

NAMI FUX SVAITER

FÓTONS NÃO LINEARES NO UNIVERSO DE BIANCHI TIPO I

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1984

*À Ana Lucia e
aos meus pais.*

AGRADECIMENTO

A Mario Novello, Orientador e Amigo.

A J.M. Salim que me acompanhou na Iniciação Científica.

Aos colegas do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) pela dedicação e atenção.

Ao meu irmão Benar Fux Svaiter pelas sugestões.

À Zeldá Levcovitz pelos bonitos desenhos.

À Helena de Souza Ferreira pelo trabalho de datilografia.

A todos aqueles que contribuíram não de forma tão direta, mas foram importantes para a realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela ajuda financeira.

RESUMO

Neste trabalho mostramos que existem várias soluções anisotrópicas para as equações dos campos gravitacionais e eletromagnéticos acoplados não minimalmente. Apresentamos primeiro uma solução para o vazio, e a seguir uma solução com matéria e campo elétrico, onde o fóton adquire uma "massa" proporcional à raiz quadrada do escalar de curvatura. Esta solução apresenta uma singularidade verdadeira em $t = 0$.

Apresentamos também uma solução do tipo Kasner, com matéria para as equações de Einstein, onde aparece um fluido perfeito ultra relativístico ($p = \rho$).

Estes dois modelos dão uma boa descrição da dinâmica do universo nas vizinhanças da singularidade. Neste nosso modelo, próximo à singularidade, não ocorre o fenômeno descrito por Lifshitz do "estágio do vazio", pois a influência da matéria não pode ser desprezada em regiões próximas à singularidade.

SISTEMA DE UNIDADES

a) Constante gravitacional $K = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$

b) Constante de Einstein $k = \frac{8\pi K}{c^4}$

Vamos trabalhar no sistema de unidades Heaviside-Lo-
rentz e ainda fazer $c = \hbar = 1$. Desta forma (b) fica:

$$k = 8\pi K \quad \dim k = L^2$$

NOTAÇÃO

Índices gregos variam de 0 a 3

Índices latinos variam de 1 a 3

Assinatura da métrica (+---)

Símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$

Operador de derivação covariante ;

Operador de derivação simples ,

CONVENÇÃO

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} \quad (\text{Equação de Einstein}).$$

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTO	iii
RESUMO	iv
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO II</u> - O PRINCÍPIO VARIACIONAL E O ACOPLAMENTO ENTRE A GRAVITAÇÃO E O ELETROMAGNETISMO	5
2.1 - O Princípio Variacional	5
2.2 - O Acoplamento Mínimo	10
2.3 - O Acoplamento Não Mínimo	11
<u>CAPÍTULO III</u> - O ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO I	13
3.1 - As Equações de Movimento dos Campos.....	13
<u>CAPÍTULO IV</u> - AS SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS	25
4.1 - As Equações Cosmológicas	25
4.2 - A Solução Anisotrópica no Vazio	30
4.3 - A Solução Anisotrópica com Conteúdo Material e Campo Eletromagnético	33
4.4 - A Solução Sem Acoplamento Nem Campo Eletromagnético	53
Conclusões	61
<u>APÊNDICE A</u> - CÁLCULO TENSORIAL	63
<u>APÊNDICE B</u> - FORMAS DIFERENCIAIS	73
<u>APÊNDICE C</u> - CÁLCULO DOS TENSORES DE EINSTEIN, RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA NO ELEMENTO DE LINHA DE KASNER UTILIZANDO FORMAS DIFERENCIAIS	76
<u>APÊNDICE D</u> - A SOLUÇÃO DE KASNER	79
<u>APÊNDICE E</u> - CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI	81
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	83

— Não houve apenas uma, mas três gerações espontâneas: o ser brotando do nada, a vida despertando do ser, e o nascimento do homem.

... Quando começara o tempo, o devir ? Quando saltara do nada a primeira vibração do ser, devido a um "Faça-se" que, com irrecusável necessidade já trouxera em si o "Encerre-se" ?

Felix Krull — *Thomas Mann*

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Uma das mais notáveis previsões da Teoria Geral da Relatividade é a do encurvamento da trajetória de raios luminosos na presença de um campo gravitacional. Isto prova, que o fóton tem uma "massa" gravitacional passiva e por intermédio do Princípio de Equivalência ele deve ter uma "massa" gravitacional ativa, isto é, ser responsável pela curvatura do espaço-tempo.

