

MAURÍCIO ORTIZ CALVÃO

GEODÉSICAS EM UNIVERSOS DO TIPO DE GÖDEL

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1985

A dois grandes e alegres exemplos de amizade, honestidade e bondade, perpetuados em minhas lembranças: meu avô Lourival Pottes Ortiz e meu pai Alexandre Calvão.

Ao futuro presente: meu sobrinho Alex, que é um barato !

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a meus amigos mais constantes e íntimos, que me apoiam durante tanto tempo e a quem tão poucas vezes tenho a oportunidade de expressar meu reconhecimento sincero: minha mãe Eloá, meu irmão Alexandre, minha cunhada Rosângela, minha avó Judith, e o camarada Victor.

Quero agradecer também especialmente:

- A Tiomno e Ivano, pela orientação e primeira oportunidade de pesquisa.*
- Aos amigos de estudo e convívio: João, Romero, Cléber, Vander, Allan, Fernando, Ismael, Henrique von Gersdorff, Edison, Luiz Carlos, Caruso, Marcelo Rebouças, Ademir, Mário Assad, Renato Portugal, Cláudia Pombo, Abílio, Nelson Pinto, Bartolomeu, "Tião", "Badu", Renato Pires, Djalma, Léa, Gerson, Tadeu, Colatto, Sasse, Gilvan, Chaba, Nami.*
- Aos colegas professores e pesquisadores: Barcellos, Yan, Annita Macedo, Ildeu, Marta, Carlos Eduardo, Nelson Pallut, Duarte, Teixeira, Moreira, Galvão, Arthur, pelas discussões científicas e afins.*
- Ao pessoal do apoio indispensável mesmo: Zé "Gordo", Elias, Vera, Fátima, "Baiano", Sergio, Werter, Celena, Myriam, Aroldo, Marilene.*
- A Marilena e Ledilson pelos gráficos.*
- À Helena, pela maravilha de tradução e datilografia.*

Agradeço, também, parcialmente ao CNPq, pelo apoio financeiro parcial que me deu.

RESUMO

Determinamos as geodésicas do tipo temporal e do tipo nulo de uma certa família de universos do tipo de Gödel, realizando primeiramente uma análise qualitativa via método do potencial efetivo e, a seguir, integrando exatamente as equações de movimento.

SUMMARY

We find out the timelike and null geodesics of a certain family of Gödel-like universes, carrying out, at first, a qualitative analysis through the method of the effective potential and, subsequently, proceeding to the exact integration of the equations of motion.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
SUMMARY	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - MODELOS DO TIPO DE GÖDEL	6
1.1 - Modelos do Tipo de Gödel	6
1.2 - Propriedades Patológicas	15
<u>CAPÍTULO 2</u> - GEODÉSICAS NOS ESPAÇOS-TEMPOS DO TIPO DE GÖDEL: I. ANÁLISE QUALITATIVA VIA POTENCIAL EFETIVO	19
2.1 - Equações das Geodésicas	19
2.2 - O Potencial Efetivo	23
2.2.1 - Definição	23
2.2.2 - Comportamento na Origem e no Infinito	24
2.2.3 - Os Pontos de Mínimo Absoluto ($r_{m\tilde{t}n}, v_{m\tilde{t}n}$)	24
2.2.4 - A Condição de Movimento	25
2.2.5 - Os Pontos de Retorno	29
2.2.6 - O Caso do Espaço-Tempo de Som-Raychaudhuri	31
2.3 - Movimento Radial	32
2.3.1 - Parâmetros Relevantes na Classificação do Movimen- to Geodésico	32
2.3.2 - O Caso $\lambda^2 > 1$	35
2.3.3 - O Caso $0 < \lambda^2 \leq 1$	41
2.3.4 - O Caso do Espaço-Tempo de Som-Raychaudhuri ($\lambda^2 = +\infty$)...	48

2.4 - Resumo de Propriedades	52
<u>CAPÍTULO 3</u> - GEODÉSICAS NOS ESPAÇOS-TEMPOS DO TIPO DE GÖDEL: II. INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	56
3.1 - Movimento Axial	56
3.2 - Movimento Radial	57
3.3 - Movimento Azimutal	59
3.4 - Movimento Temporal	61
3.5 - Projeção das Geodésicas no 2-Plano (ρ, ϕ)	63
<u>CONCLUSÃO</u>	67
<u>APÊNDICE A</u> - GEODÉSICAS	69
<u>APÊNDICE B</u> - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES (3.13) E (3.14)	77
<u>REFERÊNCIAS</u>	81

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>Pág.</u>
2.1 - (a)-(b)-(c)-(d) - Esboços dos gráficos de $V(\bar{r})$ para os vários valores de γ	26
2.2 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $\lambda^2 > 1$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$; $\gamma > 0$	35
2.3 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $\lambda^2 > 1$, $\beta^2 > 1-\lambda^2$, $\gamma = 0$	37
2.4 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $\lambda^2 > 1$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$, $\gamma_2 \leq \gamma < 0$	39
2.5 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1-\lambda^2$, $\gamma > 0$	42
2.6 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1-\lambda^2$, $\gamma = 0$	43
2.7 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1-\lambda^2$, $-2\Omega/m^2 < \gamma < 0$	44
2.8 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1-\lambda^2$, $\gamma > 0$	45
2.9 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1-\lambda^2$, $\gamma = 0$	46
2.10 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1-\lambda^2$, $\gamma < 0$	47
2.11 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$; $\gamma > 0$	49
2.12 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$; $\gamma = 0$	50
2.13 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$; $-(1-\beta^2)/4\Omega \leq \gamma < 0$	51
2.14 - (a)-(b)-(c) - Gráficos de $V(\bar{r})$ em função de γ	54-55
3.1 - (a)-(b)-(c) - Projeções das geodésicas no 2-plano (ρ, ϕ) como função de α	65

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>		<u>Pág.</u>
2.1	- Classificação dos movimentos geodésicos	34

INTRODUÇÃO

Uma das motivações heurísticas de Einstein para a criação da relatividade geral (RG) foi, como se sabe, a tentativa de implementação do princípio de Mach através de uma teoria de gravitação ⁽¹⁻⁷⁾, tema intimamente relacionado com a questão do campo gravitacional gerado por matéria em rotação ^(6,8-11). Dessa forma, não é de se estranhar que, já em 1918, Lense e Thirring ^(4,6,12-15) tenham tentado comprovar o surgimento de forças de Coriolis e o arraste da bússola de inércia (arraste do referencial inercial local) nas proximidades de corpos maciços em rotação. Tais efeitos foram, de fato, encontrados pelos seus cálculos em RG, considerando uma casca esférica maciça girante; no entanto, seus resultados sofriam do inconveniente de só se aplicarem na aproximação linear de campo fraco e pequena rotação. Foi somente em 1924 que Lanczos ⁽¹⁶⁾ conseguiu encontrar a primeira solução exata das equações de Einstein, cujo conteúdo material se apresentava em rotação: era um modelo de poeira, inomogêneo, estacionário e cilíndricamente simétrico. Tal modelo, no entanto, passou despercebido e veio sendo redescoberto ^(17,18) até que, por fim, foi lembrado por Maitra ⁽¹⁹⁾, em 1966.

A segunda solução exata das equações de Einstein com conteúdo material girante foi descoberta por Gödel ⁽²⁰⁾, em 1949, e é, sem dúvida, a mais famosa de tais soluções com possível interpretação cosmológica. Desde então, devido às suas patologias, essa solução vem suscitando controvérsias profundas, de natureza física e filosófica, nos próprios fundamentos das teorias de espa

ço-tempo e gravitação (7,8,19,21-25). Particularmente, esta solução costuma ser apresentada como um exemplo de violação do princípio de Mach (5-8,22,25,26).

O esclarecimento dessa última questão é algo delicado, devido às várias versões existentes do princípio de Mach (3,7,11,26-28). Podemos distinguir, junto com Pirani (11), pelo menos três dessas versões:

- (1) - Na ausência de matéria, as equações do campo gravitacional, não deveriam admitir nenhuma solução;
- (2) - O campo gravitacional (tensor métrico) deveria ser determinado univocamente pelo conteúdo material do espaço-tempo (tensor de energia-momento);
- (3) - Os referenciais inerciais locais são aqueles que aproximadamente não giram com relação às estrelas distantes.

O enunciado (1) corresponde a uma visão supermachiana e puramente relacional do espaço-tempo e, obviamente, não é válida em RG.

"A dificuldade com relação ao enunciado (2) é que as equações de campo são equações diferenciais, de forma que o problema da escolha de condições de contorno aparece.... Se, no entanto, se quiser evitá-las completamente, parece que se deve substituir as equações de campo por equações integrais, que dificilmente é uma proposição prática, ou então introduzir algum tipo de postulado estatístico de natureza cosmológica" (11). Nesta passagem, Pirani é, de fato, profético, antecipando as interpretações e trabalhos de Wheeler (3,27) e Raine (29).

Advogamos, novamente junto com Pirani (11), que a idéia realmente relevante é a apresentada no enunciado (3). Ou seja,

construímos um referencial inercial local baseado num certo observador fundamental (co-móvel com a matéria) através da propagação de Fermi-Walker de uma base espacial, o que justamente simula o movimento de giroscópios e proporciona, assim, direções invariantes ^(3,11,30-36); a seguir, comparamos este movimento com o do vetor conexão de uma partícula fundamental vizinha: se houver variação relativa dessas direções dizemos que o princípio de Mach é violado ou, de outra maneira, o movimento médio da matéria geradora da gravitação não coincide com o movimento da bússola de inércia. Todo modelo gerado por um fluido cujo parâmetro cinemático de rotação for não nulo violará, então, o princípio de Mach. Isso ocorre com o modelo de Gödel (ver Seção 1.2).

Retornemos à nossa narrativa do desenvolvimento histórico do problema dos modelos com matéria geradora de gravitação dotada de rotação. Muitas outras soluções com fontes girantes foram descobertas posteriormente à solução de Gödel, e se assemelharam a esta em determinados aspectos; isto suscitou nova polêmica, desta feita, com relação à equivalência (isometria) dos espaços-tempos e à ambigüidade das fontes ⁽³⁷⁻⁴²⁾.

Era essa a incômoda situação dos assim chamados modelos do tipo de Gödel até início da presente década, quando Rebouças e Tiomno ⁽⁴³⁾, estendendo um trabalho de Raychaudhuri e Thakurta ⁽⁴⁴⁾, publicaram, em 1983, um relevante artigo de depuração e limpeza da área, estudando a homogeneidade desses espaços-tempos e as possíveis fontes desses modelos em RG. Nesse mesmo ano, Tiomno, em colaboração com Teixeira e Duarte ⁽⁴⁵⁾, estenderam essas fontes para a teoria de Einstein-Cartan (TEC).

De posse duma solução tão patológica quanto a de Gödel, é natural se estudar as trajetórias de partículas de teste livres e pontuais. Esse estudo pode levar, no caso geral, à determina -

ção de horizontes, singularidades, etc. No caso particular da solução de Gödel, esse estudo foi realizado primeiramente por Kundt ⁽⁴⁶⁾, em 1956; no entanto, é mais conhecido o trabalho de Chandrasekhar e Wright ⁽⁴⁷⁾, de 1961 (o primeiro está escrito em alemão, o segundo em inglês !). Nenhum desses dois artigos empregou o sistema de coordenadas usualmente conhecidas como cilíndricas. Em 1983, Novello, Soares e Tiomno ⁽⁴⁸⁾, retomaram o estudo dessas geodésicas, utilizando o sistema cilíndrico. Eles mostraram, então, que é possível reduzir-se a integração da equação de movimento radial a um problema uni-dimensional, com a introdução de uma energia potencial efetiva apropriada. Ora, é bem conhecida a vantagem desse artifício no problema análogo de força central em mecânica clássica ^(49,50), com a possibilidade de uma análise gráfica qualitativa bastante clara e informativa, antes de integrar propriamente o sistema de equações de movimento. Eis aqui mais uma vez demonstrada a virtude da retomada de um problema antigo segundo uma nova perspectiva ^(*).

Essa tese surgiu justamente como um estuário natural dessas duas vertentes de pesquisa: a generalização da solução de Gödel e o estudo de suas geodésicas.

No Capítulo 1, caracterizamos os modelos do tipo de Gödel, considerando sua topologia, simetrias e conteúdo material. Digressionamos também sobre algumas de suas propriedades patológicas.

No Capítulo 2, estabelecemos um conjunto de quatro integrais primeiras das equações das geodésicas, suficientes para exau-

^(*) Esse método do potencial efetivo é empregado elegantemente por Wheeler et al. ⁽³⁾ para o estudo das geodésicas no modelo de Schwarzschild.

riremos o estudo de todas essas curvas nos modelos do tipo de Gödel. Reduzimos o problema do movimento radial a um problema unidimensional, com a introdução da energia potencial efetiva; investigamos, então, qualitativamente esse movimento radial.

No Capítulo 3, integramos exatamente as equações "horárias" de movimento e verificamos a forma das projeções das geodésicas no 2-plano (r, ϕ) .

No Apêndice A, coligimos algumas informações sobre geodésicas em espaços-tempos genéricos.

No Apêndice B, apresentamos alguns cálculos específicos referentes a determinadas passagens do Capítulo 3.

O principal resultado novo desse trabalho é a demonstração da existência de geodésicas com projeção no 2-plano (r, ϕ) aberto, para modelos do tipo de Gödel transversalmente causais ($m^2 \geq 4\Omega^2$).

CAPÍTULO 1

MODELOS DO TIPO DE GÖDEL

Neste capítulo, daremos as principais características dos modelos do tipo de Gödel, tecendo considerações sobre suas topologias compatíveis com as métricas, apresentando seus campos de isometria, seus conteúdos materiais, tanto em RG como em TEC, e concluindo com as propriedades mais exóticas. Só trataremos dos modelos do tipo de Gödel espaço-temporalmente homogêneos.

1.1 - MODELOS DO TIPO DE GÖDEL

Para caracterizarmos um dado modelo relativístico, devemos examinar seu espaço-tempo (M, \vec{g}) , onde M é sua variedade de base e \vec{g} um tensor métrico de assinatura-2, definido em M , e também seu conteúdo material gerados de gravitação, em particular seu tensor de energia-momento \vec{T} , propriedades fenomenológicas (equações de estado, viscosidade volumar e de cisalhamento, condutividade térmica e elétrica, etc), equações dos vários campos (escalar, eletromagnético, etc) (24, 35).

Como é usual em teorias métricas de gravitação, resolvemos as equações de campo para o tensor métrico \vec{g} numa carta local e, então, passamos a considerar as topologias compatíveis com

esta métrica (24,51): as equações de campo não determinam a topologia ou a estrutura diferencial de M !

Assim, as métricas do tipo de Gödel são obtidas a partir da forma genérica:

$$ds^2 = [dt+H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad , \quad (1.1)$$

impondo-se a homogeneidade espaço-temporal da variedade de base [ou, pelo menos, da vizinhança coordenada na qual vale (1.1)], isto é, impondo-se a existência de um grupo de isometrias atuando transitivamente sobre M (4,43,52-54). Prova-se, então, que tais espaços-tempos admitem, localmente, um dos três elementos de linha seguintes:

$$ds^2 = [dt+(4\Omega/m^2)\sinh^2(mr/2)d\phi]^2 - (1/m^2)\sinh^2(mr)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad , \quad (1.2a)$$

$$ds^2 = (dt + \Omega r^2 d\phi)^2 - r^2 d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad , \quad (1.2b)$$

$$ds^2 = [dt+(4\Omega/\mu^2)\sen^2(\mu r/2)d\phi]^2 - (1/\mu^2)\sen^2(\mu r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad , \quad (1.2c)$$

com Ω , m e μ constantes, que, doravante, tomaremos como não-negativos.

Esses elementos de linha podem ser apresentados numa única expressão:

$$ds^2 = [dt+(4\Omega/\ell^2)\sinh^2(\ell r/2)d\phi]^2 - (1/\ell^2)\sinh^2(\ell r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad , \quad (1.3)$$

com $\ell^2 = m^2 > 0$ correspondendo a (1.2a), $\ell^2 = 0$ a (1.2b) e $\ell^2 = -\mu^2 < 0$ a (1.2c).

Usualmente, costuma-se considerar que as coordenadas acima variam nos seguintes intervalos: $-\infty < t, \phi, z < +\infty$, $0 \leq r < +\infty$, identificando-se os pontos $(t, r, \phi + 2n\pi, z)$, com n inteiro (*).

Como sugerem os elementos de linha (1.2a) e (1.2c) referir-nos-emos a essas métricas como família hiperbólica e circular, respectivamente. A métrica (1.2b) é a métrica de Som-Raychaudhuri (38) e podemos considerá-la como limite de cada uma dessas famílias, conforme $m^2 \rightarrow 0+$ ou $\mu^2 \rightarrow 0+$, respectivamente.

O sistema de coordenadas no qual se apresentam (1.2) ou (1.3) é conhecido como sistema de coordenadas "cilíndricas", já que:

$$\lim_{r \rightarrow 0+} ds^2 \Big|_{t=\text{const}} = -dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (1.4)$$

a expressão do elemento de linha do espaço euclidiano tri-dimensional usual, em coordenadas cilíndricas. Desta forma, chamamos t de coordenada temporal, r de coordenada radial, ϕ de coordenada azimutal e z de coordenada axial.

Outra carta local bastante comum para a família hiperbólica de métricas do tipo de Gödel é a constituída pelo sistema de coordenadas "cartesianas" (43), no qual o elemento de linha (1.2a) assume a forma:

$$ds^2 = [dx^0 + (\sqrt{2} \Omega/m) \exp(mx^1) dx^2]^2 - (1/2) \exp(2mx^1) (dx^2)^2 - (dx^1)^2 - (dx^3)^2, \quad (1.5)$$

(*)

Esta identificação tem, obviamente, consequência sobre a topologia de M .

com $-\infty < x^\alpha < +\infty$.

A relação entre esses sistemas de coordenadas é dada por (43):

$$\exp(mx^1) = \exp(mr) \cos^2(\phi/2) + \exp(-mr) \sin^2(\phi/2) \quad (1.6a)$$

$$x^2 \exp(mx^1) = (2\sqrt{2}/m) \sinh(mr) \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) \quad (1.6b)$$

$$\tan[\phi/2 + m^2(t-x^0)/4\Omega] = \exp(-mr) \tan(\phi/2) \quad (1.6c)$$

$$x^3 = z \quad . \quad (1.6c)$$

Podemos considerar essas coordenadas "cilíndricas" como coordenadas co-móveis para o referencial:

$$v^\mu = \delta^\mu_0 \quad , \quad (1.7)$$

já que a coordenada t é sempre do tipo temporal.

