

ABÍLIO VALÉRIO TOZINI

MODELOS DE UNIVERSO COM ROTAÇÃO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF/CNPq

Rio de Janeiro, 1984

P R Ó L O G O

"Porque se faz o que se faz ?"

ou, para quem não gosta do impessoal:

"Porque você faz o que você faz ?"

ou, como em geral projetamos nos outros nossos me
dos, nossas angústias, nossas fraquezas:

"Porque fazemos o que fazemos ?"

ou, finalmente, para aqueles que não querem ser
responsáveis pelos seus atos, incluo-me sō a
mim:

"Porque eu faço o que eu faço ?"

- toda a existência é puro fruto da ima
ginação, e, inclusive a própria imagi
nação é puro fruto da imaginação. Tu-
do não passa de um desejo: o desejo
de EXISTIR.

- pelo direito de ser diferente.

- pela liberdade de escolha.

AVT

DEDICATÓRIAS

*Se a alguém ocorrer de questionar,
se esta tese tenho eu o direito de dedicar,
pois não se trata de propriedade particular,
num instante eu explico
ela já pertence a quem agradeço e a quem dedico!*

*Se a alguém ocorrer de questionar,
da grandeza e da profundidade desta tese
para se querer ela a tanta gente dedicar
me armo da seguinte prosa
para aplicar a fúria do mar:*

*... uma abelha vive cerca de sessenta dias e ao longo
de toda a sua vida produz cerca de duas colheres de mel que al-
guém engole em um simples bocado... por outro lado, além do pro-
duto final, ela passa por não sei quantas flores polinizando-as,
transformando-as em não sei quantos frutos... para você duas
colheres de mel e alguns frutos não são nada, para uma abelha é
a vida dela, toda a vida dela... não sou tão trabalhador quanto
uma abelha... não sou uma abelha... sou o abílio...*

*A quem as abelhas dedicam, no silêncio do seu labor ,
o resultado de seu trabalho ? Provavelmente numa doce canção à
vida, dediquem a doçura dos frutos e do mel e a beleza das flo-
res que visitam a própria canção que é a vida...*

*Fiz estas citações não por eu me julgar tão importan-
te quanto uma abelha, nem tão pouco para comparar esta tese com
doçura do mel, mas, por favor, permita-me agradecer por ela e
oferecê-la a um grande número de pessoas grandes. E que estas
pessoas aceitem isso, apesar da singeleza desta tese. E quem sa-
be isso a torne um pouco grande...*

I. DEDICATÓRIA PRIMEIRA

Aos trabalhadores dos serviços básicos, que são mal remunerados e desconsiderados pelas medíocres escalas de valores dessa sociedade hipócrita em que vivo, dedico esta tese. E com destaque para aqueles que cavucam a terra e tiram dela a comida que como, porque vim do meio deles.

II. DEDICATÓRIA SEGUNDA

A todas as crianças, geniais em potencial, que não tiveram a opção de escolha, porque não lhes restou outra alternativa senão a luta por o que comer...

A todas as crianças que sonharam e alimentaram um sonho, que ficou no mundo dos sonhos, porque sua realidade não permite sonhar, e a pena para quem sonha é ver o sonho morrer num sonho ...

III. DEDICATÓRIA TERCEIRA

Não sei se sem palavras, ou, com todas as palavras boas de se ouvir,

a Antonio e Deolinda,
meu pai, minha mãe

aqueles que os geraram, meus Avós;

aos meus irmãos & Cia. e a Lucinha e ao Euler.

IV. DEDICATÓRIA ÚLTIMA

Esta dedicatória última, escrevi-a no começo deste ano, que é quando eu planejava terminar esta tese. Neste tempo que se passou muitas coisas mudaram. De qualquer forma não a mudarei, a não ser o tempo de alguns verbos. E desde já refuto as críticas de quem achar que esta dedicatória não caberia aqui: penso que cabe, porque ela é uma realidade que vivi neste período, porque ela me é importante, porque ela sou eu.

O que segue, não sabia se escrevia no presente ou no passado... não sei se foi... não sei se é... você nunca me disse nada...

A você, PESSOA DESCONHECIDA, minha alegria e minha tristeza, minha luz e minha escuridão, que foi o meu sonho e o meu pesadelo, que me fez voar em sonhos e me fez acordar em pesadelos, que de repente, sem nem ver nem saber porque, de repente, estava escravo de ti. A você pessoa desconhecida, que foi meu tudo e meu nada, que me faz amar e me faz odiar. A você pessoa desconhecida que em outros tempos me encheu a vida de sonhos e tempos depois me acordou em meio a pesadelos. A você pessoa desconhecida, a quem eu queria como melhor amigo, mas que você não foi nem sequer amigo. A você a quem eu coloquei nos altares dos meus sonhos, de onde você me viu sufocar em um mar de tristezas, afogado em lágrimas, de onde impassível você assistia a tudo, indiferente, sem nem sequer dirigir-me uma palavra. A você de quem eu esperava tudo e tudo que você me deu foi o vazio, o silêncio. A você pessoa desconhecida, que por muito tempo foi a razão da minha vida e que por outro tanto me fez querer morrer. A você pessoa desconhecida, que em outros tempos me fazia sorrir sozinho ao lembrar do teu sorriso, mas que por outro tempo me fez chorar sozinho quando me lembrava de você. A você a quem eu ficava a te esperar pelos teus cami-

nhos, mas que depois me desviava para não te encontrar nos meus caminhos. A você pessoa desconhecida de quem eu me tornei sua sombra, mas você sempre caminhava pelo escuro para não ver a sua sombra te acompanhando. A você pessoa desconhecida, com quem eu sonhei dar tantos sorrisos juntos mas que o que me sobrou foram tantos soluços na solidão. A você pessoa desconhecida que já não fico mais olhando para a tua janela, que já não fico te esperando pelos teus caminhos, que já não fico te olhando quando estou perto de você, porque como posso ainda amar quem me tratou com desprezo? Como posso ainda querer quem me quiz distante? Como posso ainda desejar com loucura quem deseja a outros? Então a você pessoa desconhecida, a quem dediquei muito do meu tempo que devia ter dedicado talvez a esta tese, dedico esta tese, embora já não sei se te amo, embora já não sei se te quero, embora já não sei se te desejo com loucura, porque você nunca me deu uma palavra de volta, porque você nunca me deu uma atitude de volta, e te continuar amando seria amar a solidão, e te continuar querendo seria querer o vazio, e te continuar desejando com loucura seria a loucura de desejar o nada. Mas mesmo assim dedico esta tese a você pessoa dos três bilhetinhos, nesta dedicatória que é como o tanto que já te escrevi: mais um grito surdo, surdo porque sei que não terá resposta... como das outras vezes. A você pessoa desconhecida das longas cartas de mais de trinta folhas que penso que você só existe no mundo dos meus sonhos da aqueles tempos que você era a fonte dos meus sonhos. A você INOCENTE pessoa desconhecida que me içou do poço da escuridão sem o saber. A você pessoa desconhecida que me dava forças para fazer esta tese mas que por quem quase me impedi de fazer qualquer coisa. A você com quem eu gastei grande parte do meu tempo só para te ver passar. E você talvez nem saiba disso. A você INOCENTE pessoa desconhecida de quem fui por muito tempo escravo mas que você não estava nem aí, que não tem culpa alguma e que talvez se sentiu em uma situação incômoda por eu ter me tornado teu escravo. A você INOCENTE pessoa MUDA e desconhecida que da tempestada que você era no mundo dos meus sonhos só resta agora uma doce, leve, suave, amarga lembrança... doce lembrança... não sei... você nunca me

disse nada... você... suposições... o vazio... o nada... a busca para preencher o vazio... a vida... você... lembranças... pesadelos... sonhos... pura imaginação... não sei... você nunca me disse nada... os dias passam... minha imaginação voa... o vazio... o amor... o sonho... o nada... não sei... e eu que te disse tantas coisas... mas você nunca me disse nada...

A você PESSOA DESCONHECIDA, que existe mesmo que seja no mundo da minha imaginação, TE DEDICÔ esta tese... por tudo que você foi... por tudo que você é para mim... mesmo que no mundo real você não me seja nada... mas no mundo da minha imaginação... não sei... você nunca me disse nada... e muito provavelmente nunca me dirã nada...

... e me perdoa se tudo for diferente.

AGRADECIMENTOS

— Ao Mario Novello, pela sugestão do tema, pela orientação, por não ter me mandado para a frente de trabalho dos flagelados da seca do nordeste, nem ter me mandado juntar-me aos flagelados das enchentes do sul, nem ter me mandado agru-
par-me aos saqueadores de supermercados e padarias: pela paci-
ência e tolerância nos momentos em que fui falho;

— Ao Teixeira e ao Salim pela ajuda, pelas discus-
sões, e principalmente pelo amparo nos momentos de desespero ;

— Ao Ivano, Salim e Novello por parte de minha forma-
ção e ao Tyomno pelas discussões;

— Aos meus outros Professores do Mestrado que soube-
ram suportar e entender o meu desconhecimento de principiante
zero;

— À Direção e à Gerência do CBPF pelo interesse em
resolver nossos problemas;

— Ao DRP pela liberação dos serviços prestados;

— Aos funcionários do CBPF e da Conservadora Castel-
lo, com destaque ao Zé e Elias da Xerox, ao pessoal da Biblio-
teca, à Myriam nossa Secretária, à Vandinha, à Marilene, e ao
Henrique Lins pelos papos tranquilizadores na época do terror
da média B nos cursos;

— À Datilógrafa, Helena, que pelo seu caráter conqui-
tou um amigo;

— Ao Renato Pires pela minha iniciação na computação
algébrica;

— Aos amigos pós-graduandos do DRP que conviveram
mais intimamente comigo nos últimos tempos, pelo companheiris-
mo, pelo apoio, pelo que me ensinaram. Entre eles: Claudia,
Joel, Maurício, Renato Pires, Renato Portugal, Nami, Bartolo -

meu, Romero, Djalma, Nelson, Caruso, João Torres;

– Aos meus outros amigos do CBPF pela convivência nas lutas comuns, pela solidariedade, sem citar nomes, a menos de um: Regina Célia, pelo Princípio;

– Aos Trabalhadores de cujo suor o CNPq e a CAPES me repassaram o dinheiro das bolsas concedidas;

– Aos amigos que me emprestaram dinheiro nas várias vezes em que os órgãos financiadores atrasaram a bolsa, ou nas situações em que o fim da bolsa chegava antes do final do mês;

– Ao João Batista e à Vara pela tranquila, fraterna e gostosa convivência, por terem me aturado e me ouvido nos momentos de tensão, tédio e angústia, pelos momentos de Felicidade neste tempo que dividimos o mesmo teto;

– À Margarida e meus amigos da natação;

– Aos meus amigos da Lauro Müller e outros amigos por se preocuparem com meu trabalho e me ouvirem falar dele, apesar de muitas vezes nem mesmo entenderem lufas do que se tratava: pela amizade, pelo carinho, pelo amor;

– Sem palavras, a Meu Pai, Minha Mãe, Meus Irmãos & Cia., à Lucinha e ao Euler;

– A todos quantos cruzaram pela minha vida, e me fizeram sentir gente, e me fizeram crescer, e me compreenderam em momentos que acuado pelo medo desferi golpes e palavras agressivas;

– A quem me faz sonhar: à Natureza, à Existência, à Vida.

RESUMO

Faz-se uma revisão de algumas propriedades dos modelos de Universo com rotação. Identifica-se o modelo de Gödel como *modelo inclinado generalizado*.

Apresenta-se e analisa-se algumas propriedades de novas soluções das equações de Einstein que são modelos de Universos não estacionários e em rotação. Estes modelos têm como caso particular o modelo de Gödel.

Encontra-se modelos cosmológicos não estacionários que são a generalização da Métrica de Gödel de maneira análoga ao que Friedmann é para o modelo de Einstein.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
PRÓLOGO	ii
DEDICATÓRIAS	iii
I. DEDICATÓRIA PRIMEIRA	iv
II. DEDICATÓRIA SEGUNDA	v
III. DEDICATÓRIA TERCEIRA	vi
IV. DEDICATÓRIA ÚLTIMA	vii
AGRADECIMENTOS	x
RESUMO	xii
LISTA DE FIGURAS	xvi
NOTAÇÃO	xvii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - O MODELO DE GÖDEL EXEMPLIFICANDO ALGUMAS PROPRIEDADES DOS UNIVERSOS EM ROTAÇÃO	6
1.1 - Introdução	6
1.2 - A Geometria de Gödel - O Teorema de Bampi e Zordan	6
1.3 - A Topologia Associada à Métrica de Gödel na Forma da Equação (1.2.3)	8
1.4 - O Problema da Sincronização de Relógios no Espaço-Tempo Riemanniano - Sistema Gaussiano de Coordenadas - Sistema de Coordenadas Naturalmente Associado - Sistema de Coorde nadas Espacialmente Comóvel - Referencial Sincrônico.....	10
1.5 - A Impossibilidade de um Referencial Comóvel com um Subs - trato Material que Apresenta Aceleração ou Rotação ser um Referencial Sincrônico - Definição do Vetor de Rotação - A Rotação como Indicativo da Inclinação de uma Geometria.	13
1.6 - Interpretação da Rotação - Noção de Direção de Inércia..	20
1.7 - O Modelo de Gödel e a Violação de Causalidade	28
1.8 - Alguns Objetos Geométricos do Universo de Gödel	30

CAPÍTULO 2 - UNIVERSOS NÃO ESTACIONÁRIOS EM ROTAÇÃO	35
2.1 - A Procura de uma Solução	35
2.2 - A Inexistência de Solução Tipo Gödel Dependente do Tempo com o Conteúdo Material Sendo um Fluido Perfeito	42
2.3 - Uma Solução das Equações de Einstein de Gravitação que Generaliza Gödel para uma Forma Não Estacionária	45
2.4 - Os Parâmetros Cinemáticos da Nova Solução	49
2.5 - A Natureza da Fonte da Nova Geometria	52
2.6 - A Fonte e as Condições de Energia Dominante	55
2.7 - Análise das Curvaturas - Quais Parâmetros Determinam Famílias de Soluções Diferentes ?	57
2.8 - Uma Solução que Apresenta Singularidade ?	60
2.9 - As Soluções Conformalmente Planas	61
2.10 - Soluções que Não Apresentam Violação da Causalidade do Tipo que Ocorre em Gödel	64
2.11 - Que Restrições uma Equação de Estado para um Fluido Perfeito Imporia ao Modelo ?	69
2.12 - Análise da Variação da Densidade de Entropia	72
2.13 - Casos Particulares de Interesse	75
2.14 - Os Efeitos Dissipativos, em Termos de Efeitos Gravitacionais, Equivalem a Outros Campos que não o Gravitacional	79
 CAPÍTULO 3 - UNIVERSOS PULSANTES EM ROTAÇÃO.....	 83
3.1 - A Motivação deste Estudo	83
3.2 - Transformações Conforme do Tensor Métrico	84
3.3 - Uma Transformação Conforme na Nossa Solução na Forma Estacionária (NSFE)	88
3.4 - Soluções com $T_{03} = 0$ e $T_{13} = 0$	91
3.5 - Soluções com $T_{03} = 0$ e $T_{01} = 0$	102
3.6 - Uma Tentativa de Acoplamento de Geometrias	110
3.7 - Soluções Pulsantes das Equações de Einstein	112
3.8 - Expressão da Variação da Densidade de Entropia e Gráfico Comparativo das Grandezas que Caracterizam o Modelo do Exemplo II.I do Item 3.7	128
 CAPÍTULO 4 - NOVAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN COM ROTAÇÃO E $\Pi_{ij} = 0$	 133

4.1 - A Justificativa deste Capítulo	133
4.2 - As Soluções	134
4.3 - Análise do Caso Gödel	143
CONCLUSÕES	149
APÊNDICE A - NOTAÇÃO, CONVENÇÕES, DEFINIÇÕES E EQUAÇÕES EMPREGADAS...	151
A.1 - Generalidades	151
A.2 - Referente a um Sistema de Coordenadas x^{μ} Qualquer	153
A.3 - Referente a uma Base de Tetradas Local Qualquer	158
APÊNDICE B - LISTAGENS DOS ARQUIVOS PRINCIPAIS UTILIZADOS NOS CÁLCU - LOS ALGÉBRICOS	161
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	175
EPÍLOGO	xviii

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
<u>Fig. 1.4.1</u> - Troca de sinais luminosos entre dois observadores <u>nu</u> ma região infinitesimal.....	11
<u>Fig. 1.6.1</u> - A rotação da base local de tetradas	24
<u>Fig. 2.9.1</u> - O comportamento da expansão para a solução <u>conformal</u> mente plana	64
<u>Fig. 3.6.1</u> - O ponto anguloso formado pela junção de (3.4.50) com (3.4.54) ou (3.5.43) com (3.5.47)	111
<u>Fig. 3.8.1</u> - Variação das grandezas que caracterizam o fluído <u>cos</u> mológico do exemplo II.I. em relação à coordenada temporal	131
<u>Fig. 3.8.2</u> - Ampliação de parte da Fig. 3.8.1	132

NOTAÇÃO

(VER APÊNDICE A)

INTRODUÇÃO

O que um modelo cosmológico pretende é representar as propriedades do Universo, e estender essa representação para uma possível história passada e uma possível história futura. Assim sendo, um modelo cosmológico é tanto melhor quanto mais propriedades do Universo explicar e quanto melhor forem estas explicações.

Na pesquisa de modelos cosmológicos, a interação que se leva em conta para se estabelecer a dinâmica do sistema, no caso o Universo, é a gravitacional. A outra interação de longo alcance, as forças eletromagnéticas, é desconsiderada porque em larga escala, o conteúdo material do Universo é mais ou menos eletricamente neutro, e os campos magnéticos detectados em galáxias levam a interações de ordem de grandeza muito menor que a gravitacional. Além do mais, algumas hipóteses adicionais têm que ser feitas e entre elas está a *aproximação hidrodinâmica*, segundo a qual a matéria, em larga escala, se distribui continuamente no Universo (ref. (29), pág. 1 e 2). Aqui estão implícitas as idéias ou de que o hidrogênio intergalático prevalece como principal constituinte da matéria, e neste caso desconsidera-se as concentrações galáticas, ou de que, no caso da matéria contida nas galáxias prevalecer, a aproximação feita é a mesma que na dinâmica dos fluidos onde se desconsidera a distribuição molecular descontínua e se assume uma densidade de matéria distribuída continuamente.

Em larga escala, dentro dos limites observáveis atualmente, verifica-se que o Universo pode ser tomado como homogêneo e isotrópico e estes dados observacionais justificam o chamado *princípio cosmológico* (ref. (30), pág. 179). Segundo este princípio, o Universo, a menos de irregularidades locais, apresenta em todos os pontos o mesmo aspecto, ou seja, não há nenhuma posição privilegiada, e em cada ponto não há direções privilegiadas (ref. (30), pág. 179 e ref. (30), págs. 2 a 7) . O princípio cosmológico leva aos modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (ref. (29), págs. 7 a 10). Surge então a questão: porque estudar modelos que não são do tipo FRW, ou seja, modelos que não obedecem o *princípio cosmológico* ? Raychaudhuri (ref. (29), pág. 79) coloca as seguintes razões motivadoras do estudo desses modelos:

- "os modelos isotrópicos formam um conjunto de "medida zero" entre a totalidade dos modelos permitidos pelas equações da relatividade geral;

- a uniformidade que é postulada no princípio cosmológico é falha em pequena escala e permanecem dúvidas de sua validade mesmo em larga escala;

- a existência de horizontes de partículas (ver ref. (29), págs. 37 a 40 e ref. (33), págs. 212 a 218) nos modelos isotrópicos torna difícil entender como uma uniformidade pode ser obtida entre regiões em épocas em que elas não tiveram possibilidade de comunicação prévia".

Além disso, em 1982, P. Birch⁽³¹⁾, embora questionado por Phinney & Webster⁽³²⁾, a partir de estudos dos ângulos de posições e polarização de rádio-fontes duplas clássicas de

alta luminosidade concluiu parecerem fortes as evidências de que o Universo é anisotrópico em larga escala e possui rotação como um todo.

Então, o estudo de modelos que não obedecem o princípio cosmológico é justificável, e, ênfase deve ser dada aos estudos dos modelos com rotação, dos quais o pioneiro foi o apresentado por K. Gödel em 1949⁽¹⁾. No entanto, o modelo de Gödel, bem como a maior parte dos modelos com rotação estudados até bem recentemente, são estacionários e não levam a nenhum deslocamento para o vermelho para objetos distantes (ref. (29), págs. 92 a 95). As primeiras soluções não estacionárias começaram a surgir há pouco tempo⁽⁷⁾. Neste nosso trabalho encontramos novas soluções cosmológicas das equações de Einstein.

No primeiro capítulo começamos por examinar algumas propriedades dos modelos com rotação, tomando como guisa de exemplificação o modelo de Gödel⁽¹⁾. Discutimos superficialmente o problema da sincronização de relógios no espaço-tempo Riemanniano e citamos a noção de *referencial sincrônico*. A partir da definição de *modelos inclinados* dada por Ellis e King⁽⁶⁾ mostramos que quaisquer modelos que apresentem rotação são não ortogonais e os classificamos, inclusive o modelo de Gödel, como *modelos inclinados generalizados*. Analisamos também, por mais de uma maneira, o significado físico do vetor de rotação ω^β , além de outras propriedades.

No capítulo 2, encontramos uma nova solução das equações de Einstein que representam modelos cosmológicos não estacionários e com rotação, que tem a solução de Gödel como caso particular. Analisamos algumas propriedades da nova solução, a

qual tem como fonte um fluido imperfeito com fluxo de energia. Mostramos que para uma métrica da mesma forma não existe uma solução tipo fluido perfeito não estacionária. Mostramos também que existem casos particulares conformalmente planos e que não apresentam violação da causalidade da do tipo que ocorre em Gödel, bem como há casos particulares que não apresentam rotação. Mostramos que os modelos não estacionários discutidos nesse capítulo correspondem a Universos em rotação e em contração, conclusão essa proveniente da imposição de que a variação da densidade de entropia seja positiva sempre. Comparamos também o caso estacionário de nossa solução, que tem como fonte um fluido imperfeito, com as soluções apresentadas por Rebouças & Tiomno⁽¹⁵⁾ sob a forma de fluido perfeito mais campos outros que o gravitacional, e mostramos que para uma partícula teste sob efeitos gravitacionais, as geometrias são equivalentes.

No capítulo 3 realizamos uma transformação conforme no caso estacionário da solução apresentada no capítulo 2 e mostramos que existem soluções fisicamente aceitáveis que são pulsantes, ou seja, a fonte bem como as quantidades cinemáticas não nulas, incluindo rotação e expansão, são funções trigonométricas da coordenada temporal. As novas soluções correspondem à generalização não estacionária da métrica de Gödel de maneira análoga ao que Friedmann é para a métrica de Einstein. A fonte dessas novas soluções é um fluido imperfeito com fluxo de energia. Para um dos exemplos dados examinamos também a variação da densidade de entropia.

Como as soluções encontradas no capítulo 3 apresentassem $\Pi_{ii} \neq 0$, no capítulo 4 impusemos $\Pi_{ii} = 0$ e encontra

mos um novo modelo cosmológico não estacionário, conforme ao modelo de Gödel com $T_{11} = T_{22} = T_{33}$.

No Apêndice A apresentamos a notação utilizada, as convenções, as equações utilizadas e algumas das definições que não foram dadas ao longo do contexto.

No Apêndice B mostramos as listagens de alguns dos programas de cálculo algébrico feito por computador que montamos e utilizamos nos nossos cálculos.

CAPÍTULO 1

O MODELO DE GÖDEL EXEMPLIFICANDO ALGUMAS PROPRIEDADES DOS UNIVERSOS EM ROTAÇÃO

1.1 -- INTRODUÇÃO

Entre os modelos cosmológicos com rotação, o mais conhecido é, sem dúvida, o apresentado por K. Gödel⁽¹⁾. Embora esse modelo seja estacionário, logo não leva a nenhum deslocamento para o vermelho para objetos distantes, seu estudo se justifica pelas propriedades que apresenta e pela sua simplicidade (a fonte é um fluido perfeito), como veremos a seguir.

Queremos observar que neste capítulo não apresentamos nada de novo, senão um pequeno apanhado do que já existe na literatura sobre o modelo de Gödel e suas características. Achamos que é válida essa repetição, pois compreendendo um pouco um caso simples, que já foi intensamente estudado, podemos extrapolar os resultados, com certo cuidado, para qualitativamente entendermos melhor modelos mais sofisticados.

1.2 -- A GEOMETRIA DE GÖDEL -- O TEOREMA DE BAMPI E ZORDAN

Gödel⁽¹⁾ apresenta a geometria de seu modelo na forma

$$ds^2 = a^2 [(dx^0 + e^{x^1} dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{e^{2x^1}}{2} (dx^2)^2 - (dx^3)^2] \quad (1.2.1)$$

onde a^2 é um número positivo,

e exibiu a seguinte transformação de coordenadas:

$$e^{x^1} = \text{ch}2r + \cos\phi \text{ seh}2r \quad , \quad (1.2.2a)$$

$$x^2 e^{x^1} = \sqrt{2} \text{ sen}\phi \text{ sh}2r \quad , \quad (1.2.2b)$$

$$\text{tg}\left(\frac{\phi}{2} + \frac{x^0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r} \text{tg} \frac{\phi}{2} \quad , \quad \text{onde} \quad \left| \frac{x^0 - 2t}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{\pi}{2} \quad , \quad (1.2.2c)$$

$$x^3 = 2z \quad , \quad (1.2.2d)$$

que leva ao seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = 4a^2 [(\text{dt} + \sqrt{2} \text{ sh}^2 r \text{ d}\phi)^2 - \text{dr}^2 - \text{dz}^2 - \text{sh}^2 r \text{ ch}^2 r \text{ d}\phi^2] \quad (1.2.3)$$

Em nosso trabalho, em geral, tomaremos $a^2 = 1/4$.

Franco Bampi e Clara Zordan ⁽²⁾ mostraram que qual - quer métrica da forma

$$ds^2 = (\text{dt} + E(x) \text{d}y)^2 - \text{dx}^2 - \text{dz}^2 - D^2(x) \text{d}y^2 \quad , \quad (1.2.4)$$

e que satisfaz às equações de Einstein para um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p(g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu) \quad , \quad (1.2.5)$$

onde ρ é a densidade de matéria-energia, p é a pressão e V_μ é o vetor quadrivelocidade da matéria, é necessariamente isométrica à métrica de Gödel. Em seu trabalho ⁽²⁾ enunciaram e de -

monstraram o seguinte teorema:

"As soluções das equações de Einstein sob as condições (1.2.4) e (1.2.5) são isométricas ao Universo de Gödel" , bem como integraram as expressões de $D(x)$ e $E(x)$

$$D^2(x) = \frac{a^2}{2} [e^{kx} - b e^{-kx}]^2 \quad , \quad (1.2.6a)$$

$$E(x) = a [e^{kx} + b e^{-kx} + n] \quad , \quad (1.2.6b)$$

que para $a = 1$, $k = 1$, $b = n = 0$ levam à métrica de Gödel na forma (1.2.1), e para $a = \sqrt{2}/4$, $b = 1$, $k = 2$, $n = -2$ levam à métrica de Gödel na forma (1.2.3). Vemos então que para podermos pesquisar qual a melhor topologia que devemos associar à métrica, bem como o domínio das variáveis (t, x, z, y) , precisamos estabelecer valores particulares para os parâmetros livres.

1.3 - A TOPOLOGIA ASSOCIADA À MÉTRICA DE GÖDEL NA FORMA DA EQUAÇÃO (1.2.3)

A equação (1.2.3) pode ser assim reescrita

$$ds^2 = dt^2 + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}^2 r \, dt d\phi - dr^2 - dz^2 + \operatorname{sh}^2 r (\operatorname{sh}^2 r - 1) d\phi^2 \quad . \quad (1.3.1)$$

Vamos ver como se comporta o elemento de linha em torno da origem. Para isso vamos expandir a métrica e manter os termos até ordem 2 em r

$$ds^2 = dt^2 + 2\sqrt{2} r^2 \, dt d\phi - dr^2 - dz^2 - r^2 d\phi^2 \quad . \quad (1.3.2)$$

Se considerarmos t, r, z constantes e integrarmos o elemento de linha com ϕ variando de 0 a 2π obtemos

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} |ds| = 2\pi r ,$$

que é o comprimento do círculo de raio r , donde se conclui que ϕ e r podem realmente ser tomados como coordenadas angular e radial, respectivamente.

Se na equação (1.3.2) consideramos $t = \text{constante}$ ficamos com $-ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2$, que é o elemento de linha para o tri-espaço plano escrito no sistema cilíndrico de coordenadas.

O exposto mostra que podemos associar as coordenadas r, z, ϕ às coordenadas cilíndricas usuais, e associar a elas a seguinte faixa de variação, suficiente para cobrir todos os pontos do espaço-tempo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty , \\ -\infty &< z < \infty , \\ 0 &\leq \phi < 2\pi , \\ -\infty &< t < \infty , \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

onde acrescentamos a faixa de variação do tempo, que pode sem problema algum variar de $-\infty$ a $+\infty$ uma vez que a métrica é estacionária, além do que esta faixa de variação tem sentido fisicamente.

1.4 - O PROBLEMA DA SINCRONIZAÇÃO DE RELÓGIOS NO ESPAÇO-TEMPO RIEMANNIANO - SISTEMA GAUSSIANO DE COORDENADAS - SISTEMA DE COORDENADAS NATURALMENTE ASSOCIADO - SISTEMA DE COORDENADAS ESPACIALMENTE COMÓVEL - REFERENCIAL SINCRÔNICO.

(*) Seja um elemento de linha de uma geometria qualquer, escrito na forma

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.4.1)$$

Sejam A e B dois pontos materiais do fluido cosmológico (ou do substrato material, no caso de um espaço-tempo Minkowskiano) cujas linhas de universo, na vizinhança de um determinado evento $x^0 = x^0(s,p)$ (ver Fig. 1.4.1) estejam infinitamente próximas. Consideremos a troca de um sinal luminoso entre A e B, ou seja, uma trajetória do tipo luz, que tem distância de universo nula. Isso nos leva a por $ds^2 = 0$ na equação (1.4.1), que resolvida para dx^0 resulta em duas raízes distintas

$$dx_1^0 = \frac{1}{g_{00}} [-g_{0i} dx^i - \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00}) dx^i dx^j}] \quad (1.4.2)$$

$$dx_2^0 = \frac{1}{g_{00}} [-g_{0i} dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00}) dx^i dx^j}] \quad ,$$

correspondentes à ida e à volta do sinal luminoso, como ilustrado na Figura 1.4.1.

(*)

O trecho que segue vem basicamente da referência (3).

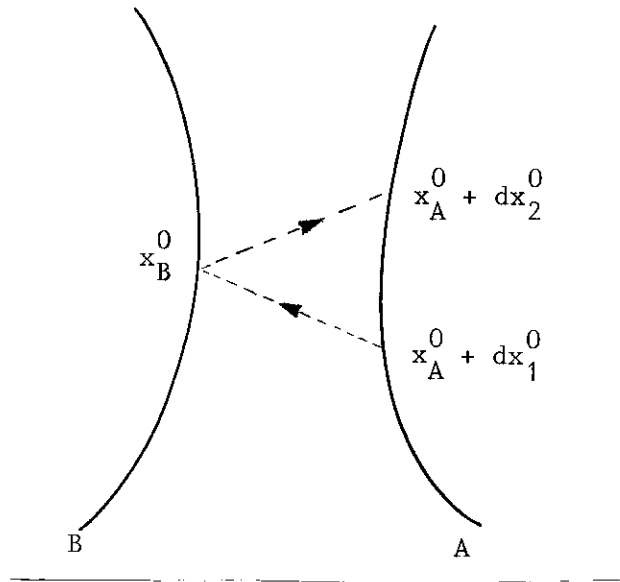


Figura 1.4.1 - As linhas cheias são as linhas de universo de A e B enquanto a pontilhada é a linha de universo do sinal luminoso. A linha de B é dada por $x_B^0 = x^0(s,p)$ e a de A por $x_A^0 = x^0(s,p+\Delta p)$, sendo s o parâmetro da curva e p o parâmetro que distingue a linha de universo de cada material.

Deve ser considerado simultâneo ao instante x_B^0 da linha de universo de B, o ponto médio do instante de emissão e chegada do sinal luminoso em A

$$x_B^0 = \frac{1}{2} (x_A^0 + dx_2^0 + x_A^0 + dx_1^0) = x_A^0 - \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} ,$$

daí segue

$$x_A^0 - x_B^0 = \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} . \tag{1.4.3}$$

Esta correlação permite a sincronização dos relógios em uma vizinhança infinitesimal do espaço. A sincronização unívoca dos relógios em todo o espaço só é possível quando os g_{0i} são nulos. Neste sistema de coordenadas, onde os g_{0i} são nulos, podemos por $g_{00} = 1$ (ref. (3) pág. 376) e temos então o chama

do sistema gaussiano de coordenadas ⁽⁴⁾. Neste sistema o elemento de linha toma a forma

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j . \quad (1.4.4)$$

Chamamos de *sistema de coordenadas naturalmente associado* a um dado referencial ^(*) àquele sistema que tem como linha coordenada temporal uma das curvas integrais do referencial. Assim, a expressão do referencial, no sistema de coordenadas naturalmente associado a ele, será sempre da forma $V^\mu = (\dot{x}^0, 0, 0, 0)$ (onde $\dot{}$ denota d/ds , sendo s o tempo próprio do referencial e (x^0, x^1, x^2, x^3) as coordenadas associadas à cada ponto do espaço-tempo no sistema de coordenadas em questão). No caso em que $x^0 = s$, $V^\mu = \delta_0^\mu$ temos o que chamaremos de *sistema de coordenadas espacialmente comóvel* (x^1, x^2, x^3 são constantes).

Chamamos de *sistema de referência sincrônico* ou *referencial sincrônico* àquele cujo sistema de coordenadas espacialmente comóvel é um sistema Gaussiano de coordenadas, ou de outra forma, um sistema Gaussiano de coordenadas sempre é espacialmente comóvel com um referencial sincrônico, que por sua vez, é sempre geodésico, pois satisfaz automaticamente à equação de uma geodésica

$$\frac{dV^\mu}{ds} + \{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \} V^\nu V^\rho = \{ \begin{smallmatrix} \mu \\ 00 \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (2g_{\rho 0|0} - g_{00|\rho}) = 0 , \quad (1.4.5)$$

uma vez que $g_{00} = 1$ e $g_{0\alpha} = 0$.

^(*) A definição de referencial ou sistema de referência é dada no Apêndice A.

1.5 - A IMPOSSIBILIDADE DE UM REFERENCIAL COMÓVEL COM UM SUBSTRATO MATERIAL QUE APRESENTA ACELERAÇÃO OU ROTAÇÃO SER UM REFERENCIAL SINCRÔNICO - DEFINIÇÃO DO VETOR DE ROTAÇÃO - A ROTAÇÃO COMO INDICATIVO DA INCLINAÇÃO DE UMA GEOMETRIA.

Para demonstrar essa afirmação vamos seguir o procedimento adotado por Adler-Bazin-Schiffer⁽⁴⁾.

Primeiro vamos mostrar que as linhas de universo do referencial comóvel com a matéria em qualquer geometria do tipo Gödel não podem ser sempre ortogonais a uma família de hiper-superfícies tridimensionais uni-parametrizadas. Suponhamos que existe uma família F de hiper-superfícies tridimensionais, parametrizadas por λ , mergulhadas no espaço-tempo quadridimensional que tem a forma

$$F(x^\mu) - \lambda = 0 \quad . \quad (1.5.1)$$

Se um vetor dx^μ está inteiramente dentro da hiper-superfície, F não muda ao longo dele, isto é, $dF = F|_\mu dx^\mu = 0$. Logo um vetor normal à família F que contém x^μ é $F|_\mu(x^\alpha)$, e qualquer campo vetorial arbitrário v_μ que é sempre ortogonal aos membros de F pode ser escrito como

$$v_\mu = \ell F|_\mu \quad , \quad (1.5.2)$$

sendo ℓ uma função arbitrária escalar. Com esse vetor arbitrário construímos o seguinte tensor completamente antissimétrico:

$$a_{\mu\nu\lambda} = v_{[\mu} v_{\nu|\lambda]} \equiv \frac{1}{3!} [v_{\mu} (v_{\nu|\lambda} - v_{\lambda|\nu}) + v_{\nu} (v_{\lambda|\mu} - v_{\mu|\lambda}) + v_{\lambda} (v_{\mu|\nu} - v_{\nu|\mu})] \quad (1.5.3)$$

Para o campo vetorial dado por (1.5.2) o tensor $a_{\mu\nu\lambda}$ é identicamente nulo. Então podemos concluir que uma condição covariante *NECESSÁRIA* para que um campo vetorial v_{μ} seja *sempre* ortogonal a uma família F de hiper-superfícies tridimensionais uniparametrizadas é que

$$a_{\mu\nu\lambda} = v_{[\mu} v_{\nu|\lambda]} = 0 \quad (1.5.4)$$

Para o caso de qualquer solução do tipo Gödel, dada pela métrica da expressão (1.2.4) onde identificamos $t = x^0$, $x = x^1$, $z = x^2$, $y = x^3$, quando o campo v^{μ} é o referencial comóvel com o substrato material

$$v^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \quad v_{\mu} = (1, 0, 0, E(x^1)) \quad (1.5.5)$$

com $E(x^1)$ não constante, temos (' denota $\partial/\partial x^1$):

$$v_{\nu|\lambda} = \begin{cases} E' & \text{para } \nu = 3, \lambda = 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

e

$$a_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} -\frac{1}{6} E' & \text{E' para permutações pares de } 0, 1, 3, \\ \frac{1}{6} E' & \text{E' para permutações ímpares de } 0, 1, 3, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Logo nas métricas do tipo Gödel (expressão (1.2.4)),

não existe sequer uma família F de hiper-superfícies tridimensionais uniparametrizadas que sejam *sempre* ortogonais ao sistema comóvel ou referencial comóvel com o substrato material, logo, neste caso, o referencial comóvel não poderá ser um referencial sincrônico, uma vez que para o referencial sincrônico $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e, pela expressão (1.4.4), $v_\mu = (1, 0, 0, 0)$ que satisfaz à condição (1.5.4), ou mais diretamente: a linha de universo do referencial sincrônico é sempre ortogonal à hiper-superfície $x^0 = \text{const.}$

Vamos agora generalizar a afirmação anterior não apenas para as geometrias do tipo Gödel mas também para qualquer geometria onde o referencial comóvel com o substrato material apresente rotação, ou mais simplesmente, quando há rotação da matéria que gera a curvatura do espaço-tempo.

Para isso, a partir do tensor $a_{\mu\nu\lambda}$ vamos construir o vetor ω^β como sendo

$$\omega^\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}} a_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}} v_{[\mu} v_{\nu]} v_{\lambda]} \quad (1.5.6)$$

Devido à presença do tensor antissimétrico $\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}/\sqrt{-g}$ na sua definição, é de se esperar que o vetor ω^β seja de alguma forma relacionado com o rotacional de v_μ . Pode-se verificar isto para o caso particular do espaço plano, com as coordenadas usuais da relatividade especial tal que $\sqrt{-g} = 1$, $v_\mu = (v_0, -\vec{v})$. Neste caso a expressão (1.5.6) fica

$$\begin{aligned} \omega^0 &= -\frac{1}{2} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad , \\ \vec{\omega} &= -\frac{1}{2} v_0 (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \frac{1}{2} \vec{v} \times \dot{\vec{v}} - \frac{1}{2} (\vec{v} \times \vec{\nabla}) v_0 \quad . \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Para deixar mais clara a significação do vetor ω^β vamos considerar o caso em que o campo v_μ representa um campo vetorial uniforme de rotação com velocidade angular ω em relação ao eixo z de um sistema cartesiano tridimensional (x,z,y)

$$v_0 = 1 \quad , \quad \vec{v} = v^i = (\omega y, 0, -\omega x) \quad , \quad (1.5.8)$$

que nas equações (1.5.7) resulta:

$$\begin{aligned} \omega^0 &= 0 \quad , \\ \vec{\omega} &= -\frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} = (0, \omega, 0) \quad . \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

O vetor ω^β definido pela expressão (1.5.6) está associado à rotação do sistema de referência em torno de um eixo que tem a mesma direção que o quadrivetor ω^β , que é chamado vetor de rotação. Pode-se chegar a esta mesma interpretação por outros métodos, ver por exemplo a ref. (5), págs. 110-113.

No caso das métricas do tipo Gödel (expressão (1.2.4)) temos

$$\omega^\beta = (0, 0, \frac{E'}{2D}, 0) \quad , \quad (1.5.10)$$

$$\omega = -\sqrt{g_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta} = \frac{E'}{2D} \quad ,$$

ou seja, em cada ponto do espaço-tempo o conteúdo material está girando com velocidade angular $\omega = E'/(2D)$ em torno do eixo x^2 .

O exposto anteriormente demonstra a seguinte afirmativa:

Teorema 1: "Em qualquer geometria onde o conteúdo material apresenta aceleração e/ou rotação não nula um referencial comóvel com o conteúdo material não pode ser um referencial sincrônico".

Uma variação menos especificada do teorema acima pode ser escrita como:

Teorema 2: "Em qualquer geometria onde o conteúdo material apresenta rotação não nula um referencial comóvel com o conteúdo material não é ortogonal a uma família F de hiper-superfícies tridimensionais uniparametrizadas nem mesmo em uma região finita quadridimensional do espaço-tempo".

