

LUIZ CARLOS LOBATO BOTELHO

FORMULAÇÃO DE INTEGRAIS FUNCIONAIS INVARIANTE E APLICAÇÕES À
QUANTIZAÇÃO DAS TEORIAS DE CALIBRE

Tese Apresentada ao
Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas como parte dos requesi-
tos para a obtenção do Título
de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Juan J. Giambiagi

Co-Orientador: C.G. Bollini

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, Abril de 1985

RESUMO

Pela introdução de uma Estrutura Riemmaniana no Espaço de Configurações de uma Teoria de Campo com Simetria Associada a um Grupo de Dimensão Infinita; obtemos uma formulação de Integral Funcional Invariante. Aplicamos esta formulação ao estudo da Quantização das Teorias de Calibre de Yang-Mills e dos Strings Bosônicos de Polyakov, obtendo alguns fatos novos, bem como reproduzindo resultados conhecidos.

Continuando com a idéia geral de integração funcional invariante; implementamos uma mudança (chiral) na medida funcional fermiônica da Cromodinâmica Quântica Não-Massiva Bidimensional, obtendo pela primeira vez uma ação efetiva puramente gluônica para o modelo. Obtemos, também, a completa solubilidade do Modelo Bidimensional de Rothe-Stamatescu no formalismo da integral funcional.

ABSTRACT

Introducing a metrical structure into the Configuration Space of Quantum Field Theories with Infinite-Dimensional symmetry group, we obtain a formulation of Invariant Functional Integrals suitable for their quantization. We apply it for Gauge Theories of Yang-Mills and Polyakov's Bosonic String; obtaining several new facts about them, as well as reproducing some well known results.

By following the general idea of invariant functional measures; we implement a fermionic (chiral) change of variables in the fermionic sector of two-dimensional massless Quantum-Chromodynamics; obtaining by the first time, a pure gluonic effective action for the model. In addition, we obtain the complete solution for the Rothe-Stamatesu Model.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 . Integrais de Trajetórias	4
1.1 - Introdução	4
1.2 - Integrais de Trajetórias na Mecânica Quântica ...	4
1.3 - A Formulação de Integrais de Trajetórias para as Teorias Quântica de Campos	9
1.4 - Cálculo Explícito das Integrais de Trajetó- rias do tipo Gaussiano	14
- Referências para o Capítulo 1	18
2 - Quantização das Teorias de Calibre	19
2.1 - Introdução	19
2.2 - O Formalismo das Medidas Funcionais de Feynman Invariantes	20
2.3 - A Quantização da Teoria de Calibre de Yang-Migls $SU(N)$	27
- Comentários e Observações	40
- Referências para o Capítulo 2	41
3 - A Teoria Quântica das Superfícies de Polyakov no Formalismo das Medidas Funcionais Invariantes	43
3.1 - Introdução	43
3.2 - Teoria Clássica das Superfícies	45
3.3 - A Teoria Quântica das Superfícies de Polyakov	48
- Comentários e Observações	61
- Referências para o Capítulo 3	62
4 - Uma Ação Gluônica Efetiva para a Cromodinâmica Quântica $SU(N)$ Não-Massiva Bidimensional no	

Formalismo das Integrais de Trajetórias Fermiônicas Invariante	64
4.1 - Introdução	64
4.2 - A Transformação de Variáveis Fermiônicas	64
4.3 - O Mecanismo de Higgs Intrínseco e o Funcional de Wess-Zumino na Cromodinâmica SU(N) Não-Massiva Bidimensional	76
4.4 - O Modelo de Schwinger	84
4.5 - O Modelo de Rothe-Stamatescu	95
- Comentários e Observações	102
- Referências para o Capítulo 4	104
- Apêndice 1	107
- Apêndice 2	109
- Apêndice 3	112
- Apêndice 4	118
- Apêndice 5	120
- Apêndice 6	125
- Agradecimentos	134
- Curriculum Vitae	135

ROTEIRO PARA LEITURA DOS TÓPICOS ORIGINAIS
APRESENTADOS NESTA TESE

- 1) Capítulo 2 - Quantização das Teorias de Calibre 19 - 41

- 2) As Amplitudes de Espalhamento na Teoria dos
Strings Bosônicos na Aproximação Livre 56 - 60

- 3) Capítulo 4 - Uma Ação Gluônica Efetiva para a
Cromodinâmica Quântica $SU(N)$ Não-Massiva
Bidimensional na Formulação das Integrais de
Trajetória Fermiônicas Invariante 64 - 103

INTRODUÇÃO

IL LIBRO PELLA NATURA IS SCRITO IN LINGUA MATEMÁTICA

Galileo Galilei

Integrais funcionais tem se mostrado de extensa aplicações na Física Teórica. Soluções de equações diferenciais funcionais tendo suas origens na Teoria Quântica dos Campos, Mecânica Quântica Estatística e Teoria da Difusão são sempre representadas como integrais funcionais.

Claramente, a importância fundamental do estudo deste "Cálculo integral" para a Física Moderna é inquestionável. Como por exemplo: A moderna Teoria dos Fenômenos Críticos é inteiramente baseada na representação de integral funcional para o Funcional de Partição do modelo analisado; A quantização das Teorias de Calibre de Yang-Mills (as quais aparecem como as teorias em potencial para a descrição das interações fundamentais entre as partículas elementares é sempre realizada via o uso das Integrais Funcionais. E recentemente; o estudo da quantização de objetos estendidos (excitações tipo vórtices, instantons, strings, sólitons, etc...) é feito exclusivamente via a integral funcional.

E apesar de uma formulação matemática rigorosa ser inexistente para as Integrais Funcionais (assim como uma teoria matemática rigorosa para o formalismo de operadores!), a sua utilidade não é diminuída.

A presente tese é devotada ao estudo e algumas aplicações deste "Cálculo integral" na Teoria Quântica dos Campos.

Na primeira parte dos estudos apresentados nesta Tese, (cap.2 - cap.3), apresentamos uma formulação de integral funcional invariante adaptável a quantização de sistemas físicos possuindo um Grupo de Simetria de Dimensão Infinita.

Afora o interesse intrínseco de saber como formular diretamente uma integração funcional invariante; uma simplificação no formalismo de quantização das Teorias de Calibre é obtida. Exemplificamos a utilidade do formalismo proposto, estudando a quantização das Teorias de Calibre de Yang-Mills e da Teoria do String Bosônicos de Polyakov.

Na segunda parte (cap.4), obtemos uma ação gluônica efetiva para a Cronodinâmica Quântica, fazendo uso de uma transformação de variáveis na medida funcional fermiônica invariante do modelo e obtemos alguns resultados relacionados a estrutura das suas funções de correlação fermiônicas e a existência de um Mecanismo de Higgs intrínseco. Aplicamos, também, esta técnica ao modelo bidimensional de Rothe-Stamatescu e obtemos sua completa solubilidade no formalismo das integrais funcionais.

Quanto a notação a ser seguida, exemplificamos abaixo :

eq. (3.42) - significa a equação 42 do capítulo 3

§ 4.2 - significa o parágrafo 2 do capítulo 4

apêndice 3 - significa o apêndice 3.

Todas as demonstrações paralelas ao fluxo principal do texto (material tão importante quanto aqueles apresentados no texto!) são agrupados em apêndices para a maior facilidade de leitura dos capítulos.

Finalmente sempre trabalharemos no sistema natural de unidades no qual $\hbar = c = 1$.

CAPÍTULO I

INTEGRAIS DE TRAJETÓRIAS

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos as idéias gerais do Formalismo das Integrais de Trajetória para a quantização de sistemas não-relativísticos e relativísticos (os chamados Campos Quânticos) a serem utilizadas nas pesquisas apresentadas nesta tese.

A organização do presente capítulo é feita do seguinte modo: No parágrafo 1.2, apresentamos a Formulação de Integrais de Trajetória para os Sistemas Quânticos não-relativísticos. No parágrafo 1.3, apresentamos a Formulação acima as Teorias Quânticas de Campo. E, finalmente, no 1.4 apresentamos o cálculo explícito das integrais funcionais do tipo Gaussiano.

1.2 - INTEGRAIS DE TRAJETÓRIAS NA MECÂNICA QUÂNTICA

A idéia básica do Formalismo das Integrais de Trajetórias, devido a R.P. Feynman ([1], [2]) reside no postulado que a evolução de um sistema quântico (não-relativístico) de um estado inicial A para um estado final B , ambos caracterizados por suas posições no espaço \mathbb{R}^D de configurações \vec{X} e \vec{Y} respectivamente, é realizada por uma trajetória $\vec{X}(\gamma)$ ($\vec{X}(\gamma_i) = \vec{X}$ e $\vec{X}(\gamma_f) = \vec{Y}$) com uma dada amplitude de probabilidade proporcional ao fator $e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}[\vec{X}(\gamma)]}$, onde $S_{cl}[\vec{X}(\gamma)]$ denota a integral de ação clássica do sistema calculada ao longo desta trajetória.

Postula-se que a amplitude total de probabilidade para a propagação acima (denotada por $G(A; B)$ e denominada de propagador quântico) é dada pela soma de todas as amplitudes de probabilidade definidas pelas trajetórias do sistema conectando estes 2 estados A e B:

$$G(A; B) = \sum_{\left\{ \vec{X}(t) \right\}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl} [\vec{X}(t)]} \quad (1.1)$$

$\vec{X}(t_i) = \vec{X}; \vec{X}(t_f) = \vec{Y}$
 $t_i \leq t \leq t_f$

Um significado preciso para a expressão (1.1) foi dado por Feynman e consiste em introduzir "Trajetórias Poligonais" $\vec{X}^{(\epsilon, N)}(t)$ que aproximam as dadas trajetórias $\vec{X}(t)$ no limite $N \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$

$$\vec{X}^{(\epsilon, N)}(t) = \frac{\vec{X}(t_k) - \vec{X}(t_{k-1})}{\epsilon} (t - t_k) + \vec{X}(t_{k-1}) \quad (1.2)$$

onde sub-dividimos o intervalo $[t_i, t_f]$ em N partes iguais de comprimento ϵ . ($N\epsilon = t_f - t_i$ e $\Delta t = \epsilon$)

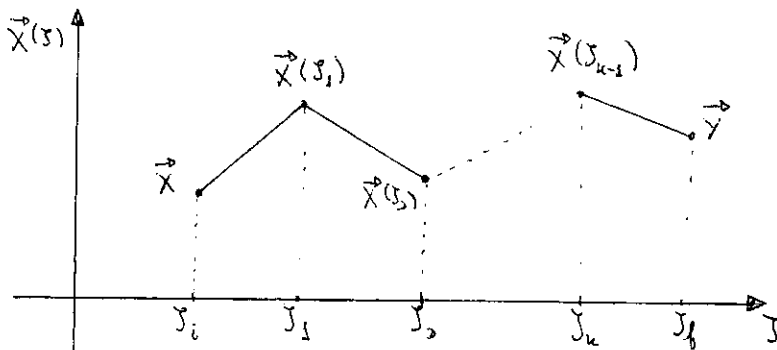


FIG 1

O propagador $G(A; B) = G((\vec{X}, t_i); (\vec{Y}, t_f))$ é, então, definido pelo limite:

$$G((\vec{X}, t_i); (\vec{Y}, t_f)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{N} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\vec{X}(t_k) e^{\frac{i}{\hbar} S^{(\epsilon, N)} [\vec{X}^{(\epsilon, N)}(t)]} \quad (1.3)$$

onde $S^{(\epsilon, N)} [\vec{X}^{(\epsilon, N)}(t)]$ denota a ação clássica convenientemente

discretizada e \bar{N} um fator de normalização da expressão. Por exemplo, para uma partícula movendo-se sob a presença de um potencial $V(\vec{X})$, a ação clássica discretizada toma a forma: ([1],

$$[2]) \quad \sum_{k=1}^N \epsilon \left(\frac{m}{2} \frac{(\vec{X}(J_k) - \vec{X}(J_{k-1}))^2}{\epsilon^2} - V(\vec{X}(J_k)) \right) \quad (1.4)$$

onde $J_0 = J_i$ e $J_N = J_f$

Observamos que em (1.3) os pontos $\vec{X}(J_0) = \vec{X}(J_i) = \vec{X}$ e $\vec{X}(J_N) = \vec{X}(J_f) = \vec{X}$ não são integrados.

Uma pergunta importante, cuja resposta será utilizada no apêndice 6 da presente tese, é sobre a natureza de tais trajetórias. Da maneira como elas foram introduzidas (como limite de trajetórias poligonais), as trajetórias não são totalmente arbitrarias. Um primeiro resultado, é que estas trajetórias são contínuas. A relação (1.3) permite fazer-mos mais inferências sobre a natureza geométrica de tais trajetórias. Caso os pontos $\vec{X}(J_n) - \vec{X}(J_{n-1})$ não estiverem suficientemente próximos, para que a contribuição correspondente ao termo

$S^{(G,N)}[\vec{X}^{(G,N)}(J)]$ seja menor ou igual a $\bar{\pi}$, o termo correspondente em (1.3) será rapidamente oscilante e a integração sobre $d\vec{X}(J_n)$ e $d\vec{X}(J_{n-1})$ levará ao cancelamento por interferência destrutiva. E, portanto, as trajetórias que efetivamente contribuem para (1.3) devem satisfazer a condição de que (veja a eq. (1.4)):

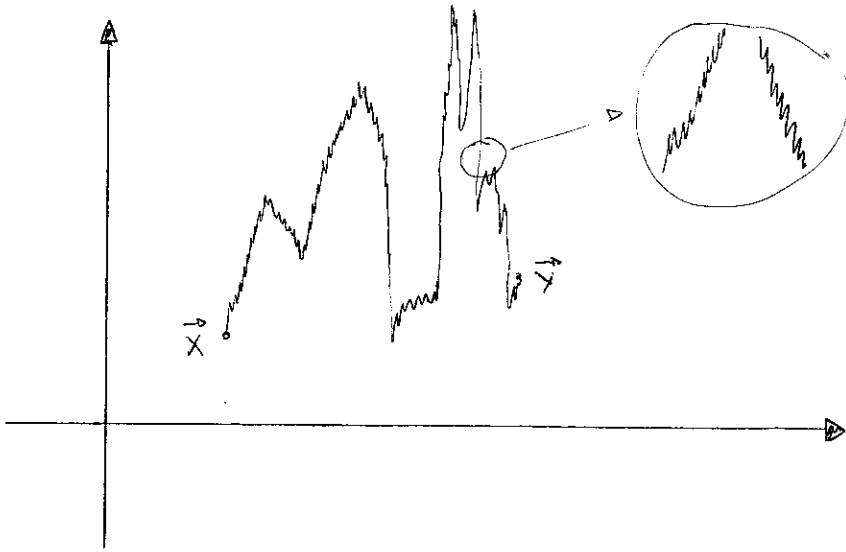
$$\frac{m}{2\hbar\epsilon} (\vec{X}(J_n) - \vec{X}(J_{n-1}))^2 \leq \bar{\pi} \quad (1.5)$$

ou

$$|\delta\vec{X}(J)| = |\vec{X}(J_n) - \vec{X}(J_{n-1})| \leq \left(\frac{2\hbar\epsilon\bar{\pi}}{m} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

. Deste modo, teremos que a velocidade associada a esta

trajetória assume valores arbitrariamente grandes no limite $N \rightarrow \infty$ (ou $\epsilon \rightarrow 0$) $\frac{|\delta \vec{X}|}{\Delta \tau} = \frac{|\delta \vec{X}|}{\epsilon} \sim \left(\frac{2\hbar\pi}{m\epsilon}\right)^{1/2}$. Vemos, então, que as trajetórias $\vec{X}(\tau)$ que efetivamente contribuem para (1.3), possuem um comportamento muito irregular, pois sua derivada $\frac{d\vec{X}(\tau)}{d\tau} = \dot{\vec{X}}(\tau)$ é formalmente infinita para qualquer valor de τ no intervalo de propagação $[\tau_i, \tau_f]$. Este comportamento irregular é análogo ao movimento Browniano (veja a fig. 2)



Pode-se mostrar que é possível recuperar a formulação usual da mecânica quântica a partir do Formalismo das Integrais de Trajetória ([1], [2]).

Denotaremos o espaço de todas estas trajetórias por $\mathcal{C}_{(\vec{x}, \vec{y})}$. Introduzindo a "medida" infinita de Feynman em $\mathcal{C}_{(\vec{x}, \vec{y})}$ (1.7)

$$\mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} d\vec{X}(\tau_k)$$

re-escrevemos (1.3) na forma

$$G((\vec{x}, 0); (\vec{y}, \tau)) = \int_{\mathcal{C}_{(\vec{x}, \vec{y})}} \mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{X}(\tau)]} \quad (1.8)$$

Outro conjunto de resultados úteis provenientes do cálculo funcional serão apresentados.

A derivada funcional de um funcional $F[\vec{X}(\tau)]$ definido, em $\mathbb{C}(\vec{x}, \vec{y})$ é definida pela relação

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\vec{X}(\tau) + \epsilon \delta(\tau - \sigma) \vec{e}_k] - F[\vec{X}(\tau)]}{\epsilon} = \frac{\delta F[\vec{X}(\tau)]}{\delta X_k(\sigma)} \quad (1.9)$$

onde \vec{e}_k denota o vetor $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ em \mathbb{R}^D .
K-ésima

O valor médio do funcional $F[\vec{X}(\tau)]$ será definido pela relação:

$$\langle F \rangle_S = \int_{\mathbb{C}(\vec{x}, \vec{y})} \mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{X}(\tau)]} F[\vec{X}(\tau)] \quad (1.10)$$

Uma relação importante na teoria das integrais de trajetória será deduzida a seguir. Devido a invariância translacional de $\mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)]$ ($\mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)] = \mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau) + \vec{\eta}(\tau)]$), temos que:

$$0 = \int_{\mathbb{C}(\vec{x}, \vec{y})} \mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau) + \vec{\eta}(\tau)] F[\vec{X}(\tau) + \vec{\eta}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{X}(\tau) + \vec{\eta}(\tau)]} - \int_{\mathbb{C}(\vec{x}, \vec{y})} \mathcal{D}_F[\vec{X}(\tau)] F[\vec{X}(\tau)] \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{X}(\tau)]}$$

e assim, desprezando termos de ordem $O(|\vec{\eta}|^2)$, obtemos a relação:

$$\left\langle \frac{\delta F[\vec{X}(\tau)]}{\delta X_k(\sigma)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F[\vec{X}(\tau)] \frac{\delta S[\vec{X}(\tau)]}{\delta X_k(\sigma)} \right\rangle_S \quad (1.11)$$

Finalmente, observamos que pode-se re-escrever o propagador (1.8) como a seguinte média quântica

$$G((\vec{x}, 0); (\vec{y}, \tau)) = \left\langle \delta^{(D)}(\vec{x}(0) - \vec{x}) \cdot \delta^{(D)}(\vec{X}(\tau) - \vec{y}) \right\rangle_S \quad (1.12)$$

a qual possui o significado físico de dar a amplitude de probabilidade da partícula "interceptar" o ponto \vec{x} no instante $\sigma = 0$ e o ponto \vec{y} no instante $\sigma = \tau$

1.3 - A FORMULAÇÃO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA PARA AS TEORIAS QUÂNTICAS DE CAMPO

Neste parágrafo, estudaremos a formulação de Integrais de Trajetórias para sistemas com um número infinito de graus de liberdade, os chamados campos quânticos e tratando as integrais de trajetórias envolvidas na formulação como um tipo de Transformada de Fourier Funcional ([3]).

Podemos descrever uma Teoria Quântica de Campos em um espaço-tempo D-dimensional a partir de um princípio variacional generalizado devido a Schwinger ([3]). Neste formalismo, postula-se a existência de um operador hermitiano, o chamado operador ação e construído a partir das variáveis de campo $\Phi_{(\alpha)}(x)$ e suas derivadas $\partial_{\mu} \Phi_{(\alpha)}(x)$ e denotado por $S[\Phi_{(\alpha)}(x)]$.

As equações de movimento são obtidas a partir de um princípio variacional e produzindo as equações de Euler-Lagrange do sistema quântico:

$$\frac{\delta S[\Phi_{(\beta)}(x)]}{\delta \Phi_{(\alpha)}(x)} = 0 \quad (1.13)$$

onde $\frac{\delta}{\delta \Phi_{(\alpha)}(x)}$ denota a variação funcional total em relação aos campos $\Phi_{(\alpha)}(x)$ do funcional ação $S[\Phi_{(\alpha)}(x)]$.

As condições de contorno impostas às equações de movimento (1.13) devem ser tais que no limite $T \rightarrow \pm \infty$ ($x^{\mu} = (\vec{x}, T)$) devem corresponder a soluções de campos livres (esta é a hipótese do completamento assintótico da teoria). A solução de (1.13) é, em geral, um problema muito complicado. Mas, para a determinação dos elementos da Matriz S; cujo conhecimento permite calcular a probabilidade de ocorrência de um possível processo de

interação entre as excitações da Teoria Quântica de Campos associada, somente é necessário determinar o produto ordenado de campos ([6]):

$$\begin{aligned} & T \left(\Phi_{(\alpha)}(\vec{x}_1, J_1) \dots \Phi_{(\alpha)}(\vec{x}_N, J_N) \right) \\ &= \sum_{\{\pi\}} \theta(J_{\pi(1)} - J_{\pi(2)}) \dots \theta(J_{\pi(N-1)} - J_{\pi(N)}) \Phi_{(\alpha)}(\vec{x}_{\pi(1)}, J_{\pi(1)}) \dots \Phi_{(\alpha)}(\vec{x}_{\pi(N)}, J_{\pi(N)}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

com $\sum_{\{\pi\}}$ denotado a soma sobre todas as possíveis permutações do conjunto $\{1, \dots, N\}$

Um funcional útil para a determinação de (1.14) é o chamado gerador funcional (por motivo de simplicidade na exposição consideramos um único campo $\Phi(x)$ escalar neutro)

$$Z[J(x)] = \langle \Omega_{VAC} | \mathcal{T} \left\{ e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} d^p x J(x) \Phi(x)} \right\} | \Omega_{VAC} \rangle \quad (1.15)$$

com Ω_{VAC} denotado o vácuo quântico e $J(x)$ uma fonte externa (c-número). Conhecendo (1.15), podemos calcular explicitamente o valor médio de (1.14) via a relação

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_{VAC} | \mathcal{T} \left(\Phi(\vec{x}_1, J_1) \dots \Phi(\vec{x}_N, J_N) \right) | \Omega_{VAC} \rangle \\ &= \frac{1}{(i)^N} \frac{\delta^{(N)}}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} Z[J(x)] \Big|_{J(x)=0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para obtermos uma representação integral para o funcional gerador $Z[J(x)]$, consideremos o operador ação $S[\Phi(x)]$ acrescido de um termo correspondente a interação do campo $\Phi(x)$ com uma fonte externa $J(x)$

$$S_J[\Phi(x)] = S[\Phi(x)] + \int d^{p-1} \vec{x} d\tau J(x) \Phi(x) \quad (1.17)$$

As equações de movimento (1.13) tomam, agora, a forma:

$$\left(\frac{\delta}{\delta \Phi} S[\Phi] \right) (x) = J(x) \quad (1.18)$$

Uma relação importante para o funcional $Z[J(x)]$ pode ser obtida a partir de (1.18). Notando que (veja eq. (1.16)):

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_{VAC} | T \left\{ \exp \left(i \int_{-\infty}^{+\infty} d^D \omega J(\omega) \Phi(\omega) \right) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N) \right\} | \Omega_{VAC} \rangle \\ & = \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_N)} \right) Z[J(\omega)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

e portanto,

$$\left(\frac{\delta}{\delta \Phi} S[\Phi] \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J(\omega)] = \langle \Omega_{VAC} | T \left\{ e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} d^D \omega J(\omega) \Phi(\omega)} \frac{\delta S}{\delta \Phi}(x) \right\} | \Omega_{VAC} \rangle \quad (1.20)$$

obteremos que :

$$\left(\frac{\delta}{\delta \Phi} S[\Phi] \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J(\omega)] = J(x) Z[J(\omega)] \quad (1.21)$$

onde fizemos uso da equação de movimento (1.18) em (1.20) para obtermos os 2 membros à direita de (1.21).

Deste modo, obtemos a seguinte equação para o funcional gerador

$$\left\{ \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} Z[J(x)] = J(x) Z[J(x)] \quad (1.22)$$

Para darmos uma representação integral para o funcional $Z[J(x)]$, consideremos a transformada de Fourier Funcional de $Z[J(x)]$: $\mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)]$, as quais são relacionadas pela seguinte integral funcional ([3])

$$Z[J(x)] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[\mathcal{Q}(x)] e^{i \int d^D x J(x) \mathcal{Q}(x)} \mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)] \quad (1.23)$$

onde $\mathcal{D}_F[\mathcal{Q}(x)]$ denota a medida funcional de Feynman cuja expressão simbólica é um produto infinito contínuo de medidas de Lebesgue $\prod_{x \in \mathbb{R}^D} d\mathcal{Q}(x)$. Aqui, as variáveis de integração $d\mathcal{Q}(x)$ são consideradas independentes em cada ponto do espaço-tempo \mathbb{R}^D e \mathcal{M}

denota o espaço formado por estas variáveis. Notemos que o funcional $\mathcal{Q}(x)$ em (1.23) é um C-número e, portanto, não possui relação com o Campo Quântico $\hat{\Phi}(x)$ (a não ser no nível clássico, onde estas variáveis coincidem).

Como no parágrafo 1.2, podemos definir (1.23) a partir do limite:

$$Z[J(x)] = \lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \bar{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^K d\mathcal{Q}(x_i) e^{i \sum_{i=1}^K J(x_i) \mathcal{Q}(x_i) \Delta x_i} \mathcal{F}[\mathcal{Q}(x_1), \dots, \mathcal{Q}(x_K)] \quad (1.24)$$

onde consideramos o espaço-tempo com volume finito V e discretizado em hipercubos de volume $\Delta x_i = \frac{V}{K}$. Como uma observação de carácter matemático, a justificativa rigorosa da existência do limite (1.24) só foi, até agora, obtida para alguns modelos de teoria de campo em um espaço-tempo bidimensional ([5]).

Procedendo do modo usual para determinar soluções de equações diferenciais via a transformada de Fourier, substituímos a expressão (1.23) na eq. (1.22), obtendo a relação:

$$0 = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[\mathcal{Q}(x)] \left(\left(\frac{\delta S}{\delta \hat{\Phi}} \right) (\mathcal{Q}(x)) + J(x) \right) e^{i \int d^D x J(x) \mathcal{Q}(x)} \mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)] \quad (1.25)$$

que pode ser escrita na forma

$$0 = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[\mathcal{Q}(x)] \left(\left(\frac{\delta S}{\delta \hat{\Phi}} \right) (\mathcal{Q}(x)) + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{Q}(x)} \right) e^{i \int d^D x J(x) \mathcal{Q}(x)} \mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)] \quad (1.26)$$

Integrando por partes (1.26), obtemos a seguinte equação funcional para $\mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)]$:

$$\left\{ \left(\frac{\delta S}{\delta \hat{\Phi}} \right) (\mathcal{Q}(x)) + i \frac{\delta}{\delta \mathcal{Q}(x)} \right\} \mathcal{F}[\mathcal{Q}(x)] = 0 \quad (1.27)$$

que possui como solução geral:

$$\mathcal{F}[\varphi(x)] = \frac{1}{Z} e^{iS[\varphi(x)]} \quad (1.28)$$

Obtemos, então, a seguinte representação integral para o funcional gerador $Z[J(x)]$:

$$Z[J(x)] = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} e^{i \int d^D x J(x) \varphi(x) + i \int d^D x S[\varphi(x)]} \mathcal{D}_F[\varphi(x)] \quad (1.29)$$

A determinação da constante Z , se faz usando o significado físico de $Z[J(x)]$ como uma amplitude de probabilidade da transição vácuo \rightarrow vácuo da teoria na presença da fonte externa $J(x)$; e assim, sem fontes externas esta probabilidade é 1:

$$Z[J(x)] \Big|_{J(x) \equiv 0} = Z[0]/Z = 1 \quad (1.30)$$

de dando-nos como resultado

$$Z = Z[0] \quad (1.31)$$

Ao funcional Z , chamamos de funcional de partição da teoria.

O valor esperado de um observável $A = A[\Phi(x)]$ (um funcional do campo quantizado $\Phi(x)$) é expresso na formulação de integral funcional pela relação:

$$\begin{aligned} \langle \Omega_{\text{VAC}} | T(A[\Phi(x)]) | \Omega_{\text{VAC}} \rangle &= \\ &= \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} e^{iS[\varphi(x)]} A[\varphi(x)] \mathcal{D}_F[\varphi(x)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

As representações integrais (1.29), (1.31) e (1.32) são os pontos de partida para a formulação de integrais de trajetória de Feynman nas Teorias Quânticas de Campo.

Finalmente, observamos a utilidade de considerarmos as representações acima em um espaço-tempo euclídeo $X^{(E)} = (\vec{x}, i\tau)$, e assim, $S[\varphi(x)] \rightarrow iS[\varphi(X^{(E)})]$.

, e implicando na relação euclideana:

$$Z = \int \mathcal{D}_F[\varphi(x^{(E)})] \exp\{-S[\varphi(x^{(E)})]\} \quad (1.33)$$

utilizada extensivamente na presente tese.

A quantização via integrais de trajetória para sistemas envolvendo campos quânticos fermiônicos faz-se de modo análogo ao caso bosônico estudado neste parágrafo, notando apenas que as variáveis de campo $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ são tratadas como graus dinâmicos independentes e anti-comutantes $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = \psi(x)\bar{\psi}(y) + \bar{\psi}(y)\psi(x) = 0$ e com uma integral satisfazendo as relações de Berezin ([4])

$$\int d\psi(x) \psi(x) = 1 = \int d\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(x) \quad (1.34)$$

$$\int d\psi(x) = \int d\bar{\psi}(x) = 0 \quad (1.35)$$

1.4 - CÁLCULO EXPLÍCITO DAS INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA DO TIPO GAUSSIANO

Neste parágrafo, apresentaremos os resultados explícitos para o cálculo das Integrais de Trajetória do tipo Gaussiano a serem utilizados na presente tese.

Seja A um operador hermitiano positivo definido e $\varphi(x)$ funções escalares reais. Consideremos a seguinte integral funcional (veja o §1.3)

$$I[J(x)] = \int \mathcal{D}_F[\varphi(x)] e^{-\frac{1}{2} \int d^p x \varphi(x) (A\varphi)(x)} e^{\int d^p x J(x)\varphi(x)} \quad (1.36)$$

Podemos re-escrever (1.36) na seguinte forma conveniente:

$$I[J(x)] = e^{+\frac{1}{2} \int d^p x J(x) (A^{-1} J)(x)} \int \mathcal{D}_F[\varphi(x)] e^{-\frac{1}{2} \int d^p x (\varphi - \tilde{\varphi})(x) (A(\varphi - \tilde{\varphi}))(x)} \quad (1.37)$$

onde $\tilde{\varphi} = (A^{-1} J)(x)$. Notemos que o operador inverso A^{-1} existe, pois A é positivo definido por hipótese.

