

SEBASTIÃO ALVES DIAS

APLICAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO
AO ESTUDO DAS FUNÇÕES DE ESTRUTURA
NO ESPALHAMENTO INELÁSTICO PROFUNDO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1985

AGRADECIMENTOS

A todos e a ninguém...

RESUMO

Deduzimos a lei de transformação de observáveis truncados perante mudanças de esquema de renormalização. Com base nela, fazemos uma crítica do problema do cálculo dos momentos das funções de estrutura no espalhamento inelástico profundo, observando que o coeficiente de a^2 não é invariante do grupo de renormalização. Usamos, então, o critério $\overline{\text{PMS}}$ para otimizar as previsões perturbativas dos momentos truncadas em 2ª ordem.

ABSTRACT

We deduce the transformation law of truncated perturbation theory observables under changes of renormalization scheme. Based on this, we make a criticism of the calculus of the moments of structure functions in deep inelastic scattering, obtaining that the a^2 coefficient is not renormalization group invariant. Then we use the $\overline{\text{PMS}}$ criterion to optimize the perturbative predictions of the moments, truncated to 2nd order.

SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS.....	iii
RESUMO.....	iv
SUMÁRIO.....	v
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	viii
INTRODUÇÃO.....	I
<u>CAPÍTULO I</u> - RENORMALIZAÇÃO PERTURBATIVA.....	1
1.1 Por que renormalizar?.....	1
1.2 Regularização e ambigüidades.....	4
1.3 Parametrização das ambigüidades.....	6
1.4 O grupo de renormalização.....	9
1.5 Cromodinâmica Quântica.....	16
<u>CAPÍTULO II</u> - OBSERVÁVEIS FÍSICOS E RENORMALIZAÇÃO.....	20
2.1 Invariância dos observáveis.....	20
2.2 Parametrização total de um esquema de renor malização.....	25
2.3 Procedimentos de otimização.....	28
<u>CAPÍTULO III</u> - ESPALHAMENTO INELÁSTICO PROFUNDO.....	34
3.1 Formalismo básico.....	34
3.2 Expansões de Produtos de Operadores (EPO's)	39

3.3 Regras de soma para momentos	42
3.4 Violações de scaling.....	46
<u>CAPÍTULO IV</u> - FENOMOLOGIA E AMBIGÜIDADES TEÓRICAS.....	54
4.1 Gráficos de Perkins e dimensão anômala....	54
4.2 Cálculos de ordem superior.....	56
4.3 "Higher twist effects" e série perturbati - va.....	62
4.4 Otimização.....	64
<u>CAPÍTULO V</u> - CONCLUSÃO.....	70
<u>APÊNDICE A</u> - O PARÂMETRO Λ	74
<u>APÊNDICE B</u> - DIMENSÕES ANÔMALAS DOS $O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i$ (caso não singlete).....	78
<u>APÊNDICE C</u> - MS , \overline{MS} e MOM	80
<u>APÊNDICE D</u> - COMPARANDO UM OBSERVÁVEL EM DIFERENTES <u>ES</u> QUEMAS	84
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	87

LISTA DE FIGURAS

	PÁG.
Fig. 1 - Comportamento hipotético de uma função $\beta(g)$ e sua estrutura de pontos fixos.....	16
Fig. 2 - Interação de um fóton com um próton em vários valores possíveis para a transferência de momentum Q^2	36
Fig. 3 - Seção de choque típica de um processo profundamente inelástico	36
Fig. 4 - Gráficos de Perkins, relacionando $\ln M_N$ para diversos valores de N e N'	54
Fig. 5 - Gráfico de $M_N^{(3)}(Q^2) - \frac{1}{d_N}$ comparado com o crescimento logarítmico esperado pela CDQ e o comportamento de potência esperado numa teoria com $g^* \neq 0$	55
Fig. 6 - Exemplo de H.T.E.	62

LISTA DE TABELAS

	PÁG.
Tabela 1 - Cálculo dos $m_N^{(2)}$ para a função de estrutura W_2 , realizado em MS.% indica o tamanho relativo do termo em 2ª ordem em relação à 1ª ordem	61
Tabela 2 - Valores de $\hat{r}_{1,MS}^N$, $\rho_1^N(Q/\Lambda=100)$ e $\rho_1^N(Q/\Lambda=1000)$	65
Tabela 3 - Valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N e \bar{a}_N para $(Q/\Lambda=100)$ de $N=2$ até 10	67
Tabela 4 - Valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N e \bar{a}_N para $(Q/\Lambda=1000)$ de $N=2$ até 10	67
Tabela 5 - Valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N , \bar{a}_N e ρ_1^N para $(Q/\Lambda=10)$ de $N=2$ até 5	68

INTRODUÇÃO

A formulação do modelo para quarks em interação chamada Cromodinâmica Quântica (CDQ), configura-se hoje com o único quadro conceitual coerente à nossa disposição para uma abordagem das interações fortes. No entanto, algumas dificuldades fazem com que os testes efetivos da CDQ sejam poucos. De fato, na abordagem da física de partículas via teoria de campos o instrumento mais utilizado é a teoria de perturbações (TP). Em outras palavras, supomos que podemos conhecer quantidades físicas de uma teoria com interação (tais como uma amplitude de espalhamento, ou uma taxa de decaimento) se as conhecemos na teoria livre, desde que a interação seja caracterizada por um parâmetro "pequeno".

Na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) acreditamos estar no domínio de validade da suposição acima. Sabemos, do estudo do grupo de renormalização, que, numa teoria com interação, nem as constantes de acoplamento, nem as massas são univocamente definidas. A constante característica das interações na EDQ, $\alpha = \frac{1}{137}$, permanece, no entanto, basicamente inalterada para todos experimentos onde efetivamente a interação eletromagnética é relevante. Assim, vemos que uma expressão perturbativa de uma dada quantidade física, construída como série de potências em α tem todas as chances de, com o cálculo de um número razoável de termos, dar predições acuradas do seu valor, compará

veis experimentalmente com as medidas reais.

Infelizmente, o mesmo não é verdade para a CDQ. O fenômeno do confinamento (não observação de quarks ou glúons livres) parece ser compatível, nessa teoria, com a propriedade de liberdade assintótica, ou seja, com a diminuição da constante de acoplamento efetiva, g , à medida que a energia do processo aumenta (o contrário do caso da EDQ [39]). E ainda mais, g é maior que 1 em baixas energias, o que faz com que seja um mau parâmetro de expansão para um cálculo perturbativo. O número de correções a ser calculado é enorme, para termos uma predição confiável. Como o cálculo de termos acima de 2 loops é praticamente inviável, temos então uma ausência de predições da CDQ a baixas energias.

Nosso interesse volta-se então para a fenomenologia de altas energias, onde se espera que g possa se limitar a valores menores que 1 e, portanto, possamos fazer predições perturbativas. Nesse domínio, de fato, somos cada vez mais levados a confiar na CDQ, devido a alguns resultados experimentais como a observação de violações logarítmicas do scaling de Bjorken, ou o valor de $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$. Apenas a CDQ é compatível com tais fenômenos. Entretanto, no primeiro caso ao menos, enquanto o acordo qualitativo da teoria com o experimento é total, quantitativamente não temos tão bons resultados. A discussão é intensa quanto aos porquês e envolve a análise de vários instrumentos utilizados na obtenção de predições teóricas. Um desses instrumentos (e talvez o mais importante) é o grupo de renormalização.

Coloquemos o problema: dada uma determinada quantidade física, o seu valor não pode depender do modo particular pelo qual removemos os termos infinitos, que comparecem no seu cálculo perturbativo, nem do modo como fixamos a parte finita resultante. Cada modo particular de fazer isto é chamado de esquema de renormalização e a teoria é dita invariante por escolhas arbitrárias de esquema. No entanto, a expressão truncada (numa dada ordem) da mesma quantidade física não é. Como não conseguimos calcular todos os termos da série perturbativa, temos que nos contentar com essa expressão truncada, e daí aparece a necessidade de da escolha de um critério que indique qual o melhor esquema de renormalização a ser empregado em cada caso.

Nesse sentido, algumas pessoas [16,18,19] estudaram o problema e propuseram diversos critérios (chamados de procedimentos de aprimoramento) que permitem a análise coerente de um grande número de casos. Nota-se, entretanto, muita confusão na literatura [7,25] e ela deve ser esclarecida para que possa haver uma aplicação dos métodos citados, ou o desenvolvimento de outros. Com isso em mente, escolhemos, neste trabalho, abordar um dos testes contrais da CDQ: as violações do scaling previsto por Bjorken [24] para as funções de estrutura do espalhamento inelástico profundo lépton-hádrón. As quantidades físicas em questão serão os momentos dessas funções, cujo comportamento é previsto com o auxílio de duas técnicas: a expansão de produtos de operadores e o grupo de renormalização. Desenvolveremos nossa análise da seguinte forma: no capítulo 1, introduzimos o problema da renormalização em teoria de campos, juntamente com os procedimentos associados de regularização e mostraremos como a ambi

guidade na determinação da parte finita daí resultante pode ser tratada com o auxílio do grupo de renormalização. Concluímos o capítulo com uma breve descrição do modelo (CDQ) com o qual trabalharemos, dando ênfase para a propriedade assintótica que o seleciona dentre todos os demais.

No capítulo 2, introduzimos os procedimentos de aprimoramento do cálculo perturbativo, com os quais lidaremos a diante. Uma discussão do espalhamento inelástico profundo e do instrumental teórico associado é dada no capítulo 3, onde mostramos o cálculo até 2ª ordem dos momentos das funções de estrutura, o qual formará a base para os nossos cálculos de aprimoramento. No capítulo 4, analisamos alguns dos principais artigos da literatura, nos pontos de nosso interesse, apontando, então, a raiz do problema e tentando ao final, via um dos métodos estudados no capítulo 2, resolvê-lo ao menos em parte. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e sugestões para trabalho no futuro.

RENORMALIZAÇÃO PERTURBATIVA

1.1 Por que renormalizar?

O objeto principal na caracterização de uma dada teoria de campo é o seu Lagrangeano, que é entendido como uma função dos campos e suas derivadas, possuindo todas as simetrias do sistema e, através de um princípio variacional, gerando equações que dão a dinâmica do sistema. Na quantização o Lagrangeano desempenha papel igualmente central. Na formulação de integrais funcionais, por exemplo, definimos a ação

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^4x, \quad (1.1)$$

e o funcional gerador

$$Z\{J_1, \dots, J_n\} = \int D\phi_1 \dots D\phi_n \exp\{i[S[\phi_1, \dots, \phi_n] + \sum_i \int J_i \phi_i d^4x]\} \quad (1.2)$$

As derivadas funcionais de Z em relação a J_i nos dão as funções de Green da teoria, $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, as quais, através das fórmulas de redução [1], fornecem os elementos de matriz S , que são os objetos fundamentais na construção de quantidades fí-

sicas, em termos quânticos.

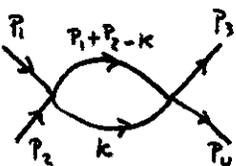
O procedimento todo é coerente, mas de pouco uso, dado que não sabemos como calcular exatamente (1.2) no caso geral. Indicaremos os casos em que conhecemos $Z\{J_i\}$ dizendo que, nesses casos, o Lagrangeano é \mathcal{L}_0 e indicando Z por Z_0 .

Suponhamos agora que o Lagrangeano seja $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, tal que a adição de \mathcal{L}_{int} a \mathcal{L}_0 torna a solução do problema desconhecida. Substituindo em (1.2):

$$\begin{aligned} Z\{J_i\} &= \int D\phi_1 \dots D\phi_n \exp \{i \int [\mathcal{L}_0[\phi_i] + \mathcal{L}_{int}[\phi_i] + \sum J_i \phi_i] d^4x\} \\ &= \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{i\delta J_i} \right] d^4x \right] \int D\phi_1 \dots D\phi_n \exp \{i \int [\mathcal{L}_0 + \sum J_i \phi_i] d^4x\} \\ &= \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{i\delta J_i} \right] d^4x \right] Z_0\{J_i\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

No caso de $\mathcal{L}_{int} = g f(\phi_i)$, vemos que (1.3) é, na verdade, uma série de potências em g (a constante de acoplamento da interação). Esta série de potências é a expansão perturbativa de $Z\{J_i\}$ e gerará expansões perturbativas para as funções de Green e matriz S . Os termos nessa expressão perturbativa são usualmente representados por gráficos que, através de um conjunto de regras bem estabelecidas, estão em correspondência um a um.

Mas, ao tentarmos ser mais práticos, calculando explicitamente as integrais que advêm de (1.3) deparamo-nos com problemas adicionais. Tomemos, por exemplo, o diagrama abaixo, que corresponde a um termo de 2ª ordem (g^2) em uma teoria de campo escalar com interação $\frac{g\phi^4}{4!}$.



$$\equiv \frac{g^2}{2} \prod_{j=1}^4 \frac{i \delta(p_j - m^2)}{(p_j^2 - m^2)} x$$

$$x \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - K)^2 - m^2]} \quad (1.4)$$

A integral acima tem um comportamento do tipo $\frac{dk}{k}$ para $K \rightarrow \infty$ e, portanto, é logaritmicamente divergente. Analogamente, podem existir integrandos que se comportem como kdk , k^2dk, \dots, k^ndk para outros gráficos, correspondendo a outras ordens em teoria de perturbações. A origem do problema é bem conhecida e, já nos primeiros trabalhos em teoria de campos [2], foi diagnosticada passando pela própria definição de campo quântico, que aqui foi tomado como um operador local. Voltaremos a esse ponto ao final da seção 1.2.

A fim de remover, de forma coerente, as singularidades, foi desenvolvido o processo de renormalização, que, em síntese, consiste em redefinir as constantes da teoria de modo que, nessa redefinição, sejam absorvidas as partes divergentes de todos os gráficos. Logo, vemos que, nas teorias onde isso é possível, massas e constantes de acoplamento que aparecem no Lagrangeano não têm um significado bem definido, sendo variáveis de acordo com as conveniências da renormalização. Pode ocorrer que divergências de tipo diferente vão aparecendo até o infinito, de modo que nenhum conjunto finito de redefinições dá conta delas. Às teorias nas quais isto não ocorre, chamamos renormalizáveis.

1.2 Regularização e ambiguidades

De modo a verificar a natureza dos infinitos na teoria e subtraí-los coerentemente, devemos antes, de alguma forma, "dar sentido" às integrais divergentes. Para isso calculâmo-las com restrições adicionais que as tornam finitas e dependentes da restrição e então subtraímos as partes responsáveis pela divergência. O processo de "dar sentido" a tais integrais é chamado de regularização. Para exemplificar, tomemos (1.4) e definamos o gráfico como a integral à direita, só que calculada com um corte nos momentos superiores

$$\text{Diagrama} \equiv \frac{g^2}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - K)^2 - m^2]} = f(\Lambda) \quad (1.5)$$

A integral original é recuperada fazendo-se $\Lambda \rightarrow \infty$. Agora a função $f(\Lambda)$ pode ser vista como:

$$f(\Lambda) = f_{\text{fin}}(\Lambda) + f_{\text{inf}}(\Lambda) \quad (1.6)$$

A parte $f_{\text{inf}}(\Lambda)$ é a que diverge quando $\Lambda \rightarrow \infty$, enquanto que $f_{\text{fin}}(\Lambda)$ permanece finita. Poderíamos regularizar a integral de várias outras maneiras. Em teorias de gauge é especialmente usada a regularização dimensional [3] com a qual:

$$\text{Diagrama} \equiv \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{1}{(K^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - K)^2 - m^2]} \quad (1.7)$$

Aqui a integral é calculada numa dimensão d , inteira, qualquer. Como resultado obtemos, (vide apêndice C)

$$\bigcirc \doteq g(d) = g_{\text{fin}}(d) + g_{\text{inf}}(d) \quad (1.8)$$

Novamente, graças ao processo de regularização, podemos separar a parte divergente da integral no limite $d \rightarrow 4$. Todavia, como sabemos calcular a integral apenas para d inteiro, não podemos dar sentido à afirmação " $d \rightarrow 4$ " se não continuarmos $g(d)$ analiticamente para valores de d arbitrários, inclusive complexos, de modo a defini-la para todo d . Se fizermos $d = 4 + \varepsilon$, então

$$g(d) = g(\varepsilon) = g_{\text{fin}}(\varepsilon) + g_{\text{inf}}(\varepsilon) \quad (1.9)$$

e a parte infinita corresponderá aos polos da função em ε .

Uma nova questão deve agora nos ocupar: obviamente as partes finitas $f_{\text{fin}}(\Lambda)$ e $g_{\text{fin}}(\varepsilon)$ não coincidem obrigatoriamente no limite $\Lambda \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. Isso nos mostra que o procedimento de subtração de divergências nos deixa ao final um resultado ambíguo. Qual a fonte dessa ambigüidade? Conforme já dissemos na seção 1.1, uma teoria de campos construída de maneira estritamente coerente desde o início deve ter o conceito de localidade modificado. Ao invés de definirmos os campos como operadores locais, devemos defini-los [4] como distribuições com valores em operadores da forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi(f) = \int_{\Omega} \phi(x') f(x') dx' \quad ; \quad x \in \Omega \quad (1.10)$$

Aqui, a única restrição sobre f é que ela seja uma função suficientemente concentrada em torno de x . A teoria não fornece qualquer informação que ajude a fixar f de maneira unívoca. Esta abordagem, dita axiomática, embora seja de grande valor na compreensão da estrutura da teoria pouca ajuda nos oferece nos cálculos concretos. Por isso, escolhemos partir de uma teoria local e divergente, sanando essa divergência com a renormalização e tratando as ambiguidades com o auxílio do grupo de renormalização.

1.3 Parametrização das Ambiguidades

Para simplificar a notação, vamos nos restringir, nesta seção, a uma teoria de campo escalar sem massa e auto - interação quártica, caracterizada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{g}{4!} \phi^4 \quad (1.11)$$

Até agora falamos em subtração sistemática de divergências, mas não mostramos a forma explícita de como isso pode acontecer. Essa subtração é feita adicionando ao Lagrangeano um conjunto de contratermos que são multiplicados por constantes, dependentes do parâmetro de regularização (Λ ou ϵ), escolhidas de forma a gerar termos nas funções de Green que cancelem as divergências. Obtemos, assim:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_C = \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{g}{4!} \phi^4 - \frac{1}{2} C_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + C_g \frac{g}{4!} \phi^4 \\
 &= \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - Z_g \frac{g}{4!} \phi^4 \quad , \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

com $Z_i = 1 - C_i$ e $Z_i = Z_i(\epsilon)$ (ou $Z_i(\Lambda)$).