Demonstração:

Se $\omega^\rho \neq 0$, por (1.5.6) temos $a_{\mu\nu\lambda} \neq 0$, o que implica em duas sentenças:

i) por (1.5.3) $v_\nu|_\lambda \neq 0$, logo v_ν é função de pelo menos uma das coordenadas do espaço-tempo, ou seja, a princípio tem valores diferentes em cada ponto, além do que apresenta pelo menos duas componentes não nulas;

ii) não existe nenhuma função escalar $\ell(x^0, x^1, x^2, x^3)$ que satisfaça a igualdade (1.5.2), pois (1.5.4) não é satisfeita. Vai daí que, sendo v_μ o referencial comóvel,

$$v_\mu \neq \ell F|_\mu$$

para qualquer região finita quadridimensional do espaço-tempo, pois se existisse ℓ tal que v_μ tivesse a mesma dependência funcional que $\ell F|_\mu$ em uma região finita 4-dimensional do espa-

ço-tempo, não haveria porque não estender essa dependência para toda a região de analiticidade de v_μ . Além do que, se em uma região finita 4-dimensional do espaço-tempo existir ℓ tal que v_μ tenha a mesma dependência funcional que $\ell F|_\mu$ isso implicaria que $a_{\mu\nu\lambda} = 0$ o que por sua vez implicaria que $\omega^\beta = 0$, ou seja, o substrato material não teria rotação naquele domínio, que é o que ocorre para o referencial sincrônico, pois $v^\alpha = v_\alpha = (1, 0, 0, 0)$ satisfaz à equação (1.5.4).

Vamos introduzir agora o conceito de geometria inclinada dado por Ellis & King⁽⁶⁾ (ver também ref. (7) ítem 2.3). Considere as seguintes suposições:

(a) a matéria toma a forma de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} \quad , \quad u_\mu u^\mu = 1 \quad , \quad \rho > 0 \quad , \quad p \geq 0$$

onde u^μ é a 4-velocidade do fluido, ρ a densidade de energia e p a pressão;

(b) o espaço tempo é localmente invariante sob um grupo de isometrias G_3 simplesmente transitivo que age sobre superfícies $S(t)$ do tipo espaço, ou seja, o espaço-tempo é espacialmente homogêneo. As superfícies $S(t)$, ditas de homogeneidade, determinam um único campo vetorial normal n^α futuro-direcionado, $n^\alpha n_\alpha = 1$, que é livre de rotação e geodésico, o que é fácil de ver em função do teorema anterior e da eq. (1.4.5), pois o campo vetorial n^α é um referencial sincrônico em potencial.

Ellis e King⁽⁶⁾ chamam de *modelos cosmológicos homogêneos inclinados* ou simplesmente *modelos inclinados* aqueles

que satisfazem (a) e (b) e também

$$u^\alpha \neq n^\alpha, \quad (1.5.11)$$

ou seja, o referencial comóvel com o conteúdo material não é ortogonal a uma superfície de homogeneidade espacial.

Vamos generalizar o conceito de modelo cosmológico inclinado. Chamaremos de *geometria inclinada generalizada* a qualquer geometria onde o campo vetorial v_μ , comovente com o conteúdo material, não for proporcional a um campo vetorial que seja ortogonal a uma hipersuperfície tridimensional uniparametrizada. Nos casos dos modelos espacialmente homogêneos essa hiper-superfície é uma possível candidata a ser uma hiper-superfície 3-dim. espacialmente homogênea. Neste sentido podemos enunciar

Teorema 3: "Qualquer modelo cosmológico onde o conteúdo material apresenta rotação não nula é um caso de modelo inclinado generalizado".

Realmente, se pelo teorema 2, não existe um fator de proporcionalidade λ entre o campo vetorial v_μ (referencial comóvel) e um campo vetorial ortogonal a uma hipersuperfície tridimensional uniparametrizada, possível candidata a ser uma hiper-superfície 3-dimensional espacialmente homogênea, então v_μ é oblíquo a qualquer hiper-superfície 3-dim. espacial que possa existir em uma região finita ou globalmente definida na variedade que representa o espaço-tempo.

Este resultado contradiz a afirmação de Rebouças ⁽⁸⁾, pág. 37, que o modelo de Gödel não é um caso de geometria inclinada. Inclusive, para o modelo de Gödel o referencial comovente não coincide com o referencial sincrônico sequer em uma

vizinhança infinitesimal 4-dimensional do espaço-tempo pois a rotação do substrato material é constante e diferente de zero em todos os pontos.

Vale observar que o teorema 3 não afirma que toda geometria inclinada apresenta rotação.

1.6 - INTERPRETAÇÃO DA ROTAÇÃO - NOÇÃO DE DIREÇÃO DE INÉRCIA

Associamos ao vetor ω^β definido por (1.5.6) o significado de uma rotação do conteúdo material do espaço-tempo. Resta entender em relação a que é essa rotação. Para isso, vamos fazer, nas expressões (1.2.6) $a = 1$, $k = \alpha$, $b = n = 0$ e a métrica toma a forma

$$ds^2 = (dx^0 + e^{\alpha x^1} dx^3)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \frac{1}{2} e^{2\alpha x^1} (dx^3)^2 \quad (1.6.1)$$

Encontra-se as equações de movimento de uma partícula que após parcialmente integradas resultam em (ver referência (4))

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 + e^{\alpha x^1} \dot{x}^2 &= a \quad , \\ e^{\alpha x^1} \left(a - \frac{\dot{x}^2}{2} e^{\alpha x^1} \right) &= b \quad , \\ \dot{x}^1 + \alpha b x^2 &= d \quad , \\ \dot{x}^3 &= \ell \quad , \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

onde a , b , d e ℓ são constantes de integração e $\dot{} = d/ds$, sendo s o tempo próprio. Por estas equações pode-se ver que as equações de uma partícula em repouso,

$$x^\mu = (s, A, B, C) \quad , \quad \dot{x}^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad \text{com } A, B, C \text{ constantes,}$$

seguem uma geodésica quando nas equações (1.6.2) se escolhe $a = 1$, $\ell = 0$, $b = e^{\alpha A}$, $d = \alpha b B$.

As equações (1.6.2), originalmente diferenciais de 2ª ordem ficam determinadas quando se dá condições iniciais para as coordenadas e as componentes da velocidade. Para condições iniciais vamos tomar

$$\begin{aligned} x^0 &= 0 \quad , \quad x^1 = 0 \quad , \quad x^2 = 0 \quad , \quad x^3 = 0 \quad , \\ \dot{x}^0 &= 1 \quad , \quad \dot{x}^1 = \beta \quad , \quad \dot{x}^2 = 0 \quad , \quad \dot{x}^3 = 0 \quad , \end{aligned}$$

ou seja, uma partícula teste partindo da origem com velocidade inicial na direção x^1 onde está uma hipotética, distante e fixa galáxia. Seria de se esperar que a partícula seguisse em direção à galáxia distante, isto é, a solução das equações (1.6.2) devia ser da forma:

$$x^\mu = (x^0(s), x^1(s), 0, 0) \quad .$$

A constante α indica o quanto o Modelo de Gödel se afasta do de Minkowski, pois como veremos adiante, o tensor de curvatura calculado na base de tetradas depende apenas de α , no caso da métrica dada por (1.6.1). Baseando-se neste fato, considerando α um pequeno parâmetro de tal modo que se tem o modelo de Minkowski levemente perturbado, usando a teoria das perturbações Adler, Basin, Schiffer⁽⁴⁾, mostram que uma solução das equações (1.6.2) em primeira ordem no parâmetro α tem a forma

$$x^\mu = (s - \alpha\beta s^2, \beta s, \alpha\beta s^2, 0),$$

evidenciando que a partícula se desvia do raio $x^2 = x^3 = 0$ e descreve um movimento espiral ao invés de viajar em direção à galáxia distante, como aconteceria no espaço plano da métrica de Minkowski.

Isto permite concluir que a matéria do Universo de Gödel realmente está em rotação com relação a algo e esse algo é o caminho que uma partícula teste segue se lhe é dada uma velocidade radial inicial. Entramos aqui com a definição de *direção de inércia*: é a direção dada pela tangente à trajetória descrita pela citada partícula teste.

Uma outra maneira de definirmos direção de inércia é pelo transporte de Fermi. As direções de inércia são dadas por 3 eixos $E^\alpha_{(A)}$, $A = 1, 2, 3$, ortogonais entre si e ortogonais a um quarto eixo que coincide em cada ponto com o vetor tangente à curva x^α ao longo da qual os 3 eixos $E^\alpha_{(A)}$, $A = 1, 2, 3$, são *Fermi-transportados* (8,9).

Resumindo: os eixos que determinam as direções de inércia devem satisfazer

- i) ortogonalidade: $g_{\alpha\beta} E^\alpha_{(A)} E^\beta_{(B)} = \text{matriz diagonal}^{(*)}$;
 - ii) $E^\alpha_{(0)} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$, sendo s o tempo próprio do fluido;
 - iii) $\frac{D_F}{Ds} E^\alpha_{(A)} = 0$.
- (1.6.3)

(*) Aqui, em geral, tomam-se vetores ortonormalizados, $E^\alpha_{(0)}$ do tipo tempo e $E^\alpha_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, do tipo espaço de modo que tenhamos $g_{\alpha\beta} E^\alpha_{(A)} E^\beta_{(B)} = \eta_{AB}$.

A expressão explícita do transporte de Fermi de um campo vetorial qualquer Y^α ao longo da linha de universo do fluido é dada por (v^μ é o campo de velocidades do fluido)

$$\frac{D_F Y^\alpha}{Ds} = Y^\alpha \parallel_\beta v^\beta + g_{\mu\nu} Y^\mu v^\nu \parallel_\beta v^\alpha v^\beta - g_{\mu\nu} Y^\mu v^\nu v^\alpha \parallel_\beta v^\beta, \quad (1.6.4)$$

que no caso de um fluido geodésico reduz-se a

$$\frac{D_F Y^\alpha}{Ds} = \frac{DY^\alpha}{Ds} = Y^\alpha \parallel_\beta v^\beta = \dot{Y}^\alpha, \quad (1.6.5)$$

onde associamos a derivada direcional na direção do fluxo do substrato material com uma idéia de velocidade e representamos D/Ds por $\dot{}$.

Substituindo Y^α pela base de tetradas usualmente associada com as geometrias do tipo Gödel dada por (1.2.4), $e^\alpha_{(A)}$ tal que

$$\begin{aligned} e^\alpha_{(0)} &= (1, 0, 0, 0) \quad , \\ e^\alpha_{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \quad , \\ e^\alpha_{(2)} &= (0, 0, 1, 0) \quad , \\ e^\alpha_{(3)} &= (-E/D, 0, 0, 1/D) \quad , \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

e, por (1.6.5), usando os símbolos de Christoffel dados por (1.8.2) e a rotação dada por (1.8.11) temos

$$\begin{aligned} \dot{e}^\alpha_{(0)} &= (0, 0, 0, 0) \quad , \\ \dot{e}^\alpha_{(1)} &= -\omega e^\alpha_{(3)} \quad , \\ \dot{e}^\alpha_{(2)} &= (0, 0, 0, 0) \quad , \\ \dot{e}^\alpha_{(3)} &= \omega e^\alpha_{(1)} \quad , \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

onde ω , dado pela expressão (1.8.11b) é o módulo do vetor de rotação ω^β dado por (1.8.11a).

Olhando para a expressão (1.5.8) e tendo em mente que $\dot{e}^\alpha(A)$ está associado a idéia de "velocidade" dos vetores $e^\alpha(A)$, chegamos à conclusão que ω representa a velocidade angular de um campo vetorial, que tem por base os vetores $e^\alpha(A)$, $A = 0, 1, 2, 3$ e que o eixo de rotação está na direção do vetor $e^\alpha(2)$, conforme a Figura 1.6.1.

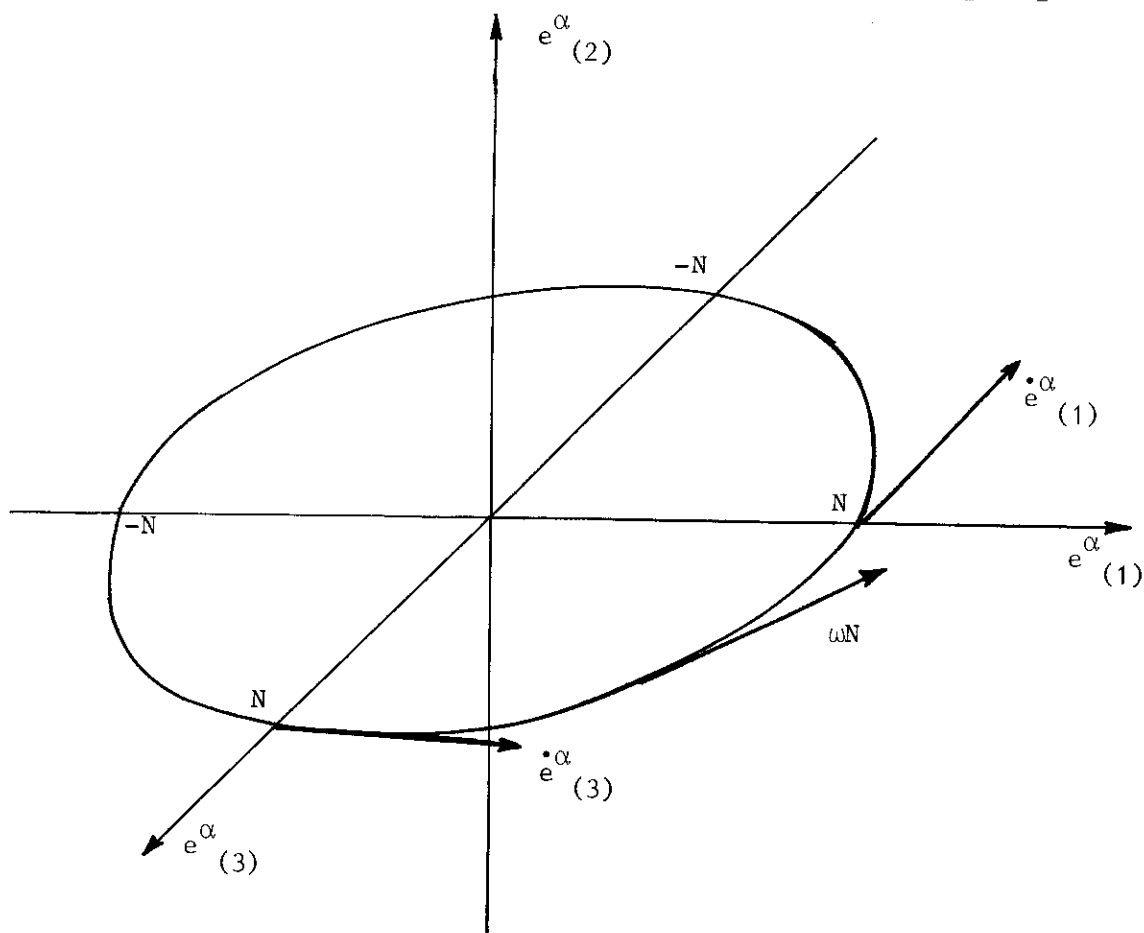


Figura 1.6.1 - Tomando um sistema de eixos cartesianos onde as coordenadas de cada ponto espacial são dadas por $(e^\alpha(1), e^\alpha(2), e^\alpha(3))$ marcamos pelas eqs. (1.6.7b) e (1.6.7d) as componentes do vetor velocidade $(\dot{e}^\alpha(1), \dot{e}^\alpha(2), \dot{e}^\alpha(3))$ para valores das coordenadas $e^\alpha(1)$ e $e^\alpha(3)$ iguais, tal que $(e^\alpha(1))^2 + (e^\alpha(3))^2 = N^2$, e verificamos que o resultado é a trajetória de uma "partícula" descrevendo um movimento circular de raio N no plano $e^\alpha(2) = 0$.

Uma outra maneira de se analisar o sentido físico do objeto geométrico ω^β é a seguinte:

Tomamos a métrica em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - r^2 d\bar{\phi}^2 \quad . \quad (1.6.8)$$

Realizamos uma transformação de coordenadas para um novo sistema t, r, z, ϕ que está girando em relação ao eixo z com velocidade angular Ω , ou seja,

$$\phi = \bar{\phi} - \Omega t \quad . \quad (1.6.9)$$

Dai obtemos a seguinte expressão para a nova métrica girante:

$$ds^2 = [(1-\Omega^2 r^2)^{1/2} dt - \Omega r^2 (1-\Omega^2 r^2)^{-1/2} d\phi]^2 - dr^2 - dz^2 - \frac{r^2}{1-\Omega^2 r^2} d\phi^2, \quad (1.6.10)$$

ou equivalentemente,

$$ds^2 = (1-\Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 dt d\phi - dr^2 - dz^2 - r^2 d\phi^2 \quad . \quad (1.6.11)$$

Para essa métrica temos os seguintes objetos geométricos,

Tetradas:

$$\begin{aligned} e^\alpha_{(0)} &= (1/L, 0, 0, 0) \\ e^\alpha_{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\ e^\alpha_{(2)} &= (0, 0, 1, 0) \\ e^\alpha_{(3)} &= (r\Omega/L, 0, 0, L/r) \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

com as inversas dadas por:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha}^{(0)} &= (L, 0, 0, -\Omega r^2/L) \\
 e_{\alpha}^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\
 e_{\alpha}^{(2)} &= (0, 0, 1, 0) \\
 e_{\alpha}^{(3)} &= (0, 0, 0, r/L^2)
 \end{aligned}
 \tag{1.6.13}$$

com

$$L = (1 - \Omega^2 r^2)^{1/2} . \tag{1.6.14}$$

Símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{aligned}
 \{^1_{00}\} &= -r\Omega^2 \\
 \{^3_{01}\} &= -\frac{\Omega}{r} \\
 \{^1_{03}\} &= -r\Omega \\
 \{^3_{13}\} &= 1/r \\
 \{^1_{33}\} &= -r
 \end{aligned}
 \tag{1.6.15}$$

Gamas (γ^A_{BC}) não nulos:

$$\begin{aligned}
 \gamma^0_{20} &= -\frac{r\Omega^2}{L^2} \\
 \gamma^0_{13} &= -\frac{\Omega}{L^2} \\
 \gamma^0_{31} &= \frac{\Omega}{L^2} \\
 \gamma^1_{30} &= -\frac{\Omega}{L^2} \\
 \gamma^1_{33} &= \frac{1}{rL^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.16}$$

O tensor de curvatura, obviamente tem todas as componentes nulas.

Para o referencial comoviente com o sistema de tetradas temos o seguinte campo de velocidades:

$$v^A = \delta_0^A \quad , \quad v^\alpha = e^\alpha_{(A)} \quad , \quad v^A = e^\alpha_{(0)} \quad (1.6.17)$$

Rotação:

$$\begin{aligned} \omega^A &= (0, 0, -\frac{\Omega}{L^2}, 0) \\ \omega^\alpha &= e^\alpha_{(A)} \omega^A = (0, 0, -\frac{\Omega}{L^2}, 0) \\ \omega &= \sqrt{-\eta_{AB} \omega^A \omega^B} = \frac{\Omega}{L} \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

Aceleração:

$$a^A = (0, \frac{r\Omega^2}{L^2}, 0, 0) \quad . \quad (1.6.19)$$

Calculando a derivada de Fermi, pela expressão (28), para as tetradas e usando (1.6.18c), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D_F e^\alpha_{(0)}}{Ds} &= (0, 0, 0, 0) \\ \frac{D_F e^\alpha_{(1)}}{Ds} &= \omega e^\alpha_{(3)} \\ \frac{D_F e^\alpha_{(2)}}{Ds} &= (0, 0, 0, 0) \\ \frac{D_F e^\alpha_{(3)}}{Ds} &= -\omega e^\alpha_{(1)} \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

Comparamos as expressões (1.6.20) com as expressões

(1.6.7) e vemos que elas são em tudo semelhantes. Vale observar que ω (expressão (1.6.18c)) coincide com Ω (definido na expressão (1.6.9)) a menos de um fator L^{-2} que certamente aparece porque ω foi calculado no referencial comóvel com o sistema de tetradas (eqs. (1.6.17)), enquanto que Ω é o módulo do vetor de rotação calculado no referencial $v^\alpha = \delta_0^\alpha$, ou seja, em um referencial cujo tempo próprio t' é tal que $dt' = \sqrt{g_{00}} dt = ds$, enquanto que o referencial $V^\alpha = e^\alpha_{(0)}$ tem o seu tempo próprio coincidente com a coordenada t . Realmente, se para $v^\alpha = \delta_0^\alpha$ calculamos $v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta = (1 - \Omega^2 r^2, 0, 0, -\Omega r^2)$ e usando a expressão (1.5.6), considerando que $\sqrt{-g} = r$, encontramos Ω coincidente com ω , evidenciando o sentido físico do objeto geométrico ω^β .

1.7 - O MODELO DE GÖDEL E A VIOLAÇÃO DE CAUSALIDADE

Para o sistema de coordenadas t, r, z, ϕ da expressão (1.2.3), a cada variação de 2π de ϕ , cada ponto da linha coordenada $t = \text{const.}, r = \text{const.}, z = \text{const.}$, volta a coincidir consigo mesmo, isto é, as curvas coordenadas ϕ são curvas fechadas (ver ítem 1.3). Mas, quando examinarmos o elemento de linha dessa curva coordenada vemos que ele muda de sinal para um determinado valor constante de $r = r_c$, denominado raio crítico que é tal que $\text{sh} r_c = 1$

$$ds^2 = \text{sh}^2 r (\text{sh}^2 r - 1) d\phi^2 \quad (1.7.1)$$

Assim sendo, as trajetórias para $r < r_c$ são do tipo

espaço, para $r = r_c$ são do tipo nulas e para $r > r_c$ são do tipo tempo.

No entanto, Chandrasekhar & Wright ⁽¹⁰⁾ mostraram que tais curvas fechadas do tipo tempo não são geodésicas, ou seja, partículas materiais sob a ação exclusiva do campo gravitacional, portanto não aceleradas, não podem seguir tais trajetórias, não no modelo de Gödel, mas Soares ⁽¹¹⁾ encontrou uma solução onde a fonte é um fluido perfeito sem pressão com campo eletromagnético que apresenta curvas fechadas do tipo tempo que são geodésicas. Rebouças, ref. (7), Cap. III, tece considerações interessantes sobre a violação na causalidade na Cosmologia, assunto a que dedica todo um capítulo.

Outro estudo interessante sobre as curvas fechadas do Universo de Gödel, desta vez uma representação gráfica, é feito por Hawking & Ellis, ref. (12), págs. 168-170, que dividem a variedade (M, g) em duas sub-variedades (M_1, g_1) e (M_2, g_2) tal que

$$ds_1^2 = dt^2 + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}^2 r dt d\phi - dr^2 + \operatorname{sh}^2 r (\operatorname{sh}^2 r - 1) d\phi^2 \quad , \quad (1.7.2a)$$

$$ds_2^2 = - dz^2 \quad , \quad (1.7.2b)$$

e

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \quad , \quad (1.7.2c)$$

ou seja, g é a soma direta $g_1 \oplus g_2$. Feito isso, representam graficamente o comportamento dos cones de luz, que para $r = 0$ tem como eixo o vetor $\partial/\partial t$ tangente à linha coordenada t , não incluindo em seu interior os vetores $\partial/\partial r$ e $\partial/\partial \phi$, mas à medida que se afasta da origem, os cones de luz se abrem e se in -

clinam na direção da linha coordenada ϕ tal que para $r = r_c = \ln(1 + \sqrt{2})$, correspondente a $\text{sh}^2 r_c = 1$, $\partial/\partial\phi$ é um vetor nulo e os círculos fechados com $r = r_c$ são do tipo nulo, e a partir daí, do tipo tempo.

Vale ainda citar que o estudo das geodésicas no modelo de Gödel foi minuciosamente analisado por Novello-Soares - -Tiomno ⁽¹³⁾ pelo método do potencial efetivo, dando uma clara imagem física da estrutura do movimento de partículas livres (massivas e sem massa) nesse Universo. Atualmente, vale citar que Calvão ⁽¹⁴⁾ generaliza o problema para soluções do tipo Gödel que englobam também soluções com campo eletromagnético ou campo escalar, soluções essas apresentadas no trabalho de Rebouças & Tiomno ⁽¹⁵⁾.

1.8 - ALGUNS OBJETOS GEOMÉTRICOS DO UNIVERSO DE GÖDEL

A partir das equações (1.2.4) a (1.2.6), tomando como 1-formas

$$\begin{aligned}\theta^0 &= dt + E(x)dy, \\ \theta^1 &= dx, \\ \theta^2 &= dz, \\ \theta^3 &= D(x)dy,\end{aligned}\tag{1.8.1}$$

calculamos (são citadas as componentes não nulas):

a) Os símbolos de Christoffel

$$\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 01 \end{smallmatrix} \} = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{E}{D}$$

$$\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 01 \end{smallmatrix} \} = - \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{1}{D}$$

$$\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 03 \end{smallmatrix} \} = \frac{k}{\sqrt{2}} D$$

(1.8.2)

$$\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 13 \end{smallmatrix} \} = \frac{nk}{\sqrt{2}} \frac{E}{D} - \frac{k}{\sqrt{2}} D$$

$$\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 13 \end{smallmatrix} \} = - \frac{nk}{\sqrt{2}} \frac{1}{D}$$

$$\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 33 \end{smallmatrix} \} = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{E-n}{D}$$

b) Os γ^A_{BC}

$$\gamma^0_{13} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma^0_{31} = - \frac{k}{\sqrt{2}}$$

(1.8.3)

$$\gamma^1_{30} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma^1_{33} = - \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{E-n}{D}$$

c) As componentes do tensor de curvatura em tetradas:

$$R_{0101} = \frac{k^2}{2}$$

$$R_{0303} = \frac{k^2}{2}$$

(1.8.4)

$$R_{1313} = \frac{k^2}{2}$$

Note que as curvaturas não dependem de nenhum dos pa

râmetros a, b, k, n que aparecem nas eqs. (1.2.6), k na realidade é apenas um fator de proporcionalidade que desaparece pelas simples mudanças de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = kx^\mu \quad . \quad (1.8.5)$$

Assim sendo, como todos os invariantes são construídos a partir fundamentalmente dos R^A_{BCD} e de η_{AB} , demonstra-se de outra maneira o Teorema de Bampi & Zordan (ítem 1.2), pois se os invariantes independem dos parâmetros a, b, n, k então para quaisquer valores deles se tem a mesma geometria.

d) Tensor de Ricci em tetradas:

$$R_{00} = - k^2 \quad (1.8.6)$$

e) Escalar de curvatura:

$$R = - k^2 \quad (1.8.7)$$

f) Tensor momento-energia em tetradas:

$$T_{00} = \frac{k^2}{2} - \Lambda \quad , \quad (1.8.8)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \frac{k^2}{2} + \Lambda \quad .$$

Considerando o campo de velocidades do conteúdo material como sendo

$$V^A = \delta^A_0 \quad (1.8.9)$$

encontramos que o conteúdo material é geodésico, não apresenta

deformação e como já sabíamos, é estacionário. No entanto, o tensor de rotação não é nulo (em tetradas)

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -\frac{k}{\sqrt{2}} , \quad (1.8.10)$$

sendo que as demais componentes são nulas. Daí, o vetor de rotação e seu módulo resultam em

$$\omega^A = (0, 0, \frac{k}{\sqrt{2}}, 0) , \quad \omega = \sqrt{-\eta_{AB} \omega^A \omega^B} = \frac{k}{\sqrt{2}} . \quad (1.8.11)$$

Decompondo convencionalmente o tensor momento-energia segundo o campo V^A encontramos a densidade de matéria valendo

$$\rho = \frac{k^2}{2} - \Lambda , \quad (1.8.12)$$

e a pressão

$$p = \frac{k^2}{2} + \Lambda . \quad (1.8.13)$$

Agora impondo a equação de estado $p = \lambda\rho$ e aplicando as condições de energia dominante (ver ref. (12), pág. 91) temos

$$-\rho \leq p \leq \rho ,$$

ou seja,

$$-\frac{k^2}{2} + \Lambda \leq \frac{k^2}{2} + \Lambda \leq \frac{k^2}{2} - \Lambda .$$

A primeira desigualdade é sempre satisfeita e a segunda implica em

$$\Lambda \leq 0 , \quad (1.8.14)$$

sendo que dependendo do valor de Λ será dado ao fluido cosmológico

gico uma natureza diferente. Assim, para $\Lambda = -k^2/2$ o fluido será matéria incoerente (poeira). Para $\Lambda = -k^2/4$ o fluido será interpretado como sendo radiação. Já para $\Lambda = 0$ o fluido será tomado como gás ultra-relativístico. Isto porque nos três casos anteriores, na equação $p = \lambda\rho$, teremos respectivamente λ valendo $0, \frac{1}{3}, 1$ o que pode ser diretamente verificado para Λ igual a $-k^2/2, -k^2/4, 0$, utilizando-se as equações (1.8.12) e (1.8.13).

CAPÍTULO 2

UNIVERSOS NÃO ESTACIONÁRIOS EM ROTAÇÃO

2.1 - A PROCURA DE UMA SOLUÇÃO

O objetivo inicial do trabalho seria generalizar a métrica de Gödel ⁽¹⁾ para uma forma não estacionária, que possibilitasse a existência de uma expansão não nula, ou seja, encontrar um modelo cosmológico que apresentasse simultaneamente rotação e expansão, em suma, que fosse um melhor candidato para representar o cosmos. Desejável seria que pudéssemos particularizar o modelo encontrado para reobter o modelo de Gödel como caso especial. Para tanto partimos de uma métrica tipo Gödel, mas só que aqui as funções teriam dependência na coordenada temporal, além da dependência em uma coordenada espacial, isto é

$$ds^2 = (dt + H(r,t)d\phi)^2 - dr^2 - dz^2 - (R(r,t)d\phi)^2 \quad . \quad (2.1.1)$$

A partir dessa expressão definimos as 1-formas θ^A

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + H d\phi \\ \theta^1 &= dr \\ \theta^2 &= dz \\ \theta^3 &= R d\phi \quad , \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

de onde podemos ler a base de tetradas e^A_α

$$[e^A_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

sendo A índice de linhas e α índice de colunas.

Das eqs. (2.1.2) explicitamos dx^α

$$\begin{aligned} dt &= \theta^0 - \frac{H}{R} \theta^3 \\ dr &= \theta^1 \\ dz &= \theta^2 \\ d\phi &= \frac{1}{R} \theta^3 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

de onde lemos diretamente a base de tetradas inversa e^α_A

$$[e^\alpha_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -H/R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

onde α é índice de linhas e A índice de colunas.

Diferenciando as 1-formas e utilizando as eqs. (2.1.4) obtemos ($\dot{} \equiv \partial/\partial t$ e $' \equiv \partial/\partial r$)

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \frac{\dot{H}}{R} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{H'}{R} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^1 &= 0 \\ d\theta^2 &= 0 \\ d\theta^3 &= \frac{\dot{R}}{R} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{R'}{R} \theta^1 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

de onde podemos ler diretamente os C^A_{BC} não nulos

$$\begin{aligned} C^0_{03} &= \frac{\dot{H}}{R} \\ C^0_{13} &= \frac{H'}{R} \\ C^3_{03} &= \frac{\dot{R}}{R} \\ C^3_{13} &= \frac{R'}{R} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

e então calculamos os γ^A_{BC} não nulos

$$\begin{aligned} \gamma^0_{13} &= \frac{H'}{2R} \\ \gamma^0_{30} &= -\frac{\dot{H}}{R} \\ \gamma^0_{31} &= -\frac{H'}{2R} \\ \gamma^0_{33} &= \frac{\dot{R}}{R} \\ \gamma^1_{30} &= \frac{H'}{2R} \\ \gamma^1_{33} &= -\frac{R'}{R} \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

que levam aos seguintes ω^A_B não nulos:

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{H'}{2R} \\ \omega^0_3 &= -\frac{\dot{H}}{R} \theta^0 - \frac{H'}{2R} \theta^1 + \frac{\dot{R}}{R} \theta^3 \\ \omega^1_3 &= \frac{H'}{2R} \theta^0 - \frac{R'}{R} \theta^3 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Tomando suas diferenciais encontramos

$$d\omega^0_1 = \frac{H''}{2R} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{H}'}{2R} \theta^0 \wedge \theta^3$$

$$\begin{aligned}
 d\omega^0_3 &= \left(\frac{\dot{H}'}{2R} - \frac{\dot{H}R'}{R^2} + \frac{H'\dot{R}}{2R^2} \right) \theta^0 \wedge \theta^1 + \\
 &\quad \left(-\frac{H\ddot{H}}{R^2} + \frac{H\dot{H}\dot{R}}{R^3} - \frac{\dot{H}^2}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R} \right) \theta^0 \wedge \theta^3 + \\
 &\quad \left(-\frac{\dot{H}H'}{R^2} - \frac{\dot{H}'H}{2R^2} + \frac{HH'\dot{R}}{2R^3} + \frac{\dot{R}'}{R} \right) \theta^1 \wedge \theta^3
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

$$\begin{aligned}
 d\omega^1_3 &= \left(-\frac{H''}{2R} + \frac{H'R'}{2R^2} \right) \theta^0 \wedge \theta^1 + \\
 &\quad \left(\frac{H\dot{H}'}{2R^2} - \frac{HH'\dot{R}}{2R^3} + \frac{\dot{H}H'}{2R^2} - \frac{\dot{R}'}{R} \right) \theta^0 \wedge \theta^3 + \\
 &\quad \left(\frac{H'^2}{2R^2} - \frac{R''}{R} \right) \theta^1 \wedge \theta^3 ,
 \end{aligned}$$

e usando a segunda equação de estrutura de Cartan encontramos as seguintes componentes não nulas do Tensor de Curvatura (R^A_{BCD}) :

$$\begin{aligned}
 R^0_{101} &= \frac{1}{4} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 \\
 R^0_{101} &= -\frac{\dot{H}'}{2R} - \frac{H'\dot{R}}{2R^2} + \frac{\dot{H}R'}{R^2} \\
 R^0_{113} &= -\frac{H''}{2R} + \frac{H'R'}{2R^2} \\
 R^0_{303} &= \frac{H\ddot{H}}{R^2} - \frac{H\dot{H}\dot{R}}{R^3} + \frac{\dot{H}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{H'^2}{4R^2} \\
 R^0_{313} &= \frac{\dot{H}H'}{R^2} + \frac{H\dot{H}'}{2R^2} - \frac{HH'\dot{R}}{2R^3} - \frac{\dot{R}'}{R} \\
 R^1_{313} &= -\frac{3H'^2}{4R^2} + \frac{R''}{R}
 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

que nos possibilitam calcular as componentes diferentes de zero do tensor de Ricci (R_{AB})

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\frac{1}{R} \left(H \frac{\dot{H}}{R} \right) \cdot + \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 \\
 R_{01} &= -\frac{\dot{H}}{R} \frac{H'}{R} - \frac{1}{2} \frac{H}{R} \left(\frac{H'}{R} \right) \cdot + \frac{\dot{R}'}{R} \\
 R_{03} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)' \\
 R_{11} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 + \frac{R''}{R} \\
 R_{13} &= -\left(\frac{\dot{H}}{R} \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right) \cdot \\
 R_{33} &= \frac{1}{R} \left(H \frac{\dot{H}}{R} \right) \cdot - \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 + \frac{R''}{R}
 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

e a partir daí, o escalar de curvatura resulta

$$R = -\frac{2}{R} \left(H \frac{\dot{H}}{R} \right) \cdot + 2 \frac{\ddot{R}}{R} - 2 \frac{R''}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 . \tag{2.1.13}$$

Os parâmetros cinemáticos são dados no item 2.4.

Substituindo o tensor de Ricci e o escalar de curvatura nas equações de Einstein obtemos as seguintes componentes para o tensor momento-energia, T_{AB} , na base de tetradas dada por (2.1.5):

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= -\frac{R''}{R} + \frac{3}{4} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 - \Lambda \\
 T_{01} &= \frac{\dot{H}}{R} \frac{H'}{R} + \frac{1}{2} \frac{H}{R} \left(\frac{H'}{R} \right) \cdot - \frac{\dot{R}'}{R} \\
 T_{03} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right)' \\
 T_{11} &= \frac{H}{R} \left(\frac{\dot{H}}{R} \right) \cdot + \left(\frac{\dot{H}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{4} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 + \Lambda \\
 T_{13} &= \left(\frac{\dot{H}}{R} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R} \right) \cdot \\
 T_{22} &= \frac{H}{R} \left(\frac{\dot{H}}{R} \right) \cdot + \left(\frac{\dot{H}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{R''}{R} - \frac{1}{4} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 + \Lambda \\
 T_{33} &= \frac{1}{4} \left(\frac{H'}{R} \right)^2 + \Lambda .
 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

O caminho que seguimos para chegar à solução mais geral que encontramos foi sinuoso e longo. De início encontramos uma solução bastante particular que fomos percebendo podia ser generalizada. A título de ilustração vamos tentar expor o que nos levou a esta primeira solução e posteriormente seguir um caminho mais objetivo e racional para chegarmos à solução mais geral que encontramos.

Desejávamos encontrar uma solução que satisfizesse aos nossos propósitos e que ao mesmo tempo tivesse uma fonte o mais simples possível, no caso, como a de Gödel, um fluido perfeito. De $T_{03} = 0$ temos que $(H'/R)' = 0$ mostrando que H' tem a mesma dependência funcional em r que R . $T_{13} = 0$, de certa forma nos leva a pensar que a dependência funcional de H e R em t deve ser parecida com a dependência funcional em r e como queríamos Gödel como caso particular não havia porque não tentar a solução

$$\begin{aligned} H(t,r) &= d \operatorname{sh}^2(ar+bt) + d' \operatorname{ch}^2(ar+bt) \\ R(t,r) &= e \operatorname{sh}(ar+bt) \operatorname{ch}(ar+bt) \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

com a, b, d, d' constantes. Disto segue que

$$\frac{H'}{R} = 2a \frac{d+d'}{e}$$

$$\frac{\dot{H}}{R} = 2b \frac{d+d'}{e}$$

$$\frac{R''}{R} = 4a^2$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = 4b^2$$

$$\frac{\dot{R}'}{R} = 4ab$$

De $T_{01} = 0$ nas eqs. (2.1.14), tiramos que $(d+d')^2 = e^2$ e ficamos com:

$$T_{00} = -a^2 - \Lambda$$

$$T_{11} = a^2 + \Lambda$$

$$T_{22} = 3a^2 + \Lambda$$

$$T_{33} = a^2 + \Lambda$$

e daí, se $v^A = \delta_0^A$, segue que

$$\rho = -a^2 - \Lambda$$

$$p = \frac{5}{3} a^2 + \Lambda$$

$$\Pi_{11} = -\frac{2}{3} a^2$$

$$\Pi_{22} = \frac{4}{3} a^2$$

$$\Pi_{33} = -\frac{2}{3} a^2 ,$$

que é uma solução fisicamente aceitável desde que, pelas condições de energia dominante (ver ref. (12), pág. 91)

$$\rho > 0$$

e

$$-\rho \leq p_\alpha \leq \rho$$

para $\Lambda \leq -2a^2$, mas não é um fluido perfeito, nem tampouco o Universo de Gödel, pois esse modelo apresenta o tensor de Weyl nulo enquanto que o de Gödel não. Consequentemente os invariantes construídos a partir deste tensor são diferentes para cada um dos dois casos.

2.2 - A INEXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO TIPO GÖDEL DEPENDENTE DO TEMPO COM O CONTEÚDO MATERIAL SENDO UM FLUIDO PERFEITO

A métrica tipo Gödel não estacionária dada por (2.1.1) leva às equações (2.1.14) para o tensor momento-energia. Nessas equações, impondo $T_{03} = 0$, temos

$$\frac{H'}{R} = A(t) \quad , \quad (2.2.1)$$

de onde segue que

$$H = A(t) \int R \, dr + N(t) \quad (2.2.2)$$

Por (2.2.1), $T_{13} = 0$ implica que

$$\left(\frac{\dot{H}}{R}\right)' = \frac{1}{2} \dot{A} \quad , \quad (2.2.3)$$

ou seja,

$$\frac{\dot{H}}{R} = \frac{1}{2} \dot{A} r + B(t) \quad (2.2.4)$$

Para termos um fluido perfeito temos ainda que impor $T_{11} = T_{22} = T_{33}$. De $T_{11} = T_{22}$ temos que

$$\frac{R''}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{H'}{R}\right)^2 \quad ,$$

que por (2.2.1) resulta em

$$R'' - \frac{1}{2} A^2 R = 0 \quad ,$$

equação esta que tem por solução geral

$$R(t,r) = C(t) e^{A(t)r/\sqrt{2}} + D(t) e^{-A(t)r/\sqrt{2}} \quad . \quad (2.2.5)$$

A eq. (2.2.2) nos leva a

$$H(t,r) = \sqrt{2} C(t) e^{A(t)r/\sqrt{2}} - \sqrt{2} D(t) e^{-A(t)r/\sqrt{2}} + N(t) \quad .$$

Derivando a equação anterior em relação a t e utilizando (2.2.4) e (2.2.5), podemos escrever

$$\frac{1}{2} \dot{A} C r e^{Ar/\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \dot{A} D r e^{-Ar/\sqrt{2}} + \dot{N} + (\sqrt{2} \dot{C} - BC) e^{Ar/\sqrt{2}} - (\sqrt{2} \dot{D} + BD) e^{-Ar/\sqrt{2}} = 0 \quad ,$$

de onde, pela independência linear das funções em r tiramos as condições

$$\dot{A} = 0 \implies A = \text{const.} = \sqrt{2} a \quad (2.2.6)$$

$$\dot{N} = 0 \implies N = \text{const.} = n \quad (2.2.7)$$

$$\sqrt{2} \dot{C} - BC = 0 \implies B = \sqrt{2} \frac{\dot{C}}{C} \quad (2.2.8)$$

$$\sqrt{2} \dot{D} + BD = 0 \implies B = -\sqrt{2} \frac{\dot{D}}{D} \quad (2.2.9)$$

Integrando as duas últimas equações obtemos

$$C(t) = e^{\int \frac{B}{\sqrt{2}} dt + \ell} \quad (2.2.10)$$

$$D(t) = e^{-\int \frac{B}{\sqrt{2}} dt - m} \quad (2.2.11)$$

onde m e ℓ são constantes de integração.