A métrica de Gödel corresponde a $m^2 = 2\Omega^2$ em (1.2a):

$$ds^2 = [dt + (2/\Omega) \sinh^2(\sqrt{2}\Omega r/2) d\phi]^2 - (1/2\Omega^2) \sinh^2(\sqrt{2}\Omega r) d\phi^2 - dr^2 - dz^2. \quad (1.8)$$

Um campo de tetradas natural para (1.1) é:

$$\theta^0 = dt + H(r) d\phi \quad (1.9a)$$

$$\theta^1 = dr \quad (1.9b)$$

$$\theta^2 = D(r) d\phi \quad (1.9c)$$

$$\theta^3 = dz \quad . \quad (1.9d)$$

Nessa base de tetradas, as componentes independentes não nulas do tensor de Riemann são (43):

$$R^0_{101} = R^0_{202} = + (1/4) (H'/D)^2 \quad , \quad (1.10a)$$

$$R^0_{112} = - (1/2) (H'/D)' \quad , \quad (1.10b)$$

$$R^1_{212} = - (3/4) (H'/D)^2 + D''/D \quad , \quad (1.10c)$$

onde ' representa derivada com relação a r.

Daí podemos calcular o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, também na base de tetradas (1.9):

$$R_{00} = - (1/2) (H'/D)^2 \quad , \quad (1.11a)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{00} + D''/D \quad , \quad (1.11b)$$

$$R_{02} = - (1/2) (H'/D)' \quad , \quad (1.11c)$$

$$R = + (1/2) (H'/D)^2 + 2D''/D \quad . \quad (1.12)$$

Considerando que as ditas coordenadas "cartesianas", com $-\infty < x^\alpha < +\infty$, constituem uma carta suficiente para cobrir toda a variedade, fica fácil ver que todas as métricas da família hiperbólica (1.2a) ou (1.5) são compatíveis com uma variedade de topologia \mathbb{R}^4 (24, 55). Uma maneira muito elegante de se construir variedades que admitem cartas locais nas quais a métrica toma uma

das formas (1.2a) ou (1.2c) é utilizar-se de campos invariantes obtidos como translações definidas sobre os grupos de Lie H^3 : = $\{(q^0, q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^4 : (q^0)^2 + (q^1)^2 - (q^2)^2 - (q^3)^2 = 1\}$ e $S^3 := \{(q^0, q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^4 : (q^0)^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 = 1\}$, respectivamente (20, 22, 56-59); chegamos aos vários espaços-tempos do tipo de Gödel realizando-se, então, o produto dessas variedades com a reta \mathbb{R} . O espaço-tempo gerado a partir de H^3 por esse método coincide com o de Gödel a menos de identificações de determinados pontos (20, 53).

Discutiremos agora as simetrias dos espaços-tempos do tipo de Gödel. As geometrias com $m^2 \neq 4\Omega^2$ admitem exatamente cinco campos vetoriais de Killing linearmente independentes, que são, na carta "cilíndrica", por exemplo (43):

$$K_{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad (1.13a)$$

$$K_{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad (1.13b)$$

$$K_{(2)} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad (1.13c)$$

$$K_{(3)} = (2\Omega/m) \tanh(mr/2) \sin \phi \frac{\partial}{\partial t} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + m \operatorname{cotgh}(mr) \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad (1.13d)$$

$$K_{(4)} = (2\Omega/m) \tanh(mr/2) \cos \phi \frac{\partial}{\partial t} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + m \operatorname{cotgh}(mr) \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad . \quad (1.13e)$$

O caso $m^2 = 4\Omega^2$ admite dois outros campos vetoriais de Killing linearmente independentes, perfazendo assim o total de sete (*).

(*) Informação particular de A.F.F. Teixeira, J. Tiommo, I.D. Soares e F. Sasse.

A álgebra de Lie do grupo de isometrias é determinada por ⁽⁴³⁾:

$$[K_{(0)}, K_{(r)}] = [K_{(1)}, K_{(r)}] = 0 \quad (r=0,1,2,3,4) \quad (1.14a)$$

$$[K_{(2)}, K_{(3)}] = K_{(4)} \quad (1.14b)$$

$$[K_{(2)}, K_{(4)}] = -K_{(3)} \quad (1.14c)$$

$$[K_{(3)}, K_{(4)}] = -2\Omega K_{(0)} - m^2 K_{(2)} \quad (1.14d)$$

Temos agora todas as informações para a enunciação das simetrias dos espaços-tempos do tipo de Gödel.

Os espaços-tempos do tipo de Gödel admitem um grupo G_5 de isometrias que atua multiplamente transitivamente sobre a variedade, que é, portanto, espaço-temporalmente homogênea, mas não há sub-grupos desse G_5 que atuem transitivamente sobre hipersuperfícies espaciais (embora os haja atuando sobre hipersuperfícies de caráter misto), de forma que tais espaços-tempos não são espacialmente homogêneos. Além disso, como $K_{(0)}$ é um campo vetorial de Killing do tipo temporal e não há campos vetoriais de Killing do tipo temporal ortogonais a hipersuperfícies, os espaços-tempos do tipo de Gödel são estacionários mas não são estáticos. Outrossim, como eles admitem um campo vetorial de Killing, $K_{(2)}$, cujas curvas integrais são fechadas, há simetria axial (ou rotacional) com eixo de rotação infinito $z = \text{var}$, e como $K_{(1)} = \partial/\partial z$ também é um campo vetorial de Killing, o espaço-tempo é, de fato, cilindricamente simétrico.

Passemos agora ao estudo da geração desses espaços-tem

pos como soluções de teorias de gravitação adequadas para fontes fisicamente admissíveis.

Todas as métricas do tipo de Gödel podem ser obtidas como solução na TEC com um fluido perfeito de Weyssenhoff como conteúdo material ⁽⁴⁵⁾.

Dentro da RG, Rebouças e Tiomno ⁽⁴³⁾ apresentaram explicitamente as métricas do tipo de Gödel (1.3), com $m^2 \leq 4\Omega^2$, como soluções das equações acopladas de Einstein com termo cosmológico, de Maxwell e de campo escalar sem massa (de longo alcance), na presença de um fluido perfeito de densidade de energia ρ , pressão termostática (= termodinâmica) p , quadri-velocidade $u^\mu = V^\mu = \delta^\mu_0$, mais um campo escalar sem massa S , função só de z , um campo eletromagnético com partes elétrica, \vec{E} , e magnética, \vec{B} , paralelas à direção z . Com essa escolha das fontes, eles mostraram que:

$$S = ez + \alpha \quad , \quad (1.15a)$$

$$E = E_0 \operatorname{sen}[2\Omega(z-z_0)] \quad , \quad (1.15b)$$

$$B = B_0 \operatorname{cos}[2\Omega(z-z_0)] \quad , \quad (1.15c)$$

com e , α , E_0 , B_0 , z_0 constantes, são soluções das equações de campo escalar sem massa (e sem fontes) e das equações de Maxwell (sem fontes). As equações de Einstein fornecem:

$$H'/D = 2\Omega = \operatorname{const} \quad , \quad (1.16a)$$

$$\rho = (\Omega^2 - \Lambda)/\kappa + (E_0^2 - 3e^2)/2 \quad , \quad (1.16b)$$

$$p = (\Lambda + \Omega^2)/\kappa - (E_0^2 - e^2)/2 \quad , \quad (1.16c)$$

$$D''/D = m^2 = 2\Omega^2 - \kappa(E_0^2 - e^2) \quad . \quad (1.16d)$$

Como vemos de (1.16), são possíveis várias combinações para gerar a mesma geometria, exceto no caso $m^2 = 4\Omega^2$, que só é solução para um campo escalar puro: $\rho = p = F_{\mu\nu} = 0$, mas com termo cosmológico ($\Lambda \neq 0!$).

O caso $m^2 = 0$, ou a métrica (1.2b), corresponde ao modelo de Som-Raychaudhuri (38), que foi obtido originalmente supondo-se uma poeira eletricamente carregada como fonte.

O caso $m^2 = 2\Omega^2$, ou a métrica (1.8), corresponde ao modelo de Gödel, cujo conteúdo material é uma poeira de densidade de energia ρ e quadri-velocidade $u^\mu = \delta^\mu_0$. Das equações (1.16), vem:

$$\kappa\rho/2 = \Omega^2 = -\Lambda = R/2 \quad . \quad (1.17)$$

A métrica de Gödel também pode ser encarada como uma solução das equações de Einstein sem termo cosmológico ($\Lambda = 0$), mas com um fluido perfeito coerente ($p \neq 0$) como conteúdo material.

O referencial que tem as coordenadas "cilíndricas" como co-móveis, $V^\mu = \delta^\mu_0$, e que coincide com o referencial próprio do fluido perfeito quando este está presente, $u^\mu = V^\mu$, possui os seguintes parâmetros cinemáticos (5, 33, 53):

$$a^\mu := V^\mu{}_{;\nu} V^\nu = 0 \quad (1.18a)$$

$$\theta := V^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (1.18b)$$

$$\sigma^{\mu\nu} := h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} V^{\alpha;\beta} - \frac{1}{3} \theta h^{\mu\nu} = 0 \quad (1.18c)$$

$$\omega^\mu := \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha\beta\gamma} V_\alpha h_\beta^\lambda h_\gamma^\rho V_{\lambda;\rho} = \Omega \delta^\mu_3 = \text{const} \quad (1.18d)$$

onde a^μ é a aceleração, θ a expansão, $V^{\mu\nu}$ o tensor de cisalhamento (distorção), ω^μ o vetor de rotação e $h^{\mu\nu}$ o projetor no espaço complementar (de repouso) de V^μ :

$$h^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu \quad . \quad (1.19)$$

Vemos, então, que as partículas referenciais executam um movimento geodésico ($a^\mu = 0$), com rotação ($\omega^\mu \neq 0$) rígida ($\theta = \sigma^{\mu\nu} = 0$) constante ($\omega^\mu = \text{const}$), isto é, partículas vizinhas permanecem equidistantes e estão todas em "queda livre". No caso particular do modelo de Gödel a densidade de energia ρ coincide com uma medida da rotação local da matéria com relação à bússola de inércia (ver Seção 1.2).

1.2 - PROPRIEDADES PATOLÓGICAS

Referindo-nos à discussão, na Introdução, sobre o princípio de Mach e ao resultado (1.18d), observamos que os modelos do tipo de Gödel com fluido perfeito como fonte violam esse princípio, no sentido de que os referenciais inerciais locais não são aqueles não acelerados com relação ao fluido. Como bem ilustra Lord ⁽²⁶⁾: "Se a experiência do balde girante de Newton fosse realizada em um universo de Gödel, a superfície da água ficaria côncava quando a água estivesse em repouso relativamente às "estrelas fixas"; e quando a superfície da água estivesse plana haveria

uma velocidade angular relativa da água com respeito às estrelas". Analogamente um pêndulo de Foucault pareceria girar com relação às galáxias distantes.

A seguir, investigaremos a existência de curvas do tipo temporal ou nulo fechadas nos diversos espaços-tempos do tipo de Gödel. As curvas candidatas naturais para essa investigação são as curvas coordenadas $\phi = \text{var}$, por serem já fechadas. Conforme a família de métricas em questão, temos:

(1) Família Hiperbólica: $\ell^2 = m^2 > 0$.

$$ds^2 \Big|_{\phi=\text{var}} = (4/m^2) [(\lambda^2 - 1) \sinh^2(mr/2) - 1] \sinh^2(mr/2) d\phi^2 \quad , \quad (1.20)$$

onde:

$$\lambda^2 := 4\Omega^2/m^2 \quad , \quad (\lambda > 0) \quad . \quad (1.21)$$

Esse intervalo se torna positivo ou nulo se:

$$mr/2 \geq mr_c/2 := \text{Arcsinh}(1/\sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad , \quad (1.22)$$

que só pode ocorrer quando $\lambda^2 < 1$.

(2) Espaço-tempo de Som-Raychaudhuri: $\ell^2 = 0$.

$$ds^2 \Big|_{\phi=\text{var}} = (\Omega^2 r^2 - 1) r^2 d\phi^2 \quad . \quad (1.23)$$

Esse intervalo se torna positivo ou nulo para:

$$r \geq r_c := 1/\Omega \quad . \quad (1.24)$$

(3) Família Circular: $\ell^2 = -\mu^2 < 0$.

$$ds^2 \Big|_{\phi=\text{var}} = (4/\mu^2) [(\zeta^2+1) \text{sen}^2(\mu r/2) - 1] \text{sen}^2(\mu r/2) d\phi^2 \quad , \quad (1.25)$$

$$\zeta^2 := 4\Omega^2/\mu^2 \quad , \quad (\zeta > 0) \quad . \quad (1.26)$$

Esse intervalo se torna positivo ou nulo para:

$$n\pi + \arcsen(1/\sqrt{\zeta^2+1}) \leq \mu r/2 \leq (n+1)\pi - \arcsen(1/\sqrt{\zeta^2+1}) \quad , \quad (1.27)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$

Vemos, assim, que para as métricas do tipo de Gödel (1.3) com $-\infty < \ell^2 < 4\Omega^2$, os espaços-tempos do tipo de Gödel admitem curvas do tipo nulo e temporal fechadas e, segundo Hawking e Ellis ⁽²⁴⁾, diremos que eles violam a causalidade e a condição cronológica. Se $0 \leq m^2 < 4\Omega^2$, só há uma região na qual se desenvolvem essas patologias; justamente além do raio crítico r_c , dado por (1.22) e (1.24), para a família hiperbólica e o espaço-tempo de Som-Raychaudhuri, respectivamente. Se $\ell^2 = -\mu^2 < 0$, há um rodízio de regiões causais e acausais, essas últimas sendo dadas por (1.27). Já para $m^2 \geq 4\Omega^2$, como se vê de (1.22), as curvas coordenadas fechadas $\phi = \text{var}$ permanecem sempre do tipo espacial. Referir-nos-emos aos espaços tempos com $-\infty < \ell^2 < 4\Omega^2$ como acausais e àquelas com $\ell^2 \geq 4\Omega^2$, como seccionalmente causais, já que mostramos que na seção $t = \text{const}$ não há curvas acausais, mas nada afirmamos sobre outras seções mais genéricas do espaço-tempo.

Para considerações adicionais sobre a praticabilidade de "viagem no tempo" ao longo dessas curvas acausais, é interessante consultar os trabalhos de Chakrabarti et al. ⁽⁶⁰⁾ e Malament ⁽⁶¹⁾ .

A existência de curvas acausais para os espaços - tempos com $-\infty < \ell^2 < 4\Omega^2$ tem uma série de consequências ^(24,55,62); com a topologia de \mathbb{R}^4 , esses espaços-tempos são simplesmente conexos e não admitem a introdução de fatias ^(55,62); como consequência não existem hipersuperfícies de Cauchy (globais) e não há tempo cósmico.

CAPÍTULO 2

GEODÉSICAS NOS ESPAÇOS-TEMPOS DO TIPO DE GÖDEL: I. ANÁLISE QUALITATIVA VIA POTENCIAL EFETIVO

No presente capítulo, efetuamos uma análise qualitativa do movimento geodésico radial através do gráfico do potencial efetivo.

Devido à exigüidade do tempo de pesquisa, restringimo-nos, ao longo de todo o trabalho, à análise dos movimentos geodésicos somente em espaços-tempos da família hiperbólica e de Som-Raychaudhuri; esta escolha se justifica pelo fato desse conjunto incluir o espaço-tempo de Gödel como um caso particular, e termos, assim, um padrão de comparação para nossos resultados. Restringimo-nos, também, somente ao estudo das geodésicas do tipo temporal e nulo.

2.1 - EQUAÇÕES DAS GEODÉSICAS

Numa teoria métrica do espaço-tempo, as equações das geodésicas podem ser obtidas a partir do princípio variacional (ver Apêndice A):

$$\delta \int L ds = 0 \quad , \quad (2.1)$$

com

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) := (1/2)g_{\mu\nu}(x^\alpha)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (2.2)$$

onde $\dot{}$ indica derivada com relação a um parâmetro afim s da geodésica. No caso do tipo temporal, consideraremos s sempre como o tempo próprio.

Vamos então aplicar esse formalismo para o cálculo das equações das geodésicas da família hiperbólica de espaços - tempos do tipo de Gödel. O elemento de linha correspondente (1.2a) fornece a seguinte lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \{ \dot{t}^2 + (8\Omega/m^2) \sinh^2(mr/2) \dot{\phi} + (4/m^2) [(\lambda^2 - 1) \sinh^2(mr/r) - 1] \sinh^2(mr/2) \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2 - \dot{z}^2 \}. \quad (2.3)$$

Como t , ϕ e z são coordenadas ignoráveis em (2.3), seus momentos canônicos conjugados são conservados ao longo das geodésicas e temos três integrais primeiras das equações geodésicas, relacionadas com a estacionariedade e simetria cilíndrica dos modelos:

$$p_t := \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \dot{t} + (4\Omega/m^2) \sinh^2(mr/2) \dot{\phi} = \text{const} \quad (2.4a)$$

$$p_\phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (4\Omega/m^2) \sinh^2(mr/2) \dot{t} + (4/m^2) [(\lambda^2 - 1) \sinh^2(mr/2) - 1] \cdot \sinh^2(mr/2) \dot{\phi} = \text{const} \quad (2.4b)$$

$$p_z := \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = -\dot{z} = \text{const} \quad (2.4c)$$

As grandezas p_t , p_ϕ e p_z podem ser interpretadas como a energia, o momento angular azimutal e o momento linear axial, no referencial $V^\mu = \delta^\mu_0$, respectivamente.

Consideradas juntas com a integral primeira sempre existente:

$$2L = \dot{t}^2 + (8\Omega/m^2) \sinh^2(mr/2) \dot{t}\dot{\phi} + (4/m^2).$$

$$. [(\lambda^2 - 1) \sinh^2(mr/2) - 1] \sinh^2(mr/2) \dot{\phi}^2 - \dot{r} - \dot{z}^2 = \varepsilon, \quad (2.5)$$

com $\varepsilon = 1, 0$, conforme a geodésica seja do tipo temporal ou nulo, as equações (2.4) fornecem um sistema de quatro integrais primeiras suficientes para determinar o movimento geodésico.

Podemos facilmente resolvê-las para obter \dot{x}^μ em termos sô de r :

$$\dot{t} = p_t \left[\left(1 - \lambda^2 \frac{\sinh^2 \bar{r}}{\cosh^2 \bar{r}} \right) + \frac{\Omega \gamma}{\cosh^2 \bar{r}} \right], \quad (2.6a)$$

$$\dot{\phi} = p_t \left[\frac{\Omega}{\cosh^2 \bar{r}} - \frac{m^2 \gamma}{4 \sinh^2 \bar{r} \cosh^2 \bar{r}} \right], \quad (2.6b)$$

$$\dot{z} = -p_z, \quad (2.6c)$$

$$\dot{r}^2 = p_t^2 \left[1 - \beta^2 - \left(\lambda \frac{\sinh \bar{r}}{\cosh \bar{r}} - \frac{m \gamma}{2 \sinh \bar{r} \cosh \bar{r}} \right)^2 \right], \quad (2.6d)$$

onde:

$$\bar{r} := mr/2, \quad (2.7a)$$

$$\beta^2 := (p_z^2 + \varepsilon) / p_t^2, \quad (2.7b)$$

$$\gamma := p_\phi / p_t \quad . \quad (2.7c)$$

Designaremos:

$$E_L := p_z^2 + \epsilon \quad (2.8)$$

por energia longitudinal (ou axial); ela é a contribuição para a energia total devida à massa de repouso e ao momento linear axial.