Definimos todos os gráficos gerados perturbativamente como dependentes de ϵ ou Λ . Dessa forma, \mathcal{L}' produz funções de Green finitas. Notemos que, enquanto a parte infinita dos Z 's é fixada univocamente, podemos tomar qualquer número finito para a parte finita, o que nos deixa Z livre. Precisamos, pois, de algum modo, fixá-lo. Mas, antes, notemos que pela transformação

$$\phi_B = Z_\phi^{-\frac{1}{2}} \phi \quad , \quad g_B = Z_\phi^{-2} Z_g g, \tag{1.13}$$

voltamos a

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_B \partial^\mu \phi_B - \frac{g_B}{4!} \phi_B^4 \quad , \tag{1.14}$$

que gera quantidades divergentes.

A relação entre as funções de Green originais (geradas por \mathcal{L}') e as geradas por (1.14) é:

$$G^{(n)}(q_i, g, \mu) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} G_B^{(n)}(q_i, g_B, \Lambda) \tag{1.15}$$

ou

$$\Gamma^{(n)}(q_i, g, \mu) = Z_\phi^{\frac{n}{2}} \Gamma_B^{(n)}(q_i, g_B, \Lambda), \text{ onde } n \text{ é o nº de pernas} \quad (1.16)$$

extenas.

Entendamos em (1.15/16) o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Os Γ 's são chamados funções de Green irredutíveis a 1 partícula (1PI) e são essencialmente os $G^{(n)}$'s conexos sem as pernas externas (para mais detalhes veja [1]).

O leitor mais atento perceberá a infiltração de um parâmetro novo, μ no lado esquerdo de (1.15/16). De onde veio? Como já assinalamos, é necessário fixar os Z 's e isso é feito através de condições de contorno sobre as amplitudes renormalizadas. Na teoria particular que estudamos, isso pode ser feito por [7]:

$$\Gamma_R^{(2)}(\mu^2) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dp^2} \Gamma_R^{(2)}(\mu^2) = 1 \quad ; \quad \Gamma_R^{(4)}|_{S_m} = g_R \quad (1.17)$$

onde S_m é o ponto simétrico

$$S_m = p_i^0 \quad \text{tal que} \quad p_i^0 p_j^0 = -\mu^2 (\delta_{ij} - \frac{1}{4}) \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (1.18)$$

As escolhas são "naturais" no sentido de pedir que em algum ponto do espaço de momenta as funções renormalizadas assumam o mesmo valor que na teoria livre no mass-shell.

As condições (1.17) fixam completamente os Z 's. Entretanto, não podemos nos esquecer que apesar de "naturais" as condições são arbitrárias. Com isso queremos dizer que poderíamos ter feito, por exemplo $\Gamma_R^{(2)}(\mu'^2) = p^2 - \mu'^2$, etc. e teríamos fixado os Z 's da mesma forma. Vemos então que não nos livramos da am

biguidade, mas apenas conseguimos parametrizá-la.

Notemos também que as amplitudes renormalizadas dependem de μ através de Z_ϕ , que por sua vez deve ser adimensional. Como μ tem dimensão de massa, vemos que Z_ϕ só pode depender de μ através de sua razão com algum outro parâmetro dimensional, ou então através de g_R , que agora tornou-se função implícita de μ [7]. Se a regularização é feita por cut-off, então $Z_\phi = Z_\phi(\frac{\mu}{\Lambda}, g(\mu))$. E no caso da regularização dimensional?

Se alteramos a dimensão para d , vemos que $[E] = m^d$ para que a ação continue adimensional. Fazendo $d = 4 + \varepsilon$ obtemos, para o caso $\frac{g\phi^4}{4!}$:

$$[\phi] = m^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}; \quad [g] = m^{-\varepsilon} \quad (1.19)$$

De modo que as amplitudes 1PI não tenham dimensão fracionária é desejável que a constante de acoplamento seja adimensional. Isso nos leva a definir

$$\alpha^2 \equiv (gv^\varepsilon)^2 \quad (1.20)$$

com $[v] = m$. Obtemos, assim, um parâmetro massivo na regularização dimensional com o qual, usando as condições (1.17) podemos escrever:

$$Z(\mu) = Z(\mu, g(\mu)) = Z\left(\frac{\mu}{v}, \alpha\right) \quad (1.21)$$

1.4 O Grupo de Renormalização

Iniciemos fixando um conceito importante: o de esquema ou prescrição de renormalização. Por isto entendamos cada definição diferente da parte finita de uma dada teoria. Claramente, existem então infinitos esquemas de renormalização, correspondendo aos infinitos modos de fixar a parte finita. Apenas uma das possibilidades de parametrização desses esquemas foi descrita na seção anterior. Outras possibilidades existem e, não obrigatoriamente, o parâmetro massivo introduzido possui a mesma interpretação que em (1.17). Como exemplo, podemos citar os três esquemas mais usados: o de subtração no espaço de momenta (MOM), o de subtração mínima (MS) e o de subtração mínima modificada (\overline{MS}). MOM impõe a subtração das amplitudes não renormalizadas, do seu valor calculado num ponto euclidiano μ^2 adequado (geralmente da ordem de grandeza da energia do processo em estudo). MS, que vem sempre precedido de regularização dimensional, requer a subtração apenas dos polos em ϵ das funções de Green; \overline{MS} é o mesmo que MS, só que subtrai ainda a constante $\ln 4\pi - \gamma_\epsilon$, onde γ_ϵ é a constante de Euler $0,577215\dots$. Nos dois últimos esquemas, o parâmetro usado na caracterização da ambiguidade é ν , introduzido em (1.20). As funções de vértice dependerão de ν no cálculo final, e um valor dele deverá pois ser fornecido, para cálculos práticos. Como se pode ver, o parâmetro massivo aqui não tem nada a ver com o seu similar introduzido em MOM, ou no método descrito anteriormente. Notemos também que, nem MS nem \overline{MS} , nem MOM, nem qualquer outro método até agora descrito por nós dá qualquer indicação intrínseca de como escolher o valor exato de μ . Por esse motivo, certos autores [12] preferem reservar o nome esquema de renormalização para a especificação completa da parte finita

das amplitudes, incluindo o valor de μ , dando o nome de convenção de renormalização aos métodos descritos até aqui. Voltaremos a esse ponto no capítulo II quando investigarmos a parametrização completa de um esquema de renormalização.

Estabelecidos estes fatos preliminares, passemos a analisar como se comportam os objetos de nosso interesse — amplitudes 1PI — por mudanças de parametrização (μ ou ν). Para sermos mais genéricos, indicaremos por $Z(R)$ o valor de Z calculado em um esquema particular R (caracterizado por uma convenção de renormalização e um valor particular de μ ou ν). Assim, seja Γ_R calculada como:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, g_R) = Z(R)^{\frac{n}{2}} \Gamma_O^{(n)}(p_i, g_O) \quad (1.22)$$

Se utilizássemos um esquema R' obteríamos:

$$\Gamma_{R'}^{(n)}(p_i, g_{R'}) = Z(R')^{\frac{n}{2}} \Gamma_O^{(n)}(p_i, g_O) \quad (1.23)$$

Daí

$$\Gamma_{R'}^{(n)}(p_i, g_{R'}) = Z(R', R)^{\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_R) \quad (1.24)$$

com

$$Z(R', R) = \frac{Z(R')}{Z(R)} \quad (1.25)$$

Consideremos o conjunto dos $Z(R_i, R_j)$. Para cada elemento existe um inverso

$$Z^{-1}(R', R) = Z(R, R') , \quad (1.26)$$

e existe também a identidade

$$Z(R, R) = 1 \quad (1.27)$$

Além disso, existe uma propriedade de semigrupo:

$$Z(R, R') Z(R', R'') = Z(R, R'') , \quad (1.28)$$

que é válida para elementos "adjacentes". Com esses elementos dizemos que o conjunto dos Z's tem uma estrutura grupóide [5]. Um subconjunto dessas transformações, ligado a transformações de escala, forma um grupo, embora o nome "grupo de renormalização" seja usado para designar conjuntos genéricos de transformações do tipo (1.25).

Prosseguindo nosso estudo, vejamos como os objetos fundamentais da teoria, os Γ 's, se comportam sob transformações infinitesimais de esquema. Para isso analisaremos a derivada

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \mu, g_R^{(\mu)}) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_R} \right) \Gamma_R^{(n)} \quad (1.29)$$

Tomando a definição de $\Gamma_R^{(n)} = Z^{\frac{n}{2}} \Gamma_O^{(n)}$, notamos que $\Gamma_O^{(n)}$ é obviamente independente de μ (a relação entre Γ_R e Γ_O é válida para uma teoria de campo escalar, mas o caso geral é facilmente analisável). Então

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} z^{\frac{n}{2}} \Gamma_0 &= \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2}-1} \mu \frac{dz}{d\mu} \Gamma_0^{(n)} = \\ &= \frac{n}{2} \Gamma_R^{(n)} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z = n\gamma \Gamma_R^{(n)} \end{aligned} \quad (1.30)$$

E:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} - n\gamma(g) \right] \Gamma_R^{(n)} = 0 \quad (1.31)$$

Com

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \quad ; \quad \gamma(g_R) = \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z \quad (1.32)$$

(As derivadas são tomadas com o parâmetro de regularização fixo)

Até o final da seção analisaremos o significado das duas funções acima definidas. Começemos analisando o comportamento de $\Gamma^{(n)}$ por transformações de escala: se d_Γ é a dimensão de Γ , então:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, g(\mu), \mu) = \mu^{d_\Gamma} \not\propto \left(\frac{p_i}{\mu}, g(\mu) \right) \quad (1.33)$$

onde $\not\propto$ é adimensional. Sob um reescalonamento dos momenta, $p_i' = \lambda p_i$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(n)}(\lambda p_i, g(\mu), \mu) &= \mu^{d_\Gamma} \not\propto \left(\lambda \frac{p_i}{\mu}, g(\mu) \right) = \\ &= \lambda^{d_\Gamma} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{d_\Gamma} \not\propto \left(\frac{p_i}{\frac{\mu}{\lambda}}, g(\mu) \right) = \end{aligned}$$

$$= \lambda \Gamma_{\Gamma_R}^{(n)}(p_i, g(\mu), \frac{\mu}{\lambda}) \quad (1.34)$$

Fixemos agora um esquema de base, digamos μ_0 , e traduzamos as diferentes renormalizações como mudanças em relação a esse esquema de base, ou seja, mudanças de μ tais como [6]:

$$\mu_0 \rightarrow \bar{\mu}(t) = e^t \mu_0 \quad ; \quad g_0 \rightarrow \bar{g}(t) \quad (1.35)$$

Então podemos escrever (1.31) como:

$$[\bar{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}(t)} + \beta(\bar{g}(t)) \frac{\partial}{\partial \bar{g}(t)} - n\gamma(\bar{g}(t))] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{g}(t), \bar{\mu}(t)) = 0 \quad (1.36)$$

É fácil ver então que:

$$\bar{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}(t)} = \frac{d\bar{\mu}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}(t)} \quad (1.37)$$

$$\beta(\bar{g}(t)) = \frac{d\bar{g}(t)}{dt} \quad (1.38)$$

De modo que:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g(t), \bar{\mu}(t)) = n\gamma(\bar{g}(t)) \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{g}(t), \bar{\mu}(t)) \quad (1.39)$$

O que nos dá:

$$\Gamma_R^{(n)}(t) = \Gamma_R^{(n)}(0) \exp \left\{ n \int_0^t \gamma[g(t')] dt' \right\} \quad (1.40)$$

ou

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, g(t), \mu_0 e^t) = \exp\left\{n \int_0^t \gamma(t') dt'\right\} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_0, \mu_0) \quad (1.41)$$

ou ainda:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, g(t), \mu_0) = \exp\left\{n \int_0^t \gamma[g(t')] dt'\right\} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_0, \mu_0 e^{-t}) \quad (1.42)$$

Fazendo $\lambda = e^t$ em (1.34) obtemos

$$\Gamma_R^{(n)}(e^t p_i, g_0, \mu_0) = e^{\{d_\Gamma t - n \int_0^t \gamma[g(t')] dt'\}} \cdot \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{g}(t), \mu_0) \quad (1.43)$$

Esta equação nos diz [7] que escalar os momenta em e^t é idêntico a reescalar os campos em $\exp\left\{t + \int_0^t \gamma[g(t')] dt'\right\}$ ($d_\Gamma = 4-n$) e usar $\bar{g}(t)$ ao invés de g_0 . Por causa do reescalamento anômalo dos campos, $\gamma(g)$ é chamada de dimensão anômala.

A equação (1.43) também mostra o papel de $\bar{g}(t)$, como uma "constante de acoplamento efetiva", variando de acordo com a escala de energia do processo em questão. Estudemos um pouco esse fato agora. Podemos integrar a equação da função β , obtendo uma solução implícita para $\bar{g}(t)$:

$$\int_g^{\bar{g}(t)} \frac{dx}{\beta(x)} = t \quad (1.44)$$

Essa equação nos diz que a integral deve divergir em $t \rightarrow \pm \infty$. Por ser esse o caso de interesse [7] suporemos que e-

la divirja nos zeros de β (se existirem). Então, por (1.44), quando $t \rightarrow \pm \infty$ $g(t)$ se aproxima de um desses zeros, g_i^* (os quais chamaremos de pontos fixos). Lembrando o fato de o sinal de β determinar se g é uma função crescente ou decrescente de t , vemos do exemplo dado na figura 1 que, se $g(t)$ está localizado entre 0 e g_1^* , um crescimento de t forçará $g \rightarrow 0$ e uma diminuição fará $g \rightarrow g_1^*$. O processo se inverte na região II, pois β muda de sinal e então $g \rightarrow g_2^*$, se $t \rightarrow \infty$ e $g \rightarrow g_1^*$ se $t \rightarrow -\infty$.

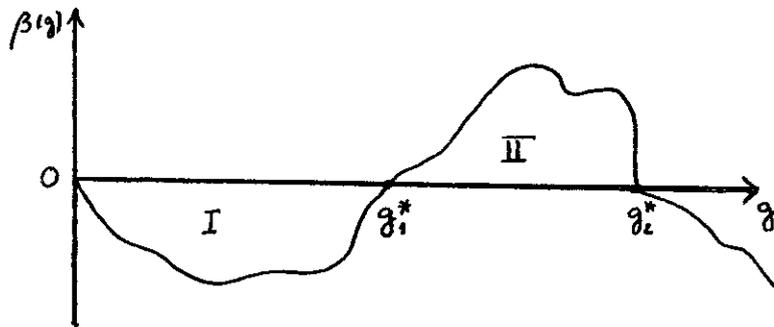


fig. 1. Comportamento hipotético de uma função $\beta(g)$ e sua estrutura de pontos fixos.

Teorias onde $g \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ são ditas dotadas de liberdade assintótica. Ao contrário, se $g \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, são chamadas "livres no infra-vermelho". Foi provado que, em 4 dimensões, apenas teorias de gauge não-abelianas são assintoticamente livres [8, 9, 10].

Para finalizar a seção, uma breve palavra sobre teorias com massa. Se tratarmos as massas no mesmo nível que constantes de acoplamento ou parâmetros de gauge, encontraremos uma equação de grupo de renormalização do tipo:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma^{(n)}(g, m, \mu) = 0 \quad (1.45)$$

levando a uma "massa efetiva" [4]:

$$\bar{m}(t) = m \exp \left\{ \int_g^{g(t)} dt' \gamma_m[g(t')] \right\} \quad (1.46)$$

e a uma amplitude

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, m, \mu) = \exp \left\{ d_\Gamma t - n \int_0^t \gamma(\bar{g}(t')) dt' \right\} \cdot \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}(t), e^{-t} \bar{m}(t), \mu) \quad (1.47)$$

Em que condições podemos tomar no lado direito de (1.47) $e^{-t} \bar{m}(t) \sim 0$ (desprezar as massas para altas energias)? De (1.46) vemos:

$$e^{-t} \bar{m}(t) \rightarrow m \exp \{ -t + t \gamma_m(g^*) \} \quad (1.48)$$

(aqui g^* é um ponto fixo de β). Vemos então que podemos desprezar as massas, numa dada teoria, apenas se $\gamma_m(g^*) < 1$. Conforme verificaremos na próxima seção, este é o caso da CDQ.

1.5 Cromodinâmica Quântica

Examinemos ligeiramente os fatos que nos levam a optar pela CDQ. Conforme já foi dito na seção anterior, apenas teorias de gauge não-abelianas (ou seja, modelos cujos Lagrangeanos gozem de uma simetria local sob um grupo não-abeliano) possuem li-

berdade assintótica. Pelo exposto na introdução, é desejável que uma teoria das interações fortes goze dessa propriedade, pois o bem-sucedido modelo de partons, anterior à CDQ, parece indicar a veracidade da hipótese de os nucleons serem constituídos de objetos pontuais e livres (e de spin 1/2). A escolha de SU(3) como grupo de gauge e a introdução da propriedade de cor estão ligadas à aniquilação e $e^+e^- \rightarrow$ hadrons e a detalhes da ligação dos quarks nos mesons e barions [7]. Com essas considerações em mente, introduziu-se [9] o modelo:

$$E_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{q}_i^\alpha \not{D}_{ij}^\mu q_j^\alpha - m_\alpha \bar{q}_i^\alpha q_i^\alpha \quad (1.49)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

$$D_{ij}^\mu = \partial^\mu \delta_{ij} - ig A^{\mu a} T_{ij}^a,$$

$$T_{ij}^a = \frac{1}{2} \lambda_{ij}^a$$

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc} \lambda^c \quad (1.50)$$

Os λ 's são os geradores de SU(3) na sua representação fundamental e os f 's são as constantes de estrutura do grupo. Os índices i, j variam de 1 a 3, com $q_1^\alpha =$ vermelho, $q_2^\alpha =$ azul e $q_3^\alpha =$ verde. Os índices a, b e c variam de 1 a 8.

O índice α refere-se ao sabor e está relacionado aos graus de liberdade dos hadrons existentes [5] como spin isotópico, estranheza, charme, etc.