Derivando duas vezes obtemos

$$\ddot{C} = \left(\frac{B^2}{2} + \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}}\right) e^{\int \frac{B}{\sqrt{2}} dt + \ell} \quad (2.2.12)$$

$$\ddot{D} = \left(\frac{B^2}{2} - \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}}\right) e^{-\int \frac{B}{\sqrt{2}} dt - m} \quad (2.2.13)$$

Mas $H(t,r)$ e $R(t,r)$ devem ainda satisfazer $T_{11} = T_{33}$ o que leva à condição

$$\frac{H}{R} \left(\frac{\dot{H}}{R} \right)' + \left(\frac{\dot{H}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} = 0 \quad . \quad (2.2.14)$$

Utilizando (2.2.6) podemos reescrever (2.2.4) como

$$\frac{\dot{H}}{R} = B(t) \quad . \quad (2.2.15)$$

Utilizando (2.2.10), (2.2.11), (2.2.6) e (2.2.7) , $H(t,r)$ e $R(t,r)$ ficam

$$H(t,r) = \sqrt{2} e^{ar + \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt + \ell} - \sqrt{2} e^{-ar - \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt - m} + n \quad , \quad (2.2.16)$$

$$R(t,r) = e^{ar + \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt + \ell} + e^{-ar - \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt - m} \quad . \quad (2.2.17)$$

Agora multiplicando (2.2.14) por R , utilizando (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17) e a sua derivada segunda em relação a t obtemos

$$\left(\frac{B^2}{2} + \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}} \right) e^{ar + \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt + \ell} + \left(\frac{B^2}{2} - \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}} \right) e^{-ar - \int \frac{B}{\sqrt{2}} dt - m} + n\dot{B} = 0 \quad ,$$

que pela independência linear das funções em r implica em

$$\frac{B^2}{2} + \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}} = 0 \quad , \quad \frac{B^2}{2} - \frac{\dot{B}}{\sqrt{2}} = 0 \implies \dot{B} = B = 0 \quad ,$$

ou seja, as funções são independentes do tempo.

$$H(t,r) = H(r) = \sqrt{2} e^{ar + \ell} - \sqrt{2} e^{-ar - m} + n \quad (2.2.18)$$

$$R(t,r) = R(r) = e^{ar+l} + e^{-ar-m} \quad , \quad (2.2.19)$$

demonstrando assim a asserção título deste ítem, que pode ser tomada como o enunciado de um teorema, quando adotamos (2.4.1).

Passaremos então a procurar soluções que tenham $\Pi_{ii} \neq 0$. Mas antes vamos ver como fica o termo T_{01} para a solução dada por (2.2.16) e (2.2.17). Das eqs. (2.1.14) temos

$$T_{01} = \frac{\dot{H}}{R} \frac{H'}{R} + \frac{1}{2} \frac{H}{R} \left(\frac{H'}{R} \right)' - \frac{\dot{R}'}{R}$$

$$T_{01} = \sqrt{2} a B(t) - a \frac{B(t)}{\sqrt{2}} = Q(t) \quad (2.2.20)$$

que só será zero para a ou B igual a zero. Como queremos ambos diferentes de zero ao mesmo tempo, doravante procuraremos então soluções que tenham, além de pressões anisotrópicas ($\Pi_{ii} \neq 0$), também um fluxo de calor $q_1 \neq 0$.

2.3 - UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN DA GRAVITAÇÃO QUE GENERALIZA GÖDEL PARA UMA FORMA NÃO ESTACIONÁRIA

Vamos continuar assumindo $T_{03} = T_{13} = 0$, de tal forma que as eqs. (2.2.1) e (2.2.4) continuam válidas. Integrando (2.2.4) obtemos

$$H = \frac{r}{2} \int A(t) R dt + \int B(t) R dt + U(r) \quad . \quad (2.3.1)$$

Igualando (2.2.2) com (2.3.1) e derivando sucessivamente em relação a \underline{r} e a \underline{t} obtemos:

$$\frac{1}{2} \dot{A} R + A \dot{R} - \left(\frac{r}{2} \dot{A} + B\right) R' = 0 \quad . \quad (2.3.2)$$

Devido à discussão que segue à equação (2.2.20) vamos assumir $T_{01} = Q(t)$. Por T_{01} dado por (2.1.14) e mais as eqs. (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3) temos

$$\left(\frac{1}{2} \dot{A} r + B\right) A + \frac{1}{2} \dot{A} \frac{A}{R} \int R dr + \frac{1}{2} \dot{A} N - \frac{\dot{R}'}{R} = Q(t)$$

que multiplicada AR resulta em

$$\left(\frac{1}{2} \dot{A} r + B\right) A^2 R + \frac{1}{2} \dot{A} A^2 \int R dr + \frac{1}{2} \dot{A} A N R - A \dot{R}' = A R Q \quad . \quad (2.3.3)$$

Derivando (2.3.2) em relação a r e somando com (2.3.3) obtemos

$$\left(\frac{1}{2} \dot{A} r + B\right) (A^2 R - R'') + \frac{1}{2} \dot{A} A^2 \int R dr + \frac{1}{2} \dot{A} A N R = A Q R \quad , \quad (2.3.4)$$

que não sabemos integrar. Assumiremos então que $\dot{A} = 0 \implies A = \text{const.} = \tilde{a}$ e a equação anterior se reduz à

$$R''(t, r) - F^2(t) R(t, r) = 0 \quad , \quad (2.3.5)$$

onde

$$F^2(t) = \frac{\tilde{a}^2}{a^2} - \frac{\tilde{a}}{a} \frac{Q(t)}{B(t)} \quad . \quad (2.3.6)$$

Pelas expressões (2.2.1) e (2.4.12) vemos que quando fazemos $A(t) = \text{const.}$ a restrição que introduzimos é da rota - ção ser constante.

A solução geral de (2.3.5) é dada por

$$R(t, r) = M(t) e^{F(t)r} - L(t) e^{-F(t)r} \quad . \quad (2.3.7)$$

Considerando que $A = \tilde{a}$, de (2.2.2) temos

$$H(t,r) = \tilde{a} \frac{M(t)}{F(t)} e^{F(t)r} + \tilde{a} \frac{L(t)}{F(t)} e^{-F(t)r} + N(t). \quad (2.3.8)$$

Derivando a expressão anterior em relação a t e substituindo \dot{H} em (2.2.4) com $\dot{A} = 0$, pela independência linear das funções em r , chegamos a

$$\dot{N} = 0 \implies N = \text{const.} = n \quad (2.3.9)$$

$$M \frac{\dot{F}}{F} r = L \frac{\dot{F}}{F} r = 0 \implies \dot{F} = 0 \implies F = \text{const.} = a \quad (2.3.10)$$

$$BM = \tilde{a} \left(\frac{M}{F}\right)^{\cdot} = \frac{\tilde{a}}{a} \dot{M} \quad (2.3.11)$$

$$BL = -\tilde{a} \left(\frac{L}{F}\right)^{\cdot} = -\frac{\tilde{a}}{a} \dot{L} \quad (2.3.12)$$

Vamos chamar $\tilde{a}/a = \Omega$. Com isso, integrando (2.3.11) e (2.3.12) encontramos

$$M(t) = e^{\int \frac{B(t)}{\Omega} dt + \tilde{m}} \quad (2.3.13)$$

$$L(t) = e^{-\int \frac{B(t)}{\Omega} dt - \tilde{l}}, \quad (2.3.14)$$

sendo \tilde{l} e \tilde{m} constantes de integração que, chamamos a atenção, podem inclusive ter valores imaginários do tipo $u+vi$, com u real e $v = k\pi$ com k inteiro, de tal forma que $e^{\tilde{m}}$ e $e^{-\tilde{l}}$ possam assumir valores negativos, ou seja, valores de $-\infty$ a $+\infty$. Então, vamos redefinir

$$e^{\tilde{m}} = m, \quad m \text{ qualquer real}$$

$$e^{-\tilde{l}} = l, \quad l \text{ qualquer real},$$

e ficamos finalmente com a seguinte solução:

$$R(t,r) = m e^{\chi} - \ell e^{-\chi} \quad (2.3.15)$$

$$H(t,r) = \Omega m e^{\chi} + \Omega \ell e^{-\chi} + n \quad (2.3.16)$$

onde

$$\chi = \chi(t,r) = ar + D(t) = ar + \frac{1}{\Omega} \int B(t) dt \quad (2.3.17)$$

e a, m, ℓ, n, Ω são constantes reais quaisquer.

As equações (2.3.15) e (2.3.16) podem ainda ser re-escritas como

$$R(t,r) = (m+\ell) \operatorname{sh} \chi + (m-\ell) \operatorname{ch} \chi \quad (2.3.18)$$

$$H(t,r) = \Omega (m-\ell) \operatorname{sh} \chi + \Omega (m+\ell) \operatorname{ch} \chi + n \quad (2.3.19)$$

Vamos agora citar as seguintes relações que iremos usar nos itens que se seguem:

$$\frac{H'}{R} = a \Omega \quad (2.3.20)$$

$$\frac{\dot{H}}{R} = \Omega \dot{D} \quad (2.3.21)$$

$$\dot{R} = \dot{D} \frac{(H-n)}{\Omega} \quad (2.3.22)$$

$$\ddot{R} = \ddot{D} \frac{(H-n)}{\Omega} + \dot{D}^2 R \quad (2.3.23)$$

$$\frac{R''}{R} = a^2 \quad (2.3.24)$$

$$\frac{\dot{R}'}{R} = a \dot{D} \quad (2.3.25)$$

A seguir citaremos os símbolos de Christoffel não nulos da geometria (2.1.1):

$$\begin{aligned}
 \{ {}^0_{00} \} &= \frac{H}{R} \dot{\frac{H}{R}} \\
 \{ {}^0_{01} \} &= \frac{1}{2} \frac{H}{R} \dot{\frac{H}{R}} \\
 \{ {}^0_{03} \} &= \frac{1}{2} \frac{H(H^2 - R^2) \cdot}{R^2} \\
 \{ {}^0_{13} \} &= \frac{H'(H^2 + R^2) - H(R^2)'}{2R^2} \\
 \{ {}^0_{33} \} &= \frac{[(R^2 - H^2)] \cdot}{4R^2} \\
 \{ {}^1_{03} \} &= \frac{H'}{2} \\
 \{ {}^1_{33} \} &= \frac{(H^2 - R^2)'}{2} \\
 \{ {}^3_{00} \} &= -\frac{\dot{H}}{R^2} \\
 \{ {}^3_{01} \} &= -\frac{H'}{2R^2} \\
 \{ {}^3_{03} \} &= \frac{(R^2 - H^2) \cdot}{2R^2} \\
 \{ {}^3_{13} \} &= \frac{(2R^2 - H^2)'}{4R^2} \\
 \{ {}^3_{33} \} &= \frac{H(R^2 - H^2) \cdot}{2R^2}
 \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

2.4 - OS PARÂMETROS CINEMÁTICOS DA NOVA SOLUÇÃO

Vamos adotar como campo de velocidade do conteúdo material a tetrada e^α_0 , isto é, por (2.1.5)

$$\begin{aligned}
 V^\alpha &= e^\alpha_0 = \delta^\alpha_0 \\
 V^A &= e^A_\alpha e^\alpha_0 = \delta^A_0
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Com esse campo de velocidades, utilizando as expressões do Apêndice A, os γ_{BC}^A dados por (2.1.8) e as equações (2.3.20) a (2.3.25) calculamos os parâmetros cinemáticos do modelo:

a) Aceleração

$$a_A = (0, 0, 0, \frac{\dot{H}}{R}) = (0, 0, 0, \Omega \dot{D}) \quad (2.4.2)$$

$$a^\alpha = (\Omega \dot{D} \frac{H}{R}, 0, 0, -\Omega \frac{\dot{D}}{R}) \quad .$$

Vamos analisar o comportamento da aceleração no sistema de coordenadas (t, r, z, ϕ) . Pelas expressões (2.3.15) a (2.3.17) temos que

$$\lim_{ar \rightarrow +\infty} \Omega \dot{D} \frac{H}{R} = \Omega^2 \dot{D} \quad (2.4.3)$$

desde que quando $m = 0$ ou $\ell = 0$, tenhamos também $n = 0$.

$$\lim_{ar \rightarrow +\infty} -\Omega \frac{\dot{D}}{R} = 0 \quad , \quad (2.4.4)$$

se $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$.

$$\lim_{ar+D(t) \rightarrow 0} \Omega \dot{D} \frac{H}{R} = \begin{cases} \frac{\Omega(m+\ell)+n}{m-\ell} \Omega \dot{D} & \text{se } m \neq \ell \\ \infty & \text{se } n \neq -\Omega(m+\ell) \text{ e } m=\ell \end{cases} \quad (2.4.5)$$

$$\lim_{ar+D(t) \rightarrow 0} -\Omega \frac{\dot{D}}{R} = \begin{cases} \frac{\Omega D}{m-\ell} & \text{se } m \neq \ell \\ \infty & \text{se } m = \ell \text{ e } \dot{D} \neq 0 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

b) Expansão

$$\theta = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{D}}{\Omega} \frac{H-n}{R} \quad . \quad (2.4.7)$$

Pelas expressões (2.3.15) a (2.3.17) vemos que:

$$\lim_{ar \rightarrow \pm \infty} \frac{\dot{D}}{\Omega} \frac{H-n}{R} = \pm \dot{D} \quad (2.4.8)$$

e que

$$\lim_{ar+D(t) \rightarrow 0} \frac{\dot{D}}{\Omega} \frac{H-n}{R} = \begin{cases} \frac{(m+l)}{m-l} \dot{D} & \text{se } m \neq l \\ \infty & \text{se } m = l \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Vemos então que com relação às coordenadas espaciais a expansão só diverge quando $m = l$, no ponto $r = -D/a$.

c) Tensor de Deformação

$$[\sigma_{AB}] = \frac{\theta}{3} \text{diag}(0, 1, 1, -2) \quad (2.4.10)$$

d) Rotação

As componentes não nulas do tensor de rotação são, na base (2.1.5), dadas por

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -\frac{H'}{2R} = -\frac{a\Omega}{2}, \quad (2.4.11)$$

e o vetor de rotação é dado por

$$\omega^A = (0, 0, \frac{H'}{2R}, 0) = (0, 0, \frac{a\Omega}{2}, 0), \quad (2.4.12)$$

$$\omega^\alpha = (0, 0, \frac{a\Omega}{2}, 0),$$

ou seja, a rotação é constante, no sistema de tetradas e no sistema de coordenadas.

2.5 - A NATUREZA DA FONTE DA NOVA GEOMETRIA

Para a solução dada pelas eqs. (2.3.15) a (2.3.19) as componentes não nulas do tensor momento-energia, dados pelas eqs. (2.1.14), utilizando-se as eqs. (2.3.20) a (2.3.25), se reduzem a (em tetradas):

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) - \Lambda \\
 T_{01} &= a \dot{D} (\Omega^2 - 1) \\
 T_{11} &= (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \ddot{D} \frac{D}{R} + \frac{a^2 \Omega^2}{4} + \Lambda \\
 T_{22} &= (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \ddot{D} \frac{D}{R} + a^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{4} \right) + \Lambda \\
 T_{33} &= \frac{a^2 \Omega^2}{4} + \Lambda .
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Decompondo esse tensor segundo o referencial comóvel com o conteúdo material, dado pelo campo de velocidades (2.4.1), encontramos suas partes irredutíveis como sendo:

a) Densidade de Matéria

$$\rho = T_{00} = a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) - \Lambda \tag{2.5.2}$$

b) Pressão Isotrópica

$$p = \frac{2}{3} \left[(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \ddot{D} \frac{D}{R} \right] + \frac{a^2}{6} \left(2 + \frac{\Omega^2}{2} \right) + \Lambda \tag{2.5.3}$$

c) Pressões Anisotrópicas Não Nulas (em Tetradas)

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11} &= \frac{1}{3} \left[(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \ddot{D} \frac{D}{R} \right] + \frac{a^2}{6} (\Omega^2 - 2) \\
 \Pi_{22} &= \frac{1}{3} \left[(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \ddot{D} \frac{D}{R} \right] - \frac{2a^2}{6} (\Omega^2 - 2)
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

$$\Pi_{33} = -\frac{2}{3} [(\Omega^2-1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2\right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] + \frac{a^2}{6} (\Omega^2-2) \quad .$$

d) Fluxo de Energia Não Nulo (em Tetradas)

$$q_1 = a \dot{D} (\Omega^2-1) \quad . \quad (2.5.5)$$

Vemos então que a densidade de matéria é constante em todo o espaço-tempo, as pressões têm dependência temporal e espacial na coordenada r , enquanto que o fluxo de energia depende apenas da coordenada temporal através de \dot{D} .

Vamos agora, de posse do vetor de rotação eq.(2.4.12), construir a matriz Ω_{AB} dada por

$$\Omega_{AB} = \omega_A \omega_B - \frac{\omega^2}{3} h_{AB} \quad , \quad (2.5.6)$$

onde

$$\omega^2 = \omega_A \omega_B \eta^{AB} = -\frac{a^2 \Omega^2}{4} \quad . \quad (2.5.7)$$

Assim sendo,

$$\Omega_{AB} = \frac{a^2 \Omega^2}{12} \text{diag}(0, -1, 2, -1) \quad (2.5.8)$$

Examinando as expressões (2.5.4), (2.4.10) e (2.5.8) vemos que podemos expressar o tensor Π_{AB} por

$$\Pi_{AB} = \xi \sigma_{AB} + \zeta \Omega_{AB} \quad (2.5.9)$$

onde ξ e ζ são coeficientes viscosos dados por

$$\xi = \frac{1}{\theta} [(\Omega^2-1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2\right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] \quad (2.5.10)$$

e

$$\zeta = -2 \frac{(\Omega^2-2)}{\Omega^2} \quad . \quad (2.5.11)$$

Introduzamos o conceito de *fluidos Stokesianos* ⁽¹⁶⁻¹⁷⁾ como sendo aqueles onde, na sua forma mais simples, as pressões anisotrópicas estão relacionadas ao tensor de deformação por um coeficiente viscoso

$$\Pi_{AB} = \xi \sigma_{AB} \quad . \quad (2.5.12)$$

Então, pela eq. (2.5.9), o conteúdo material do nosso modelo é um fluido Stokesiano para $\Omega^2 = 2$, quando então $\zeta = 0$, e a eq. (2.5.9) se reduz à eq. (2.5.12).

Já quando ξ for nulo, o que ocorre quando $\dot{D} = 0$ (ver item 2.2 e eq. (2.3.17)), e $\Omega^2 \neq 2$, o comportamento do fluido cosmológico do modelo é o de um *fluido não Stokesiano puro* ⁽¹⁶⁾, ou seja, a resposta do fluido a uma deformação não depende do tensor de deformação, que no caso é nulo. As pressões anisotrópicas são então funções apenas do tensor Ω_{AB} , construído a partir do campo vetorial homogêneo ω^A , o que caracteriza uma situação onde uma rotação uniforme, como é a do caso em questão (ver eq. (2.4.12)), gera as pressões anisotrópicas.

No caso geral, quando $\dot{D} \neq 0$ e $\Omega^2 \neq 2$, isto é, quando $\xi \neq 0$ e $\zeta \neq 0$, o fluido tem, simultaneamente, os dois comportamentos, Stokesiano e não Stokesiano, e, dependendo dos valores particulares que dermos aos parâmetros e funções livres, teremos um ou outro comportamento sobressaindo-se...

Outrossim, vemos que teremos a fonte como sendo um fluido perfeito apenas para $D(t) = \text{const.}$ e $\Omega^2 = 2$, valores estes que nas eqs. (2.3.15) a (2.3.17) recuperam a solução de Gödel (ver item 2.7).

2.6 - A FONTE E AS CONDIÇÕES DE ENERGIA DOMINANTE

As condições de energia dominante (ver ref. (12), pág. 91), no caso mais geral, estabelecem que em qualquer base de tetradas ortonormal o termo de energia domina, prevalece, sobre as demais componentes do tensor momento-energia, isto é,

$$T_{00} \geq |T_{AB}| \quad \text{ou} \quad -T_{00} \leq T_{AB} \leq T_{00} \quad , \quad (2.6.1)$$

para cada A e B.

As componentes do tensor momento-energia da fonte do modelo cosmológico em questão dadas pela eq. (2.5.1) es - tão expressas na base de tetradas dada por (2.1.5), que é uma base ortonormal, logo podemos aplicar as condições (2.6.1) diretamente sobre (2.5.1):

a) Para $A = 0$ e $B = 0$ temos que

$$\rho = T_{00} \geq |T_{00}| \implies \rho = a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) - \Lambda > 0 \quad ,$$

o que é possível desde que

$$\Lambda < \frac{3a^2}{4} \left(\Omega^2 - \frac{4}{3} \right) \quad ; \quad (2.6.2)$$

b) Para $A = 0$ e $B = 1$ ficamos com

$$-\rho = -a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) + \Lambda \leq a \dot{D} (\Omega^2 - 1) \leq a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) - \Lambda = \rho \quad .$$

Vemos claramente que a condição acima limita a função $D(t)$ de tal forma que a mesma tenha um conjunto imagem tal que, para $-\infty < t < \infty$, tenhamos

$$\frac{-a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1\right) + \Lambda}{|a(\Omega^2 - 1)|} \leq \dot{D}(t) \leq \frac{a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1\right) - \Lambda}{|a(\Omega^2 - 1)|} \quad , \quad (2.6.3)$$

ou seja, $\dot{D}(t)$ não pode crescer ou decrescer indefinidamente para $|a(\Omega^2 - 1)| \neq 0$, mas pode variar livremente no caso em que $a(\Omega^2 - 1) = 0$;

c) Para $A = B = 1$ a eq. (2.6.1) resulta em

$$-\frac{3}{4} a^2 \Omega^2 + a^2 + \Lambda \leq (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} + \frac{a^2 \Omega^2}{4} + \Lambda \leq \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 - a^2 - \Lambda,$$

que pode ser reescrita como

$$-a^2 (\Omega^2 - 1) \leq (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} \leq \frac{a^2}{2} (\Omega^2 - 2) - 2\Lambda \quad ; \quad (2.6.4)$$

d) Para $A = B = 2$ temos que

$$-\frac{3}{4} a^2 \Omega^2 + a^2 + \Lambda \leq (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} + a^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{4} + \Lambda \leq \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 - a^2 - \Lambda \quad ,$$

que nos leva a

$$-\frac{a^2 \Omega^2}{2} \leq (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} \leq a^2 (\Omega^2 - 2) - 2\Lambda \quad ; \quad (2.6.5)$$

e) Para $A = B = 3$ a eq. (2.6.1) nos leva a

$$-\frac{3}{4} a^2 \Omega^2 + a^2 + \Lambda \leq \frac{a^2 \Omega^2}{4} + \Lambda \leq \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 - a^2 - \Lambda \quad , \quad (2.6.6)$$

onde a primeira desigualdade nos diz que

$$-a^2 (\Omega^2 - 1) \leq 0 \implies \Omega^2 \geq 1 \quad , \quad (2.6.7)$$

enquanto que a segunda desigualdade nos leva a

$$\Lambda \leq \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) \quad , \quad (2.6.8)$$

que é mais restritiva que (2.6.2).

As eqs. (2.6.2) a (2.6.8), consequências das condições de energia dominante, impõem restrições sobre a solução dada por (2.3.15) a (2.3.17).

Vale observar que a parte intermediária das equações (2.6.4) e (2.6.5) diverge para determinados valores particulares dos parâmetros m e ℓ quando $ar + D(t) \rightarrow 0$, como veremos no item 2.8 adiante. Lá veremos também que neste ponto teríamos uma singularidade, mas, pelos nossos critérios das condições de energia dominante, as eqs. (2.6.4) e (2.6.5) nos dizem que essa é uma solução não física.

2.7 - ANÁLISE DAS CURVATURAS - QUAIS PARÂMETROS DETERMINAM FAMÍLIAS DE SOLUÇÕES DIFERENTES ?

Para a solução dada por (2.3.15) a (2.3.17) as componentes não nulas do tensor de Riemann, eqs. (2.1.11), na base de tetradas (2.1.5), são

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{a^2 \Omega^2}{4} \\ R_{0303} &= (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} + \frac{a^2 \Omega^2}{4} \\ R_{0313} &= a \dot{D} (\Omega^2 - 1) \\ R_{1313} &= \frac{3a^2}{4} \left(\Omega^2 - \frac{4}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Em uma base ortonormal de tetradas os invariantes do

modelo são construídos a partir da curvatura, da métrica de Minkowski η_{AB} e do tensor de Levi-Civita η_{ABCD} . Ora, tanto η_{AB} quanto η_{ABCD} independem da solução e das coordenadas, logo, tudo o que for possível concluir, por exclusão, analisando-se as curvaturas será válido para os invariantes. Por exemplo, se as curvaturas independem de um dado parâmetro, certamente que os invariantes também não dependerão. Baseando-se nesse fato, prossigamos nossa análise.

O parâmetro a representa apenas um fator de escala que pode ser eliminado pela transformação de coordenadas (quando $a \neq 0$), que corresponde a uma mudança da base de 1-formas

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu = ax^\mu \\ \theta^A &\rightarrow \tilde{\theta}^A = a\theta^A \end{aligned} \quad (2.7.2a)$$

seguida da transformação de escala (*)

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = a^2 ds^2 \quad . \quad (2.7.2b)$$

A transformação de coordenadas leva os R_{ABCD} em

$$R_{ABCD} \rightarrow \tilde{R}_{ABCD} = a^{-4} R_{ABCD} \quad .$$

A transformação de escala leva os \tilde{R}_{ABCD} em

$$\tilde{R}_{ABCD} \rightarrow \bar{R}_{ABCD} = a^2 \tilde{R}_{ABCD} = a^{-2} R_{ABCD} \quad ,$$

ou seja, ficamos com

$$d\tilde{s}^2 = (d\tilde{t} + \tilde{H}(\tilde{t}, \tilde{r}) d\tilde{\phi})^2 - d\tilde{r}^2 - d\tilde{z}^2 - \tilde{R}(\tilde{t}, \tilde{r})^2 d\tilde{\phi}^2$$

(*) Consideramos como transformação de escala as transformações conformes onde o fator conforme é constante. Sobre as transformações conformes ver Capítulo 3.

e

$$\bar{R}_{0101} = \frac{\Omega^2}{4}$$

$$\bar{R}_{0303} = (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\overset{**}{\hat{D}}}{\Omega} \frac{\tilde{H}}{\tilde{R}} + \overset{*}{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\overset{**}{\hat{D}}}{\tilde{R}} + \frac{\Omega^2}{4}$$

$$\bar{R}_{0313} = \overset{*}{\hat{D}} (\Omega^2 - 1)$$

$$\bar{R}_{1313} = \frac{3}{4} \left(\Omega^2 - \frac{4}{3} \right)$$

onde

$$\overset{*}{\hat{D}} = \frac{\partial \overset{\sim}{\hat{D}}(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial D(t)}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial D(t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} = \frac{\dot{D}}{a}$$

Notemos que como as equações de Einstein não são invariantes sob transformações conformes, a transformação dada por (2.7.2b) implica que teremos que ter um novo tensor momento-energia dado por $\bar{T}_{AB} = a^{-4} T_{AB}$.

Para $\dot{D} = \text{const.} \implies \ddot{D} = 0$, vemos pelas eqs. (2.7.1), que os invariantes não dependem de m , ℓ , n , ou seja, para cada valor de m , ℓ , n teremos a mesma geometria em sistemas de coordenadas diferentes. Neste caso, quando $\ddot{D} = 0$, determinam soluções diferentes valores diferentes apenas dos parâmetros e $\dot{D} = \text{const.}$

Quando $\dot{D} = 0$ temos soluções estacionárias diferentes para cada valor de Ω , sendo que para $\Omega^2 = 2$ recuperamos a solução de Gödel na forma apresentada por Bampi & Zordan (ítems 1.2 e 1.8 com destaque para 1.8.c).

No caso geral, quando a função $D(t)$ é qualquer uma que satisfaça às condições de energia dominante, eqs. (2.6.3) a (2.6.5), para cada função $D(t)$ e para cada valor de m, ℓ, n, Ω , teremos soluções diferentes, uma vez que as curvaturas, e pelo menos um dos invariantes, o escalar de curvatura dependem explicitamente dessas grandezas (ver eq. (2.8.2)).

2.8 - UMA SOLUÇÃO QUE APRESENTA SINGULARIDADE ?

Substituindo-se as eqs. (2.3.20) a (2.3.25) na eq. (2.1.13) temos a expressão do escalar de curvatura para as soluções dadas por (2.3.15) a (2.3.17) escrita como

$$\mathbb{R} = -2 \left[(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} + (\Omega^2 - 4) \frac{a^2}{4} \right], \quad (2.8.1)$$

ou ainda,

$$\mathbb{R} = \frac{(\Omega^2 - 1) \ddot{D} (m e^{ar+D} + \ell e^{-ar-D}) + \Omega n \ddot{D}}{m e^{ar+D} - \ell e^{-ar-D}} + (\Omega^2 - 1) \dot{D}^2 + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 4). \quad (2.8.2)$$

Sabemos, pelas eqs. (2.6.3) a (2.6.5), que as funções \dot{D} e \ddot{D} devem ser limitadas para que as condições de energia dominante sejam satisfeitas. Por outro lado, se \dot{D} e \ddot{D} forem nulos o escalar de curvatura não divergirá. Então \dot{D} e \ddot{D} não nos causam preocupação. Analisaremos então, o comportamento de \mathbb{R} quando ar e/ou $D(t)$ assumirem valores muito grandes e quando $ar \rightarrow -D(t)$.

$$\lim_{ar+D(t) \rightarrow \pm\infty} \mathbb{R} = (\Omega^2 - 1) (\pm \ddot{D} + \dot{D}^2) + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 4) \quad (2.8.3)$$

$$\lim_{ar+\dot{D}(t) \rightarrow 0} \mathbb{R} = \begin{cases} = \frac{[(\Omega^2-1)(m+l)+\Omega n]\ddot{D}}{m-l} + (\Omega^2-1)\dot{D}^2 + \frac{a^2}{4}(\Omega^2-4) & , & (2.8.4) \\ \text{se } m \neq l \\ e \\ = \pm \infty & , & (2.8.5) \\ \text{se } [(\Omega^2-1)(m+l)+\Omega n]\ddot{D} \neq 0 \text{ e } m = l & , \text{ prevalecendo o si-} \\ \text{nal + ou - de acordo com o sinal de } [(\Omega^2-1)(m+l)+n]\ddot{D} \end{cases}$$

Como já observamos no último parágrafo do item 2.8 a situação correspondente à eq. (2.8.5) corresponde a uma situação não física, uma vez que o termo responsável pela divergência de \mathbb{R} no ponto $ar+\dot{D}(t) \rightarrow 0$ não deve sair dos limites finitos dados por (2.6.4) e (2.6.5).

2.9 - AS SOLUÇÕES CONFORMALMENTE PLANAS

Utilizando a definição do tensor de Weyl dada no Apêndice A e as equações (2.3.20) a (2.3.25) encontramos, na base de tetradas (2.1.5), que as componentes não nulas do tensor de Weyl são

$$\begin{aligned} W_{0101} = -W_{2323} &= -\frac{1}{6} [(\Omega^2-1)(\dot{D}^2 + \frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} - a^2) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] \\ W_{0212} = -W_{0313} &= -\frac{1}{2} a \dot{D}(\Omega^2-1) \\ W_{0303} = -W_{1212} &= \frac{1}{3} [(\Omega^2-1)(\dot{D}^2 + \frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \frac{a^2}{2}) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

Uma geometria é dita *conformalmente plana* quando pode ser obtida do espaço plano por uma *transformação con-*

forme ⁽¹⁸⁾ (ver também Capítulo 3, item 3.1 e 3.2 desta tese , com destaque para o último parágrafo do item 3.2). Isto quer dizer que por transformações de coordenadas podemos colocar a métrica em uma forma tal que é possível escrevê-la como

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A(x^\mu)^{-2} \tilde{\eta}_{\mu\nu} , \quad (2.9.2)$$

onde $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço plano de Minkowski e está relacionada com a métrica de Minkowski cartesiana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ por uma transformação de coordenadas.

A condição para que uma geometria seja conformalmente plana é que o tensor de Weyl seja nulo ⁽¹⁹⁾

$$W_{ABCD} = 0 . \quad (2.9.3)$$

Impondo essa condição às nossas soluções vamos encontrar as famílias de geometrias que são conformalmente planas . Examinando as eqs. (2.9.1) vemos que a condição (2.9.3) é satisfeita quando

$$\Omega^2 = 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \text{(i)} & n = 0 \\ \text{(ii)} & \ddot{D} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2.9.4)$$

Mas, observando as eqs. (2.7.1) vemos que em quaisquer das situações acima (i) ou (ii) as componentes do tensor de curvatura e conseqüentemente os invariantes (ver item 2.7) são os mesmos. Logo, temos a liberdade de escolha de colocar \ddot{D} ou n ou ambos iguais a zero. Ainda pelo item 2.7, sabemos que quando vale as eqs. (2.9.4) as eqs. (2.3.15) a (2.3.17) apresentam uma mesma solução para quaisquer valores de a, m, ℓ, n . Na realidade temos uma única solução conformalmente plana que pode ser escrita de infinitas maneiras. Vamos citá-la ex -

plicitamente na forma que, como mostraremos no ítem 2.10, corresponde ao "sistema de coordenadas cilíndricas" usado por Gödel. Fazemos nas eqs. (2.3.17) a (2.3.19)

$$\frac{\dot{a}}{a} = 8m = 8\ell = -4n = 2\Omega = \frac{\dot{D}}{b} = 2 \quad (2.9.5)$$

para obter

$$D(t) = 2bt \quad (2.9.6)$$

$$R(t,r) = \text{sh}(\tilde{a}r+bt) \text{ ch}(\tilde{a}r+bt) \quad (2.9.7)$$

$$H(t,r) = \text{sh}^2(\tilde{a}r+bt) \quad (2.9.8)$$

Lembramos que por (2.9.4.ii) $\ddot{D} = 0$ implica que $\dot{D} = \text{const.}$ que por conveniência tomamos igual a $2b$.

Mas esse sistema de coordenadas não é bom, já que ele apresenta uma singularidade aparente no ponto $\tilde{a}r+bt \rightarrow 0$ pois nesse ponto a expansão diverge nos sistemas de coordenadas dados por $m = \ell$ (ver eq. (2.4.9b)).

Em um gráfico m contra ℓ , os sistemas de coordenadas que apresentam singularidade aparente, $m = \ell$, são representados pela reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Podemos dizer que os sistemas de coordenadas o máximo afastados destes são aqueles em que $m = -\ell$, que no gráfico m contra ℓ é a reta bissetriz dos quadrantes pares. Neste sistema de coordenadas, isto é, fazendo nas eqs. (2.3.17) a (2.3.19)

$$m = -\ell \quad \text{e} \quad n = 0 \quad (2.9.9)$$

ficamos com (considerando o observador tal que este sistema de coordenadas seja comóvel com ele)

$$R(t,r) = 2m \text{ ch} [ar + D(t)] \quad (2.9.10)$$

$$H(t,r) = 2\Omega m \text{ sh}[ar+D(t)] \quad (2.9.11)$$

e a expansão fica

$$\theta = \frac{\dot{R}}{R} = \dot{D}(t) \frac{\text{sh}[ar+D(t)]}{\text{ch}[ar+D(t)]} \quad , \quad (2.9.12)$$

cujo comportamento é mostrado na Fig. 2.9.1.

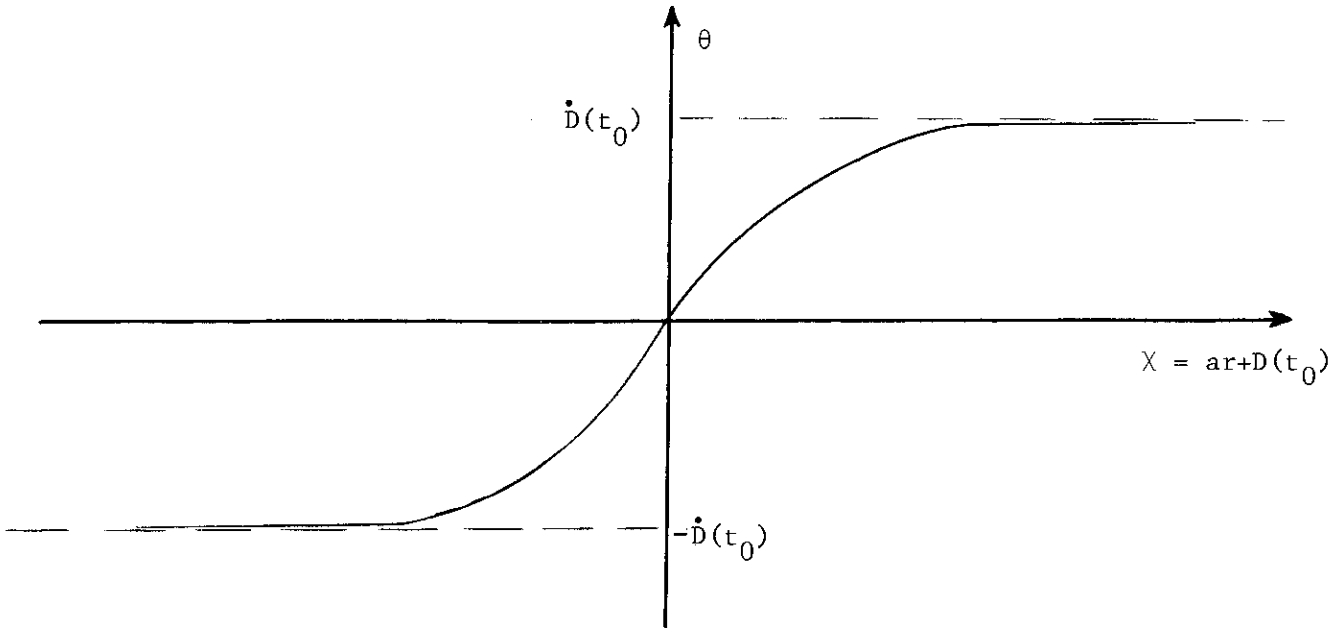


Figura 2.9.1 - O comportamento da expansão para a solução conformalmente plana. Como neste sistema de coordenadas $n = 0$, $D(t)$ pode ser qualquer função que satisfaça (2.6.3) a (2.6.5).

2.10 - SOLUÇÕES QUE NÃO APRESENTAM VIOLAÇÃO DA CAUSALIDADE DO TIPO QUE OCORRE EM GÖDEL

Vamos fazer esta análise procedendo da mesma forma que no item 1.7. Para tanto temos que estar em um sistema cilíndrico de coordenadas. Ora, sabemos que o elemento de linha do tri-espaco plano no sistema cilíndrico de coordenadas é dado por

$$-ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2 \quad , \quad (2.10.1)$$

onde r, z, ϕ , são respectivamente as coordenadas radial, azimutal, angular.

Na nossa métrica dada por (2.1.1) e (2.3.15) a (2.3.17), vamos considerar t constante. Ficamos então com o elemento de linha representado por:

$$-ds^2 = dr^2 + dz^2 - (H^2 - R^2) d\phi^2, \quad (2.10.2)$$

com

$$H^2 - R^2 = (\Omega^2 - 1) (m^2 e^{2\chi} + \ell^2 e^{-2\chi}) + n^2 + 2m\ell (\Omega^2 + 1) + 2n\Omega m e^\chi + 2n\Omega \ell e^{-\chi}. \quad (2.10.3)$$

Vamos agora, da mesma forma que no ítem 1.3, expandir $H^2 - R^2$ em torno do ponto $\chi = 0$, mantendo até a ordem 2 em χ :

$$\begin{aligned} H^2 - R^2 &= (\Omega^2 - 1) (m^2 + \ell^2) + n^2 + 2m\ell (\Omega^2 + 1) + 2n\Omega (m + \ell) + \\ &+ 2 [(\Omega^2 - 1) (m^2 - \ell^2) + n\Omega (m - \ell)] \chi + \\ &+ [2 (\Omega^2 - 1) (m^2 + \ell^2) + n\Omega (m + \ell)] \chi^2. \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Desejamos que ao substituirmos (2.10.4) em (2.10.2) tenhamos uma expressão da forma de (2.10.1). Para que isso aconteça, os coeficientes dos termos de grau zero e um em χ , na eq. (2.10.4), precisam ser nulos, ou seja,

$$(\Omega^2 - 1) (m^2 + \ell^2) + n^2 + 2m\ell (\Omega^2 + 1) + 2n\Omega (m + \ell) = 0$$

e

$$2 [(\Omega^2 - 1) (m^2 - \ell^2) + n\Omega (m - \ell)] = 0.$$

Vemos que esta última equação é satisfeita para $m = \ell$.