Para o cálculo da integral de trajetória em (1.37); usamos a invariância sob translações da medida funcional em (1.37) para re-escrevê-la da seguinte forma:

$$\int \mathcal{D}_F[\bar{\varphi}(x)] \exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^p x \bar{\varphi}(x) (A \bar{\varphi})(x)\right\} \quad (1.38)$$

onde $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$

Para efetuarmos (1.38), faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\bar{\varphi}(x) \rightarrow \left\{ c_0, c_1, c_2, \dots, c_N, \dots \right\} \quad (1.39)$$

onde os coeficientes c_k são definidos a partir da expansão de $\varphi(x)$ em termo das auto-funções $\{P_k(x)\}$ de A ($c_k = \int d^p x \varphi(x) P_k(x)$)

Observamos que esta mudança de variável é unitária desde que

$$\int d^p x (\varphi(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \quad . \quad \text{Neste novo sistema de coordenadas, a integral funcional (1.39) toma a forma:}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^l dc_k e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^l \lambda_k c_k^2} \quad (1.40)$$

onde λ_k são os auto-valores de A ($(AP_k)(x) = \lambda_k P_k(x)$)

O resultado de (1.40) é dado por

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^l \lambda_k^{-1/2} = (\text{DET}_F(A))^{-1/2} \quad (1.41)$$

onde DET_F denota o determinante funcional do operador A (veja o apêndice C)

Procedendo do mesmo modo, obtemos o resultado para a integração funcional do tipo gaussiano para $\varrho(x)$ um campo escalar complexo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[J(x), J^*(x)] &= \int \mathcal{D}_F[\varrho(x)] \mathcal{D}_F[\varrho^*(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D x (\varrho^* A \varrho)(x) \right\} \\ &\quad \exp \left\{ \int d^D x (J(x) \varrho^*(x) + J^*(x) \varrho(x)) \right\} \\ &= (\text{DET}_F(A))^{-1} \exp \left\{ \int d^D x J(x) (A^{-1} J)^*(x) \right\} \quad (1.42) \end{aligned}$$

Estudemos, agora, a versão fermiônica das integrais funcionais (1.36):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\eta(x), \bar{\eta}(x)] &= \int \mathcal{D}_F[\psi(x)] \mathcal{D}_F[\bar{\psi}(x)] e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \bar{\psi}(x) (A \psi)(x)} \\ &\quad e^{\int d^D x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)(x)} \quad (1.43) \end{aligned}$$

onde A denota um operador positivo hermitiano atuando nos campos fermiônicos $\psi(x)$ e possuindo um conjunto ortonormal de auto-funções $\{\chi_\kappa(x), \chi_\kappa^*(x)\}$ e auto-valores $\{\lambda_\kappa\}$

Procedendo como nos casos anteriores, podemos re-escrever (1.40) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\eta(x), \bar{\eta}(x)] &= \exp \left\{ + \int d^D x \bar{\eta}(x) (A^{-1} \eta)(x) \right\} \\ &\quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\int \prod_{\kappa=1}^{\ell} da_\kappa d\bar{a}_\kappa e^{-\frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\ell} a_\kappa \lambda_\kappa \bar{a}_\kappa} \right) \quad (1.44) \end{aligned}$$

onde expandimos os campos $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ em termos das auto-funções de A : $\psi(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa \chi_\kappa(x)$, $\bar{\psi}(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \bar{a}_\kappa \chi_\kappa^*(x)$; e $\{a_\kappa, \bar{a}_\kappa\}$

possuem um carácter grassmaniano e, assim, fazendo uso das relações (1.34) e (1.35) obtemos o resultado:

$$I[\eta(x), \bar{\eta}(x)] = \text{DET}_F(A) \exp\left\{\int d^D x \eta(x) (\overline{A^{-1} \eta})(x)\right\} \quad (1.45)$$

Estas integrais funcionais serão usadas extensivamente nas discussões apresentadas nos próximos capítulos.

REFERÊNCIAS PARA O CAPÍTULO 1

- [1] R.P. Feynman ., Rev Mod. Phys. 20, 367 (1948)
- [2] R.P. Feynman and A.R. Hibbs .,"Quantum Mechanics and Path Integrals", Mc Graw-Hill, New York, 1965
- [3] B. De Witt - Jour of Math. Phys, vol 3, nº 6 (1962), 1073
- [4] Berezin, F.A. - "The Method of Second Quantization", New York, Academic Press (1966)
- [5] J. Glimm and A. Jaffe, "Quantum Physics", Springer, New York (1977)
- [6] J. D. Bjorken and S. Drell - "Relativistic Quantum Fields" - N.Y. Mc. Graw-Hill - 1965.

CAPÍTULO 2

QUANTIZAÇÃO DAS TEORIAS DE CALIBRE

2.1 - INTRODUÇÃO

Um dos problemas fundamentais das Teoria de Calibre é o de sua quantização ([1], [2], [3], [4], [5]). E neste problema, o formalismo das Integrais de Trajetória de Feynman (veja capítulo 1) tem se mostrado de maior utilidade que o formalismo canônico de quantização usual ([7]).

Nosso objetivo neste capítulo é propor um formalismo de quantização para as Teorias de Calibre no esquema das Integrais de Trajetória de Feynman que é adequado para a quantização de sistemas físicos possuindo grupos de simetria de dimensão; infinita ([6]). A idéia básica do formalismo, será a introdução de uma métrica invariante pela ação do grupo de calibre no espaço funcional das configurações de campo e, então, tratar o funcional de partição do sistema como uma integral funcional invariante neste espaço de configurações riemanizado.

O presente capítulo está dividido em 2 parágrafos. No primeiro parágrafo, apresentaremos de um modo generalizado o formalismo das medidas funcionais invariantes proposto pelo autor da presente tese. No segundo parágrafo, o aplicaremos a quantização dos Campos de Calibre e re-obteremos as regras de Feynman da teoria. Finalmente, faremos algumas observações e comentários sobre a aplicabilidade em outras teorias de campo do formalismo proposto.

2.2 - O FORMALISMO DAS MEDIDAS FUNCIONAIS DE FEYNMAN INVARIANTES

Neste parágrafo exporemos de um modo geral o formalismo das medidas funcionais de Feynman Invariantes.

Começaremos apresentando os conceitos de geometria diferencial ([10]) e da teoria de integração de funções invariantes ([8] - apêndice II) a serem utilizados no decorrer da exposição.

Dizemos que uma variedade \mathcal{M} de classe C^∞ e de dimensão m possui uma estrutura riemanniana se existe um campo tensorial $g_{h\bar{j}}(x)$ não-negativo em \mathcal{M} ($h, \bar{j} = 1, \dots, m$). Para cada ponto $x \in \mathcal{M}$; $g_{h\bar{j}}(x)$ induz um produto interno no espaço tangente a \mathcal{M} neste ponto: $T(\mathcal{M})_x$. Deste modo, para cada deslocamento infinitesimal $dx^{\bar{j}}$ em ponto $x \in \mathcal{M}$ associamos um elemento de linha ds^2 de acordo com a relação (veja a fig. 3)

$$ds^2 = g_{h\bar{j}}(x) dx^h dx^{\bar{j}} = g_{h\bar{j}}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (2.1)$$

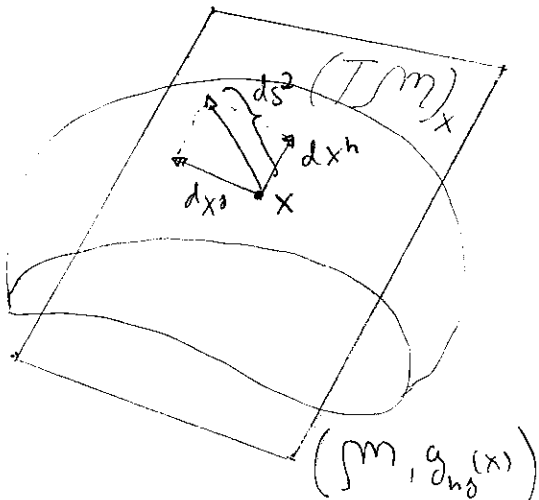


FIG 3

Legendas à FIG 3

$(\mathcal{M}, g_{h\bar{j}}(x))$ denota a variedade riemanniana e $(T\mathcal{M})_x$ o plano tangente em x .

$(dx^{\bar{j}}, dx^h)$ os deslocamentos infinitesimais no ponto x e ds^2 o comprimento deste vetor deslocamento em $(T\mathcal{M})_x$

A métrica em (2.1) induzirá uma forma (ou elemento) de volume em $(M, g_{h\delta}(x))$ cuja expressão é dada por

$$dV(x) = \sqrt{\text{DET}\{g_{h\delta}(x)\}} dx^1 \dots dx^m \quad (2.2)$$

onde $\text{DET}\{g_{h\delta}(x)\}$ denota o determinante da matriz $\{g_{h\delta}(x)\}$ formada pelos coeficientes da métrica (2.1)

Consideremos agora V , uma sub-variedade de dimensão $m \leq m$ de M e que seja representada parametricamente por um conjunto de equações

$$x^\delta = y^\delta(u^\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, m) \quad (2.3)$$

onde $\{u^\alpha\}$ pertence a um domínio conveniente de parâmetros. O deslocamento infinitesimal em um ponto $y^\delta(u^\alpha)$ de V pode ser expresso como um deslocamento infinitesimal no espaço dos parâmetros $\{u^\alpha\}$:

$$dy^\delta = \frac{\partial y^\delta}{\partial u^\alpha} du^\alpha = B_\alpha^\delta(u^\beta) du^\alpha \quad (2.4)$$

onde introduzimos a matriz $m \times m$ com os elementos $B_\alpha^\delta(u^\beta) = \frac{\partial y^\delta}{\partial u^\alpha}(u^\beta)$

Iremos supor que a matriz $B_\alpha^\delta(u^\beta)$ para qualquer valor $\{u^\beta\}$ possui característica máxima m e portanto assegurando que os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right\} (\alpha=1, \dots, m)$ são linearmente independentes e consequentemente geram o espaço tangente de V no ponto $\{y^\delta(u^\alpha)\}$. A métrica $\{g_{h\delta}(x)\}$; induz por sua vez uma métrica em V ; cuja expressão explícita no domínio dos parâmetros $\{u^\alpha\}$ é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{\text{IND}} S^2 &= g_{h\partial} (y^\partial(u^\delta)) dy^\partial(u^\delta) dy^h(u^\delta) \\
 &= g_{h\partial} (y^\partial(u^\delta)) B_{h^\alpha} (u^\delta) B_{\partial\beta} (u^\delta) dU^\alpha dU^\beta \\
 &= g_{\alpha\beta}^{\text{IND}} (u^\delta) dU^\alpha dU^\beta \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

onde
$$g_{\alpha\beta}^{\text{IND}} (u^\delta) = g_{h\partial} (y^\partial(u^\delta)) B_{h^\alpha} (u^\delta) B_{\partial\beta} (u^\delta)$$

A métrica (2.5) tem o seguinte elemento de volume associado em $(V, g_{\alpha\beta}^{\text{IND}})$

$$d^{\text{IND}} V(u^\delta) = \sqrt{\text{DET}\{g_{\alpha\beta}^{\text{IND}}(u^\delta)\}} dU^1 \dots dU^m \quad (2.6)$$

Uma observação útil é que no caso de $m=m$ e $V=\int M$, e portanto (2.3) é um novo sistema de coordenadas em $\int M$; as formas de volume (2.2) e (2.6) coincidem numericamente e (2.6) nada mais é que a forma de volume (2.2) expressa neste novo sistema de coordenadas de $\int M$

Consideremos agora um grupo de Lie compacto $\overset{G}{\mathcal{G}}$ atuando em $(\int M, g_{h\partial}(x))$, isto é: $l \cdot X$ pertence a $\int M$ para qualquer $l \in G$. O espaço quociente $\int M / G$ é denominado de espaço de órbitas de $\int M$ sobre a ação de G . Façamos a suposição que o G atue isometricamente em $\int M$, isto é: A distância entre 2 pontos X e Y em $\int M$ é a mesma entre os pontos $(l \cdot X)$ e $(l \cdot Y)$ para qualquer $l \in G$. Consideremos agora uma função $f(x)$ definida em $\int M$ e que seja G -invariante: $f(l \cdot X) = f(X)$ para qualquer $l \in G$ e $X \in \int M$. Definamos a órbita de um elemento $X \in \int M$ como sendo a sub-variedade de $\int M$ formada pelos pontos $\{l \cdot X\}$, com $X \in \int M$ fixo em $\{l\}$ variando em G .

Analisemos o problema de dar o significado para a integral da função $f(x)$ acima, em M

$$J = \int_M f(x) dV(x) \quad (2.7)$$

, com $dV(x)$ sendo dado por (2.2)

O problema que surge em (2.7) é a redundância do domínio de integração M no sentido que os pontos $\{x\}$ e $\{\ell \cdot x\}$ ($\ell \in G$) são indistinguíveis, pois, $f(x) = f(\ell \cdot x)$ e $dV(x) = dV(\ell \cdot x)$

Fazendo uso da teoria da integral das funções invariantes, podemos remover esta degenerescência de J considerando o espaço de órbitas M/G como o domínio efetivo para realizarmos a integral de $f(x)$, desde que neste conjunto a função não é mais G -invariante. Passando, então, a este novo domínio por uma mudança de variáveis, obtemos o resultado (veja o apêndice II da ref. [8])

$$\int_M f(x) dV(x) = \int_{M/G} f(\bar{x}) dV(\bar{x}) \left(\int_{N(\bar{x})} dV^{IND}(\bar{x}) \right) \quad (2.8)$$

onde $\bar{x} \in M/G$ e $\int_{N(\bar{x})} dV^{IND}(\bar{x})$ denota o volume da órbita $N(\bar{x})$ (que é uma sub-variedade de M) com o elemento de volume $dV^{IND}(\bar{x})$ induzido pela métrica $\{g_{n_j}(x)\}$ nesta órbita (veja a eq. (2.6)). Notamos ainda que o volume da órbita $N(\bar{x})$ é uma função G -invariante no sentido que :

$$\int_{N(\ell \cdot \bar{x})} dV^{IND}(\ell \cdot \bar{x}) = \int_{N(\bar{x})} dV^{IND}(\bar{x})$$

(2.8) em sua versão de integrais de trajetória será fundamental para o formalismo das medidas funcionais de Feynman invariante a ser examinado.

Por motivos pedagógicos, exporemos estes conceitos em um exemplo simples.

Consideremos como a variedade M o espaço \mathbb{R}^2 com a métrica euclideana usual $dS^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2$ ($g_{h_j}(x) = \delta_{h_j}$, $(h, j = 1, 2)$) e G o grupo das rotações $O(2)$. O grupo $O(2)$ atua no espaço euclideano \mathbb{R}^2 de um modo isométrico, pois a distância entre 2 pontos é inalterada por uma rotação. Notando que cada órbita $\mathcal{N}(\bar{x})$ é uma circunferência de raio $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, podemos identificar o espaço de órbitas $\mathbb{R}^2/O(2)$ com a reta real positiva \mathbb{R}^+ . Consideremos a função $O(2)$ -invariante $f(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$. Desejamos calcular a integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \quad (2.9)$$

Para isto, usaremos a relação (2.8). A métrica euclideana induz na reta \mathbb{R}^+ , a métrica usual $dS^2(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}|$ e assim $dV(\bar{x}) = d|\bar{x}|$. Devemos, então, calcular o volume de cada órbita determinada por um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$ que geometricamente coincide com os pontos de uma circunferência de raio $|\bar{x}|$. Consideremos a seguinte parametrização de $\mathcal{N}(\bar{x})$ (veja a eq.

(2.3)):

$$\mathcal{N}(\bar{x}) = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 = |\bar{x}| \cos \theta, x_2 = |\bar{x}| \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

A métrica euclideana de \mathbb{R}^2 induz a seguinte métrica em $\mathcal{N}(\bar{x})$ (veja a eq. (2.5))

(2.10)

$$\begin{aligned}
 d^{IND}S^2 &= (|\bar{x}|(-\text{SEN}\theta d\theta))^2 + (|\bar{x}|(\text{COS}\theta d\theta))^2 \\
 &= |\bar{x}|^2 (d\theta)^2
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

e com o seguinte elemento de volume associado

$$dV^{IND}_{(|\bar{x}|)} = |\bar{x}| \cdot d\theta \tag{2.12}$$

Deste modo, a integral (2.9) toma a seguinte forma em

$\mathbb{R}^2 / O(2) \cong \mathbb{R}^+$ (veja a eq. (2.8)):

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 &= \int_{\mathbb{R}^+} f(|\bar{x}|^2) |\bar{x}| \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d|\bar{x}| \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} f(|\bar{x}|^2) \cdot |\bar{x}| d|\bar{x}|
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

que coincide com a expressão da integral (2.9) em coordenadas polares $(|\bar{x}|, \theta)$

Note que o volume de cada órbita $\mathcal{N}(\bar{x})$ (veja a eq. (2.10)) é dado por $2\pi|\bar{x}|$, o comprimento da circunferência de raio $|\bar{x}|$.

Tendo exposto e exemplificado, os conceitos geométricos, passaremos a formulação do método proposto de quantização.

Seja uma teoria quântica de campo descrita por um funcional ação $S[\mathcal{U}_{(\alpha)}(x)]$ (veja o parágrafo § 1.3 - cap. 1); onde $\mathcal{U}_{(\alpha)}(x)$ denota de um modo coletivo os campos quânticos da teoria. Suponhamos que a teoria possua como simetria um grupo de Lie G que atua no espaço de configurações $\mathcal{M} = \{\mathcal{U}_{(\alpha)}(x)\}$. G deverá ser uma simetria do funcional ação $S[\mathcal{U}_{(\alpha)}(x)]$; isto é: $S[\mathcal{U}_{(\alpha)}(x)] = S[(\ell \cdot \mathcal{U})_{(\alpha)}(x)]$ para $\ell \in G$. Note

que supomos que os campos $\{\varphi_{(\alpha)}(x)\}$ fornecem uma representação de G .

Para a dedução das regras de Feynman da teoria, devemos considerar o funcional de partição associado a ação $S[\varphi_{(\alpha)}(x)]$ (veja a eq. (1.31))

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\varphi_{(\alpha)}(x)] \cdot e^{i S[\varphi_{(\alpha)}(x)]} \quad (2.14)$$

Devemos dar um significado preciso para a integral de trajetórias (2.14). O mesmo problema da redundância do domínio de integração como em (2.7) se apresenta: as configurações de campo relacionadas entre si por uma transformação ℓ do grupo de simetria são fisicamente indistinguíveis e portanto contribuem igualmente para o funcional de partição (2.14).

Para dar um significado preciso para (2.14), introduzamos uma métrica no espaço funcional

$$ds^2 = g_{\delta\Sigma}(\varphi_{(\alpha)}(x)) \delta\varphi_{(\alpha)}(x) \cdot \delta\varphi_{\Sigma}(x) \quad (2.15)$$

e que satisfaça a condição de que G atue isometricamente em \mathcal{M} . (Notemos, que como consequência de (2.15), \mathcal{M} possui uma estrutura riemanniana):

$$\frac{\delta}{\delta\ell} \left\{ g_{\delta\Sigma}(\ell \cdot \varphi)_{(\alpha)}(x) \right\} = 0 \quad (2.16)$$

onde $\frac{\delta}{\delta\ell}$ denota a variação funcional em relação a $\ell \in G$; isto é: os coeficientes $g_{\delta\Sigma}(\varphi)$ da métrica são funções G -invariantes

Uma definição natural para (2.14) é dada pela versão funcional de (2.8):

$$Z = \int_{\mathcal{M}/\mathcal{G}} \mathcal{D}[\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)] e^{iS[\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)]} \left(\int \mathcal{D}^{(IND)}[\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)] \right) \mathcal{N}(\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)) \quad (2.17)$$

onde $\int \mathcal{D}^{(IND)}[\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)] \mathcal{N}(\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x))$ denota o volume (funcional)

da órbita determinada por uma dada configuração de campo inequivalente $\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x) \in \mathcal{M}/\mathcal{G}$. Observamos que este volume depende funcionalmente do ponto base $\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x)$ de $\mathcal{N}(\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x))$.

O problema do uso da relação proposta (2.17), reside no cálculo do volume da órbita $\mathcal{N}(\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x))$ que por sua vez irá exigir a determinação explícita de uma parametrização para o conjunto $\mathcal{N}(\bar{\varphi}_{(\alpha)}(x))$ (compare com o exemplo (eq. (2.10))

No próximo parágrafo, apresentaremos uma primeira aplicação deste formalismo à determinação das regras de Feynman das Teorias de Calibre de Yang-Mills SU(N)

2.3. QUANTIZAÇÃO DA TEORIA DE CALIBRE DE YANG-MILLS SU(N)

Nosso objetivo neste parágrafo será implementarmos o formalismo de medidas funcionais invariantes exposto no 2.2 para a Teoria de Calibre de Yang-Mills SU(N).

As variáveis de campo desta teoria são campos vetoriais tomando valores na Álgebra de Lie de SU(N)

$$G_{\mu}(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} g_{\mu}^a(x) \lambda_a \quad (2.18)$$

onde $\{\lambda_a\}$ ($a=1, \dots, N^2-1$) denotam os geradores hermitianos normalizados da representação adjunta de $SU(N)$ (isto é :
 $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = \delta_{ab}$)

O funcional ação (euclidiano) da teoria (veja o §2.3) é dado por

$$S[G_\gamma(x)] = -\frac{1}{4} \int d^D x \text{Tr}^{(c)}(F_{\mu\nu}(G_\gamma) F_{\mu\nu}(G_\gamma))(x) \quad (2.19)$$

onde o tensor intensidade de campo é expresso por:

$$F_{\mu\nu}(G_\gamma)(x) = (\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + g[G_\mu, G_\nu])(x) \quad (2.20)$$

com g denotando a constante de acoplamento e $\text{Tr}^{(c)}$, a operação traço sobre os índices $SU(N)$ da expressão

Segundo a análise do §2.2 (veja a eq. (2.14)), devemos considerar o funcional de partição da teoria

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\gamma(x)] e^{-S[G_\gamma(x)]} \quad (2.21)$$

onde \mathcal{M} denota o espaço-funcional das configurações de campo de calibre $SU(N)$ (veja a eq. (1.23)).

Devido ao fato de $S[G_\gamma(x)]$ ser um funcional invariante sob a ação do grupo de calibre local $G = \prod_{x \in \mathbb{R}^D} SU(N)_x$; que nada mais é o espaço de todas as funções $\Omega(x)$ do espaço-tempo \mathbb{R}^D no grupo de calibre global $SU(N)$; estamos na presença do fenômeno da redundância do domínio de integração funcional \mathcal{M} , o que torna aplicável o formalismo exposto no parágrafo §2.2 via a relação fundamental (2.17).

Notemos que o grupo de calibre local G atua nos campos $G_\gamma(x)$ (veja a eq. (2.18)) via as transformações

$$G_\gamma(x) \rightarrow G_\gamma^\Omega(x) = \Omega(x) G_\gamma(x) \Omega^{-1}(x) + \frac{1}{g} (\partial_\gamma \Omega)(x) \cdot \Omega^{-1}(x) \quad (2.22)$$

com $\Omega(x) \in G$. Considerando $\Omega(x) = \mathbb{1} + ig(\delta\omega^a(x))\lambda_a$, uma transformação local de calibre infinitesimal na vizinhança da transformação identidade $\mathbb{1}$, a relação (2.22) toma a forma conveniente

$$\delta g_\gamma^a(x) = (g_\gamma^a(x))^\Omega - g_\gamma^a(x) = C^{abc} g_\gamma^c(x) (\delta\omega^b(x)) + \frac{1}{g} (\partial_\gamma (\delta\omega^a))(x) \quad (2.23)$$

onde C^{abc} denota as constantes de estrutura da Álgebra de Lie de $SU(N)$ ($C^{abc} = \text{Tr}^{(c)}([\lambda^a, \lambda^b] - \lambda^c)$)

Como primeiro passo na aplicação do formalismo das medidas funcionais invariantes do § 2.2, riemannizaremos o espaço-funcional \mathcal{M} via a introdução de uma métrica funcional em \mathcal{M} (veja a fig. 4)

$$dS^2 = \int d^D x d^D x' (\delta g_\mu^a(x)) \delta^{(D)}(x-x') \gamma_{ab}^{\mu\nu} [G_\gamma](x) (\delta g_\nu^b(x')) \quad (2.24)$$

com $(\delta g_\alpha^d(x))$ denotando os deslocamentos infinitesimais no ponto $G_\gamma(x) \in \mathcal{M}$ e $\gamma_{ab}^{\mu\nu} [G_\gamma](x)$ os coeficientes da métrica funcional.

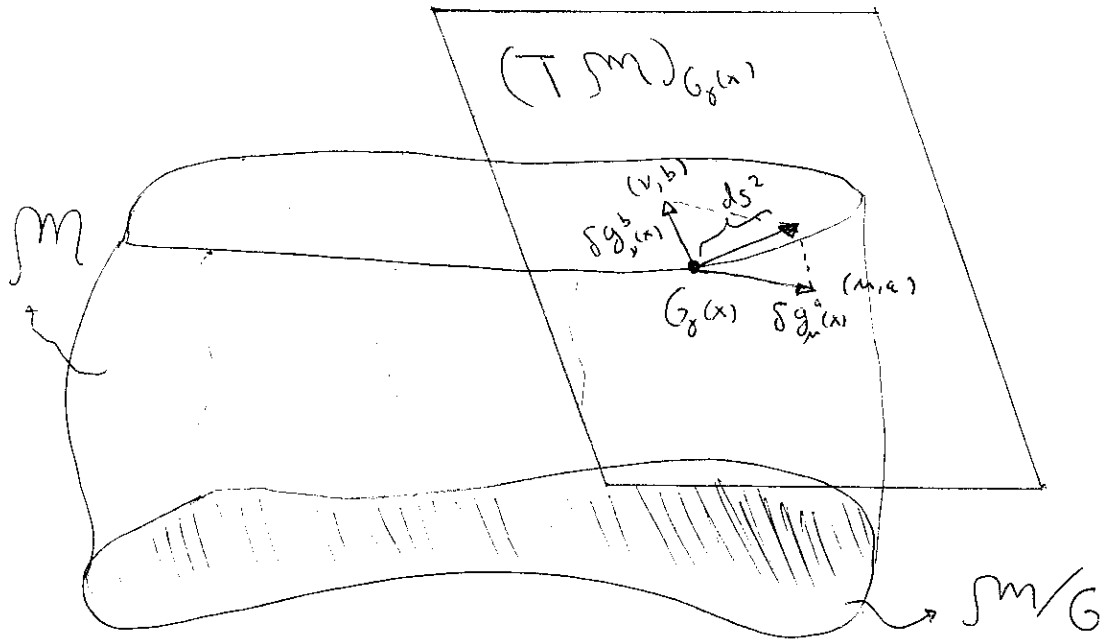


FIG 4

Legendas para a fig. (4)

$\int \mathcal{M}$ = Espaço-funcional dos campos de calibre SU(N)

$\int \mathcal{M}/G$ = Espaço-funcional dos campos não-equivalentes de calibre SU(N)

$(T\int \mathcal{M})_{G_\delta(x)}$ = Espaço-tangente a $\int \mathcal{M}$ no "ponto" $G_\delta(x)$
 $(\delta g_{\nu}^b; \delta g_{\mu}^a)$ = Componentes infinitesimais do deslocamento em $(T\int \mathcal{M})_{G_\delta(x)}$ nas direções (ν, b) e (μ, a)
 dS^2 = "Comprimento" do vetor deslocamento infinitesimal acima.

A forma funcional dos coeficientes $\gamma_{ab}^{\mu\nu}[G_\delta(x)]$ será determinada a partir da condição de que o grupo de calibre local atue isometricamente em $\int \mathcal{M}$ (veja a eq. (2.16)) e que induza uma forma de volume funcional do espaço de configurações de campos de calibre SU(N) não-equivalentes (o chamado espaço de órbitas) $\int \mathcal{M}/G$ dada pela medida de Feynman usual (veja a eq. (1.23)). A

única expressão G-invariante para $\gamma_{ab}^{\mu\nu} [G_\gamma(x)]$ que satisfaz as condições acima é dada pelo produto tensorial da métrica usual de Cartan em $SU(N)$ e a métrica do espaço-tempo atuando nos índices de Lorentz (veja a ref. [5] - pag. 1201). A expressão explícita dos coeficientes desta métrica funcional tem a seguinte forma

$$\gamma_{ab}^{\mu\nu} [G_\gamma(x)] = \delta^{\mu\nu} \delta_{ab} \quad (2.25)$$

Devemos agora construir o espaço das configurações de campo não-equivalentes ou o chamado espaço de órbitas (veja a parte em negrito da fig. 4). Implementaremos esta construção, considerando um conjunto de N^2-1 funcionais $f^a(G_\gamma(x))$ ($a=1, \dots, N^2-1$) em \mathcal{M} , os quais satisfazem a condição de que a equação $f^a(G_\gamma^\Omega(x)) = 0$ tenha uma única solução $\Omega(x)$ para cada $G_\gamma(x)$ fixo em \mathcal{M} . Este procedimento é denominado de fixação de calibre da teoria. No que segue, denotaremos coletivamente os N^2-1 funcionais pelo único funcional

$$F(G_\gamma)(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} f^a(G_\gamma(x)) \lambda_a, \text{ tomando valores na Álgebra de Lie de } SU(N).$$

O espaço de órbitas \mathcal{M}/G será identificado com o subconjunto de \mathcal{M} (sub-variedade) definido implícitamente pela relação

$$F(G_\gamma)(x) = 0 \quad (2.26)$$

Denotaremos um elemento arbitrário de \mathcal{M}/G por $\bar{G}_\gamma(x)$

O elemento de volume funcional induzido pela métrica (2.24) em \mathcal{M}/G (veja as eqs. (2.5) e (2.6)), como já observa-

mos, é dado pela medida de Feynman usual:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F[\bar{G}_\gamma(x)] &= \prod_{(x, \gamma, c)} \text{DET} \left\{ \gamma_{ab}^{\mu\nu}[\bar{G}_\gamma(x)] \right\} d\bar{g}_\gamma^c(x) \\ &= \prod_{(x, \gamma, c)} \text{DET} \{ \delta^{\mu\nu} \} \cdot \text{DET} \{ \delta^{ab} \} \cdot d\bar{g}_\gamma^c(x) \\ &= (D \cdot N) \left(\prod_{(x, \gamma, c)} d\bar{g}_\gamma^c(x) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde D é a dimensão do espaço-tempo e N a ordem do grupo $SU(N)$.

O cálculo do elemento de volume de uma dada órbita de terminada por uma dada configuração de campo inequivalente fixa $\tilde{G}_\gamma(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} \tilde{g}_\gamma^a(x) \lambda_a$ e denotada por $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma(x))$ (isto é: o conjunto de todas as configurações de campo obtidas a partir de $\tilde{G}_\gamma(x) \in \mathcal{M}/G$ por uma transformação de calibre $\Omega(x)$; cujo conhecimento faz-se necessário para aplicar a relação (2.17); será realizado fazendo-se uso do fato que a métrica funcional (2.24) induz, por sua vez, uma métrica na órbita $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma(x))$ (que é um sub-conjunto de \mathcal{M}). Para calcularmos explicitamente os coeficientes da métrica induzida em $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma(x))$ e, assim, obtermos a sua forma de volume, será necessário termos uma parametrização explícita da mesma (como no exemplo do §2.2, eq. (2.10)).

Para isto, restringiremos a nossa análise a classe dos funcionais $F(G_\gamma(x))$ lineares:

$$F(G_\gamma + H_\gamma) = F(G_\gamma) + F(H_\gamma) \quad (2.28)$$

e assim, o funcional $\frac{\delta F}{\delta G_\gamma} = \left\{ \frac{\delta f^\alpha(G_\gamma)}{\delta g_{\mu\nu}^c} \right\}$ é independente dos campos de calibre $G_\gamma(x)$.