É fácil ver, de (2.6d), que, para os movimentos fisicamente admissíveis, devemos ter:

$$0 \leq \beta^2 \leq 1 \quad . \quad (2.9)$$

O sistema correspondente no espaço-tempo de Som-Raychaudhuri pode ser obtido diretamente de (2.10) tomando-se o limite quando m^2 tende a zero, ficando:

$$\dot{t} = p_t [(1 - \Omega^2 r^2) + \Omega \gamma] \quad , \quad (2.10a)$$

$$\dot{\phi} = p_t [\Omega - \gamma / r^2] \quad , \quad (2.10b)$$

$$\dot{z} = -p_z \quad , \quad (2.10c)$$

$$\dot{r}^2 = p_t^2 [1 - \beta^2 - (\Omega r - \gamma / r)^2] \quad . \quad (2.10d)$$

É interessante notar a dimensão de algumas grandezas relevantes:

$$[s] = [t] = [r] = [z] = L \quad , \quad [\phi] = 1 \quad , \quad (2.11a)$$

$$[m] = [\Omega] = L^{-1} \quad , \quad (2.11b)$$

$$[p_t] = [p_z] = 1 \quad , \quad [p_\phi] = L \quad , \quad (2.11c)$$

$$[\beta] = [E_L] = 1 \quad , \quad [\gamma] = L \quad . \quad (2.11d)$$

2.2 - O POTENCIAL EFETIVO

2.2.1 - Definição

Vemos, de (2.6d), que, pelas simetrias do problema, o movimento radial é reduzido a um problema uni-dimensional.

A expressão para o movimento radial, (2.6d), pode ser reescrito como

$$\dot{r}^2 = p_t^2 - V(\bar{r}) \quad , \quad (2.12)$$

onde $V(r)$, a energia potencial efetiva (ao quadrado), é definida por:

$$V(\bar{r}) := p_t^2 \left[\lambda \frac{\operatorname{senh}\bar{r}}{\operatorname{cosh}\bar{r}} - \frac{m\gamma}{2\operatorname{senh}\bar{r}\operatorname{cosh}\bar{r}} \right]^2 + p_t^2 \beta^2 \geq 0 \quad . \quad (2.13)$$

De (2.12), vemos que, para os movimentos fisicamente admissíveis, é necessário que o valor mínimo absoluto, V_{\min} , de $V(\bar{r})$, correspondente a $\bar{r} = \bar{r}_{\min}$, seja menor que ou igual a p_t^2 :

$$V_{\min} \leq p_t^2 \quad . \quad (2.14)$$

É imediato verificar que $V(\bar{r})$ é derivável em todo o

intervalo $(0, +\infty)$.

2.2.2 - Comportamento na Origem e no Infinito

Calcularemos agora os limites de $V(\bar{r})$ quando \bar{r} tende a zero e ao infinito:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} V(\bar{r}) = \begin{cases} +\infty & , \text{ para } \gamma \neq 0 & , & (2.15a) \\ \beta^2 p_t^2 & , \text{ para } \gamma = 0 & , & (2.15b) \end{cases}$$

e

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow +\infty} V(\bar{r}) = (\lambda^2 + \beta^2) p_t^2 . \quad (2.16)$$

2.2.3 - Os Pontos de Mínimo Absoluto $(r_{\text{mín}}, V_{\text{mín}})$

A derivada de $V(\bar{r})$ é:

$$\frac{dV(\bar{r})}{d\bar{r}} = 2p_t^2 \left[\frac{\lambda \sinh^2 \bar{r} - m\gamma/2}{\sinh \bar{r} \cosh \bar{r}} \right] \left[\frac{(\lambda + m\gamma) \sinh^2 \bar{r} + m\gamma/2}{\sinh^2 \bar{r} \cosh^2 \bar{r}} \right] , \quad (2.17)$$

e está definida no intervalo $(0, +\infty)$.

Teremos três casos:

(1) $\gamma \geq 0$:

Então, existe sempre um ponto de mínimo absoluto dado por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = m^2 \gamma / 4\Omega \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad . \quad (2.18)$$

$$(2) \quad -2\Omega/m^2 < \gamma < 0:$$

Então, existe sempre um ponto de mínimo absoluto dado por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = - \frac{\gamma/2}{\gamma + 2\Omega/m^2} \quad , \quad V_{\min} = -p_t^2 m^2 \gamma (\gamma + 4\Omega/m^2) + \beta^2 p_t^2 \quad . \quad (2.19)$$

$$(3) \quad \gamma \leq -2\Omega/m^2:$$

Então, existe sempre um "ponto de mínimo absoluto" coincidente com o limite (2.16):

$$\bar{r}_{\min} = +\infty \quad , \quad V_{\min} = (\lambda^2 + \beta^2) p_t^2 \quad . \quad (2.20)$$

Podemos agora traçar os esboços dos gráficos do potencial efetivo nos diversos casos (ver Fig. 2.1).

2.2.4 - A Condição de Movimento

Devemos, agora, impor a condição de movimento (2.14):

$$V_{\min} \leq p_t^2 \quad , \quad (2.21)$$

encontrando, então, os movimentos fisicamente compatíveis com uma dada métrica e uma dada energia p_t .

Teremos os seguintes casos:

(1) $\gamma \geq 0$:

De (2.18) e (2.21), vem:

$$V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \leq p_t^2, \quad (2.22)$$

e a condição (2.21) é automaticamente satisfeita para qualquer β^2 , devido a (2.9), independentemente do valor de λ^2 .

(2) $-2\Omega/m^2 < \gamma < 0$:

De (2.19) e (2.21), vem:

$$V_{\min} = -p_t^2 m^2 \gamma (\gamma + 4\Omega/m^2) + \beta^2 p_t^2 \leq p_t^2, \quad (2.23a)$$

ou

$$m^2 \gamma^2 + 4\Omega\gamma + (1 - \beta^2) \geq 0. \quad (2.23b)$$

A solução dessa inequação dependerá do sinal do discriminante do trinômio quadrático, coincidente com o sinal de:

$$\alpha := \lambda^2 + \beta^2 - 1. \quad (2.24)$$

Ficamos com dois sub-casos:

(2.a) $\alpha > 0$: o trinômio admite duas raízes reais e o conjunto solução de (2.23) é dado por:

$$\gamma \leq \gamma_1 := \frac{-2\Omega - m\sqrt{\alpha}}{m^2}, \quad (2.25a)$$

ou

$$\gamma \geq \gamma_2 := \frac{-2\Omega + m\sqrt{\alpha}}{m^2} . \quad (2.25b)$$

Temos que lembrar ainda de verificar que, no caso presente, vale $-2\Omega/m^2 < \gamma < 0$; levando isto em conta, ficamos com:

$$\frac{-2\Omega + m\sqrt{\alpha}}{m^2} =: \gamma_2 \leq \gamma < 0 . \quad (2.26)$$

(2.b) $\alpha \leq 0$: o trinômio é sempre não negativo, de modo que (2.23) é sempre satisfeita no intervalo para γ do caso presente:

$$-2\Omega/m^2 < \gamma < 0 . \quad (2.27)$$

O sub-caso (2.a) pode ocorrer para qualquer espaço-tempo do tipo de Gödel da família hiperbólica, isto é, para todo $\lambda^2 (>0)$. Já o sub-caso (2.b) só pode ocorrer para os espaços-tempos do tipo de Gödel ditos seccionalmente causais, isto é, só para $\lambda^2 \leq 1$.

(3) $\gamma \leq -2\Omega/m^2$:

De (2.20) e (2.21), vem:

$$V_{\min} = (\lambda^2 + \beta^2) p_t^2 < p_t^2 , \quad (2.28a)$$

ou

$$\alpha < 0 . \quad (2.28b)$$

Esse caso só pode ocorrer, então, para os espaços-tem -

pos do tipo de Gödel seccionalmente causais exceto aquele com $m^2 = 4\Omega^2$, isto é, só para $\lambda^2 < 1$.

2.2.5 - Os Pontos de Retorno

Os pontos de retorno são aqueles nos quais:

$$\dot{r}^2 = 0 \quad , \quad (2.29)$$

que, usando (2.12) e (2.13), fornece:

$$\alpha \sinh^4 \bar{r} - (1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma) \sinh^2 \bar{r} + m^2 \gamma^2 / 4 = 0 \quad . \quad (2.30)$$

Dos resultados anteriores e da Figura 2.1, esperamos que quando $\alpha > 0$, haja dois pontos de retorno (em geral), e quando $\alpha \leq 0$, haja um único ponto de retorno.

Teremos, então, os seguintes casos:

(1) $\alpha \neq 0$:

A solução formal de (2.30) fica:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{(1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma)^2 - m^2 \gamma^2 \alpha}}{2\alpha} \quad , \quad (2.31a)$$

ou, equivalentemente

$$\sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.31b)$$

onde:

$$\Delta := m^2 (\gamma + 2\Omega/m^2)^2 - \alpha \quad . \quad (2.32)$$

Ficamos com dois sub-casos:

(1.a) $\alpha > 0$: as expressões formais (2.31) fornecem então, de fato, duas raízes positivas, o que é fácil de verificar levando-se em conta que $\gamma \geq \gamma_2$ (ver sub-seção 2.2.4). Temos, pois, dois pontos de retorno:

$$\sinh^2 \bar{r}_\pm = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad . \quad (2.33)$$

(1.b) $\alpha < 0$: as expressões formais (2.31) fornecem então, de fato, uma única raiz positiva. Temos, pois, um único ponto de retorno:

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma - \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad . \quad (2.34)$$

(2) $\alpha = 0$:

A equação (2.30) fica:

$$(\lambda^2 + 2\Omega\gamma) \sinh^2 \bar{r} - m^2 \gamma^2 / 4 = 0 \quad , \quad (2.35)$$

cuja solução única é:

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{m^2 \gamma^2 / 4}{\lambda^2 + 2\Omega\gamma} \quad , \quad (2.36)$$

contanto que:

$$\gamma > -2\Omega/m^2 \quad . \quad (2.37)$$

2.2.6 - O Caso do Espaço-Tempo de Som-Raychaudhuri

No caso do espaço-tempo de Som-Raychaudhuri, (1.2b), o potencial efetivo fica, conforme advém de (2.10d), dado por:

$$V(r) := p_t^2 (\Omega r - \gamma/r)^2 + p_t^2 \beta^2 \geq 0 \quad . \quad (2.38)$$

Seus valores limites são:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) = \begin{cases} +\infty & , \text{ para } \gamma \neq 0 \quad , \quad (2.39a) \\ \beta^2 p_t^2 & , \text{ para } \gamma = 0 \quad , \quad (2.39b) \end{cases}$$

e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty \quad . \quad (2.40)$$

Este último limite não corresponde a uma assíntota, já que $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r)/r = +\infty$ (63).

A derivada de $V(r)$ é:

$$\frac{dV}{dr}(r) = 2p_t^2 (\Omega r - \gamma/r) (\Omega - \gamma/r^2) \quad . \quad (2.41)$$

É fácil determinarmos os pontos de mínimo absoluto:

(1) $\gamma \geq 0$:

$$r_{\min} = \sqrt{\gamma/\Omega} \quad , \quad v_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad , \quad (2.42)$$

(2) $\gamma < 0$:

$$r_{\min} = \sqrt{-\gamma/\Omega} \quad , \quad v_{\min} = (-4\Omega\gamma + \beta^2) p_t^2 \quad . \quad (2.43)$$

Para satisfazermos a condição de movimento (2.14), devemos ter, então:

$$\gamma \geq -(1-\beta^2)/4\Omega \quad . \quad (2.44)$$

Os dois pontos de retorno são dados por:

$$r_{\pm}^2 = \frac{1-\beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{4\Omega\gamma + 1-\beta^2}}{2\Omega^2} \quad . \quad (2.45)$$

É fácil verificar que, se γ satisfaz (2.44), então (2.45) fornece, de fato, duas raízes positivas.

2.3 - MOVIMENTO RADIAL

2.3.1 - Parâmetros Relevantes na Classificação do Movimento Geodésico

Da Seção 2.2 fica patente a relevância dos parâmetros λ^2 , de natureza geométrica, e β^2 e γ , de natureza cinemática (dinâmica), para a caracterização do movimento geodésico (radial, em

particular) nos diversos espaços-tempos do tipo de Gödel da família hiperbólica [$\lambda^2 \geq 0$ em (1.3)]. Na verdade, há um parâmetro mais fundamental que é $\alpha := \lambda^2 + \beta^2 - 1$, conforme se depreende da análise do comportamento do potencial efetivo na origem e no infinito, da condição de movimento e dos pontos de retorno; no entanto, esse parâmetro α apresenta a inconveniência de misturar uma grandeza geométrica com outra cinemática (dinâmica).

Veremos que o parâmetro geométrico λ^2 influencia os movimentos das partículas de teste determinando quais os modelos que podem apresentar (algumas) geodésicas com projeção no 2-plano (r, ϕ) aberta ou não, conforme $0 < \lambda^2 \leq 1$ ou $\lambda^2 > 1$, respectivamente. A seguir, numa classificação mais fina dos movimentos geodésicos num dado espaço-tempo, veremos que há três grandes classes de movimentos, segundo o sinal de α (isto é, o valor de β^2 com relação a λ^2): se $\alpha > 0$, o movimento será dito elíptico, se $\alpha = 0$, parabólico e, se $\alpha < 0$, hiperbólico. A razão para essa nomenclatura é a analogia com o movimento no problema clássico de Kepler, como esclareceremos mais adiante. Finalmente, o sinal de γ determinará uma estrutura hiperfina dos movimentos geodésicos, relacionada com a posição (configuração) dessas trajetórias com respeito à origem $r = 0$ do 2-plano (r, ϕ) (ver Tabela 2.1).

O caso do espaço-tempo de Som-Raychaudhuri será, como antes, investigado à parte.

É interessante considerar o significado dos valores limites de β^2 :

(1) $\beta^2 = 0$:

Neste caso, vemos, de (2.7b), que:

λ^2	$\alpha := \lambda^2 + \beta^2 - 1$	γ
> 1	> 0	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
$= 1$	> 0	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
	$= 0 (\Rightarrow \beta^2 = 0)$	$\gamma > 0$
< 1	> 0	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
	$= 0$	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
		$\gamma < 0$
< 1	$= 0$	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
	< 0	$\gamma > 0$
		$\gamma = 0$
		$\gamma < 0$

TABELA 2.1 - Classificação dos movimentos geodésicos.

$$p_z^2 = \epsilon = 0 ; \quad (2.46)$$

logo, estamos tratando de lúxons transversais, isto é, partículas de massa nula cujo movimento ocorre transversalmente ao eixo z ; podemos esperar, então, que essa seja a situação mais propícia para atingirmos as maiores distâncias a partir de $r = 0$, dados λ^2 e γ .

(2) $\beta^2 = 1$:

Neste caso, vemos, de (2.7b), que estamos tratando de partículas em que toda a energia resulta da translação ao longo do eixo z e da energia de repouso, de modo que podemos esperar que o movimento se realize com r e ϕ constantes.

2.3.2 - O Caso $\lambda^2 > 1$

(A) $1 - \lambda^2 < 0 \leq \beta^2 \leq 1$: Movimento Elíptico

(A.1) $\gamma > 0$.

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$:

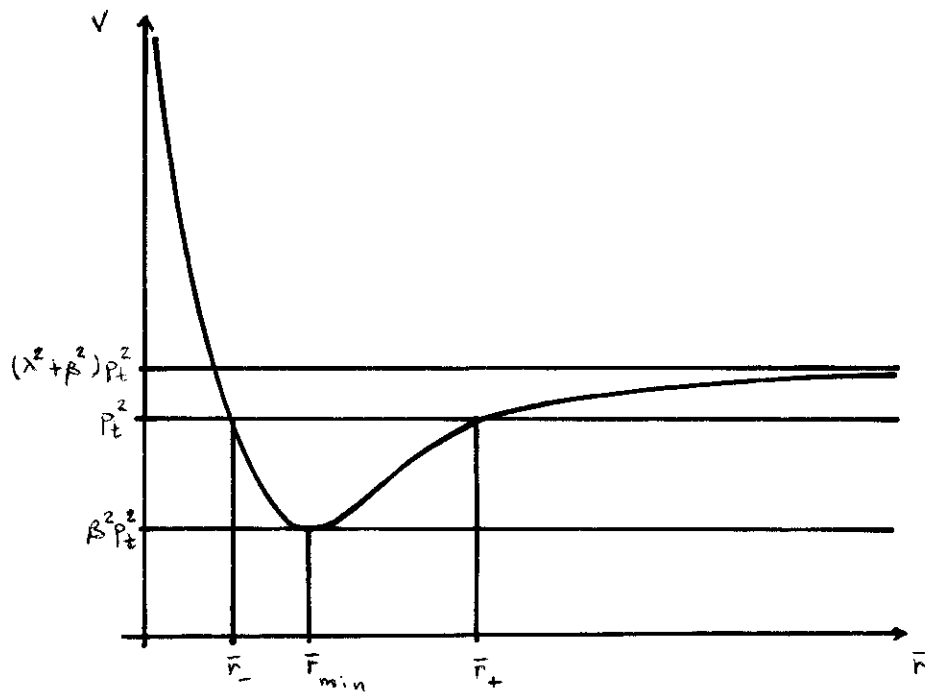


FIGURA 2.2 - Gráfico $V(\bar{r})$: $\lambda^2 > 1$; $\beta^2 > 1 - \lambda^2$; $\gamma > 0$.

Nesse caso, o movimento radial é limitado, restrito à camada cilíndrica $\bar{r}_- \leq \bar{r} \leq \bar{r}_+$, de eixo z. Essas geodésicas jamais cruzam o eixo z.

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.18) e (2.33), são dados por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = m^2 \gamma / 4\Omega \quad , \quad v_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad (2.47)$$

e

$$\sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.48)$$

Podemos verificar, de (2.48), que os pontos de retorno são crescentes com γ , dados m^2 , Ω^2 e β^2 , de forma que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)}{2\alpha} \quad (2.49a)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{\Omega [1 \pm \sqrt{(1 - \beta^2) / \lambda^2}]}{\alpha} \gamma ; \quad (2.49b)$$

ou seja, tomando γ suficientemente grande, podemos encontrar uma partícula de teste e uma distância radial tão grande quanto quisermos.