Substituindo isto na anterior ficamos com

$$4\Omega^2 m^2 + 4\Omega n m + n^2 = 0 ,$$

que se anula para $n = -2\Omega m$. Então temos que quando

$$m = \ell = - \frac{n}{2\Omega} \quad (2.10.5)$$

podemos reescrever (2.10.4) como

$$H^2 - R^2 = -4m^2 \chi^2 , \quad (2.10.6)$$

que em (2.10.2) resulta em

$$-ds^2 = d\tilde{r}^2 + dz^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2 , \quad (2.10.7)$$

onde fizemos a seguinte transformação de coordenadas:

$$r \rightarrow \tilde{r} = \frac{\chi}{a} = r + \frac{D(t)}{a} , \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} = 2a m \phi. \quad (2.10.8)$$

Comparando (2.10.7) com (2.10.1) vemos que fica demonstrado que quando vale (2.10.5) a geometria está expressa em um "sistema de coordenadas cilíndricas" que tem como "coordenada axial" a coordenada z , como "coordenada radial" $\tilde{r} = \chi/a = r + \frac{D(t)}{a}$, definido para cada valor de r e t , e como "coordenada angular" $\tilde{\phi} = 2am\phi$.

Para melhor caracterizar essa "simetria cilíndrica", vamos passar a escrever R e H na forma dada por (2.3.18) e (2.3.19), que de acordo com (2.10.5) e (2.10.8) resultam em

$$R(t,r) = 4m \operatorname{sh} \frac{\tilde{a}r}{2} \operatorname{ch} \frac{\tilde{a}r}{2} \quad (2.10.9)$$

$$H(t,r) = 4 \Omega m \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}r}{2} \quad (2.10.10)$$

e o elemento de linha (2.1.1) fica

$$ds^2 = dt^2 + \frac{4\Omega}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}}{2} dt d\tilde{\phi} - dr^2 - dz^2 - \frac{4}{a^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}}{2} [1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}}{2}] d\tilde{\phi}^2 \quad (2.10.11)$$

onde lembramos que por (2.10.8)

$$r = \tilde{r} - \frac{D(t)}{a} \implies dr = d\tilde{r} - \frac{\dot{D}(t)}{a} dt \quad .$$

Expandindo (2.10.11) para valores pequenos de \tilde{r} ficamos com

$$ds^2 = dt^2 + a\Omega \tilde{r}^2 dt d\tilde{\phi} - dr^2 - dz^2 - \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2 \quad , (2.10.12)$$

e, como podemos ver, tem certa semelhança com (1.3.2). Para $t = \text{const.}$ reobtemos, como era de se esperar, (2.10.7).

Assim sendo, quando na eq. (2.10.11) fizermos t, r, z constantes e variarmos a "coordenada angular" $\tilde{\phi}$ de um valor igual a 2π vamos ter círculos fechados com raio $= \tilde{r}$ em torno da linha coordenada z . Nesta situação o elemento de linha se escreve como

$$ds^2 = - \frac{4}{a^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}}{2} [1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}}{2}] d\tilde{\phi}^2 \quad . \quad (2.10.13)$$

As trajetórias dadas pelo elemento de linha anterior serão do tipo nulo quando $\tilde{r} = \tilde{r}_c$ tal que

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\tilde{a}\tilde{r}_c}{2} = \frac{1}{(\Omega^2 - 1)} \quad . \quad (2.10.14)$$

Serão do tipo espaço para $\tilde{r} < \tilde{r}_c$ e do tipo tempo para $\tilde{r} > \tilde{r}_c$.

Pelas condições de energia dominante, eq. (2.6.7), temos que $\Omega^2 \geq 1$, e vemos, pela eq. (2.10.14), que o raio

crítico vai para infinito quando Ω^2 tende para o valor 1, e se torna totalmente causal quando $\Omega^2 = 1$, ou seja, as trajetórias dadas por (2.10.13) serão sempre do tipo espaço quando $\Omega^2 = 1$.

Temos então que:

i) Todas as soluções dadas por $\Omega^2 > 1$ apresentam violação da causalidade do tipo análoga à que ocorre em Gödel (ver item 1.7) na região externa a \tilde{r}_c dado por (2.10.14). Gödel é o caso particular para $\Omega^2 = 2$, $\dot{D} = 0$ e $a = 2$.

ii) A solução dada por $\Omega^2 = 1$ é totalmente causal em relação ao tipo de violação da causalidade que ocorre em Gödel. O elemento de linha dessa solução é dado por

$$ds^2 = dt^2 \pm \frac{4}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{a\tilde{r}}{2} dt d\tilde{\phi} - dr^2 - dz^2 - \frac{4}{a^2} \operatorname{sh}^2 \frac{a\tilde{r}}{2} d\tilde{\phi}^2 \quad (2.10.15)$$

e quando $\ddot{D} = 0$, temos a solução que é conformalmente plana (ver item 2.9, onde, em um outro sistema de coordenadas, estudamos inclusive o comportamento da expansão para esse modelo).

Quando tomamos $\dot{D} = 0$, temos o caso estacionário, que foi apresentado por Rebouças-Tiomno ⁽¹⁵⁾ com uma fonte diferente. A respeito deste assunto falaremos no item 2.14.

Como complemento falta ainda citar que no "sistema de coordenadas cilíndricas" dado pela eq. (2.10.11), as "coordenadas cilíndricas" $t, \tilde{r}, z, \tilde{\phi}$, têm o domínio de variação das coordenadas cilíndricas usuais, conforme eqs. (1.3.3), o que implica que se as coordenadas t, r, z, ϕ variarem entre

$$\begin{aligned} -\infty < t < \infty & \quad ; \quad -\frac{D(t)}{a} \leq r < \infty & \quad ; \\ -\infty < z < \infty & \quad ; \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{am} & \quad . \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

todos os pontos do espaço-tempo estarão cobertos.

Resta ainda observar que para um dado valor de $D(t_0)$, ao variarmos r , teremos um r_c tal que $r_c + \frac{D(t_0)}{a} = \tilde{r}_c$ e que para um dado valor fixo de $r = r_0$, ao variarmos t , teremos um t_c tal que $r_0 + \frac{D(t_c)}{a} = \tilde{r}_c$. Disso podemos concluir que esse modelo de universo tem uma fase em que dependendo do valor de r ele pode ser causal ou não, e fora dessa fase, quando $\frac{D(t_c)}{a} > \tilde{r}_c$ ele será acausal, independentemente do valor de r .

2.11 - QUE RESTRIÇÕES UMA EQUAÇÃO DE ESTADO PARA UM FLUIDO PERFEITO IMPORIA AO MODELO ?

Vamos impor aos modelos dados por (2.3.15) a (2.3.17) e (2.4.1) a equação de estado própria de um fluido perfeito

$$p = \lambda \rho \quad . \quad (2.11.1)$$

Por (2.5.2) e (2.5.3) temos

$$2(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{2n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} + \frac{a^2}{2} \left(2 + \frac{\Omega^2}{2} \right) + 3\Lambda = 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) - 3\lambda \Lambda \quad ,$$

que se multiplicarmos por R e substituirmos H e R dado por (2.3.15) e (2.3.16) resulta em

$$m \left[(\Omega^2 - 1) (\ddot{D} + \dot{D}^2) + a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4} \right) + 3\Lambda (1 + \lambda) - 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) \right] e^{\chi} +$$

$$l \left[(\Omega^2 - 1) (\ddot{D} - \dot{D}^2) - a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4} \right) - 3\Lambda (1 + \lambda) + 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4} \Omega^2 - 1 \right) \right] e^{-\chi} +$$

$$4n\Omega\ddot{D} = 0 \quad ,$$

que pela independência linear das exponenciais e^{χ} , $e^{-\chi}$, e^0 im-

plica em:

$$a) \quad 4 n \Omega \ddot{D} = 0 \implies \begin{cases} (i) & n = 0 \\ \text{ou} & \\ (ii) & \ddot{D} = 0 \end{cases}, \quad (2.11.2)$$

já que por (2.6.7), Ω não pode ser nulo;

$$b) \quad 2(\Omega^2 - 1)(\ddot{D} + \dot{D}^2) + a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) + 3\Lambda(1 + \lambda) - 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4}\Omega^2 - 1\right) = 0 \quad (2.11.3)$$

$$c) \quad 2(\Omega^2 - 1)(\ddot{D} - \dot{D}^2) - a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) - 3\Lambda(1 + \lambda) + 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4}\Omega^2 - 1\right) = 0 \quad (2.11.4)$$

Mas, pelo ítem 2.7, sabemos que as condições (2.11.2i) e (2.11.2ii) correspondem à mesma geometria (ver comentário abaixo da eq. (2.9.4)). Apenas por curiosidade, vamos investigar essas duas condições equivalentes.

(I) Se valer (2.11.2i), somando (2.11.3) com (2.11.4) obtemos

$$(\Omega^2 - 1)\ddot{D} = 0 \implies \begin{cases} (i) & \Omega^2 = 1 \\ (ii) & \ddot{D} = 0 \end{cases}. \quad (2.11.5)$$

A condição (2.11.5ii) é a mesma que (2.11.2ii), e a condição (2.11.5i) mais uma vez mostra a solução $n = 0$ (equivalente a $\ddot{D} = 0$) e $\Omega^2 = 1$ como privilegiada, uma vez que ela é a única conformalmente plana (ítem 2.9) e também a única totalmente causal no sentido do ítem 2.10, e aqui aparece como a única que pode ser escrita no sistema de coordenadas em que $n = 0$ sem termos que impor restrições sobre $D(t)$, além daquelas impostas pelas condições de energia dominante (ítem 2.6).

(II) Resta a condição (2.11.2ii), que engloba a

(2.11.2i), como representativa das restrições impostas por (2.11.1).

Se $\ddot{D} = 0$ e colocando

$$\dot{D} = 2b \implies D(t) = 2bt \quad , \quad (2.11.6)$$

onde colocamos a segunda constante de integração igual a zero, as eqs. (2.11.3) e (2.11.4) se reduzem à

$$8(\Omega^2 - 1)b^2 + a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) + 3\Lambda(1 + \lambda) - 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4}\Omega^2 - 1\right) = 0 \quad ,$$

de onde podemos isolar o valor de λ em função dos parâmetros da geometria e da constante cosmológica como sendo

$$\lambda = \frac{8(\Omega^2 - 1)b^2 + a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) + 3\Lambda}{3a^2 \left(\frac{3}{4}\Omega^2 - 1\right) - 3\Lambda} \quad , \quad (2.11.7)$$

ou explicitar Λ em função de λ e dos demais parâmetros

$$\Lambda = \frac{-8(\Omega^2 - 1)b^2 - a^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) + 3\lambda a^2 \left(\frac{3}{4}\Omega^2 - 1\right)}{3(1 + \lambda)} \quad (2.11.8)$$

e, utilizando (2.5.2) e (2.5.3), escrever ρ e p como função de λ

$$\rho = \frac{2a^2(5\Omega^2 - 4) + 32(\Omega^2 - 1)b^2}{12(1 + \lambda)} \quad (2.11.9)$$

$$p = \lambda \frac{2a^2(5\Omega^2 - 4) + 32(\Omega^2 - 1)b^2}{12(1 + \lambda)} \quad (2.11.10)$$

Como por (2.6.7) $\Omega^2 \geq 1$, por (2.11.9) vemos que $\rho = T_{00}$ é positivo para qualquer valor de $\lambda > -1$. Agora, considerando a restrição imposta por (2.11.2ii) a aceleração, eq. (2.4.2), e a rotação, eq. (2.4.12), se escrevem como

$$a^A = (0, 0, 0, -2b\Omega) \quad (2.11.11)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{a\Omega}{2}, 0) \quad (2.11.12)$$

e vemos, por (2.11.7), que o valor de λ fica caracterizado pelos valores desses parâmetros cinemáticos e pelo valor da constante cosmológica. Como λ pode assumir qualquer valor maior que -1 , os três valores clássicos, 0 , correspondendo à poeira, $1/3$, correspondendo à radiação, e 1 correspondendo a gás ultra-relativístico, são possíveis.

2.12 - ANÁLISE DA VARIACÃO DA DENSIDADE DE ENTROPIA

A segunda lei da termodinâmica, que dá origem à propriedade de estado chamada *entropia*, estabelece que para qualquer sistema isolado como um todo essa grandeza cresce ou é estacionária, ou seja, a entropia pode ser gerada mas não pode ser destruída. No nosso caso o nosso sistema como um todo é o Universo. Então para aplicarmos fielmente a 2ª lei da Termodinâmica deveríamos garantir que no Universo como um todo a entropia cresce ou é estacionária. No entanto, em geral, o que se faz é assumir que o fluxo de entropia entre elementos de fluidos vizinhos é nulo, isto é, não existe fluxo de entropia através das faces de um elemento de fluido, ou se caso existir, considera-se que ele é tão pouco intenso de tal forma que não seja significativo. Então, em geral, a aplicação do segundo princípio da Termodinâmica que se faz aos modelos cosmológicos é considerar que a variação da densidade de entropia seja positiva, isto é,

$$\dot{S} = \frac{DS}{Ds} = S_{||\mu} V^\mu \geq 0 \quad . \quad (2.12.1)$$

Garantindo-se que a variação da entropia seja não negativa em cada elemento de volume, automaticamente está garantida que ela será maior ou igual a zero em todo o Universo. Para os modelos que têm como fonte fluidos homogêneos esta imposição de $\dot{S} \geq 0$ não traz maiores restrições que o segundo princípio em si, mas no caso geral ela é uma restrição bem mais forte que o segundo princípio.

No caso dos modelos em que o fluido cosmológico apresenta rotação, não podemos separar globalmente o espaço-tempo em um tempo cósmico mais um tri-espaço. Então não podemos falar na variação de uma entropia global em relação a um tempo cósmico. Não nos resta outra alternativa que não analisar a variação da entropia parcialmente, no máximo na extensão em que pudermos estabelecer a separação espaço-temporal para podermos comparar a entropia de uma dada folha tri-espacial com a imediatamente vizinha separada da primeira por um infinitésimo da coordenada temporal. Neste nosso trabalho não encontramos a transformação para um referencial no qual fosse possível fazer tal separação. Então analisaremos a variação da densidade de entropia \dot{S} .

A equação que relaciona a variação da densidade de entropia S em relação ao tempo próprio do referencial com o conteúdo material com as quantidades responsáveis pelo afastamento da situação ideal de fluido perfeito, é dada por (ver ref. (27), págs. 20 a 22 e ref. (5), págs. 115 a 118)

$$\mu T \dot{S} = -\rho_{||\mu} V^\mu - \theta(\rho+p) =$$

$$= -\Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + q_{\parallel\nu}^{\nu} - a^{\mu} q_{\mu} \quad , \quad (2.12.2)$$

onde

μ é a densidade de massa de repouso medida pelo observador comoviente com o fluido,

T é a temperatura absoluta, e

\dot{S} está definido em (2.12.1).

Por (2.4.10) e (2.5.4) temos

$$\Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = \Pi^{AB} \sigma_{AB} = \frac{2\theta}{3} [(\Omega^2-1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] = \frac{\theta a^2}{6} (\Omega^2-2) \quad . \quad (2.12.3)$$

Por (2.5.5), (2.1.5), (2.3.26), (2.3.27) e (2.4.7), temos,

$$q_{\parallel\mu}^{\mu} = - a \dot{D} (\Omega^2-1) \frac{R'}{R} = -a^2 \theta (\Omega^2-1) \quad . \quad (2.12.4)$$

Por (2.4.2b) e (2.5.5), obtemos,

$$a^{\mu} q_{\mu} = 0 \quad . \quad (2.12.5)$$

Substituindo (2.12.3) a (2.12.5) em (2.12.2), obtemos,

$$\mu T \dot{S} = - \frac{2}{3} \theta [(\Omega^2-1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}] = \frac{\theta a^2}{6} (5\Omega^2-4) \quad . \quad (2.12.6)$$

Por (2.4.1) e (2.5.2) vemos que

$$\rho_{\parallel\mu}^{\mu} V^{\mu} = 0 \quad . \quad (2.12.7)$$

Considerando (2.12.2) e (2.12.7), podemos escrever

$$\mu T \dot{S} = -\theta (\rho+p) \quad . \quad (2.12.8)$$

Por (2.5.2) e (2.5.3) vemos que (2.12.8) é idêntica à (2.12.6) como deveria ser.

Em geral, $(\rho+p)$ é maior que zero. Isto quer dizer que para termos $\dot{S} > 0$, θ deve ser menor que zero, uma vez que μ e T são positivos definidos. Por (2.12.6) vemos que se $\ddot{D} = 0$, para termos $\dot{S} > 0$, θ tem realmente que ser menor que zero, uma vez que por (2.6.7) Ω^2 tem que ser maior ou igual a 1.

Aceitando as restrições impostas pela eq. (2.12.2) concluimos então que para os modelos onde $\ddot{D} = 0$ temos que ter

$$\theta < 0, \quad (2.12.9)$$

e que para os modelos em que $\ddot{D} \neq 0$ devemos também acatar a desigualdade (2.12.9) se, por (2.12.8) assumimos que $(\rho+p) > 0$ é uma restrição razoável para o fluido cosmológico (ver ref. (5), pág. 117). Nossos modelos representariam então Universos em rotação e em contração.

2.13 - CASOS PARTICULARES DE INTERESSE

a) O Modelo de Gödel

No comentário que se segue à eq. (2.5.12) vimos que quando $\Omega^2 = 2$ o conteúdo material tem o comportamento de um fluido Stokesiano. Ora, esses valores de omega, $\Omega = \pm\sqrt{2}$, correspondem à solução de Gödel, o que pode ser visto facilmente, pois quando tomamos o caso estacionário, ou seja, quando $\dot{D} = 0$

nas eqs. (2.3.15) a (2.3.17) e em (2.7.1), estas se reduzem , a menos da notação, às eqs. (1.2.6) e (1.8.4). Isto nos leva a concluir que quando $\Omega^2 = 2$ temos a generalização não estacionária do Universo de Gödel, e como podemos ver, pelos comentários seguintes à eq. (2.5.12), o fluido cosmológico deste Universo é do tipo Stokesiano.

b) O Modelo Totalmente Causal com Caso Particular Conformalmente Plano

Pelo ítem 2.10, vimos que quando $\Omega^2 = 1$ temos uma solução totalmente causal, que também é conformalmente plana quando $\ddot{D} = 0$ (ver ítem 2.9).

c) Um Caso Particular Isento de Rotação

Pelas eqs. (2.4.12) vemos que a rotação será nula quando $a = 0$, uma vez que por (2.6.7) Ω não pode ser zero. Neste caso o modelo resultante terá dependência apenas na coordenada temporal e as funções H e R , eqs. (2.3.18) e (2.3.19), se reduzem à

$$R(t) = (m+l) \operatorname{sh} D(t) + (m-l) \operatorname{ch} D(t) \quad (2.13.1)$$

$$H(t) = \Omega(m-l) \operatorname{sh} D(t) + \Omega(m+l) \operatorname{ch} D(t) + n, \quad (2.13.2)$$

e a única componente não nula do tensor de curvatura, eqs. (2.7.1), é dada por

$$R_{0303} = (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R}. \quad (2.13.3)$$

Esta solução é fisicamente possível desde que, pelas condições de energia dominante, a eq. (2.6.2) implica que

$\Lambda < 0$, (2.6.4) e (2.6.5) implicam que

$$0 \leq (\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} \leq -2\Lambda > 0 \quad , \quad (2.13.4)$$

logo, um intervalo não vazio no conjunto dos reais. As demais condições de energia dominante deixam de existir se $a = 0$.

Somente a rotação deste modelo é nula, enquanto que os demais parâmetros cinemáticos são diferentes de zero, o que pode ser diretamente verificado fazendo $a = 0$ no ítem 2.4. Da mesma forma, pelo ítem 2.5, verificamos que a fonte se reduz a um fluido Stokesiano sem fluxo de calor.

Pela eq. (2.8.1) quando $a = 0$ temos

$$\mathbb{R} = -2 \left[(\Omega^2 - 1) \left(\frac{\ddot{D}}{\Omega} \frac{H}{R} + \dot{D}^2 \right) + \frac{n}{\Omega} \frac{\ddot{D}}{R} \right] \quad , \quad (2.13.5)$$

e por (2.13.4) vemos que o valor da 4-curvatura está limitado entre 0 e -4Λ , inclusive os limites. No caso em que $\ddot{D} = 0$ tanto o tensor de curvatura, eq. (2.13.3) quanto a 4-curvatura dependem apenas de Ω e $\dot{D} = \text{const.} = 2b$. Pelas eqs. (2.4.2) vemos que o módulo da aceleração é dado por

$$-|a^A|^2 = -\eta^{AB} a_A a_B = + \Omega^2 \dot{D}^2 = + 4\Omega^2 b^2 \quad . \quad (2.13.6)$$

Sob essas considerações (2.13.5) e (2.13.3) podem ser reescritas como

$$0 \leq \mathbb{R} = 2 \frac{(\Omega^2 - 1)}{\Omega^2} |a^A|^2 = -8(\Omega^2 - 1)b^2 = -2 R_{0303} \leq -4\Lambda \quad (2.13.7)$$

e vemos que tanto as componentes não nulas do tensor de Riemann quanto a quadri-curvatura serão tão mais intensas quanto maior for a aceleração do conteúdo material do modelo, e quando este

tender a ser geodésico o modelo tenderá para Minkowski. Também as pressões, eqs. (2.5.3) e (2.5.4) também obedecem a algo semelhante.

No sistema de coordenadas em que $m = \ell = -n/(2\Omega)$ o elemento de linha dessa geometria em que $a = 0$ se escreve como

$$ds^2 = dt^2 + 8\Omega m \operatorname{sh}^2 \frac{D(t)}{2} dt d\phi - dr^2 - dz^2 + \\ - 16m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{D(t)}{2} [1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{D(t)}{2}] d\phi^2 . \quad (2.13.8)$$

Por esta expressão, fazendo t, r, z constantes, vemos que existe um valor de $t = t_c$ tal que

$$\operatorname{sh}^2 \frac{D(t_c)}{2} = \frac{1}{1-\Omega^2} , \quad (2.13.9)$$

além do qual a linha coordenada ϕ muda de caráter, isto é, para $t < t_c$ ela é do tipo espaço e para $t > t_c$ ela é do tipo tempo. Isto fica mais evidente se fizermos a seguinte transformação de coordenadas que diagonaliza a métrica:

$$d\phi \rightarrow d\overset{\circ}{\phi} = 4m d\phi - \frac{\Omega}{1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{D(t)}{2}} dt \quad (2.13.10)$$

O elemento de linha fica então igual a

$$ds^2 = \left[\frac{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{D}{2}}{1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{D}{2}} \right] dt^2 - dr^2 - dz^2 - \operatorname{sh}^2 \frac{D}{2} [1 + (1-\Omega^2) \operatorname{sh}^2 \frac{D}{2}] d\overset{\circ}{\phi}^2 \quad (2.13.11)$$

Nesse novo sistema de coordenadas, $(t, r, z, \overset{\circ}{\phi})$, vemos que não só $\overset{\circ}{\phi}$ muda o seu caráter mas também t de coordenada temporal para espacial para $t = t_c$ dado por (2.13.9). O que

ocorre então é que existe um horizonte em $t = t_c$: na região onde $D(t) > 0$ t é coordenada temporal e ϕ espacial, na outra região há uma troca de papéis, enquanto que sobre a fronteira, $t = t_c$, o sistema de coordenadas em questão é impróprio.

2.14 - OS EFEITOS DISSIPATIVOS, EM TERMOS DE EFEITOS GRAVITACIONAIS, EQUIVALEM A OUTROS CAMPOS QUE NÃO O GRAVITACIONAL

Isto pode ser visto comparando o caso estacionário da solução (2.3.15) a (2.3.17) com a solução apresentada por Rebouças & Tiomno ⁽¹⁵⁾.

No nosso caso, quando $D(t) = 0$, temos como fonte um fluido imperfeito. Mais especificamente, excetuando-se o caso particular $\Omega^2 = 2$ correspondente a Gödel, temos um fluido não Stokesiano, conforme ítem 2.5. No caso de Gödel $\Omega^2 = 2$, a fonte é um fluido perfeito. Quando fizemos $D(t) = 0$ em (2.5.1) obtemos

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \Pi_{AB} \quad , \quad (2.14.1)$$

onde $V_A = \eta_{0A}$ é dado por (2.4.1), ρ é dado por (2.5.2), p é dado por (2.5.3) com $D(t) = 0$, Π_{AB} é obtido pondo $D(t) = 0$ nas eqs. (2.5.4).

Já Rebouças & Tiomno ⁽¹⁵⁾ apresentaram a mesma geometria, sob o ponto de vista gravitacional, com um outro tensor momento-energia. A geometria é a mesma porque as curvaturas e os invariantes, calculados a partir da métrica, são os mesmos. Logo, apesar das fontes serem diferentes, partículas testes não

sentem diferença entre as duas situações. A solução apresentada por eles tem como tensor momento-energia

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + T_{AB}^{(S)} + T_{AB}^{(EM)}, \quad (2.14.2)$$

sendo $V_A = \eta_{0A}$, ρ e p a densidade de matéria e a pressão de um fluido perfeito, $T_{AB}^{(S)}$ é o tensor momento-energia para um campo escalar de massa zero e $T_{AB}^{(EM)}$ o tensor momento-energia de um campo eletromagnético.

Rebouças & Tiomno escreveram o elemento de linha como

$$ds^2 = (d\bar{t} + H(\bar{x}) d\bar{y})^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{z}^2 - R^2(\bar{x}) d\bar{y}^2, \quad (2.14.3)$$

onde

$$H(\bar{x}) = \frac{2\bar{\Omega}\bar{a}}{\bar{m}} (e^{\bar{m}\bar{x}} + b^{-\bar{m}\bar{x}}) + H_0 \quad (2.14.4)$$

e

$$R(\bar{x}) = \bar{a} e^{\bar{m}\bar{x}} - \bar{a}\bar{b} e^{-\bar{m}\bar{x}}. \quad (2.14.5)$$

Comparando essas equações com (2.1.1) e (2.3.15) a (2.3.17), onde colocamos $D(t) = 0$, obtemos as seguintes relações:

$$\bar{m} = a \quad (2.14.6)$$

$$\bar{a} = m \quad (2.14.7)$$

$$\bar{a}\bar{b} = \ell \Rightarrow \bar{b} = \frac{\ell}{m} \quad (2.14.8)$$

$$\frac{2\bar{\Omega}\bar{a}}{\bar{m}} = \Omega m \Rightarrow \bar{\Omega} = \frac{a\Omega}{2} \quad (2.14.9)$$

$$H_0 = n. \quad (2.14.10)$$

Com relação ao seguinte teorema, para $\bar{m}^2 = a^2 > 0$, de

monstrado por Rebouças e Tiomno:

"Toda métrica Riemanniana ET-homogênea do tipo Gödel com os mesmos valores de $\bar{m}^2 = a^2 > 0$ e $\bar{\Omega} = \frac{a\Omega}{2}$ são iguais a menos de uma transformação de coordenadas (logo isométricas)"

propomos uma forma modificada para

"Toda métrica Riemanniana ET-homogênea do tipo Gödel para qualquer valor de $\bar{m}^2 = a^2 > 0$ e para o mesmo valor de $\bar{\Omega} = \frac{a\Omega}{2}$ são iguais a menos de transformações de coordenadas e uma transformação de escala".

Essa modificação se justifica pelo fator $\bar{m} = a$, para $\bar{m}^2 = a^2 > 0$, representar apenas um fator de escala das linhas coordenadas, como mostramos no item 2.7. As eqs. (2.7.2) adaptadas para a notação de Rebouças & Tiomno ficam

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = \bar{m} x^\mu \quad (2.14.11a)$$

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \bar{m}^2 ds^2 \quad (2.14.11b)$$

No item 2.7 demonstramos o teorema anteriormente citado através dos invariantes, via análise das curvaturas em tetradas. Adaptadas para o presente caso na notação de Rebouças & Tiomno, as eqs. (2.7.1) se escrevem como

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \bar{\Omega}^2 \\ R_{0303} &= \bar{\Omega}^2 \\ R_{1313} &= (3\bar{\Omega}^2 - \bar{m}^2) \end{aligned} \quad (2.14.12)$$

e na nossa notação, após realizarmos as transformações (2.7.2) ficam

$$\bar{R}_{0101} = \frac{\Omega^2}{4}$$

$$\bar{R}_{0303} = \frac{\Omega^2}{4} \quad (2.14.13)$$

$$\bar{R}_{1313} = \frac{1}{4} (3\Omega^2 - 4) \quad ,$$

que independem do parâmetro $\bar{m} = a$, mostrando que $\bar{m} = a$ é apenas um fator de escala simultâneo para todas as linhas coordenadas, isto é, significa apenas uma reparametrização simultânea de todas as curvas do modelo, de um parâmetro s para um parâmetro $\tilde{s} = as$. E mais uma vez lembremos que as equações de Einstein não são invariantes sob transformações conformes, logo a transformação dada por (2.14.3b) implica que teremos que ter um novo tensor momento-energia $\bar{T}_{AB} = a^{-4} T_{AB}$.

CAPÍTULO 3

UNIVERSOS PULSANTES EM ROTAÇÃO

3.1 - A MOTIVAÇÃO DESTE ESTUDO

Vimos no item 2.9 que a única condição para uma geometria ser conformalmente plana, isto é, ser conforme ao espaço-tempo de Minkowski, é que ela tenha o tensor de Weyl nulo. Isto quer dizer que muitos dos modelos cosmológicos tradicionais como por exemplo, Einstein, De Sitter e o próprio modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) tido como o que melhor representa o estágio atual de nosso Universo, são conformes a Minkowski, ou seja, suas métricas podem ser escritas na forma da equação (2.9.2), e é óbvio que elas são também conformes entre si. Assim, a métrica de Friedmann, não estacionária, é conforme a de Einstein estacionária. O elemento de linha da métrica de Einstein pode ser escrito como

$$ds_{\text{EINSTEIN}}^2 = dt^2 - dx^2 - \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (3.1.1)$$

enquanto que o de Friedmann (FRW) pode ser escrito como

$$ds_{\text{FRW}}^2 = A^2(t) ds_{\text{EINSTEIN}}^2 \quad (3.1.2)$$

Segue daí uma pergunta: nas relações modelos de Fri-

edmann/Einstein, modelo (?)/Gödel, quem seria o modelo (?) ?

Como o modelo de Gödel é um caso particular da forma estacionária das soluções dadas por (2.3.15) a (2.3.17) nos propomos então a encontrar uma solução para as equações de Einstein cuja métrica fosse da forma

$$ds^2 = ds^2_{(?) } = A^{-2}(t,r) ds_{NSFE}^2 \quad (3.1.3)$$

onde ds_{NSFE}^2 é dado por (2.1.1) e H e R são dados por (2.3.15) a (2.3.17), com $D(t) = 0$, isto é,

$$R(r) = m e^{ar} - \ell e^{-ar} , \quad (3.1.4)$$

$$H(r) = \Omega m e^{ar} + \Omega \ell e^{-ar} + n , \quad (3.1.5)$$

ou, por (2.3.18) e (2.3.19)

$$R(r) = (m+\ell) \operatorname{sh}(ar) + (m-\ell) \operatorname{ch}(ar) \quad (3.1.6)$$

$$H(r) = \Omega(m-\ell) \operatorname{sh}(ar) + \Omega(m+\ell) \operatorname{ch}(ar) + n \quad (3.1.7)$$

3.2 - TRANSFORMAÇÕES CONFORME DO TENSOR MÉTRICO

Sejam $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ tensores métricos de duas variedades distintas M e \bar{M} . Dizemos que $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ são métricas *conformes* se existe uma função A não nula das coordenadas tal que (ref. (9), pág. 43 e ref. (12), pág. 42)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = A^{-2}(x^\alpha) g_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

[†]NSFE = nossa geometria na forma estacionária.

e

$$g_{\mu\nu} = A^2(x^\alpha) \bar{g}_{\mu\nu} \quad (3.2.2)$$

As variedades M e \bar{M} são ditas *conforme* uma a outra.

As eqs. (3.2.1) e (3.2.2), juntamente com as correspondentes equações de transformações do tensor métrico com índices covariantes são chamadas de *transformações conforme do tensor métrico* (20).

Os demais objetos geométricos, sob as transformações conforme do tensor métrico, se transformam de acordo com (ref. (12), pág. 42):

a) Símbolos de Christoffel

$$\{\bar{\mu}_{\nu\rho}\} = \{\mu_{\nu\rho}\} - A^{-1} (\delta^\mu_{\nu} A_{|\rho} + \delta^\mu_{\rho} A_{|\nu} - g^{\mu\sigma} g_{\nu\rho} A_{|\sigma}) \quad (3.2.3)$$

b) Tensor de Curvatura

$$\bar{R}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = A^2 R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \delta^{[\alpha}_{[\mu} Q^{\beta]}_{\nu]} \quad , \quad (3.2.4)$$

onde

$$Q^\alpha_{\beta} = 4 A^{-1} (A^{-1})_{||\beta||\lambda} g^{\alpha\lambda} - 2 (A^{-1})_{|\mu} (A^{-1})_{|\nu} g^{\mu\nu} \delta^\alpha_{\beta} \quad (3.2.5)$$

c) Tensor de Ricci

$$\bar{R}^\alpha_{\mu} = A^2 R^\alpha_{\mu} - \frac{1}{2} (Q^\alpha_{\mu} + \frac{1}{2} Q \delta^\alpha_{\mu}) \quad (3.2.6)$$

d) Escalar de Curvatura

$$\bar{R} = A^2 R + 6A^{-1} A_{||\mu||\nu} g^{\mu\nu} \quad (3.2.7)$$

e) Tensor de Weyl ou Tensor Conforme

$$\bar{W}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = W^{\mu}_{\nu\rho\sigma} , \quad (3.2.9)$$

que é conformalmente invariante.

As quantidades cinemáticas de métricas conformes mantêm entre si as seguintes relações (ref. (9), págs. 43 a 45):

i) 4-velocidade

$$\bar{V}^{\mu} = A V^{\mu} \quad (3.2.10)$$

ii) 4-aceleração

$$\bar{a}^{\alpha} = A^2 a^{\alpha} + A A_{|\rho} (g^{\alpha\rho} - V^{\alpha}V^{\rho}) \quad (3.2.11)$$

iii) expansão

$$\bar{\theta} = A \theta - 3 A_{||\rho} V^{\rho} \quad (3.2.12)$$

iv) tensor de deformação

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = A^{-1} \sigma_{\alpha\beta} \quad (3.2.13)$$

v) tensor de rotação

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} = A^{-1} \omega_{\alpha\beta} . \quad (3.2.14)$$

Podemos ainda citar, como propriedade das transformações conforme, que ângulos e razões entre módulos são preservados (12,20). Sejam X, Y, V, W vetores em um ponto p,

$$\frac{g_{\mu\nu} X^{\mu} Y^{\nu}}{g_{\alpha\beta} V^{\alpha} W^{\beta}} = \frac{\bar{g}_{\rho\sigma} X^{\rho} Y^{\sigma}}{\bar{g}_{\epsilon\lambda} V^{\epsilon} W^{\lambda}} \quad (3.2.14)$$

e

$$\cos\alpha = \frac{g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu}{(g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta)^{1/2} (g_{\rho\sigma} Y^\rho Y^\sigma)^{1/2}} = \frac{\bar{g}_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu}{(\bar{g}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta)^{1/2} (\bar{g}_{\rho\sigma} Y^\rho Y^\sigma)^{1/2}}, \quad (3.2.15)$$

e em particular a estrutura do cone de luz é preservada

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu > 0, = 0, < 0 \implies \bar{g}_{\mu\nu} X^\mu X^\nu > 0, = 0, < 0, \quad (3.2.16)$$

respectivamente.

No caso em que uma das métricas em (3.2.1) for a métrica do espaço plano η_{AB} , então todas as outras métricas que estiverem ligadas à ela pela eq. (3.2.1) são ditas conformalmente planas (ver ítem 2.9).

Como o tensor de Weyl, como escrito em (3.2.9), é um invariante conforme ⁽¹²⁾ ele é um indicador de que duas geometrias que tenham o mesmo tensor de Weyl sejam conformes entre si.

Uma propriedade interessante ainda a observar das transformações conforme do tensor métrico é que se a métrica a ser conformalmente transformada estiver expressa em sistemas de coordenadas diferentes, as geometrias resultantes serão, em geral, diferentes. Isto pode ser visto na expressão de transformação do invariante R , eq. (3.2.7), onde o tensor métrico aparece implícito na derivada covariante e explicitamente em $g^{\mu\nu}$. Como exemplos práticos dessa propriedade comparar os exemplos I.I com I.II e II.I com II.II, do ítem 3.7. Outro exemplo disto é o caso discutido no ítem 2.9, que embora se trate de uma geometria conformalmente plana, ela não é conforme à métrica de Minkowski cartesiana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, mas sim, é

conforme à métrica de Minkowski escrita num sistema de coordenadas naturalmente associado (ver ítem 1.4) a um referencial girante, isto em vista das eqs. (3.2.14) e (3.2.10), pois a métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica do espaço de Minkowski escrita em um sistema de coordenadas naturalmente associado a um referencial não girante e qualquer métrica obtida diretamente a partir dela por uma transformação do tipo dada pela eq. (3.2.1) vai estar obrigatoriamente escrita em um sistema de coordenadas naturalmente associado a um referencial não girante. Assim, qualquer métrica conformalmente plana escrita em um sistema de coordenadas naturalmente associado a um referencial girante está ligada à métrica de Minkowski cartesiana por pelo menos uma transformação conforme seguida de uma mudança para um novo sistema de coordenadas naturalmente associado a um outro referencial que seja girante. Ou vice-versa.

3.3 - UMA TRANSFORMAÇÃO CONFORME NA NOSSA SOLUÇÃO NA FORMA ESTACIONÁRIA (NSFE).

A partir da eq. (3.1.3) temos

$$g_{\mu\nu} = A^{-2}(t, r) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ H & 0 & 0 & H^2 - R^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

e também definimos as 1-formas θ^A

$$\begin{aligned}\theta^0 &= A^{-1} (dt + H d\phi) \\ \theta^1 &= A^{-1} dr \\ \theta^2 &= A^{-1} dz \\ \theta^3 &= A^{-1} R d\phi\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}dt &= A(\theta^0 - \frac{H}{R} \theta^3) \\ dr &= A \theta^1 \\ dz &= A \theta^2 \\ d\phi &= A \frac{\theta^3}{R}\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

De (3.3.3) lemos as tetradas $e^\alpha_{(A)}$

$$[e^\alpha_{(A)}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A\frac{H}{R} \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{R} \end{bmatrix}\tag{3.3.4}$$

onde α é índice de linha e A é índice de coluna.

Assumamos que o campo de velocidades do conteúdo material é dado por

$$\begin{aligned}V^A &= \delta^A_0, \\ V^\alpha &= e^\alpha_A V^A = e^\alpha_{(0)} = A \delta^\alpha_0,\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

que está de acordo com (3.2.10) e (2.4.1), ou seja, estamos tomando na geometria transformada o referencial equivalente ao da não transformada.

Entramos com (3.3.1), (3.3.4) e (3.3.5) no arquivo "ABÍLIO" (ver Apêndice B) que nos fornece então todos os outros objetos geométricos, bem como a densidade de matéria, as

pressões isotrópica e anisotrópica , o fluxo de energia e os parâmetros cinemáticos do modelo, em função das variáveis A,H, R. De posse dos tensores de Einstein e de sua equação montamos o tensor momento-energia e é o que nos interessa no momento.

$$T_{00} = + \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{H}{R} - \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{n}{R} + 2A\ddot{A} \frac{H^2}{R^2} - 3\dot{A}^2 \frac{H^2}{R^2} - 3A'^2 + 2AA'' + \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 A^2 - a^2 A^2 + 3\dot{A}^2 - \Lambda$$

$$T_{01} = A[2\dot{A}' - a\Omega\dot{A} \frac{H}{R}]$$

$$T_{03} = - A [2\ddot{A} \frac{H}{R} + a\Omega A']$$

$$T_{13} = - A [2\dot{A}' \frac{H}{R} - \frac{2a}{\Omega} \dot{A} \frac{H^2}{R^2} + 2\frac{a}{\Omega} \frac{nH}{R^2} \dot{A} + a\Omega\dot{A}] \quad (3.3.6)$$

$$T_{11} = - \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{H}{R} + \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{n}{R} - 2A\ddot{A} \frac{H^2}{R^2} + 3\dot{A}^2 \frac{H^2}{R^2} + 3A'^2 + \frac{1}{4} a^2 \Omega^2 A^2 + 2A\ddot{A} - 3\dot{A}^2 + \Lambda$$

$$T_{22} = - \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{H}{R} + \frac{2a}{\Omega} AA' \frac{n}{R} - 2A\ddot{A} \frac{H^2}{R^2} + 3\dot{A}^2 \frac{H^2}{R^2} + 3A'^2 - 2AA'' - \frac{a^2 \Omega^2}{4} A^2 + a^2 A^2 + 2A\ddot{A} - 3\dot{A}^2 + \Lambda$$

$$T_{33} = + 3\dot{A}^2 \frac{H^2}{R^2} + 3A'^2 - 2AA'' + \frac{a^2 \Omega^2}{4} A^2 + 2A\ddot{A} + 3\dot{A}^2 + \Lambda$$

Da mesma forma que no Capítulo 2, aqui também queremos que a fonte seja o tanto mais simples o quanto possível . Por isso analisaremos duas hipóteses onde impomos simplificações. No ítem 3.4 procuraremos soluções com $T_{03} = T_{13} = 0$ e no

Ítem 3.5 procuraremos soluções com $T_{03} = T_{01} = 0$.