Neste trabalho lidaremos com 4 sabores: $q^1 = u(\text{up})$, $q^2 =$

= d (down), $q^3 = s$ (strange), $q^4 = c$ (charm). As funções de vértice obtidas a partir de (1.49) serão denotadas por $\Gamma_{n_B, n_F}(p_i)$, onde n_B é o número de linhas bosônicas e n_F o de linhas fermiônicas. Elas se renormalizam como:

$$\Gamma_{n_B, n_F}^R = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [Z_B(\Lambda)]^{n_B} [Z_F(\Lambda)]^{n_F} \Gamma_{n_B, n_F}^O \quad (1.51)$$

A função da CDQ é dada por [5]:

$$\beta(\bar{g}) = \frac{d\bar{g}(t)}{dt} = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} - \dots \quad (1.52)$$

com $\beta_0 = \frac{33 - 2N_f}{3}$, $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3} N_f$ (N_f é o número de sabores), etc. Vemos que, se g for pequeno, o sinal de β dependerá essencialmente do sinal de β_0 . Portanto para $N_f < 17$ ($\beta_0 > 0$, $\beta < 0$) a propriedade de liberdade assintótica continua garantida.

Podemos escrever (1.52) mais compactamente se definirmos $\bar{a}(t) = \bar{g}^2(t)/\pi 4\pi^2$ em termos do qual:

$$\beta(\bar{a}) = \frac{d\bar{a}(t)}{dt} = -ba^2(1 + ca + \dots) \quad (1.53)$$

com $b = \frac{\beta_0}{2}$, $c = \frac{\beta_1}{4\beta_0}$, etc.

Está claro de (1.48) que as massas também podem ser desprezadas quando $t \rightarrow \infty$ pois $g(t) \rightarrow 0$ e $\gamma[g(t)] \rightarrow \gamma[0] = 0$.

OBSERVÁVEIS FÍSICOS E RENORMALIZAÇÃO

2.1 Invariância dos observáveis

É uma afirmativa quase trivial a de que todo observável físico tem que ser invariante perante mudanças de esquema de renormalização. Todavia, o significado prático da mesma não parece estar claro em muitos dos principais artigos que se dedicam a calcular quantidades físicas a partir de predições da CDQ.

De modo a usar as análises já existentes na clarificação do problema, começamos essa seção com a prova de Gross [13] da invariância de quantidades físicas perante transformações de escala.

Teorema: Todo parâmetro físico, $P(g, m, \mu)$ satisfaz a equação homogênea do grupo de renormalização

$$DP(g, m, \mu) \equiv \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] P(g, m, \mu) = 0 \quad (2.1)$$

(por parâmetros físicos entenderemos aqui uma massa - posição de um polo num propagador - ou um elemento de matriz S).

Demonstração: Consideremos o propagador escalar $D^{(2)}(p^2, g, m, \mu)$, que satisfaz

$$(D+2\gamma)D^{(2)}(p^2, g, m, \mu) = 0 \quad (2.2)$$

Suponhamos que $D^{(2)}$ tenha um polo em $p^2 = m_f^2$, e escrevamos uma série de Laurent para o mesmo

$$D^{(2)}(p^2, g, m, \mu) = \frac{R^2(g, m, \mu)}{p^2 - m_f^2} + \tilde{D}^{(2)}(p^2, g, m, \mu) \quad (2.3)$$

(isso pode ser feito com o auxílio da representação de Källén-Lehmann-Dyson [14] para o propagador, contanto que exista uma forma de se definir operadores (e estados) assintóticos ϕ^{in} , ϕ^{out} relacionados com o operador em presença de interação ϕ , através de $\phi(x) \xrightarrow{x_0 \rightarrow \pm\infty} R \phi_{in}^{out}(x)$).

Substituindo em (2.2) obtemos

$$\frac{2m_f R^2 D(m_f)}{[p^2 - m_f^2]^2} + \frac{2R(D+\gamma)R}{p^2 - m_f^2} + D[\tilde{D}^{(2)}(p^2, g, m, \mu)] = 0 \quad (2.4)$$

Igualando a zero os polos diferentes em (2.4),

$$D(m_f) = 0, \quad (2.5)$$

$$(D + \gamma)R = 0, \quad (2.6)$$

(aqui R é o resíduo no polo do propagador e, portanto, depende de g, m e μ).

Consideremos agora um elemento de matriz S de n partículas esca

lares. Este pode ser obtido do $\Gamma^{(n)}$, multiplicando-o por R^n e tomando o seu valor na camada de massa $p_i^2 = m_f^2$ [1]. A lei de transformação dos $\Gamma^{(n)}$ é:

$$(D - n\gamma) \Gamma^{(n)}(p_i, g, m, \mu) = 0 \quad (2.7)$$

Então:

$$\begin{aligned} D(S) &\equiv D[\lim_{p_i^2 = m_f^2} R^n \Gamma^{(n)}] = \\ &= \lim_{p_i^2 = m_f^2} [D(R^n) \Gamma^{(n)} + R^n D(\Gamma^{(n)})] = \\ &= \lim_{p_i^2 = m_f^2} [-n\gamma R^n \Gamma^{(n)} + n\gamma R^n \Gamma^{(n)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Isto completa a prova de que as massas físicas e elementos de matriz S são invariantes sob o grupo de renormalização (aqui restrito a transformações de escala). Notemos que a prova é válida para quantidades exatas (quando aplicada à CDQ, no entanto esta demonstração apresenta problemas: nesta teoria, devido ao fenômeno do confinamento, não se conseguiu, até então, definir o que sejam estados assintóticos para os quarks e os gluons. Sendo assim, como achar uma representação KLD para o propagador? Conforme vimos, esse fato foi crucial na dedução (2.8). Em nossa opinião, a análise deste ponto deve prosseguir através do estudo da construção da matriz S para o caso de estados ligados, dado que as manifestações disponíveis da CDQ são os hadrons e não os quarks).

Vejamos, no entanto, o que acontece quando, ao invés de aplicarmos o operador D à quantidade exata, aplicá-mo-lo à sua expressão perturbativa truncada numa dada ordem. Analisemos uma

quantidade R cuja expressão em teoria de perturbações (TP) é:

$$R = a^N (r_0 + r_1 a + r_2 a^2 + \dots) \quad (2.9)$$

onde $a = g^2/4\pi^2$. A aproximação de R em ordem n (dita "aproximante") $R^{(n)}$ é definida por

$$R^{(n)} = a_{(n)}^N (r_0 + r_1 a_{(n)} + \dots + r_{n-1} a_{(n)}^{n-1}) \quad (2.10)$$

(aqui $a_{(n)}$ é solução de $\mu \frac{\partial a_{(n)}}{\partial \mu} = \beta^{(n)}(a_{(n)})$ com $\beta^{(n)}$ sendo a função β truncada em n-ésima ordem na sua expressão perturbativa). Apliquemos D a (2.9). Obtemos assim:

$$D(R) = D \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a^{N+i} r_i \right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (N+i) a^{N+i-1} r_i D(a) + a^{N+i} D(r_i) \quad (2.11)$$

Lembrando que $D(a) = \beta(a) = -b a^2 (1 + ca + \dots)$ (nesta notação

$b = \frac{\beta_0}{2}$; $c = \frac{\beta_1}{4\beta_0}$ etc) obtemos:

$$D(R) = \sum_{i,k=0}^{\infty} - (N+i) a^{N+i+k+1} \beta'_k r_i + a^{N+i} D(r_i) \quad (2.12)$$

com $\beta'_0 = b$, $\beta'_1 = c$, etc.

Igualando (2.12) a zero, obtemos:

$$D(r_0) = 0 \quad (2.13)$$

$$D(r_1) = r_0 N \beta'_0 \quad (2.14)$$

$$D(r_2) = (N + 1) \beta'_0 r_1 + N\beta'_1 r_0 \quad (2.15)$$

etc.

A equação (2.13) nos diz apenas que o resultado na ordem mais baixa coincide em todos os esquemas (manifestação do fato de resultados em nível de "árvore" não necessitarem de renormalização). A equação (2.14) e as demais nos dizem que r_1, r_2, \dots dependem do esquema de renormalização. A dependência é tal que R ao final é independente de parametrizações. Vejamos como isso ocorre, tomando o aproximante $R^{(2)}$ e aplicando

$$D(R^{(2)}) = D\{a^N(r_0 + r_1 a)\} = Na^{N-1}D(a)(r_0 + r_1 a) + a^N(D(r_1)a + r_1 D(a)) \quad (2.16)$$

Substituindo $D(r_1) = r_0 Nb$ e $D(a) = -ba^2(1 + ca)$,

obtemos:

$$\begin{aligned} D(R^{(2)}) &= -Na^{N-1}(ba^2 + bca^3)(r_0 + r_1 a) + a^N(r_0 Nba - r_1(ba^2 + bca^3)) \\ &= -Nba^{N+1}r_0 - Nbca^{N+2}r_0 - Nbr_1a^{N+2} - Nbc r_1 a^{N+3} + \\ &+ Nba^{N+1}r_0 - r_1 ba^{N+2} - r_1 bca^{N+3} = 0(a^{N+2}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Observamos, então, que r_1 se transforma "contravariante" a \underline{a} , de modo a tornar a variação de $R^{(2)}$ de ordem superior à da aproximação feita. No entanto, (2.16) informa que, apesar disso, $R^{(2)}$ calculado em dois esquemas diferentes nos dá resultados diferentes.

Desde que dispomos efetivamente de $R^{(2)}$ (e no máximo,

$R^{(3)}$, atualmente para fornecer previsões teóricas, temos que desenvolver métodos coerentes de fazer isto, sem o que a teoria se torna inútil. Esse desenvolvimento será mostrado nas seções seguintes.

2.2 Parametrização total de um esquema de renormalização

Vimos que, com o processo de renormalização, é introduzida uma ambiguidade no corpo da teoria a qual, não deve afetar o cálculo de quantidades físicas exatas. Fizemos uso, também, do fato de podermos parametrizá-la para tirar diversas conclusões importantes no capítulo e na seção anteriores. Contudo, nossa parametrização não foi completa. Para ver isso claramente basta notar que o valor de μ apenas deve ser fornecido após uma escolha do que Duke e Roberts chamaram de convenção de renormalização [12]. Todos os esquemas, dentro de uma mesma convenção, possuem a mesma função β . Mas a escolha da convenção permanece arbitrária e esta ainda não está adequadamente parametrizada (por enquanto, por exemplo, não podemos dizer que \overline{MS} corresponde a um valor x do parâmetro, \overline{MS} a um valor y , etc.) É nosso objetivo, nessa seção, mostrar como isso pode ser feito.

Já nos primeiros trabalhos de Stueckelberg e Peterman [16] sobre o grupo de renormalização, notou-se que a ambiguidade toda não poderia ser fixada com apenas um parâmetro, senão por um infinito contável de parâmetros. Entretanto, apenas nesta década formulou-se um procedimento simples para essa parametrização [15], que lançou a base para o estudo sistemático do total

do grupo de renormalização (e não apenas as transformações de escala, até aqui consideradas).

Para começar, observemos que a constante de acoplamento a em um dado esquema se relaciona com a' em outro esquema via:

$$a' = a(1 + v_1 a + v_2 a^2 + \dots), \quad (2.18)$$

(restringir-nos-emos aqui a teorias sem massa, embora uma extensão para teorias com massa, numa grande variedade de casos, seja possível [17]).

Olhando para (2.18), somos levados naturalmente a, caracterizando um esquema pelo seu particular valor de a, parametrizá-lo pelos números v_1, v_2, \dots . O problema é que este procedimento privilegia um esquema de base, o qual não está adequadamente parametrizado (o "esquema a" não corresponde, obviamente, a $v_1, v_2, \dots = 0$).

Stevenson [15], entretanto, notou que a especificação de cada v_i era como a fixação de um "grau de liberdade" a mais na escolha do esquema, com o fato de $\frac{\partial a}{\partial v_i} = O(a^{i+1})$ sugerindo que na parametrização adequada os parâmetros deveriam, portanto, estar ordenados segundo uma "hierarquia" estabelecida pela ordem de grandeza da variação de a com eles. Usando essas hipóteses, escolheu $\tau \equiv b \lambda_n \frac{\mu}{\Lambda}$ (veja apêndice A para uma discussão sobre $\tilde{\Lambda}$) ao invés de μ como 1º parâmetro e supôs que as leis de variação de a com os demais (chamados " p_i ") fossem da forma:

$$\frac{\partial a}{\partial p_i} = N_i a^{i+1} (1 + W_1^i a + W_2^i a^2 + \dots) \equiv \beta_i(a) \quad (2.19)$$

onde $\gamma_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dc_i} \ln Z_\phi$. Se a quantidade for um observável, as dimensões anômalas desaparecem e as equações (2.22) tornam-se homogêneas. O teorema de Gross pode facilmente ser generalizado para esse caso, assim como também é simples obter a lei de transformação dos coeficientes da expansão perturbativa de um observável frente a mudanças de c_i . Um exemplo prático é dado em [12] onde se discutem os valores de um observável truncado em 2ª ordem em vários esquemas e se mostra que o problema de escolha de convenção e o de mudança de escala são redutíveis um ao outro nessa ordem reforçando assim o fato de apenas um parâmetro caracterizar a ambiguidade em ordem $N+2$.

2.3 Procedimentos de otimização

Chamaremos de "procedimentos de otimização" a todos os métodos que nos permitam escolher o esquema mais favorável em cada caso específico. Como veremos, não é possível a escolha de um esquema universal que melhor se ajuste a todos os cálculos simultaneamente. Nem mesmo entre ordens diferentes em T.P. isso ocorre. O procedimento de escolha de esquema será dirigido, então, no sentido de "otimizar" previsões calculadas em esquemas diversos, aproximando-as mais e mais do resultado exato.

No sentido explicitado acima, existem apenas dois procedimentos básicos desenvolvidos: o método de convergência aparentemente mais rápida (FAC) [18] e o princípio de mínima sensibilidade (PMS). Uma variação de PMS foi desenvolvida por Mignaco e

Roditi [19] e chamada $\overline{\text{PMS}}$. Passemos, então, a descrever esses métodos.

O método de FAC, originalmente desenvolvido por Grumberg, foi uma das primeiras tentativas de abordar o problema, e parte da idéia de que o melhor esquema de renormalização é aquele que faz a série perturbativa convergir mais rapidamente. Neste esquema então, os coeficientes da expansão de R serão todos nulos, restando apenas a 1ª ordem. Por exemplo, seja $R^{(n)}$ um aproximante dado por:

$$R^{(n)} = a^N (1 + r_1 a + \dots + r_{n-1} a^{n-1}) \quad (2.23)$$

(na verdade a é $a_{(n)}$, solução das $n-1$ equações:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -a^2 (1 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_{n-1} a^{n-1}) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial a}{\partial c_{n-1}} = N_{n-1} a^n (1 + W_1^{n-1} a + \dots + W_{n-1}^{n-1} a^{n-1})$$

FAC requer que o valor ótimo de $R^{(n)}$ seja

$$R_{\text{opt}}^{(n)} = \frac{1}{a^N} \quad (2.25)$$

e, portanto,

$$r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = 0 \quad (2.26)$$

Se $\bar{a} = a_0 (1 + v_1 a_0 + \dots + v_{n-1} a_0^{n-1})$ e conhecemos

$R^{(n)}$ calculado no esquema caracterizado por a_0 , então o problema é determinar o conjunto $\{v_i\}$ que leva $a_0 \rightarrow a$. Tomando $n=2$, $N=1$ ($R_0^{(2)} = a_0(1 + r_1^0 a_0)$) vemos que, nesse caso, a escolha

$$v_1 = r_1^0 \tag{2.27}$$

satisfaz trivialmente as condições de FAC. Para encontrar efetivamente \bar{a} , utilizamos os valores dos invariantes (que introduziremos a seguir) para obter τ , c_2 , ... c_{n-1} os quais, substituídos nas equações (2.24) nos dão o valor ótimo de a .

Já nesse primeiro método podemos notar a inconsistência de se procurar um esquema privilegiado para o cálculo de todas as quantidades físicas em todas as ordens. O esquema aqui já varia de observável para observável.

O princípio de mínima sensibilidade (PMS), proposto por Stevenson, parte, em nossa opinião, de um critério mais natural embora já se tenha mostrado [20] que em 2ª ordem FAC e PMS são equivalentes e o serão em todas as ordens se a função β de PMS for convergente). De fato, Stevenson requer [15] mínima sensibilidade do aproximante frente a mudanças de esquema, com o melhor esquema sendo aquele que, em cada ordem, dá um valor estacionário para $R^{(n)}$. Com isso, o valor de $R^{(n)}$ é forçado a "imitar" a propriedade de R de ser invariante pelo grupo de renormalização. Vejamos no caso anterior, com $n = 2$, $N = 1$, como PMS é implementado. Nessa ordem, da nossa discussão anterior, apenas um parâmetro é relevante na especificação da ambiguidade e, portanto, a variação do aproximante em relação ao esquema é descrita por

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = a^2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial \tau} - 1 \right] - a^3 [c + 2r_1(1 + ca)] \tag{2.28}$$

(na obtenção desta equação usamos $\frac{\partial a}{\partial \tau} = -a^2(1+ca)$).

Como vimos, a variação de $R^{(2)}$ deve ser de ordem a^3 , o que força então que (por consistência),

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} - 1 = 0 \quad (2.29)$$

A integração desta equação nos dá:

$$\rho_1 = \tau - r_1 \quad (2.30)$$

Obviamente, $\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} = 0$. No entanto, pode-se mostrar [21] que ρ_1 é invariante em todas as ordens, ou seja $\frac{\partial \rho_1}{\partial c_i} = 0$. Invariantes similares aparecerão em outras ordens do cálculo.

Ao restante da expressão, o critério PMS impõe:

$$c + 2\bar{r}_1(1 + c\bar{a}) = 0 \quad (2.31)$$

Aqui \bar{a} e \bar{r}_1 são a e r_1 calculados no ponto $\bar{\tau}$ onde $\left. \frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} \right|_{\bar{\tau}} = 0$. Definindo $R_{opt}^{(2)} = R^{(2)}(\bar{\tau})$ e eliminando \bar{r}_1 com o auxílio de (2.31), obtemos

$$R_{opt}^{(2)} = \bar{a} \frac{(1 + \frac{1}{2} c\bar{a})}{1 + c\bar{a}} \quad (2.32)$$

Para encontrar o valor de \bar{a} lembramos que τ é implicitamente função de a , através da integração da equação da função β (vide apêndice A). Assim sendo, usamos (2.30) para calcular ρ_1 em um esquema qualquer. Feito isso, usamos novamente (2.30), dessa vez para calcular um valor para r_1 .

$$\bar{r}_1 = \bar{\tau}(\bar{a}) - \rho_1 \quad (2.33)$$

Substituindo \bar{r}_1 em (2.31), obtemos:

$$\bar{\tau}(\bar{a}) + \frac{1}{2} \frac{c}{(1 + c\bar{a})} = \rho_1 \quad (2.34)$$

Daqui tiramos um valor de \bar{a} que, substituído em (2.32) nos dá o valor de $R_{opt}^{(2)}$ (lembramos aqui que o procedimento no caso de FAC seria a) calcular ρ_1 ; b) impor $r_1 = 0$ e tirar um valor de τ e c) usar $\tau(\bar{a}) = \rho_1$ para calcular \bar{a} que nos daria o valor do aproximante).