É fácil verificar, a partir de (2.48) e (2.32), que, para λ^2 e γ dados, a distância radial máxima é obtida, como era de se esperar, para $\beta^2 = 0$:

$$\sinh^2 \bar{r}_+ = \frac{1 + 2\Omega\gamma + \sqrt{m^2 (\gamma + 2\Omega/m^2)^2 - (\lambda^2 - 1)}}{2(\lambda^2 - 1)} \quad (2.50)$$

Vale notar também que, novamente como esperado, para λ^2

γ dados, o caso $\beta^2 = 1$ implica em r e ϕ constantes, como decorre de (2.48) e (2.6b):

$$\sinh^2 \bar{r} = \sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \sinh^2 \bar{r}_{\min} = m^2 \gamma / 4\Omega, \quad (2.51a)$$

$$\dot{\phi} = 0 \quad . \quad (2.51b)$$

No caso genérico de $\beta^2 \neq 1$, continua havendo um valor de \bar{r} , entre \bar{r}_- e \bar{r}_+ , no qual $\dot{\phi} = 0$, que é justamente $\bar{r} = \bar{r}_{\min}$.

$$(A.2) \quad \gamma = 0 \quad .$$

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$:

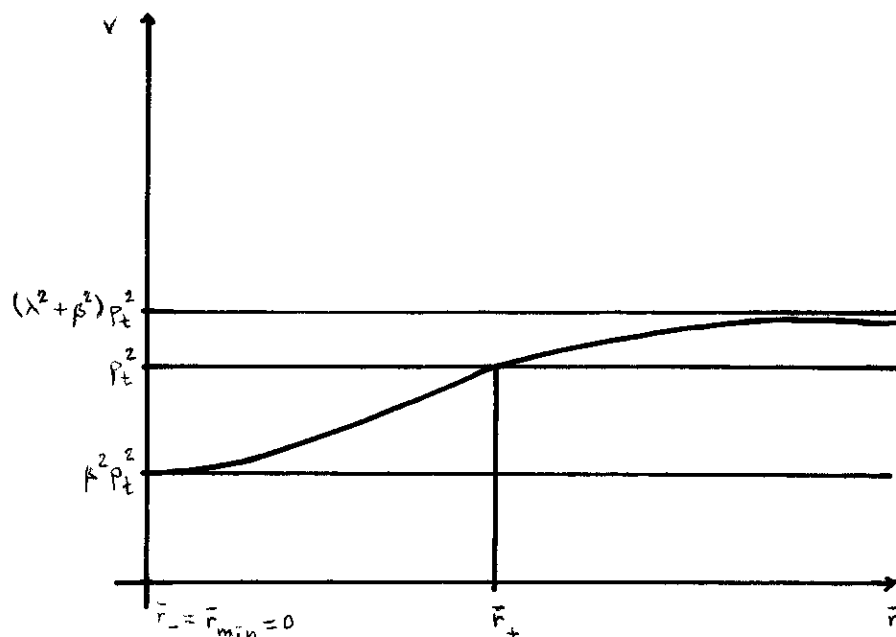


FIGURA 2.3 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $\lambda^2 > 1$, $\beta^2 > 1 - \lambda^2$, $\gamma = 0$.

O movimento radial novamente é limitado, executando-se, desta feita, dentro do cilindro $\bar{r} \leq \bar{r}_+$, de eixo z. Essas geodésicas sempre cruzam tal eixo.

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.18) e (2.33), são dados por:

$$\bar{r}_{\min} = 0 \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad (2.52)$$

e

$$\sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)}{2\alpha} \quad , \quad (2.53)$$

que coincide com o limite (2.49a).

Se $\beta^2 = 0$, então \bar{r}_+ é máximo:

$$\sinh^2 \bar{r}_+ = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad ; \quad (2.54)$$

e se $\beta^2 = 1$, temos:

$$\bar{r} = \bar{r}_{\pm} = \bar{r}_{\min} = 0 \quad . \quad (2.55)$$

Comparando (2.54) com (1.22), vemos que os lúxons com momento angular nulo atingem, no máximo, justamente o raio crítico; ou seja, na família hiperbólica de métricas do tipo de Gödel acausais na seção $t = \text{const.}$, todas as partículas livres com $\gamma = 0$ estão confinadas

$$\sinh^2 \bar{r}_c = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad . \quad (2.56)$$

$$(A.3) \quad (-2\Omega + m\sqrt{\alpha})/m^2 =: \gamma_2 \leq \gamma < 0 \quad .$$

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$:

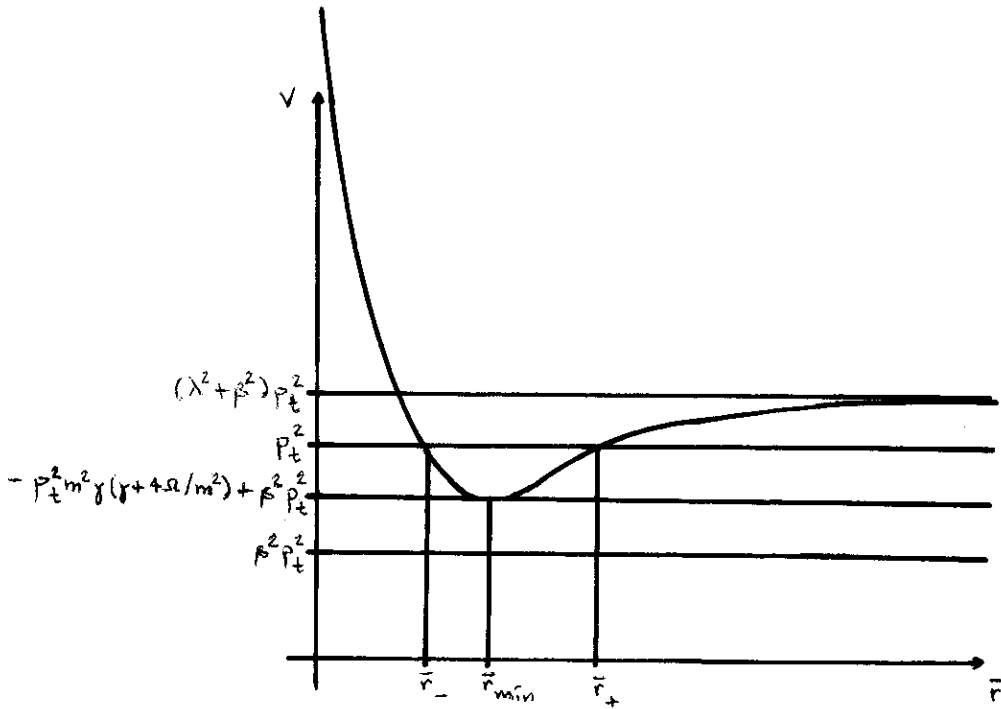


FIGURA 2.4 - Gráfico de $V(\bar{r})$; $\lambda^2 > 1$; $\beta^2 > 1 - \lambda^2$, $\gamma_2 \leq \gamma < 0$.

O movimento radial continua limitado a uma camada cilíndrica $\bar{r}_- \leq \bar{r} \leq \bar{r}_+$, de eixo z . Essas geodésicas nunca cruzam tal eixo.

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.19) e (2.33), são dados por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = \frac{-\gamma/2}{\gamma + 2\Omega/m^2} \quad , \quad V_{\min} = -p_t^2 m^2 \gamma (\gamma + 4\Omega/m^2) + \beta^2 p_t^2 \quad (2.57)$$

e

$$\sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 \pm 2\Omega\gamma \pm \sqrt{-1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.58)$$

Verificamos, de (2.58) e (2.32), que, conforme γ cresce desde γ_2 até 0, \bar{r}_- decresce, \bar{r}_+ cresce; a espessura da camada cilíndrica acessível às partículas de teste também cresce:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_2} \sinh^2 \bar{r} = \frac{\lambda - \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.59a)$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \frac{1 - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)}{2\alpha} \quad (2.59b)$$

Esse segundo limite coincide com (2.49a) e (2.53), como esperado. O primeiro limite indica que, quando $\gamma = \gamma_2$:

$$\sinh^2 \bar{r} = \sinh^2 \bar{r}_{\pm} = \sinh^2 \bar{r}_{\min} = \frac{\lambda - \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.60a)$$

$$\dot{\phi} = m p_t \sqrt{\alpha} \quad (2.60b)$$

Isso corresponde a uma projeção circular no 2-plano (r, ϕ) .

Verifica-se, novamente, que o valor máximo de \bar{r}_+ , dados λ^2 e γ , corresponde a $\beta^2 = 0$:

$$\sinh^2 \bar{r}_+ = \frac{1 + 2\Omega\gamma + \sqrt{m^2 (\gamma + 2\Omega/m^2)^2 - (\lambda^2 - 1)}}{2(\lambda^2 - 1)} \quad (2.61)$$

essa grandeza é sempre menor que \bar{r}_c dado por (2.56), isto é, as partículas livres com $\gamma < 0$ continuam confinadas dentro do cilindro crítico também.

Se $\beta^2 \rightarrow 1$, vemos da expressão (2.25b) para γ_2 , que:

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow 1} \gamma_2 = 0 \quad ; \quad (2.62)$$

ou seja, não há partícula de teste com movimento puramente longitudinal e momento angular azimutal negativo !

Vê-se também facilmente, de (2.6b), que nesse caso ($\gamma < 0$), sempre temos $\dot{\phi} > 0$,

2.3.3 - O Caso $0 < \lambda^2 \leq 1$.

(A) $0 \leq 1 - \lambda^2 < \beta^2 \leq 1$: Movimento Elíptico

Neste caso, repetem-se os resultados e conclusões apresentados na sub-seção precedente.

(B) $0 \leq \beta^2 = 1 - \lambda^2 < 1$: Movimento Parabólico

(B.1) $\gamma > 0$.

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.5).

O movimento radial é semi-limitado, com a partícula "atingindo" o infinito com velocidade radial $\dot{\bar{r}} = 0$. Essas geodésicas nunca cruzam o eixo z.

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.18) e (2.36), são dados por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = m^2 \gamma / 4\Omega \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 = (1 - \lambda^2) p_t^2 \quad (2.63)$$

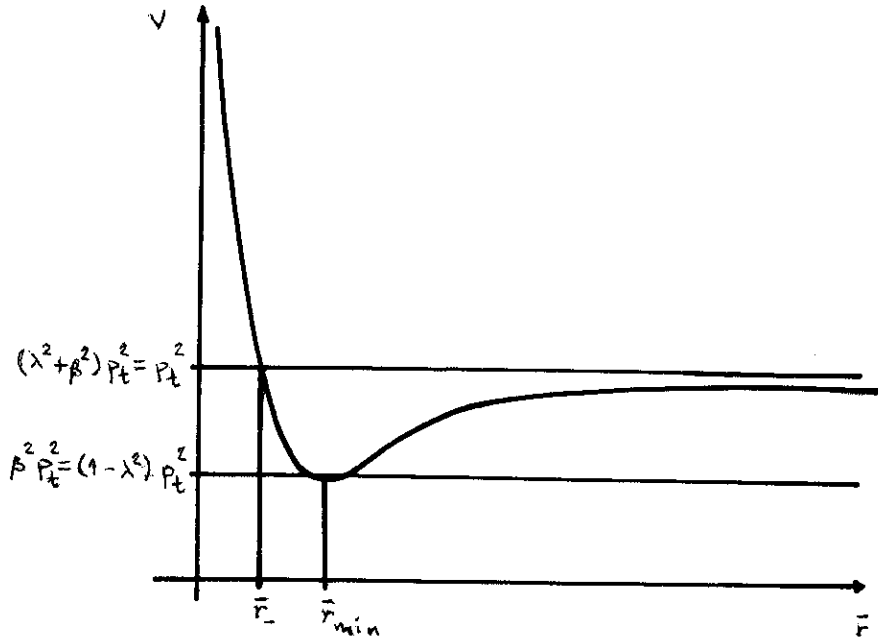


FIGURA 2.5 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1 - \lambda^2$, $\gamma > 0$.

e

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{m^2 \gamma^2 / 4}{\lambda^2 + 2\Omega\gamma} \quad (2.64)$$

É fácil ver que \bar{r}_- é crescente com γ .

Continuamos, obviamente, tendo um ponto onde $\dot{\phi} = 0$, que é o próprio \bar{r}_{\min} , como se vê de (2.6b).

(B.2) $\gamma = 0$.

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.6).

Esse é o caso limite em que a partícula de teste passa a ter acesso a todos os valores da coordenada radial, "atingindo" o infinito com velocidade radial $\dot{\bar{r}} = 0$.

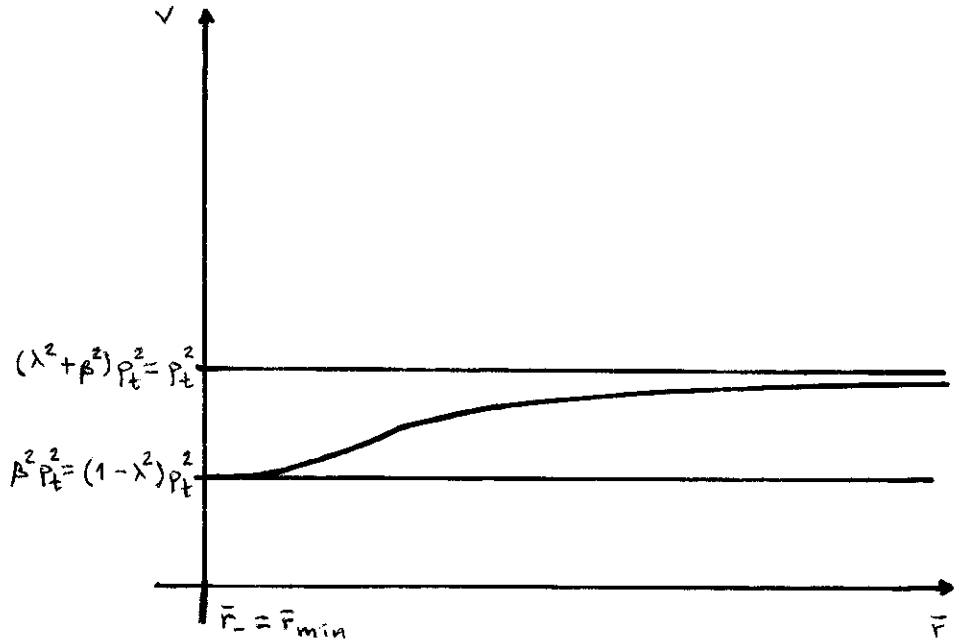


FIGURA 2.6 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1 - \lambda^2$, $\gamma = 0$.

Os pontos de mínimo e de retorno, conforme (2.18) e (2.36), são dados por:

$$\bar{r}_{\min} = 0 \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 = (1 - \lambda^2) p_t^2 \quad (2.65)$$

e

$$\bar{r}_- = 0 \quad . \quad (2.66)$$

$$(B.3) \quad -2\Omega/m^2 < \gamma < 0.$$

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.7).

O movimento radial é semi-limitado, com a partícula "atingindo" o infinito com velocidade radial $\dot{\bar{r}} = 0$. Essas geodési

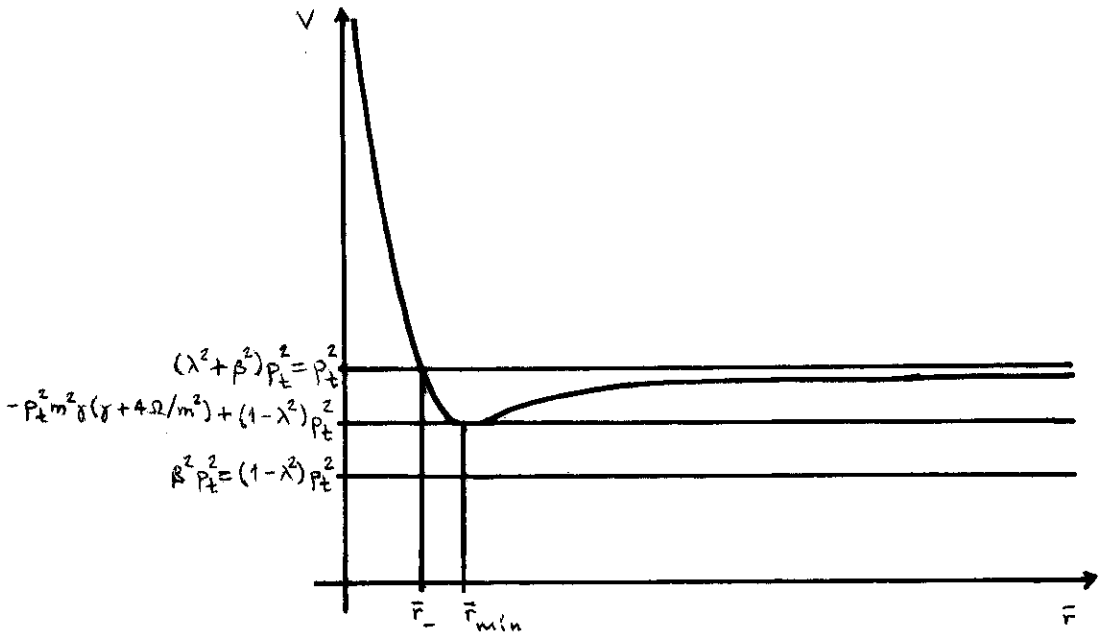


FIGURA 2.7 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 \leq 1$; $\beta^2 = 1 - \lambda^2$, $-2\Omega/m^2 < \gamma < 0$.

cas nunca cruzam o eixo z.

Os pontos de mínimo absoluto, conforme (2.19) e (2.36), são dados por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = \frac{-\gamma/2}{\gamma + 2\Omega/m^2}, \quad V_{\min} = -P_t^2 m^2 \gamma (\gamma + 4\Omega/m^2) + (1 - \lambda^2) P_t^2 \quad (2.67)$$

e

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{m^2 \gamma^2 / 4}{\lambda^2 + 2\Omega\gamma} \quad (2.68)$$

Vemos que \bar{r}_- é decrescente com γ e:

$$\lim_{\gamma \rightarrow -2\Omega/m^2} \sinh^2 \bar{r}_- = +\infty \quad (2.69)$$

Vê-se novamente, de (2.6b), que, nesse caso ($\gamma < 0$), sem

pre temos $\dot{\phi} > 0$.

(C) $0 \leq \beta^2 < 1 - \lambda^2 < 1$: Movimento Hiperbólico

Esse caso só pode ocorrer se $\lambda^2 < 1$ (cf. Tabela 2.1).

(C.1) $\gamma > 0$.

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.8):

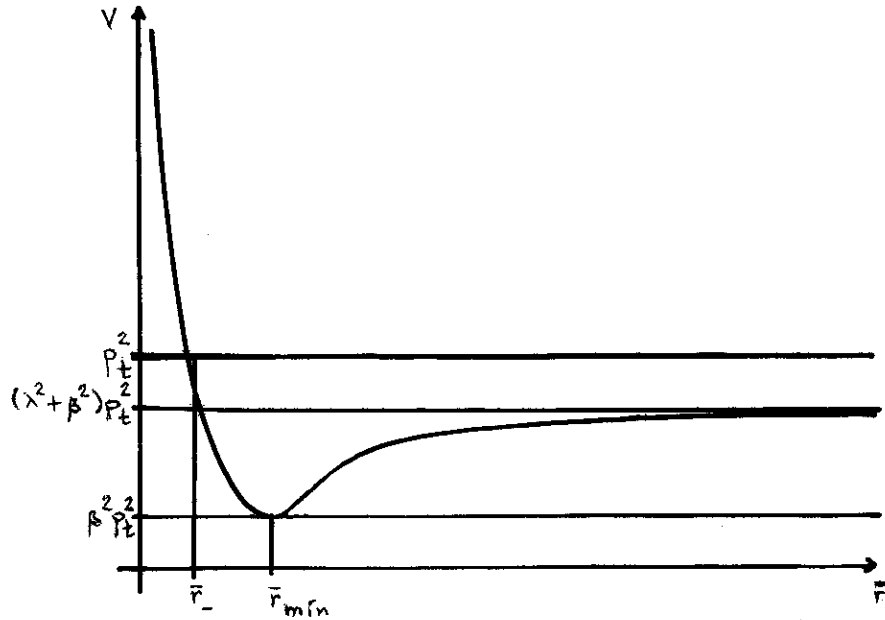


FIGURA 2.8 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1 - \lambda^2$, $\gamma > 0$.