O arquivo "ABÍLIO" (ver Apêndice B), entre outros objetos geométricos, nos fornece ainda

a) o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} \mathbb{R} = & 6 \frac{\dot{a}}{\Omega} AA' \frac{H}{R} - 6 \frac{\dot{a}}{\Omega} AA' \frac{n}{R} + 6A\ddot{A} \frac{H^2}{R^2} - 12 \dot{A}^2 \frac{H^2}{R^2} - 12A'^2 + \\ & + 6AA'' + \frac{a^2 \Omega^2}{2} A^2 - 2a^2 A^2 - 6A\ddot{A} + 12\dot{A}^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

e as quantidades cinemáticas:

a) aceleração

$$a^A = (0, A', 0, -\frac{H}{R} \dot{A}) \quad ; \quad (3.3.8)$$

b) expansão

$$\theta = -3\dot{A} \quad ; \quad (3.3.9)$$

c) deformação, que é nula, como indica (3.2.13), uma vez que o modelo não transformado tem deformação nula;

d) rotação, ω_{AB}

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -\frac{a\Omega}{2} A \quad (3.3.10)$$

e

$$\omega^A = (0, 0, \frac{a\Omega}{2} A, 0) \quad (3.3.11)$$

3.4 - SOLUÇÕES COM $T_{03} = 0$ E $T_{13} = 0$

Nas equações (3.3.6) impondo $T_{13} = 0$ obtemos,

$$2\dot{A}' \frac{H}{R} - \frac{2a}{\Omega} \dot{A} \frac{H}{R} \frac{(H-n)}{R} + a\Omega\dot{A} = 0$$

de onde segue que

$$2A' \frac{H}{R} - \frac{2a}{\Omega} A \frac{H}{R} \frac{(H-n)}{R} + a\Omega A = \bar{F}(r) \quad ,$$

ou ainda,

$$A' = \frac{a}{\Omega} A \frac{(H-n)}{R} - \frac{a\Omega}{2} A \frac{R}{H} + \bar{F}(r) \quad . \quad (3.4.1)$$

Levando (3.4.1) em $T_{03} = 0$ temos

$$2\ddot{A} \frac{H}{R} + a^2 A \frac{(H-n)}{R} - \frac{a^2 \Omega^2}{2} A \frac{R}{H} + a\Omega \bar{F}(r) = 0 \quad ,$$

de onde segue que

$$\ddot{A} + a^2 \frac{(2H^2 - 2Hn - \Omega^2 R^2)}{4H^2} A = f(r) \quad . \quad (3.4.2)$$

Por (3.2.4) e (3.2.5) vemos que,

$$(H-n)^2 = \Omega^2 R^2 + 4\Omega^2 m\ell \quad (3.4.3)$$

e daí segue que

$$H^2 - 2Hn - \Omega^2 R^2 = -n^2 + 4\Omega^2 m\ell \quad (3.4.3)$$

que em (3.4.2) resulta

$$\ddot{A} + a^2 \frac{(H^2 - n^2 + 4\Omega^2 m\ell)}{4H^2} A = f(r) \quad , \quad (3.4.4)$$

que tem por solução

$$A(t, r) = Y(r) \text{sen}[E(r)t] + V(r) \text{cos}[E(r)t] + W(r) \quad , \quad (3.4.5)$$

onde

$$E(r) = \left[a^2 \frac{(H^2 - n^2 + 4\Omega^2 m \ell)}{4H^2} \right]^{1/2}, \quad (3.4.6)$$

sendo que $V(r)$ é sempre uma função real e $Y(r)$ será real para $E(r)$ real e imaginária pura para $E(r)$ imaginária pura.

Vamos voltar e substituir A em $T_{03} = 0$ para determinar o valor de $W(r)$. Calculemos \dot{A} , \ddot{A} e A' .

$$\dot{A} = E Y \cos(Et) - E V \sin(Et) \quad (3.4.7)$$

$$\ddot{A} = -E^2 Y \sin(Et) - E^2 V \cos(Et) = -E^2 (A - W) \quad (3.4.8)$$

$$A' = Y' \sin(Et) + V' \cos(Et) + W' + tE' Y \cos(Et) - tE' V \sin(Et) \quad (3.4.9)$$

Levando (3.3.8) e (3.3.9) em $T_{03} = 0$ e reagrupando, obtemos,

$$\left(-2 \frac{H}{R} E^2 Y + a\Omega Y'\right) \sin(Et) + \left(-2 \frac{H}{R} E^2 V + a\Omega V'\right) \cos(Et) +$$

$$a\Omega E' Y t \cos(Et) - a\Omega E' V t \sin(Et) + a\Omega W' = 0,$$

que pela independência linear das funções em t leva a

$$-2 \frac{H}{R} E^2 Y + a\Omega Y' = 0 \quad (3.4.10)$$

$$-2 \frac{H}{R} E^2 V + a\Omega V' = 0 \quad (3.4.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} a\Omega E' Y = 0 \\ a\Omega E' V = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E' = 0, \text{ pois queremos } a, \Omega, Y, V \neq 0 \quad (3.4.12)$$

$$a\Omega W' = 0 \Rightarrow W' = 0 \Rightarrow W = \text{const.} = C_1 \quad (3.4.13)$$

De (3.4.6) calculamos E' igual a

$$E' = \frac{a^2 H' (n^2 - 4\Omega^2 m\ell)}{4H^3 E^{1/2}} = 0$$

logo,

$$n^2 - 4\Omega^2 m\ell = 0 \quad (3.4.14)$$

e por (3.4.6) temos

$$E = \text{const.} = \frac{a}{2} \quad , \quad (3.4.15)$$

logo, pelo comentário após (3.4.6), $V(r)$ e $Y(r)$ são funções reais.

De (3.4.10) e (3.4.11) obtemos

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} \Rightarrow \ln Y = \frac{1}{2\Omega} \int \frac{H}{R} \text{adr} + \bar{C}_3 \quad (3.4.16)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} \Rightarrow \ln V = \frac{1}{2\Omega} \int \frac{H}{R} \text{adr} + \bar{C}_2 \quad (3.4.17)$$

Por (3.1.6) e (3.1.7) temos que

$$\int \frac{H}{R} \text{adr} = \int \frac{[\Omega(m-\ell) \text{sh}(ar) + \Omega(m+\ell) \text{ch}(ar) + n] \text{adr}}{(m+\ell) \text{sh}(ar) + (m-\ell) \text{ch}(ar)} = \text{I+II+III} \quad . \quad (3.4.18)$$

Para fazermos esta integração temos três casos a con-
siderar:

$$(A) \quad m \neq 0 \quad e \quad \ell \neq 0$$

$$(B) \quad m \neq 0 \quad e \quad \ell = 0$$

$$(C) \quad m = 0 \quad e \quad \ell \neq 0$$

(A). CASO (A), $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$

$$I = \int \frac{\Omega(m-\ell) \operatorname{sh}(ar) \operatorname{adr}}{(m+\ell) \operatorname{sh}(ar) + (m-\ell) \operatorname{ch}(ar)} = \frac{\Omega(m^2-\ell^2) ar - \Omega(m-\ell)^2 \ell nR}{4m\ell} \quad (3.4.19)$$

$$II = \int \frac{\Omega(m+\ell) \operatorname{ch}(ar) \operatorname{adr}}{(m+\ell) \operatorname{sh}(ar) + (m-\ell) \operatorname{ch}(ar)} = - \frac{\Omega(m^2-\ell^2) ar + \Omega(m+\ell)^2 \ell nR}{4m\ell} \quad (3.4.20)$$

sendo que I e II foram obtidas em (21).

$$III = \int \frac{n a \operatorname{dr}}{(m+\ell) \operatorname{sh}(ar) + (m-\ell) \operatorname{ch}(ar)} = \frac{n}{2\sqrt{m\ell}} \ell n \operatorname{th} \frac{ar + \operatorname{arth} \frac{m-\ell}{m+\ell}}{2} \quad (3.4.21)$$

onde III foi obtida em (22), para $|m+\ell| > |m-\ell|$, como realmente ocorre, pois por (3.4.14) m e ℓ têm o mesmo sinal.

Considerando que $\operatorname{sh}x = \operatorname{ch}x \operatorname{th}x$, temos

$$\operatorname{sh} \operatorname{arth} \frac{b}{a} = \operatorname{ch} \operatorname{arth} \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{arth} \frac{b}{a}} \cdot \frac{b}{a} .$$

Dáí, elevando ao quadrado, segue que

$$\operatorname{sh}^2 \operatorname{arth} \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}$$

e

$$\operatorname{ch}^2 \operatorname{arth} \frac{b}{a} = \frac{a^2}{a^2 - b^2} .$$

Utilizando as expressões do sh e do ch da soma de arcos temos que:

$$\operatorname{sh}(\chi + \operatorname{arth} \frac{b}{a}) = \frac{\pm a \operatorname{sh}\chi \pm b \operatorname{ch}\chi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\operatorname{ch}(\chi + \operatorname{arth} \frac{b}{a}) = \frac{\pm a \operatorname{ch}\chi \pm b \operatorname{sh}\chi}{\sqrt{a^2 - b^2}} .$$

Agora, utilizando a expressão da th do arco metade

$$th \frac{Y}{2} = \frac{shY}{chY+1} = \frac{chY-1}{shY} \quad , \quad (3.4.22)$$

encontramos

$$th \frac{ar + arth \frac{m-l}{m+l}}{2} = \frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}} \quad , \quad (3.4.23)$$

ou

$$th \frac{ar + arth \frac{m-l}{m+l}}{2} = \frac{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}}{R} \quad , \quad (3.4.24)$$

conforme usemos, respectivamente, a primeira ou a segunda igualdade em (3.4.22).

Levando (3.4.23) em (3.4.21) obtemos

$$III = \frac{n}{2\sqrt{m\ell}} \ell n \frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}} \quad . \quad (3.4.25)$$

Considerando (3.4.18) a (3.4.20) e (3.4.25) segue que

$$\int \frac{H}{R} adr = \Omega \ell n R + \frac{n}{2\sqrt{m\ell}} \ell n \frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}} \quad ,$$

ou ainda,

$$\int \frac{H}{R} adr = \ell n \frac{R \left(\Omega + \frac{n}{2\sqrt{m\ell}} \right)}{\left(\frac{H-n}{\Omega} + 2\sqrt{m\ell} \right)^{n/2\sqrt{m\ell}}} \quad . \quad (3.4.26)$$

Levando (3.4.26) em (3.4.16) e em (3.4.17) obtemos

$$Y(r) = C_3 \frac{R \frac{2\Omega\sqrt{m\ell} + n}{4\Omega\sqrt{m\ell}}}{\left(\frac{H-n}{\Omega} + 2\sqrt{m\ell} \right)^{n/4\Omega\sqrt{m\ell}}} \quad (3.4.27)$$

e

$$V(r) = \frac{C_2}{C_3} Y(r) \quad . \quad (3.4.28)$$

Por (3.4.5), (3.4.13), (3.4.15), (3.4.27) e (3.4.28), segue que

$$A(t,r) = C_1 + \frac{R \frac{2\Omega\sqrt{m\ell} + n}{4\Omega\sqrt{m\ell}}}{\left(\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}\right) n/4\Omega\sqrt{m\ell}} \left(C_3 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{at}{2} \right) \quad . \quad (3.4.29)$$

Considerando (3.4.7) a (3.4.9), (3.4.13), (3.4.15) e (3.4.16) e (3.4.17), antes de serem integradas, vemos facilmente que

$$A' = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} (A - C_1) \quad (3.4.30)$$

$$\dot{A}' = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} \dot{A} \quad (3.4.31)$$

$$\ddot{A} = -\frac{a^2}{4} (A - C_1) \quad (3.4.32)$$

$$A'' = \frac{a}{2\Omega} \left(\frac{H}{R}\right)' (A - C_1) + \frac{a^2}{4\Omega^2} \left(\frac{H}{R}\right)^2 (A - C_1) \quad (3.4.33)$$

Considerando T_{01} nas eqs. (3.3.6) e ainda a eq. (3.4.31), obtemos que

$$T_{01} = \frac{a}{\Omega} A \dot{A} \frac{H}{R} (1 - \Omega^2) \quad (3.4.34)$$

E vemos que, para este caso, T_{01} só será nulo para a solução conformalmente plana que também é causal (ver itens 2.9 e 2.10).

Vamos fixar nossa atenção nas eqs. (3.1.4), (3.1.5) e (3.4.29). Vemos que tanto R quanto H divergem quando ar tende a $\pm\infty$. Queremos analisar o comportamento de $A(t,r)$ nesses

extremos. Para isto basta analisar a relação

$$\begin{aligned} \lim_{ar \rightarrow \pm\infty} \frac{R \frac{2\Omega\sqrt{m\ell} + n}{4\Omega\sqrt{m\ell}}}{\left(\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}\right) n/4\Omega\sqrt{m\ell}} &= \lim_{ar \rightarrow \pm\infty} R^{1/2} \cdot \left(\frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}}\right)^{\frac{n}{4\Omega\sqrt{m\ell}}} = \\ &= \lim_{ar \rightarrow \pm\infty} R^{1/2} \cdot \lim_{ar \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}}\right)^{\frac{n}{2\sqrt{m\ell}}} = \pm\infty, \quad (3.4.35) \end{aligned}$$

a menos do sinal que será determinado pelo sinal m ou ℓ , já que embora o segundo limite seja finito, o primeiro explode. Como este termo que explode quando $ar \rightarrow \pm\infty$, na eq. (3.4.29), está multiplicado por funções periódicas de t que alternam o sinal à medida que se varia o valor de t , isto quer dizer que quando $ar \rightarrow \pm\infty$ a função $A(t,r)$ oscila de $+\infty$ a $-\infty$. Atentemos agora para a expressão de T_{00} nas eqs. (3.3.6). Vemos que $A(t,r)$ aparece explicitamente em T_{00} , indicando que o mesmo fato pode ocorrer lá. Mas as condições de energia dominante (ver item 2.6) implicam que $T_{00} = |T_{00}|$, o que é impossível quando T_{00} oscila de $+\infty$ a $-\infty$. Isto implica que, se considerarmos válidas as condições de energia dominante, devemos rejeitar os casos em que T_{00} oscilar de $+\infty$ a $-\infty$ por serem não físicos. O que estaria acontecendo? Ora, para um observador do referencial que escolhermos como o comoviente com o conteúdo material, eq. (3.3.5), $T_{00} = \rho =$ densidade de matéria-energia que preenche o espaço-tempo. Então para $ar \rightarrow \pm\infty$, ao variar-se t , ρ pode estar oscilando de $+\infty$ a $-\infty$, e o mesmo pode estar acontecendo com o escalar de curvatura (eq. (3.3.7)), indicando que estaríamos então em uma singularidade. Nesta situação, por (3.3.8) a (3.3.11) vemos que também os parâmetros cinemáti

cos divergem.

Vamos reescrever (3.4.29) como

$$A(t,r) = C_1 + B(r)D(t) \quad (3.4.36)$$

e então (3.4.30) a (3.4.33) ficam

$$A' = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} BD \quad (3.4.37)$$

$$\dot{A}' = \frac{a}{2\Omega} \frac{H}{R} \dot{B}D \quad (3.4.38)$$

$$\ddot{A} = -\frac{a^2}{4} BD \quad (3.4.39)$$

$$A'' = \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4\Omega^2} \frac{H^2}{R^2} + \frac{a^2}{2\Omega^2} \frac{nH}{R^2} \right] \cdot BD = \frac{a^2}{4} BD, \quad (3.4.40)$$

onde, para escrever esta última igualdade levamos em consideração (3.4.3) e (3.4.14).

Utilizando estas últimas expressões, por (3.3.6), podemos reescrever T_{00} como

$$\begin{aligned} T_{00} = & \left(-\frac{a^2}{4\Omega^2} \frac{H^2}{R^2} - \frac{a^2}{2} \frac{H^2}{R^2} + \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 \right) B^2 D^2 + \\ & \left(-\frac{a^2}{2} \frac{H^2}{R^2} - a^2 + \frac{a^2}{2\Omega^2} \frac{H^2}{R^2} + \frac{3}{2} a^2 \Omega^2 \right) BDC_1 + \\ & 3B^2 D^2 \frac{R^2 - H^2}{R^2} + \left(\frac{3}{4} a^2 \Omega^2 - a^2 \right) C_1^2 - \Lambda. \quad (3.4.41) \end{aligned}$$

Se, em (3.4.41), os termos em B^2 prevalecerem sobre os termos em B , então T_{00} não oscilará de $+\infty$ a $-\infty$, uma vez que $B(r)$ é quem diverge. Mas, para todos os valores de t , o coeficiente de termo em B^2 tem que ser maior que zero quando $r \rightarrow \pm\infty$, para que ρ seja sempre positivo, apesar de divergir.

Por (3.4.41) o coeficiente do termo em B^2 é dado por:

$$U = \left(-\frac{a^2}{4\Omega^2} \frac{H^2}{R^2} - \frac{a^2}{2} \frac{H^2}{R^2} + \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 \right) D^2 + 3\dot{D}^2 \frac{R^2 - H^2}{R^2}. \quad (3.4.42)$$

Quando $ar \rightarrow \pm\infty$, $H^2/R^2 \rightarrow \Omega^2$, a menos dos sistemas de coordenadas onde $m = 0$ ou $\ell = 0$ e $n \neq 0$. Mas aqui estamos supondo $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$, logo,

$$U_{ar \rightarrow \pm\infty} = \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 1) \left(D^2 - \frac{12}{a^2} \dot{D}^2 \right). \quad (3.4.43)$$

Substituindo D^2 e \dot{D}^2 , obtidos por (3.4.29) e (3.4.36), ficamos com

$$U_{ar \rightarrow \pm\infty} = \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 1) \left[(C_2^2 - 3C_3^2) \cos^2 \frac{at}{2} + (C_3^2 - 3C_2^2) \sin^2 \frac{at}{2} - 4C_2C_3 \sin \frac{at}{2} \cos \frac{at}{2} \right], \quad (3.4.44)$$

que deve ser positivo para todos os valores de t , para que a solução seja física.

Para $\frac{at}{2} = 0 + k\pi$, k inteiro, temos

$$U_{ar \rightarrow \pm\infty} = \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 1) (C_2^2 - 3C_3^2), \quad (3.4.45)$$

$$\frac{at}{2} = 0 + k\pi$$

Para $\frac{at}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k inteiro, (3.4.44) fica

$$U_{ar \rightarrow \pm\infty} = \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 1) (C_3^2 - 3C_2^2), \quad (3.4.46)$$

$$\frac{at}{2} = \pi/2 + k\pi$$

e é imediato ver que não existem Ω^2 , C_2^2 , C_3^2 tais que U seja positivo tanto em (3.4.45) quanto em (3.4.46). Então, acatando

as condições de energia, essa solução não é física. Pode ser que existam regiões onde as condições de energia sejam satisfeitas mas não nos deteremos em verificar isto.

(B). CASO (B), $m \neq 0$ e $l = 0$

Por (3.4.14), se $l = 0$ temos que $n = 0$.

Neste caso, usando (3.1.4) e (3.1.5) podemos escrever:

$$\int \frac{H}{R} a \, dr = \int \Omega a \, dr = a \Omega r .$$

Levando esse resultado em (3.4.16) e (3.4.17) temos que:

$$Y(r) = C_3 e^{\frac{a}{2} r} \tag{3.4.48}$$

e

$$V(r) = \frac{C_2}{C_3} Y(r) , \tag{3.4.49}$$

resultados estes que levados em (3.4.5), considerando-se (3.4.15), levam a

$$A(t, r) = C_1 + e^{\frac{a}{2} r} (C_3 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{at}{2}) , \tag{3.4.50}$$

que diverge para $ar \rightarrow +\infty$.

Com as devidas adaptações, as eqs. (3.4.30) a (3.4.46), bem como os comentários que se seguem a cada uma delas também valem aqui. Passemos então ao caso (C).

(C). CASO (C), $m = 0$ e $l \neq 0$

Se $m = 0$, (3.4.14) implica que $n = 0$.

Considerando esta suposição, pelas eqs. (3.1.4) e (3.1.5) temos que

$$\int \frac{H}{R} a \, dr = \int -\Omega a \, dr = -\Omega a r , \quad (3.4.51)$$

que em (3.4.16) e (3.4.14) resultam em

$$V(r) = C_3 e^{-\frac{a}{2} r} \quad (3.4.52)$$

e

$$Y(r) = \frac{C_2}{C_3} V(r) . \quad (3.4.53)$$

A partir de (3.4.53), (3.4.54), (3.4.15) e (3.4.5), obtemos

$$A(t,r) = C_1 + e^{-\frac{a}{2} r} (C_3 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{at}{2}) , \quad (3.4.54)$$

que diverge para $ar \rightarrow -\infty$, e, novamente, com as devidas adaptações, as equações (3.4.30) a (3.4.46), bem como os comentários que se seguem a cada uma delas, valem para este caso também.

3.5 - SOLUÇÕES COM $T_{03} = 0$ E $T_{01} = 0$

Disto, pelas equações (3.3.6), segue que:

$$2\dot{A}' - a \Omega \dot{A} \frac{H}{R} = 0 \quad (3.5.1)$$

ou

$$A' - \frac{a\Omega}{2} A \frac{H}{R} = \bar{f}(r) , \quad (3.5.2)$$

que em $T_{03} = 0$, nas eqs. (3.3.6), nos fornece

$$2\ddot{A} \frac{H}{R} + \frac{a^2 \Omega^2}{2} A \frac{H}{R} + \bar{f}(r) = 0 ,$$

e daí segue que,

$$\ddot{A} + \frac{a^2 \Omega^2}{4} A = f(r) \quad , \quad (3.5.3)$$

que tem por solução

$$A(t,r) = Y(r) \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} + V(r) \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} + W(r), \quad (3.5.4)$$

e então temos que

$$\dot{A} = \frac{a\Omega}{2} Y \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} - \frac{a\Omega}{2} V \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} \quad (3.5.5)$$

$$\ddot{A} = -\frac{a^2 \Omega^2}{4} Y \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} - \frac{a^2 \Omega^2}{4} V \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} \quad (3.5.6)$$

$$A' = Y' \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} + V' \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} + W' \quad . \quad (3.5.7)$$

Levando estes resultados em $T_{03} = 0$ obtemos, após reagrupar os termos:

$$\left(a\Omega Y' - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \frac{H}{R} Y \right) \operatorname{sen} t + \left(a\Omega V' - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \frac{H}{R} V \right) \operatorname{cos} t + W' = 0, \quad (3.5.8)$$

que implica em

$$W' = 0 \implies W = \text{const.} = C_1 \quad (3.5.9)$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} \implies \ln Y = \frac{\Omega}{2} \int \frac{H}{R} a \, dr + \bar{C}_3 \quad (3.5.10)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} \implies \ln V = \frac{\Omega}{2} \int \frac{H}{R} a \, dr + \bar{C}_2 \quad . \quad (3.5.11)$$

Da mesma forma que no ítem 3.4, eq. (3.4.18), para fazermos essa integração temos três casos a considerar

$$(A) \quad m \neq 0 \quad e \quad \ell \neq 0$$

(B) $m \neq 0$ e $\ell = 0$

(C) $m = 0$ e $\ell \neq 0$

(A). CASO (A), $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$

Por um procedimento análogo ao CASO (A) do item 3.4, encontramos

$$A(t, r) = C_1 + \frac{\frac{\Omega (2\Omega\sqrt{m\ell} + n)}{4\sqrt{m\ell}}}{\left(\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}\right) \Omega n / 4\sqrt{m\ell}} \left(C_3 \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} \right) \quad (3.5.12)$$

Da mesma forma que no item 3.4, considerando (3.5.5) a (3.5.7) e (3.5.9) a (3.5.11), vemos que

$$A' = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} (A - C_1) \quad (3.5.13)$$

$$\dot{A}' = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} \dot{A} \quad (3.5.14)$$

$$\ddot{A} = - \frac{a^2 \Omega^2}{4} (A - C_1) \quad (3.5.15)$$

$$A'' = \frac{a^2}{4R^2} [H^2 (\Omega^2 - 1) + \Omega^2 R^2 + n^2 - 4\Omega^2 m\ell] (A - C_1) \quad , \quad (3.5.16)$$

onde, para escrever esta última expressão usamos (3.4.3).

Assim, por (3.5.14), em T_{13} nas eqs. (3.3.6) temos

$$\begin{aligned} T_{13} &= - A \left[a\Omega \frac{H^2}{R^2} - \frac{2a}{\Omega} \frac{H}{R} \frac{(H-n)}{R} + a\Omega \right] \dot{A} = \\ &= - \frac{a}{\Omega} \frac{A\dot{A}}{R^2} (H^2 \Omega^2 - 2H^2 + 2nH + \Omega^2 R^2) \quad , \end{aligned}$$

ou, usando (3.4.3),

$$T_{13} = - \frac{a}{\Omega} A\dot{A} (H^2 \Omega^2 - H^2 + n^2 - 4\Omega^2 m\ell) \quad ,$$

ou ainda,

$$T_{13} = - \frac{a}{\Omega} \ddot{A} \dot{A} [H^2 (\Omega^2 - 1) + n^2 - 4\Omega^2 m \ell] \quad (3.5.17)$$

Aqui também da mesma forma que no item 3.4, ao procedermos a análise de $A(t, r)$ com relação ao seu comportamento para valores grandes de r , ou seja, $ar \rightarrow \pm\infty$, vemos que o mesmo diverge. Esta análise se restringe a analisar o seguinte:

$$\lim_{ar \rightarrow \pm\infty} R^{\frac{\Omega^2}{2}} \cdot \left(\frac{R}{\frac{H-n}{\Omega} \pm 2\sqrt{m\ell}} \right)^{\frac{\Omega n}{4\sqrt{m\ell}}} = \text{produto dos limites} = \pm \infty, \quad (3.5.18)$$

e as conjecturas que se seguem a (3.4.35) valem aqui.

Vamos reescrever (3.5.12) na forma

$$A(t, r) = C_1 + B(r) D(t) \quad (3.5.19)$$

e as eqs. (3.5.13) a (3.5.16) ficam então

$$A' = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} BD \quad (3.5.20)$$

$$\dot{A}' = \frac{a\Omega}{2} \frac{H}{R} B\dot{D} \quad (3.5.21)$$

$$\ddot{A} = - \frac{a^2 \Omega^2}{4} BD \quad (3.5.22)$$

$$A'' = \frac{a^2}{4R^2} [H^2 (\Omega^2 - 1) + \Omega^2 R^2 + n^2 - 4\Omega^2 m \ell] BD \quad (3.5.23)$$

Utilizando estas últimas expressões e (3.4.3), T_{00} , de acordo com as eqs. (3.3.6), pode ser escrito assim:

$$T_{00} = \left[- \frac{a^2}{2} \frac{H^2}{R^2} D^2 - \frac{3a^2 \Omega^2}{4} \frac{H^2}{R^2} D^2 + \frac{7a^2 \Omega^2}{4} D^2 - a^2 D^2 + \right. \\ \left. 3 \frac{R^2 - H^2}{R^2} \dot{D}^2 \right] B^2 + \left[\frac{5\Omega^2}{2} - 2 \right] a^2 D B C_1 + \left(\frac{3\Omega^2}{4} - 1 \right) a^2 C_1^2 - \Lambda \quad (3.5.24)$$

Agora, pelas mesmas justificativas dadas após (3.4.41), vamos ver se existem Ω^2 , C_1 , C_2 , C_3 , tal que o coeficiente de B^2 , U , seja sempre maior que zero.

$$U = \left(-\frac{a^2}{2} \frac{H^2}{R^2} - \frac{3a^2 \Omega^2}{4} \frac{H^2}{R^2} + \frac{7a^2 \Omega^2}{4} - a^2 \right) D^2 + 3 \frac{R^2 - H^2}{R^2} \dot{D}^2. \quad (3.5.25)$$

Quando $ar \rightarrow \pm\infty$, $H^2/R^2 \rightarrow \Omega^2$ e temos então:

$$\lim_{ar \rightarrow \pm\infty} U = \left(\frac{-3\Omega^4 + 5\Omega^2 - 4}{4} \right) a^2 D^2 + (1 - \Omega^2) \dot{D}^2. \quad (3.5.26)$$

Substituindo D^2 e \dot{D}^2 , a partir de (3.5.12) e (3.5.19) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{ar \rightarrow \pm\infty} U &= \frac{a^2}{4} \left[-(3C_3^2 + C_2^2) \Omega^4 + (5C_3^2 + C_2^2) \Omega^2 - 4C_3^2 \right] \sin^2 \frac{a\Omega t}{2} + \\ &\frac{a^2}{4} \left[-(3C_2^2 + C_3^2) \Omega^4 + (5C_2^2 + C_3^2) \Omega^2 - 4C_2^2 \right] \cos^2 \frac{a\Omega t}{2} + \\ &\frac{a^2}{2} (-4\Omega^4 + 6\Omega^2 - 4) C_2 C_3 \sin \frac{a\Omega t}{2} \cos \frac{a\Omega t}{2}, \quad (3.5.27) \end{aligned}$$

que deve ser positivo para todos os valores de t .

Para $\frac{a\Omega t}{2} = 0 + k\pi$, k inteiro, temos

$$\lim_{\substack{ar \rightarrow \pm\infty \\ \frac{a\Omega t}{2} = 0 + k\pi}} U = \frac{a^2}{4} \left[-(3C_2^2 + C_3^2) \Omega^4 + (5C_2^2 + C_3^2) \Omega^2 - 4C_2^2 \right]. \quad (3.5.28)$$

Para $\frac{a\Omega t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k inteiro, ficamos com

$$\lim_{\substack{ar \rightarrow \pm\infty \\ \frac{a\Omega t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi}} U = \frac{a^2}{4} \left[-(3C_3^2 + C_2^2) \Omega^4 + (5C_3^2 + C_2^2) \Omega^2 - 4C_3^2 \right]. \quad (3.5.29)$$

$U > 0$ em (3.5.28) e (3.5.29) levam a

$$V = -(3C_2^2 + C_3^2)\Omega^4 + (5C_2^2 + C_3^2)\Omega^2 - 4C_2^2 > 0 \quad (3.5.30)$$

e

$$W = -(3C_3^2 + C_2^2)\Omega^4 + (5C_3^2 + C_2^2)\Omega^2 - 4C_3^2 > 0 \quad , \quad (3.5.31)$$

que são inequações do segundo grau em Ω^2 . V e W são duas parábolas com a concavidade voltada para baixo, ou seja, para $\Omega^2 \rightarrow \pm\infty$ V e $W \rightarrow -\infty$. Assim V e W só serão valores positivos se cortarem o eixo das abcissas (Ω^2). Para ver se isso acontece igualmos V e W a zero para obter respectivamente:

$$\Omega^2 = \frac{5C_2^2 + C_3^2 \pm \sqrt{-23C_2^4 - 6C_3^2C_2^2 + C_3^4}}{6C_2^2 + 2C_3^2} \quad (3.5.32)$$

$$\Omega^2 = \frac{5C_3^2 + C_2^2 \pm \sqrt{-23C_3^4 - 6C_2^2C_3^2 + C_2^4}}{6C_3^2 + 2C_2^2} \quad . \quad (3.5.33)$$

Mas por (2.6.7) temos que $\Omega^2 \geq 1$, o que nos leva respectivamente a:

$$C_2^2 + C_3^2 \pm \sqrt{-23C_2^4 - 6C_3^2C_2^2 + C_3^4} \leq 0 \quad ,$$

$$C_3^2 + C_2^2 \pm \sqrt{-23C_3^4 - 6C_2^2C_3^2 + C_2^4} \leq 0 \quad ,$$

que não são simultaneamente satisfeitas se $C_2^2 = 0$ e $C_3^2 \neq 0$ ou vice versa. Isto quer dizer que podemos escrever

$$C_3^2 = q^2 C_2^2 \quad , \quad (3.5.34)$$

onde q^2 é uma constante positiva.

Levando (3.5.34) em (3.5.32) e (3.5.33), obtemos respectivamente:

$$\Omega^2 = \frac{5 + q^2 \pm \sqrt{-23 - 6q^2 + q^4}}{6 + 2q^2}, \quad (3.5.35)$$

$$\Omega^2 = \frac{5q^2 + 1 \pm \sqrt{-23q^4 - 6q^2 + 1}}{6q^2 + 2}, \quad (3.5.36)$$

e para que tenhamos raízes Ω^2 reais os radicandos dessas equações devem ser não negativos. Daí, segue que,

$$-23 - 6q^2 + q^4 \geq 0 \quad (3.5.37)$$

$$-23q^4 - 6q^2 + 1 \geq 0 \quad (3.5.38)$$

A inequação (3.5.37) implica que

$$q^2 \leq 3 - 4\sqrt{2} \cong -2,7 \quad \text{ou} \quad q^2 \geq 3 + 4\sqrt{2} \cong 8,7 \quad (3.5.39)$$

e (3.5.38) implica que

$$-0,75 \cong \frac{-6 - 8\sqrt{2}}{23} \leq q^2 \leq \frac{-6 + 8\sqrt{2}}{23} \cong 0,23 \quad (3.5.40)$$

Vemos de imediato que a união dos conjuntos verdadeiros de (3.5.37) e (3.5.38) é o conjunto vazio, ou seja, não existe q^2 que satisfaça simultaneamente essas inequações. Logo, por (3.5.35) e (3.5.36), não existe Ω^2 real que anule simultaneamente V e W definidos em (3.5.30) e (3.5.31). Então, pelo comentário que segue a essas equações, concluímos que não existem Ω^2, C_2^2, C_3^2 tais que U seja sempre positivo, para qualquer valor de t. Ou seja, para alguns valores de t, ρ será $+\infty$ e para outros $-\infty$, o que não é físico. Não nos deteremos em procurar regiões do espaço-tempo em que as condições de energia sejam satisfeitas.

(B). CASO (B), $m \neq 0$ e $\ell = 0$

Por (3.1.4) e (3.1.5) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \int \frac{H}{R} a \, dr &= \frac{\Omega}{2} \int (\Omega + \frac{n}{m} e^{-ar}) \, adr \\ &= \frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2m} e^{-ar} \quad , \end{aligned}$$

e (3.5.10) e (3.5.11) fornecem

$$Y(r) = C_3 e^{\frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2m} e^{-ar}} \quad (3.5.41)$$

$$V(r) = \frac{C_2}{C_3} Y(r) \quad , \quad (3.5.42)$$

resultados estes que em (3.5.4), levando em conta (3.5.9), nos permitem escrever

$$A(t,r) = C_1 + e^{\frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2m} e^{-ar}} (C_3 \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2}) \quad , \quad (3.5.43)$$

que diverge para $ar \rightarrow \infty$. Então, com as devidas adaptações (3.5.13) a (3.5.40), bem como os comentários que se seguem a cada uma delas, também valem aqui. Resta-nos analisar o caso (C).

(C). CASO (C), $m = 0$ e $\ell \neq 0$

Considerando (3.1.4) e (3.1.5), obtemos:

$$\frac{\Omega}{2} \int \frac{H}{R} \, adr = \frac{\Omega}{2} \int (-\Omega - \frac{n}{\ell} e^{ar}) \, adr = -\frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2\ell} e^{ar} \quad , \quad (3.5.44)$$

que em (3.5.10) e (3.5.11) resultam em

$$Y(r) = C_3 e^{-\frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2\ell} e^{ar}} \quad (3.5.45)$$

$$V(r) = \frac{C_2}{C_3} Y(r) \quad , \quad (3.5.46)$$

e daí, por (3.5.9), (3.5.4) fica

$$A(t,r) = C_1 + e^{-\frac{\Omega^2}{2} ar - \frac{n\Omega}{2\ell} e^{ar}} \left(C_3 \operatorname{sen} \frac{a\Omega t}{2} + C_2 \operatorname{cos} \frac{a\Omega t}{2} \right) \quad , \quad (3.5.47)$$

que diverge para $ar \rightarrow -\infty$, e novamente, com as devidas adaptações, (3.5.13) a (3.5.40), bem como os comentários que se seguem a cada uma delas, valem também neste caso.

3.6 - UMA TENTATIVA DE ACOPLAMENTO DE GEOMETRIAS

Olhando para as expressões (3.4.50) e (3.5.43), vemos que ambas divergem para $ar \rightarrow +\infty$, mas são bem comportadas em todo o restante do domínio de r . Já o contrário ocorre para as expressões (3.4.54) e (3.5.47), que divergem para $ar \rightarrow -\infty$. E mais: na hipersuperfície $r = 0$, (3.4.50) assume a mesma forma que (3.4.54), enquanto que (3.5.43) assume a mesma forma que (3.5.47). Então surge a questão: será que não podemos ligar (3.4.50) com (3.4.54) e (3.5.43) com (3.5.47), sendo que as primeiras geometrias (3.4.50) e (3.5.43), valeriam para $-\infty < ar \leq 0$ e as segundas, (3.4.54) e (3.5.47), para $0 \leq ar < +\infty$. A resposta é: não. Não podemos ligar (3.4.50) com (3.4.54),

nem (3.5.43) com (3.5.47). Isto porque, é fácil perceber, num gráfico $A(t,r) \times r$ para um dato t , na hipersuperfície $r = 0$, a hipersuperfície da junção de cada par de equações, elas formam um ponto anguloso (ver figura 3.6.1), e isso implica em que a derivada primeira não seja contínua nessa hipersuperfície. Mas as condições, por exemplo, de *Lichnerowicz para a ligação de métricas* (23) dizem que:

"Duas regiões do espaço-tempo, V e \bar{V} , podem ser ligadas através de uma hipersuperfície Σ , se para cada ponto de P em Σ , existe um sistema de coordenadas (utilizado em ambos os lados de Σ) tal que o seu domínio contenha P , e as componentes métricas $g_{\alpha\beta}$ e suas derivadas primeiras $g_{\alpha\beta|\gamma}$ sejam contínuas em Σ . Tais coordenadas são denominadas *admissíveis*".

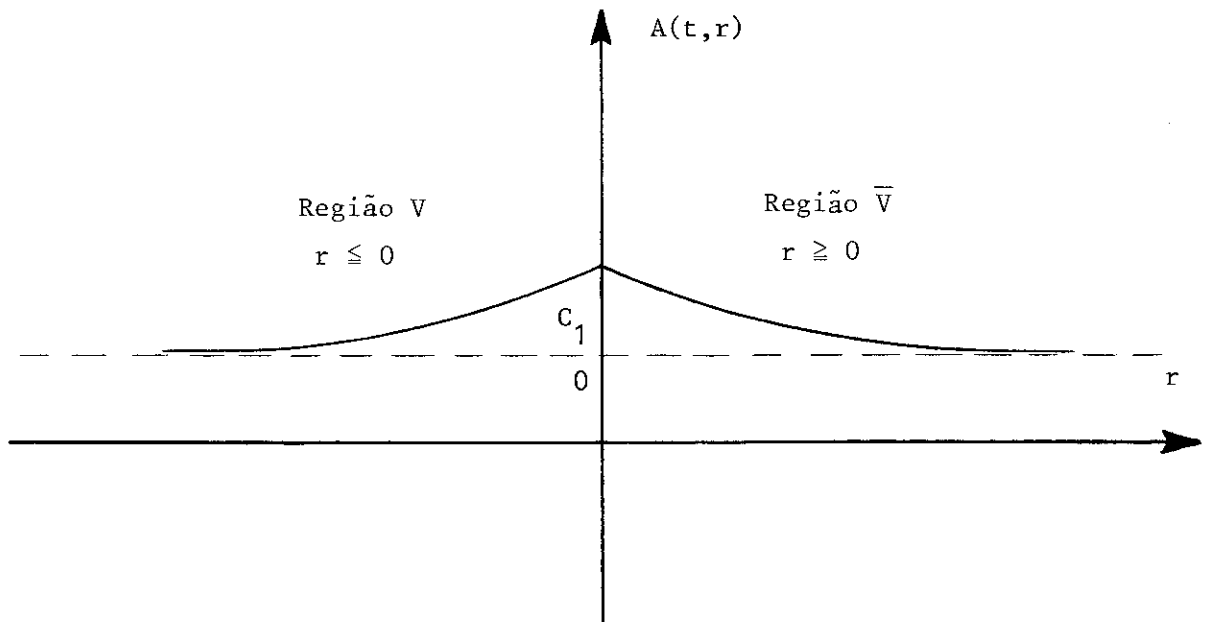


Figura 3.6.1 - Na região V , para $r \leq 0$, estão representadas qualitativamente, pela mesma curva, as funções $A(t,r)$ dadas por (3.4.50), e (3.5.43), enquanto que na região \bar{V} , para $r \geq 0$, estão representadas qualitativamente, pela mesma curva, as funções $A(t,r)$ dadas por (3.4.54) e (3.5.47). Na hipersuperfície $r=0$ temos um ponto anguloso caracterizando que a derivada primeira não é contínua nesse ponto, e portanto as geometrias em questão não podem ser ligadas em $r = 0$.