Uma versão alternativa, mais simples (em ordens superiores) e mais consistente de PMS é \overline{PMS} que difere do método acima descrito por requerer que, ao variarmos o esquema, $R^{(n)}$ varie em ordem a^{N+n+1} . De fato, Mignaco e Roditi notaram que, ao requerer $\frac{\partial R^{(n)}}{\partial (E.R)} = 0$, as equações obtidas em PMS misturavam ordens perturbativas, como se pode ver claramente no exemplo dado (presença de termos de ordem a^3 e a^4). A condição \overline{PMS} pede, para o caso em questão, apenas que o coeficiente de a^3 se anule de modo que $\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = 0(a^4)$, ou seja:

$$2\bar{r}_1 + c = 0 \Rightarrow \bar{r}_1 = -\frac{c}{2} \quad (2.35)$$

Calculado o valor de ρ_1 , usamos (2.35) para obter:

$$\bar{\tau}(\bar{a}) = r_1 + \rho_1 \quad (2.36)$$

Dai tiramos \bar{a} que será usado no cálculo de $R_{opt}^{(2)}(\bar{r}_1, \bar{a})$.

Assim, em 2ª ordem, os três critérios dependem uma

quantidade equivalente de esforço na sua aplicação (em todos os casos temos que resolver equações transcendentais, ou seja, do tipo $x = \text{tg}x$ e similares). Em ordem superior, no caso PMS, aparecem mais equações transcendentais. Aqui $\overline{\text{PMS}}$ leva clara vantagem pois [17], em ordem K , requer a solução de $K-2$ equações algébricas e apenas uma transcendente. O método FAC é igualmente simples, pois os valores de τ , c_1 , ... podem ser calculados com o auxílio dos invariantes ρ_i . Entretanto, conforme indicado na ref. [15], FAC não faz uso da invariância dos observáveis físicos perante reparametrizações e [17], a escolha de $R_{\text{opt}} = \bar{a}$ poderia ser substituída por $R_{\text{opt}} = \bar{a} e^{\bar{a}}$ de modo igualmente factível, o que implicaria em coeficientes r_i imaginários, ao invés de nulos. Assim, embora $\overline{\text{PMS}}$ e FAC sejam equivalentes em termos de trabalho, preferiremos usar $\overline{\text{PMS}}$, por acharmos ser este procedimento mais consistente e intuitivo.

CAPÍTULO 3

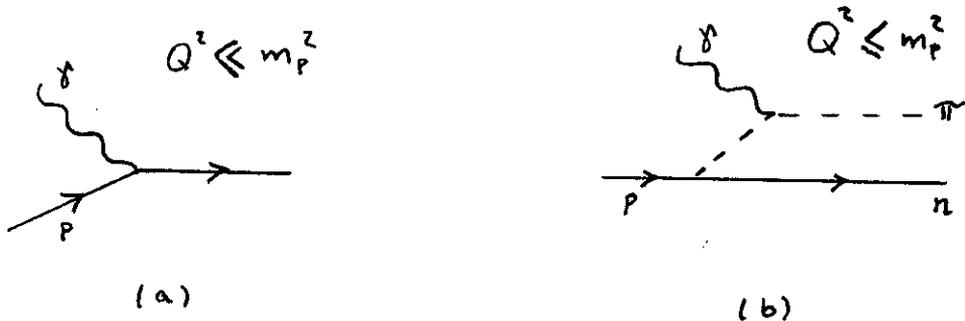
ESPALHAMENTO INELÁSTICO PROFUNDO

3.1 Formalismo Básico

Iremos nos ocupar, nesta seção, das predições da CDQ para o espalhamento de leptons por hádrons, caracterizado por grandes transferência de impulso. Essa classe de processos constitui-se num teste crucial para a CDQ pois, dado que as energias envolvidas são bastante altas, estimamos que a constante de acoplamento possa ser levada a valores pequenos, o que permite o emprego de teoria de perturbações. Passamos, pois, a descrever alguns resultados que nos serão úteis nas seções seguintes.

Se um fóton de baixa energia interage com um próton (fig. 2a), as grandezas características que ele "vê" são a carga e o momento magnético do mesmo, e então, o espalhamento nos parece pontual[23]. Aumentando a energia, o fóton parece distinguir os eventuais constituintes individuais da "nuvem" de píons virtuais e o próton aparece então como um objeto extenso e composto (fig. 2b). Nas faixas de energia que nos interessam, o fóton prova a estrutura fina do próton e pode interagir com seus constituintes elementares (fig. 2c). Se

nenhuma estrutura adicional aparecesse à medida que aumentássemos a transferência de momentum veríamos "scaling" exato, ou seja, os resultados seriam invariantes por uma diminuição arbitrária da escala de comprimento típica do processo em questão. No entanto, a CDQ prevê a interação dos quarks através dos glúons, o que dá margem a dois possíveis efeitos: a) interação do fóton com o quark com "irradiação" de um glúon (fig. 2d), que carrega uma parte do seu momentum inicial. O fóton vê então o quark com uma fração f do momentum do próton menor que a que ele tinha originalmente; b) interação do fóton com os quarks, na qual o fóton ao penetrar no campo de glúons dá origem à criação de pares quark-antiquark (fig. 2e), interagindo então com um deles. Ambos os efeitos contribuem para alterar o comportamento esperado do processo a curtas distâncias, dando origem a violações do comportamento de scaling, que fora previsto por Bjorken [24] através do modelo de partons. Essas violações são de fato observadas [25] e é um fato notável que a CDQ aliada a técnicas do grupo de renormalização possa dar uma descrição qualitativa adequada ao fato. Nossa esperança, neste trabalho, é que, dentro dos limites de teoria de perturbações, possamos também dar uma descrição quantitativa bastante eficiente (no sentido de ser livre de ambiguidades).



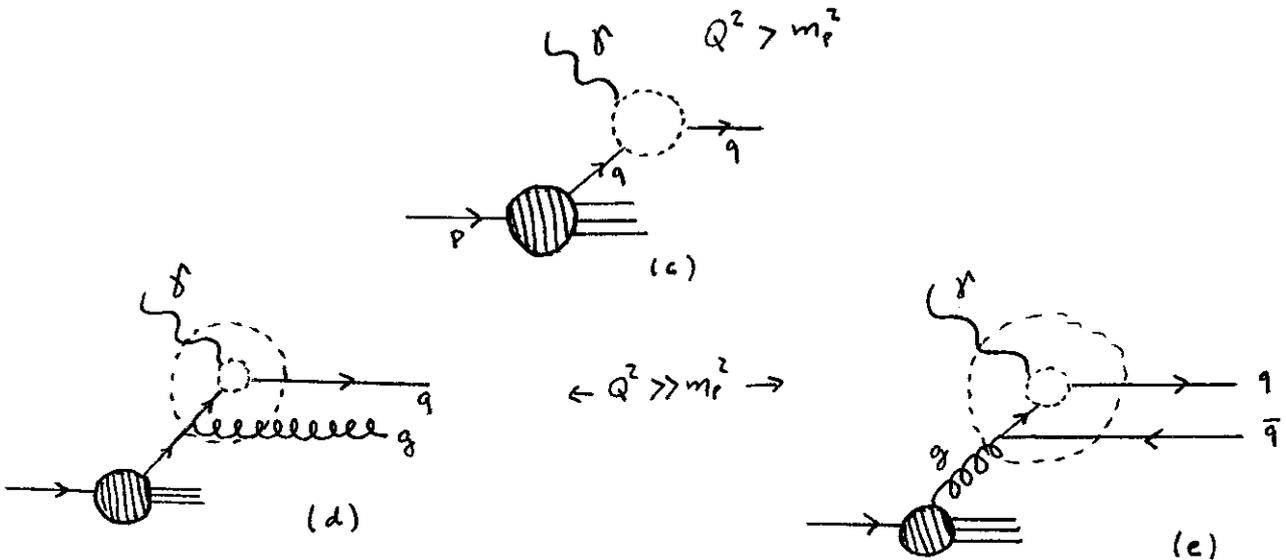


fig.2 - Interação de um fóton com um próton em vários valores possíveis para a transferência de momentum Q^2 .

Começemos essa descrição analisando a seção de choque associada ao espalhamento lépton-hádron. Esta pode ser escrita como (vide figura 3):

$$d\sigma \sim L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

$d\sigma \sim \sum_x$

$= L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$

fig.3 - Seção de choque típica de um processo profundamente inelástico.

onde $L^{\mu\nu}$ é um tensor que depende apenas da parte leptônica do diagrama e $W_{\mu\nu}$ descreve a parte de interação do fóton com o próton. $W_{\mu\nu}$ pode ser escrito como [23, 26].

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle p | [J_\mu^+(x), J_\nu(0)] | p \rangle \quad (3.2)$$

Argumentos gerais de conservação de correntes e invariância sob transformações de Lorentz permitem-nos decompor $W_{\mu\nu}$ em (3.2) [27] como:

$$W_{\mu\nu} \equiv \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1 + \frac{1}{m_H^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) W_2 - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{p^\alpha q^\beta}{2m_H^2} W_3 \quad (3.3)$$

($W_{\mu\nu}$ pode ser tomado como a parte imaginária de $\frac{1}{2\pi} T_{\mu\nu}$ onde

$$T_{\mu\nu} \equiv i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T(J_\mu^+(x) J_\nu(0)) | p \rangle \quad (3.4)$$

que é chamado de amplitude de espalhamento "para a frente" há-dron-corrente).

Os W_i 's são chamados funções de estrutura e dependem de ν e Q^2 onde

$$Q^2 \equiv -q^2 = \vec{q}_1^2 - q_0^2 > 0, \quad \nu \equiv p \cdot q, \quad (3.5)$$

Além disso os W_i 's têm algumas propriedades de simetria em ν e $W_{\mu\nu}$ obedece relações de dispersão tais como [7]:

$$T_{\mu\nu}(q^2, x_b) = \int_{-1}^1 \frac{x_b^{s-1} dx_b'}{x_b^{s-1} (x_b' - x_b)} W_{\mu\nu}(q^2, x_b') + P_{s-1}\left(\frac{1}{x_b}\right), \quad (3.6)$$

onde P_{s-1} é um polinômio de grau $s-1$ e x_b é a variável de Bjorken, $x_b = \frac{Q^2}{2\nu}$.

Estudaremos os W_i 's no limite

$$q^2 \rightarrow -\infty \quad ; \quad v \rightarrow \infty \quad ; \quad x_b \rightarrow \text{fixo} \quad (3.7)$$

Procuramos, observando a expressão (3.2), a região de integração que será relevante, nesse limite para o processo em questão. Notemos, de início, que $q \cdot x$ pode ser decomposto como:

$$q \cdot x = \left(\frac{q_0 + q_3}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x_0 - x_3}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{q_0 - q_3}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x_0 + x_3}{\sqrt{2}} \right) - q_t \cdot x_t \quad (3.8)$$

Consideremos essa expressão no sistema onde o hádron está em repouso. Neste sistema:

$$p = (m_H, 0, 0, 0) \quad , \quad q = \frac{1}{m_H} (v, 0, 0, \sqrt{v^2 + m_H^2 Q^2}) \quad , \quad (3.9)$$

de modo que

$$q_0 + q_3 = \frac{v}{m_H} + \frac{v}{m_H} \sqrt{1 + \frac{2m_H^2}{v} x_b} \quad , \quad (3.10)$$

$$q_0 - q_3 = \frac{v}{m_H} - \frac{v}{m_H} \sqrt{1 - \frac{2m_H^2}{v} x_b} \quad ,$$

no limite de Bjorken (3.7):

$$q_0 + q_3 \sim \frac{2v}{m_H} \quad , \quad q_0 - q_3 \sim m_H x_b \quad , \quad (3.11)$$

donde:

$$q \cdot x \simeq \frac{2v}{m_H} \left(\frac{x_0 - x_3}{\sqrt{2}} \right) + m_H x_b \left(\frac{x_0 + x_3}{\sqrt{2}} \right) - q_t x_t \quad (3.12)$$

para que não ocorram oscilações violentas na fase de e^{iqx} espera-se, então, que:

$$\frac{x_0 - x_3}{\sqrt{2}} \simeq \frac{m_H}{\sqrt{2}} \quad e \quad \frac{x_0 + x_3}{\sqrt{2}} \simeq \frac{1}{m_H x_b} \quad (3.13)$$

Sabemos que $[J^\dagger(x), J(0)] = 0$ para $x^2 < 0$ (causalidade). Então, na região relevante do espaço dos x ($x^2 > 0$)

$$x^2 \equiv (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - x_t^2 \simeq \frac{1}{m_H x_b} \times \frac{m_H}{2v} - x_t^2 = \frac{1}{Q^2} - x_t^2 > 0 \quad (3.14)$$

A região em que não ocorrem oscilações rápidas na fase de e^{iqx} é, para $Q^2 \rightarrow \infty$, $x^2 \rightarrow 0$, ou seja, o cone de luz. Isso automaticamente nos leva a considerar produtos de operadores $A(x)B(0)$ com $x^2 \rightarrow 0$. A técnica para isso é a expansão de Wilson generalizada para o cone de luz, a qual será objeto da próxima seção.

3.2 Expansões de Produtos de Operadores (EPO's)

A expansão de produto de operadores é uma técnica que nos permite classificar sistematicamente as singularidades de um produto de operadores em um dado ponto. Usá-la-emos aqui para estudar a contribuição dominante do produto de correntes, aparecendo em (3.4), na vizinhança de $x^2 \rightarrow 0$. Um exemplo trivial

do que chamamos expansão de produto de operadores é dado pelo teorema de Wick aplicado ao caso escalar livre:

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \mathbb{1}\Delta_F(x-y) + :\phi(x)\phi(y): \quad (3.15)$$

Em (3.15), toda a estrutura das singularidades de $\phi(x)\phi(y)$ foi levantada. Ela está toda contida no coeficiente do operador $\mathbb{1}\Delta_F(x-y)$. Ambos os operadores, $\mathbb{1}$ e $:\phi(x)\phi(y):$, são regulares e a singularidade de $\Delta_F(x-y)$ é do tipo $\frac{1}{(x-y)^2}$. Em geral, para um produto qualquer de campos Wilson [28] propõe a expansão

$$A(x)B(y) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y)O_i(x-y) \quad , \quad (3.16)$$

onde o conjunto de operadores $O_i(x-y)$ forma uma base adequada para a expansão de qualquer operador da teoria, e é composto por operadores regulares. A caracterização do produto particular fica por conta dos coeficientes $C_i(x-y)$ [29].

Em geral, em $x \sim y$, $A(x)B(y)$ é singular. As singularidades estarão presentes nos C_i 's e podem ser classificadas sistematicamente através do comportamento dos operadores O_i sob transformações de escala. Definamos o grupo de transformações de escala a um parâmetro $U(s)$ sob o qual o operador O_n se transforma como:

$$U^+(s)O_n(x)U(s) = s^d O_n(sx) \quad . \quad (3.17)$$

Então, se

$$U^+A(x)U = s^d A(sx) \quad ; \quad U^+B(x)U = s^d B(sx) \quad , \quad (3.18)$$

temos

$$S^{d_A+d_B} A(sx) B(sy) = \sum_n C_n (x-y) s^{d_n} O_n(sx-sy). \quad (3.19)$$

Expandindo $A(sx)B(sy)$:

$$A(sx)B(sy) = \sum_n C_n (sx-sy) O_n(sx-sy), \quad (3.20)$$

chegamos a

$$C_n(sx-sy) = s^{-d_A-d_B+d_n} C_n(x-y). \quad (3.21)$$

O comportamento a curtas distâncias ($x \rightarrow 0$) dos C_n 's é dado então por simples análise dimensional, a menos de logaritmos:

$$C_n(x) \xrightarrow{m|x| \ll 1} x^{d_n-d_A-d_B} \ln(mx) + \text{termos de ordem inferior.} \quad (3.22)$$

Os C_n 's são singulares (em $x \rightarrow 0$) quando $d_A+d_B \geq d_n$.

Vemos, então, que nesse limite apenas um número finito de termos na série (3.16) irá contribuir para a expansão. Os O_n são usualmente tomados como um conjunto linearmente independente de campos (no sentido de não estarem relacionados através das equações de movimento) e podem ser, então, campos livres, suas derivadas de qualquer ordem (obedecendo à restrição de independência linear), todos os possíveis produtos de Wick, etc.

Sob algumas assunções simples nos coeficientes C_n (os quais chamaremos coeficientes de Wilson), Brandt e Preparata

[30] obtiveram a expansão que nos interessa:

$$A(x)B(o) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{M(n)} C_{i,n}(x^2) x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} O_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^i(o) \quad (3.23)$$

Introduzimos aqui, para cada spin n , um conjunto finito de $M(n)$ operadores e coeficientes de Wilson (indexados por i). Os $C_{i,n}(x^2)$ têm a seguinte estrutura de singularidades:

$$C_{i,n}(x^2) \underset{x \neq 0}{\overset{x^2 \rightarrow 0}{\sim}} (x^2)^{(d_{N,i} - N - d_A - d_B)/2} \quad (3.24)$$

onde $d_{N,i}$ é a dimensão de O^i . Vemos que a soma em i é limitada por $M(n)$. De fato, agora não é mais a quantidade d_n (vide 3.22) que determina as singularidades dos C_n 's, mas sim

$$d_{N,i} - N \equiv \text{twist} \quad (3.25)$$

Agora, ao contrário de (3.16), um número infinito de termos caracteriza as singularidades do produto AB , e para cada n temos um número finito $M(n)$ de termos contribuindo, o que corresponde a dizer que o número de operadores com um dado twist é limitado, na expansão (3.23).

3.3 Regras de soma de momentos [25]

Nesta seção utilizaremos os instrumentos teóricos construídos anteriormente para derivar relações envolvendo momentos das funções de estrutura W_i e os coeficientes de Wilson, as

quais serão importantes na predição do comportamento de scaling da teoria. Por simplicidade, trataremos aqui o caso escalar e daremos o resultado desejado para a CDQ ao final da seção.