Mostraremos que os funcionais abaixo; com domínio no grupo de calibre local G ;

$$Y_{\mu}^a(\Omega; \tilde{G}_{\gamma}) = \text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(G_{\gamma})}{\delta G_{\gamma}} \right\} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_{\gamma}(x)] g_{\mu}^a(x) \delta_F(F(G_{\gamma} - \tilde{G}_{\gamma}^{\Omega})) \quad (2.29)$$

forneem efetivamente uma parametrização da órbita para os funcionais lineares (2.28).

Note que esta classe de funcionais incluem os chamados calibres lineares (Lorentz, Axial, 't Hooft, etc...) ([1]) e possuem a forma geral $F(G_{\gamma}) = \mathcal{L}(G_{\gamma})$, com \mathcal{L} denotando um operador diferencial linear. Notemos que neste último caso, o determinante funcional em (2.22) é independente do campo e pode absorvido na definição da medida de Feynman

A verificação de que (2.29) é uma parametrização de $\mathcal{N}(\tilde{G}_{\gamma}(x))$ será feita pelo cálculo da integração funcional em (2.29). Como primeiro passo, observamos que as únicas configurações de campo que efetivamente contribuem para o integrando, serão aquelas que anulam o argumento da função delta em (2.29), isto é: $F(G_{\gamma} - \tilde{G}_{\gamma}^{\Omega}) = 0$ em \mathcal{M} se e somente se $G_{\gamma} = \tilde{G}_{\gamma}^{\Omega}$, e assim, produzindo o resultado (veja apêndice A):

$$\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_{\gamma}(x)] g_{\mu}^a(x) \delta_F(F(G_{\gamma} - \tilde{G}_{\gamma}^{\Omega})) = \frac{1}{\text{DET}_F \left(\left\{ \frac{\delta F(G_{\gamma})}{\delta G_{\gamma}} \right\} \Big|_{G_{\gamma} = \tilde{G}_{\gamma}^{\Omega}} \right)} (\tilde{g}_{\mu}^a(x))^{\Omega} \quad (2.30)$$

que depois de substituído em (2.29), nos mostra que $Y_{\mu}^a(\Omega; \tilde{G}_{\gamma})$ coincide com a configuração $\{\tilde{G}_{\gamma}^{\Omega}(x)\} \in \mathcal{N}(\tilde{G}_{\gamma})$

$$= \sum_{a=1}^{N^2-1} Y_{\mu}^a(\Omega; \tilde{G}_{\gamma}) \lambda_a$$

Notemos o fato importante que a expressão $Y_\mu^a(\Omega; \tilde{G}_\gamma)$ contém explicitamente a informação sobre a "posição" do espaço de órbitas \mathcal{M}/G em \mathcal{M} via o aparecimento explícito do funcional $F(G_\gamma)$. Isto é: para cada escolha de fixação de calibre $F(G_\gamma)$, temos uma parametrização diferente.

Para calcularmos os coeficientes da métrica funcional na órbita $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma)$ pela métrica funcional (2.25), faremos uso das versões funcionais das eqs. (2.5) e (2.6).

$$dS_{IND}^2 = \int d^D x d^D x' \left\{ \frac{\delta}{\delta \Omega} Y_\mu^a(\Omega; \tilde{G}_\gamma) \right\}(x) (\delta \Omega(x)) \delta^{(D)}(x-x') \delta^{\mu\nu} \delta_{ab} \left\{ \frac{\delta}{\delta \Omega} Y_\nu^b(\Omega; \tilde{G}_\gamma) \right\}(x') (\delta \Omega(x')) \quad (2.31)$$

Notando que (veja a eq. 2.29):

$$\frac{\delta}{\delta \Omega} Y_\mu^a(\Omega; \tilde{G}_\gamma) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F [G_\gamma(x)] g_\mu^a(x) \left\{ - \left(\frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \right)(x) \delta'_F (F(G_\gamma) - F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)) \right\} \quad (2.32)$$

onde supomos que a escolha do calibre é tal que o determinante funcional que aparece em (2.30) é independente dos campos (eq. (2.28)); o que permite obter o resultado (2.32).

Observamos na eq. (2.32), o uso da derivação total de um funcional arbitrário $C[G_\gamma(x)]$ em \mathcal{M} , isto é:

$$C'[G_\gamma(x)] \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{(a,b)} \frac{\delta}{\delta g_\gamma^a} C[G_\gamma(x)] \quad (2.33)$$

O cálculo explícito da integral funcional em (2.32) é realizado usando a versão funcional do resultado estabelecido no apêndice A:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \left\{ \frac{d}{dx} (\delta(f(x))) \right\} dx = - \sum_{\{x_0\}} \left. \frac{\frac{d}{dx} h(x)}{\frac{d}{dx} f(x)} \right|_{x=x_0} \quad (2.34)$$

onde $\{x_0\}$ denota o conjunto dos zeros simples de $f(x)$

Isto é:

$$\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_\gamma(x)] \left(-g_\mu^a(x) \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}(x) \right) \cdot \delta'_F(F(G_\gamma) - F(\tilde{G}_\gamma^\Omega))$$

$$= \frac{1}{\text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(G_\gamma)}{\delta G_\gamma} \right\}} \left\{ \sum_{(\gamma, b)} -\frac{\delta}{\delta g_\gamma^b} \left(g_\mu^a(x) \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}(x) \right) \right\} \Big|_{G_\gamma = \tilde{G}_\gamma^\Omega} \quad (2.35)$$

Usando o fato de que o funcional $\frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}$ não depen

de funcionalmente da variável de campo g_γ^b , desde que \tilde{G}_γ está fixo, obtemos:

$$\frac{\delta}{\delta g_\gamma^b} \left(g_\mu^a \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \right) = \delta_{\mu\gamma} \delta_{ab} \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}$$

$$+ g_\mu^a \frac{\delta}{\delta g_\gamma^b} \left(\frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \right)$$

$$= \delta_{\mu\gamma} \delta_{ab} \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} + 0 \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.35), e esta última relação em (2.31), obtemos a seguinte expressão para a métrica funcional induzida em $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma)$:

$$dS_{\text{IND}}^2 = \int d^D x d^D x' \delta^{(D)}(x-x') \left(\frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}(x) \right) (\delta \Omega(x))$$

$$\sum_{(\gamma, \gamma', \gamma'')} \left(\delta_{\mu\gamma} \delta_{ac} (\delta_{\mu\nu} \delta_{ab}) \delta_{\nu\gamma'} \delta_{bc'} \right)$$

$$\left(\frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega}(x') \right) (\delta \Omega(x')) \quad (2.37)$$

Observando que $\sum_{(\gamma, \gamma', c, c')} \delta_{\mu\gamma} \delta_{ac} (\delta^{\mu\nu} \delta_{ab}) \delta_{\nu\gamma'} \delta_{bc'} = \sum_{\{\gamma, \gamma', c, c'\}} \delta^{\gamma\gamma'} \delta_{cc'} = N \cdot D$ temos o seguinte elemento de volume funcional induzido na órbita $\mathcal{N}(\tilde{G}_\gamma(x))$ (veja a eq. (2.17)).

$$\mathcal{D}^{(IND)}[\tilde{G}_\gamma^\Omega] = \text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)(x)}{\delta \Omega} \right\} \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega] \quad (2.38)$$

Notemos que $\mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega]$ denota a medida de Feynman G-invariante do grupo de calibre $G = \prod_{x \in \mathbb{R}^D} SU(N)_x$ definida pela relação:

$$\int_G \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega(x)] \cdot C[\Omega(x)] = \int_G \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega(x)] C[\Omega(x), \Omega'(x)] \quad (2.39)$$

para qualquer transformação de calibre local $\Omega'(x)$ fixa e $C[\Omega(x)]$ um funcional em G ($[G]$)

É importante observar que o único ponto do cálculo do volume da órbita em que se faz necessário o conhecimento da forma explícita dos coeficientes $\gamma_{ab}^{\mu\nu}[\tilde{G}_\gamma]$ da métrica funcional em \mathcal{M} é no cálculo da expressão $\sum_{(\gamma, \gamma', c, c')} \delta_{\mu\gamma} \delta_{ac} (\delta^{\mu\nu} \delta_{ab}) \delta_{\nu\gamma'} \delta_{bc'}$ e.m.(2.37)

Fazendo uso da relação (2.17) no presente caso, obtemos a expressão do funcional de partição da teoria no espaço de órbitas

$$Z = \int_{\mathcal{M}/G} \mathcal{D}_F[\tilde{G}_\gamma] \cdot e^{-S[\tilde{G}_\gamma]} \left\{ \int_G \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega] \text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(\tilde{G}_\gamma^\Omega)(x)}{\delta \Omega} \right\} \right\} \quad (2.40)$$

Resaltamos que o Espaço de Configurações efetivo da teoria \mathcal{M}/G constitui um conjunto não-vetorial (não linear) do espaço funcional \mathcal{M} (o qual por sua vez constitui um espaço-linear). Podemos transferir esta característica não-linear do domínio de integração em (2.40) para a medida funcional

de Feynman $\mathcal{D}_F[\bar{G}_\gamma]$ por meio da introdução da seguinte medida não linear em $\int_M: \mathcal{D}_F[G_\gamma] \delta_F(F(G_\gamma))$, o que permite re-escrever o funcional de partição do seguinte modo:

$$Z = \int_M \mathcal{D}_F[\bar{G}_\gamma] \cdot \delta_F(F(G_\gamma)) \cdot e^{-S[G_\gamma]} \left(\int \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega] \cdot \text{DET}_F \left(\frac{\delta F(G_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \right) \right)^G \quad (2.41)$$

Analisemos a integração sobre o grupo de calibre em (2.41). Em uma análise perturbativa do funcional de partição, o grupo efetivo da teoria é o grupo das transformações locais na vizinhança da identidade $\mathbb{1}$. Mostremos, agora, que um cálculo explícito do volume da órbita pode ser realizado. Neste caso, a medida de integração $\mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega(x)]$ que é definida sobre todos os elementos $\Omega(x) = e^{i\omega_a(x)\lambda_a} \in G$, deverá ser substituída pela medida $\prod_{a=1}^{N^2-1} \mathcal{D}_F[\omega_a(x)]$, a qual é definida sobre todos os elementos de G da forma $\Omega(x) = \mathbb{1} + i\epsilon \omega^a(x)\lambda_a$ ($\epsilon \ll 1$); que por sua vez formam um grupo de calibre local e denotado por $G^{(inf)}$.

O funcional $\frac{\delta}{\delta \Omega} F(G_\gamma^\Omega)$ em (2.41) será substituído por sua aproximação linear, que é obtida a partir de sua expansão Tayloriana (funcional) na vizinhança do elemento $\mathbb{1}$ de G :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Omega} \left\{ F(G_\gamma^\Omega) \right\} &= \frac{\delta}{\delta \Omega} \left\{ F(G_\gamma) + \frac{\delta F(G_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \Big|_{\Omega=\mathbb{1}} (\delta \Omega) \right. \\ &\left. + O((\delta \Omega)^2) \right\} = \frac{\delta F(G_\gamma^\Omega)}{\delta \Omega} \Big|_{\Omega=\mathbb{1}} = \frac{\delta f^a(G_\gamma^\Omega)}{\delta \omega^b} \Big|_{\omega(x)=0} \quad (2.42) \end{aligned}$$

e, portanto, nesta aproximação:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathcal{D}_F[\Omega(x)] \cdot \text{DET}_F \left(\frac{\delta F(G_\delta^\Omega)}{\delta \Omega} \right) \\ = \text{DET}_F \left(\frac{\delta F(G_\delta^\Omega)}{\delta \Omega} \Big|_{\Omega=1} \right) \cdot \left(\int_{\mathcal{G}^{\text{inf}}} \prod_{a=1}^{N^2-1} \mathcal{D}_F[\omega^a(x)] \right) \quad (2.43)$$

Substituindo ^(2.43) em ^(2.41), obtemos o resultado para o funcional euclidiano de partição da (Teoria de Calibre SU(N)):

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_\delta] \delta_F(F(G_\delta)) e^{-S[G_\delta]} \cdot \text{DET}_F \left(\frac{\delta F(G_\delta^\Omega)}{\delta \Omega} \Big|_{\Omega=1} \right) \quad (2.44)$$

Aqui, absorvemos em um fator de normalização da (2.44) medida o volume do grupo de calibre local infinitesimal $\left(\int \prod_{a=1}^{N^2-1} \prod_{x \in \mathbb{R}^D} d\omega^a(x) \right)$.

Podemos re-escrever o resultado em uma forma útil para a dedução das regras de Feynman. Para isto, consideremos a seguinte parametrização do espaço de órbitas $\int_{\mathcal{M}/\mathcal{G}}$ (compare com a eq. (2.26))

$$F(G_\delta)(x) = c(x) \quad (2.45)$$

com $c(x)$ denotando uma função arbitrária tomando valores na álgebra de Lie de \mathcal{G} . E, portanto (2.44) toma a

forma

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_\delta] \delta_F(F(G_\delta)(x) - C(x)) \cdot e^{-S[G_\delta]} \cdot \text{DET}_F \left\{ \left(\frac{\delta F(G_\delta^a)}{\delta \Omega} \right)_{\Omega=1} \right\} \quad (2.46)$$

.E desde que (2.46) não depende de $C(x)$, podemos integrá-la com um peso $\exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \int d^D x \text{Tr}^{(c)}(C(x))^2\right\}$, e resultando na seguinte expressão útil:

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}_F[G_\delta] \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \int d^D x \text{Tr}^{(c)}(F^2(G_\delta)) - S[G_\delta]\right\} \cdot \text{DET}_F \left(\frac{\delta F(G_\delta^a)}{\delta \Omega} \right)_{\Omega=1} \quad (2.47)$$

Torna-se, também, conveniente expressar o determinante funcional em (2.47) (o chamado determinante de Faddeev-Popov) como uma ação de campos escalares $\Sigma^a(x)$; $\varphi^{a'}(x)$ ($a=1, \dots, N^2-1$) obedecendo a estatística de Fermi-Dirac ([1])

$$\text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(G_\delta^a)}{\delta \Omega} \right\}_{\Omega=1} = \int \prod_{a=1}^{N^2-1} \mathcal{D}_F[\Sigma^a(x)] \mathcal{D}_F[\varphi^{a'}(x)] \cdot \exp\left\{-\int d^D x \Sigma^a(x) \left\{ \frac{\delta F(G_\delta^a)}{\delta \Omega} \right\}_{\Omega=1} \right\} \varphi^{a'}(x) \quad (2.48)$$

A partir de (2.48), podemos deduzir as regras de Feynman ([1]), onde nota-se o aparecimento de diagramas internos formados pela propagação virtual dos campos escalares $\Sigma^a(x)$; $\varphi^{a'}(x)$

A média quântica de um observável invariante de calibre (no espaço-tempo euclideanizado (veja a eq. (1.32) do 1.3 - capítulo 1) será, então, dada por:

$$\langle \mathcal{O}(A_\mu) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}_F[G_\delta] \prod_{a=1}^{N^2-1} \mathcal{D}_F[\Sigma^a(x)] \mathcal{D}_F[\varphi^{a'}(x)] \cdot \mathcal{O}(A_\mu) \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \int d^D x \text{Tr}^{(c)} F^2(G_\delta) - S[G_\delta] - \int d^D x \Sigma^a(x) \left\{ \frac{\delta F(G_\delta^a)}{\delta \Omega} \right\}_{\Omega=1} \right\} \varphi^{a'}(x) \quad (2.49)$$

REFERÊNCIAS PARA O CAPÍTULO 2

- [1] L.D. Faddeev and V.N. Popov - "Gauge Fields", (Benjamin C. Reading) - 1980

- [2] L.D. Faddeev and V.N. Popov - "Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field" - Phys. Lett 25B, (1967), 29

- [3] L.D. Faddeev - "The Feynman Integral for Singular Lagrangians" - Teor. Mat. Fiz 1, 3 (1969)

- [4] S. Mandelstam - "Feynman Rules for Electromagnetic and Yang-Mills Fields from the Gauge - Independent Field - Theoretic Formalism", Phys. Rev vol 175, nº 5 (1968), 1580.

- [5] B. de Witt - "Quantum Theory of Gravity - I", Phys. Rev. vol 160 (1967), 1113

- [6] B. de Witt - "Quantization of Fields with infinite - Dimensional Invariance Groups III - Generalized Schinger-Feynman Theory" - Jour of Math. Phys. vol. 3, nº 6 (1962), 1073

COMENTÁRIOS E OBSERVAÇÕES

O Formalismo de Quantização proposto neste capítulo, além de tratar adequadamente os aspectos geométricos das Teorias de Calibre, possui a vantagem de não utilizar a Teoria das Integrais de Trajetória para Sistemas Hamiltonianos com vínculos ([3]) para a sua justificação e de não utilizar a decomposição "Ad-Hoc" da identidade $1 = \int_G \mathcal{D}_F^{(H)}[\Omega] \delta_F(F(G_\Omega^R))$, introduzida no funcional de partição da teoria para o cálculo do volume das órbitas ([2]).

As idéias originais do Formalismo de quantização apresentado, foram inicialmente propostas por B. de Witt na ref. [6] e recentemente utilizadas em ([9]) para um estudo dos aspectos geométricos das Teorias de Calibre.

Um problema fundamental da quantização, e não examinado no presente capítulo, é do cálculo completo do volume de uma da órbita $\mathcal{N}(G_\gamma^{(x)})$; $\int_G \mathcal{D}_F[\Omega(x)] \text{DET}_F \left\{ \frac{\delta F(G_\Omega^R)}{\delta \Omega} \right\}$, levando em consideração a topologia não trivial do grupo de calibre local ([9], [13]) e a expressão completa do funcional $\int \frac{\delta}{\delta \Omega} F(G_\Omega^R)$ (veja eq.(2.42) e a discussão anterior a esta equação). Deste modo, uma linha de pesquisa a ser prosseguida é o estudo deste problema e sua possível relação com o problema do confinamento das excitações com carga de cor das Teorias de Calibre não-abelianas.

- [7] J. D. Bjorhen and S. Dree1 - "Relativistic Quantum Fields" - N.Y. Mc.Graw - Hill - 1965
- [8] A.S. Schwarz - "Instantons and Fermions in the Field of Instanton" - Commun. Math. Phys, 64 (1979), 233
- [9] O. Babelon and C.M. Viallet - The Geometrical Interpretation of the Faddeev-Popov Determinant - Phys. Lett 85B (1979), 246
- [10] E. Nelson - "Tensor Analysis" (Mathematical Notes). Princeton University Press, Princeton (1967)
- [11] B. de Witt - Quantum Theory of Gravity II Phys. Rev. vol. 162 (1967), 1195
- [12] J.C. Taylor - "Gauge Theories of Weak Interaction" - Cambridge Monographs on Mathematical Physics - (1978)
- [13] I.M. Singer - Some Remarks on the Gribov Ambiguity - Comm. Math. Phys. 60, (1978), 7.
- [14] R. Jackiw - Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory - Rev. of Mod. Phys, vol. 52, n^o 4 (1980), 661.

CAPÍTULO 3

A Teoria Quântica das Superfícies de Polyakov no Formalismo das Medidas Funcionais Invariantes

3.1 - INTRODUÇÃO

Até o presente momento, as Teorias de Calibre de Yang-Mills apresentam-se como os candidatos mais promissores para a descrição realística das interações fortes. Nestas teorias a imagem pictórica de um Méson é a de um objeto consistindo de um par quark-antiquark e um tubo de fluxo de campo de calibre conectando-os.

Torna-se, então, sugestivo considerar diretamente estes tubos de fluxo não-abelianos como variáveis independentes e re-expressar a teoria em função destas novas variáveis ([1], [2], [3], [4]). Uma variável dinâmica associada a estes tubos de fluxo foi proposta anteriormente por K. Wilson ([5]), o denominado "Loop de Wilson" definido por uma curva fechada \mathcal{C} :

$$W[\mathcal{C}] = \text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \left\{ e^{i g \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} \cdot dx_{\mu}} \right\} \quad (3.1)$$

Procura-se, então, deduzir as equações de movimento para o valor quântico $\langle W[\mathcal{C}] \rangle$ definido pela Teoria de Calibre Pura (veja o apêndice 6). Um significado preciso para tais equações de movimento, ainda é objeto de estudo, e devido essencialmente ao fato de que a curva \mathcal{C} em (3.1) ser uma trajetória quântica associada ao par quark-antiquark e, assim, um objeto geométrico extremamente complicado (veja a discussão seguindo a eq. (1.4) no capítulo 1).

Mas, apesar destas dificuldades, espera-se encontrar uma solução para estas equações de movimento com a forma simbólica:

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle = \sum_{S; (\partial S) = \mathcal{C}} e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'} A(S)} \quad (3.2)$$

onde $\sum_{S; (\partial S) = \mathcal{C}}$ denota a soma contínua sobre todas as superfícies limitada por \mathcal{C} e $e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'} A(S)}$ (com $A(S)$ denotando o funcional área associado a superfícies S), o peso que cada superfície contribui para a soma (3.2).

Será uma consequência de (3.2) o fato que a Teoria de Calibre é confinante (excitações com carga de cor não aparecem nos estados assintóticos da teoria e que ela nos leva a uma dinâmica de Strings ([1], [5])). As superfícies que aparecem em (3.2) possuem o significado físico de serem as superfícies geradas pelo String (tubo de fluxo + par quark-antiquark) durante as suas possíveis evoluções no espaço-tempo euclideano.

Nosso objetivo, neste capítulo, será a apresentação do trabalho de A.M. Polyakov ([6]) para uma solução do significado preciso para a soma (3.2), usando o formalismo de métricas funcionais desenvolvido no capítulo 2.

Organizaremos a apresentação deste capítulo do seguinte modo: no §3.2, apresentaremos alguns resultados da teoria clássica das superfícies e no §3.3 procederemos a sua teoria quântica.

3.2 - TEORIA CLÁSSICA DAS SUPERFÍCIES

Uma superfície S , com fronteira sendo uma curva C , e imersa em um espaço-tempo euclidiano \mathbb{R}^D é usualmente descrita por um vetor-posição $X_\mu(\xi_1, \xi_2)$ ($\mu=1, \dots, D$) com $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ pertencendo a algum domínio conveniente D (por exemplo: $D = D_\rho = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \rho\}$, o disco unitário de raio ρ) e tal que $X_\mu(\xi_1, \xi_2)$ quando restrita a fronteira de D seja uma parametrização de C (veja a fig. (5))

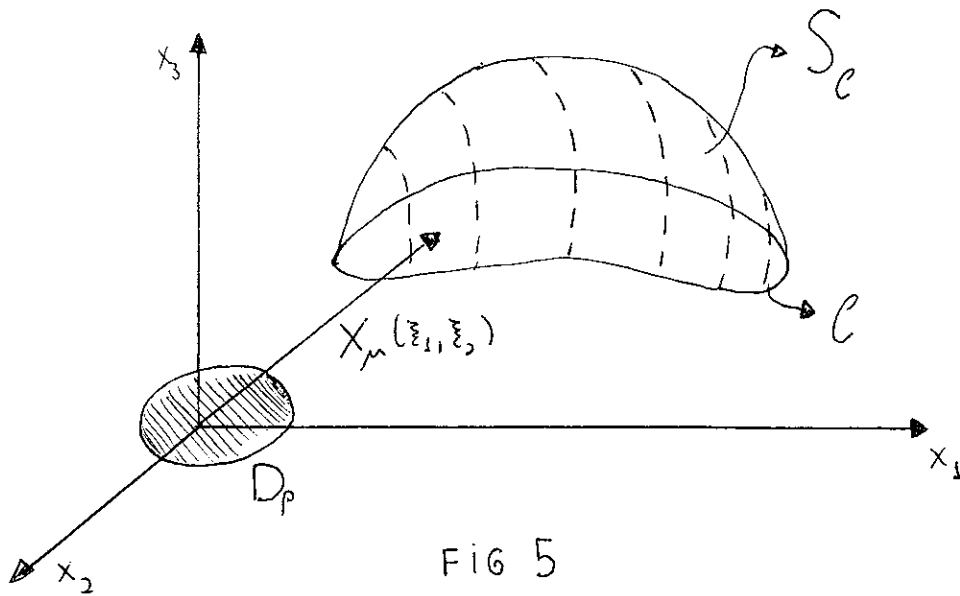


FIG 5

A área associada a tal superfície é dada pela relação:

$$A(S_C) = \int_D d^2 \xi \left(\text{DET} \{ h_{ab}(\xi) \} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

, com $d^2 \xi = d\xi_1 d\xi_2$, os índices a, b variando entre 1 e 2, e

$h_{ab} = \partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu$ denotando o tensor métrico induzido pela parametrização $X_\mu(\xi_1, \xi_2)$ na superfície S_C .

Uma propriedade importante do funcional (3.3), é que ele possui invariância frente ao grupo das reparametrizações da superfície S_e :

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2) &= (\varphi_1(\xi'_1, \xi'_2); \varphi_2(\xi'_1, \xi'_2)) \\ X'_\mu(\xi') &= X_\mu(\varphi(\xi')) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\varphi(\xi')$ denota uma função com jacobiano não-nulo de D em D .

Esta propriedade nos permite, no caso em que a superfície S_e ser uma superfície com topologia trivial, escolher globalmente (isto é: em toda a superfície S_e) um sistema de coordenadas especial, no qual o tensor métrico induzido $h_{ab}(\xi)$ possui a forma diagonal ([7])

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab} \quad (3.5)$$

o chamado sistema de coordenadas conforme em S_e

Um outro fato da geometria diferencial importante, é que se considerarmos o funcional (3.3) como um funcional ação para uma Teoria de Campos em um espaço-tempo bidimensional (veja o §1.3 do capítulo 1), as equações de Euler-Lagrange associadas são dadas por

$$\Delta_h \cdot X_\mu(\xi) = 0 \quad (3.6)$$

$$X_\mu(\xi) \Big|_{\xi \in \partial D} = \ell \quad (3.7)$$

com Δ_h denotando o operador diferencial de Laplace- Beltrami associado a métrica $\{h_{ab}(\xi)\}$:

$$\Delta_h = \frac{1}{\sqrt{\text{DET}\{h_{ab}(\xi)\}}} \partial_a (\sqrt{\text{DET}\{h_{ab}(\xi)\}} \cdot h^{ab} \partial_b) \quad (3.8)$$

E, no sistema de coordenadas conformal (3.5), o problema de fronteira (3.6) e (3.7) se reduz ao bem conhecido problema do potencial satisfazendo a condição de Dirichlet em D :

$$\begin{aligned} \Delta_{h=\delta_{ab}} X_\mu(\xi) &= 0 \\ X_\mu(\xi) |_{\xi \in \partial D} &= \mathcal{G} \end{aligned} \quad (3.9)$$

As equações (3.6) e (3.7), também, podem ser obtidas a partir do funcional

$$\bar{A}(S_e) = \frac{1}{2} \int_D d^2 \xi (\sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu)(\xi) \quad (3.10)$$

onde $\{g_{ab}(\xi)\}$ pertence ao espaço de todas as possíveis métricas que a superfície $S_e = \{X_\mu(\xi)\}$ pode admitir (o chamado espaço das métricas internas em S_e).

Este funcional é invariante frente ao grupo de reparametrizações de D , denotado por \mathbb{H} , e que na forma infinitesimal escreve-se:

$$\delta \xi_a = \epsilon_a(\xi) \quad (3.11)$$

$$\delta X_\mu(\xi) = \epsilon_a(\xi) \partial_a X_\mu(\xi) \quad (3.12)$$

$$\delta g_{ab}(\xi) = (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)(\xi) \quad (3.13)$$

onde as derivadas covariantes em (3.13) são dadas por

$$(\nabla_a \epsilon_b)(\xi) = (\partial_a \epsilon_b - \Gamma_{ab}^c \epsilon_c)(\xi) \quad (3.14)$$

com o símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{ab}^c(\xi) = \frac{1}{2} \{g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})\}(\xi) \quad (3.15)$$

Em adição a simetria (3.11) - (3.13). Notemos a invariância de (3.10) sobre a simetria conformal de Weyl:

$$g_{ab}(\xi) \rightarrow \lambda(\xi) g_{ab}(\xi) \quad (3.16)$$

Voltando as equações de movimento provenientes de (3.10), vemos que elas são dadas por:

$$\Delta_g X_\mu(\xi) = 0 \quad (3.17)$$

$$T_{ab}(\xi) = \left(\partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X_\mu \cdot \partial_d X_\mu \right)(\xi) = 0 \quad (3.18)$$

Da relação (3.18), vemos que

$$g_{ab}(\xi) = \bar{\lambda}(\xi) \left(\partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu \right)(\xi) \quad (3.19)$$

para alguma função $\bar{\lambda}(\xi)$. Fazendo uso da invariância de Weyl (3.16) para fazermos $\bar{\lambda}(\xi) = 1$ e substituindo (3.19) em (3.17) re-obtemos a equação (3.6) associada ao funcional (3.3).

3.3 - A TEORIA QUÂNTICA DAS SUPERFÍCIES DE POLYAKOV

Tendo exposto alguns conceitos básicos da Teoria Clássica das Superfícies no parágrafo anterior (veja as eq. (3.3) e eq. (3.10)), passaremos ao problema da quantização no formalismo das Integrais de Trajetória de Feynman (veja o cap. 1 da presente tese).

Procedendo em analogia com as integrais de trajetória na mecânica quântica (veja o 1.2), pode-se propor para a soma contínua simbólica (3.2), as seguintes integrais funcionais

$$G^{(N)}(\mathcal{C}) = \int_{X_\mu(\xi)|_{\xi \in \partial D} = \mathcal{C}} \mathcal{D}[X_\mu(\xi)] \cdot e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'} A(S_{\mathcal{C}})} \quad (3.20)$$

$$G^{(P)}(\mathcal{C}) = \int_{X_\mu(\xi)|_{\xi \in \partial D} = \mathcal{C}} \mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] \cdot e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2\xi} \left\{ \int_{X_\mu(\xi)|_{\xi \in \partial D} = \mathcal{C}} \mathcal{D}[X_\mu(\xi)] e^{-\bar{A}(S_{\mathcal{C}})} \right\} \quad (3.21)$$

com $A(S_{\mathcal{C}})$ e $\bar{A}(S_{\mathcal{C}})$ dados por (3.3) e (3.10), as superfícies $X_\mu(\xi)$ satisfazendo as condições de fronteira $X_\mu(\xi)|_{\xi \in \partial D} = \mathcal{C}$ e as medidas funcionais em (3.20) e (3.21) devem ser definidas de tal modo que sejam invariante frente aos grupos de simetria (3.4) e (3.11) - (3.15) respectivamente. Notemos o surgimento em (3.20) de uma constante com dimensão de inverso do quadrado da massa (e que na teoria dos Strings Duais \bar{e} , indentificada com o valor da inclinação das trajetórias de Regge das excitações ([8]) e o termo $e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2\xi}$ em (3.21), para assegurar que a integração funcional sobre as $\{g_{ab}(\xi)\}$ seja convergente. (Novamente, o parâmetro "NU" μ_0^2 possui dimensão de massa ao quadrado).

Estudos para o cálculo explícito de (3.20) são apresentados na ref. ([8]).

Nosso objetivo, agora, será o cálculo explícito de (3.21) no caso de que a fronteira \mathcal{C} é vazia (o chamado String fechado de Polyakov).

