FURLAN e C. ROSSETTI, Currents in Hadron Physics, North Holland, Amsterdam (1973).
- (72) WITTEN, E., "Global aspects of current algebra", Nucl. Phys. B223, 422-432 (1983).
- (73) WITTEN, E., "Current algebra, baryons, and quark confinement", Nucl. Phys. B223, 433-444 (1983).
- (74) ADLER, S.L. e W.A. BARDEEN, "Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation", Phys. Rev. 182, 1517-1536 (1969).
- (75) HUANG, K., Quarks Leptons & Gauge Fields, World

Scientific, Cingapura (1982).

- (76) FUJIKAWA, K., "Path integral for gauge theories with fermions", Phys. Rev. D21, 2848-2858 (1980); (E) 22, 1499 (1980).
- (77) FUJIKAWA, K., "Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories", Phys. Rev. Lett. 42, 1195-1198 (1979).
- (78) NIELSEN, N.K., H. RÖMER e B. SCHROER, "Classical anomalies and local version of the Atiyah-Singer theorem", Phys. Lett. 70B, 445-448 (1977).
- (79) NIELSEN, N.K. e B. SCHROER, "Axial anomaly and Atiyah-Singer theorem", Nucl. Phys. B127, 493-508 (1977).
- (80) SCHROER, B., "Topological methods for gauge theories", Acta Physica Austriaca, Suppl. XXIX, 155-202 (1978).
- (81) ATIYAH, M.F., "The index of elliptic operators on compact manifolds", Sém. Bourbaki, Mai, Exp. 253 (1963).
- (82) ATIYAH, M.F. e I.M. SINGER, "The index of elliptic operators on compact manifolds", Bull. Amer. Math. Soc. 69, 422-433 (1963).
- (83) ATIYAH, M.F. e I.M. SINGER, "Index of elliptic operators I", Ann. Math. 87, 485-530 (1968).
- (84) ATIYAH, M.F. e G.B. SEGAL, "Index of elliptic operators II", Ann. Math. 87, 531-545 (1968).
- (85) ATIYAH, M.F. e I.M. SINGER, "Index of elliptic operators

- III", Ann. Math. 87, 546-604 (1968).
- (86) ATIYAH, M.F. e I.M. SINGER, "Index of elliptic operators IV", Ann. Math. 93, 119-138 (1971).
- (87) ATIYAH, M.F. e I.M. SINGER, "Index of elliptic operators V", Ann. Math. 93, 139-149 (1971).
- (88) ATIYAH, M.F., R. BOTT e V.K. PATODI, "On the heat equation and the index theorem", Inventiones math. 19, 279-330 (1973); (E) 28, 277-280 (1975).
- (89) GAMBOA-SARAVÍ, R.E., M.A. MUSCHIETTI e J.M. SOLOMIN, "On perturbation theory for regularized determinants of differential operators", Commun. Math. Phys. 89, 363-373 (1983).
- (90) SEELEY, R.T., "Complex powers of an elliptic operator", Ann. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 10, 288-307 (1967).
- (91) GAMBOA-SARAVÍ, R.E., M.A. MUSCHIETTI, F.A. SCHAPOSNIK e J.E. SOLOMIN, "Chiral symmetry and functional integral", Ann. Phys. 157, 360-393 (1984).
- (92) REGO MONTEIRO, M.A., "Fermionic determinant for two-dimensional massive QED", preprint CBPF NF-020/84 (1984).
- (93) GÖCKELER, M., "Axial-vector anomaly for Dirac-Kähler fermions on the lattice", Nucl. Phys. B224, 508-522 (1983).