Usemos, pois, a EPO no cone de luz ($x^2 \rightarrow 0$) para calcular o análogo, neste caso, de $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T(x_b, q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T(J(x)J(o)) | p \rangle = \\ &= i \sum_{i,N} \int d^4x e^{iqx} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_N} C_{i,N}(x) \langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i(o) | p \rangle = \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$= i \sum_{i,N} \int d^4x \frac{\partial}{\partial q^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_N}} e^{iqx} C_{i,N}(x) \langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i(o) | p \rangle.$$

Utilizando a fórmula de integração por partes

$$\frac{\partial}{\partial q^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_N}} = 2^N q^{\mu_1} \dots q^{\mu_N} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right) + \text{termos de traço}, \quad (3.27)$$

obtemos

$$T(x_b, q^2) = i \sum_{i,N} 2^N q^{\mu_1} \dots q^{\mu_N} \tilde{C}_{i,N}(q^2) \langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i | p \rangle, \quad (3.28)$$

onde $\tilde{C}_{i,N}(q^2) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^N C_{i,N}(q)$.

O comportamento em $q^2 \rightarrow \infty$ destes \tilde{C} é dado por:

$$\tilde{C}_{i,N}(q^2) \sim \left(\frac{1}{q} \right)^{1+N+\frac{i}{2}} \quad (3.29)$$

(aqui $i = \text{twist}-2$ e as correntes escalares têm dimensão 2)

Como este comportamento é válido apenas em teorias onde há invariância de escala, em geral \tilde{C} desvia-se de (3.29) por logarítmos. Definimos então

$$\tilde{C}_{i,N}(q^2) \equiv \left(\frac{1}{q^2}\right)^{1+N} \frac{1}{2} \bar{C}_{i,N}(q^2) \quad , \quad (3.30)$$

como uma função singular reduzida. Os elementos de matriz em (3.28) são expressos como:

$$\langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i | p \rangle = \bar{O}_N^i [p_{\mu_1} \dots p_{\mu_N} - \sum_{i,j} g_{\mu_i, \mu_j} p_{\mu_1} \dots \hat{p}_{\mu_i} \dots \hat{p}_{\mu_j} \dots \dots p_{\mu_N} + \dots] \quad , \quad (3.31)$$

onde \hat{p}_{μ_R} significa que este termo deve ser omitido do produto. Substituindo em (3.28)

$$T(x_b, q^2) = \frac{1}{q^2} \sum_{i,N} \bar{C}_{i,N}(q^2) \bar{O}_N^i \left[\frac{(p \cdot q)^{N+\dots}}{(q^2)^{N+i/2}} \right] \quad . \quad (3.32)$$

No limite de Bjorken, a contribuição dominante è:

$$T(x_b, q^2) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\underset{x_b \text{ fixo}}{\sim}} \frac{1}{q^2} \sum_N \bar{C}_{0,N}(q^2) \bar{O}_N^0 \left(-\frac{1}{2}\right)^N x_b^{-N} \quad . \quad (3.33)$$

Utilizando relações de dispersão análogas a (3.6) es crevemos uma regra de soma [25]:

$$M_N(q^2) \equiv \int_0^1 dx_b x_b^{N-1} W(x_b, q^2) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{1}{-q^2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-2} \bar{O}_N^0 \bar{C}_{0,N}(q^2) \quad (3.34)$$

As relações (3.34) nos dizem que no limite $q^2 \rightarrow \infty$ o comportamento dos momentos das funções de estrutura, M_N , é controlado pela transformada de Fourier dos coeficientes de Wilson. As fórmulas análogas a (3.34), que se aplicam ao nosso caso, serão dadas agora. O produto de correntes aparecendo em $T_{\mu\nu}$ pode ser expandido como (no caso não-singlete de sabor):

$$T(J_\mu^\dagger(x) J_\nu(o))_a \approx \sum_N (-g_{\mu\nu} i^{N-2} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_N} F_{1a}^N(x^2) + g_{\mu_1}^\mu g_{\mu_2}^\nu i^{N-2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_N} F_{2a}^N(x^2)] \cdot O_a^{\mu_1 \dots \mu_N}(o), \quad (3.35)$$

onde a é um índice que indica o sabor, e a base de operadores $O_a^{\mu_1 \dots \mu_N}$ é tomada como

$$O_a^{\mu_1 \dots \mu_N}(o) \equiv \frac{i^{N-1}}{N} [\bar{q}^\alpha(o) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_N} q(o) + \text{permutações}] \quad (3.36)$$

Outros operadores comparecem se considerarmos também o caso singlete, o que não faremos neste trabalho. Obtemos, ao final de um cálculo similar:

$$M_N^{(1)}(-q^2) \equiv \int_0^1 dx_b x_b^{N-1} W_1^a(x_b, q^2) = \frac{1}{2^{N+2}} \bar{F}_{1a}^N \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \right) \bar{O}_a^N$$

$$M_N^{(2)}(-q^2) \equiv \int_0^1 dx_b x_b^{N-2} W_2^a(x_b, q^2) = \frac{m_H}{2^{N+1}} \bar{F}_{2a}^N \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \right) \bar{O}_a^N, \quad (3.37)$$

Se considerarmos a expansão de uma corrente vetorial e uma escalar obtemos, ainda:

$$M_N^{(3)}(-q^2) \equiv \int_0^1 dx_b x_b^{N-1} v w_3^a(x_b, q^2) = \frac{m_H}{2^{N+2}} \bar{F}_{3a}^N \left(\frac{q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \bar{O}_a^N \right) \quad (3.38)$$

Aqui os \bar{F} 's são as transformadas de Fourier dimensionalmente reduzidas dos coeficientes de Wilson originais. Note-se a introdução de uma dependência em μ , antecipando o fato (a ser mostrado na seção seguinte) de serem os coeficientes de Wilson dependentes de esquema de renormalização (ER). Essa dependência só pode ser através de g e de $\frac{q^2}{\mu^2}$, pois os \bar{F} 's são adimensionais.

3.4 Violações de scaling

Das fórmulas (3.37/38) podemos ver que toda a dependência dos momentos das funções de estrutura em $Q^2 = -q^2$ está contida nos coeficientes de Wilson. No que se segue, mostraremos que essa dependência pode ser levantada com o auxílio do grupo de renormalização, e calcularemos a mesma até segunda ordem na constante de acoplamento.

Como os M_N 's são apenas integrais envolvendo as funções de estrutura e as mesmas são observáveis físicos, vemos que os momentos obedecem à equação homogênea do grupo de renormalização (são observáveis) e, portanto,

$$\begin{aligned} DM_N^i &= D(\bar{F}_{ia}^N \bar{O}_a^N) = \\ &= D(\bar{F}_{ia}^N) \bar{O}_a^N + \bar{F}_{ia}^N D(\bar{O}_a^N) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Os \bar{O}_a^N estão relacionados diretamente ao operador $O_{\mu_1 \dots \mu_N}^a$. No caso singlete [7], estes operadores misturam-se sob renormalização, mas, como já dissemos, não iremos tratar este caso aqui por fugir aos nossos objetivos centrais. No caso não singlete esses operadores se renormalizam como [31]:

$$O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i(R) = Z_{i,N'} O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i(o) \quad (3.40)$$

De modo que a equação de grupo de renormalização obedecida por seus elementos de matriz é tal que:

$$(D + \gamma_{\circ a}^N) \bar{O}_a^N = 0 \quad (3.41)$$

Voltando a (3.39):

$$D(\bar{F}_{ia}^N) \bar{O}_a^N + \bar{F}_{ia}^N (\gamma_{\circ a}^N \bar{O}_a^N) = 0 \quad (3.42)$$

De modo que:

$$(D - \gamma_{\circ a}^N) \bar{F}_{ia}^N = 0 \quad (3.43)$$

Ou, em termos mais explícitos:

$$\left[\frac{\mu \partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{\circ a}^N(g) \right] \bar{F}_{ia}^N \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \right) = 0 \quad (3.44)$$

Resolvendo (3.44), obtemos:

$$\bar{F}_{ia}^N \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \right) = \bar{F}_{ia}^N \left(\frac{Q^2}{\mu_0^2}, g^2(\mu_0) \right) \exp \left[- \int_{g(\mu)}^{g(\mu_0)} \frac{\gamma_{\circ a}^N(g')}{\beta(g')} dg' \right]. \quad (3.45)$$

A condição de contorno μ_0 é usualmente escolhida como $\mu_0^2 = Q^2$. Dessa forma:

$$\bar{F}_{ia}^N \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g^2(\mu) \right) = \bar{F}_{ia}^N (1, g^2(Q^2)) \exp \left[- \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \frac{\gamma_{0a}^N(g')}{\beta(g')} dg' \right] \quad (3.45)$$

A fórmula (3.45) nos diz, então, que a dependência em Q^2 dos coeficientes de Wilson (e, portanto, dos momentos M_N) está totalmente contida em $g(Q^2)$. Os momentos são dados por:

$$M_N^{i(2)}(Q^2) \approx \bar{F}_{ia}^N (1, g^2(Q^2)) \exp \left[- \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \frac{\gamma_{0a}^N(g')}{\beta(g')} dg' \right] \bar{O}_a^N. \quad (3.46)$$

De modo a obter informação mais detalhada sobre o comportamento de M_N com Q^2 suporemos $Q^2 \gg \mu^2$ e μ^2 grande, de modo que estejamos sempre em regime perturbativo. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} \gamma_{0a}^N &= \gamma_N^0 \frac{g^2}{16\pi^2} + \gamma_1^N \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} + \dots, \\ \beta(g) &= - \frac{\beta_0 g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} + \dots, \\ \bar{F}_{2a}^N &= 1 + H_N^{(2)} \frac{g^2}{12\pi^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.47)$$

Estudaremos $M_N^{(2)}$, porque os dados experimentais à disposição para esse caso estão compilados com menor margem de erro, o que torna mais confiável uma possível comparação dos mesmos com predições teóricas. Para começar, calculemos a integral em (3.46) usando os dois primeiros termos na expansão de γ e β :

$$- \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \frac{\left[\gamma_N^0 \frac{g^2}{16\pi^2} + \gamma_1^N \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} \right]}{\left[\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} \right]} dg =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \frac{\gamma_N^0 + \gamma_1^N \frac{g^2}{16\pi^2}}{g\beta_0 \left[1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{g^2}{16\pi^2} \right]} dg \\
 &\simeq \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \frac{1}{g\beta_0} (\gamma_N^0 + \gamma_1^N \frac{g^2}{16\pi^2}) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{g^2}{16\pi^2} \right) dg \simeq \\
 &\simeq \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} \left[\frac{\gamma_N^0}{g\beta_0} + \left(\frac{\gamma_1^N}{\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_N^0}{\beta_0^2} \right) \frac{g}{16\pi^2} \right] dg \\
 &= \frac{\gamma_N^0}{2\beta_0} \ln \frac{g^2(Q^2)}{g^2(\mu^2)} + a_N \left[\frac{g^2(Q^2)}{4\pi^2} - \frac{g^2(\mu^2)}{4\pi^2} \right] \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Onde

$$a_N = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_1^N}{2\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_N^0}{2\beta_0^2} \right) \quad (3.49)$$

Em termos de $a \equiv \frac{g^2}{4\pi^2}$, então:

$$M_N^2(Q^2) \simeq A_N(\mu^2) [a(Q^2)]^{\gamma_N^0/2\beta_0} [1 + m_N^2 a(Q^2) + O(a^2)] \quad (3.50)$$

com

$$m_N^2 = a_N + \frac{H_N^{(2)}}{3} \quad (3.51)$$

A expressão (3.50) é a fórmula básica que exploraremos daqui em diante. Ela corresponde à expressão para os momentos de W_2 em segunda ordem em teoria de perturbações. Os coeficientes $\beta_0, \beta_1, \gamma_0^N, \gamma_1^N e H_N^{(2)}$ estão calculados [7] e valem:

$$\beta_0 = \frac{33-2N_F}{3} ; \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3} N_F \quad (3.52)$$

$$\gamma_0^N = \frac{8}{3} \left[1 - \frac{2}{N(N+1)} + 4 \sum_{K=2}^N \frac{1}{K} \right] \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
 H_N^{(2)} = & 3 \sum_{K=1}^N \frac{1}{K} - 4 \sum_{K=1}^N \frac{1}{K^2} - \frac{2}{N(N+1)} \sum_{K=1}^N \frac{1}{K} + \frac{3}{N} + \frac{2}{N^2} + \\
 & + \frac{4}{N+1} + \frac{4}{\sum_{m=1}^N} \left[\frac{1}{m} \sum_{K=1}^m \frac{1}{K} \right] + \frac{3}{8} \gamma_0^N (\log 4\pi - \gamma_\epsilon) - 9 \quad . \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Os γ_1^N podem ser encontrados em tabelas na referência [7] (cf. apêndice B). Vale ressaltar que H_2^N e γ_1^N dependem do E.R. e os valores aqui utilizados foram calculados no esquema MS.

De modo a interpretar o significado físico da fórmula (3.60) vamos, momentaneamente, nos restringir à primeira ordem, na qual os M_N são dados por:

$$M_N^{(2)}(Q^2) \sim [a(Q^2)]^{\gamma_0^N/2\beta_0} \quad . \quad (3.55)$$

Em 1ª ordem a constante de acoplamento pode ser achada integrando a equação da função β , com resultado (cf. apêndice A):

$$a(Q^2) \equiv \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{4\pi^2} = \frac{4}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (3.56)$$

Logo:

$$M_N^{(2)}(Q^2) \sim [\ln(Q^2/\Lambda^2)]^{-\gamma_0^N/2\beta_0} \quad (3.57)$$

Aqui podemos aquilatar a validade de nossas manipulações, até então formais. Pode-se ver claramente uma dependência

logarítmica dos momentos com Q^2 e através dela, uma dependência com Q^2 das funções de estrutura no limite $Q^2 \rightarrow \infty$, o que está plenamente de acordo com a experiência. Por isso dizemos haver violações logarítmicas do scaling de Bjorken.

Uma observação final é que a constante A_N , aparecendo em (3.59), é incalculável a partir da teoria atualmente à disposição, pois depende da relação hádron-quark. Isso faz com que, ao invés de tomarmos a expressão para M_N , tomemos, para aplicar nossos procedimentos de otimização, a quantidade (independente de A_N).

$$R_N = - \frac{8}{\gamma_O^N} \frac{d \ln M_N(Q^2)}{d \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (3.58)$$

Para encontrar a expressão perturbativa de R notamos em primeiro lugar, que, em 2ª ordem, a constante de acoplamento varia com μ da forma (vide apêndice A):

$$\tau = \frac{1}{a} + c \ln \left(\frac{ca}{1+ca} \right) = \frac{b}{2} \ln(\mu^2/\Lambda^2) \quad (3.59)$$

Em $\mu^2 = Q^2$ tomamos a derivada de (3.59) em relação a $x \equiv \ln(Q^2/\Lambda^2)$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{c}{a} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{c^2}{1+ca} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial x} = - \frac{b}{2} a^2 (1+ca) \quad (3.60)$$

Tomando o logaritmo de (3.50) (lembrando que $b = \beta_0/2$ e $c = \beta_1/4\beta_0$):

$$\ln M_N^2(Q^2) = \ln A_N + \frac{\gamma_O^N}{2\beta_0} \ln a + \ln[1 + m_N^2 a] \quad (3.61)$$

Derivando em relação a x:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln M_N(Q^2)}{dx} &= \frac{\gamma_0^N}{2\beta_0} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{1+m_N^2 a} \cdot m_N^2 \frac{\partial a}{\partial x} \\ &\approx \frac{\gamma_0^N}{2\beta_0} \frac{1}{a} \left[-\frac{\beta_0}{4} a^2 \left(1 + \frac{\beta_1}{4\beta_0} a\right) \right] + m_N^2 \left[-\frac{\beta_0}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{4\beta_0} a\right) \right] \cdot [1 - m_N^2 a] \\ &\approx -\frac{\gamma_0^N}{8} a - \left[\frac{\beta_1 \gamma_0^N}{32\beta_0} + \frac{\beta_0}{4} m_N^2 \right] a^2 + O(a^3) \\ &\approx -\frac{\gamma_0^N}{8} a (1 + r_{1,N} a) \end{aligned} \tag{3.62}$$

com

$$r_{1,N} = \frac{\beta_1}{4\beta_0} + \frac{2\beta_0}{\gamma_0^N} m_N^2 \tag{3.63}$$

De modo que

$$R_N^{(2)} = -\frac{8}{\gamma_0^N} \frac{d \ln M_N(Q^2)}{d \ln(Q^2/\Lambda^2)} = a (1 + r_{1,N} a). \tag{3.64}$$

Aqui $R^{(2)}$ denota o aproximante de 2ª ordem da quantidade R , que é um observável físico.

Sobre este R concentraremos nossos procedimentos de aprimoramento, no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

FENOMENOLOGIA E AMBIGUIDADES TEÓRICAS

4.1 Gráficos de Perkins e dimensão anômala

Conforme vimos no capítulo anterior, o comportamento em 1ª ordem dos momentos das funções de estrutura é dado por:

$$M_N(Q^2) \sim [\ln(Q^2/\Lambda^2)]^{-d_N} \quad (4.1)$$

com $d_N \equiv \gamma_0^N / 2\beta_0$.

Tomando o logaritmo

$$\ln M_N(Q^2) = -d_N \ln[\ln(Q^2/\Lambda^2)] + K_N \quad (4.2)$$

(onde K_N é uma constante independente de Q^2 , e se relaciona aos A_N 's de (3.50)), notamos que $\ln M_N(Q^2)$ se relaciona com $\ln M_{N'}(Q^2)$ através de

$$\begin{aligned} \ln M_N(Q^2) &= \frac{d_N}{d_{N'}} [\ln M_{N'}(Q^2) - K_{N'}] + K_N = \\ &= \frac{d_N}{d_{N'}} \ln M_{N'}(Q^2) + K_{N,N'} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Um gráfico de $\ln M_N(Q^2)$ em função de $\ln M_{N'}(Q^2)$ deve pois ser uma reta de inclinação $\frac{d_N}{d_{N'}} \equiv \frac{\gamma_O^N}{\gamma_O^{N'}}$.

Tal gráfico é, em princípio, uma forma de medir o acordo entre teoria e prática no caso de espalhamento inelástico profundo. Tais gráficos são mostrados na figura 4 abaixo, para vários valores de N e N' [25].