Pelo lado experimental, há uma boa concordância entre os princípios básicos da Teoria Geral da Relatividade e os resultados previstos pelas equações de Einstein para a classe de fontes fracas de gravitação (uma fonte gravitacional estática é chamada fraca, se a seguinte relação se observa entre a sua massa M e o seu raio R : $\frac{M}{R} \ll 1$). O desvio para o vermelho ("red shift") gravitacional teórico (variação da frequência de fótons em campos gravitacionais) concorda experimentalmente com uma grande classe de fontes fracas. No campo gravitacional terrestre foi medido originalmente por Pound e Rebka ⁽²⁰⁾, o desvio para o vermelho no campo gravitacional do Sol foi medido por Adam ⁽²¹⁾ e desvios para o vermelho estelares, por Greenstein e Trimble ⁽²²⁾. Todos estes objetos dão um desvio para o vermelho gravitacional à luz que escapa da superfície da estrela, com uma

boa concordância com a teoria de Einstein. No entanto, em todos estes casos, as contribuições não lineares não são mensuráveis pois $\frac{M}{R} \ll 1$. Para fontes gravitacionais fortes, termos não lineares deverão contribuir para as equações de movimento.

Podemos então argumentar que as equações de Einstein são boas apenas no caso de fontes gravitacionais fracas. Se estamos estudando uma região do espaço-tempo onde existem fontes fortes de campo gravitacional, desvios aos resultados teóricos poderiam ocorrer. Com um propósito de gerar um modelo para estas situações, termos adicionais são introduzidos na densidade Lagrangeana cosmológica de forma a ter-se:

$$L = \frac{1}{k} (R + \gamma_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma_2 R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} R^\nu{}_{\rho\sigma\mu} + \dots) ,$$

onde γ_1 e γ_2 são constantes de acoplamento adicionais. Estas modificações devem levar em conta, que a contribuição destes termos adicionais é pequena de forma a pouco influenciar em regiões do espaço-tempo de pequena curvatura.

Outras teorias alternativas à de Einstein foram propostas, como por exemplo, a de Jordan, Brans e Dicke.

Outra maneira de modificarmos a teoria de Einstein, consiste em acoplar os campos existentes na natureza (eletromagnético e/ou campos de partículas elementares) não minimalmente com a gravitação, introduzindo na densidade Lagrangeana de Einstein produtos destes campos com o tensor de curvatura e suas contrações.

Neste trabalho, estudaremos a introdução de um termo

que acople de forma não mínima a gravitação e o eletromagnetismo. Estas hipóteses nos conduzem a equações de movimento, onde aparece um termo de "massa" para o fóton. Como consequência, temos em geral uma eletrodinâmica não linear, onde o campo gravitacional pode servir como fonte de cargas elétricas.

As primeiras tentativas de uma eletrodinâmica não linear surgiram com Mie (1912) e Born e Infeld (1934, 1935). O argumento usado é bem simples. Se admitirmos que as cargas elétricas são estruturais localizadas, suas auto-energias divergem. Uma maneira de contornar esta dificuldade é postularmos um saturamento dos campos, isto é, existem limites que os campos não ultrapassam de modo que suas auto-energias não divirjam.

Como já citamos, vamos investigar com detalhes uma eletrodinâmica não linear, no caso em que haja um acoplamento não mínimo entre gravitação com o eletromagnetismo. Notemos, que devido ao fato desta teoria não ser invariante de gauge é possível uma não conservação de cargas.

Os efeitos de uma não conservação de carga em escala cosmológica foram analisados há alguns anos atrás por Lyttleton e Bondi (1959) e criticados por Hoyle (1959). A idéia essencial de Lyttleton e Bondi (L-B) é que uma pequena diferença na magnitude da carga do próton e do elétron nos dá uma força repulsiva, que poderia constituir-se em uma explicação alternativa para a expansão do universo.

Lyttleton e Bondi sugerem adicionarmos à densidade Lagrangeana de Einstein-Maxwell um termo de massa do tipo $\epsilon^2 W_\mu W^\mu$. Apresentam a seguir uma solução cosmológica para um universo

preenchido com estes fótons massivos. Esta solução é homogênea no tempo e ainda do tipo de Sitter.