3.7 - SOLUÇÕES PULSANTES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As expressões (3.4.29), (3.4.50), (3.4.54), (3.5.12), (3.5.43) e (3.5.47), podem ser genericamente escritas como:

$$A(t,r) = C_1 + B(r)D(t) \quad (3.7.1)$$

com

$$D(t) = C_2 \cos(\beta t) + C_3 \sin(\beta t) \quad (3.7.2)$$

As análises realizadas nos itens 3.4 e 3.5 sugerem que o problema das soluções dadas pelas expressões citadas no parágrafo anterior serem não físicas se deve ao fato da função $B(r)$ em (3.7.1) divergir em certas regiões. Assim, pensamos que soluções fisicamente aceitáveis poderiam ser encontradas pesquisando a partir de funções $B(r)$ que não apresentassem o problema de divergirem para nenhum valor de r , tais como $\text{sech}(\alpha r)$, $\exp[-\alpha \exp(\gamma r)]$, etc..., onde α e γ são constantes positivas. Vamos analisar a seguir o caso em que $\alpha = 0 \Rightarrow B(r)=1$, fazendo em (3.7.2) também $C_3 = 0$. Assim ficamos com:

$$A(t,r) = A(t) = C_1 + C_2 \cos(\beta t) \quad , \quad (3.7.3)$$

$$A' = A'' = 0 \quad , \quad (3.7.4)$$

$$\dot{A} = C_2 \beta \sin(\beta t) \quad , \quad (3.7.5)$$

$$\ddot{A} = -\beta^2 C_2 \cos(\beta t) \quad . \quad (3.7.6)$$

Com isso as eqs. (3.3.6) se reduzem a

$$T_{00} = C_2^2 \left[-\beta^2 \frac{H^2}{R^2} - \frac{3}{4} a^2 \Omega^2 + a^2 + 3\beta^2 \right] \sin^2(\beta t) + \\ + C_1 C_2 \left[-2\beta^2 \frac{H^2}{R^2} + \frac{3}{2} a^2 \Omega^2 - 2a^2 \right] \cos(\beta t) +$$

$$+ a^2 (C_1^2 + C_2^2) \left(\frac{3\Omega^2}{4} - 1 \right) - 2\beta^2 C_2^2 \frac{H^2}{R^2} - \Lambda$$

$$T_{01} = \beta C_2 a \Omega \frac{H}{R} \text{sen}(\beta t) [C_1 + C_2 \cos(\beta t)]$$

$$T_{03} = -2\beta^2 C_2^2 \frac{H}{R} \text{sen}^2(\beta t) + 2\beta^2 C_1 C_2 \frac{H}{R} \cos(\beta t) + 2\beta^2 C_2^2 \frac{H}{R}$$

$$T_{13} = \beta C_2 \frac{a}{\Omega} \text{sen}(\beta t) \left[-2C_2 \frac{H(H-n)}{R^2} \cos(\beta t) - 2C_1 \frac{H(H-n)}{R^2} + \right. \\ \left. + C_2 \Omega^2 \cos(\beta t) + C_1 \Omega^2 \right]$$

$$T_{11} = C_2^2 \left[\beta^2 \frac{H^2}{R^2} - \frac{a^2 \Omega^2}{4} - \beta^2 \right] \text{sen}^2(\beta t) + \quad (3.7.7) \\ + C_1 C_2 \left[2\beta^2 \frac{H^2}{R^2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2} - 2\beta^2 \right] \cos(\beta t) + \\ + \frac{a^2 \Omega^2}{4} (C_1^2 + C_2^2) + 2\beta^2 C_2^2 \frac{H^2 - R^2}{R^2} + \Lambda$$

$$T_{22} = C_2^2 \left[\beta^2 \frac{H^2}{R^2} + \frac{a^2 \Omega^2}{4} - a^2 - \beta^2 \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ + C_1 C_2 \left[2\beta^2 \frac{H^2}{R^2} - \frac{a^2 \Omega^2}{2} + 2a^2 - 2\beta^2 \right] \cos(\beta t) + \\ + (C_1^2 + C_2^2) \left(a^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{4} \right) + 2\beta^2 C_2^2 \frac{H^2 - R^2}{R^2} + \Lambda$$

$$T_{33} = C_2^2 \left[3\beta^2 \frac{H^2}{R^2} - \frac{a^2 \Omega^2}{4} - \beta^2 \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ + C_1 C_2 \left[\frac{a^2 \Omega^2}{2} - 2\beta^2 \right] \cos(\beta t) + \\ (C_1^2 + C_2^2) \frac{a^2 \Omega^2}{4} - 2\beta^2 C_2^2 + \Lambda$$

EXEMPLO I.I

Deveríamos agora analisar se esse tensor momento-energia satisfaz às condições de energia dominante (ref. (12), pág. 91), no entanto, devido ao grande número de parâmetros livres, $C_1, C_2, a, \Omega, \beta, m, \ell, n$ e ainda à dependência em duas variáveis, t e r , essa análise se torna difícil. Vamos então particularizar alguns desses parâmetros. Vamos tomar m, ℓ, n, Ω , de tal forma que, em (3.1.4) a (3.1.7), tenhamos a solução de Gödel na forma dada por (1.2.1), ou seja,

$$\begin{aligned} \ell &= n = 0 \quad , \\ m &= 1/\sqrt{2} \quad , \\ \Omega &= \sqrt{2} \quad , \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

e em (3.7,3) vamos particularizar

$$C_2 = C_1 \quad . \tag{3.7.9}$$

Assim (3.7.7) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} T_{00} &= C_1^2 \left[\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ &\quad + C_1^2 \left[a^2 - 4\beta^2 \right] [\cos(\beta t) + 1] - \Lambda \\ T_{01} &= 2 C_1^2 a \beta \text{sen}(\beta t) [1 + \cos(\beta t)] \\ T_{03} &= 2 \sqrt{2} \beta^2 C_1^2 [-\text{sen}^2(\beta t) + \cos(\beta t) + 1] \\ T_{13} &= -\sqrt{2} \beta a C_1^2 [\cos(\beta t) + 1] \text{sen}(\beta t) \\ T_{11} &= C_1^2 \left[\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ &\quad + C_1^2 [2\beta^2 + a^2] [\cos(\beta t) + 1] + \Lambda \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

$$T_{22} = T_{11}$$

$$T_{33} = C_1^2 \left[5\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ + C_1^2 \left[a^2 - 2\beta^2 \right] [\cos(\beta t) + 1] + \Lambda \quad .$$

Decompondo T_{AB} , dado por (3.7.10), assumindo (3.3.5), obtemos,

$$\rho = T_{00} \quad , \\ p = C_1^2 \left[\frac{7}{3} \beta^2 - \frac{a^2}{2} \right] \text{sen}^2(\beta t) + \\ + C_1^2 \left[\frac{2}{3} \beta^2 + a^2 \right] [\cos(\beta t) - 1] + \Lambda \quad , \quad (3.7.12)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = -\frac{4}{3} \beta^2 C_1^2 [\text{sen}^2(\beta t) - \cos(\beta t) - 1] \quad , \\ (3.7.13)$$

$$\Pi_{13} = T_{13} \quad ,$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}) \quad , \quad (3.7.14)$$

e as quantidades cinemáticas são:

$$\theta = 3 \beta C_1 \text{sen}(\beta t) \quad , \quad (3.7.15)$$

$$\omega_{AB} = [0] \quad , \quad (3.7.16)$$

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -C_1 \frac{a\Omega}{2} [\cos(\beta t) + 1] \quad , \quad (3.7.17)$$

$$\omega^A = (0, 0, \omega_{31}, 0) \quad , \quad (3.7.18)$$

$$a^A = (0, 0, 0, -\sqrt{2} \beta C_1 \text{sen}(\beta t)) \quad . \quad (3.7.19)$$

As condições (2.6.1) podem ser reescritas como:

$$T_{00} + T_{AB} \geq 0 \quad (3.7.20)$$

$$T_{00} - T_{AB} \geq 0 \quad . \quad (3.7.21)$$

Apliquemos essas condições para as eqs. (3.7.10).

- para $A = B = 0$ obtemos que se

$$\Lambda < C_1^2 \left[\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right] [\text{sen}^2(\beta t) - 2\cos(\beta t) - 2] \quad (3.7.22)$$

essas condições são satisfeitas;

- para $A = B = 1$ ou 2 , (3.7.20) implica em

$$\begin{aligned} T_{00} + T_{11} &= T_{00} + T_{22} = \\ &= C_1^2 (2\beta^2 - a^2) \text{sen}^2(\beta t) - 2C_1^2 (\beta^2 - a^2) [\cos(\beta t) + 1] \geq 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

e (3.7.21) leva a

$$\Lambda \leq -3\beta^2 C_1^2 [\cos(\beta t) + 1] \quad ; \quad (3.7.24)$$

- para $A = B = 3$, (3.7.20) conduz a

$$T_{00} + T_{33} = C_1^2 (6\beta^2 - a^2) \text{sen}^2(\beta t) - 2C_1^2 (3\beta^2 - a^2) [\cos(\beta t) + 1] \geq 0 \quad (3.7.25)$$

e (3.7.21) implica em

$$\Lambda \leq -\beta^2 C_1^2 [2\text{sen}^2(\beta t) + \cos(\beta t) + 1] \quad ; \quad (3.7.26)$$

- para $A = 0$, $B = 1$, (3.7.20) e (3.7.21) conduzem, respectivamente, a

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] + 2a\beta C_1^2 \text{sen}(\beta t) [1 + \cos(\beta t)] \quad (3.7.27)$$

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] - 2 a \beta C_1^2 \text{sen}(\beta t) [1 + \cos(\beta t)] ; \quad (3.7.28)$$

- para $A = 0$, $B = 3$, da mesma forma obtemos

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] + 2\sqrt{2} \beta^2 C_1^2 [-\text{sen}(\beta t) + \cos(\beta t) + 1] \quad (3.7.29)$$

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] - 2 \sqrt{2} \beta^2 C_1^2 [-\text{sen}^2(\beta t) + \cos(\beta t) + 1] \quad (3.7.30)$$

- para $A = 1$, $B = 3$ encontramos

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] - \sqrt{2} \beta a C_1^2 [\cos(\beta t) + 1] \text{sen}(\beta t) \quad (3.7.31)$$

$$\Lambda \leq C_1^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + (4\beta^2 - a^2) [-\cos(\beta t) - 1] + \sqrt{2} \beta a C_1^2 [\cos(\beta t) + 1] \text{sen}(\beta t) \quad (3.7.32)$$

As equações (3.7.23) e (3.7.25) sendo satisfeitas nos pontos de mínimo serão sempre satisfeitas. Assim (3.7.23) tem extremos em

$$\text{sen}(\beta t) = 0 \quad , \quad \text{com} \quad \cos(\beta t) = \pm 1 \quad (3.7.33)$$

e

$$\cos(\beta t) = \frac{-(\beta^2 - a^2)}{2\beta^2 + a^2} \quad , \quad \text{com} \quad \text{sen}^2(\beta t) = \frac{3\beta^4 - 2\beta^2 a^2}{(2\beta^2 - a^2)^2} \quad (3.7.34)$$

Levando $\text{sen}(\beta t) = 0$ e $\cos(\beta t) = +1$ em (3.7.23) obtemos:

$$\beta^2 \leq a^2 \quad (3.7.35)$$

Para $\text{sen}(\beta t) = 0$ e $\cos(\beta t) = -1$ (3.7.23) é identicamente satisfeita para qualquer β^2 .

Os extremos dados por (3.7.34) s3o existem se $-1 \leq \cos(\beta t) \leq 1$ e $0 \leq \text{sen}^2(\beta t) \leq 1$, e isso, a partir de (3.7.34) nos leva a (i) $\beta^2 \geq a^2/2$, (ii) $\beta^2 < a^2/2$ ou $\beta^2 \geq 2/3$, (iii) $\beta^2 \geq 2a^2/3$, ou seja, $\beta^2 \geq 2/3$. Mas veremos adiante (ver condi33es (3.7.39)) que estes casos est3o eliminados.

J3a (3.7.25) tem extremos em

$$\text{sen}(\beta t) = 0 \quad , \quad \cos(\beta t) = \pm 1 \quad (3.7.37)$$

e

$$\cos(\beta t) = \frac{-3\beta^2 + a^2}{6\beta^2 - a^2} \quad , \quad \text{com} \quad \text{sen}^2(\beta t) = \frac{27\beta^4 - 6\beta^2 a^2}{(6\beta^2 - a^2)^2} \quad (3.7.38)$$

Para $\text{sen}(\beta t) = 0$ e $\cos(\beta t) = -1$, (3.7.25) 3e satisfeita sempre.

Para $\text{sen}(\beta t) = 0$ e $\cos(\beta t) = 1$, (3.7.25) nos leva a

$$\beta^2 \leq \frac{a^2}{3} \quad . \quad (3.7.39)$$

Os extremos dados por (3.7.38) s3o existem se $-1 \leq \cos(\beta t) \leq 1$ e $0 \leq \text{sen}^2(\beta t) \leq 1$ e isso, a partir de (3.7.38) nos leva a (i) $\beta^2 \geq a^2/6$, (ii) $\beta^2 < a^2/6$ ou $\beta^2 \geq 2a^2/9$, (iii) $\beta^2 \geq 2a^2/9$, ou seja, $\beta^2 \geq 2a^2/9$. Ent3o para $\beta^2 \geq 2a^2/9$ e $\beta^2 \leq a^2/3$ (ver eq. (3.7.39)), (3.7.38) representa extremos de (3.7.25). No entanto por substitui33o direta em (3.7.25) vemos que para esta faixa de valores de β^2 entre $2a^2/9$ e $a^2/3$, esta 3ltima desigualdade 3e sempre satisfeita.

J3a as desigualdades (3.7.22), (3.7.24) e (3.7.26) a (3.7.32) s3o sempre satisfeitas desde que Λ seja convenientemente pequeno. O valor m3ximo de Λ ser3a obviamente determinado pela mais restrigente dessas desigualdades, em fun33o dos par3metros a , β , C_1 .

Adotando ent3o as condi33es de energia dominante

(2.6.1), concluimos que a solução em questão é fisicamente aceitável para $\beta^2 \leq a^2/3$, com um valor conveniente de Λ . Por exemplo, para

$$\beta = a/2 \quad , \quad (3.7.40)$$

a mais restrigente dessas desigualdades que envolvem Λ é (3.7.24) que implica em

$$\Lambda \leq -\frac{3}{2} a^2 C_1^2 \quad , \quad (3.7.41)$$

quando $\beta t = 0 + 2k\pi$, k inteiro.

Considerando (3.7.40) e a igualdade em (3.7.41), as partes irredutíveis do tensor momento-energia, a partir de (3.7.11) a (3.7.14), se escrevem como

$$\rho = \frac{a^2 C_1^2}{4} \left(6 - \text{sen}^2 \frac{at}{2} \right) \quad , \quad (3.7.42)$$

$$p = \frac{a^2 C_1^2}{12} \left(\text{sen}^2 \frac{at}{2} + 14 \cos \frac{at}{2} - 4 \right) \quad , \quad (3.7.43)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = -\frac{a^2 C_1^2}{3} \left(\text{sen}^2 \frac{at}{2} - \cos \frac{at}{2} - 1 \right) \quad , \quad (3.7.44)$$

$$\Pi_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_1^2 \left(\cos \frac{at}{2} + 1 \right) \text{sen} \frac{at}{2} \quad , \quad (3.7.45)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}) \quad , \quad (3.7.46)$$

com

$$T_{01} = a^2 C_1^2 \text{sen} \frac{at}{2} \left(\cos \frac{at}{2} + 1 \right) \quad , \quad (3.7.47)$$

$$T_{03} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_1^2 \left(-\text{sen}^2 \frac{at}{2} + \cos \frac{at}{2} + 1 \right) \quad , \quad (3.7.48)$$

sendo que as quantidades cinemáticas não nulas ficam como

$$\theta = \frac{3}{2} a C_1 \text{sen} \frac{at}{2} \quad , \quad (3.7.49)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} a C_1 (\cos \frac{at}{2} + 1), 0) \quad , \quad (3.7.50)$$

$$a^A = (0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a C_1 \operatorname{sen} \frac{at}{2}) \quad , \quad (3.7.51)$$

e o escalar de curvatura é dado por

$$R = -\frac{a^2 C_1^2}{2} (\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + 7 \cos \frac{at}{2} + 7) \quad . \quad (3.7.52)$$

EXEMPLO I.II

Se no lugar de (3.7.8) tomamos

$$\begin{aligned} l &= m \\ n &= -2\Omega m \\ \Omega &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.7.53)$$

teremos (3.1.4) a (3.1.7) correspondendo ao sistema cilíndrico de coordenadas, conforme (1.2.3) e itens 1.3 e 2.10.

Admitindo (3.7.53) e (3.7.9), podemos escrever as equações (3.7.7) como

$$\begin{aligned} T_{00} &= C_1^2 [-2\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} - \frac{1}{2} a^2 + 3\beta^2] \operatorname{sen}^2(\beta t) + \\ &\quad + C_1^2 [-4\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} + a^2] [\cos(\beta t) + 1] - \Lambda \\ T_{01} &= \sqrt{2} a \beta C_1^2 \operatorname{sen}(\beta t) [\sqrt{2} \operatorname{th} \frac{ar}{2} + \cos(\beta t)] \\ T_{03} &= 2\sqrt{2} \beta^2 C_1^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} [-\operatorname{sen}^2(\beta t) + \cos(\beta t) + 1] \\ T_{13} &= -\sqrt{2} \beta a C_1^2 \operatorname{sen}(\beta t) \operatorname{th} \frac{ar}{2} [\cos(\beta t) + 1] \\ T_{11} &= C_1^2 [2\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} - \frac{a^2}{2} - \beta^2] \operatorname{sen}^2(\beta t) + \end{aligned} \quad (3.7.54)$$

$$+ C_1^2 [4\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} + a^2 - 2\beta^2] [\cos(\beta t) + 1] + \Lambda$$

$$T_{22} = T_{11}$$

$$T_{33} = C_1^2 [6\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} - \frac{a^2}{2} - \beta^2] \operatorname{sen}^2(\beta t) + \\ + C_1^2 [a^2 - 2\beta^2] [\cos(\beta t) + 1] + \Lambda$$

Vê-se, por observação direta destas equações, que o valor de r que mais pode comprometer as condições de energia dominante (3.7.20) e (3.7.21) é aquele em que $ar \rightarrow \infty$, e, neste caso, $\operatorname{th} \frac{ar}{2} \rightarrow 1$. Mas, nesta situação, as eqs. (3.7.54) se reduzem às eqs. (3.7.10) que, como já vimos, satisfazem às condições de energia dominante. Conclui-se então que os resultados representados por (3.7.22) a (3.7.41) também levam a uma solução fisicamente aceitável quando a transformação conforme em questão é feita sobre o tensor métrico de Gödel escrito no sistema cilíndrico de coordenadas.

Neste sistema de coordenadas, decompondo T_{AB} dado por (3.7.54), assumindo (3.3.5), (3.7.40) e a igualdade em (3.7.41), obtemos para as suas partes irredutíveis

$$\rho = \frac{a^2 C_1^2}{4} \left[\left(1 - 2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2}\right) \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + \right. \\ \left. + 4 \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2}\right) \cos \frac{at}{2} + \right. \\ \left. + 10 - 4 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} \right] \quad (3.7.55)$$

$$p = \frac{a^2 C_1^2}{12} \left[\left(8 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + 6\right) \cos \frac{at}{2} + \left(10 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 9\right) \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + \right. \\ \left. 8 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 12 \right] \quad (3.7.56)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = -\frac{a^2 C_1^2}{3} \left(\text{sen}^2 \frac{at}{2} - \cos \frac{at}{2} - 1 \right) \text{th}^2 \frac{ar}{2} \quad , \quad (3.7.57)$$

$$\Pi_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_1^2 \text{sen}^2 \frac{at}{2} \left(\cos \frac{at}{2} + 1 \right) \text{th}^2 \frac{ar}{2} \quad , \quad (3.7.58)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}) \quad , \quad (3.7.59)$$

com

$$T_{01} = a^2 C_1^2 \text{sen} \frac{at}{2} \left(\cos \frac{at}{2} + 1 \right) \text{th} \frac{ar}{2} \quad , \quad (3.7.60)$$

$$T_{03} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_1^2 \left(-\text{sen}^2 \frac{at}{2} + \cos \frac{at}{2} + 1 \right) \text{th} \frac{ar}{2} \quad , \quad (3.7.61)$$

sendo que as quantidades cinemáticas não nulas ficam como

$$\theta = \frac{3}{2} a C_1 \text{sen} \frac{at}{2} \quad , \quad (3.7.62)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} a C_1 \left(\cos \frac{at}{2} + 1 \right), 0) \quad , \quad (3.7.63)$$

$$a^A = (0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a C_1 \text{th} \frac{ar}{2} \text{sen} \frac{at}{2}) \quad , \quad (3.7.64)$$

e o escalar de curvatura fica dado por

$$\begin{aligned} R = -\frac{a^2 C_1^2}{2} [(6 \text{th}^2 \frac{ar}{2} - 1) \cos \frac{at}{2} + (16 \text{th}^2 \frac{ar}{2} - 5) \text{sen}^2 \frac{at}{2} + \\ - 6 \text{th}^2 \frac{ar}{2} - 1] \quad (3.7.65) \end{aligned}$$

EXEMPLO II.I

Ao assumirmos a expressão (3.7.9), ficamos com um in conveniente: por (3.7.3) vemos que nos pontos $\beta t = \pi + 2k\pi$, k in teiro, temos $A(t,r) = 0$, o que pode ser inconveniente, pois

nestes pontos todos os termos da métrica divergem, como pode ser visto por (3.3.1). Para evitarmos isso basta escolhermos em (3.7.3) C_1 e C_2 tais que

$$|C_1| > |C_2| \quad (3.7.66)$$

e nunca teremos $A(t,r) = 0$. A título de mais um exemplo, vamos exibir o caso em que

$$C_1 = 2C_2 \quad (3.7.67)$$

Neste caso, assumindo (3.7.8), podemos escrever (3.7.7) como

$$\begin{aligned} T_{00} &= C_2^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + 2C_2^2 (a^2 - 4\beta^2) \cos(\beta t) + \\ &\quad + C_2^2 \left(\frac{5}{2} a^2 - 4\beta^2 \right) - \Lambda \\ T_{01} &= 2 a \beta C_2^2 \text{sen}(\beta t) [\cos(\beta t) + 2] \\ T_{03} &= 2\sqrt{2} \beta^2 C_2^2 [2 \cos(\beta t) - \text{sen}^2(\beta t) + 1] \\ T_{13} &= -\sqrt{2} a \beta C_2^2 \text{sen}(\beta t) [\cos(\beta t) + 2] \quad (3.7.68) \\ T_{11} &= C_2^2 \left(\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + 2C_2^2 (a^2 + 2\beta^2) \cos(\beta t) + \\ &\quad + C_2^2 \left(\frac{5}{2} a^2 + 2\beta^2 \right) + \Lambda \\ T_{22} &= T_{11} \\ T_{33} &= C_2^2 \left(5\beta^2 - \frac{a^2}{2} \right) \text{sen}^2(\beta t) + 2C_2^2 (a^2 - 2\beta^2) \cos(\beta t) + \\ &\quad + C_2^2 \left(\frac{5}{2} a^2 - 2\beta^2 \right) + \Lambda \end{aligned}$$

Agora, considerando as condições de energia dominante (3.7.20) e (3.7.21), e procedendo, em relação às eqs.

(3.7.68), uma análise semelhante à feita no trecho que se segue a (3.7.21), chegamos à conclusão que as condições acima mencionadas são satisfeitas para

$$\beta^2 \leq \frac{3}{2} a^2, \quad (3.7.69)$$

e que se assumimos

$$\beta = \frac{a}{2} \quad (3.7.70)$$

teremos que ter

$$\Lambda \leq -\frac{9}{4} a^2 C_2^2 \quad (3.7.71)$$

para que (3.7.20) e (3.7.21) sejam satisfeitas pelas equações (3.7.68).

Assumindo (3.7.70), a igualdade em (3.7.71) e (3.3.5) as partes irredutíveis do tensor momento-energia dado por (3.7.68) são

$$\rho = \frac{a^2 C_2^2}{4} (15 - \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2}), \quad (3.7.72)$$

$$p = \frac{a^2 C_2^2}{12} (5 + 28 \cos \frac{at}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2}), \quad (3.7.73)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = \frac{-a^2 C_2^2}{3} (\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} - 2 \cos \frac{at}{2} - 1), \quad (3.7.74)$$

$$\Pi_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_2^2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} (\cos \frac{at}{2} + 2), \quad (3.7.75)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}), \quad (3.7.76)$$

com

$$T_{01} = a^2 C_2^2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} (\cos \frac{at}{2} + 2), \quad (3.7.77)$$

$$T_{03} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_2^2 (-\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + 2 \cos \frac{at}{2} + 1), \quad (3.7.78)$$

e as quantidades cinemáticas não nulas são:

$$\theta = \frac{3}{2} a C_2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} \quad (3.7.79)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} a C_2 (\cos \frac{at}{2} + 2), 0) \quad (3.7.80)$$

$$a^A = (0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a C_2 \operatorname{sen} \frac{at}{2}) , \quad (3.7.81)$$

sendo que o escalar de curvatura fica

$$R = -\frac{a^2 C_2^2}{2} (\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + 14 \cos \frac{at}{2} + 13) \quad (3.7.82)$$

EXEMPLO II.II

Vamos agora fazer a transformação conforme dada por (3.1.3), (3.7.3), (3.7.67), realizada sobre a métrica (2.1.1) com H e R dados por (3.1.4) a (3.1.7) escritos no sistema de coordenadas dado por (3.7.53). Em outras palavras, vamos fazer a mesma transformação conforme que anteriormente, só que agora vamos realizá-la sobre a métrica de Gödel no sistema cilíndrico de coordenadas. Em resumo: considerando (3.7.67) e (3.7.53), podemos reescrever (3.7.7) como:

$$\begin{aligned} T_{00} &= C_2^2 (-2\beta^2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + 3\beta^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{sen}^2(\beta t) + \\ &+ 2C_2^2 (-4\beta^2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + a^2) \cos(\beta t) + \\ &+ \frac{5}{2} a^2 C_2^2 - 4\beta^2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - \Lambda \\ T_{01} &= 2 a \beta C_2^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} \operatorname{sen}(\beta t) [2 + \cos(\beta t)] \\ T_{03} &= -2\sqrt{2} C_2^2 \beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} [\operatorname{sen}^2(\beta t) - 2\cos(\beta t) + 1] \end{aligned} \quad (3.7.83)$$

$$T_{13} = -\sqrt{2} \beta a C_2^2 \operatorname{sen}(\beta t) \operatorname{th} \frac{ar}{2} [\cos(\beta t) + 2]$$

$$\begin{aligned} T_{11} = & C_2^2 (2\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} - \beta^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{sen}^2(\beta t) + \\ & + 2C_2^2 (4\beta^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} - 2\beta^2 + a^2) \cos(\beta t) + \\ & + \frac{5}{2} a^2 C_2^2 + 2\beta^2 C_2^2 + \Lambda \end{aligned}$$

$$T_{22} = T_{11}$$

$$\begin{aligned} T_{33} = & C_2^2 (6\beta^2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - \beta^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{sen}^2(\beta t) + \\ & + 2C_2^2 (a^2 - 2\beta^2) \cos(\beta t) + \\ & + \frac{5}{2} a^2 C_2^2 - 2\beta^2 C_2^2 + \Lambda \end{aligned}$$

Valem aqui, os mesmos comentários que se seguem a (3.7.54). Quando $ar \rightarrow \infty$, $\operatorname{th} \frac{ar}{2} \rightarrow 1$ e esta é a situação em que T_{AB} dado por (3.7.83) mais poderia comprometer as condições (3.7.20) e (3.7.21). Mas nesta situação (3.7.83) se reduz a (3.7.68), que satisfaz (3.7.20) e (3.7.21). Logo, o tensor dado por (3.7.83) é o tensor momento-energia de uma solução fisicamente aceitável das equações de Einstein e as expressões (3.7.69) a (3.7.71) valem para este caso também.

Vamos agora decompor (3.7.83) em suas partes irreduzíveis, assumindo (3.3.5), (3.7.70) e a igualdade em (3.7.71). Assim sendo, temos

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{a^2 C_2^2}{4} \left[(19 - 4 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2}) + (1 - 2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2}) \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + \right. \\ & \left. + 8 (1 - \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2}) \cos \frac{at}{2} \right] \quad , \quad (3.7.84) \end{aligned}$$

$$p = \frac{a^2 C_2^2}{12} \left[(8 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 3) + (10 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 9) \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + \right. \\ \left. + (16 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + 12) \cos \frac{at}{2} \right] , \quad (3.7.85)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = -\frac{a^2 C_2^2}{3} \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} - 2 \cos \frac{at}{2} - 1 \right) , \quad (3.7.86)$$

$$\Pi_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_2^2 \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} \left(\cos \frac{at}{2} + 2 \right) , \quad (3.7.87)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}) , \quad (3.7.88)$$

com

$$T_{01} = a^2 C_2^2 \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} \operatorname{th} \frac{ar}{2} \left(\cos \frac{at}{2} + 2 \right) , \quad (3.7.89)$$

$$T_{03} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 C_2^2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} \left(-\operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + 2 \cos \frac{at}{2} + 1 \right) , \quad (3.7.90)$$

e as quantidades cinemáticas não nulas ficam como

$$\theta = \frac{3}{2} a C_2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} , \quad (3.7.91)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} a C_2 \left(\cos \frac{at}{2} + 2 \right), 0) , \quad (3.7.92)$$

$$a^A = (0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a C_2 \operatorname{th} \frac{ar}{2} \operatorname{sen} \frac{at}{2}) , \quad (3.7.93)$$

e o escalar de curvatura é igual a

$$R = -\frac{a^2 C_2^2}{2} \left[(6 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 5) \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} + (12 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + 2) \cos \frac{at}{2} + \right. \\ \left. + 6 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} + 7 \right] . \quad (3.7.94)$$

Uma curiosidade a se ressaltar é que os exemplos I.II e II.II tendem assintoticamente respectivamente para I.I

e II.I quando $ar \rightarrow \infty$, e mais, quando realizamos a transformação conforme dada por (3.1.3) sobre ds_{NSFE}^2 escrito em qualquer sistema de coordenadas onde $m \neq 0$ e $l \neq 0$ obtemos uma nova geometria, que para $ar \rightarrow \infty$, tende assintoticamente para uma obtida por uma transformação conforme sobre ds_{NSFE}^2 escrito em um sistema de coordenadas em que $m \neq 0$, $l = n = 0$. Isto pode ser visto diretamente em (3.1.4) e (3.1.5), pois para $ar \rightarrow \infty$, os termos que contêm m prevalecem sobre os demais.

3.8 - EXPRESSÃO DA VARIACÃO DA DENSIDADE DE ENTROPIA E GRÁFICO COMPARATIVO DAS GRANDEZAS QUE CARACTERIZAM O MODELO DO EXEMPLO II.I DO ÍTEM 3.7

Utilizando as eqs. (3.3.5), (3.7.3), (3.7.67), (3.7.72), (3.7.73), (3.7.79) e (2.12.1), a equação (2.12.2) se escreve como:

$$\mu T \dot{S} = -a^3 C_2^3 \sin \frac{at}{2} \left[6 + 3 \cos \frac{at}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{at}{2} \right], \quad (3.8.1)$$

e considerando (3.7.79) podemos escrever ainda

$$\mu T S = -\frac{2}{3} \theta a^2 C_2^2 \left[6 + 3 \cos \frac{at}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{at}{2} \right].$$

Como μ , T e $\{a^2 C_2^2 [6 + 3 \cos \frac{at}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{at}{2}]\}$ são sempre positivos concluímos que \dot{S} tem sinal contrário ao de θ . Mas θ , como se pode ver por (3.7.79), assume valores positivos e negativos. Então temos as alternativas:

i) ou admitir que o modelo em questão é pulsante, isto é, se expande e se contrai em ciclos à medida que t aumenta,

e com isso aceitar que S possa assumir valores negativos quando este universo girante e pulsante estiver em expansão;

ii) ou admitir que \dot{S} deve ser sempre positivo e com isso restringir o modelo como válido apenas para $0+n\pi \leq \frac{at}{2} \leq \pi + n\pi$ com $n = \text{par}$, ou seja, nas fases em que $\theta < 0$, isto é, quando o modelo está em contração;

iii) ou admitir que a expressão (2.12.2) não é uma boa equação para o caso dos modelos em questão e que o assunto merece um estudo mais cuidadoso.

Tomando $a = 2$ e $C_2 = 1$ podemos reescrever (3.7.72) a (3.7.82) e (3.8.1) respectivamente como

$$\rho = 15 - \text{sen}^2 t \quad , \quad (3.8.2)$$

$$p = \frac{5}{3} + \frac{28}{3} \cos t + \frac{1}{3} \text{sen}^2 t \quad , \quad (3.8.3)$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = -\frac{1}{2} \Pi_{33} = -\frac{4}{3} \text{sen}^2 t + \frac{8}{3} \cos t + \frac{4}{3} \quad , \quad (3.8.4)$$

$$\Pi_{13} = -2\sqrt{2} \text{sen } t \cos t - 4\sqrt{2} \text{sen } t \quad , \quad (3.8.5)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, T_{03}) \quad (3.8.6)$$

com

$$T_{01} = 4 \text{sen } t \cos t + 8 \text{sen } t \quad (3.8.7)$$

e

$$T_{03} = -2\sqrt{2} \text{sen}^2 t + 4\sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \quad , \quad (3.8.8)$$

$$\theta = 3 \text{sen } t \quad , \quad (3.8.9)$$

$$\omega^{(2)} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos t \quad , \quad (3.8.10)$$

$$a^{(3)} = -\sqrt{2} \operatorname{sen} t , \quad (3.8.11)$$

$$\mathbb{R} = -2 \operatorname{sen}^2 t - 28 \cos t + 26 , \quad (3.8.12)$$

$$\mu\dot{\text{T}}\dot{\text{S}} = -48 \operatorname{sen} t - 24 \operatorname{sen} t \cos t + 4 \operatorname{sen} t \cos^2 t . \quad (3.8.13)$$

Nas figuras 3.8.1 e 3.8.2, obtidas no terminal gráfico do LCC graças ao João Torres, mostramos como variam as grandezas dadas por (3.8.2) a (3.8.13), as quais associamos às curvas A, B, C, ... da seguinte maneira:

$$\rho:A, p:B, \Pi_{11}=\Pi_{22}=-\frac{1}{2}\Pi_{33}:C, \Pi_{13}:D, q_1 = T_{01}:E, \\ q_3 = T_{03}:F, \theta:G, \omega^{(2)}:H, a^{(3)}:I, \mathbb{R}:J, \mu\dot{\text{T}}\dot{\text{S}}:K .$$

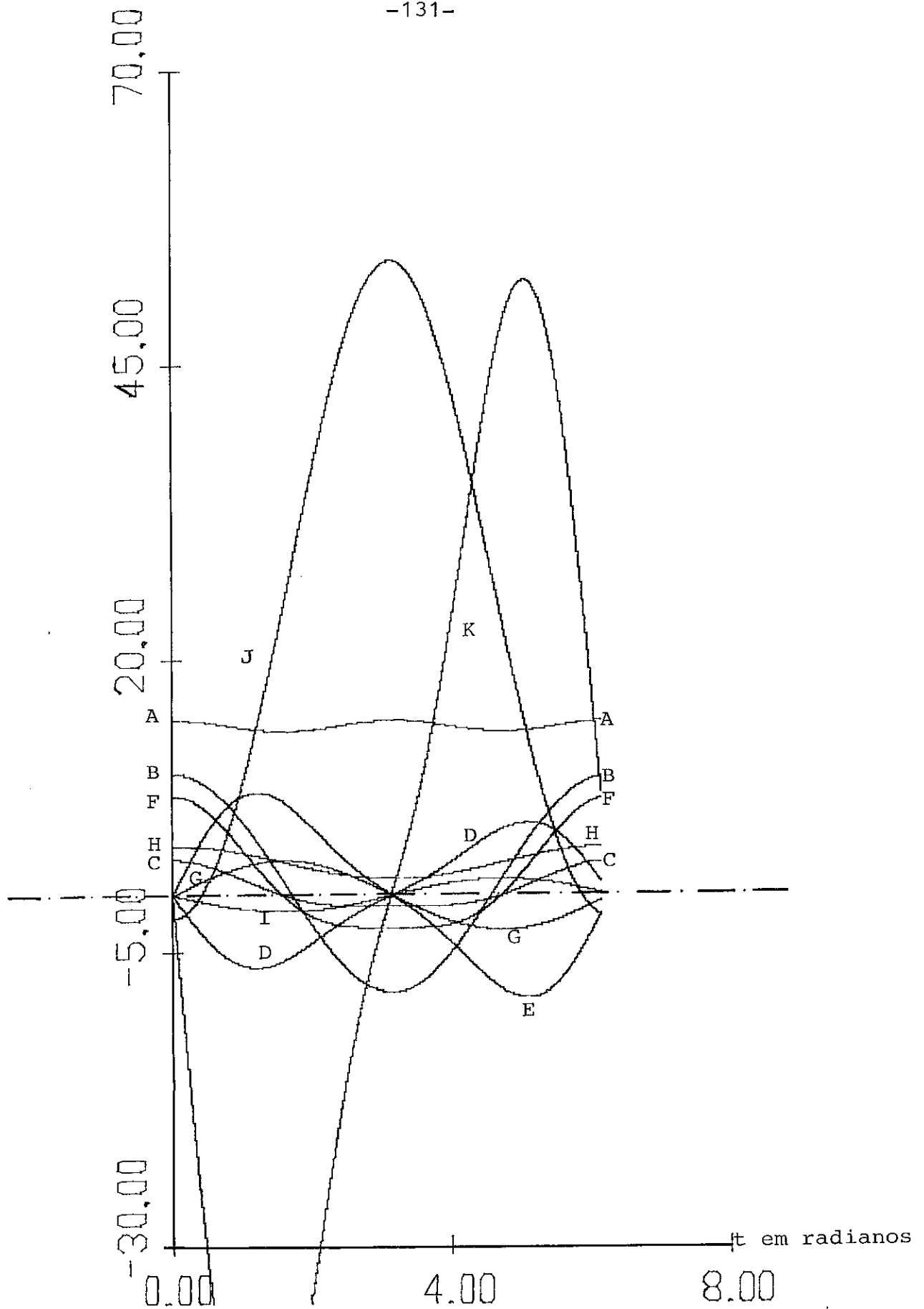


Figura 3.8.1 - A reta tracejada acima do -5,00' corresponde à ordenada zero. A correspondência de cada curva está dada no último parágrafo anterior.

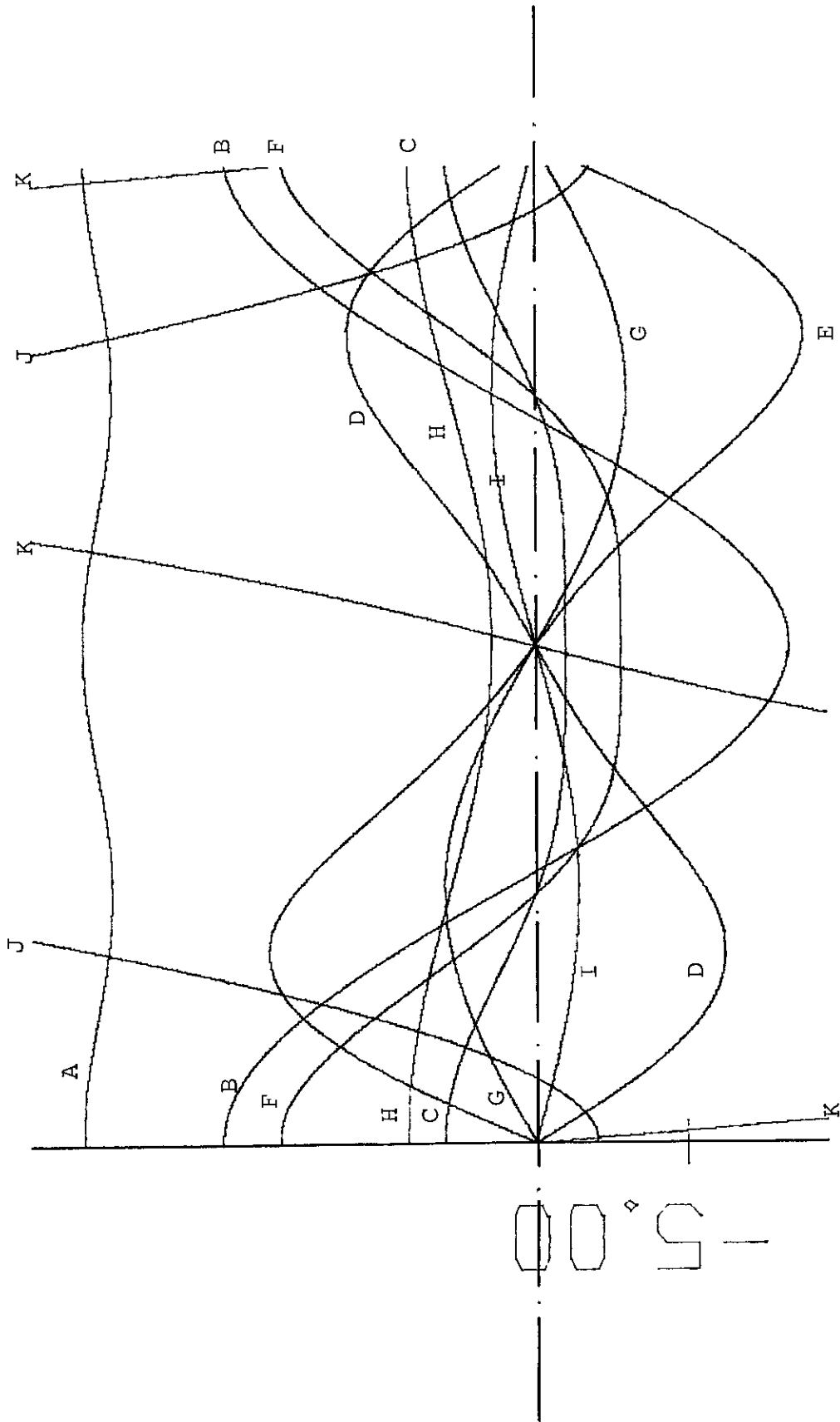


Figura 3.8.2 - Ampliação de parte da Fig. 3.8.1.