Procedendo no formalismo do §3.2, cap. 2; asseguraremos automaticamente a invariância das medidas funcionais em (3.21) frente ao grupo de simetria (3.11) - (3.13); introduzindo-as como o elemento de volume associado as seguintes métricas funcionais invariantes definidas no espaço funcional dos $\{g_{ab}(\xi)\}$ e dos $\{X_\mu(\xi)\}$ ([6]):

$$\|\delta X_{\mu}\|^2 = \int_D d^2\xi \sqrt{g(\xi)} \delta X_{\mu}(\xi) \cdot \delta X_{\mu}(\xi) \quad (3.22)$$

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int_D d^2\xi \sqrt{g(\xi)} \left\{ (\delta g_{ab}) \left(g^{aa'} g^{bb'} + c g^{ab} g^{a'b'} \right) (\delta g_{a'b'}) \right\}(\xi) \quad (3.23)$$

onde $c \neq -\frac{1}{2}$, denota uma constante arbitrária (veja o apêndice da ref. [9] para a demonstração da invariância sobre reparametrizações da Métrica Funcional (3.23) e onde a constante c deva ser diferente de $-\frac{1}{2}$ para assegurar a inversibilidade de (3.23).

A integração funcional em relação as variáveis $\{X_{\mu}(\xi)\}$ é do tipo Gaussiano em relação à medida funcional definida por (3.22) e produzindo o resultado; (veja a eq. (1.38) do §1.4 - cap. 1).

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}[X_{\mu}(\xi)] e^{-\frac{1}{2} \int_D d^2\xi (\sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_{\mu} \cdot \partial_b X_{\mu})(\xi)} \\ &= \int \mathcal{D}[X_{\mu}(\xi)] e^{-\frac{1}{2} \int_D d^2\xi \sqrt{g} (X_{\mu} \Delta_g X_{\mu})(\xi)} \\ &= \text{DET}_F^{-D/2}(\Delta_g) \end{aligned} \quad (3.24)$$

com $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} \partial_b)$ o operador de Laplace-Beltrami associado a métrica $\{g_{ab}(\xi)\}$. Notemos que este resultado é automaticamente invariante frente ao grupo de reparametrizações (3.12) atuando no espaço-funcional dos $\{X_{\mu}(\xi)\}$, devido a métrica funcional (3.22) possuir, esta propriedade.

Reduzimos, então, o funcional (3.21) a seguinte integração funcional sobre o espaço funcional dos $\{g_{ab}(\xi)\}$ (o

qual será denotado no estudo que segue por $\int \mathcal{M}$):

$$G^{(P)} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2 \xi} \cdot \text{DET}_F^{-D/2} (\Delta_g) \quad (3.25)$$

Para o cálculo de (3.25); devido a invariância frente ao grupo de reparametrizações (3.13) \mathbb{H} ; devemos fazer uma escolha de calibre (veja o §2.3) e assim determinarmos o espaço de órbitas $\int \mathcal{M}/\mathbb{H}$. Uma escolha natural é o calibre conformal (3.5), no qual as métricas $\{g_{ab}(\xi)\}$ são conformalmente euclídeas

$$\bar{g}_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab} \quad (3.26)$$

com $\bar{g}_{ab}(\xi) \in \int \mathcal{M}/\mathbb{H}$

Deste modo, qualquer métrica $g_{ab}(\xi) \in \int \mathcal{M}$ é obtida a partir de uma dada métrica conformal (3.26) a partir de uma transformação de coordenadas (3.11). Infinitesimalmente; temos que:

$$\delta g_{ab}(\xi) = \delta \varphi(\xi) \bar{g}_{ab}(\xi) + (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)(\xi) \quad (3.27)$$

$$(a, b = 1, 2)$$

E, assim, a métrica funcional (3.23) toma a forma (veja o apêndice 2) ([6]):

$$\begin{aligned} \|\delta g_{ab}(\xi)\|^2 &= (1 + 2c) \int_D d^2 \xi \sqrt{g(\xi)} (\delta \varphi(\xi))^2 \\ &+ \int d^2 \xi \sqrt{g(\xi)} (\epsilon_1(\xi), \epsilon_2(\xi)) \mathcal{L}_{\{g\}} \begin{pmatrix} \epsilon_1(\xi) \\ \epsilon_2(\xi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $\varphi(\xi) = \delta \varphi(\xi) + (\nabla_c \epsilon_c)(\xi)$ e $\mathcal{L}_{\{g\}}$ denota o seguinte operador diferencial atuando nos campos vetoriais $\{\epsilon_a(\xi)\}$ (veja

a eq. (8) do apêndice 2):

$$\left(\mathcal{L}_{\{g\}} \epsilon \right) (\xi) = - \left(\nabla_d \nabla^d \delta_a^b + [\nabla^b, \nabla_a]_- \right) \epsilon_b \quad (3.29)$$

onde $\{\epsilon_a(\xi)\}$ denota os geradores da transformação de coordenadas (veja a eq. (3.11) e eq. (3.27)).

O elemento de volume funcional associado a (3.28) será então, dado por:

$$\mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] = \mathcal{D}[\mathcal{V}(\xi)] \cdot \mathcal{D}[\epsilon_1(\xi)] \mathcal{D}[\epsilon_2(\xi)] \cdot \text{DET}_F^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}_{\{g\}}) \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.25) e notando que $\mathcal{D}[\mathcal{V}(\xi)] = \mathcal{D}[\mathcal{U}(\xi)]$ devido a sua invariância translacional, obtemos que:

$$G^{(P)} = \int \mathcal{D}[\mathcal{U}(\xi)] e^{-\mu_0^2 \int_D e^{\mathcal{U}(\xi)} d^2 \xi} \cdot \text{DET}_F^{-D/2}(\Delta_{g=e^{\mathcal{U}} \delta_{ab}}) \cdot \text{DET}_F^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}_{\{g=e^{\mathcal{U}} \delta_{ab}\}}) \quad (3.31)$$

onde absorvemos o volume do grupo \mathbb{H} das reparametrizações

$$\left(\int_{\mathbb{H}} \mathcal{D}[\epsilon_1(\xi)] \mathcal{D}[\epsilon_2(\xi)] \right) \text{ em uma normalização da medida } \mathcal{D}[\mathcal{U}(\xi)]$$

A forma explícita dos operadores em (3.31) no calibre conformal é dada por ([6], [10]):

$$\Delta_{g=e^{\mathcal{U}} \delta_{ab}} = e^{-\mathcal{U}(\xi)} \partial_{\bar{z}} \partial_z \quad (3.32)$$

$$\mathcal{L}_{g=e^{\mathcal{U}} \delta_{ab}} = e^{-2\mathcal{U}(\xi)} \partial_{\bar{z}} (e^{\mathcal{U}(\xi)} \partial_z) \quad (3.33)$$

onde introduzimos as derivadas complexas.

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad ; \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (3.34)$$

No apêndice 3, calculamos explicitamente os determinantes funcionais de operadores diferenciais atuando em campos bidimensionais e da forma geral

$$\mathcal{L}_j = e^{-(j+1)\varphi(\xi)} \partial_{\bar{z}} (e^{j\varphi(\xi)} \partial_z) \quad (3.35)$$

onde j denota um número inteiro positivo.

Obtem-se o resultado ([6]) e ([10]):

$$\text{DET}_F(\mathcal{L}_j) = \exp \left\{ - \frac{(1+6j(j+1))}{12\pi} \int_D d^2\xi \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_D d^2\xi e^{\varphi(\xi)} \right\} \quad (3.36)$$

Note que a parte infinita dos determinantes funcionais em (3.36) é da forma:

$$e^{-\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_D e^{\varphi(\xi)} d^2\xi} \quad (3.37)$$

Notando a validade das relações:

$$\text{DET}_F^{-D/2}(\Delta_g = e^\varphi \delta_{ab}) = \text{DET}_F^{-D/4}(\mathcal{L}_{j=0}) \quad (3.38)$$

$$\text{DET}_F^{1/2}(\mathcal{L}_{\{g=e^\varphi \delta_{ab}\}}) = \text{DET}_F^{1/2}(\mathcal{L}_{j=1}) \quad (3.39)$$

onde o fator $-\frac{D}{4} = -\frac{D}{2} \cdot \frac{1}{2}$ na relação (3.38) é devido ao fato de que $\text{DET}_F(\Delta_g = e^\varphi \delta_{ab}) = \text{DET}_F^{1/2}(\mathcal{L}_{j=0})$, desde que o primeiro operador atua em funções escalares e o segundo em campos vetoriais bidimensionais; obteremos o seguinte resulta

do para (3.31) ([6]):

$$G^{(P)} = \int \mathcal{D}[\varphi(\xi)] e^{-\left(\frac{26-D}{48\pi}\right) \int_D \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 d^2\xi} e^{-\mu_R^2 \int_D e^{\varphi(\xi)} d^2\xi} \quad (3.40)$$

Notamos que em (3.40), absorvemos a parte infinita (3.37) dos determinantes funcionais em uma renormalização do termo $e^{-\mu_0^2 \int_D e^{\varphi(\xi)} d^2\xi}$; isto é:

$$\mu_R^2 = \mu_0^2 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(2-D)}{8\pi\epsilon}$$

Analisemos o que acontece no nível quântico a invariância conformal de Weyl (3.16) do funcional (3.10).

Como resultado do funcional (3.10) possuir esta simetria, por uma aplicação do Teorema de Noether, vemos que o traço do Tensor "Interno" energia-Momentum $T_{ab}(\xi)$ é nulo (veja a eq. (6.100) da ref. ([11]))

$$(g^{ab} T_{ab})(\xi) = T^a_a(\xi) = 0 \quad (3.41)$$

Estudemos se a lei de conservação (3.41), ainda é preservada no nível quântico. Para isso, introduzamos o funcional $F[g_{ab}]$ ([6]):

$$e^{-F[g_{ab}]} = \int \mathcal{D}[X_\mu(\xi)] e^{-\frac{1}{2} \int_D d^2\xi \sqrt{g} (g^{ab} \partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu)(\xi)} \quad (3.42)$$

Observando que a versão quântica de (3.41) é dada por.

$$\int \mathcal{D}[X_\mu(\xi)] e^{-\frac{1}{2} \int_D d^2 \xi \sqrt{g} (g^{ab} \partial_a X_\mu \cdot \partial_b X_\mu)(\xi)} (g^{ab} T_{ab})(\xi)$$

$$= g^{ab}(\xi) e^{-F[g_{ab}]} \frac{\delta F[g_{ab}]}{\delta g_{ab}(\xi)} \quad (3.43)$$

concluiremos, então que a simetria conformal de Weyl será quânticamente quebrada se tivermos a validade da relação:

$$g^{ab}(\xi) \cdot \frac{\delta F[g_{ab}]}{\delta g_{ab}(\xi)} \neq 0 \quad (3.44)$$

Fazendo uso do resultado (3.24), temos que

$$F[g_{ab}] = \frac{D}{2} \log \text{DET}_F \Delta_g \quad (3.45)$$

Deste modo, no calibre conformal, temos que:

$$g^{ab}(\xi) \frac{\delta F[g_{ab}]}{\delta g_{ab}(\xi)} = \frac{D}{2} \left\{ e^{-\mathcal{U}(\xi)} \delta_{ab} \delta^{ab} e^{-\mathcal{U}(\xi)} \right.$$

$$\left. \frac{\delta}{\delta \mathcal{U}(\xi)} \log \text{DET}_F (\Delta_g = e^{\mathcal{U}(\xi)} \delta_{ab}) \right\}$$

$$= D \cdot e^{-2\mathcal{U}(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{U}(\xi)} \log \text{DET}_F (\Delta_g = e^{\mathcal{U}(\xi)} \delta_{ab}) \quad (3.46)$$

O cálculo da variação funcional em (3.46) é realizado fazendo uso dos resultados (3.36) e (3.38).

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{U}(\xi)} \log \text{DET}_F (\Delta_g = e^{\mathcal{U}(\xi)} \delta_{ab}) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \mathcal{U}(\xi)} \log \text{DET}_F (\mathcal{L}_{g=0})$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \int_D d^2 \xi \frac{1}{12\pi} (\partial_a \mathcal{U})(\bar{\xi}) \cdot \partial_a \delta(\bar{\xi} - \xi) \right.$$

$$\left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_D e^{\mathcal{U}(\bar{\xi})} \delta(\bar{\xi} - \xi) d^2 \bar{\xi} \right\}$$

$$= \frac{1}{24\pi} \nabla^2 \mathcal{U}(\xi) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi\epsilon} e^{\mathcal{U}(\xi)} \quad (3.47)$$

Notando que a curvatura escalar R associada a métrica conformal $g_{ab}(\xi) = e^{\mathcal{U}(\xi)} \delta_{ab}$ é dada explicitamente por

$$R(\xi) = e^{-\mathcal{U}(\xi)} \nabla^2 \mathcal{U}(\xi) \quad (3.48)$$

obtemos que:

$$g^{ab}(\xi) \frac{\delta F[g_{ab}]}{\delta g_{ab}(\xi)} = \frac{D}{24\pi} e^{-\mathcal{U}(\xi)} (R(\xi) + C_0) \quad (3.49)$$

onde C_0 é uma constante divergente (veja a eq. (3.47)).

Concluimos, então, que a simetria conformal de Weyl (3.16) é quânticamente quebrada e o traço do tensor interno energia-momentum (veja a eq. (3.18) eq. (3.41)) é proporcional a curvatura $R(\xi)$ induzida na superfície $\Sigma_{\mathcal{C}}$ pela métrica $g_{ab}(\xi)$

Outro objeto fundamental na teoria é a chamada amplitude de espalhamento de N -pontos do string \mathcal{C} e que possui o significado físico de ser um tipo de amplitude de probabilidade para que o string intercepte um conjunto fixo de N -pontos $\{X_{\mu_1}^1, \dots, X_{\mu_N}^N\}$ no espaço-tempo durante a sua evolução. A definição analítica para tal amplitude de N -pontos é a generalização invariante por reparametrizações do propagador de uma partícula (veja a eq. (1.12) do §1.2 do cap. 1) ([6])

$$A(X_{\mu_1}^1, \dots, X_{\mu_N}^N) = \int \mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2 \xi} \int \mathcal{D}[X_{\mu}(\xi)] e^{-\bar{A}(S)} \frac{1}{\sqrt{g(\xi^1)}} \delta^{(D)}(X_{\mu}(\xi^1) - X_{\mu}^1) \dots \frac{1}{\sqrt{g(\xi^N)}} \delta^{(D)}(X_{\mu}(\xi^N) - X_{\mu}^N) \quad (3.50)$$

Observamos o uso da função delta em um espaço-tempo curvo em (3.50) para assegurar-nos automaticamente sua invariância frente ao grupo de reparametrizações \mathbb{T} (veja as eq. (3.11) (3.13)) e as medidas funcionais em (3.50) estão normalizadas a unidade.

Re-escrevendo (3.50) no espaço dos momenta, temos que:

$$\tilde{A}(P_\mu^1, \dots, P_\mu^N) = \int \mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2 \xi} \left(\int \mathcal{D}[X_\mu(\xi)] e^{-\bar{A}(S_c)} \prod_{\delta=1}^N \int_D d^2 \xi_\delta \sqrt{g(\xi_\delta)} e^{i P_\mu^\delta X_\mu(\xi_\delta)} \right) \quad (3.51)$$

As integrações funcionais em relação ao vetor-posição $X_\mu(\xi)$ de S_c , sendo do tipo Gaussiano, são facilmente realizadas (veja o §1.4, cap. 1)

$$\tilde{A}(P_\mu^1, \dots, P_\mu^N) = \int \mathcal{D}[g_{ab}(\xi)] e^{-\mu_0^2 \int_D \sqrt{g} d^2 \xi} \prod_{\delta=1}^N \int_D d^2 \xi_\delta \sqrt{g(\xi_\delta)} \cdot \text{DET}_F^{-D/2} \Delta_g \cdot \exp \left\{ - \sum_{(i,\delta)=1}^N P_\mu^i P_\mu^\delta \Delta_g^{-1}(\xi_i, \xi_\delta) \right\} \quad (3.52)$$

onde $\Delta_g^{-1}(\xi_i, \xi_\delta)$ denota a função de Green do operador de Laplace-Beltrami associado a métrica $\{g_{ab}(\xi)\}$. (veja a eq. (3.24)).

O cálculo da integral funcional (3.52) é realizado como no cálculo da integral funcional (3.25), escolhendo o cali

bre conformal (3.26). Resultando, então, a expressão (veja os cálculos (3.25) - (3.40)):

$$\begin{aligned} \tilde{A}(P_{\mu}^1, \dots, P_{\mu}^N) = & \prod_{j=1}^N \int_D d^2 \xi_j \left\{ \int_D \mathcal{D}[\varphi(\xi)] e^{-\frac{26-D}{48\pi} \int_D d^2 \xi \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2} \right. \\ & e^{-\mu_R^2 \int_D d^2 \xi e^{\varphi(\xi)}} \cdot e^{\sum_{l=1}^N \varphi(\xi^l)} \\ & \left. \exp \left\{ - \sum_{(i,j)=1}^N P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^j K(\xi_i, \xi_j) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde $K(\xi_i, \xi_j)$ denota a função de Green do operador de Laplace-Beltrami associado a métrica conformal $e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab}$.

A expressão para esta função de Green regularizada é dada por ([6]):

$$\begin{aligned} K^{(\epsilon)}(\xi_i, \xi_j) = & \langle \xi_i | \Delta_{g=e^{\varphi} \delta_{ab}}^{-1} e^{-\epsilon \Delta_{g=e^{\varphi} \delta_{ab}}} | \xi_j \rangle \\ = & \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \lg |\xi_i - \xi_j|^2 & \xi_i \neq \xi_j \\ -\frac{1}{4\pi} \lg \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{4\pi} \varphi(\xi_i) & \xi_i = \xi_j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde

$$K(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} K^{(\epsilon)}(\xi_i, \xi_j) \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) em (3.53), obtemos a seguinte expressão para a amplitude de espalhamento de N-pontos regularizada:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(\epsilon)}(P_{\mu}^1, \dots, P_{\mu}^N) = (\epsilon)^{\sum_{\delta=1}^N P_{\mu}^{\delta} \cdot P_{\mu}^{\delta}} \int_D \prod_{\delta=1}^N d^2 \xi_{\delta} < e^{\sum_{\ell=1}^N \mathcal{U}(\xi^{\ell})} \\ \exp \left\{ \sum_{\ell=1}^N \mathcal{U}(\xi^{\ell}) - \sum_{\delta=1}^N P_{\mu}^{\delta} \cdot P_{\mu}^{\delta} \cdot \frac{1}{4\pi} \mathcal{U}(\xi^{\delta}) \right. \\ \left. - \sum_{i < j} P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^j \left(-\frac{1}{4\pi} \lg |\xi_i - \xi_j|^2 \right) \right\} > \quad (3.56) \end{aligned}$$

onde a média quântica em (3.56) é definida pela Teoria Quântica de Liouville.

$$\langle \mathcal{U}(\mathcal{U}(\xi)) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\mathcal{U}(\xi)] e^{-\frac{(26-D)}{48\pi} \int_D d^2 \xi \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \mathcal{U})^2(\xi)} e^{-\mu_R^2 \int_D d^2 \xi \mathcal{U}(\xi)} \quad (3.57)$$

Deste modo, a amplitude de espalhamento (3.50) é relacionada a funções de correlação das exponenciais de campo $e^{\mathcal{U}(\xi)}$ da Teoria de Liouville.

Na aproximação livre ($\mu_R^2 = 0$), podemos calcular explicitamente (3.56):

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(\epsilon)}(P_{\mu}^1, \dots, P_{\mu}^N) = (\epsilon)^{\sum_{\delta=1}^N (P_{\mu}^{\delta} \cdot P_{\mu}^{\delta})} \int_D \prod_{\delta=1}^N d^2 \xi_{\delta} \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{\frac{P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^j}{2\pi}} \\ \left\{ \int \mathcal{D}[\mathcal{U}(\xi)] e^{-\frac{1}{2} \int_D d^2 \xi (\mathcal{U}(\frac{(26-D)}{48\pi} \Delta) \mathcal{U})(\xi)} \right. \\ \left. \cdot \exp \left(\sum_{\ell=1}^N \left(1 - \frac{P_{\mu}^{\ell} \cdot P_{\mu}^{\ell}}{4\pi} \right) \mathcal{U}(\xi^{\ell}) \right) \right\} \\ = \epsilon^{\sum_{\delta=1}^N P_{\mu}^{\delta} \cdot P_{\mu}^{\delta}} \int_D \prod_{\delta=1}^N d^2 \xi_{\delta} \left(\prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{\frac{P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^j}{2\pi}} \right) \left(\prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{-\frac{24}{26-D} \left(1 - \frac{P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^i}{4\pi} \right) \left(1 - \frac{P_{\mu}^j \cdot P_{\mu}^j}{4\pi} \right)} \right) \quad (3.58) \end{aligned}$$

Analisando (3.58), vemos que para um espaço-tempo de dimensão igual a 26 da amplitude regularizada (3.58) anula-se, produzindo-nos a indicação que a Teoria dos Strings de Polyanov é mal-definida para espaço-tempos com dimensionalidade maior ou igual a 26.

Para um espaço-tempo $D=4$, a amplitude (3.58) toma uma forma similar as amplitudes de koba-Nielsen da Teoria dos Modos Duais ([8]):

$$\tilde{A}^{(\epsilon)}(P_{\mu}^1, \dots, P_{\mu}^N) = (\epsilon)^{\sum_{\delta=1}^N P_{\mu}^{\delta} \cdot P_{\mu}^{\delta}} \int \prod_{\delta=1}^N d^2 \xi_{\delta} \prod_{i < j}^N |\xi_i - \xi_j|^{\alpha_{ij}(P_{\mu})} \quad (3.59)$$

onde

$$\alpha_{ij}(P_{\mu}) = \frac{P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^i}{2\pi} - \frac{12}{11} \left(1 - \frac{P_{\mu}^i \cdot P_{\mu}^i}{4\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{P_{\mu}^j \cdot P_{\mu}^j}{4\pi}\right) \quad (3.60)$$

COMENTÁRIOS E OBSERVAÇÕES

Concluimos, então, que o formalismo das medidas funcionais invariantes exposto no capítulo 2 da presente tese, formaliza e produz o esquema geométrico adequado para a exposição da Teoria Quântica das Superfícies de Polyakov.

A generalização ao caso de superfícies possuindo graus dinâmicos fermiônicos internos (a versão super-simétrica do funcional (3.10)) foi apresentada na ref [12] e uma amplitude de espalhamento livre de excitações tachionicas na ref [13].

O problema mais importante para o desenvolvimento da Teoria, consiste na elaboração de um esquema de quantização para o Modelo Liouville (3.40) e a sua versão supersimétrica ([12]), o que permitira o cálculo exato das amplitudes de espalhamento (eq. (3.50) e eq. (3.56)) permitindo-nos, então, a determinação completa do espectro associado. Como resultado, podemos verificar a conjectura de que em um espaço-tempo com dimensionalidade maior ou igual a 26 a Teoria é mal-definida no sentido que as amplitudes de espalhamento (eq. (3.50) e eq. (3.53)) são nulas.

REFERÊNCIAS PARA O CAPÍTULO 3

- [1] A.M. Polyakov, "Gauge Fields as Rings of Glue." Nucl Phys. B 164 (1980), 171
- [2] Yu M. Makeenko and A.A. Migdal, "Exact Equation for the Loop Average in Multicolor Q. C. D." Phys. Lett. 88B (1979) 135
- [3] T.T. Wu and C.N. Yang, "Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Theories," Phys. Rev. D12 (1975), 3845
- [4] J.L. Gervais and A. Neveu, "Local Harmonicity of the Wilson Loop Integral in Classical Yang-Mills Theory," Nucl Phys B153 (1979), 445
- [5] K. Wilson, "Confinement of Quarks," Phys. Rev. D10 (1974), 2445 - 2459
- [6] A.M. Polyakov, "Quantum Geometry of Bosonic Strings," Phys Lett 103B (1981), 211
- [7] S. Helgason, "Differential Geometry", Academic Press (1978)
- [8] J.L. Gervais, B. Sakita, Ghost - "Free String Picture of Veneziano Model," Physical Review Letters, vol. 30, nº 15 (1973), 716.

- [9] B. de Witt, "Quantum Theory of Gravity II", Phys Rev. vol. 162 (1967), 1195
- [10] B. Durhuus, P. Olesen and J.L. Petersen, "Polyakov's Quantized String with Boundary Terms", Nucl Phys. B198 (1982), 157 - 188.
- [11] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press (1982)
- [12] A.M. Polyakov, "Quantum Geometry of Fermionic Strings", Phys Lett 103B (1981), 213
- [13] Luiz C.L. Botelho - "A Scattering Amplitude in Quantum Geometry of Fermionic String"
(A ser publicado no Phys. Lett.B)

CAPÍTULO 4

Uma Ação Gluônica Efetiva Para a Cromodinâmica Quântica Não-Massiva Bidimensional no Formalismo das Integrais de Trajetória Fermiônicas Invariante

4.1 - INTRODUÇÃO

No presente capítulo analisaremos a Cromodinâmica Quântica $SU(N)$ Não-Massiva em um espaço-tempo euclídeano bidimensional usando a formulação das integrais de trajetória Fermiônicas (veja o §1.3 - cap. 1).

A ideia a ser explorada será a implementação de uma transformação de variáveis na medida funcional fermiônica do modelo de tal modo que permita o desacoplamento dos campos fermiônicos com os campos de calibre (campo Gluônico) e, então, levando a uma ação efetiva para o modelo expressa unicamente em termos dos campos de calibre. Tendo obtido esta ação efetiva, analisaremos a estrutura das funções de correlação fermiônicas e mostraremos, a indicação clara da existência de um mecanismo de Higgs intrínseco no modelo. E finalmente, estudaremos o modelo abeliano (o modelo de Schwinger) e o modelo de Rothe - Stamatescu usando a técnica acima.

4.2 - A TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS FERMIÔNICAS

A Cromodinâmica Quântica $SU(N)$ não-massiva Bidimensional Euclídeana é um modelo de Teoria Quântica de Campos Relati-

vísticos formulado em um espaço-tempo bidimensional euclídeo-
no descrevendo o acoplamento de campos fermiônicos não-massivos
com Campos de Calibre $SU(N)$ e é caracterizada pelo Funcional
Gerador Euclideano.

$$Z[J_\mu^a, \eta^a, \bar{\eta}^a] = \frac{1}{Z} \left\{ \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \int_{\mathcal{N}} \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \right. \\ \left. \exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, G_\mu) + \sum_{a=1}^{N^2-1} J_\mu^a \cdot G_\mu^a + \eta^a \bar{\psi}^a + \bar{\eta}^a \psi^a \right\} \right\} \quad (4.1)$$

com a densidade lagrangeana do modelo sendo expressa por

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, G_\mu) = i \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - i G_\mu) \psi - \frac{1}{4g^2} \text{Tr}^{(c)}(F_{\mu\nu}^2) \quad (4.2)$$

Aqui, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) \in \mathcal{N}$ denota o campo fermiônico per-
tencente a representação fundamental do grupo de calibre $SU(N)$
e $G_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} G_\mu^a(x) \lambda_a \in \mathcal{M}$ denota o campo de calibre $SU(N)$
hermitiano (o chamado campo gluônico), $F_{\mu\nu}(x) = (\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + [G_\mu, G_\nu])(x)$
o tensor intensidade de campo associado e $\text{Tr}^{(c)}$ o traço sobre
os índices de cor (veja o capítulo 2, para a quantização das
Teorias de Calibre).

As matrizes euclídeanas de Dirac (hermitianas) satisfa-
zem as relações

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu} \quad ; \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1 \\ \gamma_\mu\gamma_5 = i\epsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu \quad \epsilon_{01} = 1 = -\epsilon_{10} \quad (4.3)$$

Explícitamente:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O modelo descrito pela densidade lagrangeana (4.2) é invariante sob a ação do Grupo de Calibre $SU(N)$ vetorial e do Grupo $SU(N)$ - Axial atuando no setor fermiônico

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha^a(x)\lambda_a} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha^a(x)\lambda_a} \quad (4.4)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\beta^a(x)\gamma_5\lambda_a} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\beta^a(x)\gamma_5\lambda_a} \quad (4.5)$$

e levando respectivamente a conservação da corrente vetorial $j_\mu^{(a)} = \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda_a \psi$ e da pseudo-corrente $j_\mu^{5,a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_a \psi$

Devido a relação $\gamma_\mu \gamma_5 = i\epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu$, Entre as matrizes de Dirac bidimensionais, notamos a seguinte conexão entre as correntes acima

$$j_\mu^{5,a} = i\epsilon_{\mu\nu} j_\nu^a \quad (4.6)$$

As equações de movimento provenientes da ação (4.2) são dadas por

$$(\nabla_\nu F_{\mu\nu})^a \lambda_a = -g \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda_a \psi \quad (4.7)$$

$$i\gamma_\mu (\partial_\mu - ig G_\mu) \psi = 0 \quad (4.8)$$

onde $\nabla_\mu = \partial_\mu + [G_\mu, \]$ denota a derivada covariante.

Nosso objetivo será implementar uma mudança de variáveis no espaço-funcional fermiônico \mathcal{N} do modelo de tal modo que os fermions se desacoplem dos campos de calibre em (4.2) ([1], [2]). Para fazermos esta análise, usaremos uma nova parametrização do espaço-funcional dos campos de calibre devida

a Roskies (apêndice 4), que nos assegura a existência e unicidade da solução da equação diferencial.

$$(i \gamma_\mu G_\mu)(x) = -\gamma_\mu (\Omega U)(x) \partial_\mu (U^{-1} \Omega^{-1})(x) \quad (4.9)$$

para uma dada configuração de campo $G_\mu(x)$, $U(x)$ e $\Omega(x)$ são elementos respectivamente do grupo $SU(N)$ axial e do grupo $SU(N)$ vetorial

$$U(x) = e^{-\gamma_5 \phi^a(x) \lambda_a} \quad (4.10)$$

$$\Omega(x) = e^{-i \omega_a(x) \lambda_a} \quad (4.11)$$

A densidade lagrangeana fermiônica toma a seguinte forma nesta nova parametrização de $\int \mathcal{M}$:

$$\mathcal{L}_F(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} (i \gamma_\mu \partial_\mu - i (-\gamma_\mu (\Omega U)(x) \partial_\mu (U^{-1} \Omega^{-1})(x))) \psi \quad (4.12)$$

, a qual pode ser re-escrita na forma:

$$\mathcal{L}_F(\psi, \bar{\psi}) = (\bar{\psi} \Omega U^{-1})(x) (i \gamma_\mu \partial_\mu) (U^{-1} \Omega^{-1} \psi)(x) \quad (4.13)$$

onde usamos a relação $[\gamma_\mu, U(x)]_+ = 0$ para obter (4.13)

Analisando a densidade lagrangeana fermiônica (4.13), vemos que para efetuarmos o desacoplamento do campo fermiônico do campo de calibre bastará fazermos uso das simetrias (4.4) e (4.5) performando a mudança de variáveis.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\Omega U \chi)(x) \\ \bar{\psi}(x) &= (\bar{\chi} U \Omega^{-1})(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $\chi(x)$ denotando o campo fermiônico transformado e nos levando a uma lagrangeana fermiônica livre em termos dos novos campos

$$\mathcal{L}_F(x, \bar{x}) = (\bar{x} (i \gamma_\mu \partial_\mu) x)(x) \quad (4.15)$$

Um ponto fundamental da análise se apresenta: como estamos tratando uma teoria quântica, devemos estudar a mudança de variáveis no nível das medidas funcionais levando em consideração o jacobiano associado. Denotando este jacobiano por $J[G_\mu]$, teremos a relação:

$$\mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] = J[G_\mu] \cdot \mathcal{D}[x] \mathcal{D}[\bar{x}] \quad (4.16)$$

Mostraremos agora que este jacobiano é um funcional que só depende do campo de calibre G_μ como a notação utilizada sugere e é dado explicitamente pela seguinte relação:

$$J[G_\mu] = \text{DET}_F(\mathcal{D}[G_\mu]) / \text{DET}_F(\mathcal{D}(0)) \quad (4.17)$$

com

$$\mathcal{D}[G_\mu] = i \gamma_\mu (\partial_\mu - i G_\mu) \quad (4.18)$$

denotando o operador de Dirac (auto-adjunto) na presença de um campo de calibre externo G_μ .