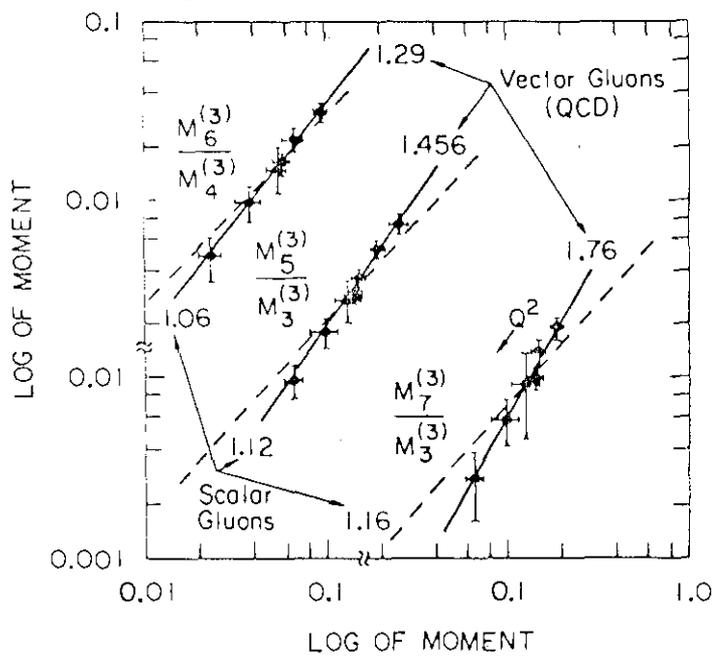


fig. 4 - gráficos de Perkins, relacionando $\ln M_n'$ para diversos valores de N e N'.

Os valores de $\gamma_O^N / \gamma_O^{N'}$ estão indicados pelas setas para teorias de glúons vetoriais (CDQ) e para teorias de gluons escalares [32], sendo o acordo com o primeiro caso bem melhor que com o segundo.

O teste apresentado acima mede adequadamente os valores relativos de γ_O^N , que são predições da CDQ. Mas, o que dizer da dependência dos momentos com Q^2 ? Esta também foi gra-

Um gráfico de $\ln M_N(Q^2)$ em função de $\ln M_{N'}(Q^2)$ deve pois ser uma reta de inclinação $\frac{d_N}{d_{N'}} \equiv \frac{\gamma_O^N}{\gamma_O^{N'}}$.

Tal gráfico é, em princípio, uma forma de medir o acordo entre teoria e prática no caso de espalhamento inelástico profundo. Tais gráficos são mostrados na figura 4 abaixo, para vários valores de N e N' [25].

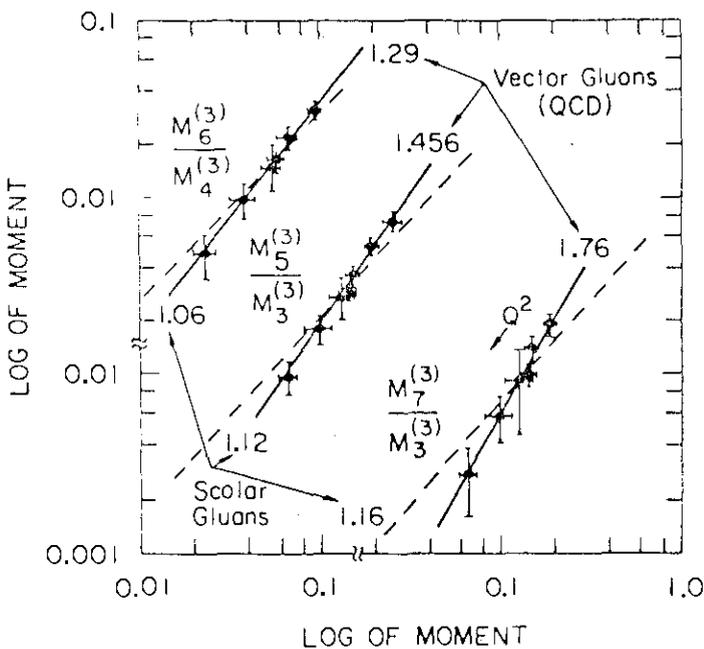


fig. 4 - gráficos de Perkins, relacionando $\ln M_{N'}$ para diversos valores de N e N'.

Os valores de $\gamma_O^N / \gamma_O^{N'}$ estão indicados pelas setas para teorias de glúons vetoriais (CDQ) e para teorias de gluons escalares [32], sendo o acordo com o primeiro caso bem melhor que com o segundo.

O teste apresentado acima mede adequadamente os valores relativos de γ_O^N , que são predições da CDQ. Mas, o que dizer da dependência dos momentos com Q^2 ? Esta também foi gra-

fada e comparada com predições de uma teoria com ponto fixo não-nulo g^* e com a CDQ [25].

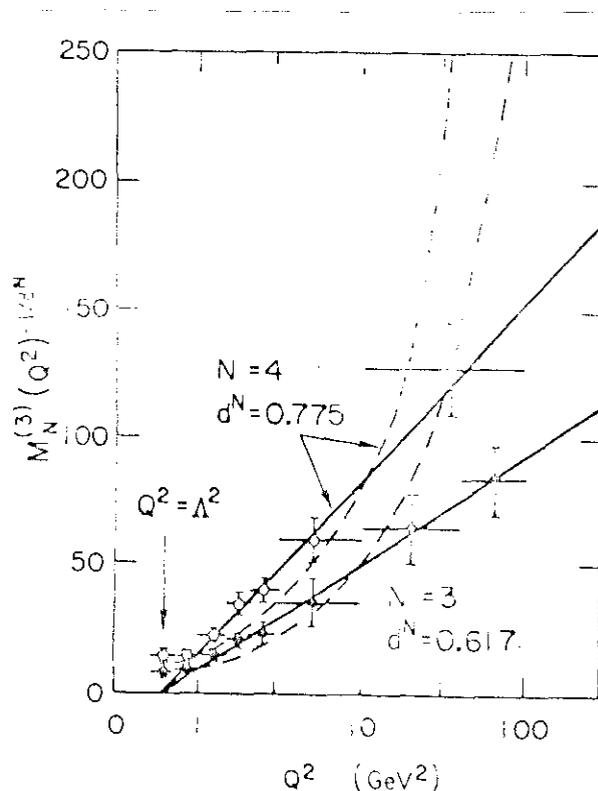


fig. 5 - gráfico de $[M_N^{(3)}(Q^2)]^{-1/d_N}$

comparado com o crescimento logarítmico esperado pela CDQ e o comportamento de potência esperado numa teoria com $g^* \neq 0$.

Debates à parte [25] notamos imediatamente que o acordo qualitativo da teoria com o experimento é bem razoável, favorecendo a hipótese de $g^* = 0$ e, portanto, de liberdade assintótica.

Em algumas fontes [1] utiliza-se os termos "dimensão anômala física" e "dimensão anômala observada". Em que sentido isto pode ser verdade? Como vimos no capítulo 1 a dimensão anôma

la era definida por

$$\gamma \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_\phi, \quad (4.4)$$

e, portanto, é obviamente dependente do esquema de renormalização usado. No entanto, dada a sua expressão perturbativa:

$$\gamma(g) = \gamma_0 \frac{g^2}{16\pi^2} + \gamma_1 \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} + \dots \quad (4.5)$$

é um resultado bem conhecido [7] que γ_0 é independente de esquema de renormalização, embora todos os demais não o sejam. O mesmo é verdade para os dois primeiros coeficientes da função β , β_0 e β_1 .

Dessa forma, não há nenhum paradoxo em se medir a inclinação da reta nos gráficos de Perkins, pois (em 1ª ordem) a mesma está associada a objetos invariantes sob o grupo de renormalização. Em ordens superiores, aparecem coeficientes não invariantes, mas a relação entre $\ln M_N$ e $\ln M_{N'}$ já não será mais linear, de modo que a inclinação do gráfico em cada ponto terá a mesma dose de ambiguidade que as próprias predições truncadas têm,

4.2 Cálculos de ordem superior

Se procuramos uma concordância numérica de (4.1) com os dados experimentais, vemos que para termos um valor preciso da magnitude das violações de scaling temos que conhecer o valor de A . Esta quantidade não é invariante por transformações gerais do G.R.. De fato, ao irmos de um esquema para outro A vai para

$\Lambda' = \kappa \Lambda$. Bace, no entanto, mostrou [33] que, por uma variação deste tipo, a expressão para os momentos em 1ª ordem permanece inalterada pois κ é reabsorvido na correção de $O(a)$. Isso simplesmente expressa o fato de o resultado em 1ª ordem ser sempre o mesmo para todos os esquemas de renormalização. Isso, porém, invalida uma análise (com finalidade de tirar previsões quantitativas) baseada apenas na 1ª ordem. Temos, portanto, que calcular ao menos a primeira correção para poder dispor de previsões numericamente bem definidas.

Ao irmos para a ordem seguinte, no entanto, começam a aparecer quantidades tais como γ_N^1 e $H_N^{(2)}$, que dependem do esquema de renormalização empregado no seu cálculo. Na literatura, até bem pouco tempo atrás, não havia ainda muita clareza sobre como remediar este problema, tendo-se enveredado por soluções que evitavam-no, ao invés de enfrentá-lo (uso, por exemplo, de quantidades "invariantes" por mudança de esquema). Para exemplificar concentrar-nos-emos em um artigo de Ellis e Sachrajda [25], mas idêntica questão se levanta também em Floratos et al. [34] e Peterman [7].

Conforme mostramos no capítulo 3

$$M_N^2 = A_N a^{d_N} (1 + m_N^2 a) \quad (4.6)$$

onde m_N^2 é uma combinação de $a_N = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_1^N}{2\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_N^0}{2\beta_0^2} \right)$ e $H_N^{(2)}$ (3.51)

Conforme dissemos γ_1^N e $H_N^{(2)}$ são dependentes de E.R. e, portanto, é de se esperar que m_N^2 também dependa (inclusive devido à propriedade de os observáveis físicos serem invariantes perante o grupo de renormalização e essa invariância se efetivar através de um

cancelamento ordem a ordem, onde os coeficientes e a constante de acoplamento jogam papéis "opostos" - conforme foi visto na seção 2.1). No entanto, nas três referências citadas acima, há uma demonstração de que m_N^2 é invariante pelo grupo de renormalização. Vejamos como opera essa demonstração e qual é, na nossa opinião, o seu "calcanhar de Aquiles".

Suponhamos que dois esquemas de renormalização diferam da seguinte maneira:

$$\langle p | O^{(N)} | p \rangle_A = [1 + \frac{1}{2} a \gamma_N^O \ln(p^2/\mu^2) + O(a^2)] \langle p | O^{(N)} | p \rangle_O$$

$$\langle p | O^{(N)} | p \rangle_B = [1 + a(\alpha + \frac{1}{2} \gamma_N^O) \ln(p^2/\mu^2) + O(a^2)] \langle p | O^{(N)} | p \rangle_O \quad (4.7)$$

$O^{(N)}$ aqui representa o operador $O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i$; A e B indexam os esquemas de renormalização; $\langle p | O^{(N)} | p \rangle_O$ é o elemento de matriz em nível de árvore e $\langle p |$ é um estado de quark adequado (de momentum p). A finalidade de considerar (4.7) é de, impondo uma variação bem definida sobre os esquemas de renormalização, ver como os coeficientes de Wilson se transformam para, ao final, utilizando as regras de soma derivadas no capítulo 3, encontrar a lei de transformação dos m_N^2 . As constantes de renormalização dos $O^{(N)}$ são então relacionadas por

$$Z_{O,A}^N = (1 + \alpha a) Z_{O,B}^N \quad (4.8)$$

Então, é fácil ver [34] que

$$a_{N,B} = a_{N,A} + \alpha \quad (4.9)$$

O objetivo dos autores é então mostrar que, nessa ordem, aparece uma contribuição de -3α em $H_N^{(2)}$ de modo a tornar $m_N^{(2)}$ invariante (vide fórmula (3.51)). O problema aparece quando se considera a variação dos coeficientes de Wilson. A única forma de se calcular esses coeficientes [35] é computando os momentos das funções de estrutura com o auxílio de uma hipótese de interação da corrente com um único quark (aproximação que considera o tamanho do nucleon infinito), calcular os elementos de matriz dos $O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i$ entre estados de quark e inverter a fórmula (3.37) isolando os \bar{F}_N^i . Então, para se calcular a variação dos \bar{F}_N^i com o grupo de renormalização, impõe-se a invariância dos M_N 's ante variações de esquema. Explicitamente:

$$\langle p | O^{(N)} | p \rangle \bar{F}_N^i(q^2/\mu^2, a(\mu^2)) =$$

$$B_N \left(1 + \frac{H_N}{3} a + E_N (\ln(p^2/\mu^2) - \ln(-q^2/\mu^2)) a + O(a^2) \right) \quad (4.10)$$

(no lado direito está a expressão calculada para os momentos na aproximação considerada).

De (4.10) tira-se o comportamento de \bar{F}_N^i nos dois esquemas (combinando-a com as equações (4.7)):

$$\bar{F}_{N,A}^i(q^2/\mu^2, a) = B_N^i \left[1 + \frac{H_N}{3} a + \frac{1}{2} \gamma_N^O a \ln(-q^2/\mu^2) + O(a^2) \right]$$

$$\bar{F}_{N,B}^i(q^2/\mu^2, a) = B_N^i \left[1 + \left(\frac{H_N}{3} - \alpha \right) a + \frac{1}{2} \gamma_N^O a \ln(-q^2/\mu^2) + O(a^2) \right] \quad (4.11)$$

De modo que [34]:

$$\bar{F}_{N,A}^i(1, \bar{a}) = \bar{F}_N^i(1, 0) \left[1 + \frac{H_N}{3} a + O(a^2) \right]$$

$$\bar{F}_{N,B}^i(1, \bar{a}) = \bar{F}_N^i(1, 0) \left[1 + \left(\frac{H_N}{3} - \alpha \right) a + O(a^2) \right]$$

(4.12)

Substituindo o novo coeficiente $H_{N,B}^{(2)} = H_{N_1 R} - 3\alpha$ obtemos $m_{N,B}^{(2)} = m_{N,A}^{(2)}$. Tudo estaria bem, não fosse a maneira como se obteve a lei de transformação para os $H_N^{(2)}$. Se queremos provar que os momentos em 2ª ordem são invariantes por mudanças de esquema, não podemos usar essa propriedade para calcular os \bar{F}_N^i . Temos que partir de alguma caracterização intrínseca das propriedades dos \bar{F} 's e ao final tentar chegar ao resultado desejado. Infelizmente não há qualquer modo de se determinar os coeficientes de Wilson, até hoje, que seja diferente do exposto acima e suas propriedades intrínsecas não permitem a afirmação de sua lei de transformação ser do tipo (4.12). Podemos aceitar (4.12) como algo apenas razoável, mas não exato pois, se o fosse, os $m_N^{(2)}$'s não teriam como ajustar-se, nos diferentes esquemas de renormalização, de modo a contribuir, no resultado final, para a invariância dos momentos.

Em Ellis e Sachrajda [25] o "resultado" acima obtido leva imediatamente a uma ambiguidade. Para $q^2 \sim 10 \text{ GeV}^2$, a partir de $N = 4$ os resultados para a 1ª ordem crescem de tal forma que as correções parecem ser da ordem de 50% ou mais em relação à 1ª ordem (vide tabela 1). Isso parece indicar uma situação onde não se pode usar teoria de perturbações, pois já na 1ª ordem a

série dá mostras evidentes de ser mal comportada. Sabemos (vide Pennington [36]) que para grandes N realmente há uma quebra da teoria de perturbações, mas ela é ocasionada pela própria natureza da expressão dos momentos, e não por algum crescimento anômalo dos termos perturbativos devido ao esquema. Até $N = 10$, no entanto, espera-se [36] que a teoria de perturbações seja válida para o caso dos momentos, o que não está ocorrendo.

N	m_N	%	N	m_N	%
2	9,045	18,9	7	34,75	69,5
3	16,02	32,0	8	38,22	76,4
4	21,75	43,5	9	41,38	82,7
5	26,64	53,2	10	44,29	88,5
6	30,76	61,4	-	-	-

Tabela 1: Cálculo dos $m_N^{(2)}$ para a função de estrutura νW_2 , realizado em MS. % indica o tamanho relativo do termo em 2^{a} ordem em relação à 1^{a} ordem.

O diagnóstico da situação só pode passar por um ponto: escolha do esquema de renormalização. De fato, mostra-se que existem esquemas onde o tamanho relativo das correções não é tão grande (\overline{MS} ou o chamado "esquema Λ_N " [12] no qual se absorve uma parte da dependência em N dos momentos em Λ). Mas qual o melhor esquema para este caso? Na resposta dessa questão intervirão fundamentalmente os procedimentos de aprimoramento, na última seção do capítulo.

4.3 "Higher twist effects" e série perturbativa

Na seção 3.3, ao derivarmos as regras de soma dos momentos, vimos que existiam diversos termos desprezados porque eram multiplicados por potências de $1/q^2$ (escolha do termo em $i=0$). Os termos que davam o comportamento dominante eram pois os que correspondiam a $\text{twist} = 2$. Claramente, ao diminuirmos o valor de q^2 , então, os termos desprezados começarão a contribuir significativamente, misturando-se com as previsões perturbativas. Estes termos são chamados "higher twist effects" (HTE) e, como veremos, irão complicar a análise fenomenológica das previsões teóricas da CDQ. Os HTE provêm de interações entre os quarks participantes e espectadores no estado final (vide fig.6)

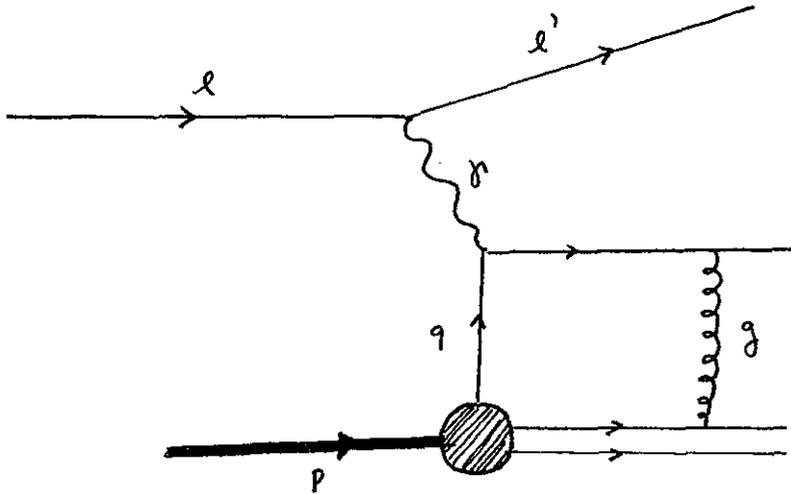


fig. 6 - Exemplo de H.T.E.