Posteriormente Hoyle (1959) mostrou, que a solução de L-B é equivalente à introdução de um fluido com energia negativa que pode ser gerado por um campo escalar. Como consequência disto, as equações de movimento da eletrodinâmica de L-B num universo isotrópico que se expande, mas é homogêneo no tempo, são similares às equações de Hoyle com um campo escalar C . Então, a modificação feita por L-B na eletrodinâmica é indistinguível do modelo de Hoyle.

Novello e Salim propuseram ⁽⁵⁾ modificar a densidade lagrangeana de Einstein-Maxwell, adicionando um termo do tipo $RW_{\mu}W^{\mu}$, de forma a gerar uma eletrodinâmica não linear: o fóton adquire massa, que será proporcional à curvatura escalar do espaço-tempo. No artigo citado, Novello e Salim expõem as linhas centrais deste tipo de acoplamento.

Examinaremos aqui alguns detalhes desta interação. Mostraremos que este acoplamento não mínimo da gravitação com o eletromagnetismo, admite soluções anisotrópicas com estes fótons não lineares e matéria.

CAPÍTULO II

O PRINCÍPIO VARIACIONAL E O ACOPLAMENTO ENTRE A GRAVITAÇÃO E O ELETROMAGNETISMO

2.1 - O PRINCÍPIO VARIACIONAL

Tomaremos como ponto de partida que qualquer equação física é dedutível de um princípio variacional. Isto é, as equações clássicas dos campos podem ser representadas como as equações de Euler-Lagrange de um princípio variacional (Princípio de Hamilton) (11).

Sabemos que a equação clássica do campo gravitacional formulada por Poisson é:

$$\nabla^2 G = 4\pi K\rho \quad (2.1.1)$$

onde

G é o potencial gravitacional

K é a constante gravitacional

ρ é a densidade de matéria.

No vácuo esta equação fica:

$$\nabla^2 G = 0 \quad (2.1.2)$$

Vamos mostrar que a equação (2.1.2) pode ser obtida a partir de um princípio variacional. Suponha:

$$S = \int_V (\text{grad } G)^2 dV$$

e vamos pedir que,

$$\delta S = 0 \quad , \quad (2.1.4)$$

isto é,

$$\delta \int (\text{grad } G)^2 dV = 0 \quad ,$$

onde a integral se estende por todo volume tridimensional. A variação de G deve se anular nas fronteiras do domínio de integração V , porém é arbitrária no seu interior.

Das eqs. (2.1.3) e (2.1.4) temos:

$$\begin{aligned} \delta \int_V (\text{grad } G)^2 dV &= 2 \int_V (\text{grad } G \cdot \delta \text{grad } G) dV = \\ &= 2 \int_V (\text{grad } G \cdot \text{grad}(\delta G)) dV = \\ &= 2 \int_V \text{div}((\text{grad } G) \delta G) dV - 2 \int_V \nabla^2 G \delta G dV = \\ &= 2 \oint_S ((\text{grad } G) \delta G) \cdot d\vec{S} - 2 \int_V \nabla^2 G \delta G dV = \\ &= 2 \oint_S \delta G (\text{grad } G \cdot d\vec{S}) - 2 \int_V \nabla^2 G \delta G dV \quad . \end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão acima se anula, pois supomos que δG se anula nas fronteiras do domínio de integração. Temos então:

$$\delta \int_V (\text{grad } G)^2 dV = - 2 \int_V (\nabla^2 G) \delta G dV \quad . \quad (2.1.5)$$

Como δG é arbitrário no interior do volume de integra

ção segue-se que o lado direito da eq. (2.1.5) é estacionário somente se G satisfaz a equação

$$\nabla^2 G = 0 \quad . \quad (2.1.2)$$

Na presença de matéria temos:

$$\nabla^2 G = 4\pi K\rho \quad . \quad (2.1.1)$$

É importante lembrar que a equação de Poisson não é invariante de Lorentz.

Outros dois exemplos clássicos da aplicação de um princípio de mínima ação aparecem no eletromagnetismo (este formulado no espaço de Minkowski) e nas equações de Einstein da gravitação.