O movimento radial é semi-limitado, com a partícula "atingindo" o infinito com velocidade radial $\dot{\bar{r}} = \sqrt{-\alpha} p_t$. Essas geodésicas nunca cruzam o eixo z .

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.18) e (2.34), são dados por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = m^2 \gamma / 4\Omega \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 P_t^2 \quad (2.70)$$

e

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma - \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.71)$$

É fácil ver que \bar{r}_- cresce com γ .

Continuamos tendo $\dot{\phi} = 0$ quando $\bar{r} = \bar{r}_{\min}$.

$$(C.2) \quad \gamma = 0.$$

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1, podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.9):

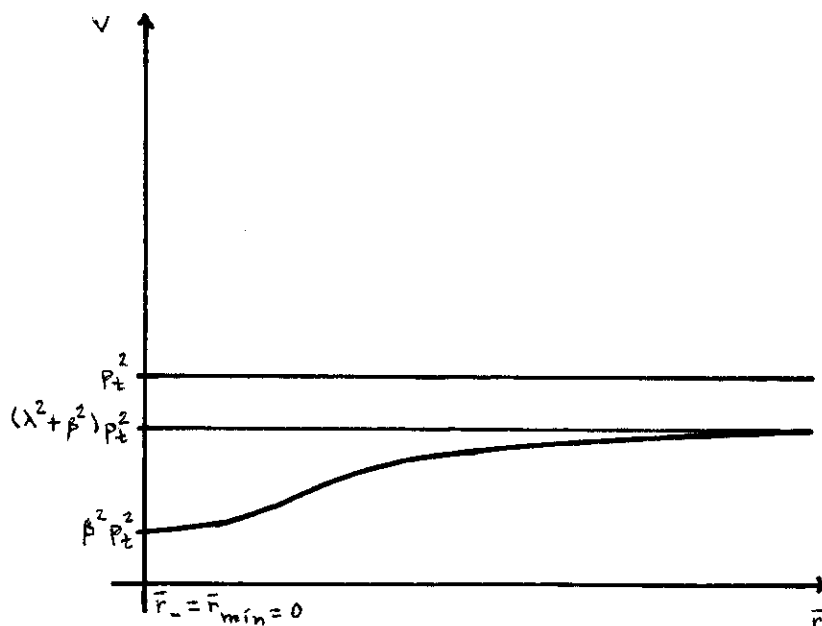


FIGURA 2.9 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1 - \lambda^2$, $\gamma = 0$.

As partículas de teste têm acesso a todos os valores da coordenada radial e "atingem" o infinito com velocidade radial $\dot{\bar{r}} = \sqrt{-\alpha} p_t$.

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.18) e (2.34), são dados por:

$$\bar{r}_{\min} = 0 \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad (2.72)$$

e

$$\bar{r}_- = 0 \quad . \quad (2.73)$$

(C.3) $\gamma < 0$.

Reportando-se aos dados da Seção 2.2 e à Figura 2.1 , podemos traçar o gráfico de $V(\bar{r})$ (Figura 2.10):

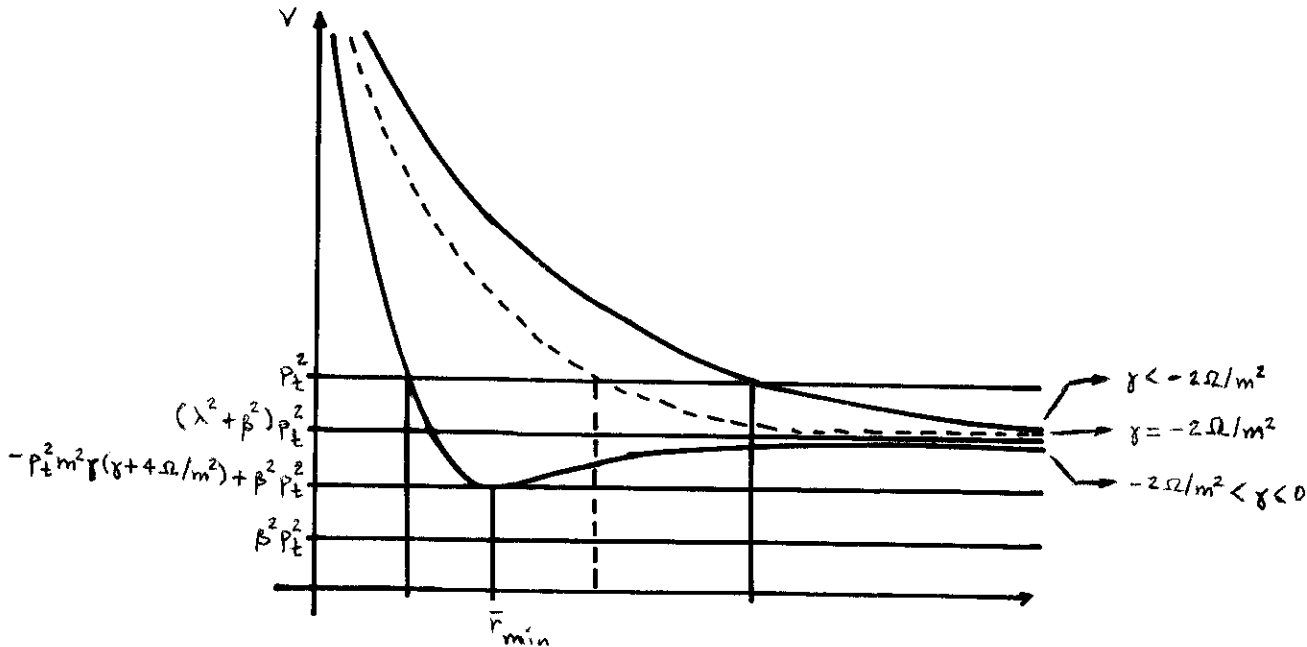


FIGURA 2.10 - Gráfico de $V(\bar{r})$: $0 < \lambda^2 < 1$; $\beta^2 < 1 - \lambda^2$, $\gamma < 0$.

O movimento radial contínuo semi-limitado, com partícula "atingindo" o infinito com velocidade radial $\bar{r} = \sqrt{-\alpha} p_t$. Essas geodésicas nunca cruzam o eixo z.

O ponto de retorno, conforme (2.34), é dado por:

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma - \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad . \quad (2.74)$$

Se $-2\Omega/m^2 < \gamma < 0$, o ponto de mínimo absoluto (de derivada nula, também), conforme (2.19), é dado por:

$$\sinh^2 \bar{r}_{\min} = \frac{-\gamma/2}{\gamma+2\Omega/m^2} \quad , \quad V_{\min} = -p_t^2 m^2 \gamma (\gamma+4\Omega/m^2) + \beta^2 p_t^2 \quad . \quad (2.75)$$

Se $\gamma \leq -2\Omega/m^2$, o "ponto de mínimo absoluto", conforme (2.20), é dado por:

$$\bar{r}_{\min} = +\infty \quad , \quad V_{\min} = (\lambda^2 + \beta^2) p_t^2 \quad . \quad (2.76)$$

Conforme γ decresce, desde 0 até $+\infty$, \bar{r}_- cresce, desde 0 até $+\infty$, assumindo, em $\gamma = -2\Omega/m^2$, o valor dado por:

$$\sinh^2 \bar{r}_- = \frac{-\sqrt{-\alpha} + \sqrt{1-\beta^2}}{2\sqrt{-\alpha}} \quad . \quad (2.77)$$

Vê-se, como sempre para $\gamma < 0$, que $\dot{\phi} > 0$.

2.3.4 - O Caso do Espaço-Tempo de Som-Raychaudhuri ($\lambda^2 = +\infty$)

(A) $1-\lambda^2 < 0 \leq \beta^2 \leq 1$: Movimento Elíptico

(A.1) $\gamma > 0$.

Reportando-se aos dados da Sub-Seção 2.2.6, podemos traçar o gráfico de $V(r)$ (Figura 2.11).

O movimento radial é limitado à camada cilíndrica $r_- \leq r \leq r_+$, de eixo z . Essas geodésicas nunca cruzam o eixo z .

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.42) e (2.45), são dados por:

$$r_{\min} = \sqrt{\gamma/\Omega} \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad (2.78)$$

e

$$r_{\pm}^2 = \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{4\Omega\gamma + 1 - \beta^2}}{2\Omega^2} . \quad (2.79)$$

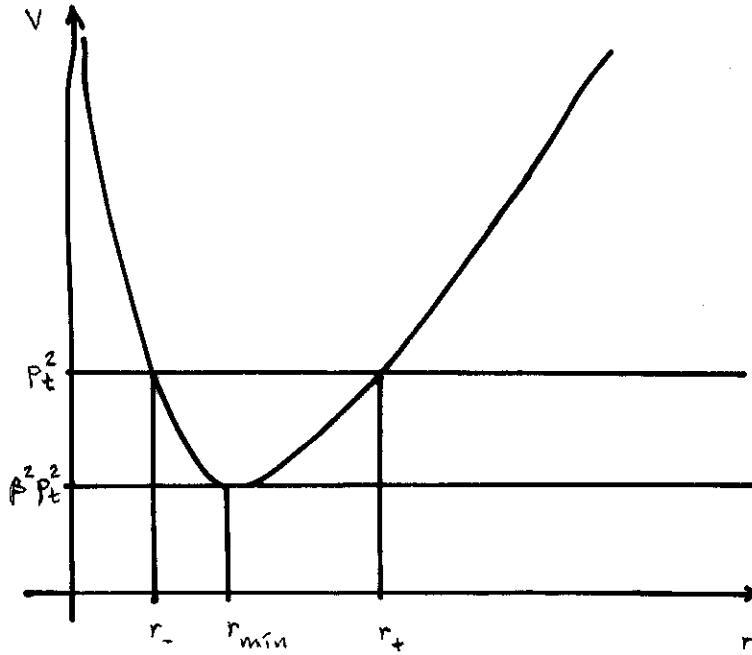


FIGURA 2.11 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1 - \lambda^2$, $\gamma > 0$.

Podemos verificar, de (2.79), que os pontos de retorno são crescentes com γ , dados λ^2 e β^2 , de forma que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} r_{\pm}^2 = \frac{1 - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)}{2\Omega^2} \quad (2.80a)$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} r_{\pm}^2 = \frac{\gamma}{\Omega} (1 \pm \sqrt{(1 - \beta^2)/\Omega\gamma}) . \quad (2.80b)$$

Se $\beta^2 = 1$, temos, de (2.79) e (2.10b):

$$r = r_{\pm} = r_{\min} = \sqrt{\gamma/\Omega} , \quad (2.81a)$$

$$\dot{\phi} = 0 . \quad (2.81b)$$

Se $\beta^2 \neq 1$, continua havendo um ponto onde $\dot{\phi} = 0$, que

corresponde, segundo (2.10b), a r_{\min}

$$(A.2) \quad \gamma = 0 .$$

Reportando-se aos dados da Sub-Seção 2.2.6, podemos traçar o gráfico de $V(r)$ (Figura 2.12).

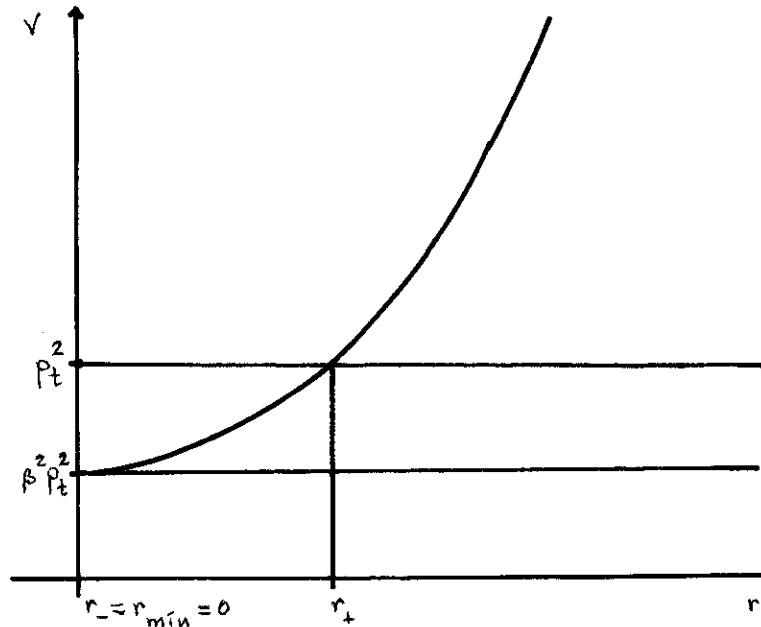


FIGURA 2.12 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1 - \lambda^2$, $\gamma = 0$.

O movimento radial é limitado ao cilindro $r \leq r_+$. As partículas de teste sempre cruzam o eixo z .

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.42) e (2.45), são dados por:

$$r_{\min} = 0 \quad , \quad V_{\min} = \beta^2 p_t^2 \quad (2.82)$$

e

$$r_{\pm}^2 = \frac{1 - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)}{2\Omega^2} . \quad (2.83)$$

Se $\beta^2 = 0$ [cf. (1.24)]:

$$r_+ = r_c = 1/\Omega \quad . \quad (2.84)$$

$$(A.3) \quad -(1-\beta^2)/4\Omega \leq \gamma < 0.$$

Reportando-se aos dados da Sub-Seção 2.2.6, podemos traçar o gráfico de $V(r)$ (Figura 2.13).

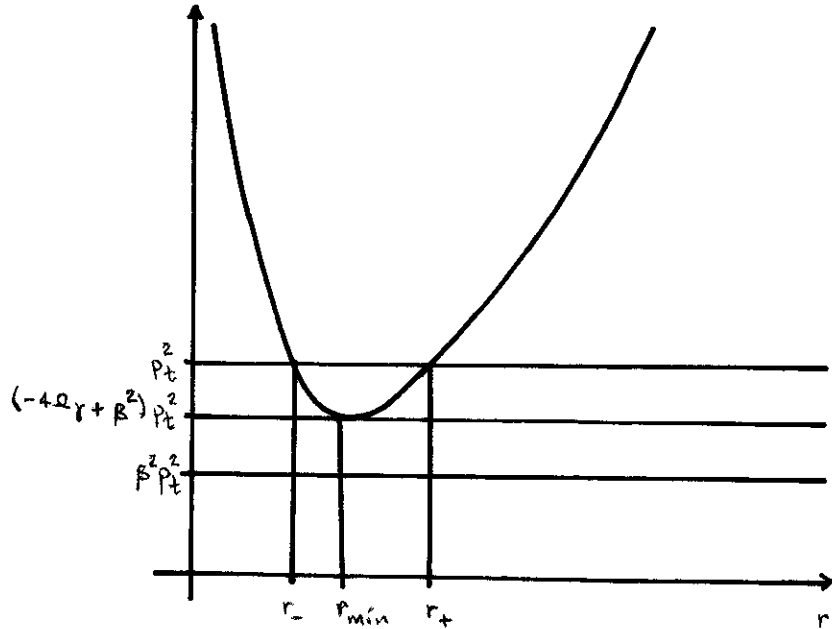


FIGURA 2.13 - Gráfico de $V(r)$: $\lambda^2 = +\infty$; $\beta^2 > 1-\lambda^2$, $-(1-\beta^2)/4\Omega \leq \gamma < 0$.

O movimento radial é limitado à camada cilíndrica $r_- \leq r \leq r_+$. Essas geodésicas nunca cruzam o eixo z .

Os pontos de mínimo absoluto e de retorno, conforme (2.43) e (2.45), são dados por:

$$r_{\min} = \sqrt{-\gamma/\Omega} \quad , \quad V_{\min} = (-4\Omega\gamma + \beta^2) P_t^2 \quad (2.85)$$

$$e \quad r_{\pm}^2 = \frac{1-\beta^2 + 2\Omega\gamma \pm \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{4\Omega\gamma + 1-\beta^2}}{2\Omega^2} \quad (2.86)$$

Verificamos de (2.86), que, conforme γ cresce desde $-(1-\beta^2)/4\Omega$ até 0, r_- decresce e r_+ cresce:

$$\lim_{r \rightarrow -(1-\beta^2)/4\Omega} r_{\pm}^2 = \frac{1-\beta^2}{2\Omega^2} \quad (2.87a)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} r_{\pm}^2 = \frac{1-\beta^2 \pm (1-\beta^2)}{2\Omega^2} \quad (2.87b)$$

Esse segundo limite coincide com (2.83) e (2.80a), como esperado. O primeiro limite indica que, quando $\gamma = -(1-\beta^2)/4\Omega$:

$$r = r_{\pm} = r_{\min} = \sqrt{1-\beta^2}/2\Omega, \quad (2.88a)$$

$$\dot{\phi} = 2\Omega p_t \quad (2.88b)$$

Isso corresponde a uma projeção circular no 2-plano (r, ϕ) .

O valor máximo de r_+ é atingido quando $\beta^2 = 0$:

$$r_+ = \frac{1+2\Omega\gamma + \sqrt{1-4\Omega\gamma}}{2\Omega^2}; \quad (2.89)$$

essa grandeza é sempre menor que (2.87), ou seja, as partículas livres com $\gamma \leq 0$ são confinadas ao cilindro $r \leq r_c$.

Pode-se ver também, de (2.10b), que, nesse caso ($\gamma < 0$), temos sempre $\dot{\phi} > 0$.

2.4 - RESUMO DE PROPRIEDADES

Estamos estudando as geodésicas fisicamente admissíveis ($\epsilon = 0, +1$) da família hiperbólica de espaços-tempos do tipo de Gödel ($l^2 \geq 0$).

Vimos que, para qualquer espaço-tempo desse tipo, o problema do movimento geodésico radial se reduz a um problema puramente uni-dimensional, possibilitando a introdução de uma função energia potencial efetiva, dada por (2.13).