- (94) MILNOR, J.W. e J.D. STASHEFF, Characteristic Classes, Princeton University Press, Princeton (EUA) (1974).
- (95) CHERN, S.S., Complex Manifolds without Potential Theory, Van Nostrand, Princeton (EUA) (1967).
- (96) KOBAYASHI, S. e K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Vol. II, Wiley, New York (1969).
- (97) HIRZEBRUCH, F., Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin (1966).
- (98) SHANAHAN, P., An Introduction to the Atiyah-Singer Index Theorem, Lecture Notes in Mathematics 638, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- (99) GILKEY, P.B., The Index Theorem and the Heat Equation, Publish or Perish, Boston (1974).
- (100) GEL'FAND, I.M., "On elliptic equation", Russian Math. Survey 15, 3- (1960).
- (101) ATIYAH, M.F., K-Theory, Benjamin, New York (1967).
- (102) ATIYAH, M.F., V.K. PATODI e I.M. SINGER, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry", Bull. London Math. Soc. 5, 229-234 (1973).
- (103) CALLIAS, C., "Axial anomalies and index theorems on open spaces", Commun. Math. Phys. 62, 213-234 (1978).
- (104) BOTT, R. e R. SEELEY, "Some remarks on the paper of Callias", Commun. Math. Phys. 62, 235-245 (1978).
- (105) JACKIW, R. e C. REBBI, "Solitons with fermion number

- 1/2", Phys. Rev. D13, 3398-3409 (1976).
- (106) SU, W.P., J.R. SCHRIEFFER e A.J. HEEGER, "Solitons in polyacetylene", Phys. Rev. Lett. 42, 1698-1701 (1979).
- (107) JACKIW, R. e J.R. SCHRIEFFER, "Solitons with fermion number 1/2 in condensed matter and relativistic field theories", Nucl. Phys. B190 FS3 , 253-265 (1981).
- (108) HIRAYAMA, M. e T. TORII, "Fermion fractionization and index theorem", Progr. Theor. Phys. 68, 1354-1364 (1982).
- (109) CARMO, M.P. DO, Elementos de Geometria Diferencial, Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro (1971).
- (110) MILNOR, J.W., Topology from the Differentiable Viewpoint, University Press of Virginia, Charlottesville (EUA) (1965).
- (111) JACKIW, R. e C. REBBI, "Spinor analysis of Yang-Mills theory", Phys. Rev. D16, 1052-1060 (1977).
- (112) KIMURA, T., "Divergence of axial-vector current in the gravitational field", Progr. Theor. Phys. 42, 1191-1205 (1969).
- (113) DELBOURGO, R. e A. SALAM, "The gravitational corrections to PCAC", Phys. Lett. 40B, 381-382 (1972).
- (114) EGUCHI, T. e P.G.O. FREUND, "Quantum gravity and world topology", Phys. Rev. Lett. 37, 1251-1254 (1976).


- (115) NIELSEN, N.K., H. RÖMER e B. SCHROER, "Anomalous currents in curved space", Nucl. Phys. B136, 475-492 (1978).
- (116) RÖMER, H., "Atiyah-Singer index theorem and quantum field theory", in Lecture Notes in Physics 139, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- (117) DOWKER, J.S., "Another discussion of the axial vector anomaly and the index theorem", J. Phys. A 11, 347-360 (1978).
- (118) NIELSEN, N.K., M.T. GRISARU, H. RÖMER e P. VAN NIEUWENHUIZEN, "Approaches to the gravitational spin-3/2 axial anomaly", Nucl. Phys. B140, 477-498 (1978).
- (119) CHRISTENSEN, S.M. e M.J. DUFF, "New gravitational index theorems and super theorems", Nucl. Phys. B154, 301-342 (1979).
- (120) WITTEN, E., "Constraints on supersymmetry breaking", Nucl. Phys. B202, 253-316 (1982).
- (121) WITTEN, E., "Supersymmetry and Morse theory", J. Diff. Geom. 17, 661- (1982).
- (122) ALVAREZ-GAUMÉ, L., "Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem", Commun. Math. Phys. 90, 161-173 (1983).
- (123) ALVAREZ-GAUMÉ, L., "A note on the Atiyah-Singer index theorem", preprint Harvard HUTP-83/A035 (1983).
- (124) WINDEY, P., "Supersymmetric quantum mechanics and the