Voltemos à expressão para a amplitude de espalhamento no caso escalar.

$$T(x, q^2) = \sum_{i=1, N} \langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i(0) | p \rangle q^{\mu_1} \dots q^{\mu_N} \tilde{C}_{i, N}(q^2) \quad (4.13)$$

O elemento de matriz tem um comportamento em p^μ do t_i po:

$$\langle p | O_{i \dots N}^i(0) | p \rangle = \bar{O}_N^{-1} [p_{\mu_1} \dots p_{\mu_N} - \sum_{i,j} g_{\mu_i \mu_j} p_{\mu_1} \dots \hat{p}_{\mu_i} \dots \hat{p}_{\mu_j} \dots p_{\mu_N} + \dots] \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.13) e usando $x = \frac{-q^2}{2p \cdot q}$ e $\tilde{c}_{i,N}$

$$= \left(\frac{1}{q^2} \right)^{1+N+\frac{1}{2}} \bar{c}_{i,N} \quad \text{obtemos:}$$

$$\begin{aligned} T(x, q^2) = & \sum_N \frac{1}{q^2} \bar{O}_N^0 \bar{c}_{0,N}(q^2) \left\{ x^{-N} \left(-\frac{1}{2}\right)^N + \frac{1}{q^2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-2} x^{-N+2} + \frac{1}{(q^2)^2} \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{2}\right)^{N+4} x^{-N+4} + \dots \right\} + \left(\frac{1}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{O}_N^{-1} \bar{c}_{1,N}(q^2) \left\{ x^{-N} \left(-\frac{1}{2}\right)^N + \right. \\ & \left. + \frac{1}{q^2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-2} x^{-N+2} + \left(\frac{1}{q^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-4} x^{-N+4} + \dots \right\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

No limite $q^2 \rightarrow \infty$, podemos reordenar (4.15) mostrando os termos que contribuirão após a 1ª ordem:

$$\begin{aligned} T(x, q^2) = & \sum_N \frac{1}{q^2} \left\{ \bar{O}_N^0 \bar{c}_{0,N}(q^2) \left(-\frac{1}{2}\right)^N x^{-N} \right\} + \left(\frac{1}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \bar{O}_N^{-1} \bar{c}_{1,N}(q^2) \right. \\ & \cdot x^{-N} \left(-\frac{1}{2}\right)^N \left. \right\} + \left(\frac{1}{q^2}\right)^2 \left\{ \bar{O}_N^0 \bar{c}_{0,N}(q^2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-2} x^{-N+2} + \bar{O}_N^{-2} \right. \\ & \left. \cdot \bar{c}_{2,N}(q^2) x^{-N} \left(-\frac{1}{2}\right)^N \right\} + \dots \end{aligned}$$

Vemos que, aumentando a potência de $\frac{1}{2}$, operadores de diferentes twists começam a se misturar para dar contribuições de mesma ordem. Num regime de q^2 determinado, essas contribuições complicam-se de tal modo que fica inviável calculá-las, apelando-se então para fórmulas de ajuste [36,37] as quais parecem estar de acordo com a experiência. No entanto, às vezes o acordo com a experiência vai até longe demais, reproduzindo [37] na 1ª ordem os resultados obtidos com o auxílio do grupo de renormalização. O significado disto ainda é obscuro e atualmente é fonte de intensa pesquisa.

4.4 Otimização

Nesta seção usaremos o método $\overline{\text{PMS}}$ para otimizar resultados calculados em um outro esquema qualquer (no caso, MS) e mostraremos como o tamanho efetivo das correções diminui em relação ao das correções calculadas pelo método anterior. A aplicação do $\overline{\text{PMS}}$ será detalhada, por motivos didáticos. Para aplicar $\overline{\text{PMS}}$ temos que calcular ρ_1 em um esquema qualquer. Devido à disponibilidade de dados, calculá-lo-emos em MS e, conforme podemos notar haverá um ρ_1 para cada N:

$$\rho_1^N = \tau_{\text{MS}} - r_{1,\text{MS}}^N = b \ln \left(\frac{Q}{\Lambda_{\text{MS}}} \right) + c \ln \left(\frac{2c}{b} \right) - r_{1,\text{MS}}^N \quad (4.16)$$

(para as razões do aparecimento de $c \ln \left(\frac{2c}{b} \right)$ em (4.16) vide apêndice A)

Usaremos 2 valores para $\frac{Q}{\Lambda_{\text{MS}}} : \frac{Q}{\Lambda_{\text{MS}}} = 100$ e $\frac{Q}{\Lambda_{\text{MS}}} =$

= 1000. Os resultados desse cálculo estão na tabela 2 abaixo (com $r_{1,MS}^N$).

$$\frac{Q}{\Lambda} = 100, \rho_1^N = 18,69 - r_{1,MS}^N$$

$$\frac{Q}{\Lambda} = 1000, \rho_1^N = 28,27 - r_{1,MS}^N \quad (4.17)$$

N	$r_{1,MS}^N$	$\rho_1^N (\frac{Q}{\Lambda} = 100)$	$\rho_1^N (\frac{Q}{\Lambda} = 1000)$
2	6,83	11,86	21,44
3	7,53	11,16	20,74
4	8,02	10,67	20,75
5	8,39	10,30	19,88
6	8,64	10,05	19,63
7	8,93	9,76	19,34
8	9,14	9,55	19,13
9	9,32	9,37	18,85
10	9,48	9,21	18,79

tab. 2 - valores de $r_{1,MS}^N, \rho_1^N (Q/\Lambda = 100)$ e $\rho_1^N (Q/\Lambda = 1000)$

Com ρ_1^N calculado, encontramos \bar{a}_N , em cada caso, resol-

vendo

$$\tau_{PMS} = \rho_1^N + \left(\frac{-c}{2}\right) = \frac{1}{\bar{a}_N} + c \ln \frac{\bar{c} \bar{a}_N}{1 + \bar{c} \bar{a}_N} \quad (4.18)$$

Na resolução desta equação transcendental, usaremos um método de aproximações sucessivas [38] com a seguinte função de iteração:

$$\bar{a}_N = f(\bar{a}_N) = \frac{1}{\rho_1^N - \frac{c}{2} - c \ln \frac{c \bar{a}_N}{1 + c \bar{a}_N}} \quad (4.19)$$

Este método converge se $\left| \frac{df(\bar{a}_N)}{d\bar{a}_N} \right| < 1$ o que realmente

ocorre numa região de considerável interesse ($\bar{a}_N > 0,0039$).

Com valores de \bar{a}_N iniciais adequados ($\bar{a}_N^0 = 0,02$ para $Q/\Lambda = 100$ e

$\bar{a}_N^0 = 0,004$ para $Q/\Lambda = 1000$) encontramos em 5 ou 6 iterações o valor de \bar{a}_N desejado. Com \bar{a}_N calculamos R_N .

$$\bar{R}_N = \bar{a}_N \left(1 - \frac{c}{2} \bar{a}_N \right) \quad (4.20)$$

Os resultados para \bar{a}_N , R_N calculado em MS e \bar{R}_N são dados nas tabelas abaixo para $Q/\Lambda = 100$ e $Q/\Lambda = 1000$.

N	\bar{a}_N	R_N^{MS} (Q/Λ = 100)	\bar{R}_N (Q/Λ = 100)
2	0,0679	0,0564 (M= 29%)	0,0643 (M= - 5,3%)
3	0,0717	0,0577 (M= 32%)	0,0677 (M= - 5,5%)
4	0,0746	0,0586 (M= 34%)	0,0703 (M= - 5,7%)
5	0,0770	0,0593 (M= 37%)	0,0724 (M= - 5,9%)
6	0,0787	0,0598 (M= 37%)	0,0739 (M= - 6%)
7	0,0807	0,0603 (M= 38%)	0,0756 (M= - 6,3%)
8	0,0823	0,0607 (M= 39%)	0,0770 (M= - 6,4%)
9	0,0837	0,0611 (M= 40%)	0,0783 (M= - 6,4%)
10	0,0850	0,0613 (M= 41%)	0,0794 (M= - 6,9%)

tab.3 - valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N e \bar{a}_N para Q/Λ = 100 de N=2 até 10.

N	\bar{a}_N	R_N^{MS} (Q/ = 1000)	\bar{R}_N (Q/ = 1000)
2	0,0399	0,0364 (M= 20%)	0,0386 (M= - 3,2%)
3	0,0411	0,0370 (M= 22%)	0,0397 (M= - 3,4%)
4	0,0420	0,0375 (M= 24%)	0,0406 (M= - 3,35%)
5	0,0427	0,0378 (M= 25%)	0,0412 (M= - 3,2%)
6	0,0432	0,0380 (M= 25%)	0,0417 (M= - 3,3%)
7	0,0438	0,0383 (M= 26%)	0,0423 (M= - 3,4%)
8	0,0442	0,0385 (M= 27%)	0,0426 (M= - 3,4%)
9	0,0448	0,0387 (M= 28%)	0,0432 (M= - 3,4%)
10	0,0449	0,0388 (M= 28%)	0,0433 (M= - 3,4%)

tab.4 - valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N e \bar{a}_N para Q/Λ=1000 de N=2 até 10.

Nas tabelas acima a quantidade

$$M = \frac{\text{termo de ordem } a^2}{\text{termo de ordem } a} \quad (4.21)$$

mede a magnitude do termo de 2a. ordem em relação ao de 1a. ordem.

Alguns comentários podem ser imediatamente colocados: a magnitude M decresce à medida que aumenta a energia do processo (Q/Λ) tanto em MS como em PMS indicando as faixas mais favoráveis para aplicação de teoria de perturbações. Colocado este ponto, indicamos a clara otimização dos resultados (no sentido de haver uma redução evidente de M , ao irmos de MS para $\overline{\text{PMS}}$. O valor de M negativo indica apenas que a correção de 2a. ordem é negativa.

Algumas observações interessantes cabem ao considerarmos o caso $Q/\Lambda = 10$, para o qual tabelamos abaixo as quantidades de nosso interesse:

N	ρ_1^N	\bar{a}_N	R_{MS}^N	\bar{R}_N
2	2,28	0,306	0,123 (M= 54%)	0,23 (M= -23%)
3	1,58	0,463	0,127 (M= 60%)	0,29 (M= -35%)
4	1,09	0,820	0,130 (M= 63%)	0,30 (M= -63%)
5	0,72	-	0,133 (M= 66%)	-

tab. 5 - Valores de R_N^{MS} , \bar{R}_N , \bar{a}_N e ρ_1^N p/ $Q/\Lambda = 10$ de $N=2$ até 5.

Para $N=5$, $\rho_1^5 - \frac{c}{2} < 0$. Isso faz com que o método de aproximações sucessivas já não convirja daí em diante. Para obter então predições via $\overline{\text{PMS}}$ precisamos usar outra $f(\bar{a})$ em (4.19) e u-

sar métodos mais poderosos de resolução numérica do problema. Não precisamos, no entanto, fazer isso. Vemos que \bar{a}_N para $N=4$ é 0,820, que é um valor grande o suficiente para que duvidemos da eficácia de teoria de perturbações aplicada a essa faixa de energia. Como podemos notar, MS padece do mesmo problema nessa faixa, o que nos mostra que o aumento das correções, nessa energia, não é um problema de escolha de esquema de renormalização, senão que de validade da teoria de perturbações.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Há mais de uma década foi proposta a Cromodinâmica Quântica (CDQ) como a teoria capaz de fornecer a base formal para o estudo de processos ligados às interações fortes. Problemas referentes à estrutura da teoria de campos nos impediram de, a partir da CDQ, construir teoricamente os hádrons e, portanto, nesse meio tempo, procurou-se acentuadamente por testes mais ou menos indiretos da validade da mesma. Esses testes elevaram a CDQ da categoria de "uma forte candidata" à posição quase unânime de "teoria das interações fortes". Como vimos, na obtenção dessa posição, a propriedade de liberdade assintótica foi crucial, pois permitiu o uso de teoria de perturbações para prever quantidades físicas as quais puderam ser comparadas com os experimentos disponíveis.

Na aplicação da teoria de perturbações, no entanto, somos obrigados a enfrentar o problema dos infinitos na série perturbativa das quantidades físicas, que é resolvido pelos procedimentos conhecidos de renormalização. Como vimos, nesse processo são introduzidos parâmetros arbitrários em cada ordem, que caracterizam cada modo particular que escolhemos para renormalizar a teoria. É intuitivo o fato de que a teoria não deve depender do valor específico que assinalamos para o conjunto total dos parâmetros. Isso, entretanto, é verdade apenas para quantidades exatas, as quais não estão à nossa disposição. Para o que temos (ex

pressões truncadas numa dada ordem na constante de acoplamento), isso não acontece e o entendimento desse fato levou Stevenson, Grumberg e outros a propor métodos que permitissem a escolha, para cada caso do esquema mais adequado de renormalização. Hoje em dia espera-se inclusive que, mesmo que a série perturbativa não seja convergente, possa-se fazer com que ela forneça previsões bem razoáveis de observáveis, "jogando-se" com o esquema de renormalização de ordem para ordem. Isso pode indicar que os procedimentos de aprimoramento têm algum conteúdo a mais que o puramente trivial de escolher a melhor forma de calcular um determinado número.

No caso que estudamos aqui, o cálculo da evolução em Q^2 dos momentos das funções de estrutura no espalhamento inelástico profundo, estamos dentro de um exemplo típico da situação as sinalada acima. Temos uma quantidade física calculada até 2a. or dem, a qual certamente depende de esquema de renormalização. O não entendimento desse fato levou, na literatura, à procura de provas de que o coeficiente de a^2 fosse invariante de grupo de renormalização. Nossa análise do capítulo 2 mostra claramente que isso não pode ocorrer. De fato, ao nos determos mais demoradamente sobre tais provas, descobrimos o raciocínio cíclico que conduz à lei de transformação dos coeficientes de Wilson (a qual é fundamental para a demonstração da "invariância"). Tira-se essa lei de transformação impondo-se que os momentos são invariantes e depois prova-se, com o auxílio dessa lei, que os momentos são invariantes, novamente!

Os procedimentos de otimização, aplicados ao caso, permitem-nos tratar o problema da não invariância de modo consis

tente e bem definido. No caso específico dos momentos, existem particularidades na sua definição [36] que mostram que a teoria de perturbações não pode ser aplicada para o caso $N \rightarrow \infty$. Para os 10 primeiros momentos, no entanto, isso é perfeitamente factível e não se justifica a presença de correções de 2a. ordem, que sejam quase 50% da 1a. ordem. Para esses 10 primeiros valores de N , espera-se que o problema do crescimento das correções seja puramente uma questão de escolha de esquema, e sobre essas quantidades então concentramos nossos cálculos de otimização (usando $\overline{\text{PMS}}$).

Nossos resultados nos levam à conclusão de que, na faixa onde a teoria de perturbações é aplicável ($Q/\Lambda = 100$, $Q/\Lambda = 1000$), a otimização realmente leva a resultados melhores do que a escolha aleatória ou intuitiva do esquema (no sentido de as correções de 2a. ordem serem bem menores que a 1a. ordem e, portanto, da convergência mais acentuada da série perturbativa). Onde a teoria de perturbações não é aplicável ($Q/\Lambda = 10$) tanto $\overline{\text{PMS}}$ como MS nos dão resultados ambíguos e pouco confiáveis. Esse fato não desacredita a otimização, mas apenas fixa os seus limites de atuação.

Algumas análises ainda são cabíveis para o processo em questão. Podemos citar a comparação dos valores de R_N com dados mensuráveis, que certamente podem ser obtidos de gráficos de $\ln M_N(Q^2)$ em função de Q^2 . Poder-se-ia também estender os cálculos feitos para valores maiores de N , de modo a se determinar a partir de que N a série perturbativa passa a não fazer mais sentido. Nessa análise certamente se destacariam os invariantes ρ_1^N , cujo valor foi crucial, em nossos cálculos, para a convergência do método numérico utilizado. Se esta propriedade se mantém mes

mo usando métodos numéricos mais gerais, então podemos suspeitar de um papel adicional para os invariantes ρ_i como medidas da aplicabilidade da teoria de perturbações. Deixamos, no entanto, essas questões para análise em trabalhos futuros.

APÊNDICE A

O PARÂMETRO Λ

É costume usar, ao invés de μ , um parâmetro adimensional τ definido como:

$$\tau = b \ln \mu / \Lambda \quad (\text{A.1})$$

em termos do qual a equação que define a fica:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -a^2 (1 + ca + \dots) \equiv \tilde{\beta}(a) \quad (\text{A.2})$$

O parâmetro Λ está essencialmente ligado à ausência, dentro do corpo da teoria, de uma condição de contorno para (A.2). A integração desta nos dá uma solução implícita para a :

$$\tau = \int_0^a \frac{dx}{\tilde{\beta}(x)} + \tau_0 \equiv b \ln \mu / \Lambda \quad (\text{A.3})$$

Como a integral em (A.3) tem uma singularidade óbvia em $a=0$, vemos que para ter uma definição adequada de τ , τ_0 deve ser infinito também. Escolhas arbitrárias de τ_0 correspondem a escolhas de Λ . Stevenson [15] escolheu τ_0 de uma forma particularmente simples:

$$\tau_0 = - \int_0^a \frac{dx}{\tilde{\beta}^{(2)}(x)} \quad (\text{A.4})$$

onde $\hat{\beta}^{(2)}(x) = -a^2(1+ca)$ é a função $\hat{\beta}$ truncada em segunda ordem. Com essa escolha:

$$\begin{aligned} \tau &= -\int_a^\infty \frac{dx}{\hat{\beta}^{(2)}(x)} + \int_0^a dx \left[\frac{1}{\hat{\beta}(x)} - \frac{1}{\hat{\beta}^{(2)}(x)} \right] \\ &= \frac{1}{a} + c \ln\left(\frac{ca}{1+ca}\right) + \int_0^a dx \left[\frac{1}{\hat{\beta}(x)} - \frac{1}{\hat{\beta}^{(2)}(x)} \right] \end{aligned} \quad (A.5)$$

obtemos em 2a. ordem ($\hat{\beta}(x) \sim \hat{\beta}^{(2)}(x)$), $\tau = \frac{1}{a} + c \ln\left(\frac{ca}{1+ca}\right)$. Em 1a. ordem obtemos ($\hat{\beta}(x) = -a^2$)

$$\tau = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{b \ln \mu / \Lambda} \quad (A.6)$$

A equação (A.6) indica que a magnitude de a é governada pelo valor de Λ , o qual só pode ser obtido através da experiência (aqui Λ significa Λ com a escolha (A.4)). Isso sugere que o parâmetro livre da teoria, que é usualmente tomado como sendo a constante de acoplamento, pode ser mais naturalmente escolhido como sendo Λ .