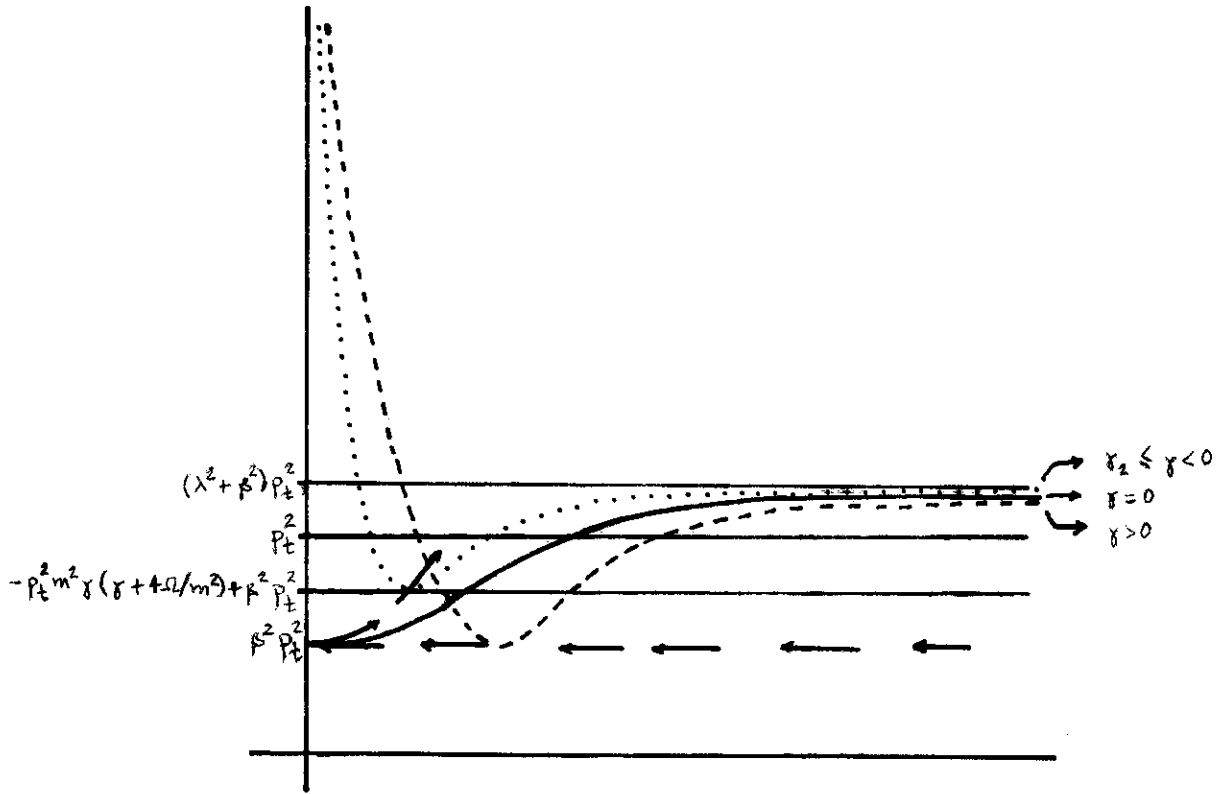
Particularmente, se $\lambda^2 > 1$ ou, equivalentemente, $0 \leq m^2 < 4\Omega^2$ (métricas acausais na seção $t = \text{const.}$), todos os movimentos geodésicos radiais são limitados ($0 \leq \bar{r}_- \leq \bar{r} \leq \bar{r}_+ < +\infty$), justamente porque, nesse caso, temos sempre $\beta^2 > 1 - \lambda^2$ ou, equivalentemente, $\alpha > 0$ (cf. Tabela 2.1 e Sub-Seção 2.3.2). A condição de movimento (2.21) restringe os valores admissíveis de γ àqueles para os quais $\gamma \geq \gamma_2 = (-2\Omega + m\sqrt{\alpha})/m^2$ (cf. Sub-Seção 2.2.4).

Se $0 < \lambda^2 \leq 1$ ou, equivalentemente, $m^2 \geq 4\Omega^2$ (métricas causais na seção $t = \text{const.}$), há duas classes de movimentos geodésicos radiais (cf. Tabela 2.1 e Sub-Seção 2.3.3): (a) trajetórias limitadas, quando $\beta^2 > 1 - \lambda^2$, e (b) trajetórias semi-limitadas, quando $\beta^2 \leq 1 - \lambda^2$. A condição de movimento impõe que, se: (a) $\beta^2 \leq 1 - \lambda^2$ ou, equivalentemente, $\alpha > 0$, então $\gamma \geq \gamma_2$, (b) $\beta^2 = 1 - \lambda^2$ ou, equivalentemente, $\alpha = 0$, então $\gamma > -2\Omega/m^2$, e (c) $\beta^2 < 1 - \lambda^2$ ou, equivalentemente, $\alpha < 0$, então γ pode ser qualquer (cf. Sub-Seção 2.2.4).

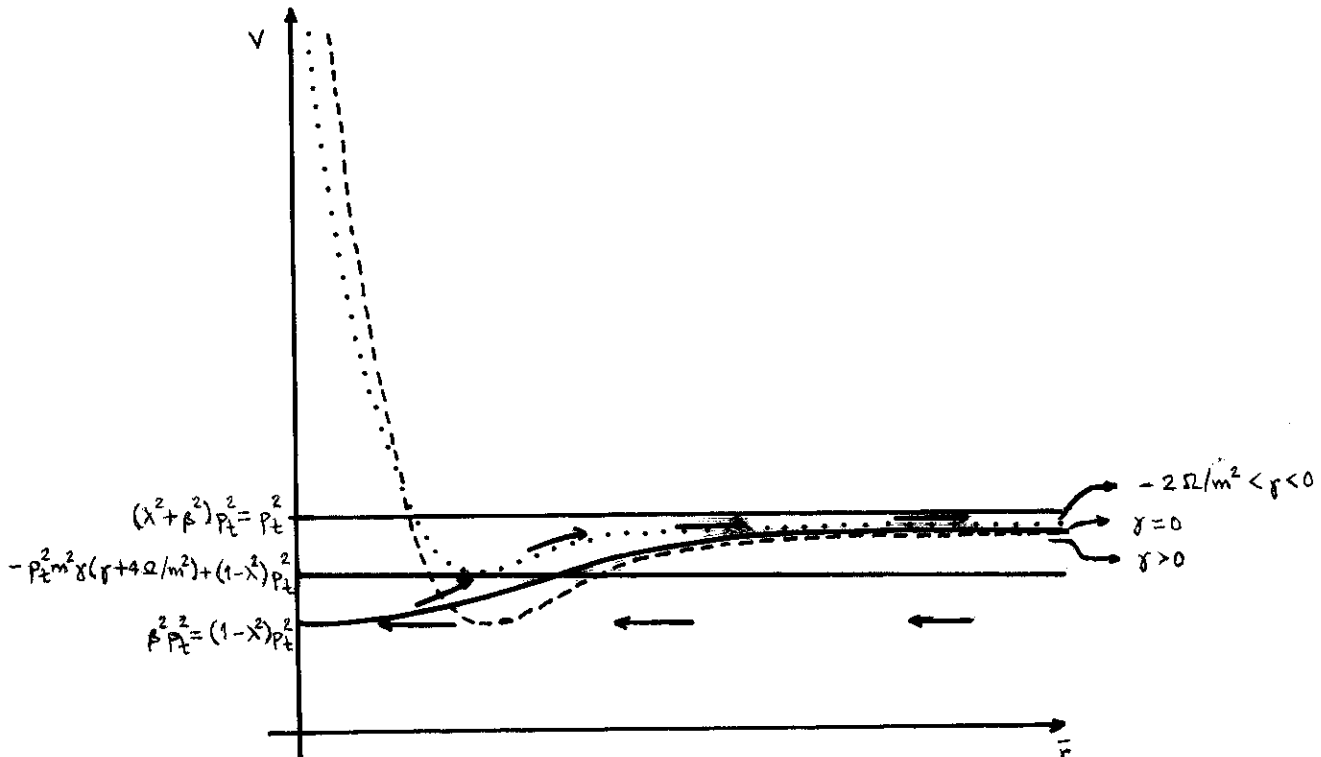
Em outras palavras, os espaços-tempos do tipo de Gödel com $\lambda^2 > 1$, apresentam movimento radial somente do tipo elíptico: o espaço-tempo do tipo de Gödel com $\lambda^2 = 1$ apresenta movimentos radiais do tipo elíptico e parabólico (esse último somente para lúxons transversais), e, finalmente, os espaços-tempos do tipo de Gödel com $0 < \lambda^2 < 1$ apresentam movimentos radiais do tipo elíptico, parabólico e hiperbólico.

A Figura 2.14 mostra a variação do gráfico do potencial efetivo com γ para as três classes de movimento: elíptico, parabó

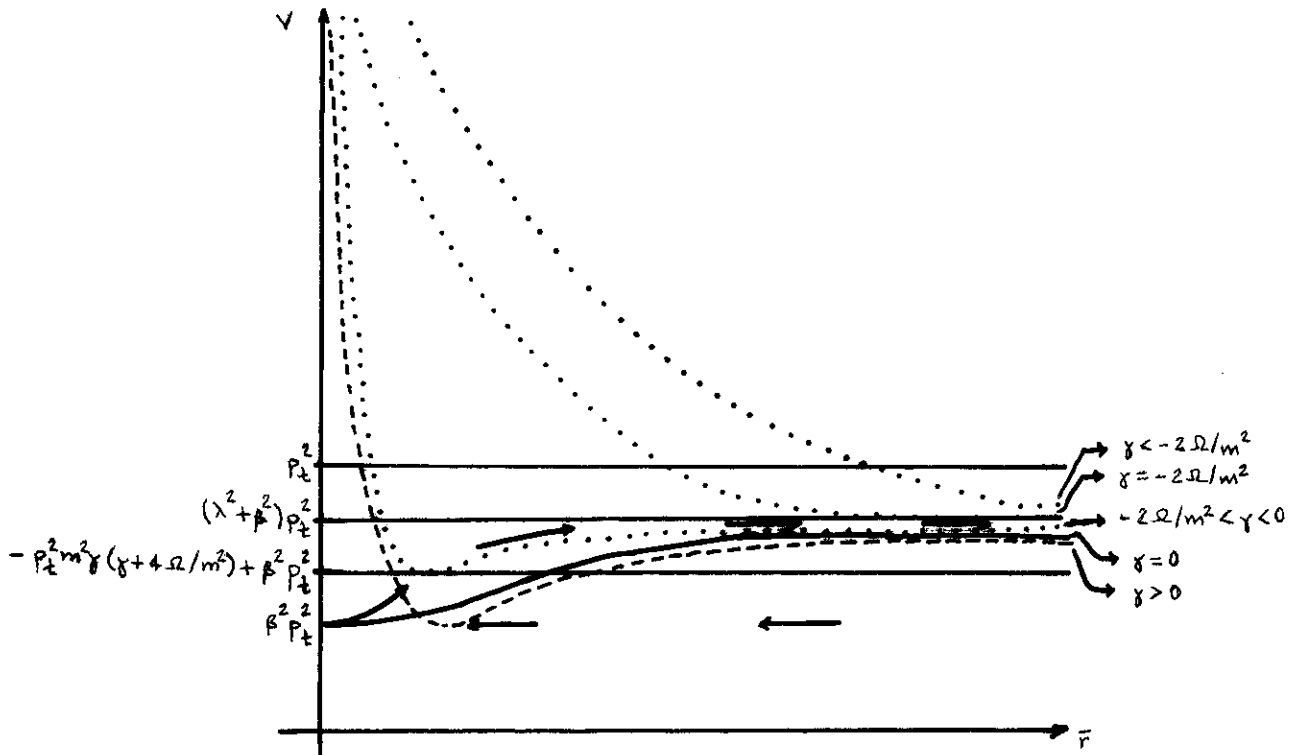
lico e hiperbólico.



(a) $\alpha > 0$



(b) $\alpha = 0$



(c) $\alpha < 0$

FIGURA 2.14 - (a), (b), (c).

Gráficos de $V(\bar{r})$ em função de γ .

Nesses gráficos as setas indicam o sentido de movimento do ponto mínimo do gráfico de $V(\bar{r})$, para m^2 , Ω^2 e β^2 dados, conforme γ varia desde $+\infty$ até o valor limite inferior.

CAPÍTULO 3

GEODÉSICAS NOS ESPAÇOS-TEMPOS DO TIPO DE GÖDEL: II. INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Neste capítulo executaremos a integração analítica (exata) do sistema de equações de movimento (2.6), que descreve o movimento geodésico:

$$\dot{t} = p_t \left(1 - \lambda^2 \frac{\sinh^2 \bar{r}}{\cosh^2 \bar{r}} + \frac{\Omega \gamma}{\cosh^2 \bar{r}} \right) , \quad (3.1a)$$

$$\dot{\phi} = p_t \left(\frac{\Omega}{\cosh^2 \bar{r}} - \frac{m^2 \gamma}{4 \sinh^2 \bar{r} \cosh^2 \bar{r}} \right) , \quad (3.1b)$$

$$\dot{z} = -p_z , \quad (3.1c)$$

$$\dot{r}^2 = p_t^2 \left[1 - \beta^2 - \left(\lambda \frac{\sinh \bar{r}}{\cosh \bar{r}} - \frac{m \gamma}{2 \sinh \bar{r} \cosh \bar{r}} \right)^2 \right] . \quad (3.1d)$$

3.1 - MOVIMENTO AXIAL

A equação (3.1c) é integrada imediatamente:

$$\boxed{z = -p_z s + z_0} , \quad (3.2)$$

escolhendo-se $z(s=0) = z_0$.

A equação (3.2) nos diz, obviamente, que o movimento axial (longitudinal) de qualquer partícula livre é sempre uniforme, relativamente ao parâmetro afim da geodésica correspondente.

3.2 - MOVIMENTO RADIAL

Para integrarmos a equação (3.1d) do movimento radial é útil introduzir a nova variável:

$$\rho := \sinh^2 \bar{r} \quad . \quad (3.3)$$

A equação para o movimento radial fica, então:

$$\dot{\rho}^2 = m^2 p_t^2 [-\alpha \rho^2 + (1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2 \gamma^2 / 4] \quad . \quad (3.4)$$

Teremos as seguintes situações:

(1) se $\alpha = 0$, a equação (3.4) fica:

$$\dot{\rho}^2 = m^2 p_t^2 [(\lambda^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2 \gamma^2 / 4] \quad . \quad (3.5)$$

Esta equação é facilmente integrada:

$$\rho = \frac{m^2 \gamma^2}{4(\lambda^2 + 2\Omega\gamma)} + \frac{m^2 p_t^2 (\lambda^2 + 2\Omega\gamma)}{4} (s-s_0)^2 \quad . \quad (3.6)$$

Daí vemos que o movimento é semi-limitado, com o único ponto de retorno coincidindo com (2.36).

(2) Se $\alpha \neq 0$, podemos reescrever (3.4) como:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{1}{2} \alpha m^2 p_t^2 \rho^{-2} = \frac{m^2 p_t^2 (1-\beta^2)}{8\alpha} \quad , \quad (3.7)$$

onde Δ , relembramos, é definido por (2.32) e:

$$\bar{\rho} := \rho - \frac{1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma}{2\alpha} \quad . \quad (3.8)$$

A equação (3.7) é análoga à equação de energia para o movimento harmônico simples clássico.

Devemos distinguir dois casos:

(2.a) $\alpha > 0$:

A solução de (3.7), para ρ , é:

$$\rho = \frac{1-\beta^2+2\Omega\gamma}{2\alpha} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cos mp_t \sqrt{\alpha} (s-s_0) \quad . \quad (3.9)$$

Exigindo-se que ρ seja não negativo, recuperamos (2.26). Também, vemos que o movimento é limitado, com pontos de retorno coincidindo com (2.33).

(2.b) $\alpha < 0$:

A solução de (3.7), para ρ , é:

$$\rho = \frac{1-\beta^2+2\Omega\gamma}{2\alpha} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\alpha} \sqrt{\Delta} \cosh mp_t \sqrt{-\alpha} (s-s_0) \quad (3.10)$$

Daí vemos que o movimento é semi-limitado, com o único ponto de retorno coincidindo com (2.34).

Em todos os três casos, observemos que s_0 é o valor do parâmetro afim da geodésica correspondente ao primeiro ponto de retorno: $\rho = \rho_- = \sinh^2 r_-$.

Notemos também que a expressão (3.9) é suficiente para cobrir todos os casos, contanto que, para obter (3.6), retenhamos termos até segunda ordem em $s-s_0$ ao tomarmos o limite quando α tende a zero, e, para obter (3.10), permitamos que α assumam valores negativos.

3.3 - MOVIMENTO AZIMUTAL

A equação (3.1b) pode ser reescrita, utilizando-se (3.3), como:

$$\dot{\phi} = -p_t \left(\frac{m^2 \gamma / 4}{\rho} - \frac{m^2 \gamma / 4 + \Omega}{\rho + 1} \right) \quad (3.11)$$

Determinaremos agora ϕ como função de ρ , ou seja, encontraremos a equação da projeção das órbitas geodésicas no 2-pla

no (ρ, ϕ) . Para tanto, precisamos da expressão de $\dot{\rho}$ como função de ρ ; das duas raízes fornecidas por (3.4), escolheremos a negativa:

$$\dot{\rho} = -m\rho_t \sqrt{-\alpha\rho^2 + (1-\beta^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4} \quad , \quad (3.12)$$

correspondente à fase de aproximação do eixo z .

Dividindo (3.11) por (3.12), membro a membro, obtemos:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = I_1 + I_2 \quad , \quad (3.13)$$

com:

$$I_1 := \frac{m\gamma/4}{\rho\sqrt{-\alpha\rho^2 + (1-\beta^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4}} \quad , \quad (3.14a)$$

e

$$I_2 := - \frac{m\gamma/4 + \Omega/m}{(\rho+1)\sqrt{-\alpha\rho^2 + (1-\beta^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4}} \quad . \quad (3.14b)$$

A integral dessa equação, (3.13), sempre pode ser colocada na forma (ver Apêndice B):

$$\boxed{\cos(\phi - \phi_0) = \frac{|m(\gamma + 2\Omega/m^2)\rho + m\gamma/2|}{\sqrt{\Delta} \sqrt{\rho(\rho+1)}}} \quad . \quad (3.15)$$

Notemos que essa expressão não se aplica para as geodésicas com ρ constante.