- Atiyah-Singer index theorem", Acta Physica Polonica B15, 435-452 (1984).
- (125) FRIEDAN, D. e P. WINDEY, "Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index and the chiral anomaly", Nucl. Phys. B235 FS11 , 395-416 (1984).
- (126) ALVAREZ-GAUMÉ, L. e E. WITTEN, "Gravitational anomalies", Nucl. Phys. B234, 269-330 (1984).
- (127) ROSENBERG, L., "Electromagnetic interaction of neutrinos", Phys. Rev. 129, 2786-2788 (1963).
- (128) COLEMAN, S., "Uses of instantons", in The Whys of Subnuclear Physics, Erice 1977, A. Zichichi, ed., Plenum Press, New York (1979).
- (129) MINAKSHISUNDARAM, S. e A. PLEIJEL, "Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds", Can. J. Math. 1, 242-256 (1949).
- (130) HAWKING, S.W., "Zeta function regularization in curved spacetime", Commun. Math. Phys. 55, 133-148 (1977).
- (131) RAMOND, P., Field Theory: A Modern Primer, Benjamin/Cummings, Reading (EUA) (1981).
- (132) BEREZIN, F.A., The Method of Second Quantization, Academic Press, New York (1966).
- (133) GILKEY, P., "Curvatures and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes", Adv. Math. 10, 344-382 (1973).


- (134) ROMANOV, V.N. e A.S. SCHWARZ, "Anomalies and elliptic operators", *Theor. Mat. Fis.* 41, 190-204 (tradução americana 967-977) (1979).
- (135) REGO MONTEIRO, M.A., "Path-integral bosonization of two-dimensional massive QCD", preprint CBPF-BF-021/84 (1984).
- (136) DE WITT, B., Dynamical Theory of Groups and Fields, Gordon and Breach, New York (1965).
- (137) ROTHE, K.D. e B. SCHROER, "Functions, determinants and induced gauge theories", in Field Theoretical Methods in Particle Physics, Kaiserslautern 1979, W. Rühl, ed., Plenum Press, New York (1980).
- (138) KOGUT, J., M. STONE, H.W. WYLD, S.H. SHENKER, J. SHIGEMITSU, D.K. SINCLAIR, "Studies of chiral symmetry breaking in SU(2) lattice gauge theory", *Nucl. Phys.* B225 FS9 , 326-370 (1983).
- (139) ZUMINO, B., WU, Y.S. e A. ZEE, "Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry", *Nucl. Phys.* B239, 477-507 (1984).
- (140) SKYRME, T.H.R., "A non-linear field theory", *Proc. Roy. Soc. London Ser.* A260, 127-138 (1961).
- (141) SKYRME, T.H.R., "A unified field theory of mesons and baryons", *Nucl. Phys.* 31, 556-569 (1962).
- (142) WESS, J. e B. ZUMINO, "Consequences of axial anomalies",

- Phys. Lett. 37B, 95-97 (1971).
- (143) JAUCH, J.M. e F. ROHRLICH, The Theory of Photons and Electrons, Second edition, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- (144) ARATYN, H. e A. ZIMERMAN, "A Dirac-Kähler approach to the two dimensional Wess-Zumino N=2 model on the lattice", Phys. Lett. 137B, 322-396 (1984); (E) 139B, 465 (1984).
- (145) BECHER, P., "The Dirac-Kähler lattice regularization of the fermionic degrees of freedom", Proceedings of the 7th Johns Hopkins Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, Bad Honnef (Alemanha Oc.) (1983).
- (146) BENN, I.M. e R.W. TUCKER, "Geometric fermions", Phys. Lett. 119B, 348- (1982).

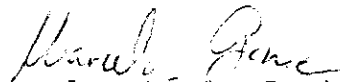
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:




Juan Alberto Mignaco - Presidente




Abrahan Hirsz Zimmerman



Marcelo Otávio Caminha Gomes



Carlos Augusto Pinto Galvão



Paulo Mascarello Bisch

Rio de Janeiro, 06 de março de 1985