Para provarmos a relação (4.17), consideremos o chamado funcional de partição associado ao setor fermiônico do modelo (veja a eq. (1.31) do cap. 1)

$$Z = \int_N \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{-\int d^2x (i \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - i G_\mu) \psi)(x)} \quad (4.19)$$

E desde que a medida funcional $\mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}]$ é definida em termos das auto-funções de $\mathcal{D}[G_\mu]$ (veja o §1.4 - cap. 1), a integral funcional (4.19) nos produz como resultado o determinante funcional deste operador $\mathcal{D}[G_\mu]$

$$Z = \text{DET}_F (D[G_\mu]) \quad (4.20)$$

Considerando agora o operador de Dirac escrito na parametrização de Roskies (veja eq. (4.13)) e efetuando a transformação (4.14) - (4.16) em (4.19), obtemos a seguinte expressão para o funcional de partição Z :

$$Z = \int \mathcal{D}[\chi] \mathcal{D}[\bar{\chi}] J[G_\mu] e^{-\left\{ \int d^4x i \bar{\chi} \not{\partial}_\mu \chi \right\}} \\ N = J[G_\mu] \cdot \text{DET}_F (i \not{\partial}_\mu) \quad (4.21)$$

Comparando as equações (4.20) e (4.21), obtemos a eq. (4.17).

Performando então, a mudança de variáveis (4.14)-(4.16) no funcional gerador (4.1), obtemos a seguinte expressão:

$$Z[J_\mu^a, \eta^a, \bar{\eta}^a] = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \cdot \exp \left[-\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{Tr}^{(c)} (F_{\mu\nu}^2)(x) + 4g^2 \int d^4x G_\mu(x) \right] \\ \cdot J[G_\mu] \int \mathcal{D}[\chi] \mathcal{D}[\bar{\chi}] \exp \left\{ -\int d^4x (\bar{\chi} (i \not{\partial}_\mu) \chi + \bar{\chi} \not{V} \eta + \bar{\eta} \not{V} \chi)(x) \right\} \quad (4.22)$$

a qual será o ponto de partida para os resultados apresentados neste capítulo.

É importante ressaltar que o jacobiano funcional $J[G_\mu]$ provem unicamente da não-invariância da medida funcional fermiônica frente a ação do grupo $SU(N)$ - axial, desde que por construção esta medida é automaticamente invariante de calibre. Outro fato importante a se ter em mente é que os campos fermiônicos aparecem acoplados aos campos de calibre unicamente via o acoplamento com as fontes externas

As equações de movimento provenientes da ação efetiva em (4.22) são, agora, dada por:

$$(\nabla_\nu F_{\mu\nu})^a \lambda_a = \lambda_a \int \frac{\delta \log J[G_\mu]}{\delta G_\mu^a(x)} \quad (4.23)$$

$$i \not{\partial}_\mu \not{\partial}_\mu \chi = 0 \quad (4.24)$$

Comparando com a eq. (4.7), obtemos a relação entre a corrente vetorial $SU(N)$ do modelo e o jacobiano funcional $J[G_\mu]$

$$j_\mu^a(x) = -g (\bar{\psi} \not{\partial}_\mu \lambda_a \psi)(x) = \int \frac{\delta \log J[G_\mu]}{\delta G_\mu^a(x)} \quad (4.25)$$

a qual via a relação (4.6) nos fornece um critério para a quebra da simetria chiral (4.5) no modelo ([3])

$$(\not{\partial}_\mu j_\mu^{5,a})(x) = i \epsilon_{\mu\nu} \int \frac{\delta \log J[G_\mu]}{\delta G_\nu^a(x)} \neq 0 \quad (4.26)$$

Passemos agora ao cálculo de uma expressão explícita para o determinante funcional (4.20). Por motivos de simplicidade nos restringiremos ao setor topológico trivial do espaço funcional dos campos de calibre \mathcal{M} , restrição que implicará na não existência de modos zeros para o operador $\mathbb{D}[G_\mu]$

Para este cálculo, nós usaremos o teorema de Alvarez-Romanov - Schwartz (veja o apêndice 5 e ref. [14])

Usando a parametrização de Roskies (4.13), podemos escrever o operador $\mathbb{D}[G_\mu]$ na forma

$$\mathbb{D}[G_\mu] = \Omega(x) e^{\not{\partial}_5 \phi_a(x) \lambda^a} (i \not{\partial}_\mu \not{\partial}_\mu) e^{\not{\partial}_5 \phi_a(x) \lambda^a} \Omega^{-1}(x) \quad (4.27)$$

Notamos que o determinante funcional do operador (4.27) coincide com o determinante do operador

$$\tilde{D}[G_\mu] = e^{\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} (i\gamma_\mu \partial_\mu) e^{\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} \quad (4.28)$$

desse que estes operadores são relacionados entre si por uma transformação de similaridade definida pela matriz unitária $\Omega(x)$. Este fato é diretamente relacionado com a invariância de calibre do operador $D[G_\mu]$.

Introduzamos uma família de campos de calibre $\{G_\mu^{(\gamma)}\}$ parametrizada por um parâmetro $\gamma \in [0, 1]$ e definida pela relação (veja eq. (4.9))

$$i\gamma_\mu G_\mu^{(\gamma)} = -\gamma_\mu (e^{-\gamma \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a}) \partial_\mu (e^{\gamma \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a}) \quad (4.29)$$

A família $\{G_\mu^{(\gamma)}\}$ interpola a configuração de campo $G_\mu = 0$ e $G_\mu^{(\gamma=1)} = G_\mu$. Deste modo, a família de operadores de Dirac $\tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}]$ interpola o operador de Dirac livre $\tilde{D}[G_\mu=0]$ e o operador $\tilde{D}[G_\mu]$. A expressão explícita para a família $\{\tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}]\}$ é dada por:

$$\tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}] = e^{\gamma \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} (i\gamma_\mu \partial_\mu) e^{\gamma \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} \quad (4.30)$$

Tendo esta expressão, é fácil deduzir uma relação explícita entre $G_\mu^{(\gamma)}$ e G_μ . Para isto consideremos a seguinte forma bilinear em $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$:

$$\bar{\psi} \tilde{D}[G_\mu] \psi = \bar{\psi} (i\gamma_\mu (\partial_\mu - iG_\mu)) \psi = \bar{\psi} (e^{\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} (i\gamma_\mu \partial_\mu) e^{\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a}) \psi \quad (4.31)$$

Façamos a seguinte mudança de variável em (4.31):

$$\bar{\psi}(x) = (\bar{\chi} e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a})(x); \quad \psi(x) = (e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a} \chi)(x) \quad (4.32)$$

e assim:

$$\begin{aligned}
 (\bar{\Psi} \tilde{D}[G_\mu] \psi)(x) &= (\bar{\chi} e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a} \tilde{D}[G_\mu] e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a} \chi)(x) \\
 &= (\bar{\chi} e^{\gamma \gamma_5 \phi_c(x)\lambda^a} (i\gamma_\mu \partial_\mu) e^{\gamma \gamma_5 \phi_c(x)\lambda^a} \chi)(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

onde usamos a eq. (4.27).

Notamos que a terceira expressão em (4.33) é dada por (veja a eq. (4.30)).

$$\bar{\chi} (i\gamma_\mu (\partial_\mu - iG_\mu^{(\gamma)})) \chi
 \tag{4.34}$$

e que a segunda expressão em (4.33) pode ser escrita na forma, e efetuando as derivações:

$$\begin{aligned}
 &\bar{\chi} (i\gamma_\mu \partial_\mu) \chi + \bar{\chi} (e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a} i\gamma_\mu (\partial_\mu e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a})) \chi \\
 &+ \bar{\chi} e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a} i\gamma_\mu (-iG_\mu) e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a}
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

obtemos a relação desejada entre $G_\mu^{(\gamma)}$ e $G_\mu^{(\gamma=1)} = G_\mu$:

$$\gamma_\mu G_\mu^{(\gamma)} = e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a} (i\gamma_\mu (\partial_\mu - iG_\mu)) e^{(\gamma-1)\gamma_5 \phi_a(x)\lambda^a}
 \tag{4.36}$$

Desejamos aplicar o teorema de Alvarez - Romanov - Schwartz (veja o teorema do apêndice 4) à família $\tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}]$.

Como primeiro passo verificamos a relação 1 deste teorema (veja a eq. (4.30)):

$$\frac{d}{d\gamma} \tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}] = \gamma^5 \phi_a(x)\lambda^a \tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}] + \tilde{D}[G_\mu^{(\gamma)}] \gamma^5 \phi_a(x)\lambda^a
 \tag{4.37}$$

E por uma aplicação direta da eq. (1) do teorema de Alvarez - Romanov - Schwartz, obtemos o resultado:

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\lg \text{DET}_F^2(\tilde{D}[G_\mu^{(3)}]) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 4 \int d^2x \text{Tr}^{(C,D)} (\gamma^5 \phi_c(x) \lambda^c \langle x | e^{-\epsilon (\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2} | x \rangle) \quad (4.38)$$

onde notamos a relação $\langle x | \gamma^5 \phi_c \lambda^c e^{-\epsilon (\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2} | x \rangle = \gamma^5 \phi_c(x) \lambda^c \langle x | e^{-\epsilon (\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2} | x \rangle$ devido ao fato de que $\gamma^5 \phi_c \lambda^c$ ser diagonal no espaço das configurações $|x\rangle$. $\text{Tr}^{(C,D)}$ denota a operação traço sobre os índices de cor e de Dirac.

O operador $(\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2$ é dado pela expressão

$$(\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2 = -(\partial_\mu - i G_\mu^{(3)})^2 - \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- \cdot F_{\mu\nu}(-i G_\mu^{(3)}) \quad (4.39)$$

e devido a relação $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1$ e assim $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- = -2i\epsilon_{\mu\nu}\gamma_5$, podemos re-escrever (4.39) na forma mais transparente para a análise a ser feita:

$$(\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2 = -(\partial_\mu - i G_\mu^{(3)})^2 + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 F_{\mu\nu}(-i G_\mu^{(3)}) \quad (4.40)$$

As assíntotas do operador (4.40) são tabeladas (veja o apêndice 3 para uma discussão deste conceito e refs ([17], [18]))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle x | e^{-\epsilon (\tilde{D}[G_\mu^{(3)}])^2} | x \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ 1 + e \left(\frac{i\epsilon_{\mu\nu}\gamma_5}{2} F_{\mu\nu}(-i G_\mu^{(3)}) \right) \right\} \quad (4.41)$$

Substituindo a expansão assintótica (4.41) na relação (4.38) e integrando em relação ao parâmetro γ , temos que

$$\begin{aligned}
 & \lg \text{DET}_F^2(\tilde{D}[G_m^{(j)}]) - \lg \text{DET}_F^2(\tilde{D}[G_m^{(j=0)}]) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 4 \cdot \int d^2x \text{Tr}^{(c,D)} \left\{ \gamma^5 \phi_a(x) \lambda^a \int_0^1 d\sigma \frac{1}{4\pi\epsilon} \right. \\
 & \quad \left. \left(\mathbb{1} + \frac{\epsilon}{2} (i \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 F_{\mu\nu}(-iG_m^{(\sigma)})) \right) (x) \right\} \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Como consequência da eq. (4.42), o determinante funcional do operador de Dirac $\tilde{D}[G_m]$ é dado pelo funcional:

$$\text{DET}_F(\tilde{D}[G_m]) = \text{DET}_F(i\gamma_\mu \partial_\mu) \cdot \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}^{(c)} \left(\phi_a(x) \lambda^a \left(\int_0^1 d\sigma \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(-iG_m^{(\sigma)}) \right) \right) \right\} \quad (4.43)$$

onde efetuamos a operação traço sobre os índices de Dirac em (4.43)

Recordando a relação (4.17) para o jacobiano $J[G_m]$, vemos que

$$J[G_m] = \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}^{(c)} \left(\phi_a(x) \lambda^a \int_0^1 d\sigma \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(-iG_m^{(\sigma)})(x) \right) \right\} \quad (4.44)$$

Podemos ver agora que uma lagrangeana efetiva puramente gluônica para o modelo é dada explicitamente por (veja eq. (4.22) com as fontes externas nulas e eq. (4.44))

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(EF)}(G_m) = & -\frac{1}{4g^2} \int d^2x \left\{ \text{Tr}^{(c)} \left(F_{\mu\nu}(G_m) \right)^2 \right. \\
 & \left. - \frac{2ig^2}{\pi} \text{Tr}^{(c)} \left(\phi_a(x) \lambda^a \int_0^1 d\sigma \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(-iG_m^{(\sigma)})(x) \right) \right\} \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

A expressão efetiva para o Funcional Gerador do Modelo tem a seguinte expressão ([21]):

$$Z[J_\mu^a, \eta^a, \bar{\eta}^a] = \frac{1}{Z} \left\{ \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}^{(EF)}(G_\mu) \right. \right. \\ \left. \left. \int_{\mathcal{N}} \mathcal{D}[\chi] \mathcal{D}[\bar{\chi}] \exp \left\{ - \int d^2x \left(\bar{\chi} (i \gamma_\mu \partial_\mu) \chi + \bar{\eta} e^{-\gamma_5 \phi_c} \lambda^c \chi + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \eta \bar{\chi} e^{-\gamma_5 \phi_c(x)} \lambda^c \right) (x) \right\} \right\} \quad (4.46)$$

Tendo obtido o funcional gerador efetivo (4.46), podemos mostrar que as funções de correlação fermiônica possuem uma estrutura fatorizada de um produto de funções de correlação de Fêrmions livres multiplicado por um fator puramente gluônico. Por exemplo, a função de correlação de 2-pontos possui a estrutura abaixo: ([21])

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\delta^2 Z[J_\mu^a, \eta^a, \bar{\eta}^a]}{\delta \bar{\eta}^a(x) \cdot \delta \eta^a(y)} \Big|_{J_\mu^a=0, \eta^a=0, \bar{\eta}^a=0} \\ = \frac{1}{Z} \left\{ \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] e^{-\int d^2x \mathcal{L}^{(EF)}(G_\mu)} \left(\int_{\mathcal{N}} \mathcal{D}[\chi] \mathcal{D}[\bar{\chi}] \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\int d^2x \bar{\chi} (i \gamma_\mu \partial_\mu) \chi} \cdot e^{-\gamma_5 \phi_c(x) \lambda^c} \chi(x) \bar{\chi}(y) e^{-\gamma_5 \phi_c(x) \lambda^c} \right) \right\} \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_\mu(x_\mu - y_\mu)}{|x - y|^2} \left\{ \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \cdot e^{-\int d^2x \mathcal{L}^{(EF)}(G_\mu)} \right. \\ \left. e^{\gamma_5 \phi_c(x) \lambda^c} \cdot e^{-\gamma_5 \phi_c(x) \lambda^c} \right\} \quad (4.47)$$

onde o cálculo da integração funcional em relação aos campos fermiônicos produz o propagador livre, desde que os fermions em (4.46) estão desacoplados dos campos de calibre

$$\int_N \mathcal{D}[\chi] \mathcal{D}[\bar{\chi}] \cdot e^{-\int d^2x \bar{\chi} (i\gamma_\mu \partial_\mu) \chi} \cdot \chi(x) \bar{\chi}(y) = \frac{1}{2\pi} \gamma_\mu \cdot \frac{(x_\mu - y_\mu)}{|x-y|^2} \quad (4.48)$$

e o fator normalização \tilde{Z} é dado pela integral funcional

$$\tilde{Z} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \cdot \exp \left\{ -\int d^2x \mathcal{L}^{(EF)}(G_\mu) \right\} \quad (4.49)$$

Vemos então que a não-trivialidade das funções de correlação fermiônicas do modelo é devida essencialmente a presença dos termos $e^{-\gamma_5 \phi_a(x) \lambda^a}$ provenientes da interação com as fontes externas fermiônicas $\{\eta, \bar{\eta}\}$

No próximo parágrafo analisaremos um mecanismo de Higgs intrínseco no modelo mostrando o aparecimento de um termo de massa para a componente axial do campo gluônico $G_\mu(x)$

4.3 - O MECANISMO DE HIGGS INTRÍNSECO E FUNCIONAL DE WESS - ZUMINO NA CROMODINÂMICA SU(N) - NÃO MASSIVA BIDIMENSIONAL

A geração de um termo de massa para os campos de calibre $G_\mu(x)$ na C.D.Q. - SU(N) bidimensional não-massiva pode ser vista considerando as componentes axial $A_\mu^{(j)}$ e vetorial $V_\mu^{(j)}$ dos campos de calibre interpolantes $G_\mu^{(j)}$ e definidas pela relação ([4])

$$e^{-\gamma_5 \phi_a(x) \lambda^a} \cdot \partial_\mu e^{\gamma_5 \phi_a(x) \lambda^a} = V_\mu^{(j)} + \gamma_5 A_\mu^{(j)} \quad (4.50)$$

Os campos $G_\mu^{(j)}$ podem expressar-se em termos dos campos componentes $V_\mu^{(j)}, A_\mu^{(j)}$ fazendo uso da relação (4.29)

$$i \gamma_\mu G_\mu^{(j)} = \gamma_\mu (-V_\mu^{(j)} + i \epsilon_{\mu\nu} A_\nu^{(j)}) \quad (4.51)$$

e portanto:

$$G_\mu^{(j)} = i V_\mu^{(j)} + \epsilon_{\mu\nu} A_\nu^{(j)} \quad (4.52)$$

Devemos agora expressar o jacobiano $J[G_\mu]$ (eq.(4.44)) em termos das componentes $\{V_\mu^{(j)}, A_\mu^{(j)}\}$. Para isto devemos calcular o tensor de intensidade de campo em termos destas componentes:

$$F_{\mu\nu}(-iG_\mu^{(\sigma)}) = \left\{ \partial_\mu (V_\nu^{(\sigma)} - i \epsilon_{\nu\alpha} A_\alpha^{(\sigma)}) - \partial_\nu (V_\mu^{(\sigma)} - i \epsilon_{\mu\alpha} A_\alpha^{(\sigma)}) + [V_\mu^{(\sigma)} - i \epsilon_{\mu\alpha} A_\alpha^{(\sigma)}, V_\nu^{(\sigma)} - i \epsilon_{\nu\alpha} A_\alpha^{(\sigma)}]_- \right\} \quad (4.53)$$

e portanto,

$$F_{\mu\nu}(-iG_\mu^{(\sigma)}) = \left\{ F_{\mu\nu}(V_\mu^{(\sigma)}) - [A_\mu^{(\sigma)}, A_\nu^{(\sigma)}]_- + (i D_\alpha^{(\sigma)} A_\alpha^{(\sigma)}) \epsilon_{\mu\nu} \right\} \quad (4.54)$$

onde introduzimos a notação

$$D_\alpha^{(\sigma)} A_\beta^{(\sigma)} = \partial_\alpha A_\beta^{(\sigma)} + [V_\alpha^{(\sigma)}, A_\beta^{(\sigma)}]_- \quad (4.55)$$

Notemos agora que as componentes $V_\mu^{(\sigma)}, A_\mu^{(\sigma)}$ não são independentes entre si devido a identidade:

$$\partial_\mu g_\nu^{(\sigma)} - \partial_\nu g_\mu^{(\sigma)} + [g_\mu^{(\sigma)}, g_\nu^{(\sigma)}]_- = 0 \quad (4.56)$$

onde

$$g_\alpha^{(\sigma)} = e^{\sigma \gamma_s \phi_\alpha(x) \Lambda^a} \partial_\alpha e^{-\sigma \gamma_s \phi_\alpha(x) \Lambda^a} \quad (4.57)$$

A relação (4.53) expressa-se em termos dos campos com-

ponentes $\{V_\mu^{(\sigma)}, A_\mu^{(\sigma)}\}$ na forma:

$$F_{\mu\nu}(V_\mu^{(\sigma)}) + [A_\mu^{(\sigma)}, A_\nu^{(\sigma)}]_- = 0 \quad (4.58)$$

$$D_\mu^{(\sigma)} A_\nu^{(\sigma)} - D_\nu^{(\sigma)} A_\mu^{(\sigma)} = 0 \quad (4.59)$$

Substituindo a eq. (4.54) na expressão (4.44), obtemos o seguinte resultado para o jacobiano

$$J[G_\mu] = \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \operatorname{Tr}^{(c)} (\lambda_a \phi_a(x)) \left(\int_0^1 d\sigma (2i D_\mu^{(\sigma)} A_\mu^{(\sigma)} + \epsilon_{\mu\nu} (F_{\mu\nu}(V_\mu^{(\sigma)}) - [A_\mu^{(\sigma)}, A_\nu^{(\sigma)}]_-) \right) \right\} \quad (4.60)$$

a qual simplifica-se, fazendo uso da condição (4.58), à expressão:

$$\exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \operatorname{Tr}^{(c)} (\lambda_a \phi_a(x)) \int_0^1 d\sigma (2i D_\mu^{(\sigma)} A_\mu^{(\sigma)}) \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \operatorname{Tr}^{(c)} (\lambda_a \phi_a(x)) \int_0^1 d\sigma (-2 [A_\mu^{(\sigma)}, A_\nu^{(\sigma)}]_-) \right\} \quad (4.61)$$

Mostremos agora que o termo

$$\exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \operatorname{Tr}^{(c)} (\lambda_a \phi_a(x)) \int_0^1 d\sigma (2i D_\mu^{(\sigma)} A_\mu^{(\sigma)}(x)) \right\} \quad (4.62)$$

é um termo de massa para a parte axial $A_\mu = A_\mu^{(\sigma=1)}$ do campo de calibre G_μ

Para isto, consideremos a relação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathcal{I}} g_\mu(\mathcal{I}) &= \gamma^5 \phi_a \lambda_a (e^{\mathcal{I} \gamma^5 \phi_a \lambda_a} \partial_\mu e^{-\mathcal{I} \gamma^5 \phi_a \lambda_a}) \\ &\quad + e^{\mathcal{I} \gamma^5 \phi_a \lambda_a} \partial_\mu (e^{-\mathcal{I} \gamma^5 \phi_a \lambda_a} - \gamma^5 \phi_a \lambda_a) \\ &= [\gamma^5 \phi_a \lambda_a, g_\mu(\mathcal{I})]_- - \gamma^5 \partial_\mu (\phi_a \lambda_a) \end{aligned} \quad (4.63)$$

e de um modo geral por indução :

$$\frac{d^m}{dy^m} g_m(z) = \Delta_X^{(m)} \circ (g_m(z) - \gamma^5 \partial_\mu (\phi^c \lambda_a)) \quad (4.64)$$

onde introduzimos o operador Δ_X definido pela relação ([5])

$$\Delta_X \circ Y = [X, Y]_- \quad (4.65)$$

com $X \in Y$ matrizes e $\Delta_X^{(k)}$ denota sua k -ésima potência.

Consideremos agora, fazendo uso de (4.63), a expressão:

$$\begin{aligned} \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} g_\mu(\sigma)) &= \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} [\gamma^5 \phi_a \lambda_a, g_\mu(\sigma)]_- + \\ &+ (\partial_\mu A_\mu^{(\sigma)}) \gamma^5 \cdot \gamma^5 \phi_a \lambda_a) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Usando a propriedade de cíclicidade do traço para mostrar a relação $\text{Tr}(a[b,c]_-) = \text{Tr}(b[a,c]_-)$, podemos re-escrever (4.66) na forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} g_\mu(\sigma)) &= \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 \phi_a \lambda_a (\\ &- [\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)}, g_\mu(\sigma)]_- + \partial_\mu A_\mu^{(\sigma)} \gamma^5)) = 2 \cdot \text{Tr}^{(c)} \left\{ \right. \\ &\lambda_a \phi_a ([V_\mu^{(\sigma)}, A_\mu^{(\sigma)}]_- + \partial_\mu A_\mu^{(\sigma)}) \left. \right\} = \\ &= 2 \text{Tr}^{(c)} \left\{ \phi_a \lambda_a D_\mu^{(\sigma)} \cdot A_\mu^{(\sigma)} \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} g_\mu(\sigma)) &= \text{Tr}^{(c,0)} (\gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} \\ &(\frac{d}{d\sigma} V_\mu^{(\sigma)} + \gamma^5 \frac{d}{d\sigma} A_\mu^{(\sigma)})) = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{Tr}^{(c)} \left(\frac{d}{d\sigma} (A_\mu^{(\sigma)} \cdot A_\mu^{(\sigma)}) \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Comparando as eqs. (4.67) e (4.68), vemos que o termo (4.62) possui a forma funcional

$$e^{-\frac{2}{2\pi} \left\{ \int d^2x \text{Tr}^{(c)} \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \frac{d}{d\sigma} (A_\mu^{(\sigma)} \cdot A_\mu^{(\sigma)}) \right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\pi} \left\{ \int d^2x \text{Tr}^{(c)} (A_\mu \cdot A_\mu)(x) \right\}} \quad (4.69)$$

O resultado (4.69) nos mostra então, a geração dinâmica, via correções radiativas à parte axial do propagador gluônico $\langle A_\alpha(x) A_\beta(y) \rangle$, de um termo massivo para a componente axial do campo G_μ^β ([4]) e portanto, indicando claramente a existência de um mecanismo de Higgs intrínseco na C.D.Q. SU(N) não-massiva bidimensional.

Analisemos agora o termo restante em (4.61)

$$e^{-\frac{i}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}^{(c)} \left(\int_0^1 d\sigma \epsilon_{\mu\nu} (2\lambda_a \phi_a [A_\mu^{(\sigma)}, A_\nu^{(\sigma)}]) (x) \right)} \quad (4.70)$$

Podemos expressar $A_\mu^{(\sigma)}$ em termos de $A_\mu^{(\sigma=1)} = A_\mu$ considerando a expansão Tayloriana de $g_\mu(\sigma)$ na vizinhança de $\sigma = 1$

$$g_\mu(\sigma) = V_\mu^{(\sigma)} + \gamma^5 A_\mu^{(\sigma)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_\mu^{(m)}(\sigma)}{m!} (\sigma-1)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\sigma-1)^m \left\{ \Delta_{\gamma^5 \phi_a \lambda_a}^{(m)} (V_\mu^{\sigma=1} + \gamma^5 A_\mu^{\sigma=1} - \gamma^5 \partial_\mu \phi - \lambda_a) \right\} \quad (4.71)$$

Tomando os coeficientes correspondentes as matrizes γ_5 e a identidade, obtemos uma relação explícita entre as componentes $(A_\mu^{(\sigma)}, V_\mu^{(\sigma)})$ com as componentes do campo de calibre $G_\mu = (A_\mu, V_\mu)$

$$A_\mu^{(\sigma)} = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sigma-1)^{2m}}{(2m)!} \Delta_{\phi_a \lambda_a}^{2m} (A_\mu - \partial_\mu (\lambda_a \phi_a)) \right\}$$

$$+ \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma-1)^{2m+1}}{(2m+1)!} \Delta_{\lambda_a \phi_a}^{2m+1} V_\mu \right\} + A_\mu \quad (4.72)$$

$$V_{\mu}^{(\sigma)} = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sigma-1)^{2m}}{(2m)!} \Delta_{\phi_a \lambda_a}^{2m} V_{\mu} \right\} + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma-1)^{2m+1}}{(2m+1)!} \Delta_{\phi_a \lambda_a}^{2m+1} (A_{\mu} - \partial_{\mu}(\lambda_a \phi_a)) \right\} \quad (4.73)$$

As expressões (4.72) e (4.73) permitem em princípio, realizar a integração explícita em relação ao parâmetro σ no funcional (4.70) e lavando-nos a um funcional efetivo em termos de $\phi_a(x)$, $V_{\mu}(x)$, $A_{\mu}(x)$.