3.4 - MOVIMENTO TEMPORAL

Podemos reescrever (3.1a), usando (3.3), como:

$$\dot{t} = p_t \frac{[(1-\lambda^2)\rho + \Omega\gamma + 1]}{\rho + 1} \quad (3.16)$$

Integraremos t como função de s , utilizando os resultados da Seção 3.2; dessa forma, devemos distinguir três casos, conforme o sinal de α :

(1) se $\alpha = 0$, (3.16) fica, usando (3.6):

$$t = p_t \left[1 - \lambda^2 + \frac{2\lambda^2 (\gamma + 2\Omega/m^2) (\gamma + 4\Omega/m^2)}{4\Omega^2 p_t^2 (\gamma + 2\Omega/m^2)^2 (s-s_0)^2 + (\gamma + 4\Omega/m^2)^2} \right], \quad (3.17)$$

que fornece:

$$\boxed{\begin{aligned} \tan \left\{ (m^2/4\Omega) [t-t_0 + p_t (\lambda^2 - 1) (s-s_0)] \right\} &= \\ &= \frac{2\Omega p_t (\gamma + 2\Omega/m^2)}{\gamma + 4\Omega/m^2} (s-s_0) \end{aligned}} \quad (3.18)$$

(2) Se $\alpha > 0$, (3.16) fica, usando (3.9):

$$\dot{t} = p_t \frac{[(1-\lambda^2)(1-\beta^2 + 2\Omega\gamma) + 2\alpha(\Omega\gamma + 1) - (1-\lambda^2)\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\Delta} \cos m p_t \sqrt{\alpha}(s-s_0)]}{1-\beta^2 + 2\Omega\gamma + 2\alpha - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\Delta} \cos m p_t \sqrt{\alpha}(s-s_0)}, \quad (3.19)$$

que fornece:

$$\begin{aligned} \tan \left\{ (m^2/4\Omega) [t-t_0 + p_t (\lambda^2 - 1) (s-s_0)] \right\} = \\ = \frac{m\sqrt{\alpha} (\gamma + 4\Omega/m^2)}{\alpha + \lambda^2 + 2\Omega\gamma - \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\Delta}} \tan [mp_t \sqrt{\alpha} (s-s_0)/2] \end{aligned} \quad (3.20)$$

(3) Se $\alpha < 0$, (3.16) fica, usando (3.10):

$$\dot{t} = p_t \frac{[(1-\lambda^2)(1-\beta^2 + 2\Omega\gamma) + 2\alpha(\Omega\gamma + 1) - (1-\lambda^2)\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\alpha} \cosh mp_t \sqrt{-\alpha} (s-s_0)]}{1-\beta^2 - 2\Omega\gamma + 2\alpha - \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\Delta} \cosh mp_t \sqrt{-\alpha} (s-s_0)} \quad (3.21)$$

que fornece:

$$\begin{aligned} \tan \left\{ (m^2/4\Omega) [t-t_0 + p_t (\lambda^2 - 1) (s-s_0)] \right\} = \\ = \frac{m\sqrt{-\alpha} (\gamma + 4\Omega/m^2)}{\alpha + \lambda^2 + 2\Omega\gamma - \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\Delta}} \tanh [mp_t \sqrt{-\alpha} (s-s_0)/2] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Notemos que a expressão (3.20) é suficiente para cobrir todos os casos, contanto que, para obter (3.18), retenhamos somente o termo de primeira ordem em $s-s_0$ ao tomarmos o limite do membro direito quando α tende a zero, e, para obter (3.22), permitamos que α assuma valores negativos.

3.5 - PROJEÇÃO DAS GEODÉSICAS NO 2-PLANO (ρ, ϕ)

Estamos agora capacitados a esclarecer uma terminologia introduzida mais acima. Das equações (3.9) e (3.15), podemos verificar que, no caso $\alpha > 0$, as projeções das geodésicas no 2-plano (ρ, ϕ) são curvas simples fechadas, justificando-se assim o fato de classificarmos tais movimentos como elípticos.

Analogamente, as equações (3.6), (3.10) e (3.15), permitem-nos concluir que, nos casos $\alpha \leq 0$, as projeções das geodésicas no 2-plano (ρ, ϕ) são curvas simples abertas, percorridas por partículas livres exatamente com a "velocidade de escape" ($\lim_{r \rightarrow +\infty} \dot{r} = 0$) ou com uma velocidade maior ($\lim_{r \rightarrow +\infty} \bar{r} \neq 0$), conforme $\alpha = 0$ ou $\alpha < 0$, respectivamente; isso justifica a classificação desses movimentos como parabólicos ou hiperbólicos, respectivamente.

Da expressão (3.15), segue que (*):

(1) Se $\alpha > 0$:

$$\bullet \quad \gamma > 0 : \quad \phi = \phi_0 \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_{\pm} \quad ; \quad (3.24a)$$

$$\bullet \quad \gamma = 0 : \quad \phi = \phi_0 \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_+ \quad ; \quad (3.24b)$$

$$\bullet \quad \gamma < 0 : \quad \phi = \phi_0 \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_+ \quad , \quad (3.24c)$$

$$\phi = \phi_0 + \pi \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_- \quad . \quad (3.24d)$$

(2) Se $\alpha \leq 0$:

$$\bullet \quad \gamma > 0 : \quad \phi = \phi_0 \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_- \quad ; \quad (3.25a)$$

$$\bullet \quad \gamma < 0 : \quad \phi = \phi_0 + \pi \quad , \quad \text{se} \quad \rho = \rho_- \quad . \quad (3.25b)$$

(*) É conveniente utilizar a identidade:

$$[m(\gamma + 2\Omega/m^2)\rho + m\gamma/2]^2 = \frac{\Delta}{4} \left[4\rho(\rho+1) - \frac{1-\beta^2}{\alpha} + \frac{1-\beta^2}{\alpha} \left(\frac{\rho-P}{Q}\right)^2 \right] , \quad \text{onde:}$$

$$P := (1-\beta^2 + 2\Omega\gamma)/2\alpha \quad ; \quad Q := \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\Delta}/2\alpha \quad .$$

No caso $\alpha > 0$, em que temos projeções fechadas, o período τ do movimento na projeção sobre o 2-plano (ρ, ϕ) , recorrendo-se a (3.9), vem dado por:

$$\tau = \frac{2\pi}{m p_t \sqrt{\alpha}} \quad . \quad (3.26)$$

A expressão (3.1b), ou (3.11), define o valor

$$\rho_\phi := m^2 \gamma / 4\Omega \quad , \quad (3.27)$$

na qual $\dot{\phi} = 0$.

Como vemos, comparando (3.27) com (2.18), quando $\gamma > 0$, sempre temos um ponto da órbita onde $\dot{\phi}$ muda de sinal.

Podemos estudar também o comportamento da expressão (3.15) quando $\rho \rightarrow +\infty$, nos casos $\alpha \leq 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \cos(\phi - \phi_0) = \frac{|m(\gamma + 2\Omega/m^2)|}{\sqrt{m^2(\gamma + 2\Omega/m^2)^2 - \alpha}} \quad , \quad (2.28)$$

de modo que no caso $\alpha = 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \phi = \phi_0 \quad . \quad (2.29)$$

Podemos, agora, apresentar os gráficos das diversas projeções das geodésicas (Figura 3.1). Essas projeções sempre apresentam um eixo de simetria $\phi = \phi_0$, que pode, obviamente, ser tomado em qualquer direção, devido à simetria rotacional em torno do eixo z.

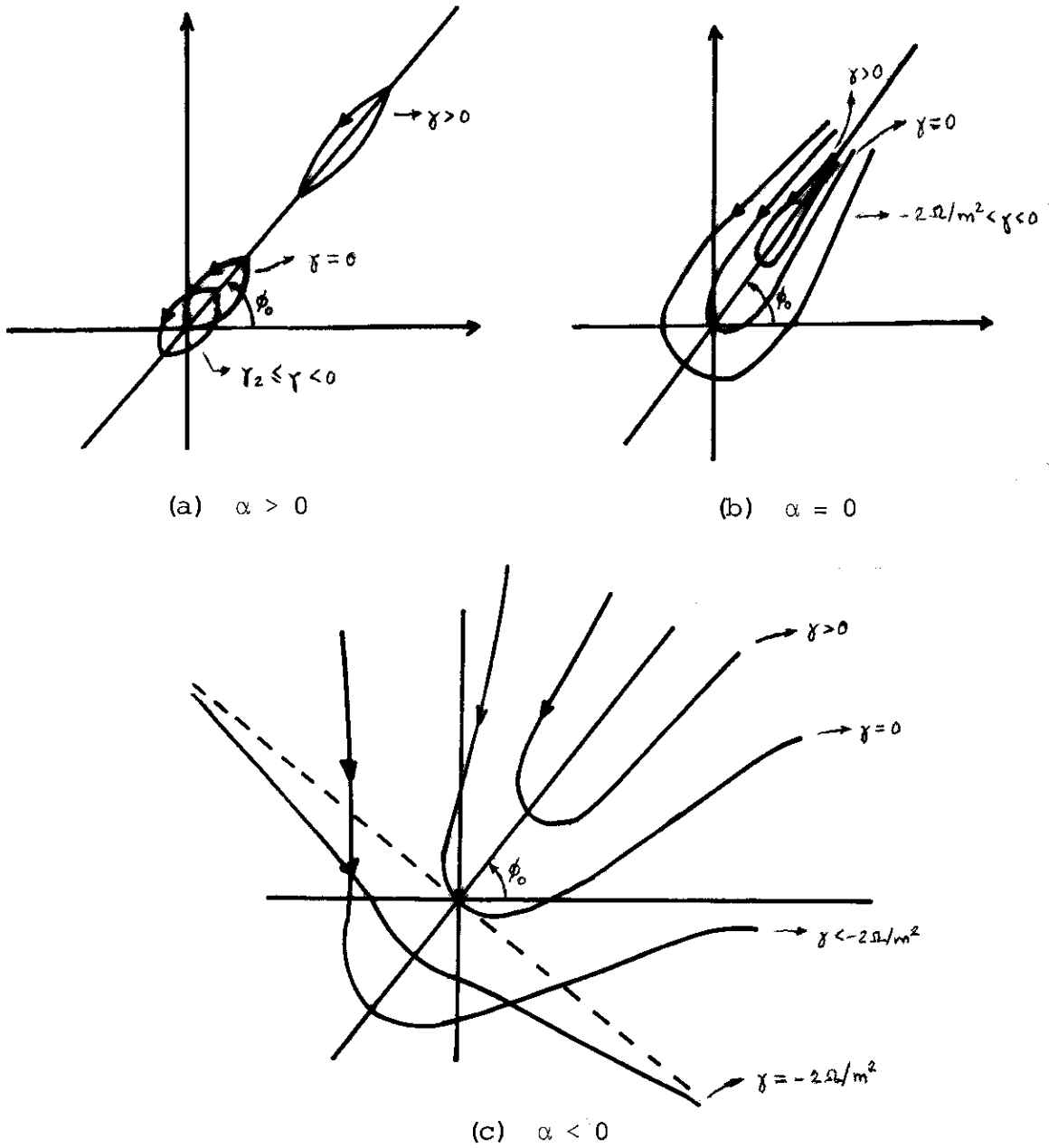


FIGURA 3.1 - Projeções das geodésicas no 2-plano (ρ, ϕ) como função de α .

Genericamente, para um dado α , ou melhor, para um dado modelo (m^2 e Ω^2 fixos) e um dado β^2 , essas projeções dividem-se, qualitativamente, em três classes, conforme o sinal de γ :

- (1) se $\gamma > 0$, as projeções nunca "encerram" nem cruzam a origem, o que é indicado pelo fato de então existir sempre um ponto onde $\dot{\phi} = 0$, que é justamente dado por (3.27).
- (2) se $\gamma = 0$, a projeção cruza a origem.
- (3) se $\gamma < 0$, as projeções "encerram" a origem, o que é indicado pelo fato de, então, $\dot{\phi}$ ser sempre positivo, como se vê de (3.1b).

Especificamente:

- (1) se $\alpha > 0$, as projeções são curvas simples fechadas.
- (2) se $\alpha = 0$, as projeções são curvas simples abertas cuja coordenada azimutal tende assintoticamente a ϕ_0 , conforme ρ tende ao infinito, como se vê de (3.29).
- (3) se $\alpha < 0$, as projeções são curvas simples abertas cuja coordenada azimutal assintótica cresce desde ϕ_0 até $\phi_0 + \pi/2$, conforme γ varia desde $+\infty$ até $-2\Omega/m^2$ e, então, começa a decrescer de novo até ϕ_0 , conforme γ decresce até $-\infty$, como se vê de (3.28).

CONCLUSÃO

Como já mencionamos na Introdução deste trabalho, nossa tese resultou da confluência de duas linhas de pesquisa, que visavam a generalização do modelo de Gödel e o estudo de geodésicas em universos com matéria girante.

Nesse sentido, estudamos as trajetórias de partículas livres para uma classe particular dos assim chamados espaços-tempo do tipo de Gödel (homogêneos): a família hiperbólica. Para tanto, escolhemos trabalhar com o sistema de coordenadas ditas cilíndricas, aproveitando-nos da fácil interpretação dessas coordenadas via os campos de isometria do espaço-tempo relacionados com a sua estacionariedade e simetria cilíndrica. Outrossim, nesse sistema de coordenadas, poderíamos sempre tomar o limite de comparação do modelo de Gödel.

Dessa forma, determinamos as equações horárias do movimento geodésico e também a equação da órbita no 2-plano (ρ, ϕ) . Encontramos que o movimento ao longo do eixo z era sempre uniforme, conforme o esperado, já que a coordenada z é ignorável na expressão da métrica, entrando somente para a obtenção das quatro dimensões do espaço-tempo via produto direto com o elemento de linha de uma sub-variedade tridimensional adequada.

Vimos, exatamente, a relevância dos parâmetros α e γ para a caracterização qualitativa do movimento geodésico. Especificamente, nossas geodésicas se dividiam em três classes conforme o sinal de α e outras três conforme o sinal de γ .

Se $\alpha > 0$, tínhamos os chamados movimentos elípticos, ca-

racterizados por uma projeção no 2-plano (ρ, ϕ) simples e fechada. Se $\alpha = 0$, encontramos as primeiras geodésicas com projeções simples abertas, "fechando-se" no infinito radial; esses eram os movimentos parabólicos. Se $\alpha < 0$, nossas projeções continuavam curvas simples abertas, mas agora sem "se fecharem" no infinito radial.

Se $\gamma > 0$, as projeções não "encerravam" nem cruzavam a origem. Se $\gamma = 0$, essas projeções cruzavam a origem. Se $\gamma < 0$, essas projeções "encerravam" a origem.

Vimos, também, que os movimentos elípticos podiam ocorrer em todos os modelos do tipo de Gödel da família hiperbólica, que os movimentos parabólicos podiam ocorrer somente para os modelos com $m^2 \geq 4\Omega^2$ e os hiperbólicos, somente para os modelos com $m^2 > 4\Omega^2$.

Nossa análise se viu facilitada pela introdução e estudo prévio do comportamento do potencial efetivo, associado ao movimento radial. Particularmente, é interessante a determinação dos pontos de retorno e a imposição de uma condição de movimento apropriada, com a conseqüente restrição sobre os valores de certos parâmetros.

No futuro, pretendemos estender essa análise para a família circular de espaços-tempos do tipo de Gödel, trabalho esse que deve ser relativamente rápido. A aplicação desse método do potencial efetivo para o estudo de geodésicas em outros espaços-tempos também é uma possibilidade que deve ser bem considerada, visto sua grande capacidade esclarecedora. Pode-se estudar também as trajetórias de partículas com carga elétrica e escalar nos espaços-tempos do tipo de Gödel, assim como a existência de curvas acausais nos modelos com $m^2 \geq 4\Omega^2$ e as topologias compatíveis com a forma local das métricas do tipo de Gödel.

APÊNDICE A

GEODÉSICAS

As geodésicas do tipo temporal e do tipo nulo são consideradas como representantes da história espaço-temporal de partículas de teste livres e pontuais. Com essa última expressão, queremos nos referir a partículas: (i) cuja contribuição para o campo gravitacional seja desprezível, de forma que possamos estudar o seu movimento com relação a uma métrica de fundo (externa) dada; (ii) que não interagem gravitacionalmente, ou seja, não possuem cargas elétrica ou escalar (nem, obviamente, multipolos correspondentes), e (iii) cujas dimensões espaciais são pequenas com relação a uma distância característica do campo gravitacional de fundo, de forma que possamos considerá-las, numa terminologia mais exata, como monopolos gravitacionais (desprezando, assim, termos devido ao spin e multipolos superiores). Essa última condição é necessária já que, conforme mostrado por Papapetrou e outros ^(30,63-65), o centro de massa de corpos extensos (ou "pontuais" estruturados) desvia-se de uma geodésica justamente pelo acoplamento de multipolos gravitacionais superiores com o tensor de curvatura de Riemann. A esse respeito, vale notar, entretanto, que partículas de massa nula (lúxons) mesmo com spin continuam seguindo geodésicas ⁽⁶⁶⁾. Essa questão está relacionada, obviamente, com o princípio de equivalência fraco

ou princípio de unicidade da queda livre.

Pode-se, na verdade, provar que partículas de massa não nula seguem, como consequência das equações de Einstein, geodésicas do tipo temporal ^(36,67) e fótons, como consequência das equações de Maxwell em espaço-tempo curvo na aproximação de ótica geométrica, seguem geodésicas do tipo nulo ⁽³⁶⁾. Aqui simplesmente consideraremos tais resultados como verdadeiros.

Essencialmente, as geodésicas em variedades genéricas podem ser definidas a partir da generalização de duas propriedades básicas das quais gozam as retas num espaço euclidiano usual, a saber, o fato de serem curvas auto-paralelas e também curvas extremas da distância entre dois pontos dados.

Adotando a primeira característica como fundamental, somos obrigados a introduzir uma conexão sobre nossa variedade, para dar sentido à noção de paralelismo, mesmo que puramente local, e, então, somos levados à definição de geodésicas afins (ou curvas auto-paralelas, segundo outra terminologia bastante difundida).

Por outro lado, se adotarmos a segunda característica como fundamental, somos obrigados a introduzir um tensor métrico, não necessariamente positivo definido, sobre nossa variedade, para dar sentido, desta feita, à noção de distância entre dois eventos, e, então, somos levados à definição de geodésicas métricas (ou simplesmente geodésicas, segundo outra terminologia bastante difundida).

É óbvio do exposto acima que, em princípio, essas curvas não precisam necessariamente coincidir, como não coincidem, de fato, nas variedades de Einstein-Cartan, por exemplo. Veremos agora a definição detalhada desses dois tipos de geodésicas e, particu -

larmente, a condição para que possam coincidir.

De agora em diante consideraremos uma variedade dotada de uma geometria afim e de uma geometria métrica, ou seja, dotada de uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ e de um tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, sendo que a conexão não é necessariamente a conexão métrica de Christoffel $\{\begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\}$ (*).

As geodésicas afins são curvas caracterizadas da seguinte maneira: dado um ponto P sobre a curva, tome um vetor qualquer proporcional ao vetor tangente à curva em P e transporte-o paralelamente ao longo da curva até um outro ponto P' da curva. Então, se o vetor transportado paralelamente for proporcional ao vetor tangente à curva em P' para todo ponto P' e todo ponto inicial P , a curva é uma geodésica afim.

Para estabelecermos as equações dessas geodésicas afins, suponhamos que a curva seja dada na forma paramétrica como:

$$x^{\mu} = \xi^{\mu}(\tau) \quad , \quad (A.1)$$

onde τ é qualquer parâmetro contínuo definido ao longo da curva, que cresça monotonicamente ao movermo-nos ao longo da curva num sentido fixo. A caracterização acima de geodésica afim pode, então, ser transcrita como:

$$\frac{d\xi^{\mu}}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau} \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} = (1 + \alpha(\tau)d\tau) \left(\frac{d\xi^{\mu}}{d\tau} + \frac{d^2\xi^{\mu}}{d\tau^2} d\tau \right) \quad ,$$

(*)

Nosso desenvolvimento posterior se baseia amplamente no texto de Anderson (5).

ou

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} = \alpha(\tau) \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Consideremos agora a modificação nessa expressão devida a uma reparametrização da curva, $\sigma = \sigma(\tau)$. A equação (A.2) fica:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = \frac{\alpha\sigma' - \sigma''}{\sigma'^2} \frac{d\xi^\mu}{d\sigma} \quad , \quad (\text{A.3})$$

onde σ' e σ'' são as derivadas primeira e segunda de σ com relação a τ , respectivamente. Vemos que é sempre possível encontrar um parâmetro $\sigma(\tau)$ tal que o membro direito de (A.3) se anule, já que a equação $\alpha\sigma' - \sigma'' = 0$ sempre tem solução, para qualquer $\alpha(\tau)$. Assim, há um parâmetro σ , para o qual a equação de uma geodésica afim fica:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Vemos que, com a escolha acima do parâmetro σ ao longo da geodésica afim, o vetor tangente é transportado paralelamente em si mesmo ao longo da curva e não é meramente transportado proporcionalmente, como no caso de um parâmetro arbitrário. Em consequência, o parâmetro σ desempenha um papel privilegiado dentre todos os possíveis parâmetros e é denominado um parâmetro afim. Na verdade, um pequeno conjunto de parâmetros gozam dessa propriedade; se σ é um parâmetro afim, então $a\sigma + b$ também o é.