CAPÍTULO 4

NOVAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN COM ROTAÇÃO E $\Pi_{ii} = 0$

4.1 - A JUSTIFICATIVA DESTE CAPÍTULO

O elemento de linha ds_{NSFE}^2 , sobre o qual realizamos a transformação conforme dada pela equação (3.1.3), é solução das equações de campo de Einstein, e quando associamos ao conteúdo material o campo de velocidades (2.4.1), os observadores do sistema de referência comóvel com esse conteúdo material o vêem como um fluido imperfeito com $\Pi_{ii} \neq 0$ (ver item 2.5), mesmo para o caso estacionário, quando $D(t) = 0$. Por esse motivo, no Capítulo 3 buscamos, desde o início, soluções para as equações de Einstein, sem impor

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} \quad . \quad (4.1.1)$$

Então, neste capítulo, vamos mostrar que tais soluções existem, e que pelo menos no caso em que $\Omega^2 = 2$, tais soluções são fisicamente aceitáveis, e inclusive, as geometrias resultantes são conformes a Gödel.

4.2 - AS SOLUÇÕES

Nas equações (3.3.6) fazendo $T_{11} = T_{22}$ encontramos

$$A'' + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) A = 0 \quad , \quad (4.2.1)$$

que tem como solução as seguintes possibilidades:

(i) se $\Omega^2 < 2$

$$A(t,r) = g_1(t) e^{\frac{a}{2} \sqrt{2-\Omega^2} r} + g_2(t) e^{-\frac{a}{2} \sqrt{2-\Omega^2} r} ; (4.2.2)$$

(ii) se $\Omega^2 = 2$

$$A(t,r) = g_1(t)r + g_2(t) \quad (4.2.3)$$

(iii) se $\Omega^2 > 2$

$$A(t,r) = g_1(t) \sin\left(\frac{a}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} r\right) + g_2(t) \cos\left(\frac{a}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} r\right) . \quad (4.2.4)$$

Fazendo $T_{11} = T_{33}$ obtemos

$$\ddot{A}H^2 + \frac{a}{\Omega} (H-n)RA' - R^2A'' = 0 \quad . \quad (4.2.5)$$

Pondo $T_{22} = T_{33}$ encontramos uma equação, que levando em consideração (4.2.1), se reduz a (4.2.5).

Vamos agora impor que cada um dos casos (i), (ii) e (iii) satisfaça (4.2.5), para encontrarmos $g_1(t)$ e $g_2(t)$.

(i) para $\Omega^2 < 2$

Calculando as derivadas \ddot{A} , A' e A'' a partir de (4.2.2),

tomando as expressões (3.1.4) e (3.1.5) de H e R, e substituindo em (4.2.5) obtemos uma expressão que envolve $g_2, \ddot{g}_1, g_2, \ddot{g}_2$ como coeficientes de exponenciais em r, que após reagruparmos os termos, podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & [\ddot{g}_1 \Omega^2 + \frac{a^2}{2} \sqrt{2-\Omega^2} g_1 - \frac{a^2}{4} (2-\Omega^2) g_1] m^2 e^{(2 + \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [\ddot{g}_1 \Omega^2 - \frac{a^2}{2} \sqrt{2-\Omega^2} g_1 - \frac{a^2}{4} (2-\Omega^2) g_1] \ell^2 e^{(-2 + \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 \Omega^2 - \frac{a^2}{2} \sqrt{2-\Omega^2} g_2 - \frac{a^2}{4} (2-\Omega^2) g_2] m^2 e^{(2 - \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 \Omega^2 + \frac{a^2}{2} \sqrt{2-\Omega^2} g_2 - \frac{a^2}{4} (2-\Omega^2) g_2] \ell^2 e^{(-2 - \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [2\ddot{g}_1 \Omega m n] e^{(1 + \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + [2\ddot{g}_1 \Omega \ell n] e^{(-1 + \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [2\ddot{g}_2 \Omega m n] e^{(1 - \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + [2\ddot{g}_2 \Omega \ell n] e^{(-1 - \frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2}) ar} + \\
 & + [\ddot{g}_1 (2\Omega^2 m \ell + n^2) + \frac{a^2}{2} m \ell g_1 (2-\Omega^2)] e^{\frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2} ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 (2\Omega^2 m \ell + n^2) + \frac{a^2}{2} m \ell g_2 (2-\Omega^2)] e^{-\frac{\sqrt{2-\Omega^2}}{2} ar} = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.6}$$

Pela independência linear das exponenciais em r, cada coeficiente entre colchetes na eq. (4.2.6) tem que ser separadamente zero. E é isso que vamos verificar agora, ou seja, o que segue se refere à eq. (4.2.6).

Supondo $1 < \Omega^2 < 2$, $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$, subtraindo o coeficiente do 2º termo sobre ℓ^2 do coeficiente do 1º termo sobre m^2 , chegamos à conclusão que g_1 deve ser nulo. Subtraindo o co

eficiente do 3º termo sobre m^2 do coeficiente do 4º termo sobre ℓ^2 , chegamos à conclusão que g_2 deve ser nulo, ou seja, não existem g_1 e g_2 não nulos que satisfaçam (4.2.5).

Se $1 < \Omega^2 < 2$, $m \neq 0$ e $\ell = 0$, os coeficientes do 1º, 5º e 9º e do 3º, 7º e 10º termos implicam que $n = 0$. E restam as condições dadas pelos coeficientes do 1º e 3º termos, que nos levam respectivamente a

$$g_1(t) = C_2 \text{ sen } W(t) + C_3 \text{ cos } W(t) \quad (4.2.7)$$

e

$$g_2(t) = C_4 e^{V(t)} + C_5 e^{-V(t)} \quad (4.2.8)$$

com C_2, C_3, C_4, C_5 constantes de integração, e

$$W(t) = \frac{a}{2\Omega} [2 \sqrt{2-\Omega^2} - (2-\Omega^2)]^{1/2} t$$

e

$$V(t) = -\frac{a}{2\Omega} [2 \sqrt{2-\Omega^2} + (2-\Omega^2)]^{1/2} t.$$

Para $1 < \Omega^2 < 2$, $m = 0$ e $\ell \neq 0$, os coeficientes do 2º, 6º e 9º e do 4º, 8º e 10º termos implicam que $n = 0$. E restam as condições dadas pelos coeficientes do 2º e 4º termos que nos levam respectivamente a g_1 com uma expressão igual à de g_2 na eq. (4.2.8) e a g_2 que tem uma expressão idêntica à de g_1 na eq. (4.2.7), ou seja,

$$g_1 = g_2 \quad \text{em (4.2.8)} \quad (4.2.9)$$

$$g_2 = g_1 \quad \text{em (4.2.7)} \quad (4.2.10)$$

Se $\Omega^2 = 1$, $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$, a equação (4.2.6) se reduz a:

$$\begin{aligned}
 & [\ddot{g}_1 + \frac{a^2}{2} g_1 - \frac{a^2}{4} g_1] m^2 e^{\frac{5ar}{2}} + \\
 & + [\ddot{g}_2 + \frac{a^2}{2} g_2 - \frac{a^2}{4} g_2] \ell^2 e^{-\frac{5ar}{2}} + \\
 & + [\ddot{g}_1 + 2\ddot{g}_2 \frac{\Omega n}{\ell} - \frac{a^2}{2} g_1 - \frac{a^2}{4} g_1] \ell^2 e^{-\frac{3ar}{2}} + \\
 & + [\ddot{g}_2 + 2\ddot{g}_1 \frac{\Omega n}{m} - \frac{a^2}{2} g_2 - \frac{a^2}{4} g_2] m^2 e^{\frac{3ar}{2}} + \\
 & + [2\ddot{g}_1 \frac{\Omega n}{m} + 2\ddot{g}_2 + \ddot{g}_2 \frac{n^2}{m\ell} + \frac{a^2}{2} g_2] m\ell e^{-\frac{ar}{2}} + \\
 & + [2\ddot{g}_2 \frac{\Omega n}{\ell} + 2\ddot{g}_1 + \ddot{g}_1 \frac{n^2}{m\ell} + \frac{a^2}{2} g_1] m\ell e^{\frac{ar}{2}} = 0 . \quad (4.2.11)
 \end{aligned}$$

Novamente, pela independência linear das exponenciais em r , cada coeficiente entre colchetes na eq. (4.2.11) tem que ser separadamente zero. O que segue faz menção à equação (4.2.11).

Substituindo $2\ddot{g}_1 \frac{\Omega n}{m}$ tirado do coeficiente do 5º termo no coeficiente do 4º termo, obtemos

$$\left(1 + \frac{n^2}{m\ell}\right) \ddot{g}_2 + \frac{5a^2}{4} g_2 = 0 . \quad (4.2.12)$$

Do coeficiente do 2º termo temos

$$\ddot{g}_2 + \frac{a^2}{4} g_2 = 0 . \quad (4.2.13)$$

Olhando para essas duas últimas equações, vemos que ambas só são simultaneamente satisfeitas se

$$\frac{n^2}{m\ell} = 4 , \quad (4.2.14)$$

e neste caso temos

$$g_2(t) = C_4 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_5 \frac{at}{2} \quad , \quad (4.2.15a)$$

sendo C_4 e C_5 constantes de integração.

Um procedimento análogo ao anterior, só que desta vez envolvendo os coeficientes do 6º, 3º e 1º termos, como se pode ver pela semelhança das equações resultantes, nos leva novamente a (4.2.14) com

$$g_1(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_3 \cos \frac{at}{2} \quad , \quad (4.2.15b)$$

onde C_2 e C_3 são constantes de integração.

Para $\Omega^2 = 1$, $m \neq 0$ e $\ell = 0$, na eq. (4.2.11) os coeficientes do 1º com 6º e do 4º com o 5º termos nos levam a concluir que $n = 0$, restando então para esse caso as equações advindas dos coeficientes do 1º e 4º termos iguais a zero, que respectivamente nos levam a

$$g_1(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{at}{2} + C_3 \cos \frac{at}{2} \quad (4.2.16)$$

e

$$g_2(t) = C_4 e^{\frac{\sqrt{3}a}{2}t} + C_5 e^{-\frac{\sqrt{3}a}{2}t} \quad (4.2.17)$$

Para $\Omega^2 = 1$, $m = 0$ e $\ell \neq 0$ os coeficientes do 3º com o 6º termos e do 2º com o 5º nos levam a concluir que $n=0$, e as equações restantes, provenientes dos coeficientes do 3º e 2º termos iguais a zero implicam respectivamente em

$$g_1(t) = \text{mesma expressão que } g_2 \text{ em (4.2.17)} \quad (4.2.18)$$

$$g_2(t) = \text{mesma expressão que } g_1 \text{ em (4.2.16)} \quad (4.2.19)$$

(ii) para $\Omega^2 = 2$ (Caso Gödel)

Por um procedimento idêntico ao do primeiro parágrafo do caso (i), que antecede à eq. (4.2.6), chegamos a

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{g}_1 \Omega^2 m^2) r e^{2ar} + (\ddot{g}_1 \Omega^2 \ell^2) r e^{-2ar} + \\
 & + (\ddot{g}_2 2\Omega mn) r e^{ar} + (\ddot{g}_1 2\Omega \ell n) r e^{-ar} + \\
 & + (2\Omega^2 m \ell + n^2) \ddot{g}_1 r + \\
 & + (a g_1 + \Omega^2 \ddot{g}_2) m^2 e^{2ar} + (-a g_1 + \Omega^2 \ddot{g}_2) \ell^2 e^{-2ar} + \\
 & + (2\Omega mn \ddot{g}_2) e^{ar} + (2\Omega \ell n \ddot{g}_2) e^{-ar} + \\
 & + (2\Omega^2 m \ell + n^2) \ddot{g}_2 = 0 \quad . \quad (4.2.20)
 \end{aligned}$$

Novamente aqui, pela independência linear dos funcionais em r , cada coeficiente em (4.2.20) devem ser separadamente iguais a zero. O que segue se refere a (4.2.20).

Para $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$ o coeficiente do termo independente em r implica que

$$\ddot{g}_2 = 0 \implies g_2(t) = bt + q \quad , \quad (4.2.21)$$

onde b e q são constantes de integração.

E esse resultado nos coeficientes do 6º ou 7º termos implicam em

$$g_1 = 0 \quad . \quad (4.2.22)$$

Considerando (4.2.3), (4.2.21) e (4.2.22), temos que

$$A(t, r) = A(t) = bt + q \quad , \quad (4.2.23)$$

Em (4.2.20), para $m \neq 0$ e $\ell = 0$, se $n \neq 0$, recaímos em uma análise idêntica à anterior, que nos leva a (4.2.23). Se $n = 0$, ficamos com as equações determinadas pelos coeficientes do 1º e 6º termos, ou seja,

$$\ddot{g}_1 = 0 \implies g_1(t) = C_1 t + C_2 \quad (4.2.24)$$

e

$$\ddot{g}_2 = -\frac{a}{2} g_1 \implies g_2(t) = -\frac{aC_1}{12} t^3 - \frac{aC_2}{4} t^2 + C_3 t + C_4 \quad (4.2.25)$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4 , são constantes de integração.

Considerando (4.2.24), (4.2.25) e (4.2.3) temos que

$$A(t,r) = C_1 tr + C_2 r - \frac{aC_1}{12} t^3 - \frac{aC_2}{4} t^2 + C_3 t + C_4 \quad (4.2.26)$$

Para $m = 0$ e $\ell \neq 0$, as conclusões são semelhantes às do caso em que $m \neq 0$ e $\ell = 0$, apenas que a expressão equivalente a (4.2.26), devido ao sinal de menos que aparece no coeficiente do 7º termo, fica

$$A(t,r) = C_1 tr + C_2 r + \frac{aC_1}{12} t^3 + \frac{aC_2}{4} t^2 + C_3 t + C_4 \quad (4.2.27)$$

Note que quando fazemos em (4.2.27) ou em (4.2.26)

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$C_3 = b$$

$$C_4 = q$$

reobtemos (4.2.23).

(iii) para $\Omega^2 > 2$

Por um procedimento análogo ao do primeiro parágrafo

do caso (i), qua antecede à eq. (4.2.6), chega-se à seguinte equação ($\chi = \frac{a}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2}$ r):

$$\begin{aligned}
 & [\ddot{g}_1 \Omega^2 - \frac{a}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_2 a + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) g_1] m^2 \operatorname{sen} \chi e^{2ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 \Omega^2 + \frac{a}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_1 a + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) g_2] m^2 \operatorname{cos} \chi e^{2ar} + \\
 & + [\ddot{g}_1 \Omega^2 + \frac{a^2}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_2 a + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) g_1] \ell^2 \operatorname{sen} \chi e^{-2ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 \Omega^2 - \frac{a^2}{2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_1 a + \frac{a^2}{4} (\Omega^2 - 2) g_2] \ell^2 \operatorname{cos} \chi e^{-2ar} + \\
 & + [\ddot{g}_1 (2\Omega^2 + \frac{n^2}{m\ell}) - \frac{a^2}{2} (\Omega^2 - 2) g_1] m\ell \operatorname{sen} \chi + \\
 & + [\ddot{g}_2 (2\Omega^2 + \frac{n^2}{m\ell}) - \frac{a^2}{2} (\Omega^2 - 2) g_2] m\ell \operatorname{cos} \chi + \\
 & + [\ddot{g}_1 2\Omega mn] \operatorname{sen} \chi e^{ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 2\Omega mn] \operatorname{cos} \chi e^{ar} + \\
 & + [\ddot{g}_1 2\Omega ln] \operatorname{sen} \chi e^{ar} + \\
 & + [\ddot{g}_2 2\Omega ln] \operatorname{cos} \chi e^{ar} = 0 \quad . \quad (4.2.28)
 \end{aligned}$$

E aqui também os coeficientes entre colchetes têm que ser separadamente iguais a zero. O que segue faz alusão à equação (4.2.28).

Supondo $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$, subtraindo o coeficiente do 1º termo dividido por m^2 do do 3º dividido por ℓ^2 e o coeficiente do 4º sobre ℓ^2 do do 2º sobre m^2 , chegamos à conclusão que não existem g_1 e g_2 não nulos que satisfaçam (4.2.5), sob as hipóteses assumidas aqui.

Para $m \neq 0$ e $l = 0$, trabalhando com os coeficientes do 1º, 2º mais 5º e 6º ou 7º e 8º termos, chegamos a conclusão que só existirá g_1 e g_2 não nulos que satisfaça (4.2.5), se $n = 0$. Neste caso, restam as equações provenientes dos coeficientes do 1º e 2º termos, ou seja,

$$\ddot{g}_1 - \frac{a^2}{2\Omega^2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_2 + \frac{a^2}{4\Omega^2} (\Omega^2 - 2) g_1 = 0 \quad (4.2.29)$$

$$g_2 + \frac{a^2}{2\Omega^2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_1 + \frac{a^2}{4\Omega^2} (\Omega^2 - 2) g_2 = 0 \quad (4.2.30)$$

Vamos supor que g_1 e g_2 tenham solução geral da forma

$$g_1 = C_2 \text{ sen}(At) + C_3 \text{ cos}(At) \implies \ddot{g}_1 = -A^2 g_1 \quad (4.2.31)$$

$$g_2 = C_4 e^{At} + C_5 e^{-At} \implies \ddot{g}_2 = A^2 g_2 \quad (4.2.32)$$

Considerando essas duas últimas equações (4.2.29) e (4.2.30) ficam como

$$\left[\frac{a^2}{4\Omega^2} (\Omega^2 - 2) - A^2 \right] g_1 - \frac{a^2}{2\Omega^2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_2 = 0$$

$$\left[\frac{a^2}{4\Omega^2} (\Omega^2 - 2) + A^2 \right] g_2 + \frac{a^2}{2\Omega^2} \sqrt{\Omega^2 - 2} g_1 = 0 \quad .$$

Tirando g_2 da primeira e substituindo na última, obtemos:

$$A^4 = \left(\frac{a}{2\Omega} \right)^4 (\Omega^4 - 4) \quad (4.2.33)$$

Se em (4.2.33) assumirmos as raízes reais g_1 e g_2 em (4.2.31) e (4.2.32) ficam como estão. Se assumirmos as raízes

imaginárias elas irão intertrocar a dependência funcional, isto é, g_1 será exponencial (hiperbólica) e g_2 trigonométrica.

Para $m = 0$ e $\ell \neq 0$ é imediato de se ver, por comparação dos coeficientes em (4.2.28), que teremos um desenvolvimento e um resultado semelhante à situação anterior, em que $m \neq 0$ e $\ell = 0$.

Não faremos neste trabalho uma análise da fisicibilidade das soluções encontradas neste item, excetuando-se o caso (ii) que corresponde ao caso da geometria de Gödel.

4.3 - ANÁLISE DO CASO GÖDEL

Considerando a equação (4.2.23) podemos reescrever T_{AB} dado por (3.3.6) como

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{a^2}{2} (pt+q)^2 - 3\left(\frac{H^2}{R} - 1\right)b^2 - \Lambda \\ T_{01} &= -\Omega a b \frac{H}{R} (bt+q) \\ T_{13} &= \frac{2}{\Omega} ab \left(\frac{H}{R} \frac{(H-n)}{R} - \frac{\Omega^2}{2}\right) (bt+q) \\ T_{11} &= T_{22} = T_{33} = \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 + 3\left(\frac{H^2}{R} - 1\right)b^2 + \Lambda \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Vamos considerar H e R dados por (3.1.4) e (3.1.5) escritos em sistemas de coordenadas bem comportados, ou seja, aqueles em que a relação $(H/R)^2$ não diverge para nenhum valor de r , mas sim que tem seu valor máximo igual a $\Omega^2 = 2$, quando $ar \rightarrow \pm\infty$. Esses sistemas de coordenadas são aqueles em que (a) $m \neq 0$, $\ell \neq 0$ e $n = -\Omega(m+\ell)$, ou (b) $m \neq 0$ e $\ell=n=0$, ou

(c) $l \neq 0$ e $m = n = 0$. Para estes casos, o valor de H/R que mais compromete as condições de energia dominante, (3.7.20) e (3.7.21), é quando $|H/R| = \Omega = \sqrt{2}$, e nesta situação limite, que é quando $ar \rightarrow \pm\infty$, podemos reescrever (4.3.1) como

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 - 3b^2 - \Lambda \quad , \\ T_{01} &= \mp 2ab (bt+q) \quad , \\ T_{13} &= \sqrt{2} ab (bt+q) \quad , \\ T_{11} = T_{22} = T_{33} &= \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 + 3b^2 + \Lambda \quad , \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

sendo que nos casos (a) e (b) vale o sinal (-) em T_{01} , e no caso (c) vale o sinal (+).

Note que no caso (a) citado anteriormente (4.3.2) é o caso limite para $ar \rightarrow \infty$ e nos casos (b) e (c) (4.3.2) é o próprio tensor momento energia para qualquer valor de ar .

Aplicando as condições (3.7.20) e (3.7.21) a (4.3.2), obtemos as seguintes desigualdades significativas:

$$\Lambda \leq \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 - 3b^2 - 2ab (bt+q) = V \tag{4.3.3}$$

$$\Lambda \leq \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 - 3b^2 + 2ab (bt+q) = W \quad . \tag{4.3.4}$$

V tem ponto de mínimo em

$$bt + q = \frac{2b}{a} \tag{4.3.5}$$

e para esse valor de $bt+q$, (4.3.3) fica

$$\Lambda \leq -5b^2 \tag{4.3.6}$$

W tem ponto de mínimo em $bt+q = -2b/a$, que leva

(4.3.4) também em (4.3.6). Então concluímos que qualquer valor de Λ que satisfaça (4.3.6), $\Lambda \leq -5b^2$, torna as soluções em questão fisicamente aceitáveis.

Considerando (3.3.5), as partes irredutíveis não nulas do tensor (4.3.1), no sistema de coordenadas cilíndricas dado por (3.7.53), são

$$\rho = \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 - 3(2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 1)b^2 - \Lambda \quad , \quad (4.3.7)$$

$$p = \frac{a^2}{2} (bt+q)^2 + 3(2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 1)b^2 + \Lambda \quad , \quad (4.3.8)$$

$$\Pi_{13} = \sqrt{2} ab \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} (bt+q) \quad , \quad (4.3.9)$$

$$q_A = (0, T_{01}, 0, 0) \quad , \quad (4.3.10)$$

com

$$T_{01} = -2 ab \operatorname{th} \frac{ar}{2} (bt+q) \quad . \quad (4.3.11)$$

Já as quantidades cinemáticas não nulas são

$$\theta = -3b \quad , \quad (4.3.12)$$

$$\omega^A = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} a (bt+q), 0) \quad , \quad (4.3.13)$$

$$a^A = (0, 0, 0, b \operatorname{th} \frac{ar}{2}) \quad . \quad (4.3.14)$$

Note que podemos escrever

$$T_{0i} \sim \varepsilon_{0iBC} a^B \omega^C \quad ,$$

ou seja,

$$q_A \sim \varepsilon_{0ABC} a^B \omega^C \quad ,$$

e especificamente temos que

$$q_1 = 2\sqrt{2} \epsilon_{0132} a^{(3)} \omega^{(2)} .$$

O escalar de curvatura fica como

$$\mathbb{R} = -a^2 (bt+q)^2 - 12(2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 1) b^2 . \quad (4.3.15)$$

Para obtermos as expressões ρ , p , Π_{AB} , q_A , θ , ω^A , a^A e \mathbb{R} para a métrica conformalmente transformada \hat{a} de Gödel escrita no sistema de coordenadas dado por (3.7.8) basta fazer $ar \rightarrow \infty$ nas expressões (4.3.7) a (4.3.15) pelas mesmas razões discutidas no final do item 3.7.

No ponto em que as grandezas anteriores atingem o seu menor valor absoluto, ou seja, em

$$t = -\frac{q}{b} , \quad (4.3.16)$$

o escalar de curvatura se reduz a

$$\mathbb{R}_{t=-q/b} = -12(2 \operatorname{th}^2 \frac{ar}{2} - 1) b^2 . \quad (4.3.17)$$

A expressão (2.10.14) (ver também item 1.7) nos diz que

$$\operatorname{sh} \frac{ar_c}{2} = 1 , \quad (4.3.18)$$

onde r_c é o raio crítico que corresponde a uma trajetória do tipo tempo fechada para $t = \text{const.}$, $r = \text{const.}$, $z = \text{const.}$. De imediato, a partir de (4.3.18), calcula-se que

$$\operatorname{th} \frac{ar_c}{2} = \frac{1}{2} . \quad (4.3.19)$$

Levando (4.3.19) em (4.3.17) ficamos com

$$\mathbb{R} \Big|_{\substack{t = -\frac{q}{b} \\ r = r_c}} = 0 \quad (4.3.20)$$

$$\mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} t = -\frac{bt+q}{b} \\ r < r_c \end{array} \right. > 0 \quad (4.3.21)$$

$$\mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} t = -\frac{bt+q}{b} \\ r > r_c \end{array} \right. < 0 \quad (4.3.22)$$

Vemos então, que este modelo apresenta uma região do espaço-tempo onde a quadricurvatura é positiva. E no intervalo de t onde isso ocorre, as fronteiras dessa região são delimitadas em função do raio crítico de causalidade.

Outro fato curioso a se observar é que para um dado valor de r , a expansão e a aceleração do conteúdo material são constantes, enquanto que as demais grandezas, inclusive o escalar de curvatura, à medida que t passa, vem de valores grandes, em valor absoluto, para $t \rightarrow -\infty$, passam por um valor mínimo em $t = -\frac{q}{b}$, e depois divergem novamente, à medida que $t \rightarrow +\infty$.

Utilizando as eqs. (3.3.5), (4.2.23), (4.3.7), (4.3.8), (4.3.12) e (2.12.1), a equação (2.12.2) fica

$$\mu T \dot{S} = 2 b a^2 (bt+q)^2, \quad (4.3.23)$$

e por (4.3.12) podemos reescrevê-la como

$$\mu T \dot{S} = -\frac{2}{3} \theta a^2 (bt+q)^2, \quad (4.3.24)$$

e a conclusão é idêntica à do final do item 2.12: aceitando as restrições impostas pela equação (2.12.12), como $[\frac{2}{3}a^2(bt+q)^2]$, μ , T são sempre positivos, \dot{S} só será positivo se θ for negativo

$$\theta < 0, \quad (4.3.25)$$

ou seja, se considerarmos que (2.12.2) expressa bem o segundo

princípio da termodinâmica, este só será obedecido se o presente modelo estiver em contração.

CONCLUSÕES

Mostramos que a rotação é um indicativo de que a geometria é uma geometria inclinada. Generalizamos o conceito de geometria inclinada dado por Ellis & King⁽⁶⁾ e mostramos que qualquer modelo que apresente rotação se encaixa nessa classificação de geometria inclinada generalizada. Encontramos novas soluções das equações de Einstein que representam novos modelos cosmológicos não estacionários e com rotação que tem como fonte um fluido imperfeito com fluxo de energia e que para métricas escrita da mesma forma não existe solução do tipo fluido perfeito. Há casos particulares conformalmente planos que não apresentam violação da causalidade do tipo que ocorre em Gödel e também há casos particulares que não apresentam rotação. Mostramos que existe uma equivalência entre os casos particulares estacionários de nossos modelos, que lembramos, tem como fonte um fluido imperfeito, e os modelos discutidos por Rebouças & Tiomno⁽¹⁵⁾ que tem como fonte um fluido perfeito mais outros campos que não o gravitacional.

Mostramos que existem soluções pulsantes das equações de Einstein que são conformes aos casos particulares estacionários de nossos modelos, e em especial ao modelo de Gödel que está entre eles. Esses modelos pulsantes, onde as grandezas que caracterizam o modelo são funções trigonométricas da coordenada temporal, tem como fonte um fluido imperfeito com fluxo de energia. Encontramos também modelos conformes ao de Gödel, ca-

racterizados por grandezas que são funções de potências da coordenada temporal, e que apresentam $T_{11} = T_{22} = T_{33}$, $\Pi_{13} \neq 0$ e $q_1 \neq 0$. Esses modelos, conformes a Gödel, são não estacionários e girantes, e generalizam o modelo de Gödel estacionário de maneira análoga à que o modelo de Friedman generaliza o modelo de Einstein.

Analisando a variação da densidade de entropia \dot{S} para esses modelos não estacionários girantes chegamos à conclusão que:

i) ou admitimos que $\dot{S} > 0$ sempre, e nesse caso os modelos analisados representam Universos em contração ($\theta < 0$), ou seja, não servem para representar o Universo atual que está em expansão;

ii) ou admitimos que para os modelos com rotação, que são modelos abertos, possamos ter $\dot{S} < 0$, e nesse caso os modelos analisados poderiam ter $\theta > 0$, ou seja, poderiam explicar o desvio para o vermelho que o Nosso Universo Real apresenta atualmente, mas restaria a dificuldade de dar significado à desigualdade $\dot{S} < 0$;

iii) ou admitimos que a expressão que usamos para relacionar \dot{S} com as quantidades que caracterizam o fluido cosmológico não é uma boa equação para o caso dos modelos em questão e então o assunto merece um estudo mais profundo.

APÊNDICE A

NOTAÇÃO, CONVENÇÕES, DEFINIÇÕES E EQUAÇÕES EMPREGADAS

A.1 - GENERALIDADES

A menos que o texto faça menção diferente, usamos

- índices latinos maiúsculos como índices de tetradas, variando de 0 a 3;

- índices gregos como índices de coordenadas, variando de 0 a 3;

- índices latinos minúsculos são usados indistintamente como índices de tetradas e de coordenadas variando de 1 a 3. A distinção entre uma situação e outra está no contexto;

- índices numéricos são usados indistintamente como índices de tetradas e de coordenadas. A distinção entre uma situação e outra está no contexto, e no caso de índices mistos, o índice numérico de tetradas aparece entre parênteses enquanto que o índice de coordenadas não;

- x^0, x^1, x^2, x^3 ou t, r, z, ϕ como coordenadas quaisquer, e mais especificamente, o fato de usarmos t, r, z, ϕ não alude a nenhum sistema de coordenadas especial, a menos dos casos especificados explicitamente no texto;

- usamos métrica com assinatura $(+,-,-,-)$;

- uma única barra vertical designa derivada comum:

$$A_{\nu|\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} ;$$

- ponto, frisamos, a menos dos lugares onde o texto faz menção contrária, designa derivada em relação a t ou x^0 :

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H}{\partial x^0} ;$$

- linha designa derivada em relação a r ou x^1 :

$$H' = \frac{\partial H}{\partial r} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H}{\partial x^1} .$$

Observador: pode ser qualquer curva do tipo tempo apontando para o futuro (ref. (24), pág. 41).

Sistema de referência ou *referencial*: pode ser qualquer campo vetorial cujas curvas integrais são observadores (ref. (24) pág. 52).

Definições de *estacionário* e *estático* (ref. (24), pág. 219): Seja M a variedade 4-dim. associada ao espaço-tempo. Seja \vec{Z} um sistema de referência em M . \vec{Z} é definido como *estacionário* se existe uma função positiva f em M tal que $f\vec{Z}$ é um campo vetorial de Killing. \vec{Z} é definido como *estático* se \vec{Z} é estacionário e irrotacional. O espaço-tempo associado a M é *estacionário* (respectivamente, *estático*) se existe em M um sistema de referência \vec{Z} estacionário (respectivamente, estático). Pode-se dizer então que enquanto um *espaço-tempo estacionário* corresponde ao campo gravitacional gerado por uma fonte que independe do tempo, *estático* usualmente significa que em adição a fonte não apresenta rotação.

O tensor de Levi-Civita foi tomado como sendo

$$\eta^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{4!}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} ,$$

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} ,$$

onde

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{se } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ é permutação par de } 0, 1, 2, 3 \\ -1, & \text{se } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ é permutação ímpar de } 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{nos demais casos .} \end{cases}$$

As operações de *simetrização* e *antissimetrização* de tensores estão definidas nas equações (A.2.15) e (A.2.16), respectivamente.

A.2 - REFERENTE A UM SISTEMA DE COORDENADAS x^μ QUALQUER

Elemento de linha (ref. (4), pág. 18):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{A.2.1})$$

Símbolos de Christoffel (ref. (4), pág. 52):

$$\{\alpha_{\beta\gamma}\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta|\gamma} + g_{\rho\gamma|\beta} - g_{\beta\gamma|\rho}) \quad (\text{A.2.2})$$

Derivada covariante (ref. (4), Capítulo 3):

$$A^\mu_{\nu||\rho} = A^\mu_{\nu|\rho} + \{\rho\sigma\}^\mu A^\sigma_\nu - \{\rho\nu\}^\sigma A^\mu_\sigma . \quad (\text{A.2.3})$$

Tensor de Curvatura (em função dos símbolos de Christoffel) (ref. (4), pág. 149):

$$R^\alpha_{\beta\rho\sigma} = \{\alpha_{\beta\rho}\}|\sigma - \{\alpha_{\beta\sigma}\}|\rho + \{\mu\sigma\}^\alpha \{\beta\rho\}^\mu - \{\mu\rho\}^\alpha \{\sigma\beta\}^\mu . \quad (\text{A.2.4})$$

Tensor de Ricci (ref. (4), pág. 169):

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad . \quad (\text{A.2.5})$$

Escalar de curvatura ou de Riemann (ref. (4), pág. 170):

$$\mathbb{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.2.6})$$

Tensor de Weyl (ref. (12), pág. 41):

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\gamma\delta} = & R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} + g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) + \\ & + \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \mathbb{R} \quad . \quad (\text{A.2.7}) \end{aligned}$$

Tensor de Einstein (ref. (4), pág. 170):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathbb{R} \quad . \quad (\text{A.2.8})$$

Seja $\{x^\alpha\}$ um sistema de coordenadas qualquer da variedade Riemanniana 4-dim. M associada ao espaço-tempo. Vamos definir o campo vetorial \vec{V} , que chamaremos de *campo de velocidade* por

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{com} \quad V^\mu V^\nu g_{\mu\nu} = 1 \quad , \quad (\text{A.2.9})$$

sendo s o parâmetro da curva x^μ .

A partir disso podemos definir (ref. (25), págs. 203 a 208 e ref. (5), págs. 102 a 114):

- o tensor de projeção no tri-espaço H

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (\text{A.2.10})$$

- se $\vec{\eta}$ é o vetor conexão (ref. (8), pág.) que liga duas curvas vizinhas de uma mesma congruência que intercepta H , podemos então expressar a velocidade relativa $\vec{V}_{(\text{rel})}$,

de afastamento entre p e um seu ponto vizinho $p+\Delta p$, ambos em H por

$$V_{(rel)}^{\alpha} = Q_{\mu}^{\alpha} \eta^{\mu} \quad , \quad (A.2.11)$$

onde

$$Q_{\mu}^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} h^{\lambda}_{\mu} V^{\beta}_{\parallel \lambda} \quad ; \quad (A.2.12)$$

que pode ser escrito em termo das suas partes irreduzíveis como

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad , \quad (A.2.13)$$

ou seja, o traço, uma parte simétrica sem traço e uma antissimétrica definidas por:

- *expansão*

$$\theta = Q^{\alpha}_{\alpha} = V^{\alpha}_{\parallel \alpha} \quad , \quad (A.2.14)$$

- *tensor de deformação*

$$\frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} = Q_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha}) = h^{\mu}_{(\alpha} h^{\lambda}_{\beta)} V_{\mu\parallel \lambda} \quad , \quad (A.2.15)$$

- *tensor de rotação*

$$\omega_{\alpha\beta} = Q_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\alpha}) = h^{\mu}_{[\alpha} h^{\lambda}_{\beta]} V_{\mu\parallel \lambda} \quad , \quad (A.2.16)$$

- *vetor de rotação*

$$\omega^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\sigma\rho} \omega_{\alpha\beta} V_{\sigma} \quad . \quad (A.2.17)$$

A interpretação física dessas grandezas pode ser encontrada no item 1.6 desta tese, na ref. (5), págs. 110 a 114 e ref. (27), págs. 11 a 13.

A *aceleração* é definida a partir de (A.2.9) por

$$a^{\alpha} = \frac{DV^{\alpha}}{Ds} = V^{\alpha}_{\parallel \beta} V^{\beta} \quad . \quad (A.2.18)$$

As equações de Einstein com constante cosmológica Λ , se escrevem como (ref. (26), págs. 347 e 361)

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2.19})$$

onde

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (\text{A.2.20})$$

sendo G a constante da gravitação universal que aparece nas leis de Newton e c é a velocidade da luz. Vale observar que quando usamos k definido por (A.2.20) com c^4 no denominador, teremos a densidade ρ , dada por (A.2.23), expressa em unidades de energia/volume = $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$, enquanto que se usarmos k definido por

$$k = \frac{8\pi G}{c^2}$$

teremos a densidade ρ expressa em massa/volume = $[\text{ML}^{-3}]$.

Nós utilizamos as equações (A.2.17) escritas como

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.2.21})$$

logo nosso $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$T_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.2.22})$$

As dimensões dessas grandezas são apresentadas na Tabela A.2.1.

Com o campo de velocidade (A.2.9) e o tensor de projeção (A.2.10) podemos decompor $T_{\mu\nu}$ em suas chamadas *partes irreduzíveis* dadas por (ref. (25), págs. 225 a 227 e ref. (5),

GRANDEZA	DIMENSÃO
$G_{\mu\nu}$	comprimento ⁻² = [L ⁻²]
$T_{\mu\nu}$	comprimento ⁻² = [L ⁻²]
$T_{\mu\nu}$	energia.comprimento ⁻³ = [L ⁻¹ MT ⁻²]
Λ	comprimento ⁻² = [L ⁻²]
G	força.comprimento ² .massa ⁻² = [L ³ M ⁻¹ T ³]
k	comprimento ⁻² .comprimento ³ .energia ⁻¹ = [L ⁻¹ M ⁻¹ T ²]
$g_{\mu\nu}$	adimensional

TABELA A.2.1 - Dimensões das grandezas que aparecem nas equações de campo de Einstein.

pág. 116):

- densidade de energia

$$\rho = T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \quad , \quad (\text{A.2.23})$$

- pressão isotrópica

$$p = - \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.2.24})$$

- fluxo de energia

$$q_{\alpha} = T_{\rho\sigma} V^{\rho} h^{\sigma}_{\alpha} \quad , \quad (\text{A.2.25})$$

- pressão anisotrópica

$$\Pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.2.26})$$

$T_{\mu\nu}$ pode então ser escrito como a soma de suas partes irreduzíveis

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.2.27})$$

A.3 - REFERENTE A UMA BASE DE TETRADAS LOCAL QUALQUER

Elemento de linha: (ref. (28), pág. 505)

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad , \quad (A.3.1)$$

onde $\eta_{AB} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski e θ^A são um formas.

Entre η_{AB} e $g_{\mu\nu}$ existem as relações (ref. (28) , pág. 502)

$$\eta_{AB} = g_{\mu\nu} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} \quad (A.3.2)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e^{(A)}_\mu e^{(B)}_\nu \quad , \quad (A.3.3)$$

onde $\vec{e}_{(A)}$, $A = 0$ a 3 , são os vetores da base local de tetradas e a matriz $[e^\alpha_{(A)}]$, com α índice de linhas e (A) índice de colunas é chamada *matriz de tetradas com inversa* $[e^{(A)}_\alpha]$, com (A) índice de linhas e α índice de colunas. Temos então as relações

$$e^\alpha_{(A)} e^{(A)}_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad (A.3.4)$$

$$e^\alpha_{(A)} e^{(B)}_\alpha = \delta^B_A \quad (A.3.5)$$

$$\theta^A = e^{(A)}_\alpha dx^\alpha \quad (A.3.6)$$

$$dx^\alpha = e^\alpha_{(A)} \theta^A \quad . \quad (A.3.7)$$

No cálculo com formas, ref. (28), pág. 505, a partir de um dado elemento de linha (A.2.1), escrevêmo-lo na forma (A.3.1), montamos então as equações (A.3.6) e (A.3.7) de onde

lemos respectivamente a matriz de tetradas e sua inversa, que pode obviamente também ser calculada por inversão de matrizes. As matrizes $e^{\alpha}_{(A)}$ e $e^{\alpha}_{(A)}$ são usadas na transformação das expressões dos objetos geométricos da base local de tetradas para a base do sistema de coordenadas e vice versa, como indicam as expressões (A.3.2), (A.3.3), (A.3.6) e (A.3.7).