Por motivos de completamento, observamos a validade das relações que exprimem as componentes (A_{μ}, V_{μ}) do campo de calibre G_{μ} em termos de $\phi_a(x) \lambda^a$ ([5])

$$A_{\mu} = \Delta_{\gamma_5 \phi_a \lambda_a}^{-1} \text{SEnh}(\Delta_{\gamma_5 \phi_a \lambda_a}) \partial_{\mu}(\gamma_5 \phi_a \lambda_a) \quad (4.74)$$

$$V_{\mu} = \Delta_{\gamma_5 \phi_a \lambda_a}^{-1} (1 - \cosh(\Delta_{\gamma_5 \phi_a \lambda_a})) \partial_{\mu}(\gamma_5 \phi_a \lambda_a) \quad (4.75)$$

Finalmente, mostraremos que a partir do termo (4.70) podemos extrair o funcional multiforme bidimensional de Wess-Zumino associado ao grupo $SU(N)$ - axial ([6], [7], [8], [9]) Para este objetivo, introduzamos a família de matrizes $g(\sigma, x) = e^{\sigma \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a}$ com $\sigma \in [0, 1]$ tomando valores no grupo axial $SU(N)$. Fazendo uso da eq. (4.50), podemos escrever o integrando em (4.70) da forma

$$-\frac{i}{\pi} \text{Tr}^{(1,0)} \left(\gamma_5 \cdot \gamma_5 \phi_a \lambda_a \epsilon_{\mu\nu} \left[\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_{\mu} g(\sigma, x) - V_{\mu}^{(\sigma)}(x); \gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_{\nu} g(\sigma, x) - V_{\nu}^{(\sigma)}(x) \right] \right) \quad (4.76)$$

Considerando o fator em (4.76) contendo unicamente a matriz $g(\sigma, x)$ e notando a validade da relação

$$g^{-1}(\sigma, x) \frac{\partial}{\partial \sigma} g(\sigma, x) = \gamma_5 \phi_a(x) \lambda_a \quad (4.77)$$

vemos que este termo pode ser escrito na forma

$$\text{Tr}^{(c,0)} \left(2 \cdot \epsilon_{\mu\nu} \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \frac{\partial}{\partial \sigma} g(\sigma, x) \right) \right. \\ \left. \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_\mu g(\sigma, x) \right) \cdot \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_\nu g(\sigma, x) \right) \right) \quad (4.78)$$

Este termo contribue para a ação gluônica efetiva do modelo por um termo da forma

$$\exp \left\{ -\frac{2i}{\pi} \int d^2x \text{Tr}^{(c,0)} \left(\int_0^1 d\sigma \epsilon_{\mu\nu} \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \frac{\partial}{\partial \sigma} g(\sigma, x) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_\mu g(\sigma, x) \right) \left(\gamma_5 g^{-1}(\sigma, x) \partial_\nu g(\sigma, x) \right) \right) \right\} \quad (4.79)$$

Para a análise do significado topológico do funcional (4.79) será conveniente considerar o espaço-tempo euclidiano compactificado a esfera S^2 e então, considerar o funcional (4.79) definido em uma semi-esfera $\tilde{S}^3 = S^2 \times [0, 1]$ (veja a fig. 6-A) com a fronteira sendo o espaço-tempo S^2 :

$$\exp \left\{ -\frac{2i}{3\pi} \int_{\tilde{S}^3} d^3\tilde{x} \text{Tr}^{(c,0)} \left(\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\alpha g(\tilde{x}) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\beta g(\tilde{x}) \right) \left(g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\gamma g(\tilde{x}) \right) \right) \right\} \quad (4.80)$$

onde $\tilde{x} = (\sigma, x) \in \tilde{S}^3$

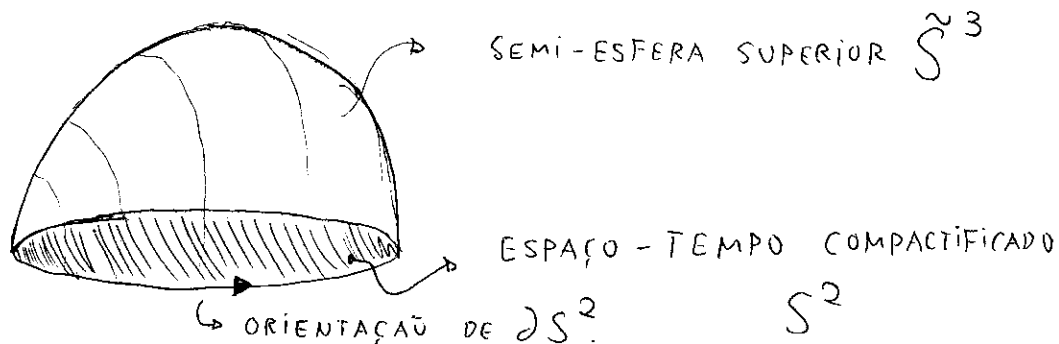


FIG 6-A

Um ponto crucial agora se apresenta: em vez de considerarmos a semi-esfera $\tilde{S}^3 = S^2 \times [0, 1]$, poderíamos considerar a outra semi-esfera $\tilde{S}^3 = S^2 \times [-1, 0]$, que é associada ao fato de termos escolhido uma família de campos de calibre $\{G_m^{(j)}\}$ com $j \in [-1, 0]$ (veja a eq. (4.29)). Notamos que neste caso, o funcional (4.80) toma a forma

$$\exp \left\{ \frac{2i}{3\pi} \int_{\tilde{S}^3} d^3 \underline{x} \operatorname{Tr}^{(c, D)} (E_{\mu\nu} g^{-1}(\underline{x}) \partial_\mu g(\underline{x}) g^{-1}(\underline{x}) \partial_\nu g(\underline{x})) \right\} \quad (4.81)$$

onde o sinal oposto no expoente (4.81) em relação ao expoente de (4.77) é devido ao sentido de orientação oposto de \tilde{S}^3 em relação a \tilde{S}^3 (fig.6-B) e $\underline{x} = (-\sigma, \underline{x}) \in \tilde{S}^3$

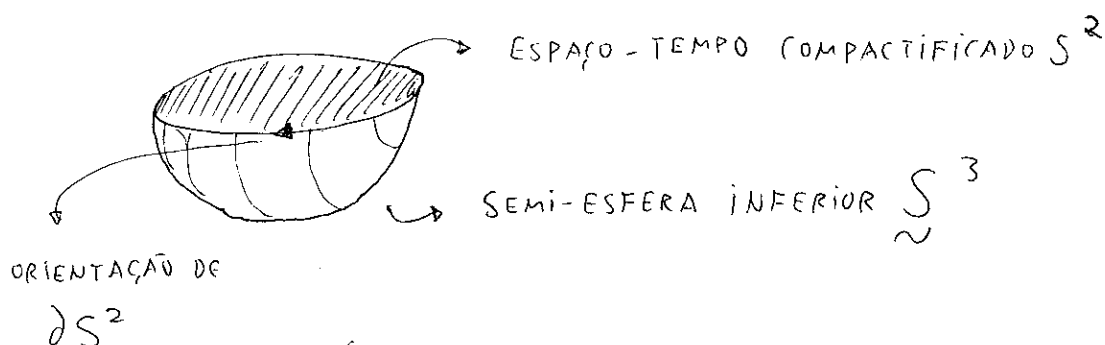


FIG 6-B

E deste que as duas maneiras de escrever acima são indistinguíveis, temos a relação de igualdade

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{2i}{3\pi} \int_{\tilde{S}^3} d^3 \tilde{x} \operatorname{Tr}^{(c, D)} (E_{\mu\nu} (g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\mu g(\tilde{x}) (g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\nu g(\tilde{x})) \right. \\ & \quad \left. (g^{-1}(\tilde{x}) \partial_\nu g(\tilde{x})) \right) \\ & = \exp \left\{ \frac{2i}{3\pi} \int_{\tilde{S}^3} d^3 \underline{x} \operatorname{Tr}^{(c, D)} (E_{\mu\nu} (g^{-1}(\underline{x}) \partial_\mu g(\underline{x}) (g^{-1}(\underline{x}) \partial_\nu g(\underline{x})) \right. \\ & \quad \left. (g^{-1}(\underline{x}) \partial_\nu g(\underline{x})) \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Introduzindo a esfera tridimensional $S^3 = \tilde{S}^3 \cup \tilde{S}^3$, a relação (4.78) nos leva a seguinte equação:

$$\exp \left\{ \frac{2i}{3\pi} \int_{S^3} d^3 \bar{x} \text{Tr}^{(c, D)} \left(\epsilon_{\alpha\mu\nu} (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\alpha g(\bar{x})) (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\mu g(\bar{x})) (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\nu g(\bar{x})) \right) \right\} = 1 \quad (4.83)$$

$$(\bar{x} \in S^3)$$

onde para obtermos (4.83) multiplicamos o primeiro membro de (4.82) pelo seu segundo membro. E portanto, temos a validade da seguinte expressão:

$$\frac{2}{3\pi} \left\{ \int_{S^3} d^3 \bar{x} \text{Tr}^{(c, D)} \left(\epsilon_{\alpha\mu\nu} (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\alpha g(\bar{x})) \cdot (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\mu g(\bar{x})) \cdot (g^{-1}(\bar{x}) \partial_\nu g(\bar{x})) \right) \right\} = 2\pi N \quad (4.84)$$

com $m \in \mathbb{Z}$ arbitrário.

A relação (4.84) nos indica portanto que existem varias possibilidades de estender a aplicação $g(x, \sigma)$ continuada a um espaço-tempo compactificado S^2 a uma aplicação $g(\bar{x})$ definida a uma esfera tridimensional e cada uma destas possibilidades é caracterizada por um inteiro N , indicando-nos a classe topológica a qual pertence ([6]).

4.4 - O MODELO DE SCHWINGER

Neste parágrafo analisaremos o funcional gerador efetivo (4.46) no caso simples do grupo de calibre ser o grupo abeliano $U(1)$, o chamado modelo de Schwinger.

Para este caso, a relação de Roskies (4.9) toma a forma simples

$$i\gamma_\mu \cdot G_\mu(x) = -\gamma_\mu (e^{-i\omega(x)} e^{-\gamma_5 \phi(x)}) \partial_\mu (e^{\gamma_5 \phi(x)} e^{i\omega(x)}) \quad (4.85)$$

ou equivalentemente

$$G_\mu(x) = (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)(x) + (\partial_\mu \omega)(x) \quad (4.86)$$

Devido a simetria de calibre $U(1)$ do modelo abeliano em estudo, podemos sempre anular o termo $\omega(x)$ em (4.86) por uma transformação de calibre $G_\mu(x) \rightarrow G_\mu(x) - (\partial_\mu \omega)(x)$. Observamos que as configurações de campo $\bar{G}_\mu(x) = (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)(x)$ satisfazem a condição de Lorentz $(\partial_\mu \bar{G}_\mu)(x) = 0$ e reciprocamente, qualquer configuração de campo satisfazendo a condição de Lorentz (no setor topológico trivial) possui a forma acima. E, portanto, a condição de Lorentz pode ser pensada como uma caracterização diferencial da escolha de calibre associada a parametrização de Rosenfeld no caso abeliano (veja o apêndice B)

As componentes axiais e vetoriais dos campos de calibre interpolantes $G_\mu^{(s)}$ (veja eq. 4.52)) são dadas por

$$A_\mu^{(s)} = \int (\partial_\mu \Phi) \quad ; \quad V_\mu^{(s)} = 0 \quad (4.87)$$

O jacobiano da transformação desacoplante (eq. (4.17) e eq. (4.61)) toma a forma simples (veja a eq. (4.69))

$$J[G_\mu] = e^{-\frac{1}{2\pi} \left\{ \int d^2x (G_\mu \cdot G_\mu)(x) \right\}} \quad (4.88)$$

Tendo obtido o jacobiano $J[G_\mu]$ no gauge de Lorentz, verificamos facilmente que a corrente vetorial $J_\mu(x)$ (veja eq. (4.25)) associada a simetria de calibre se conserva:

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu j_\mu)(x) &= \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left(\frac{\delta}{\delta G_\mu(x)} \left(-\frac{1}{2\pi} \int d^2x (G_\mu G_\mu)(x) \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} (\partial_\mu G_\mu)(x) = 0 \quad (4.89)
 \end{aligned}$$

. Mas quando analisamos a conservação da pseudo-corrente (veja eq. (4.26)), verificamos a sua mão-conservação

$$(\partial_\mu j_\mu^5)(x) = -\frac{i}{\pi} (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu G_\nu)(x) = -\frac{i}{2\pi} (\epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu})(x) \neq 0 \quad (4.90)$$

, indicando a quebra espontânea da simetria $U(1)$ - axial do modelo ([10])

Continuando a análise para o caso abeliano, devemos expressar a função $\phi(x)$ em termos do campo de calibre $G_\mu(x)$

Existem 2 modos de realizar esta análise e ambas nos levando a expressões não-locais. O primeiro modo consiste em considerar a relação:

$$\left(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)(x) = (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu G_\mu)(x) = (\epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\alpha}) \partial_\alpha \phi(x) = (\partial^2 \phi)(x) \quad (4.91)$$

e deste modo, obtemos a relação de inversão de $\phi(x)$ em termo do tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}(x)$:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \left((\partial^2)^{-1} F_{\mu\nu} \right)(x) \quad (4.92)$$

onde a função de green do operador ∂^2 é dada por :

$$(\partial^2)^{-1}(x, y) = +\frac{1}{2\pi} \lg |x-y| + c \quad (4.93)$$

com c uma constante de integração a ser ajustada de acordo com as condições de fronteira do problema.

Outra maneira de realizar a inversão de (4.82) será proposta. Consideremos um contorno arbitrário $\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}$ (mais fixo) conectando o ponto $-\infty$ ao ponto X e orientado no sentido de $-\infty$ para X . É fácil verificar que a função $\phi(x)$ pode ser relacionado com $G_\mu^{(x)}$ pela integral de linha

$$\phi(x) = - \int_{\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}} (\epsilon_{\mu\nu} G_\nu)(x) dX_\mu \quad (4.94)$$

, pois substituindo a expressão (4.86) com $\omega(x) \equiv 0$ (é importante lembrar que neste parágrafo estamos trabalhando no calibre de Lorentz $\omega(x) \equiv 0$) em (4.94), obtemos o resultado

$$- \int_{\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\nu\alpha} (\partial_\alpha \phi)(x) dX_\mu = \phi(x) - \phi(-\infty) = \phi(x) \quad (4.95)$$

Note que (4.92) nos assegura que a integral (4.94) independe do caminho $\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}$ e só depende do ponto terminal X do contorno (observamos que no setor topológico trivial ao qual estamos restringindo a análise, temos que $\phi(-\infty) = 0$).

Torna-se conveniente escrever (4.94) na forma de integração de uma corrente $j_\mu(\omega; x)$ circulando ao longo de $\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}$ com o campo de calibre $G_\mu(\omega)$

$$\phi(x) = \int d^2\omega j_\mu(\omega; x) G_\mu(\omega) \quad (4.96)$$

com
$$j_\mu(\omega; x) = - \int_{\mathcal{C}_{(-\infty)}^{(x)}} \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(x - X_\alpha(\xi)) dX_\nu(\xi) \quad (4.97)$$

. Aqui $X_\alpha(\xi)$ denota uma parametrização de $\mathcal{C}_{(-\infty)}^x$.

Deste modo, o funcional gerador do modelo de Schwinger no calibre de Lorentz toma a forma

$$Z[\eta, \bar{\eta}, \bar{\eta}] = \frac{1}{Z} \left\{ \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x G_\mu (-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi}) G_\mu + g^2 \int_{\mathcal{M}} G_\mu \right\} \right. \\ \left. \left(\int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[\bar{X}] \exp \left\{ -\int d^2x (\bar{X} (i\gamma_\mu \partial_\mu) X + [\bar{X} \exp(-\gamma_5 \int d^2\omega \int_{\mathcal{M}} j_\mu(\omega, x) G_\mu(\omega)) \eta \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \bar{\eta} \exp(-\gamma_5 \int d^2\omega \int_{\mathcal{M}} j_\mu(\omega, x) G_\mu(\omega)) X \right] (x) \right\} \right) \right\} \quad (4.98)$$

A função de correlação de 2-pontos fermiônica do modelo tem a seguinte expressão: (veja eq. (4.47))

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{2\pi} \gamma_\mu \frac{(x_\mu - y_\mu)}{|x_\mu - y_\mu|^2} \left(\frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[G_\mu] \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x \right. \right. \\ \left. \left. G_\mu (-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi}) G_\mu \right\} \cdot \exp \left(\gamma_5 \int d^2\omega \int_{\mathcal{M}} j_\mu(\omega, x) G_\mu(\omega) \right) \right. \\ \left. \cdot \exp \left(-\gamma_5 \int d^2\omega \int_{\mathcal{M}} j_\mu(\omega, y) G_\mu(\omega) \right) \right) \quad (4.99)$$

A integração funcional em relação ao campo $G_\mu(x)$ é do tipo gaussiano e produzindo o resultado:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{2\pi} \gamma_\mu \frac{(x_\mu - y_\mu)}{|x_\mu - y_\mu|^2} \exp \left\{ \int d^2\omega (j_\mu(\omega, x) - j_\mu(\omega, y)) \right. \\ \left. \frac{1}{\partial} \cdot (-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi})^{-1}(\omega, \omega) \cdot (j_\mu(\omega, x) - j_\mu(\omega, y)) \right\} \quad (4.100)$$

onde o propagador $(-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi})^{-1}(\omega, \omega)$ é dado pela seguinte função de Bessel modificada de ordem zero: $\frac{1}{2\pi} K_0(\frac{g}{\sqrt{\pi}} |w - w'|)$. Este propagador possui o comportamento a curta e longa distancias dado pelas relações:

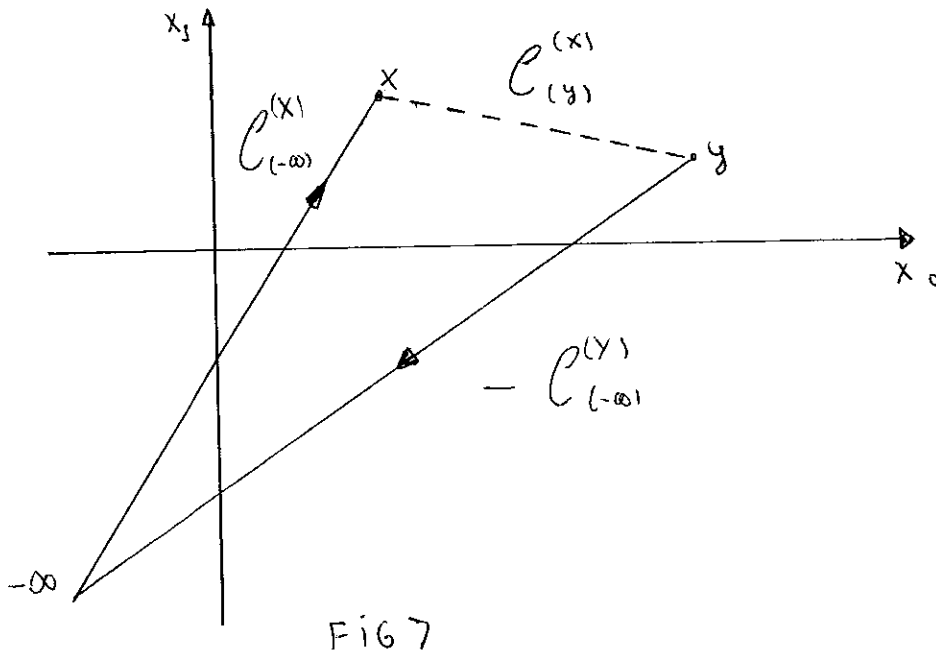
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(-\partial^2 + \frac{y^2}{\pi} \right)^{-1}(\omega, 0) = -\log \frac{y}{\sqrt{\pi}} \quad (4.101)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\partial^2 + \frac{y^2}{\pi} \right)^{-1}(\omega, 0) = 0 \quad (4.102)$$

Escolhendo o caminho $C_{(x)}^{(y)}$ associado a corrente $(j_{\mu}(\omega, x) - j_{\mu}(\omega, y))$ como segmento de reta conectando o ponto X ao ponto Y

$$C_{(x)}^{(y)} = \left\{ (y-x)\zeta + x \ ; \ 0 \leq \zeta \leq 1 \right\} \quad (4.103)$$

(veja fig. (7))



, podemos calcular o expoente em (4.100)

Introduzindo o fator geométrico

$$f(k, x, y) = \int d^2\omega \int d^2\omega' (j_{\mu}(\omega, x) - j_{\mu}(\omega, y)) e^{ik \cdot (\omega - \omega')} (j_{\mu}(\omega', x) - j_{\mu}(\omega', y)) \quad (4.104)$$

podemos escrever o expoente em (4.100) no espaço dos momentos do seguinte modo:

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + \frac{g^2}{\pi}} f(k, x, y) \quad (4.105)$$

O cálculo do fator geométrico (4.104) é imediato e produz o seguinte resultado:

$$f(k, x, y) = \frac{2 \cdot |y-x|^2}{(k_\mu (y-x)_\mu)^2} (1 - \cos k_\mu (x-y)_\mu) \quad (4.106)$$

e portanto, o fator exponencial em (4.100) toma a forma:

$$\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + \frac{g^2}{\pi}} \frac{(1 - \cos k_\mu (x-y)_\mu) \cdot 2 \cdot |y-x|^2}{(k_\mu (x-y)_\mu)^2} \right\} \quad (4.107)$$

Esta integral é característica de teorias que apresentam um comportamento na região do infravermelho não-trivial ([12]) - Lecture 7)

Observamos que a função de correlação do campo de calibre nos mostra que existe uma excitação vetorial neutra massiva com massa dada por $\frac{g}{\sqrt{\pi}}$ no espectro do modelo de Schwinger

$$\langle G_\mu(x) G_\nu(y) \rangle = \frac{\delta^2 Z[J_\mu, \bar{\psi}, \psi]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \Big|_{J_\mu=0, \bar{\psi}=\psi=0} = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}} |x-y| \right) \delta_{\mu\nu} \quad (4.108)$$

Tendo encontrado o problema usual das divergências do infravermelho para a função de Green fermiônica (4.99), torna-se natural questionar sobre a existência de uma formulação para o modelo que nos leve automaticamente a expressões onde estas divergências se cancelem e permitam a determinação das funções de Green fermiônica de um modo simples. A possibilidade

desta formulação será apresentada a seguir ([1]). A idéia a ser implementada será a reformulação do funcional gerador do modelo em termos das novas variáveis de campo $(\phi(x); \omega(x))$ (veja eq. (4.86)). Como primeiro passo, vemos que o jacobiano da transformação $(G_0(x); G_1(x)) \rightarrow (\phi(x); \omega(x))$ é facilmente calculado e produzindo o resultado

$$\text{DET}_F \begin{bmatrix} \frac{\delta G_1}{\delta \phi} & \frac{\delta G_1}{\delta \omega} \\ \frac{\delta G_0}{\delta \phi} & \frac{\delta G_0}{\delta \omega} \end{bmatrix} = \text{DET}_F \begin{pmatrix} -\partial_0 & \partial_1 \\ \partial_1 & \partial_0 \end{pmatrix} = \text{DET}_F (-\partial^2) \quad (4.109)$$

Este resultado implica na seguinte relação entre as medidas funcionais

$$\mathcal{D}[G_\mu] = \mathcal{D}[\phi] \mathcal{D}[\omega] \text{DET}_F (-\partial^2) \quad (4.110)$$

. Fixando o calibre, escolhendo o calibre de Lorentz $\partial_\mu G_\mu = 0$, ou equivalentemente $\omega(x) = 0$, obtemos a nova expressão para o funcional gerador do modelo:

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = & \frac{1}{Z} \left\{ \int \mathcal{D}[\phi] \text{DET}_F (-\partial^2) \right. \\ & \left. \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x \phi (-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) \phi + \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\nu J_\mu) \phi \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\int_N \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left\{ - \int d^2x [(\bar{\chi} (i\gamma_\mu \partial_\mu) \chi) + \bar{\chi} e^{-\gamma_5 \phi} \eta \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \bar{\eta} e^{-\gamma_5 \phi} \chi \right] (x) \right\} \right) \right\} \quad (4.111) \end{aligned}$$

Nesta nova parametrização, as funções de correlação fermiônicas são livres de divergências do infravermelho. Por exemplo, a função de 2-pontos fermiônica é dada pela equação

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{2\pi} \gamma_\mu \frac{(x_\mu - y_\mu)}{|x-y|^2} \left(\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x \right. \right. \\ \left. \left. (\phi(-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) \phi) \right\} \cdot e^{-\gamma_5 \phi(x)} \cdot e^{\gamma_5 \phi(y)} \right) \quad (4.112)$$

$$\left(Z = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x (\phi(-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) \phi)(x) \right\} \right)$$

Para o cálculo da integração funcional acima, é conveniente re-escreve-la na forma

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2\omega (\phi(-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) \phi)(\omega) \right\} \\ \cdot \exp \left(\int d^2\omega \gamma_5 (\delta^{(2)}(\omega-y) - \delta^{(2)}(\omega-x)) \phi(\omega) \right) \quad (4.113)$$

A integral funcional (4.113) sendo do tipo Gaussiano, produz o resultado: (veja o § 1.4, eq. (1.37))

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{2} \int d^2\omega d^2\omega' (\gamma_5 (\delta^{(2)}(\omega-y) - \delta^{(2)}(\omega-x)) \cdot (-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2)^{-1}(\omega, \omega') \right. \\ \left. \cdot (\gamma_5 (\delta^{(2)}(\omega'-y) - \delta^{(2)}(\omega'-x))) \right\} \quad (4.114)$$

A função de Green para o operador diferencial $(-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) = \partial^2 (-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi})$ é facilmente determinada. Para isto, considere

mos a função

$$G(x, y) = \frac{\pi}{g^2} \left((-\partial^2)^{-1}(x, y) - (-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi})^{-1}(x, y) \right) \quad (4.115)$$

onde

$$(-\partial^2)^{-1}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + C \quad (4.116)$$

e

$$(-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi})^{-1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}} |x-y| \right) \quad (4.117)$$

Devido a validade da relação:

$$\begin{aligned} \partial^2 \left(-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi} \right) (x) \cdot \left(\frac{\tilde{\Pi}}{g^2} \left((-\partial^2)^{-1} - \left(-\partial^2 + \frac{g^2}{\pi} \right)^{-1} \right) \right) (x, y) \\ = \partial_x^2 \left(\frac{\tilde{\Pi}}{g^2} \mathbb{1}_{x=y} + (-\partial^2)^{-1} (x, y) - \frac{\tilde{\Pi}}{g^2} \mathbb{1}_{x=y} \right) = -\delta^{(2)}(x-y) \end{aligned} \quad (4.118)$$

($\mathbb{1}_{(x,y)} = \delta^2(x-y)$)

verificamos que (4.115) é realmente a função de Green do operador $(-\partial_x^2 + \frac{g^2}{\pi} \partial_x^2)$

Esta função de Green é livre de divergências do infravermelho devido a não-existência de singularidade no limite a distancias pequenas:

$$\begin{aligned} \lim_{|x-y| \rightarrow 0} G(x, y) &= \lim_{|x-y| \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Pi}}{g^2} \left(-\frac{1}{2\pi} \log |x-y| + C + |y| \frac{g}{\sqrt{\pi}} |x-y| \right) \\ &= \frac{\tilde{\Pi}}{g^2} \left(C + \log \frac{2\pi g}{\sqrt{\pi}} \right) < \infty \end{aligned} \quad (4.119)$$

A integral funcional (4.114) sendo do tipo gaussiano, produz o resultado

$$e^{-g^2 G(x, y)} = e^{g^2 (G(x, x) + G(y, y))} \quad (4.120)$$

Ajustando os termos de "Auto-Interação" $e^{g^2 (G(x, x) + G(y, y))}$

a unidade, usando por exemplo, o processo de regularização dimensional ou equivalentemente fazendo a ordenação normal da função de 2-pontos $\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle$, obtemos o análogo euclidiano para o resultado bem conhecido para o propagador fermiônico do modelo de Schwinger ([10]) ([11])

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{2\pi} \gamma_\mu \frac{(x_\mu - y_\mu)}{|x-y|^2} e^{\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}} |x-y| \right) + \frac{1}{2\pi} |g| |x-y| - C \right\}} \quad (4.121)$$

Analisando o comportamento da expressão (4.121) no limite $|x-y| \rightarrow 0$, obtemos que

$$\lim_{|x-y|} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \lim_{|x-y| \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \delta_{\mu} \frac{(x_{\mu} - y_{\mu})}{|x-y|^2} e^{\frac{i\pi}{g^2} (c + l_y \frac{2\pi g}{\sqrt{\pi}})} \quad (4.122)$$

e, portanto, indicando-nos que os f̄ermions do modelo comportam-se como f̄ermions livres nesta regīo. Este ̄e o fen̄omeno da liberdade assint̄otica do modelo ([10]).

Analisemos agora, a fun̄cao de 2-pontos dos campos de calibre (veja (4.108))

$$\langle G_{\mu}(x) G_{\nu}(y) \rangle = \frac{1}{Z} \left\{ \int \mathcal{D}[\phi] \text{DET}_F(-\partial^2) \exp \left\{ -\frac{1}{2g^2} \int d^2x \left(\phi (-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2) \phi \right) (x) \right\} \cdot (\epsilon_{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi)(x) (\epsilon_{\nu\beta} \partial_{\beta} \phi)(x) \right\} \quad (4.123)$$

cujo resultado:

$$\langle G_{\mu}(x) G_{\nu}(y) \rangle = \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} (\partial_{\alpha})_x (\partial_{\beta})_y \left((-\partial^4 + \frac{g^2}{\pi} \partial^2)^{-1} (x,y) \right) \quad (4.124)$$

que no espāco dos momentos re-escreve-se como:

$$\langle G_{\mu}(x) G_{\nu}(y) \rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} k_{\alpha} k_{\beta} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 (k^2 + \frac{g^2}{\pi})} \quad (4.125)$$

A an̄alise da excitāo massiva correspondente ao propagador dos campos de calibre torna-se agora amb̄igua; (compare com a mesma an̄alise implementada com o funcional gerador do modelo parametrizado diretamente pelos campos de calibre eq. (4.108)

e eq. (4.98)) desde que a an̄alise dos p̄olos simples em (4.125) ̄e obscurecida pela presen̄a do termo $k_{\alpha} k_{\beta}$

Temos, ent̄o, apresentado duas parametrizāes do fun

cional gerador do modelo de Schwinger (veja eq. (4.98) e eq. (4.111)). Aquela dada pela equação (4.98) parece ser a natural quando estudamos o setor dos observáveis associados ao campo de calibre do modelo. Já a outra dada por eq. (4.111) parece ser bem adaptada a análise do setor dos observáveis associados aos campos fermiônicos

Finalmente observamos que estes funcionais efetivos foram todos deduzidos no calibre de Lorentz $(\partial_\mu G_\mu)(x) \equiv 0$ (veja a ref. [10] para um tratamento do modelo de Schwinger no Gauge axial).

4.5 - O MODELO DE ROTHE - STAMATESCU

Neste parágrafo, aplicaremos a técnica de mudança de variáveis do § 4.2 para estudar um modelo bidimensional não-confinante, o chamado modelo de Rothe - Stamatescu, descrevendo uma interação entre um campo massivo neutro $\phi(x)$ e um campo fermiônico não massivo $\psi(x)$ ([19], [20])

A Lagrangeana euclideana do modelo é dada pela expressão

$$\mathcal{L}_1(\psi, \bar{\psi}, \phi) = \left(-i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + g \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_\mu \psi \partial_\mu \phi \right) \quad (4.125)$$

A Lagrangeana (4.125) é invariante frente a ação do grupo abeliano $U(1)$ e do grupo chiral abeliano $U(1)$:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad ; \quad \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \beta} \psi \quad (4.126)$$

onde α e β denotam parâmetros reais.

Associados as simetrias (4.126), temos as correntes ve toriais e axial conservadas respectivamente :

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) = 0 \quad ; \quad \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi) = 0 \quad (4.127)$$

Procedendo como nos parágrafos anteriores, considere-mos o funcional gerador associado ao modelo (4.125)

$$Z[\eta, \bar{\eta}, \bar{\eta}_2] = \int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left\{ - \int d^3x (\mathcal{L}_1(\psi, \bar{\psi}, \phi) + \phi \eta + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta_2) \right\} \quad (4.128)$$

Para implementarmos a transformação de variáveis desacoplante no setor fermiônico do modelo, torna-se conveniente escrever o termo de interação em (4.128) de um modo análogo ao acoplamento usual de campos de calibre com fermions como nos modelos bidimensionais do §4.2 e § 4.3.

Para isto, faremos uso da seguinte identidade:

$$\exp \left\{ -g \int d^3x (\bar{\psi} \gamma^5 \gamma_\mu \psi) \partial_\mu \phi(x) \right\} = \int \mathcal{D}[G_\mu] \delta_F(G_\mu + i\epsilon_{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi) \exp \left\{ \int d^3x g (\bar{\psi} \gamma_\mu G_\mu \psi)(x) \right\} \quad (4.129)$$

com $G_\mu(x)$ denotando um campo vetorial abeliano auxiliar.

Fazendo uso da relação (4.129), podemos re-escrever o funcional gerador (4.128) da seguinte forma:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}[\Phi] \mathcal{D}[\Psi] \mathcal{D}[\bar{\Psi}] \mathcal{D}[G_\mu] \delta_F(G_\mu + i\epsilon_{\mu\alpha} \partial_\alpha \Phi) \cdot \exp \left\{ - \int d^4x \left(\mathcal{L}_2(\psi, \bar{\psi}, \phi, A_\mu) + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) \right\} \quad (4.130)$$

onde a densidade lagrangeana em (4.130) possui a seguinte forma

$$\mathcal{L}_2(\psi, \bar{\psi}, \phi, G_\mu) = -i\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - ig G_\mu) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.131)$$

Procederemos, agora, como nas Teorias de Fermions interagindo com campos de calibre, performando a transformação de variáveis:

$$\psi(x) = e^{ig \gamma_5 \phi(x)} \chi(x) \quad (4.132)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\chi}(x) e^{ig \gamma_5 \phi(x)} \quad (4.133)$$

$$G_\mu(x) = (-i \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi)(x) \quad (4.134)$$

A densidade lagrangeana (4.131) expressa em termos dos novos campos $\chi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ possui a seguinte forma

$$\mathcal{L}_3(\chi, \bar{\chi}, \phi) = -i\bar{\chi} \gamma_\mu \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.135)$$

onde observamos que nos fermions estão desacoplados do campo vetorial auxiliar $G_\mu(x)$.