Verifiquemos o comportamento de Λ por mudanças de esquema [15]. Consideremos dois esquemas com o mesmo valor de μ (e portanto com convenções diferentes). As constantes de acoplamento são relacionadas por:

$$a'(\mu) = a(\mu) (1 + v_1 a(\mu) + \dots) \quad (A.7)$$

Escrevendo (A.5) nos dois esquemas:

$$\tau = b \ln(\mu/\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{a} + c \ln\left(\frac{ca}{1+ca}\right) + O(a)$$

$$\tau' = b \ln(\mu/\tilde{\Lambda}') = \frac{1}{a'} + c \ln\left(\frac{ca'}{1+ca'}\right) + O(a') \quad (\text{A.8})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tau - \tau' &= b \ln(\tilde{\Lambda}'/\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + O(a) \\ &= v_1 + O(a) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

O argumento é válido para todo μ , o que nos permite tomar $\mu \rightarrow \infty$ (no caso da QCD. No caso de outras teorias $\mu \rightarrow 0$ nos dá resultados análogos). O termo de $O(a)$ se anula (liberdade assintótica) e então:

$$\frac{\tilde{\Lambda}'}{\tilde{\Lambda}} = \exp(v_1/b) \quad (\text{A.10})$$

o qual é um resultado exato. Isso nos mostra que $\tilde{\Lambda}'$ s em diferentes esquemas são relacionados por um cálculo em 1 loop. Resta ainda um ponto em suspenso: qual o comportamento de $\tilde{\Lambda}$ por mudanças de μ ? Se utilizarmos (A.3) como definição de Λ veremos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\mu \exp\left\{-\int_0^a \frac{dx}{b\beta(x)}\right\} \right] = \\ &= \exp\left\{-\int_0^a \frac{dx}{b\beta(x)}\right\} - \mu \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^a \frac{dx}{b\beta(x)} \right\} \frac{\partial a}{\partial \mu} \exp\left\{-\int_0^a \frac{dx}{b\beta(x)}\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^a \frac{dx}{b\beta(x)}\right\} \left[1 - \frac{1}{b\beta(a)} \times b\beta(a) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

o que nos mostra que todos os Λ dentro de uma mesma convenção são iguais (por exemplo, todos os Λ calculados em MS são iguais, mas diferem daqueles calculados em \overline{MS}).

Um último ponto a ser notado é que $\tilde{\Lambda}$ utilizado por Stevenson é diferente de outras escolhas usualmente feitas [12]. Para tais escolhas temos, em 2 loops:

$$\frac{1}{a} + c \ln\left(\frac{ba/2}{1+ca}\right) = b \ln \mu / \Lambda \quad (\text{A.12})$$

Comparando essa definição com (A.5), restrita a 2 loops, tiramos imediatamente:

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda (b/2c)^{c/b} \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B

DIMENSÕES ANÔMALAS DOS $O_{\mu_1 \dots \mu_N}^i$ (caso não-singlete)

Para o leitor interessado em fazer as contas de \overline{PMS} para valores de $N > 10$ apresentamos a seguir uma expressão analítica para γ_N^1 que comparecem em (3.47). Esta é [25] :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^N = & (C_F^2 - \frac{C_F C_A}{2}) \{ 16 S_1(N) \frac{2N+1}{N^2 (N+1)^2} + 16 [2 S_1(N) - \frac{1}{N(N+1)}] \times \\
 & [S_2(N) - S_2'(N/2)] + 64 \bar{S}(N) + 24 S_2(N) - 3 - 8 S_3'(N/2) \\
 & - 8 \frac{3N^3 + N^2 - 1}{N^3 (N+1)^3} - 16 (-1)^N \frac{2N^2 + 2N + 1}{N^3 (N+1)^3} \} + \\
 & C_F C_A \{ S_1(N) [\frac{536}{9} + 8 \frac{2N+1}{N^2 (N+1)^2}] - 16 S_1(N) S_2(N) - \\
 & \frac{43}{6} + S_2(N) [- \frac{52}{3} + \frac{8}{N(N+1)}] - 4 \frac{151N^4 + 263N^3 + 97N^2 + 3N + 9}{9N^3 (N+1)^3} \} + \\
 & C_F T_R \{ - \frac{160}{9} S_1(N) + \frac{32}{3} S_2(N) + \frac{4}{3} + 16 \frac{11N^2 + 5N - 3}{9N^2 (N+1)^2} \} \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

onde

$$S_i(N) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^i} \quad (B.2)$$

$$\bar{S}(N) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j S_1(j)}{j^2} \quad (B.3)$$

$$S'_i(N/2) = \frac{1+(-1)^N}{2} S_i(N/2) + \frac{1-(-1)^N}{2} S_i\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (\text{B.4})$$

e ainda:

$$C_F = \frac{4}{3}$$

$$C_A = 3 \quad (\text{B.5})$$

$$T_R = \frac{N_F}{2}$$

C_F , C_A são os autovalores dos operadores quadráticos de Casimir para as representações fundamental e adjunta de SU(3) e N_F é o nº de sabores. Resta lembrar que a fórmula é válida para $N \gg 2$ (pois $N=1$ corresponde ao caso em que o operador é uma corrente j_μ a qual, por ser conservada tem dimensão anômala nula). Os cálculos foram feitos no esquema MS.

APÊNDICE C

MS, \overline{MS} e MOM

A título de ilustração, vamos, neste apêndice, calcular explicitamente a integral que surge em (1.7) usando regularização dimensional e mostrar então como fica a função $\Gamma^{(4)}$ nos três esquemas MS, \overline{MS} e MOM.

A integral a ser calculada corresponde ao gráfico

$$= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2]} \quad (C.1)$$

Usamos agora a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1)}{[\alpha a + \beta b]^2} \quad (C.2)$$

Para reescrever (C.1) como:

$$= \Gamma^{(4)}(s) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\{ [k + (1-\alpha)(p_1 + p_2)]^2 - m^2 + (1-\alpha)s - (1-\alpha)^2 s \}^2} \quad (C.3)$$

com $s = (p_1 + p_2)^2$.

Fazendo agora a mudança de variáveis

$$K + (1-\alpha)(p_1+p_2) \rightarrow K, \quad (C.4)$$

Obtemos

$$\Gamma^{(4)}(s) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[K^2 + b^2]^2}, \quad (C.5)$$

onde $b^2 = m^2 + \alpha(1-\alpha)s$.

Mudamos agora a dimensão da integral para d inteiro qualquer, e fazemos a integração em K :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(s) &= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \int_0^1 \frac{d\alpha}{[K^2 + b^2]^2} = \\ &= i \frac{g^2 \pi^{d/2}}{2(2\pi)^d} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 d\alpha b^{2(d/2 - 2)} \end{aligned} \quad (C.6)$$

O membro da direita é então continuado analiticamente para quaisquer valores de d , de modo a se dar sentido à afirmativa " $d \rightarrow 4$ ". Isso pode ser feito, devido ao fato de a função Γ possuir continuação analítica única, dada por

$$\Gamma(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+z)} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (C.7)$$

com o que nota-se que a mesma é analítica em todo o plano complexo com exceção dos polos em $z=0, -1, -2, \dots$. No nosso caso esses polos estão localizados em $d=4, 6, 8, \dots$.

Na vizinhança de $d=4$, (C.6) pode ser aproximada por

$$\Gamma^{(4)}(s) \sim i \frac{g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{2 - \frac{d}{2}} - i \frac{g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left\{ \gamma_E - \int_0^1 d\alpha \ln b^2 \right\}. \quad (C.8)$$

A parte divergente está bem definida agora $(\Gamma_{\text{inf}}^{(4)}(s) =$

$$= \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left(\frac{1}{2 - \frac{d}{2}} \right) \text{ e deve ser subtraída pelo agregamento de con-}$$

tratermos ao Lagrangeano. Neste ponto define-se totalmente a convenção de renormalização. Se estivermos na convenção de subtração mínima (MS), os contratermos serão escolhidos de modo a subtrair apenas o polo em $d=4$, de modo que, nessa ordem de perturbações:

$$\Gamma_R^{(4)}(s) = - \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} (\gamma_\epsilon - \int_0^1 d\alpha \ln b^2) , \quad (\text{C.9})$$

onde o subíndice R denota "renormalizada". $\overline{\text{MS}}$ pede também a subtração da constante (constante de Euler) de modo que, nesse caso

$$\Gamma_R^{(4)}(s) = \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \ln b^2 . \quad (\text{C.10})$$

Por sua vez, MOM impõe a subtração do valor da amplitude calculado num valor dado para os momenta externos. Escolhendo este ponto como o ponto simétrico definido em (1.18) obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(s) &= \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{2 - \frac{d}{2}} - \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left\{ \gamma_\epsilon - \int_0^1 d\alpha \ln [b(s)]^2 \right\} - \\ &- \left\{ \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{2 - \frac{d}{2}} - \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left\{ \gamma_\epsilon - \int_0^1 d\alpha \ln [b(s')]^2 \right\} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

onde $s' = (p_1^0 + p_2^0)^2$, com p_1^0 e p_2^0 definidos por (1.18).

Com isto:

$$\Gamma_R^{(4)}(s) = \frac{i g^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \ell_n \left[\frac{b(s)}{b(s')} \right]^2, \quad (C.12)$$

APÊNDICE D

COMPARANDO UM OBSERVÁVEL EM DIFERENTES ESQUEMAS

Mostraremos aqui um exemplo simples de como um observável muda ao ser calculado em vários esquemas diferentes. Seguiremos passo a passo a discussão dada em Duke e Roberts[12].

Consideremos um cálculo hipotético de 2ª ordem no esquema $\overline{\text{MS}}$

$$R^{(2)} = a(1 + r_1 a), \quad (\text{D.1})$$

com

$$r_1 = 11,6 - 0,9 N_f. \quad (\text{D.2})$$

A constante de acoplamento, nessa ordem, é dada por

$$a = \frac{1}{b \tilde{\alpha}_s(\frac{\mu}{\Lambda})} \quad (\text{D.3})$$

de modo que, para termos um valor numérico para $R^{(2)}$ devemos fornecer um valor para a razão $\frac{\mu}{\Lambda}$. Para os esquemas MS e MOM costuma-se escolher μ como sendo um momentum externo (ou massa) relevante ao problema. Escolhemos, então, por exemplo:

$$\mu = 10 \text{ GeV}, \quad \Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 200 \text{ MeV} \quad (\text{D.4})$$

com $N_f = 4$, tiramos $R_{\overline{\text{MS}}} = 0,068$

Para ir de \overline{MS} para MS notamos que:

$$a_{MS} = a_{\overline{MS}} (1 + v a_{\overline{MS}} + \dots) , \quad (D.5)$$

$$\Lambda_{MS} = \Lambda_{\overline{MS}} \exp\left(\frac{v}{b}\right) \quad (D.6)$$

e

$$r_{1,MS} = r_{1\overline{MS}} - v \quad (D.7)$$

Um cálculo simples, que não envolve muito mais que a análise feita no apêndice C nos dá

$$v = -0,5b(\ln 4\pi - \gamma_\epsilon) \quad (D.8)$$

Com o que obtemos, para o mesmo valor de μ , $R^{(2)} = 0,060$. Podemos notar que este valor para $R^{(2)}$ foi obtido mantendo fixa a escala e mudando a convenção. Poderíamos ainda manter a convenção, mudando a escala como

$$\mu' = \mu \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 4\pi - \gamma_\epsilon)\right] , \quad (D.9)$$

e chegaríamos a resultado idêntico. Isso apenas ilustra o fato de em 2ª ordem os problemas de ambiguidade de escala e ambiguidade de convenção serem os mesmos.

Para ir de \overline{MS} para MOM, precisamos primeiramente especificar como estamos empregando MOM: Neste exemplo usaremos o ponto simétrico, subtraindo de amplitudes 1PI de três gluons, na gauge de Landau. Desse modo,

$$a_{MOM} = a_{\overline{MS}} (1 + 3,23 a_{\overline{MS}}) , \quad (D.10)$$

e então

$$\Lambda_{\text{MOM}} = 2,17 \Lambda_{\overline{\text{MS}}} , \quad (\text{D.11})$$

o que nos dá $R_{\text{MOM}} = 0,076$, com $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Consideremos agora o esquema FAC. Usamos aqui o fa
to de

$$\mu_{\text{FAC}} = \exp [-r_{1,\overline{\text{MS}}} / b] \mu_{\overline{\text{MS}}} \quad (\text{D.12})$$

com o que obtemos $R_{\text{FAC}} = 0,086$.

Podemos ver, portanto, que variando o esquema temos uma variação não desprezível do valor da predição para a quanti
dade física em questão o que chama a atenção para a importância do problema de escolha de esquema.

BIBLIOGRAFIA

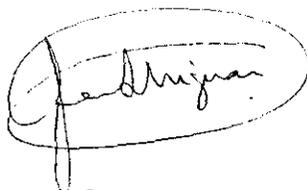
- [1] - ITZYKSON, C. e ZUBER, J. B.; "Quantum Field Theory"; New York, McGraw-Hill (1980)
- [2] - N. BOHR e L. ROSENFELD; Math. Fys. Medd. 12 (1933)
- [3] - C. G. BOLLINI e J. J. GIAMBIAGI; Il Nuovo Cim. 12B 20 (1972); G.'T Hooft e M. Veltman, Nuc. Phys. B44 189 (1972)
- [4] - J. A. MIGNACO e I. RODITI; "Introdução ao Estudo do Grupo de Renormalização em Teoria Quântica Relativística dos Campos"; CBPF-MO-004/85 (1985)
- [5] - P. PASCUAL e R. TARRACH; QCD: "Renormalization for the Practitioner"; Lecture Notes in Physics, 194, Springer-Verlag (1984)
- [6] - H. FLEMING; "Introdução à Quantização e Renormalização de Teorias de Campo", in Escola de Verão J. A. Swieca, 1981, editado por Gil da Costa Marques et al
- [7] - A. PETERMAN; Phys. Rep. 53, nº 3 (1979)
- [8] - D. J. GROSS e F. Wilczek, Phys. Rev. Letters, 30(1973) 1343
- [9] - H. D. POLITZER; Phys. Rev. Letters 30 (1973) 1346
- [10] - S. COLEMAN e D. J. GROSS; Phys. Rev. Letters 31 (1973) 851
- [11] - H. D. POLITZER; Phys. Rep. 14C (1974) 129
- [12] - D. W. DUKE e R. G. ROBERTS; Phys. Rep. 120 (1985) 275
- [13] - D. J. GROSS; "Applications of the Renormalization Group to High-Energy Physics"; Les Houches, session XXVIII, 1975 - Methodes in Field Theory; ed. por R. Balian et al. North Holland Pub. Co., 1976

- [14] - G. KÄLLEN; "Quantum Electrodynamics"; Springer-Verlag (1972)
- [15] - P. M. Stevenson; Phys. Rev. D 23 nº 12 (1981) 2916
- [16] - E. C. G. STUECKELBERG e A. PETERMAN; Helv. Phys. Acta 26 (1953) 499
- [17] - I. RODITI; "O Grupo de Renormalização: Transformações de Escala e Mudanças de Esquema. Sua Utilidade na Teoria Quântica de Campos"; tese de doutorado, CBPF (1983)
- [18] - G. GRUMBERG; Phys. Lett. 95B, (1980) 70
- [19] - J. A. MIGNACO e I. RODITI; Phys. Lett. 126B (1983) 481
- [20] - P. M. STEVENSON; Phys. Rev. D27 (1983) 1968;
M. R. PENNINGTON; Phys. Rev. D26 (1982) 2048;
J. C. WRIGLEY; Phys. Rev. D27 (1983) 1965
- [21] - W. CELMASTER e R. J. GONSALVES; Phys. Rev. D20, 1420 (1979);
Phys. Rev. Lett. 42, 1435 (1979)
- [22] - LLEWELLYN SMITH; Phys. Rep. 3C, 261 (1972)
- [23] - E. REYA; "Perturbative Quantum Chromodynamics"; Phys. Rep. 69, nº 3 (1981)
- [24] - J. D. BJORKEN; Phys. Rev. 179 (1969) 1547
- [25] - J. ELLIS e C. T. SACHRAJDA; "Quantum Chromodynamics and its Applications, in Quarks and Leptons", Cargèse 1979 (1980)
Ed. por Maurice Levy et al
- [26] - J. BERNSTEIN; "Elementary Particles and their Currents", W.H. Freeman and Co. (1968)
- [27] - J. ELLIS in: "Weak and Eletromagnetic Interactions at High"

Energies, Les Houches 1976 ed. por R. Balian et al

- [28] - K. G. WILSON; Phys. Rev. 179 (1969) 1499
- [29] - W. ZIMMERMAN; "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory," (1970) Brandeis Summer Institute, ed. por S. Deser et al
- [30] - R. A. BRANDT e G. PREPARATA; Nucl. Phys. B27 (1971) 541
- [31] - YNDURAIN; "Deep Inelastic Processes" (ainda não publicado)
- [32] - J. ELLIS; Current Trends in the Theory of Fields (A.I.P. , NY, 1978) pag. 81 ed por J. E. Lannutti e P. K. Williams
- [33] - M. BACÉ; Phys. Lett. 78B (1978) 132
- [34] - E. G. FLORATOS, D. A. ROSS e C. T. SACHRAJDA; Nucl. Phys. B129 (1977) 66
- [35] - M. CALVO; Phys. Rev. D15, nº 3 (1977) 15
- [36] - M. R. PENNINGTON; Rep. Prog. Phys. 46 (1983) 393
- [37] - E. L. BERGER; "Case Studies in Perturbative Quantum Chromodynamics": X International Symposium on Multiparticle Dynamics, 60a, India (1979)
- [38] - W. S. DORN e D. D. McCRACKEN; "Cálculo Numérico com Estudo de Casos em FORTRAN IV", EdUSP (1981)
- [39] - C. Nash; "Relativistic Quantum Fields", Academic Press (1978)

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

A handwritten signature in cursive script, enclosed in an oval shape. The signature appears to read "Juan Alberto Mignaco".

Juan Alberto Mignaco - Presidente

A handwritten signature in cursive script, appearing to read "José de Sá Borges Filho".

José de Sá Borges Filho

A handwritten signature in cursive script, appearing to read "Jader Benazzi Martins".

Jader Benazzi Martins

Rio de Janeiro, 02 de outubro de 1985