Da definição acima, vemos que através de um ponto dado numa determinada direção, só passa uma única geodésica afim. Além disso, para pontos situados na vizinhança desse ponto, só passa uma única geodésica afim, através desse ponto e de um dos pontos da vizinhança. No entanto, essa afirmação não é válida em larga escala, onde um certo número de geodésicas afins pode passar através de dois pontos dados.

É interessante observar, de (A.3) ou (A.4), que só a parte simétrica da afinidade contribui para o estabelecimento das geodésicas afins.

As geodésicas métricas são curvas caracterizadas da seguinte maneira: dados dois pontos P e P' , a geodésica métrica entre eles é aquela curva unindo esses dois pontos de modo que sua distância é estacionária com relação a pequenas variações, que se anulam nas extremidades, obviamente. Note-se que não exigimos que o comprimento da curva seja um mínimo, já que, no caso de métricas não positivas definidas, existe uma classe muito importante dessas curvas cuja distância é um máximo.

Sejam $\xi^\mu(\lambda)$ as coordenadas dos pontos de uma curva ligando P e P' , dados como funções de algum parâmetro λ ao longo da curva. A distância da curva é, então, dada por:

$$s_{PP'}[c] := \int_{c^{P'}}^P ds = \int_{c^P}^{P'} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda, \quad (A.5)$$

onde

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\mu\nu} \xi'^{\mu} \xi'^{\nu}}, \quad (A.6)$$

e onde usamos a abreviação $\xi'^{\mu} := d\xi^{\mu}/d\lambda$. A variação no valor de

$s_{PP'}[c]$ devida a uma pequena variação $\delta\xi^\mu$ é dada por:

$$\delta s_{PP'}[c] = \int_{c^P}^{P'} \left[\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{ds} g_{\mu\nu, \sigma} \xi'^{\mu} \xi'^{\nu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d}{ds} g_{\mu\sigma} \xi'^{\mu} \right) \right] \delta\xi^\sigma d\lambda + \left. \frac{d\lambda}{ds} g_{\mu\sigma} \xi'^{\mu} \delta\xi^\sigma \right|_P^{P'}. \quad (A.7)$$

Como a variação se anula nos pontos extremos, a última parcela do membro direito de (A.7) não contribui para $\delta s_{PP'}[c]$. Então, como $\delta\xi^\sigma$ é arbitrário, segue que, se $\delta s_{PP'}[c] = 0$ para todas essas variações:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} + \{ \mu \}_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = - \frac{d^2 \lambda / ds^2}{(d\lambda/ds)^2} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda}. \quad (A.8)$$

Essa equação das geodésicas métricas pode ser simplificada se restringirmo-nos a parâmetros λ tais que $\lambda = as+b$; nesse caso, (A.8) fica:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} + \{ \mu \}_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} = 0. \quad (A.9)$$

Para chegar nos resultados acima fizemos a suposição tácita de que $ds \neq 0$. Para tratarmos do caso $ds = 0$, é conveniente utilizarmos o princípio variacional:

$$L := \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi'^{\mu} \xi'^{\nu}, \quad (A.10a)$$

$$\delta s_{PP'}[c] = \int_{c^P}^{P'} L d\lambda. \quad (A.10b)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0 \quad , \quad (\text{A.11})$$

e desta vez são válidas mesmo que $ds = 0$.

A lagrangiana (A.10a) é uma função homogênea de segundo grau nas "velocidades" ξ'^μ ; portanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi'^\mu} \xi'^\mu = 2L \quad . \quad (\text{A.12})$$

Graças a (A.12) e às equações de Euler-Lagrange, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\lambda} &= \frac{\partial L}{\partial \xi'^\mu} \xi'^\mu + \frac{\partial L}{\partial \xi''^\mu} \xi''^\mu \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \xi'^\mu} \right) \xi'^\mu + \frac{\partial L}{\partial \xi''^\mu} \xi''^\mu \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi'^\mu} \xi'^\mu \right) \\ &= 2 \frac{dL}{d\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e portanto:

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0 \quad , \quad g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \frac{d\xi^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = \text{const.} \quad (\text{A.14})$$

Analogamente ao desenvolvimento em mecânica analítica ,
definimos os momentos canônicos p_μ como:

$$p_{\mu} := \frac{\partial L}{\partial \xi'^{\mu}} = g_{\mu\nu} \xi'^{\nu} . \quad (\text{A.15})$$

Se a lagrangiana é independente de uma determinada coordenada, x^A por exemplo (A fixo), o correspondente momento canônico será conservado ao longo das geodésicas métricas.

$$\frac{d}{d\lambda} p_A = \frac{\partial L}{\partial \xi^A} = 0 \implies p_A = \text{const.} \quad (\text{A.16})$$

Em uma variedade dotada de geometrias afim e métrica costumamos relacionar a afinidade e a métrica exigindo que:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0 , \quad (\text{A.17})$$

o que equivale a tomar a afinidade como uma afinidade métrica, ou seja:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} , \quad (\text{A.18})$$

e, dessa forma, as geodésicas afins e métricas, definidas por (A.4) e (A.11), respectivamente, coincidem.

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES (3.13) E (3.14)

Faremos aqui a passagem de (3.13) e (3.14) a (3.15) no caso particular de $\alpha > 0$. Todos os outros podem ser reduzidos a esse com uma escolha adequada da constante de integração.

As integrais de (3.14) se encontram imediatamente ⁽⁶⁸⁾, de modo que, para $\alpha > 0 \implies \gamma \geq \gamma_2 > -2\Omega/m^2$, temos:

$$2(\phi - \phi_0) = A + B \quad , \quad (B.1)$$

com

$$A := \operatorname{sgn}(\gamma) \operatorname{arcsen} \frac{(1 - \beta^2 + 2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/2}{\rho \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}} \quad , \quad (B.2a)$$

$$B := \operatorname{arcsen} \frac{m^2(\gamma + 4\Omega/m^2)^2/2 - (\alpha + \lambda^2 + 2\Omega\gamma)(\rho + 1)}{(\rho + 1) \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\Delta}} \quad . \quad (B.2b)$$

Tomamos o cosseno de ambos os membros de (B.1):

$$2\cos^2(\phi - \phi_0) = 1 + \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \quad . \quad (B.3)$$

Definindo:

$$2(1+\beta^2)M := \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\Delta} , \quad (\text{B.4})$$

a equação (B.3) fornece:

$$\begin{aligned} 8\cos^2(\phi-\phi_0)(1+\beta^2)^2 M^2 \rho(\rho+1) &= \\ &= 4(1+\beta^2)^2 M^2 \rho(\rho+1) + \sqrt{R_1 R_2} - 4(1+\beta^2)^2 M^2 \rho(\rho+1) \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

com:

$$R_1 := 4(1+\beta^2)^2 M^2 \rho^2 - [(1-\beta^2+2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/2]^2 , \quad (\text{B.6a})$$

$$R_2 := 4(1+\beta^2)^2 M^2 (\rho+1)^2 - [m^2(\gamma+4\Omega/m^2)^2/2 - (\alpha+\lambda^2+2\Omega\gamma)(\rho+1)]^2 . \quad (\text{B.6b})$$

Desenvolvendo R_1 e R_2 , obtemos:

$$R_1 = m^2\gamma^2[-\alpha\rho(\rho+1) + (\lambda^2+2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4] , \quad (\text{B.7a})$$

e

$$R_2 = m^2(\gamma+4\Omega/m^2)^2[-\alpha\rho(\rho+1) + (\lambda^2+2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4] . \quad (\text{B.7b})$$

Então, substituindo isso em (B.5), vem:

$$\begin{aligned} 8\cos^2(\phi-\phi_0)(1+\beta^2)^2 M^2 \rho(\rho+1) &= (1-\beta^2)\Delta\rho(\rho+1) + \\ &+ m^2|\gamma|(\gamma+4\Omega/m^2)[- \alpha\rho(\rho+1) + (\lambda^2+2\Omega\gamma)\rho - m^2\gamma^2/4] + \end{aligned}$$

$$- (1-\beta^2)\Delta\rho(\rho+1) \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \quad . \quad (\text{B.8})$$

Supondo agora $\gamma > 0$, temos:

$$\begin{aligned} 8\cos^2(\phi-\phi_0)(1+\beta^2)^2 M^2\rho(\rho+1) &= (1-\beta^2)\Delta\rho(\rho+1) + \\ &+ m^2\gamma(\gamma+4\Omega/m^2)[- \alpha\rho(\rho+1) + (2\Omega\gamma+\lambda^2)\rho - m^2\gamma^2/4] + \\ &- (1-\beta^2)[(1-\beta^2)\rho(\rho+1) - 2(\lambda\rho-m\gamma/2)^2] + \gamma(\gamma+4\Omega/m^2)(2\Omega\rho-m^2\gamma/2)^2 \\ &= 2(1-\beta^2)[m\gamma+\lambda)\rho + m\gamma/2]^2 \quad . \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Lembrando a definição (B.4), tiramos, finalmente, que:

$$\cos(\phi-\phi_0) = \frac{|m(\gamma+2\Omega/m^2)\rho + m\gamma/2|}{\sqrt{\Delta} \sqrt{\rho(\rho+1)}} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Supondo, agora, $\gamma < 0$, temos:

$$\begin{aligned} 8\cos^2(\phi-\phi_0)(1-\beta^2)M^2\rho(\rho+1) &= (1-\beta^2)\Delta\rho(\rho+1) + \\ &- m^2\gamma(\gamma+4\Omega/m^2)[- \alpha\rho(\rho+1)+(2\Omega\gamma+\lambda^2)\rho - m^2\gamma^2/4] + \\ &- (1-\beta^2)[(1-\beta^2)\rho(\rho+1)-2(\lambda\rho-m\gamma/2)^2]+\gamma(\gamma+4\Omega/m^2)(2\Omega\rho-m^2\gamma/2)^2 \\ &= 2(1-\beta^2)[(1-\beta^2)\rho(\rho+1) - (\lambda\rho-m\gamma/2)^2] \quad , \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

que fornece:

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{(1 - \beta^2)\rho(\rho + 1) - (\lambda\rho - m\gamma/2)^2}{\sqrt{\Delta} \sqrt{\rho(\rho + 1)}} \quad . \quad (\text{B.12})$$

Essa expressão pode ser colocada na forma (B.10) redefinindo-se ϕ_0 de modo que $\phi - \phi_0$ passe a ser $\phi - \phi_0 + \pi/2$.

REFERÊNCIAS

- (1) - H.A. Lorentz et al. - The Principle of Relativity. Dover , New York, USA (1923)^(*).
- (2) - R.A. Schilpp (ed.) - Albert Einstein: Philosopher-Scientist. Harper Torchbooks, New York, USA (1959).
- (3) - C.W. Misner et al. - Gravitation. Freeman, San Francisco , USA (1973)^(*).
- (4) - S. Weinberg - Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons, New York, USA (1972)^(*).
- (5) - J.L. Anderson - Principles of Relativity Physics. Academic Press, New York, USA (1967)^(*).
- (6) - W. Rindler - Essential Relativity, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, USA (1977)^(*).
- (7) - L. Sklar - Space, Time and Spacetime. University of California Press, Berkeley, USA (1974)^(*).
- (8) - A.K. Raychaudhuri - Theoretical Cosmology. Oxford University Press, Oxford, Great Britain (1979).
- (9) - J.D. Nightingale - An. J. Phys., 45, 376(1977).
- (10) - J.D. Nightingale & J.R. Ray - Am. J. Phys., 46, 586(1978).
- (11) - F.A.E. Pirani - Helv. Phys. Acta, 29(Supp.IV), 198(1956)^(*).
- (12) - H. Thirring - Phys. Zeits., 19, 33(1918).
- (13) - H. Thirring & J. Lense - Phys. Zeits., 19, 156(1918).
- (14) - H. Thirring - Phys. Zeits., 22, 29(1921).
- (15) - B. Mashhoon et al. - Gen. Rel. Grav., 16, 711(1984).
- (16) - K. Lanczos - Zeits. Phys., 21, 73(1924).
- (17) - W.J. Van Stockum - Proc. Roy.Soc. Edinburgh, 57, 135(1937).

^(*)Altamente recomendáveis.

- (18) - J.P. Wright - J. Math. Phys., 6, 103(1965).
- (19) - S.C. Maitra - J. Math. Phys., 7, 1025(1966).
- (20) - K. Gödel - Rev. Mod. Phys., 21, 447(1949).
- (21) - K. Gödel - "A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy". in (2).
- (22) - I. Oszváth & E.L. Schücking - Ann. Phys. (New York), 55, 166 (1969).
- (23) - A. Grünbkum - Philosophical Problems of Space and Time, 2nd ed. Reidel, Dordrecht, Holland (1973).
- (24) - S.W. Hawking & G.F.R. Ellis - The Large Scale Structure of Spacetime. Cambridge University Press, New York, USA(1973) (*).
- (25) - R. Adler et al. - Introduction to General Relativity, 2nd ed. McGraw Hill Kogakusha, Tokyo, Japan (1975).
- (26) - E.A. Lord - Tensors, Relativity and Cosmology. Tata MacGraw Hill, New Delhi, India (1979).
- (27) - H.-Y. Chiu & W.F. Hoffmann (eds.) - Gravitation and Relativity. Benjamin, New York, USA (1964).
- (28) - H.A. Buchdahl - Seventeen Simple Lectures on General Relativity Theory. John Wiley & Sons, New York, USA (1980) (*).
- (29) - J.D. Raine - Rep. Prog. Phys., 44, 73(1981).
- (30) - F.A.E. Pirani - Acta Phys. Polon., 15, 389 (1956) (*).
- (31) - L.I. Schiff - Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 46, 871(1960).
- (32) - J.L. Synge - Relativity: The General Theory. North-Holland, Amsterdam, Holland (1960).
- (33) - G.F.R. Ellis - "Relativistic Cosmology", in R.K. Sachs (ed.) -Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLVII: General Relativity and Cosmology. Academic Press, New York, USA (1971) (*).
- (34) - C. Møller - The Theory of Relativity, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford, Great Britain (1972) (*).

(*) Altamente recomendáveis.

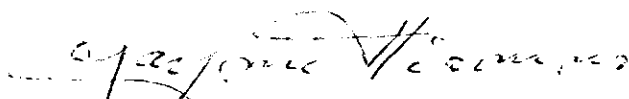
- (35) - R.K. Sachs & H. Wu - General Relativity for Mathematicians. Springer-Verlag, New York, USA (1977)^(*).
- (36) - H. Stephani - General Relativity. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain (1982)^(*).
- (37) - A. Banerjee & S. Banerji - J. Phys., A1, 188(1968).
- (38) - M.M. Som & A.K. Raychaudhuri - Proc. Roy. Soc. London, A304, 81 (1968).
- (39) - C. Hoenselaers & C.V. Vishveshwara - Gen. Rel.Grav., 10,43 (1979).
- (40) - M.J. Rebouças - Phys. Letters, A70, 161(1979).
- (41) - M. Novello & M.J. Rebouças - Phys. Rev., D19,1850(1979).
- (42) - S.K. Chakraborty - Gen. Rel. Grav., 12, 925(1980).
- (43) - M.J. Rebouças & J. Tiomno - Phys. Rev., D28, 1251(1983).
- (44) - A.K. Raychaudhuri & S.N.G. Thakurta - Phys. Rev., D22, 802 (1980).
- (45) - J.D. Oliveira et al. - Notas de Física do CBPF, 029/83(1983).
- (46) - W. Kunot - Zeits. Phys., 145,611(1956).
- (47) - S. Chandrasekhar & J.P. Wright - Proc. Nat. Acad. Sci (USA), 47, 341 (1961).
- (48) - M. Novello et al. - Phys. Rev., D27, 779(1983).
- (49) - H. Goldstein - Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, USA (1962).
- (50) - A.P. French - Mecânica Newtoniana. Reverté, Barcelona, España (1974).
- (51) - R.D. Rictmyer - Principles of Advanced Mathematical Physics, II. Springer-Verlag, New York, USA (1981).
- (52) - M. Maccallum - "Cosmological Models from a Geometric Point of View" in E. Schatzman (ed.) - Cargèse Lectures in Physics 6. Gordon and Breach, New York, USA (1973).

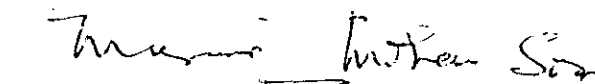
(*) Altamente recomendáveis.

- (53) - M.P. Ryan, Jr. & L.C. Shepley - Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton University Press, Princeton, USA (1975).
- (54) - D. Kramer et al. - Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain (1980).
- (55) - R. Geroch & G.T. Horowitz - "Global Structure of Spacetimes" in S.W. Hawking & W. Israel (eds.) - General Relativity: An Einstein Centenary Survey. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain (1979).
- (56) - I. Oszváth - J. Math. Phys., 11, 2860 (1970).
- (57) - I. Oszváth - J. Math. Phys., 11, 2871 (1970).
- (58) - M.J.D. Assad - "Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi: VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético". Tese de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, Brasil (1980).
- (59) - I.D. Soares & L.M.C.S. Rodrigues - "Gravitational Coupling of Neutrinos to Matter Vorticity: II. Microscopic Asymmetries in Angular Momentum Modes". in Sociedade Astronômica Brasileira (ed.) - Proceedings of III School of Gravitation and Cosmology. Rio de Janeiro, Brasil (1982).
- (60) - S.K. Chakrabarti et al. - J. Math. Phys., 24, 597 (1983).
- (61) - D.B. Malament - J. Math. Phys., 26, 774 (1985).
- (62) - S. Hawking - Proc. Roy. Soc. London, A308, 433 (1968).
- (63) - A. Papapetrou - Proc. Roy. Soc. London, A209, 248 (1951).
- (64) - E. Corinaldesi & A. Papapetrou - Proc. Roy. Soc. London, A209, 259 (1951).
- (65) - W.G. Dixon - "Extended Bodies in General Relativity: Their description and motion" in J. Ehlers (ed.) - Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course LXVII: Isolated Gravitating Systems in General Relativity. North-Holland, New York, USA (1979).
- (66) - B. Mashhoon - Ann. Phys. (New York), 89, 254 (1975).
- (67) - A. Einstein & L. Infeld - Ann. Math., 41, 455 (1940).

(68) - I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik - Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York, USA (1965).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Jayme Tiomno - Presidente


Murari Mohan Som


Jorge Silvio Helman

Rio de Janeiro, 28 de agosto de 1985