A medida funcional fermiônica $\mathcal{D}[\Psi] \mathcal{D}[\bar{\Psi}]$ em (4.130) não é invariante frente as transformações (4.132); (4.133), devido ao fato de ela estar definida em termos dos auto-vetores do operador de Dirac $\mathbb{D}[G_\mu] = -i\gamma_\mu (\partial_\mu - ig G_\mu)$ e levando-nos a um jacobiano da forma (veja a eq. (4.88))

Deste modo, obtemos a seguinte expressão efetiva para o funcional gerador do modelo

$$\begin{aligned}
 Z[J, \eta, \bar{\eta}] = & \int \mathcal{D}[\Phi] \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[\bar{X}] \cdot \exp \left\{ - \int d^2x \left[\right. \right. \\
 & \left. \left. (-i\bar{X} \gamma_\mu \partial_\mu X + \frac{1}{2} (1 - \frac{g^2}{\pi}) (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + J\phi + \bar{\eta} e^{i\gamma_5 \phi} X + \bar{X} e^{i\gamma_5 \phi} \eta \right] (x) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.136}$$

Iremos, agora, usar o funcional para o cálculo exato das funções de Green não-renormalizadas do modelo

A função de correlação de 2-pontos do campo massivo neutro $\phi(x)$ é dada pela função de Green do operador diferencial $\left((1 - \frac{g^2}{\pi}) \partial_\mu \partial_\mu + m^2 \right)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(x, y) &= \frac{\delta^2 Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Bigg|_{\substack{J(x)=0 \\ \eta(x) = \bar{\eta}(x) = 0}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{g^2}{\pi}} \left(\partial_\mu \partial_\mu + \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \right)^2 \right)^{-1} (x, y) \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{g^2}{\pi}} K_0 \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} |x - y| \right)
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

A função de correlação de 2 pontos do campo fermiônico é computada de um modo análogo ao cálculo das funções de correlação do modelo de Schwinger na parametrização escalar (4.111) do funcional gerador associado e produzindo o resultado (veja as eq. (4.112) - eq. (4.114)):

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \gamma_{\mu} \frac{(x_{\mu} - y_{\mu})}{|x - y|^2} \left\{ \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\left\{ \int d^2\omega \left(\frac{1}{2} (1 - \frac{g^2}{\pi}) (\partial_{\mu}\phi)^2 \right. \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}} e^{ig \int d^2\omega \left\{ \gamma_5 (\delta^{(2)}(\omega - y) - \delta^{(2)}(\omega - x)) \right\}} \right. \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_{\mu} \frac{(x_{\mu} - y_{\mu})}{|x - y|^2} e^{+g^2 \hat{G}(x, y)} e^{-g^2 (\hat{G}(x, x) + \hat{G}(y, y))} \end{aligned} \quad (4.138)$$

A contribuição de auto-interação em (4.138) : $e^{-2g^2 \hat{G}(0,0)}$ pode ser ajustada a unidade como na discussão feita acima da eq. (4.120) no modelo de Schwinger.

Usando o comportamento assintótico da função de Green $\hat{G}(x, y)$ (veja as eq. (4.101) - eq. 4.102), obtemos os seguintes comportamentos da função de correlação de 2-pontos fermiônica do modelo na região do ultra-violeta e do infravermelho respectivamente:

$$\lim_{|x-y| \rightarrow +\infty} \langle \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \rangle \approx \frac{1}{2\pi} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \frac{(x_{\mu} - y_{\mu})}{|x - y|^2} \quad (4.139)$$

$$\lim_{|x-y| \rightarrow 0} \langle \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \rangle \approx (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} |x - y|^{-\left(1 - \frac{g^2}{2\pi(1 - \frac{g^2}{\pi})}\right)} \quad (4.140)$$

Podemos concluir, então, que a partir do comportamento na região do infravermelho (4.139) que o campo fermiônico com-

porta-se como um campo livre e, assim, suas excitações, são observadas nos estados assintóticos do modelo. Isto é: os fermions não estão confinados como no modelo Schwinger.

Pode-se, também, calcular as funções de correlação envolvendo os campos fermiônicos $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ e o campo $\phi(x)$. Por exemplo, a função de correlação de 3-pontos $\Gamma_{\alpha\beta}^{\Gamma}(x, y, z) = \langle \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \phi(z) \rangle$ é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\Gamma}(x, y, z) &= \frac{\delta^{(3)} Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J(z) \delta \eta_{\alpha}(x) \delta \bar{\eta}_{\beta}(y)} \Bigg|_{\substack{J=0 \\ \eta=\bar{\eta}=0}} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\gamma_{\mu} \gamma_5)_{\alpha\beta} \frac{(x_{\mu} - y_{\mu})}{|x - y|^2} \frac{ig}{2\pi \sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \\ &\quad \left(K_0 \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} |x - z| \right) - K_0 \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} |y - z| \right) \right) \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{g^2}{2\pi(1 - \frac{g^2}{\pi})} K_0 \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} |x - y| \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.141)$$

Estudemos o aparecimento da anomalia axial do modelo. Usando o critério (4.26) do §4.2, para o estudo da quebra de simetria Chiral (4.126), vemos que: (veja a eq. (4.126))

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi) &= i \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\delta}{\delta G_{\nu}(x)} \int g J[G_{\mu}] \right) \\ &= \frac{-ig^2}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \left(\partial_{\mu} (-i \epsilon_{\nu\beta} \partial_{\beta} \phi) - \partial_{\nu} (-i \epsilon_{\mu\beta} \partial_{\beta} \phi) \right) (x) \\ &= \left(-\frac{g^2}{2\pi} \square \phi \right) (x) = -\frac{g^2}{2\pi} \frac{m^2}{1 - \frac{g^2}{\pi}} \phi(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.142)$$

Analisando a eq. (4.142) vemos que a Simetria Chiral do modelo é dinamicamente quebrada devido ao fato de o campo $\phi(x)$ ser massivo.

A renormalização perturbativa do modelo pode ser implementada como nas ref. ([19]) e [20] levando-nos ao resultado de que o campo escalar $\phi(x)$ ganha uma renormalização finita de massa e da função de onda

$$\phi^{(R)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \phi \quad (4.143)$$

$$m_{(R)}^2 = m^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{g^2}{\pi}} \quad (4.144)$$

e a constante de acoplamento g uma renormalização multiplicativa

$$g_{(R)} = g \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \quad (4.145)$$

onde o índice (R) indica a grandeza associada renormalizada.

COMENTÁRIOS

A obtenção de expressões explícitas para as funções de correlação da Cromodinâmica Bidimensional $SU(N)$ não-massiva a partir do funcional gerador efetivo (4.46) é um problema não solucionado na presente tese. Para ganharmos alguma experiência para tratarmos, este difícil problema estudamos no parágrafo 4 o modelo abeliano e re-obtemos os resultados usuais. Como consequência, são sugestionadas 2 linhas de estudo a serem prosseguidas. A primeira linha consiste em re-expressar as funções $\phi_a(x)\lambda^a$ em termos do campo de calibre $SU(N)$ e tentar realizar explicitamente a integração em relação ao parâmetro σ em (4.44). Baseado no modelo de Schwinger, o problema desta inversão deverá levar a funcionais não locais (veja a eq. (4.52))

A segunda linha de estudo, também sugestionada pela análise do modelo abeliano, consistirá na reparametrização do funcional gerador efetivo (4.45) em termos das variáveis $\{\phi_a(x)\lambda^a\}$ no Gauge de Rosenbluth (veja a eq. (4.55))

Novamente devemos nos encontrar com o problema da não-localidade do jacobiano $(G_0, G_1) \rightarrow (\phi_a(x), \omega_a(x))$ no caso não-abeliano e mesmo que esta possibilidade não se verifique, a ação gluônica efetiva deverá ser provavelmente uma ação fortemente não-polinomial e provavelmente tornará impraticável uma análise perturbativa. É provável que a implementação de análises não-perturbativas da ação gluônica efetiva seja possível, como nos moldes da ref. ([13]).

E como conclusão deste capítulo, vemos naturalmente o surgimento da necessidade de reformularmos as Teorias de Calibre Bidimensionais diretamente em termos de variáveis Dinâmicas não-locais; como por exemplo na ref. ([14]).

Finalmente, observamos que é possível tratar os modelos de Thirring Massivo ([21]), Gross-Neveu - Chiral ([1]) e de Rothe - Stamatescu ([19]) no esquema apresentado neste capítulo via a introdução de campos de calibre auxiliares. Neste último modelo é possível obter de um modo simples sua completa solução, como foi visto no parágrafo §4.5.

REFERÊNCIAS PARA O CAPÍTULO 4

- [1] N. Furuya At A1 - "Path - Integral Formulation of Chiral Invariant Fermion Models in Two Dimensions"; Nucl Phys B 201 (1982) 159-181
- [2] R. Roskies; "The Fermion Determinant in Massless Two - Dimensional Q.C.D." Festschrift for Feza Gursey's 60th Birthday (1982)
- [3] K. Johnson - " γ_5 invariance"; Phys.Lett - vol.5, nº 4 (1963), 253 - 254
- [4] Luiz C.L. Botelho, M.A. Rego Monteiro - "Fermion Determinant for Massless Two - Dimensional Q.C.D."; Phys Rev. D - vol. 30, nº 10; 2232 (1984).
- [5] C.G. Callan, Jr., S. Coleman, J. Wess and B. Zumino - "Structure of Phenomenological Lagrangians - II", Phys. Rev., 177, 2247 (1969)
- [6] A.M. Polynov and P.B. Wiegman - "Theory of Non - Abelian Goldstone Bosons in two Dimensions" - Phys - Lett - 131B, 121 (1983)
- [7] A.M. Polyanov and P.B. Wiegmann "Goldstone Fields in Two Dimensions with Multivalued Actions", Phys Lett 141B, nº 3,4, 223 (1984).

- [8] E. Witten - "Non - Abelian Bosonization in Two Dimensions"
- Comm. Math. Phys 92 455-472 (1984)
- [9] J. Wess and B. Zumino - "Consequence of Anomalous Ward
Identities" Phys Lett 37B, 99 (1971)
- [10] A. Casher, J. Kogut and Leonard Susskind "Vacuum
Polarization and the Absence of free Quarks"
Phys. Rev. D. vol. 10 nº 2 - 732-745, (1974)
- [11] J. Lowenstein and J. Swieca, Ann. Phys (N.Y) 68, 172
(1971)
- [12] V.N. Popov - "Functional Integrals in Quantum Field
Theory" - C.E.R.N report ref. T.H. 2424 -
C.E.R.N.
- [13] Robert J. Kares and Myron Bander - "Vortices in Two -
Dimensional Chiral Spin Systems" - Phys. Lett
96B, nº 3,4 (1980), 320
- [14] Eduardo Cantera Marino - "Formulação Integral Funcional
Para Teorias de Campo com Estatística Não -
Convencional" - Tese de Doutorado Deptº
de Física PUC-RJ (agosto de 1984)
- [15] Orlando Alvarez - "Fermion Determinants, Chiral Symmetry

and the Wess - Zumino Anomaly" - Nucl Phys.
B238, 61 (1984)

[16] P.B. Gilkey, Proc. of Symp. Pure. Math. Amer. Math. Soc.,
27 (265) (1975)

[17] K.D. Rothe and B. Schroer, in Nato Advanced Study
 Institutes Series vol. B55, P.G. 249, Edited
 by Werner Rühl

[18] V.N. Romanov and A.S. Schwartz, "Anomalies and Elliptic
 Operators" - Teor. Mat. Fiz. 41 (1979) 190

[19] Luiz C.L. Botelho - "Path Integral Solution for a
 Bidimensional Model with Axial-Current -
 Pseudoscalar Derivative Interaction" (a ser
 publicado no Phys. Rev.)

[20] N.D. Rothe and I.O. Stamatescu, "Study of a Two-Dimensional
 Model with Axial - Current - Pseudoscalar
 Derivative Interaction", Annals of Physics
 95, (1975), 202

[21] Luiz C.L. Botelho, "Some Comments on two-Dimensional
 Massless Quantum Chromodynamics", Notas de
 Física, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
 Repor Nº CBPF - ISSN 0029-3865.

APÊNDICE - 1

Lema. Sejam $f(x)$ e $h(x)$, funções no espaço $S(\mathbb{R})(\mathbb{C})$, com $f(x)$ tendo um número finito de zeros simples $f(x_0)=0$ e $f'(x_0) \neq 0$ em qualquer intervalo finito $[-\Lambda, \Lambda]$. Suponhamos que $\sum_{\{x_0\}} \frac{h'(x_0)}{f'(x_0)}$ convirga quando $\Lambda \rightarrow +\infty$ (aqui $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$)

Temos, então, a validade da relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \delta'(f(x)) dx = - \sum_{\{x_0\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h'(x)}{f'(x)} \delta(x-x_0) dx \right) = - \sum_{\{x_0\}} \frac{h'(x_0)}{f'(x_0)} \quad (1)$$

A demonstração da relação (1) será feita, fixando um intervalo $[-\Lambda, \Lambda]$ com Λ finito, mas arbitrário. Usando a relação $\delta(f(x)) = \sum_{\{x_0\}} \frac{1}{f'(x)} \delta(x-x_0)$, onde a soma dos zeros

de $f(x)$ é tomada no intervalo $[-\Lambda, \Lambda]$; obtemos

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} h(x) \delta'(f(x)) dx = \sum_{\{x_0\}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} h(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \delta(x-x_0) \right) dx \quad (2)$$

, a qual re-escreve-se:

$$\sum_{\{x_0\}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} h(x) \left(- \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \delta(x-x_0) + \frac{1}{f'(x)} \delta'(x-x_0) \right) dx = \sum_{\{x_0\}} \left\{ \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} h(x) \left(- \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \delta(x-x_0) \right) \right) + \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} - \left(\frac{h(x)}{f'(x)} \right)' \delta(x-x_0) dx \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\{x_0\}} \left\{ \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left[\left(-\frac{hf''}{f'^2} \right)(x) - \left(\frac{h'f' - f''h}{(f')^2} \right) \right] \delta(x-x_0) dx \right\} \\
&= - \sum_{\{x_0\}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{(h'f')}{f'^2}(x) \delta(x-x_0) dx \\
&= - \sum_{\{x_0\}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left(\frac{h'}{f'} \right)(x) \delta(x-x_0) dx \\
&= - \sum_{\{x_0\}} \frac{h'(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}$$

Tomando o limite $\Lambda \rightarrow +\infty$, obtemos a relação (1)

REFERÊNCIAS:

- [1] I.M. Guelfan, G.E. Chilov, Les Distributions (Dunod-Paris)
(1962) (vol-1)

APÊNDICE - 2

Consideremos os coeficientes da Métrica Funcional (3.23) do §3.3 do capítulo 3

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int_D d^2 \xi (\delta g_{ab}(\xi)) \chi^{(ab, a'b')} [g_{cd}(\xi)] (\delta g_{a'b'}(\xi)) \quad (1)$$

com

$$\chi^{(ab, a'b')} [g_{cd}(\xi)] = \sqrt{g(\xi)} (g^{aa'}(\xi) g^{bb'}(\xi) + c g^{ab}(\xi) g^{a'b'}(\xi)) \quad (2)$$

Devido ao fato de que s̄o existem 3 componentes independentes da métrica $g_{ab}(\xi)$ em 2 dimensões ($g_{12} = g_{21}$), os coeficientes $\chi^{(ab, a'b')} [g_{cd}(\xi)]$ formam os elementos de uma matriz simétrica 3x3 $\{\bar{\chi}_{i\bar{j}}\}$ ($1 \leq i, \bar{j} \leq 3$) no espaço funcional dos $\{g_{ab}(\xi)\}$. Isto é:

$$\begin{aligned} \|\delta g_{ab}\|^2 &= \int_D d^2 \xi \left\{ (\delta g_{11}, \delta g_{12}, \delta g_{22}) [\bar{\chi}]_{i\bar{j}} \begin{pmatrix} \delta g_{11} \\ \delta g_{12} \\ \delta g_{22} \end{pmatrix} \right\} (\xi) \\ &= \int d^2 \xi \left\{ (\delta g_{11}) (\bar{\chi}_{11}) (\delta g_{11}) + (\delta g_{12}) (\bar{\chi}_{22}) (\delta g_{22}) + (\delta g_{22}) (\bar{\chi}_{33}) (\delta g_{22}) \right. \\ &\quad \left. + (\delta g_{11}) (\bar{\chi}_{12} + \bar{\chi}_{21}) (\delta g_{12}) + (\delta g_{11}) (\bar{\chi}_{13} + \bar{\chi}_{31}) (\delta g_{22}) + (\delta g_{12}) (\bar{\chi}_{23} + \bar{\chi}_{32}) (\delta g_{22}) \right\} (\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

Deste modo, a expressão funcional explícita dos elementos $\bar{\chi}_{i\bar{j}}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{11} &= \chi^{(11,11)} ; \bar{\chi}_{22} = \chi^{(12,12)} ; \bar{\chi}_{33} = \chi^{(22,22)} ; \bar{\chi}_{12} = \chi^{(11,12)} \\ \bar{\chi}_{21} &= \chi^{(12,11)} ; \bar{\chi}_{13} = \chi^{(11,22)} ; \bar{\chi}_{31} = \chi^{(22,11)} ; \bar{\chi}_{23} = \chi^{(12,22)} \\ \bar{\chi}_{32} &= \chi^{(22,12)} \end{aligned} \quad (4)$$

No espaço de órbitas $\int_{\mathcal{M}/\mathcal{F}}$ (o espaço das métricas conformes (veja a eq. (3.5) do §3.2 do capítulo 3)), o determinante da matriz das métricas e , então, dado por:

$$\begin{aligned} \text{DET}(\bar{\gamma}_{ij}) &= \text{DET} \begin{bmatrix} \frac{1+c}{e^{\varphi(\xi)}} & 0 & \frac{c}{e^{\varphi(\xi)}} \\ 0 & \frac{1}{e^{\varphi(\xi)}} & 0 \\ \frac{c}{e^{\varphi(\xi)}} & 0 & \frac{1+c}{e^{\varphi(\xi)}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1+2c}{e^{3\varphi(\xi)}} \end{aligned} \quad (5)$$

E, assim, vemos que (1) define uma métrica Riemmaniana ($\text{DET}(\bar{\gamma}_{ij}) \neq 0$) se $c \neq -\frac{1}{2}$

Calculemos a métrica $\|\delta g_{ab}\|^2$ (veja a eq. (2) deste apêndice), onde o vetor deslocamento funcional δg_{ab} é dado explicitamente por (veja a eq. (3.27) do §3.3, cap. 3):

$$(\delta g_{ab})(\xi) = \delta\varphi(\xi) g_{ab}(\xi) + (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)(\xi) \quad (6)$$

Substituindo (6) em (1), obtemos:

$$\int_D d^2\xi e^{\varphi(\xi)} \left\{ (\delta\varphi g_b^a + \nabla^a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon^a) \cdot (\delta\varphi g_a^b + \nabla^b \epsilon_a + \nabla_a \epsilon^b) + 4c (\nabla_c \epsilon^c + \delta\varphi)^2 \right\}(\xi) \quad (7)$$

onde os índices (a,b) são abaixados e levantados pelo uso do tensor métrico $\{g_{ab}(\xi)\}$ ($g_{ab} g^{ac} = \delta_b^c$)

E, assim:

$$\begin{aligned}
 \|\delta g_{ab}\|^2 &= \int_D d^2\xi e^{\omega(\xi)} \left\{ (\nabla^a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon^a) \cdot (\nabla_b \epsilon^a + \nabla_a \epsilon^b) \right. \\
 &\quad \left. - 2(\nabla_c \epsilon^c)^2 + 2(1+2c)(\nabla_c \epsilon^c + \delta\omega)^2 \right\}(\xi) \\
 &= \int_D d^2\xi e^{\omega(\xi)} \left\{ (\nabla^a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon^a - (\nabla_c \epsilon^c) g_b^a) \cdot (\nabla^b \epsilon_a + \nabla_a \epsilon^b - (\nabla_c \epsilon^c) g_a^b) \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+2c)(\nabla_c \epsilon^c + \delta\omega)^2 \right\}(\xi) \\
 &= 2(1+2c) \int_D d^2\xi e^{\omega(\xi)} (\nabla_c \epsilon^c + \delta\omega)^2(\xi) - 2 \int_D d^2\xi e^{\omega(\xi)} \left\{ \epsilon^a (\nabla_c \nabla^c \epsilon_b \right. \\
 &\quad \left. + [\nabla^b, \nabla_a] \epsilon_b \right\}(\xi) \tag{8}
 \end{aligned}$$

onde na última linha de (8) usamos a relação para derivadas covariantes

$$\int_D d^2\xi \sqrt{g} S(\nabla_a T) = - \int_D d^2\xi \sqrt{g} (\nabla_a S) \cdot T \tag{9}$$

A partir da relação (8), obtemos o resultados (3.28) do §3.3, cap.3.

APÊNDICE - 3

CÁLCULO DE DETERMINANTES FUNCIONAIS

Consideremos o operador diferencial elíptico de 2ª ordem definido em um espaço-tempo euclidiano Riemanniano Bidimensional, com métrica $\{g_{\mu\nu}(\xi)\}$ e atuando em um conveniente espaço de funções (por exemplo o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $C^\infty(\mathbb{R}^2)$)

$$A = - \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\mu \uparrow_{2 \times 2} + B_\mu) \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \uparrow_{2 \times 2} + B_\nu) - B_0$$

(1)

$((\mu, \nu) = 1, 2)$
com $B_\mu(\xi)$ denotando matrizes (de funções infinitamente diferenciáveis) 2×2

Quando A for um operador positivo e auto-adjunto em relação ao produto escalar em $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_D d\xi^2 \sqrt{g(\xi)} f(\xi) g(\xi)$$

(2)

definiremos seu determinante funcional pela seguinte relação abstraída do caso de A ser um operador de dimensão finita:

$$\log \text{DET}_F A = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dJ}{J} \text{Tr}_F (e^{-JA} - \Pi_{\text{KER}}(A))$$

(3)

onde $\Pi_{\text{KER}}(A)$ denota o projetor no sub-espaço dos auto-vetores correspondentes aos auto-valores nulos de A (os chamados modos-zeros de A).

Em geral, a relação (3) irá possuir termos divergentes no limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, os quais serão usualmente tratados pela in-

trodução de contra-termos ao operador A . O parâmetro ϵ , então, atua como um "cut-off" ou parâmetro regularizador e é conhecido por tempo-próprio.

Para a classe dos operadores da forma (1), expressões assintóticas para o traço funcional de $e^{-\mathcal{J}A}$ no limite $\mathcal{J} \rightarrow 0^+$ foram tabeladas ([1])

$$\lim_{\mathcal{J} \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F(e^{-\mathcal{J}A}) = \lim_{\mathcal{J} \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sqrt{g}}{4\pi} \mathbb{1}_{2 \times 2} \right) \left(\frac{1}{\mathcal{J}} \right) - \left(\frac{1}{24\pi} \sqrt{g} R \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} B_0 \right\} \quad (4)$$

onde R é a curvatura escalar associada a métrica $\{g_{\mu\nu}(\xi)\}$.

Tendo feito estas considerações matemáticas, passaremos ao cálculo dos determinantes funcionais dos operadores elípticos positivos auto-adjuntos da forma (veja as relações (3.32)-(3.33))

$$L_j = - e^{-(j+1)\varphi(\xi)} \partial_{\bar{z}} e^{j\varphi(\xi)} \partial_z \quad (5)$$

onde j é um número inteiro positivo e $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial}{\partial \xi_2}$;
 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial}{\partial \xi_2}$

Para isto, introduziremos os seguintes operadores:

$$L_j = \rho^j \partial_{\bar{z}} \quad (6)$$

$$\bar{L}_j = \rho^j \partial_z \quad (7)$$

Prova-se ([1]), que em um conveniente domínio para L_j e \bar{L}_j , os operadores adjuntos dos operadores (6) e (7) são da

dos respectivamente por

$$L_j^* = -\bar{L}_{-(j+1)} \quad (8)$$

$$\bar{L}_j^* = -L_{-(j+1)} \quad (9)$$

Consideremos, agora, os operadores :

$$\mathcal{L}_j = L_j^* \cdot L_j = -\bar{L}_{-(j+1)} \cdot L_j \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_j &= \bar{L}_j^* \bar{L}_j = -L_{-(j+1)} \cdot \bar{L}_j \\ &= -e^{-(j+1)\mathcal{Q}(\xi)} \partial_{\bar{z}} e^{j\mathcal{Q}(\xi)} \partial_z \end{aligned} \quad (11)$$

Notemos que os operadores (10) e (11) são positivos e auto-adjuntos.

Devemos, então, calcular (veja a eq. (3))

$$\log \text{DET}_F \mathcal{L}_j = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dJ}{J} \text{Tr}_F (e^{-J \mathcal{L}_j}) \quad (12)$$

onde não levamos em consideração os modos zeros de \mathcal{L}_j , desde que na aplicação dos resultados estabelecidos neste apêndice à Teoria Quântica das Superfícies do cap. 3, estas superfícies tem, por hipótese topologia trivial, e assim, os operadores (3.32) e (3.33) do §3.3 não possuem modos zeros.

Submetendo a relação (12) à variação funcional em relação a $\mathcal{Q}(\xi)$

$$\delta \log \text{DET}_F \mathcal{L}_j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} dJ \text{Tr}_F (\delta \mathcal{L}_j \cdot \delta \mathcal{Q} \cdot e^{-J \mathcal{L}_j}) \quad (13)$$

Usando a eq. (10), obtemos

$$\delta \mathcal{L}_j = -(j+1) \delta \omega \mathcal{L}_j - j \bar{L}_{-(j+1)} \delta \omega \cdot L_j \quad (14)$$

e, portanto, a relação (13) toma a forma:

$$\delta \log \text{DET}_F \mathcal{L}_j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \text{Tr}_F \left(-(j+1) \delta \omega \mathcal{L}_j e^{-\mathcal{J} \mathcal{L}_j} \right) + \text{Tr}_F \left(-j \bar{L}_{-(j+1)} \delta \omega L_j e^{-\mathcal{J} \mathcal{L}_j} \right) \quad (15)$$

Devido a validade da relação (veja as eqs. (10) e (11))

$$\bar{\mathcal{L}}_{-(j+1)} = \left(\bar{L}_{-(j+1)} \right)^{-1} \mathcal{L}_j \cdot \bar{L}_{-(j+1)} \quad (16)$$

e, conseqüentemente :

$$e^{-\mathcal{J} \bar{\mathcal{L}}_{-(j+1)}} = \left(\bar{L}_{-(j+1)} \right)^{-1} e^{-\mathcal{J} \mathcal{L}_j} \cdot \bar{L}_{-(j+1)} \quad (17)$$

; podemos escrever o segundo termo à direita de (15) na forma

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_F \left(-j \bar{L}_{-(j+1)} \delta \omega L_j e^{-\mathcal{J} \mathcal{L}_j} \right) \\ &= \text{Tr}_F \left(-j \bar{L}_{-(j+1)} \cdot \left(\bar{L}_{-(j+1)} \right)^{-1} \cdot \delta \omega \cdot L_j \cdot \bar{L}_{-(j+1)} e^{-\mathcal{J} \bar{\mathcal{L}}_{-(j+1)}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$= j \text{Tr}_F \left(\delta \omega \bar{\mathcal{L}}_{-(j+1)} \cdot e^{-\mathcal{J} \bar{\mathcal{L}}_{-(j+1)}} \right) \quad (19)$$

onde fizemos uso da propriedade $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, e a relação (17) na eq. (18) e a definição (11) na eq. (19).

Substituindo a eq. (19) na eq. (15), obtemos

$$\begin{aligned} \delta \log \text{DET}_F \mathcal{L}_j &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau \text{Tr}_F \left(-(\delta+1) \delta\omega \mathcal{L}_j e^{-\tau \mathcal{L}_j} \right) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau \text{Tr}_F \left(\delta \delta\omega \bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)} e^{-\tau \bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Usando as relações

$$\int_{\epsilon}^{\infty} d\tau \text{Tr}_F \left((\delta+1) \delta\omega \frac{d}{d\tau} e^{-\tau \mathcal{L}_j} \right) = -(\delta+1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F (\delta\omega e^{-\epsilon \mathcal{L}_j}) \quad (21)$$

$$\int_{\epsilon}^{\infty} d\tau \text{Tr}_F \left(\delta \delta\omega \frac{d}{d\tau} e^{-\tau \bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)}} \right) = -\delta \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F (\delta\omega e^{-\epsilon \bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)}}) \quad (22)$$

reduzimos a relação (20) aos cálculos das assíntotas no limite $\tau \rightarrow 0^+$ dos operadores (10) e (11):

$$\begin{aligned} \delta \log \text{DET}_F \mathcal{L}_j &= -(\delta+1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F (\delta\omega e^{-\epsilon \mathcal{L}_j}) \\ &+ \delta \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F (\delta\omega e^{-\epsilon \bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)}}) \end{aligned} \quad (23)$$

Fazendo uso, agora, da relação geral (4) para o cálculo das assíntotas dos operadores \mathcal{L}_j e $\bar{\mathcal{L}}_{-(\delta+1)}$ ([1])

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F (\delta\omega e^{-\epsilon \mathcal{L}_j}) &= \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_D d^2 \xi \delta\omega(\xi) &\left\{ \frac{1}{2\pi\epsilon} e^{\omega(\xi)} - \frac{(1+3\delta)}{12\pi} \nabla^2 \omega(\xi) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F \left(\delta \omega e^{-\epsilon \bar{L}^{-(j+1)}} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_D d^2 \xi \delta \omega(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi\epsilon} e^{\omega(\xi)} + \frac{(2+3j)}{12\pi} \nabla^2 \omega(\xi) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo os resultados (24) e (25) em (23), obtemos

que

$$\begin{aligned} \delta \log \text{DET}_F \mathcal{L}_j &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2\pi\epsilon} \right) \int_D d^2 \xi \delta \omega(\xi) e^{\omega(\xi)} \\ &+ \frac{(1+6j(j+1))}{12\pi} \int_D d^2 \xi \delta \omega(\xi) \cdot \nabla^2 \omega(\xi) \end{aligned} \quad (26)$$

A solução da Equação Diferencial Funcional (26) será da
da, então, por ([1])

$$\log \text{DET}_F \mathcal{L}_j = \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2\pi\epsilon} \right) \int_D d^2 \xi e^{\omega(\xi)} - \frac{(1+6j(j+1))}{12\pi} \int_D \frac{1}{2} (\partial_a \omega)^2 d\xi \right) \quad (27)$$

desde que :

$$\delta \left(- \int_D d^2 \xi \frac{1}{2} (\partial_a \omega)^2 \right) = \int_D d^2 \xi \nabla^2 \omega(\xi) \delta \omega(\xi) \quad (28)$$

e, portanto, estabelecendo o resultado (3.36) do §3.3 do capítulo 3.

REFERENCIAS:

- [1] B. Durmou, P. Olesen and J.L. Petersen Polyanou's
Quantized String With Boundary Terms - Null.
Phys. B198 (1982), 157-188.