No cálculo do tensor de curvatura na base de tetradas usamos a seguinte sequência operacional:

1 - Tomamos a derivada das 1-formas θ^A , de onde lemos diretamente os C^A_{BC} por comparação com a expressão

$$d\theta^A = \frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C ; \quad (\text{A.3.8})$$

2 - Calculamos então os γ_{ABC} por

$$\gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) ; \quad (\text{A.3.9})$$

3 - Os ω^A_B ficam dados por

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C ; \quad (\text{A.3.10})$$

4 - Calculamos então $d\omega^A_B$ e a partir daí os Ω^A_B como sendo

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (\text{A.3.11})$$

5 - A partir das expressões (A.3.11) lemos diretamente os R^A_{BCD} por comparação com

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (\text{A.3.12})$$

Se o campo de velocidade (A.2.9) for dado por

$$V^\alpha = e^\alpha_{(0)} \quad (\text{A.3.13})$$

temos que

$$V^A = e^{(A)}_{\alpha} V^\alpha = \delta_0^A \quad , \quad (\text{A.3.14})$$

e podemos escrever os parâmetros cinemáticos na base de tetradas local como sendo

- expansão

$$\theta = -\gamma_{BC}^0 \eta^{BC} \quad (\text{A.3.15})$$

- tensor de deformação

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} [-\gamma_{AB}^0 - \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \eta_{B0} + \gamma_{B0}^0 \eta_{A0} - \frac{2}{3} \theta h_{AB}] \quad (\text{A.3.16})$$

- tensor de rotação

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} [-\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \delta_B^0 - \gamma_{B0}^0 \delta_A^0] \quad (\text{A.3.17})$$

- aceleração

$$a_A = -\gamma_{A0}^0 \quad . \quad (\text{A.3.18})$$

A expressão de definição dos γ_{BC}^A é

$$\gamma_{BC}^A = -e^{(A)}_{\alpha} e^\alpha_{(B)} e^\beta_{(C)} \quad , \quad (\text{A.3.19})$$

e usando a definição de derivada covariante dada em (A.2.3) temos

$$\gamma_{BC}^A = -[e^{(A)}_{\alpha} e^\alpha_{(B)} e^\beta_{(C)} - \{\sigma_{\beta\alpha}\} e^{(A)}_{\sigma} e^\alpha_{(B)} e^\beta_{(C)}] \quad , \quad (\text{A.3.20})$$

expressão essa que nos permite obter os γ_{BC}^A a partir dos símbolos de Christoffel e vice-versa.

APÊNDICE B

LISTAGENS DOS ARQUIVOS PRINCIPAIS UTILIZADOS NOS CÁLCULOS ALGÉBRICOS

Parte dos cálculos desta tese foram feitos usando-se o interpretador *REDUCE 2 para computação algébrica. Os cálculos foram feitos pelo Computador do LCC, Laboratório de Computação Científica - CNPq, onde está implantado o sistema interpretador *REDUCE 2. A seguir anexamos listagens dos principais arquivos que usamos nos nossos cálculos.



```

COMMENT INTRODUCE THE COVARIANT AND CONTRAVARIANT METRICS:
10
11 ON WORD:
12 CIPAR Y,RS:
13 OPERATOR Y,RS:
14
15 CLEAR RP,HP,AF,OMEG,BC,FIG,M,KC,DT,R,Z,PI:
16 OPERATOR AP,HP,RP,DT,SH,CH,AC:
17
18
19
20
21 OFF %GD,SCD:
22
23 X(1):=T$
24 X(2):=R$
25 X(3):=7$
26 X(4):=PI$
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

*** **
ESTE PROGRAMA E UMA EXPRESSAO DO DO PROGRAMA ORIGINAL DE DAVID HAZTON AND JOHN FITCH, REALIZADA POR
FERNÃO FERES DOS SANTOS, CAUANDA POMBO E ABILIO VALERIO POLINI, IGUAIS AOS CONHECIMENTOS COMPUTACIONAIS DO PR-
MIRO, CALCULA, EM CONDENSADAS E EM TETRADAS, A PARTIR DA MATRIZ DA METRICA E DA MATRIZ DE TETRADAS, O TENSOR
DE CURVATURA, DE RICCI, DE EINSTEIN, DE WEYL, O ESCALAR DE CURVATURA, E AS QUANTIDADES CINEMATICAS (A TERMINAÇÃO
"TR" DESIGNA QUE A GRANDEZA ESTA CALCULADA NO SISTEMA DE TETRADAS) . S E J A P E L I Z !!!!!!!:

COMMENT INTRODUCE TETRAD MATRIX, QUE E TAL QUE
DIFERENCIAL X J = TETR J * TETRADA (A)
(A):

TETR:=MAT ((1/AF(X(1)),X(2)),0,0,-HP(X(1)),X(2))/(AF(X(1)),X(2))*RP(X(1),X(2))),
(0,1/AF(X(1)),X(2)),0,0,(0,0,1/AF(X(1)),X(2)),0),
(0,0,1/(AF(X(1)),X(2))*RP(X(1),X(2))):

TETR I:=TETR*(-1):

COMMENT GENERATE CHRISTOFFEL SYMBOLS AND STORE IN ARRAYS CS1 AND CS2
NOTE REM : CS(I,J,K) = CS
K
IJ
:

ARRAY CS1(4,4,4),CS2(4,4,4),GAMA(4,4,4):

FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO BEGIN
FOR K:=1:4 DO
CS1(I,J,K) := CS1(I,J,K)+(DF(GG(I,K),X(J))*DF(GC(J,K),X(I))
-DF(GS(I,J),X(K)))/Z:

```

REGRAT



CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTIFICO E TECNOLÓGICO
LCC - LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTIFICA

```

61 FOR K=1:4 DO WRITE CS2(J,I,K):=CS2(I,J,K) := FOR P :=1:4
62 SUM H(K,P)*CS1(I,J,P) END;
63
64 OFF NAT, ECHO;
65 OFF CS2;
66 FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
67   FOR C:=1:4 DO
68     IF CS2(A,B,C) NEQ 0 THEN WRITE "CS2("A,"B,"C,"):=CS2("B,"A,"C,") := "CS2(A,B,C) ;
69   ON NAT, ECHO;
70
71 COMMENT C O N V E N C A O ;
72
73 GAMMA(A,B,C) = GAMMA A
74
75 BC;
76
77 FOR A:=1:4 DO FOR B:=1:4 DO
78   FOR C:=1:4 DO
79     WRITE GAMMA(A,B,C) :=FOR I:=1:4 SUM FOR J:=1:4 SUM
80       (-DE(TERRI(A,I),X(I))+FOR K:=1:4 SUM CS2(I,J,K)*TERR(A,K))*TERR(J,C)*TERR(I,B) $
81
82 OFF NAT, ECHO;
83 OFF GAMMA;
84 FOR A:=1:4 DO FOR B:=1:4 DO
85   FOR C:=1:4 DO
86     IF GAMMA(A,B,C) NEQ 0 THEN WRITE "GAMMA("A,"B,"C,") := "GAMMA(A,B,C) ;
87
88 ON NAT, ECHO;
89
90 COMMENT NOW COMPUTE THE RIEMANN TENSOR AND STORE IN R(I,J,K,L);
91
92 ARRAY R(4,4,4,4), FRR(4,4,4,4) $
93
94 OFF MCD;
95
96 FOR I:=1:4 DO FOR J:=I+1:4 DO FOR K:=I+1:4 DO
97   FOR L:=K+1:4 THEN R(I,J,K,L) := FOR Q := 1:4
98     WRITE R(I,J,L,K) := R(I,J,K,L)
99     SUM GG(I,Q)*(OF(CS2(K,J,Q),X(I))-DE(CS2(Q,L,Q),X(K))
100       + FOR P:=1:4 SUM (CS2(P,L,Q)*CS2(I,J,P)))$
101     -CS2(P,K,Q)*CS2(I,J,P))$
102     LET R(I,J,L,K) = -R(I,J,K,L)
103     IF I=K AND J=L THEN GO TO A$
104     R(K,L,I,J) := R(L,K,J,I) := R(I,J,K,L)
105     LET R(L,K,I,J) = -R(I,J,K,L), R(K,L,I,J) = -R(I,J,K,L);
106
107 A : ENDS
108
109 OFF NAT, ECHO;
110
111 OUT R;
112 FOR I:=1:4 DO FOR J:=I+1:4 DO FOR K:=I+1:4 DO
113   FOR L:=K+1:4 THEN K=I THEN J ELSE 4 DO BEGIN
114     WRITE "R("J,"I,"L,"K,") := R("I,"J,"K,"L,") := "R(I,J,K,L);
115     "R("J,"I,"L,"K,") := -R("I,"J,"K,"L,") := -R(I,J,K,L);
116     IF I=K AND J=L THEN GO TO C$
117     WRITE "R("K,"L,"J,"I,") := R("L,"J,"I,"K,") := R(I,J,K,L)
118     WRITE "R("L,"J,"I,"K,") := -R("I,"J,"K,"L,") := -R(I,J,K,L)$
119     "R("K,"L,"J,"I,") := -R("L,"J,"I,"K,") := -R(I,J,K,L);
120
121 C : ENDS
122 OUT T;

```



```

121 ON NAT, ECHO:
122
123 FOR A:=1:4 DO FOR B:=A+1:4 DO FOR C:=A:4 DO
124   FOR D:=C+1:IF C=A THEN B ELSE 4 DO BEGIN
125     WRITE RTR(4,A,D,C):=RTR(A,B,C,D):=FOR I:=1:4 SUM FOR J:=1:4 SUM FOR K:=1:4 SUM FOR L:=1:4 SUM
126     R(I,J,K,L)*RTR(I,A)*RTR(J,B)*RTR(K,C)*RTR(L,D)$
127     LET RTR(A,B,D,C) = -RTR(A,B,C,D), RTR(B,A,C,D) = -RTR(A,B,C,D):
128     IF A=C AND B=D THEN GO TO A9$
129     RTR(C,D,A,B) := RTR(D,C,B,A) := RTR(A,B,C,D)$
130     LET RTR(D,C,A,B) = -RTR(A,B,C,D), RTR(C,D,B,A) = -RTR(A,B,C,D):
131   A9: ENDS
132
133 OFF NAT, ECHO:
134
135 OUT RTR:
136 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1+1:4 DD FOR K:=I:4 DO
137   FOR L:=K+1:IF K=I THEN J ELSE 4 DO BEGIN
138     WRITE RTR("J",I,"L",J,"K",L) := RTR(I,"J",K,L) := RTR(I,"J",K,L):
139     WRITE LEFT RTR("J",I,"L",J,"K",L) = -RTR("I",J,"K",L),
140     RTR("J",I,"L",J,"K",L) = -RTR("I",J,"K",L),
141     IF I=K AND J<=L THEN GO TO D$.
142     WRITE RTR("K",I,"L",J,"K",L) := RTR("L",I,"K",J,"K",L) := RTR(I,"J",K,L)$
143     WRITE LEFT RTR("L",I,"K",J,"K",L) = -RTR("I",J,"K",L),
144     RTR("K",I,"L",J,"K",L) = -RTR("I",J,"K",L),
145     RTR("L",I,"K",J,"K",L) := RTR(I,"J",K,L)$
146   D: ENDS$
147
148 OUT T:
149 ON NAT, ECHO:
150
151 CDMWERTZ INTRODUCE MINKOWSKI MATRIX AND PROJECTION TENSOR
152 AND ALSO KRONECKER DELTA.
153 PARTICULAR CASE : VELDICTY FIXX = (1,D,0,0)
154
155 ARRAY ETA(4,4), HAB(4,4), DELTK(4,4), DEFORM(4,4), ROTAC(4,4),
156   ACPLER(4):
157
158 DELTK(1,1):=DELT(2,2):=DELT(3,3):=DELT(4,4):=1$
159
160 ETA(1,1):=1$
161
162 ETA(2,2):=ETA(3,3):=ETA(4,4):=-1$
163
164 HAB(2,2):=HAB(3,3):=HAB(4,4):=-1$
165
166 COMMENT NOW COMPUTE AND PRINT THE RICCI TENSOR:
167
168 APRAY RICCI(4,4), RICCTR(4,4)$
169
170 FOR I:=1:4 DO FOR J:=I:4 DO
171   WRITE RICCI(J,I) := RICCI(I,J) := FOR P := 1:4 SUM FOR Q := 1:4
172     SUM H(P,Q)*E(Q,I,P,J)$
173
174 OFF NAT, ECHO:
175
176 OUT T:
177 ON NAT, ECHO:
178
179 FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
180   WRITE RICCTR(B,A):=RICCTR(A,B):=FOR I:=1:4 SUM FOR J:=1:4 SUM

```



181	OFF MAT, ECHO:
182	OFF MAT, ECHO:
183	OFF RICCI T:
184	FOR I:=1:4 DO FOR J:=I:4 DO
185	WRITE "RICCI(T,"J","I,"") := RICCI(T,"I","J","") := " , RICCI(T,I,J) :
186	OUT T:
187	OR MAT, ECHO:
188	COMMENT NOW COMPUTE AND PRINT THE RICCI SCALAR:
189	RS := FOR I:= 1:4 SUM FOR J:= 1:4 SUM IF H(I,J)=0 OR RICCI(I,J)=0 THEN 0
190	ELSE H(I,J)*RICCI(I,J) :
191	191
192	OFF MAT, ECHO:
193	OUT RS:
194	WRITE "RS :=",RS:
195	OUT T:
196	OR MAT, ECHO:
197	197
198	198
199	199
200	200
201	ARRAY EINSTEIN(4,4), EINSTR(4,4) :
202	202
203	203
204	FOR I:=1:4 DO FOR J:=I:4 DO
205	WRITE EINSTEIN(J,I) := EINSTEIN(I,J) := RICCI(I,J) - RS*GG(I,J) / 2:
206	206
207	OFF MAT, ECHO:
208	OUT EINSTR:
209	FOR I:=1:4 DO
210	WRITE "EINSTEIN("J","I,"") := EINSTEIN("I","J","") := " , EINSTEIN(I,J) :
211	OUT T:
212	OR MAT, ECHO:
213	FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
214	WRITE EINSTR(A,B) := EINSTR(A,B) := RICCI(A,B) - RS*ETA(A,B) / 2:
215	215
216	OFF MAT, ECHO:
217	OUT EINSTR:
218	FOR I:=1:4 DO FOR J:=I:4 DO
219	WRITE "EINSTR("J","I,"") := EINSTR("I","J","") := " , EINSTR(I,J) :
220	220
221	OUT T:
222	OR MAT, ECHO:
223	223
224	224
225	225
226	226
227	227
228	228
229	229
230	230
231	231
232	232
233	233
234	234
235	235
236	236
237	237
238	238
239	239
240	240

DEIÇHAR



CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO
LCC - LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

```

301 FOR C:=1:4 DO
302 IF CS2(A,B,C) NEG 0 THEN WRITE "CS2('A','B','C'):=CS2('B','A','C'):=CS2('A','B','C) :
303
304 FOR A:=1:4 DO FOR B:=1:4 DO
305 FOR C:=1:4 DO
306 IF GAMMA(A,B,C) NEG 0 THEN WRITE "GAMMA('A','B','C'):=GAMMA(A,B,C) :
307
308 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO
309 IF PICCI(I,J) NEG 0 THEN WRITE "PICCI('J','I') := PICCI('I','J') :=",PICCI(I,J) :
310
311 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO
312 IF RICCI(I,J) NEG 0 THEN WRITE "RICCI('J','I','I') := RICCI('I','J','J') :=",RICCI(I,J) :
313
314 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO
315 IF EINSTEIN(I,J) NEG 0 THEN WRITE "EINSTEIN('J','I','I') := EINSTEIN('I','J','J') :=",EINSTEIN(I,J) :
316
317 IF EINSTER(I,J) NEG 0 THEN WRITE "EINSTER('J','I','I') := EINSTER('I','J','J') :=",EINSTER(I,J) :
318
319 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO FOR K:=1:4 DO
320 FOR L:=K+1:4 DO FOR M:=I+1:4 DO BEGIN
321 IF R(I,J,K,L) NEG 0 THEN WRITE "R('J','I','I','L','M','K') := R('I','J','J','L','M','K') :=",R(I,J,K,L) :
322
323 IF I=K AND J<=L THEN GO TO CS
324 R(K,L,I,J) := R(L,K,J,I) := R(I,J,K,L) :
325
326 FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO FOR K:=1:4 DO
327 FOR L:=K+1:4 DO FOR M:=I+1:4 DO FOR N:=J+1:4 DO BEGIN
328 IF RTR(I,J,K,L) NEG 0 THEN WRITE "RTR('J','I','I','L','M','K','N') := RTR('I','J','J','L','M','K','N') :=",RTR(I,J,K,L) :
329
330 IF I=K AND J<=L THEN GO TO DS
331 RTR(K,L,I,J) := RTR(L,K,J,I) := RTR(I,J,K,L) :
332
333 LEF RTR(L,K,I,J) := -RTR(I,J,K,L) :
334
335 D: ENDS
336 FOR I:=1:4 DO FOR J:=I+1:4 DO FOR K:=I+1:4 DO
337 FOR L:=K+1:4 DO FOR M:=I THEN J ELSE 4 DO BEGIN
338 IF W(I,J,K,L) NEG 0 THEN WRITE "W('I','J','I','L','M','K','N') := W('I','J','J','L','M','K','N') :=",W(I,J,K,L) :
339
340 IF I=K AND J<=L THEN GO TO ES
341 W(K,L,I,J) := W(L,K,J,I) := W(I,J,K,L) :
342
343 LEF W(L,K,I,J) := -W(I,J,K,L) :
344
345 E: ENDS
346 FOR I:=1:4 DO FOR J:=I+1:4 DO FOR K:=I+1:4 DO
347 FOR L:=K+1:4 DO FOR M:=I THEN J ELSE 4 DO BEGIN
348 IF WTR(I,J,K,L) NEG 0 THEN WRITE "WTR('J','I','I','L','M','K','N') := WTR('I','J','J','L','M','K','N') :=",WTR(I,J,K,L) :
349
350 IF I=K AND J<=L THEN GO TO FS
351 WTR(K,L,I,J) := WTR(L,K,J,I) := WTR(I,J,K,L) :
352
353 LEF WTR(L,K,I,J) := -WTR(I,J,K,L) :
354
355 F: ENDS
356
357 WRITE "EXPANSAO:=",EXPANSAO :
358
359 FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
360 IF DEFORM(A,B) NEG 0 THEN WRITE WRITE "DEFORM('A','B','A') := DEFORM('A','B','B') :=",DEFORM(A,B) :
361
362 FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
363 IF ROTAC(A,B) NEG 0 THEN WRITE WRITE "ROTAC('A','B','A') := ROTAC('A','B','B') :=",ROTAC(A,B) :
364
365 FOR A:=1:4 DO IF ACEREA(A) NEG 0 THEN WRITE WRITE "ACEREA('A') :=",ACEREA(A) :

```




CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTIFICO E TECNOLÓGICO
LCC - LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

361
362
363
364
365
366
367
368
END OF FILE

COMENT. FINAL DO PROGRAMA : SYMBOLS DE CHRISTOFFEL, GAMAS,
 CAVATURAS EM COORDENADAS E EM TETRADAS, TENSOR DE RICCI IDEM,
 TENSOR DE EINSTEIN IDEM, ESCALAR DE CURVATURA, TENSOR DE RYLI, EM
 COORDENADAS E EM TETRADAS E, QUANTIDADES CINEMATICAS. BOM ISO E,
 SOBRIA QUE VOOES SNA VAIS FELIZ, OU, PELO NEZOS JOHARRA O MUNDO
 DAS OUTRAS PESSOAS MAIS ALGORE DE SE VER E, VIVER!!!!!!!!!!!!!!!!!!;



```

1  CGYEGM ARQITVO A B I
2  ****
3  IV "ABILIO(1,29)":
4  ARAY CS2(4,4,4) , GAMA(4,4,4) , R(4,4,4) , RTR(4,4,4) , RICCI(4,4) ,
5  RICCTP(4,4) , EINSTRI(4,4) , EINSTN(4,4) , W(4,4,4,4) , WTR(4,4,4)$
6  CLEAR ACOSST,OMEG,AA,RNE:
7
8  COMPRET SUSTITUA UMA SOLUCAO TAL ONE :
9
10 AC(T,R) := PR*+OES
11 OMEG**2 := O4
12 DF(HF(T,R),T) := OMEG*DF(DT(T),T)*RF(T,R)$
13 DF(HF(E,R),R) := OMEG*AA*RR(T,R)$
14 DF(HF(T,R),T,R) := OYEG*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
15 DF(HF(T,R),R,T) := OYEG*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
16 DF(HF(T,R),R,Z) := OMEG*AA**2*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)$
17 DF(HF(T,R),T,Z) := OYEG*(DF(DT(T),T,Z)*R(T,R)+HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
18 DF(HF(T,R),T,2) := (HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)*DF(DT(T),T,2)/DF(DT(T),T)+RF(T,R)*(DF(DT(T),T))**2$
19 DF(HF(T,R),T,2) := AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)$
20 DF(HF(T,R),R,Z) := AA**2*RF(T,R)$
21 DF(HF(T,R),R,Z) := AA*BF(T,R)*DF(DT(T),T)$
22 DF(HF(T,R),T,R) := AA*RF(T,R)*DF(DT(T),T)$
23 DF(HF(T,R),T) := (HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
24 AF(T,R) := 1/AC(T,R)$
25 DF(DT(T),T) := O5
26 DF(HF(T,R),T,Z) := DF(HF(T,R),T,Z) := DF(HF(T,R),T,FI) := DF(HF(T,R),T,FI) := O3
27 DF(HF(T,R),R,Z) := DF(HF(T,R),R,Z) := DF(HF(T,R),R,FI) := DF(HF(T,R),R,FI) := O3
28
29
30 IN CS2T
31 IN GAMAS
32 IN R$
33 IN RTR$
34 IN RICCI$
35 IN RICCTP$
36 IN RST
37 IN EINSTRI$
38 IN EINSTP$
39 IN W$
40 IN WTR$
41 IN "ABILIC(299,350)":
42 IN "ABILIO(148,162)":
43 IN "ABILIO(280,293)":
44 IN "ABILIC(363,369)":
45
RTS:
END OF FILE

```



```

1 COMMENT 'A V O D T V O GERACAO'
2
3 IN 'ABILIO(1,29)';
4 ARRAY EINSTP(4,4), PIAR(4,4), QA(4),TAB(4,4),DEFORM(4,4),ROTAC(4,4),ACELER(4,4),GAMA(4,4,4);
5 IN EINSTP(1,29) GAMA$
6 AC(T,R):=C1+C2*COS(BE*T)$
7 C1:=C2**2$
8 OMEG:=2*(1/2)$
9 HF(T,R):=4**X0*EG*SH(AA*R/2)**2$
10 BP(T,R):=4**X0*EG*SH(AA*R/2)**2$
11
12 COMMENT 'INTRODUCE MIKROSKOP MATRIX AND PROJECTION TENSOR
13 AND ALSO KROECKER DELTA.
14 PARTICULAR CASE : VELOCITY FLUX = (1,0,0,0)
15
16 ARRAY PTA(4,4),HAB(4,4),DELTK(4,4);
17
18 DELTK(1,1):=DELTK(2,2):=DELTK(3,3):=DELTK(4,4):=1$
19
20 ETA(1,1):=1$
21
22 ETA(2,2):=ETA(3,3):=ETA(4,4):=-1$
23
24 HAD(2,2):=HAD(3,3):=HAD(4,4):=-1$
25
26
27 FORALL X LET COS(X)**2=1-SIN(X)**2;
28 RO:=-EINSTP(1,1)-LAMBDA;
29
30 FORALL X LET COS(X)**2=1-SIN(X)**2;
31 PRESSAO:=FOR A:=2:4 SUM FOR B:=2:4 SUM (EINSTP(A,B)+ETA(A,B)*LAMBDA)*HAB(A,B)/3;
32
33 FORALL X LET COS(X)**2=1-SIN(X)**2;
34 FOR A:=2:4 DO FOR B:=A:4 DO
35 WRITE PIAR(A,B):=PIAR(B,A):=PRESSAO*HAB(A,B)+FOR I:=2:4 SUM
36 FOR J:=2:4 SUM -(EINSTP(I,J)+ETA(I,J)*LAMBDA)*DELTK(I,A)*
37 DELTK(J,A);
38
39 FORALL X LET COS(X)**2=1-SIN(X)**2;
40 FOR A:=2:4 DO
41 WRITE QA(A):=FOR J:=2:4 SUM -(EINSTP(1,J)+ETA(1,J)*LAMBDA)*DELTK(J,A);
42
43 IN 'ABILIO(317,317)';
44 AC(T,R):=C1+C2*COS(BE*T)$
45 C1:=C2**2$
46 OMEG:=2*(1/2)$
47 IN 'ABILIO(290,290)';
48
49 COMMENT 'SUBSTITUA UMA SOLUCAO TAL QUE'
50
51 DF(HP(T,R),T):=OMEG*DF(DT(T),T)*BF(T,R)$
52 DF(HP(T,R),R):=OMEG*AA*RF(T,R)$
53 DF(HF(T,R),T,R):=OMEG*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
54 DF(HF(T,R),R,T):=OMEG*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
55 DF(HF(T,R),R,2):=OMEG*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)$
56 DF(HF(T,R),T,2):=OMEG*(DF(DT(T),T,2)*BF(T,R)+HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)+HF(T,R)*(DF(DT(T),T))**2$
57 DF(HF(T,R),R,2):=AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)$
58 DF(HF(T,R),R,T):=AA*RF(T,R)*DF(DT(T),T)$
59 DF(HF(T,R),T,R):=AA*RF(T,R)*DF(DT(T),T)$
60 AF(T,R):=(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$

```




```

1  COMMENT 'MEDIUO'
2  ON 'OFF': CLEAR X,AC,RS: OPERATOR X,RS,AC:
3  CLEAR OYSG,T,R,Z,FI: MATRIX GG,H,TER,TER1:
4  DEF %CD,GGD:
5  X(1) := RS X(2) := RB X(3) := ZS X(4) := FIS
6  GG := MAT (AC(Y(1),X(2))**(-2)*(1-OMEG**2*R**2),0,0,-AC(X(1),X(2))**(-2)*OMEG**2**2),
7  (0,-AC(X(1),X(2))**(-2)*(1-OMEG**2*R**2),0,0,-AC(X(1),X(2))**(-2)*OMEG**2**2),
8  (-AC(X(1),X(2))**(-2)*OMEG**2*0,0,-AC(X(1),X(2))**(-2)*R**2)):
9  H := GG**(-1):
10 COMMENT 'INTRODUCE TETRAD MATRIX, QUE E TAL QUE
11
12      DIFERENCIAL X = TER J * TETRA DA (A)
13
14 TETR := MAT ((AC(X(1),X(2))*(1-OMEG**2*R**2)**(-1/2),0,0,AC(X(1),X(2))*OMEG**2**2**2)*(-1/2)),
15 (0,AC(Y(1),X(2)),0,0),0,0,AC(X(1),X(2)),0),0,0,AC(X(1),X(2))*(1-OMEG**2*R**2)**(1/2)/%1):
16 TETR1 := MAT ((AC(X(1),X(2))**(-1)*(1-OMEG**2*R**2)**(1/2),0,0,-AC(X(1),X(2))**(-1)*OMEG**2**2*(1-OMEG**2*R**2)**(-1/2)),0,A
17 COMMENT 'GENERATE CHRISTOFFEL SYMBOLS AND STORE IN ARRAYS CS1 AND CS2
18
19      NOTE DEF : CS (I,J,K) = CS
20
21      DE (AC(T,R),T,Z) := DE (AC(T,R),T,FI) := O5
22      DE (AC(T,R),R,Z) := DE (AC(T,R),R,FI) := O5
23      ARRAY CS1(4,4,4),CS2(4,4,4),GAMA(4,4,4),EINSTR(4,4),RICCTR(4,4),RTR(4,4,4),RTR(4,4,4),P(4,4,4):
24      FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO BEGIN
25          FOR K:=1:4 DO
26              CS1(I,I,K) := CS1(I,J,K) := (DE (GG(I,K),X(J)) + DE (GG(J,K),X(I))
27                  - DE (GG(I,J),X(K)))/2:
28              FOR K:=1:4 DO WRITE CS2(J,I,K) := CS2(I,I,K) := FOR P := 1:4
29                  SUM H(K,P)*CS1(I,J,P) END:
30              VPL(1) := (-R**2*OMEG**2+1)**(-1/2)*S
31              FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
32                  WRITE DNSTR(I,A) := FOR L:=1:4 SUM DE (TETR(I,A)*X(L))*VEL(L) + FOR J:=1:4 SUM CS2(L,J,I)*TETR(J,A)*VEL(L)$
33
34              FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
35                  WRITE %F2(I,A) := FOR J:=1:4 SUM FOR K:=1:4 SUM FOR L:=1:4 SUM (GG(J,K)*TETR(J,A))*VEL(L)*
36                  ((DF(VPL(X),X(L)) + FOR M:=1:4 SUM CS2(L,K,M)*VEL(M))*VEL(I) - (DF(VPL(I),X(L)) + FOR M:=1:4 SUM CS2(L,M,I))*VEL(M))*VEL(K))$
37              FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
38                  WRITE DNSTR(I,A) := DNSTR(I,A) + TER2(I,A)$
39              WRITE TETR(I,A) := TETR(I,A)$
40 COMMENT 'NOW COMPUTE THE RIEMANN TENSOR AND STORE IN R(I,J,K,L):
41              FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO FOR K:=1:4 DO
42                  FOR L:=K+1:4 IF K=I THEN J ELSE 4 DO BEGIN
43                      WRITE R(I,I,L,K) := R(I,I,J,K,L) := FOR O := 1:4
44                          SUM GG(I,O)*(DF(CS2(K,J,O),X(L)) - DF(CS2(J,L,O),X(K))
45                              + FOR P:=1:4 SUM (CS2(P,L,O)*CS2(L,K,J,P))$
46                              - CS2(P,K,O)*CS2(L,J,P))$
47                      LET R(I,J,L,K) = -R(I,I,J,K,L)
48                      IF I=K AND J=L THEN GO TO AS
49                      R(K,L,I,J) := R(L,K,J,I) := R(I,I,J,K,L)$
50                      LET R(L,K,I,J) = -R(I,I,J,K,L)
51
52      A: ENDS
53      FOR A:=1:4 DO FOR B:=A+1:4 DO FOR C:=A:4 DO
54          FOR D:=C+1:4 IF C=A THEN B ELSE 4 DO BEGIN
55              WRITE RIR(B,A,D,C) := RIR(A,B,C,D) := FOR I:=1:4 SUM FOR J:=1:4 SUM FOR K:=1:4 SUM FOR L:=1:4 SUM
56                  R(I,J,K,L)*TETR(I,A)*TETR(J,B)*TETR(K,C)*TETR(L,D)$
57              LET RIR(A,B,D,C) = -RIR(A,B,C,D)
58              IF A=C AND B=D THEN GO TO AS$
59              RTR(C,D,A,B) := RTR(I,D,C,D,A) := RTR(A,B,C,D)$

```



CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTIFICO E TECNOLÓGICO
LCC - LABORATORIO DE COMPUTAÇÃO CIENTIFICA

```

59      LFN RTRR(B,C,A,B)=-RTR(ATR,C,D), RTR(C,D,B,A)=-RTR(A,B,C,D);
60      A9: ENDS
61      FOR A:=1:4 DO FOR B:=1:4 DO
62          FOR C:=1:4 DO
63              WRITE GAMMA(A,B,C):=FOR I:=1:4 SUM FOR J:=1:4 SUM
64                  (-DE(TERRI(A,I),X(D)))+FOR K:=1:4 SUM CS2(I,J,K)*TERRI(A,A)*TTRR(D,C)*TRK(I,B) $
65          APPAY EPA(4,4),HAB(4,4),DELTK(4,4),DEFORM(4,4),ROTAC(4,4),
66          ACELDER(4);
67      DELTK(1,1):=DELTK(2,2):=DELTK(3,3):=DELTK(4,4):=1$
68      EPA(1,1):=1$
69      EPA(2,2):=EPA(3,3):=EPA(4,4):=-1$
70      HAB(2,2):=HAB(3,3):=HAB(4,4):=-1$
71      EXPANSAO:=FOR E:=1:4 SUM FOR C:=1:4 SUM -GAMMA(1,B,C)*EPA(B,C);
72      FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
73          WRITE DFORM(B,A):=DEFORM(A,B):=(-GAMMA(1,A,B)-GAMMA(1,B,A)+GAMMA(1,A,1)*
74              ETA(B,1)+GAMMA(1,B,1)*ETA(A,1)-2/3*EXPANSAD*HAB(A,B))/2;
75      FOR A:=1:4 DO FOR B:=A:4 DO
76          WRITE ROTAC(A,B):=(-GAMMA(1,A,B)+GAMMA(1,B,A)+GAMMA(1,A,1)*
77              DELTK(1,B)-GAMMA(1,B,1)*DELTK(1,A))/2;
78      FOR A:=1:4 DO WRITE ACELDER(A):=-GAMMA(1,A,1);
79      COMMENT P I M ;
      END OF FILE

```



```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44
CONTTT APXYVC F P X Y I :
IN "ABILIO(1,29)";
ARRAY DDSTER(4,4),DPSTER(4,4),VEL(4),TER2(4,4),TER3(4,4),CS2(4,4,4);
VEL(1):=AC(Y(1),X(2))$
OPERATOR AC:
COMMENT SUBSTITUA UMA SOLUCAO TAL QUE :
8
9 DP(HF(T,R),T):=OMEG*HF(DT(T),T)*RF(T,R)$
10 DP(HF(T,R),R):=OMEGA*AA*RF(1,R)$
11 DP(HF(T,R),T,R):=OMEGA*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
12 DP(HF(T,R),R,T):=OMEGA*AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),R)$
13 DP(HF(T,R),R,2):=OMEGA*AA*2*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)$
14 DP(HF(T,R),T,2):=OMEGA*(DF(DT(T),T,2))*RF(T,R)*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T,2)/DF(DT(T),T)+RF(T,R)*(DF(DT(T),T))*2$
15 DP(HF(T,R),R,2):=AA*(HF(T,R)-ENE)/(OMEG)*DF(DT(T),T)*DF(DT(T),T,2)/DF(DT(T),T)+RF(T,R)*(DF(DT(T),T))*2$
16 DP(HF(T,R),R,2):=AA*2*RF(T,R)$
17 DP(HF(T,R),R,T):=AA*DF(T,R)*DF(DT(T),T)$
18 DP(HF(T,R),R,R):=AA*DF(T,R)*DF(DT(T),T)$
19 DP(HF(T,R),T,R):=AA*DF(T,R)*DF(DT(T),T)$
20 DP(HF(T,R),T):=HF(T,R)-ENE/(OMEG)*DF(DT(T),T)$
21 AP(T,R):=1/AC(T,R)$
22 DF(DT(T),T):=0$
23 DP(HF(T,R),T,Z):=DF(HF(T,R),T,Z):=DF(RF(T,R),T,FI):=DF(HF(T,R),T,FI):=0$
24 DP(RF(T,R),R,Z):=DF(HF(T,R),R,Z):=DF(RF(T,R),E,FI):=DF(HF(T,R),R,FI):=0$
25
26 IN "ABILIO(30,32)";
27 IN "ABILIO(43,46)";
28 IN CS2$
29
30 FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
31 WRITE DDSTER(I,A):=FOR L:=1:4 SUM DF(TEPR(I,A),X(L))*VEL(L)+FOR J:=1:4 SUM CS2(L,J,I)*TEPR(J,A)*VEL(L)$
32
33 FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
34 WRITE TER2(I,A):=FOR J:=1:4 SUM FOR K:=1:4 SUM FOR L:=1:4 SUM (GG(J,X)*TEPR(J,A)*VEL(L)+
35 (DF(VFL(K),Y(L))+FOR M:=1:4 SUM CS2(L,M,K)*VEL(M))*VEL(I)-(DF(VEL(I),X(L))+FOR M:=1:4 SUM CS2(L,M,I)*VEL(M))*VEL(K))$
36
37 FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
38 WRITE DPSTER(I,A):=DDSTER(I,A)+TER2(I,A)$
39
40 FOR I:=1:4 DO FOR A:=1:4 DO
41 WRITE TEPR(I,A):=TEPR(I,A)$
42
43 COMMENT F I M :
44
45 END CP FILE

```

*****1*****2*****4*****5*****7*****8*****9*****1*****2*****3*****

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) - GÜDEL, K. - "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equation of Gravitation" , *Rev. Mod. Phys.* 21, 447, (1949).
- (2) - BAMPI, F. & ZORDAN, C. - "A Note on Gödel's Metric", *Gen. Rel. Grav.*, 9, 393, (1978).
- (3) - LANDAU, L. & LIFSHITZ, E. - "Teoria do Campo", edição em Brasileiro, *MIR, URSS*, §84 e §97, (1980).
- (4) - ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. - "Introduction to General Relativity", 2ª edição, *Mc Graw-Hill Inc.*, págs. 437 a 448, (1975).
- (5) - ELLIS, G.F.R. - "Relativistic Cosmology" in R. Sachs (editor) "General Relativity and Cosmology" - Curso XLVIII da Int. School of Physics "Enrico Fermi", de Varena, *Academic Press*, New York, (1971).
- (6) - ELLIS, G.F.R. & KING, A.R. - "Tilted Homogeneous Cosmological Models", *Commun. Math. Phys.*, 31, 203 (1973).
- (7) - REBOUÇAS, M.J. - "Modelos do Universo com Rotação Dependente do Tempo e a Violação da Causalidade na Cosmologia", *Tese de Doutorado*, C.B.P.F. (1981).
- (8) - SYNGE, J.L. - "Relativity: The General Theory", *North-Holland Publishing Company*, Amsterdam, págs. 12 a 15, (1960).
- (9) - SALIM, J.M. - "Monopolos Gravitacionais", *Tese de Mestrado*, C.B.P.F., págs. 56 a 58, (1976).
- (10) - CHANDRASEKHAR, S. & WRIGHT, J.P. - "The Geodesics in Gödel's Universe", *Proc. N.A.S.*, 47, 341, (1961).
- (11) - SOARES, I.D. - "Inhomogeneous Rotating Universes with Closed Timelike Geodesics of Matter", *J. Math. Phys.*, 21, 521, (1980).

- (12) - HAWKING, S.W. & ELLIS, G.F.R. - "The Large Scale Structure of Space-Time", *Cambridge University Press*, New York (1980).
- (13) - NOVELLO, M.; SOARES, I.D.; TIOMNO, J. - "Geodesic Motion and Confinement in Gödel's Universe", *Phys. Rev. D*, 27, 779, (1983).
- (14) - CALVÃO, M.O. - "Geodésicas em Universos do Tipo Gödel", *Tese de Mestrado*, C.B.P.F., a ser defendida.
- (15) - REBOUÇAS, M.J. & TIOMNO, J. - "Homogeneity of Riemannian Space-Times of Gödel Type", *Phys. Rev. D*, 28, 1251, (1983).
- (16) - NOVELLO, M. - "Stokesian Fluids and Cosmology", *Nukleonika*, 25, 1405, (1980).
- (17) - SERRIN, J. - "Handbuch der Physik", S. Flügge (editor), *Springer-Verlag*, Berlin, Vol. 8/1, pág. 125, (1959).
- (18) - POMBO, C. - "Análise de Geometrias Conformalmente Planas no Formalismo das Equações Quase-Maxwellianas", *Tese de Mestrado*, C.B.P.F., pág. 24, (1984).
- (19) - OLIVEIRA, C.G. - "Relativity and Gravitation", *Monografias XXVI*, C.B.P.F., 1, págs. 87 e 88 (1970).
- (20) - FULTON, T.; ROHRLICH, F.; WITTEN, L. - "Conformal Invariance in Physics", *Rev. of Mod. Phys.*, 34, 442, (1962).
- (21) - GROEBNER, W. & HOFEITER, N. - "Integraltafel Unbestimmte Integrale", *Spring-Verlag*, (1980).
- (22) - GRADSHTEYN, I.S. & RYZHIK, I.M. - "Table of Integrals, Series and Products", *Academic Press*, (1980).
- (23) - ARCURI, R.C. - "Núcleos Atrasados de Matéria no Universo de Friedman", *Tese de Mestrado*, C.B.P.F., pág. 46, (1982).
- (24) - SACHS, R.K. & WU, H. - "General Relativity for Mathematicians", *Springer Verlag*, New York, (1977).
- (25) - NOVELLO, M. - "Cosmologia Relativista" em M. Novello (editor) "II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF", Rio de Janeiro, (1980).
- (26) - ANDERSON, J.L. - "Principles of Relativity Physics", *Aca*

demie Press, New York, (1967).

- (27) - SALIM, J.M. - "Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedman", *Tese de Doutorado*, C.B.P.F., (1982).
- (28) - SOARES, I.D. - "O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos", em M. Novello (editor) "II Escola de Cosmologia e Gravitação do C.B.P.F.", Rio de Janeiro, (1980).
- (29) - RAYCHAUDHURI, A.K. - "Theoretical Cosmology", *Clarendon Press*, Oxford, (1979).
- (30) - MAVRIDES, S. - "Le Temps dans la Cosmologie Contemporaine", *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 5, 177, (1980).
- (31) - BIRCH, P. - "Is the Universe Rotating ?", *Nature*, 298, 451, (1982).
- (32) - PHINEY, E.S. & Webster, R.L. - "Is there Evidence for Universal Rotation ?", *Nature*, 301, 735, (1983) e ver também "Birch Replies", *Nature*, 301, 736, (1983).
- (33) - RINDLER, W. - "Essential Relativity", 2ª edição, *Springer-Verlag*, New York, (1977).

“MODELOS DE UNIVERSO COM ROTAÇÃO”

ABÍLIO VALÉRIO TOZINI

Tese de mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Mario Novello/CBPF

Waldyr Alves Rodrigues Junior/Unicamp

Carlos Augusto Pinto Galvão/CBPF

José Martins Salim/CBPF

Rio de Janeiro, 15 de dezembro de 1984