APÊNDICE - 4

Neste apêndice, faremos uma breve exposição da decomposição de Roskies dos campos de calibre $SU(N)$ ([1]).

Seja $G_\mu = (G_0, G_1)$ uma configuração de campo de calibre $SU(N)$ em \mathbb{R}^2 . Consideremos a equação diferencial

$$i \gamma_\mu G_\mu = \gamma_\mu (\partial_\mu U \cdot U^{-1})(x) = -\gamma_\mu (U \cdot \partial_\mu U^{-1})(x) \quad (1)$$

com $U(x)$ pertencendo ao grupo com a álgebra de Lie gerada por $\{\lambda_a, -\gamma_5 \lambda_a\}$ com $\{\lambda_a\}$ denotando os geradores hermitianos de $SU(N)$; isto é:

$$U(x) = e^{i\omega_a(x)\lambda_a} \cdot e^{-\gamma_5 \lambda_a \phi^a(x)} \quad (2)$$

Roskies demonstra que (1) sempre admite uma única solução $U(x)$ para uma dada configuração de campo $G_\mu(x)$ pela introdução de uma estrutura complexa no espaço-tempo euclideo usual \mathbb{R}^2 com unidade complexa $\gamma = -i\gamma_5$ ($\gamma^2 = 1$ e $x = (x_0, \gamma x_1)$ com $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$)

Tendo obtido a parametrização de Roskies, podemos agora caracterizar de um modo abstrato uma fixação de calibre associada a esta parametrização, o chamado calibre desacoplante de Roskies.

Para definirmos esta fixação de calibre, consideremos uma configuração de campo $(G_\mu^{\Omega})(x) = (\Omega \cdot G_\mu \cdot \Omega^{-1} - i \Omega \partial_\mu \Omega^{-1})(x)$, obtida a partir de uma dada configuração satisfazendo (1) por uma transformação de calibre $\Omega(x)$. Escolhendo

$\Omega(x) = e^{-i\omega_a(x)\lambda^a}$, vemos agora que $(G_\mu^\Omega)(x)$ satisfaz a relação:

$$\begin{aligned}
 (i\gamma_\mu G_\mu^\Omega)(x) &= \gamma_\mu \left\{ (\Omega \cdot \partial_\mu e^{i\omega_a(x)\lambda^a}) e^{-i\omega_a(x)\lambda^a} \cdot \Omega^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \Omega \cdot \partial_\mu \Omega^{-1} + i\gamma_\mu \Omega e^{i\omega_a(x)\lambda^a} \partial_\mu (e^{-\gamma_5 \phi_a \lambda^a}) \right. \\
 &\quad \left. \cdot e^{\gamma_5 \phi_a \lambda^a} \cdot e^{-i\omega_a(x)\lambda^a} \cdot \Omega^{-1} \right\} (x) \\
 &= (\gamma_\mu \partial_\mu (e^{+i\omega_a(x)\lambda^a} \cdot \Omega(x)) + \gamma_\mu (\partial_\mu (e^{-\gamma_5 \phi_a \lambda^a})) \cdot e^{\gamma_5 \phi_a \lambda^a}) (x) \\
 &= (\gamma_\mu \cdot (\partial_\mu e^{-\gamma_5 \phi_a \lambda^a}) \cdot e^{\gamma_5 \phi_a \lambda^a}) (x) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Temos, então, que (3) caracteriza de um modo abstrato o calibre desacoplante de Roskies.

REFERENCIAS:

- [1] R. Roskies; "The Fermion Determinant in Massless Two - Dimensional Q.C.D." Festchrift for Feza Gursey's 60TH Birthday (1982)

APÊNDICE - 5

Neste apêndice, apresentaremos o Teorema de Alvarez - Romanov - Schwarz ([1]) usado no cálculo do determinante funcional da família dos operadores de Dirac

Primeiro, definiremos o determinante funcional de um operador auto-adjunto A positivo pela relação: (veja o apêndice 3)

$$\log \text{DET}_F(A) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dJ}{J} \text{Tr}_F(e^{-JA}) \quad (1)$$

abstraida do caso de A ser um operador de dimensão finita.

Em geral, $\log \text{DET}_F(A)$ definido por (1) irá conter termos divergentes para $\epsilon \rightarrow 0^+$, os quais serão tratados pela renormalização do $\text{DET}_F(A)$. Deste modo, ϵ atua como um "cut-off", usualmente conhecido como tempo-próprio.

Para uma certa classe de operadores, expressões assintóticas para o $\text{Tr}_F(e^{-JA})$ no limite de $J \rightarrow 0^+$ são bem-conhecidas na literatura matemática ([2]) ([3]).

Mas aparentemente, esta informação não parece ser muito útil, desde que em (1) precisamos conhecer $\text{Tr}_F(e^{-JA})$ para todo J positivo.

Mostraremos agora que em alguns casos particulares para famílias de operadores $A^{(r)}$ dependendo de um parâmetro é possível construir uma equação diferencial para $\text{DET}_F(A^{(r)})$ que re-

duz a determinação de $\text{DET}_F(A^{(\sigma)})$ unicamente ao conhecimento de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr}_F(e^{-\epsilon A^{(\sigma)}})$, como no cálculo dos determinantes funcionais do apêndice 3.

.Teorema (Alvarez - Romanov - Schwarz) ([1])

.Consideremos uma família de operadores auto-adjuntos $A^{(\sigma)}$ definida em um conveniente espaço de funções em \mathbb{R}^D e satisfazendo a propriedade

$$\frac{d}{d\sigma} A^{(\sigma)} = f \cdot A^{(\sigma)} + A^{(\sigma)} f \quad (1)$$

com f sendo uma função independente do parâmetro σ . Seja

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr} \langle x | f e^{-\epsilon (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle \\ &= \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{D/2}} (a_0^{(\sigma)}(x) + \sigma a_1^{(\sigma)}(x) + \dots + \sigma^N a_N^{(\sigma)}(x) + \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

A expansão assintótica para o $\text{Tr}_F(e^{-\epsilon (A^{(\sigma)})^2})$ onde $\text{Tr}_F = \int d^D x \text{Tr} \langle x | \dots | x \rangle$ denota o traço funcional (incluindo Tr sobre os possíveis índices matriciais do operador).

Temos, então, que o determinante funcional (1) satisfaz a seguinte equação diferencial em relação ao parâmetro σ

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\sigma} (\log \text{DET}_F(A^{(\sigma)})^2) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 4 \int d^D x \text{Tr} (\langle x | f e^{-\epsilon (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle) \end{aligned} \quad (3)$$

Observamos que por uma integração em relação ao parâmetro σ , obtemos que:

$$\begin{aligned} & \log \left(\text{DET}_F (A^\sigma)^2 / \text{DET}_F ((A^{\sigma=0})^2) \right) \\ &= 2 \cdot \int_0^\sigma d\sigma \cdot \int d^D x \text{Tr} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(4\pi\epsilon)^{D/2}} \left(a_0^{(\sigma)}(x) + \dots \epsilon^{D/2} a_{D/2}^{(\sigma)}(x) \right) \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Note que a parte finita da razão (4) é simplesmente dada pelo termo

$$2 \cdot \int_0^\sigma d\sigma \left(\int d^D x \text{Tr} \frac{a_{D/2}^{(\sigma)}(x)}{(4\pi)^{D/2}} \right) \quad (5)$$

Demonstração:

Derivemos em relação ao parâmetro σ a relação (3) aplicada ao operador $(A^{(\sigma)})^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\text{Tr}_F \log (A^{(\sigma)})^2 \right) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{d\mathcal{J}}{\mathcal{J}} \text{Tr} \left(\int d^D x \right. \right. \\ & \left. \left. \langle x | -\mathcal{J} \left(\left(\frac{d}{d\sigma} A^{(\sigma)} \cdot A^{(\sigma)} + A^{(\sigma)} \cdot \frac{d}{d\sigma} A^{(\sigma)} \right) \right) e^{-\mathcal{J} (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle \right) \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_\epsilon^\infty d\mathcal{J} \text{Tr} \left(\int d^D x \langle x | \left((f A^{(\sigma)} + A^{(\sigma)} f) A^{(\sigma)} + A^{(\sigma)} (f A^{(\sigma)} + A^{(\sigma)} f) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot e^{-\mathcal{J} (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle \right) \right\} \\ &= 4 \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_\epsilon^\infty d\mathcal{J} \text{Tr} \left(\int d^D x \langle x | f \cdot (A^{(\sigma)})^2 \cdot e^{-\mathcal{J} (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle \right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade de cíclicidade do traço funcional para escrever a última linha em (6).

Notando, agora, que

$$\frac{d}{d\gamma} \left(e^{-\gamma (A^{(\sigma)})^2} \right) = - (A^{(\sigma)})^2 e^{-\gamma (A^{(\sigma)})^2} \quad (7)$$

podemos re-escrever (6) na forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\text{Tr}_F \log (A^{(\sigma)})^2 \right) &= -4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} d\gamma \text{Tr} \left(\int d^D x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \langle x | \frac{d}{d\gamma} \left(e^{-\gamma (A^{(\sigma)})^2} \right) | x \rangle \right) \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 4 \cdot \left\{ \int d^D x \text{Tr} \left(\langle x | e^{-\epsilon (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

desde que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \langle x | e^{-s (A^{(\sigma)})^2} | x \rangle = \langle x | e^{-s (A^{(\sigma)})^2} \mathbb{P}_{\text{KER}(A^{(\sigma)})^2} | x \rangle = 0 \quad (9)$$

onde $\mathbb{P}_{\text{KER}(A^{(\sigma)})^2}$ denota o projetor sobre o espaço dos modos zeros do operador $(A^{(\sigma)})^2$ que é suposto ser $\{0\}$.

Este teorema, essencialmente reduz o problema do cálculo do determinante funcional do operador $A^{(\sigma)}$ a determinação dos coeficientes $a_N^{(\sigma)}(x)$ da expansão assintótica (2).

Para o quadrado do operador de Dirac (Bidimensional) na presença de um campo de calibre externo (veja eq. (4.35))

$$(\mathbb{D}[G_\mu])^2 = -(\partial_\mu - iG_\mu)^2 - \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} (-iG_\mu) \quad (10)$$

estes coeficientes foram tabelados ([4]):

$$a_0 = 1 \quad (11)$$

$$a_1 = \frac{i \epsilon_{\mu\nu}}{2} \gamma_5 F_{\mu\nu} (-i G_\mu) \quad (12)$$

REFERÊNCIAS:

- [1] Orlando Alvarez - "Fermion Determinants, Chiral Symmetry and the Wess - Zumino Anomaly" - Nucl. Phys B238, 61 (1984)
- [2] P.B. Gilkey, Proc. of Symp. Pure Math; Amer. Math. Soc., 27 (265) (1975)
- [3] N.D. Rothe and B. Schroer, in Nato Advanced Study Institutes Series vol. B55, pag 249, Edited by Werner Rühl
- [4] U.N. Romanov and A.S. Schwartz, "Anomalies and Elliptic Operators" - Teor. Mat. Fiz. 41 (1979) 190.

AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O "LOOP DE WILSON" QUÂNTICO

Nos últimos anos, uma nova formulação ([1], [2], [3]) para as Teorias de Calibre Não-Abelianas tem sido proposta e é esperada ser a formulação natural para o tratamento de sua estrutura na região das baixas energias (região do infravermelho). Esta nova formulação faz uso do operador "Loop de Wilson" como objeto dinâmico relevante e a partir do qual a Álgebra dos observáveis Invariante de Gauge é gerada. Nesta formulação, não existe menção explícita de transformações de calibre, Espaço de Hilbert de estados, etc. Todos estes conceitos sendo problemáticos na formulação usual local (veja o cap. 2 e o cap. 4).

Neste apêndice, apresentaremos as equações quânticas de movimento associadas ao "Loop de Wilson" no formalismo das integrais de trajetórias de Feynman em uma Teoria de Calibre $SU(\infty)$ ([1]).

Conjectura-se ([1]) que o funcional de onda de um Méson no limite topológico de 't Hooft $\langle \Omega_{VAC}^{(\infty)} | (\psi \bar{\psi})(x) | \Omega_{VAC}^{(\infty)} \rangle$, onde $\Omega_{VAC}^{(\infty)}$ denota o vácuo quântico da Teoria de Calibre $SU(\infty)$ euclídeana e $(\psi \bar{\psi})(x)$, o operador criação de uma excitação mesônica singleto de cor, é dado pelo seguinte funcional no espaço $\mathcal{C}_{(x,x)}$ (veja o §1.2 do capítulo 1):

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} | (\psi \bar{\psi})(x) | \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} \rangle \\
&= \int_0^\infty \frac{dJ}{J} \left(\int_{X(0)=X(J)=X} \mathcal{D}_F[X(\sigma)] e^{-\frac{1}{2} \int_0^J \dot{X}^2(\sigma) d\sigma} \right) \\
& \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} | \text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \{ \Psi[\mathcal{C}_{XX}] \} | \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} \rangle \quad (1)
\end{aligned}$$

, onde $\mathcal{P} \{ \Psi[\mathcal{C}_{XX}] \}$ denota o fator de fase ordenado de Wu - Yang associada a trajetória quântica $\mathcal{C}_{XX} = \{ X(\sigma) | X_\mu(0) = X_\mu(J) = X_\mu \}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \{ \Psi[\mathcal{C}_{XX}] \} &= \mathcal{P} \left\{ e^{+ \int_0^J G_\mu(X(\sigma)) \dot{X}_\mu(\sigma) d\sigma} \right\} \\
&= \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + G_\mu(X_1) dX_1^\mu \right) \dots \left(\mathbb{1} + G_\mu(X_K) dX_K^\mu \right) \quad (2)
\end{aligned}$$

onde $X_k = X_\mu(\sigma_k)$ são pontos ordenados ao longo de \mathcal{C}_{XX}
 $(dX_k^\mu = X_{k+1}^\mu - X_k^\mu)$

O vácuo $\Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)}$ da teoria $SU(\infty)$, possui a importante propriedade de que a média quântica de um produto de observáveis invariante de Gauge se fatoriza no produto das respectivas médias quânticas ([1]):

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} | \mathcal{O}_1(G_\mu) \dots \mathcal{O}_N(G_\mu) | \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} \rangle \\
&= \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} | \mathcal{O}_1(G_\mu) | \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} \rangle \dots \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} | \mathcal{O}_N(G_\mu) | \Omega_{\text{VAC}}^{(\infty)} \rangle \quad (3)
\end{aligned}$$

As equações de evolução do funcional de onda (1), serão obtidas de modo padrão no formalismo das integrais de trajetória (veja a eq. (1.11) do §1.2 do cap. 1), submetendo-o a variações de campo $\delta G_\mu^i(x)$ e de trajetórias $\delta X_\mu(J)$. E co

mo consequência de estarmos considerando todas as possíveis configurações de campo e todas as possíveis trajetórias, estas variações devem anular-se de um modo independente e resultando nas 2 seguintes relações:

$$\int_0^\infty \frac{dJ}{J} \left(\int_{X(0)=X(J)=X} \mathcal{D}_F[\dot{X}(\sigma)] e^{-\frac{1}{2} \int_0^J \dot{X}^2(\sigma) d\sigma} \left(\int \mathcal{D}[G_\mu(x)] \frac{\delta}{\delta G_\mu^i(x)} \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ e^{-\frac{1}{4g^2} \int d^D x \text{Tr}^{(c)} (F_{\mu\nu})^2(x)} \sum_{i=1}^{N^2-1} \text{Tr}^{(c)} \left[P \left\{ e^{+\int_0^J G_\mu(X(\sigma)) dX_\mu(\sigma)} \right\} \lambda_i \right] \right\} \right) \right) = 0 \quad (4)$$

$$e \int \mathcal{D}[G_\mu(x)] e^{-\frac{1}{4g^2} \int d^D x \text{Tr}^{(c)} (F_{\mu\nu})^2(x)} \\ \left(\int_{X(0)=X(J)=X} \mathcal{D}[X(\sigma)] \cdot \frac{\delta}{\delta X_\mu(\sigma)} \left\{ e^{-\frac{1}{2} \int_0^J \dot{X}^2(\sigma) d\sigma} \cdot \text{Tr}^{(c)} \left(P \left\{ \psi[C_{xx}] \right\} \right) \right\} \right) = 0 \quad (5)$$

onde em (4) re-escrevemos o "Lopp de Wilson" em uma forma conveniente na qual aparece de um modo explícito a estrutura algébrica do grupo de calibre da teoria via os geradores $\{\lambda_i\}$ de $SU(N)$

$$\text{Tr}^{(c)} \left(P \left\{ \psi[C_{xx}] \right\} \right) = \sum_{i=1}^{N^2-1} \text{Tr}^{(c)} \left(P \left\{ e^{+\int_0^J G_\mu(X(\sigma)) \dot{X}_\mu(\sigma) d\sigma} \right\} \lambda_i \right) \quad (6)$$

Analisemos a relação (4), que possui o significado físico de ser um tipo de Equação de Maxwell para o Lopp de Wilson.

A variação da ação do campo de calibre produz o resultado:

$$\frac{\delta}{\delta G_{\mu}^i(x)} \left(e^{-\frac{1}{4g^2 N} \int d^D x' \text{Tr}^{(c)} (F_{\mu\nu})^2(x')} \right) \\ = -\frac{1}{2g^2 N} (\nabla_{\mu} F_{\mu\nu})^i(x) e^{-\frac{1}{4g^2 N} \int d^D x' \text{Tr}^{(c)} (F_{\mu\nu})^2(x')} \quad (7)$$

A variação do "Loop de Wilson" é dada pelo resultado

$$([1]): \\ \frac{\delta}{\delta G_{\mu}^i(x)} \left(\sum_{i=1}^{N^2-1} \text{Tr} \mathcal{P} \left\{ e^{+\int_0^J G_{\mu}(x(\sigma)) \dot{x}^{\mu}(\sigma) d\sigma} \right\} \right) \\ = \int_0^J d\sigma \delta^{(D)}(x - x_{\mu}(\sigma)) \dot{x}^{\mu}(\sigma) \left\{ \left(\mathcal{P} \left\{ e^{\int_0^{\sigma} G_{\mu}(x(\sigma')) \dot{x}^{\mu}(\sigma') d\sigma'} \right\} \right)_{ma'} \right\} \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^{N^2-1} (\lambda^i)_{km} (\lambda^i)_{aa'} \left\{ \left(\mathcal{P} \left\{ e^{+\int_{\sigma}^J G_{\mu}(x(\sigma')) \dot{x}^{\mu}(\sigma') d\sigma'} \right\} \right)_{ak} \right\} \right) \quad (8)$$

Usando a relação de complemento para os geradores; e enfatizando que é neste ponto da análise que a estrutura algébrica da Teoria de Calibre tem papel na dedução da equação de evolução procurada

$$(\lambda^i)_{km} (\lambda^i)_{aa'} = \delta^{ka} \delta^{ma'} - \frac{1}{N} \delta^{km} \delta^{aa'} \quad (9)$$

); em (8) e substituindo os resultados em (4), obtemos (sem realizarmos a integração funcional sobre as trajetórias quânticas $\{x(\sigma)\}$:

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} | \text{Tr}^{(C)} \left(\mathcal{P} \left\{ \nabla_{\mu} F_{\mu\nu}^{(X)} \Psi [C_{XX}] \right\} \right) | \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} \rangle \\
&= 2(g^2 N) \int_0^J d\sigma \delta^{(D)}(X - X_{\mu}(\sigma)) \dot{X}^{\mu}(\sigma) \left\{ \langle \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} | \text{Tr}^{(C)} \left(\right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathcal{P} \left\{ \Psi [C_{X(\sigma)X(\sigma)}] \right\} \right) \text{Tr}^{(C)} \left(\mathcal{P} \left\{ \Psi [C_{X(\sigma)X(J)}] \right\} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N} \text{Tr}^{(C)} \left(\mathcal{P} \left\{ \Psi [C_{X(\sigma)X(\sigma)}] \right\} \cdot \mathcal{P} \left\{ \Psi [C_{X(\sigma)X(J)}] \right\} \right) | \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} \rangle \right. \\
&\quad \left. (10) \right.
\end{aligned}$$

onde $\langle \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} | \dots | \Omega_{\text{VAC}}^{(N)} \rangle$ denota o valor esperado no vácuo da Teoria de Calibre SU(N)

Observamos a fatorização do fator de fase ordenado em (4) devido a divisão da trajetória $C_{X(\sigma)X(J)}$ (veja a fig. 8) na eq. (8).

A) Trajetória sem pontos de auto-intersecção:

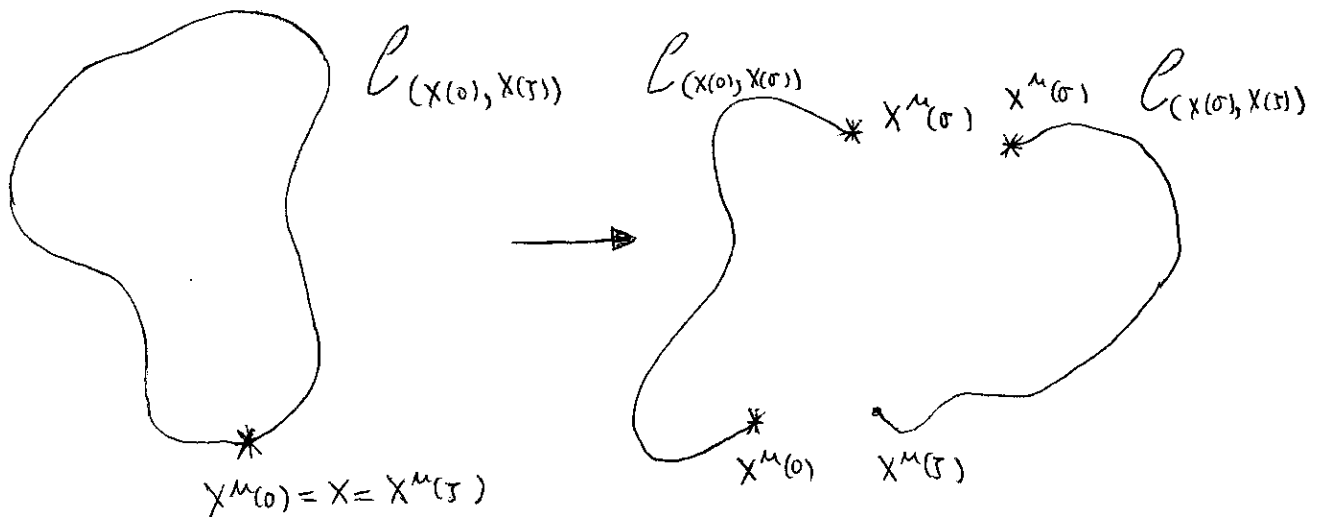


FIG 8

B) Trajetória com pontos de auto-intersecção:

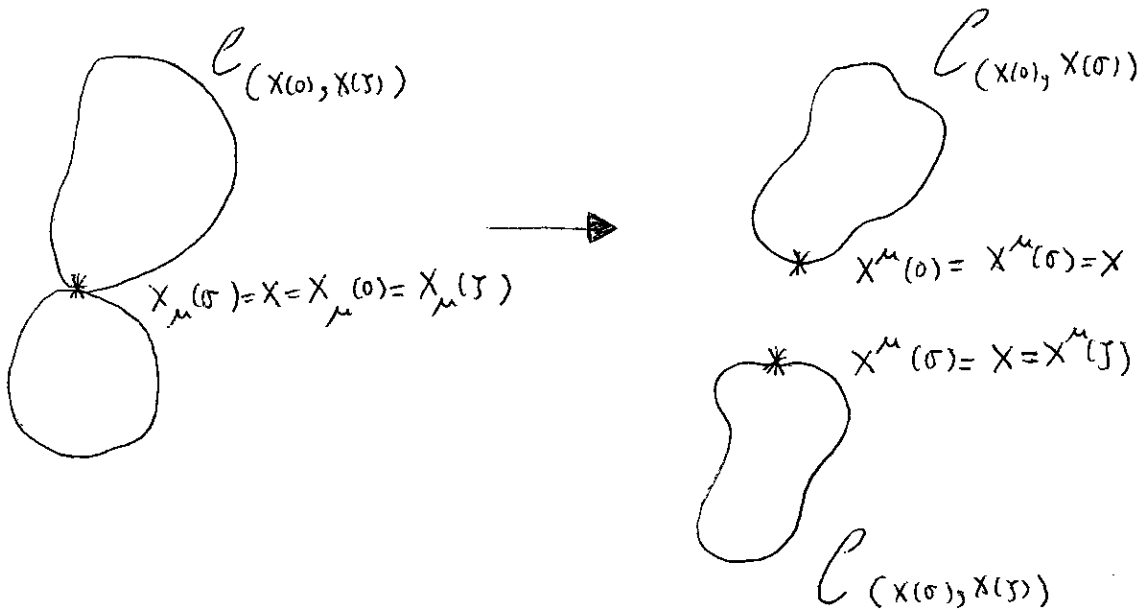


FIG 8

No limite $N \rightarrow \infty$ ($\lim_{N \rightarrow \infty} g^2 N = \lambda < \infty$), devido a propriedade (3), e introduzindo as derivadas geométricas de Migdal - Mannenno para re-escrever o primeiro membro de (10) na forma ([1]):

$$\frac{\partial}{\partial X_{\mu}} \frac{\delta}{\delta \sigma_{\mu\nu}^{(X)}} \langle \Omega_{VAC}^{(N)} | \text{Tr}^{(c)} \{ \psi [\mathcal{L}_{X(0)X(J)}] \} | \Omega_{VAC}^{(N)} \rangle \quad (11)$$

a relação (10) toma a forma :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_{\mu}} \frac{\delta}{\delta \sigma_{\mu\nu}^{(X)}} \langle \Omega_{VAC}^{(\infty)} | \text{Tr}^{(c)} \{ \psi [\mathcal{L}_{X(0)X(J)}] \} | \Omega_{VAC}^{(\infty)} \rangle \\ &= 2 \lambda \int_0^J d\sigma \delta^{(D)}(X - X_{\mu}(\sigma)) \dot{X}^{\mu}(\sigma) \langle \Omega_{VAC}^{(\infty)} | \text{Tr}^{(c)} (\mathcal{P} \{ \psi [\mathcal{L}_{X(0)X(\sigma)}] \}) | \Omega_{VAC}^{(\infty)} \rangle \\ & \cdot \langle \Omega_{VAC}^{(\infty)} | \text{Tr}^{(c)} (\mathcal{P} \{ \psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(J)}] \}) | \Omega_{VAC}^{(\infty)} \rangle \quad (12) \end{aligned}$$

onde o termo de ordem $\frac{1}{N}$ em (10) não contribue para (12) em $SU(\infty)$

Observamos o fato fundamental de que a fatorização quântica no segundo membro de (10) (e resultando no segundo membro de (12)) só é possível se as trajetórias $\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\sigma)}$ e $\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}$ são fechadas (veja a fig. (8) e, portanto, implicando na invariância de Calibre dos termos no segundo membro de (10). E, neste ponto da análise, que vemos o papel fundamental da natureza quântica das trajetórias $\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}$ (veja a discussão sobre a natureza geométrica das trajetórias quânticas no §1.2 do cap.1); desde que somente uma trajetória quântica possui a propriedade de se auto-intersectar em todo ponto, como está implicado em (12).

Espera-se obter uma solução do tipo (3.2) do §3.1 - cap. 3 com graus fermiônicos internos para a equação (12). ([4])

A relação (5), que é um tipo de equação de Lorentz para a trajetória $X_\mu(\tau)$, produz o resultado:

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_{VAC}^{(N)} | \ddot{X}_\mu(\sigma) \text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \{ \Psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}] \} | \Omega_{VAC}^{(N)} \rangle \\ &= \langle \Omega_{VAC}^{(N)} | \dot{X}_\nu(\sigma) \text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \{ F_{\mu\nu}(X(\sigma)) \Psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}] \} | \Omega_{VAC}^{(N)} \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

onde usamos a relação ([5]).

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta X_\mu(\sigma)} \text{Tr}^{(c)} \{ \mathcal{P} \{ \Psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}] \} \} \\ &= \dot{X}_\nu(\sigma) \cdot \text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \{ F_{\mu\nu}(X(\sigma)) \Psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\tau)}] \} \end{aligned} \quad (14)$$

Esta equação deverá fazer a conexão entre a dinâmica das trajetórias $\{X_\mu(\sigma)\}$ com o "Loop de Wilson" $\text{Tr}^{(c)} \mathcal{P} \{ \psi [\mathcal{L}_{X(\sigma)X(\sigma)}] \}$. No caso de termos uma trajetória estática $\dot{X}_\mu(\sigma) = 0$, a relação (13) nada mais é que a condição de invariância sob reparametrização da trajetória $X_\mu(\sigma)$ do "Loop de Wilson".

Concluimos este apêndice afirmando que significados precisos para as eq. (12) e eq. (14) sã foram obtidos, até agora, para as Teorias de Calibre formuladas na rede ([6]).

REFERÊNCIAS:

- [1] Yu M. Makeenko and A.A. Migdal, Exact Equation for the Loop Average in Multicolor Q.C.D, Phys. Lett 88B (1979) 135
- [2] A.M. Polyakov, Gauge Fields as Rings of Glue, Nucl Phys B164 (1980), 171
- [3] T.T. Wu and C.N. Yang; Concept of Nointegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Theories Phys. Rev. D12 (1975), 3845
- [4] A.A. Migdal . Q.C.D.=Fermi String Theory, Nucl Phys. B189 (1981) 253
- [5] J.L. Gervais and A. Neveu, Local Harmonicity of the Wilson Loop Integral in Classical Yang-Mills Theory, Nucl. Phys. B153 (1979), 445
- [6] A.A. Migdal - Loop Equations and $1/N$ Expansion, Physics Reports 102, nº 4 (1983), 190-290 - North-Holland, Amsterdam.

AGRADECIMENTOS

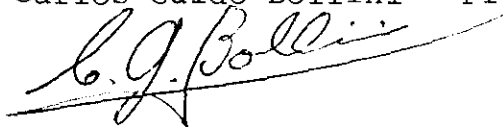
O autor desta Tese de Doutorado é agradecido aos Professores J.J. Giambiagi (orientador da presente Tese), C.G. Bollini e E.C. Marino, pelo estímulo e discussões sobre os assuntos aqui estudados e L. Nachbin e S. Machado (falecido), por terem me introduzido na teoria da Análise Funcional.

Agradecimentos também são devidos a Marco Aurélio R. Monteiro com o qual parte das pesquisas apresentadas no capítulo 4, §4.3, foi realizada e aos amigos Edson Silva e J. Bassalo pelo constante apoio.

Finalmente agradeço ao CNPq pela concessão, durante o período 1982 - 1984, de uma Bolsa de Doutorado.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

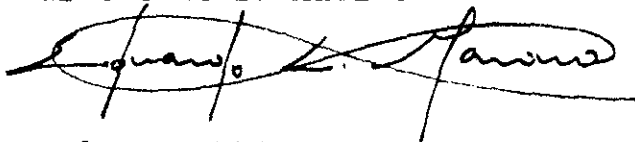
Carlos Guido Bollini - Presidente



Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho



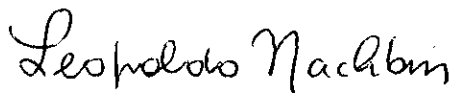
Eduardo Cantera Marino



Leopoldo Nachbin



Prem Prakash Srivastava



Rio de Janeiro, 23 de abril de 1985