Definindo-se o quadrivetor potencial no espaço-tempo de Minkowski ⁽⁷⁾

$$W^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z) \quad , \quad (2.1.6)$$

onde ϕ é o potencial elétrico e $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ é o potencial vetor magnético, e o tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu} \quad , \quad (2.1.7)$$

e ainda

$$J^\mu = (\rho, J_x, J_y, J_z) \quad , \quad (2.1.8)$$

como o quadrivetor densidade de corrente, no qual ρ é a densidade de cargas, \vec{J} é a densidade de corrente, a ação do campo eletromagnético deve ter a forma

$$S = \int_D \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2J_{\mu} W^{\mu} \right) d^4x \quad . \quad (2.1.9)$$

É importante notar que a ação deve ser um escalar, isto é, deve ser invariante sobre transformações de coordenadas. Usando agora o princípio da mínima ação,

$$\delta S = 0 \quad , \quad (2.1.4)$$

onde as variações são feitas sobre os W^{μ} , obtemos:

$$\delta S = \int \left(j^{\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu} \right) \delta W_{\mu} d^4x = 0 \quad . \quad (2.1.10)$$

Levando em consideração, que segundo o princípio da mínima ação, as variações δW_{μ} são arbitrárias dentro do volume de integração vemos que (2.1.10) só se torna identicamente nula se

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = j^{\mu} \quad . \quad (2.1.11)$$

Estas quatro equações são as equações de Maxwell onde aparecem fontes. As outras equações de Maxwell (as equações onde não figuram fontes) são identicamente satisfeitas partindo da definição do $F_{\mu\nu}$.

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\nu} F_{\rho\sigma} \implies F^{\mu\nu*}{}_{,\nu} = 0 \quad . \quad (2.1.12)$$

Da mesma forma, as equações relativísticas da gravitação podem ser obtidas, como mostrou D. Hilbert ⁽¹⁹⁾, também de um princípio variacional (ver Cap. III, Seção 1).

A ação neste caso é

$$I = \int_D (\sqrt{-g} \frac{R}{k} + L_{\text{Matéria}}) d^4x \quad (2.1.13)$$

onde k é a constante de Einstein,

R é o escalar de curvatura definido por

$$R = R_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} .$$

Usando novamente o princípio da mínima ação

$$\delta I = 0 \quad (2.1.4)$$

onde variamos a ação em relação aos $g^{\mu\nu}$, e empregando sempre que nos limites de integração $\delta g^{\mu\nu} = 0$, enquanto são arbitrários no interior do quadrivolume de integração, obtemos (ver Cap. III, Seção 1):

$$\delta I = \int \left(\frac{G_{\mu\nu}}{k} + T_{\mu\nu}^* \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (2.1.14)$$

Em vista da arbitrariedade dos $\delta g^{\mu\nu}$, vemos que (2.1.14) só se torna identicamente nula se

$$G_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}^* \quad (2.1.15)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ e

$T_{\mu\nu}^*$ é o tensor de momento energia da matéria.

As equações (2.1.15) são conhecidas como as equações de Einstein da gravitação.

2.2 - O ACOPLAMENTO MÍNIMO

Para combinarmos os campos gravitacionais e eletromagnéticos basta postularmos uma ação do tipo

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{R}{k} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] d^4x \quad , \quad (2.2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu;\nu} - W_{\nu;\mu} = W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu} \quad (2.1.7)$$

Variando a ação em relação aos $g_{\mu\nu}$ e aos W_μ obtemos respectivamente (como mostraremos adiante - ver Cap. III, Seção 1)

$$G_{\mu\nu} = -kE_{\mu\nu} \quad (2.2.2)$$

e

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.2.3)$$

onde

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} \quad . \quad (2.2.4)$$

O tensor $E_{\mu\nu}$ é chamado de tensor momento-energia do campo eletromagnético ou tensor de Maxwell.

As equações (2.2.2) são formalmente idênticas às equações (2.1.15) onde simplesmente substituímos o tensor momento-energia da matéria pelo tensor momento-energia do campo eletromagnético.

As equações do campo eletromagnético da teoria especial da relatividade [equações (2.1.11) e (2.1.12)] são generalizadas, de modo a serem aplicadas em qualquer sistema de coordena-

nadas pelas equações (2.2.3) e

$$F^{*\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad . \quad (2.2.5)$$

Notemos que no caso de termos fontes, apenas adicionamos à ação (2.2.1) um termo do tipo $-2J_{\mu}W^{\mu}$ e variando S em relação a W_{μ} encontramos (ver Cap. III, Seção 1)

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^{\mu} \quad . \quad (2.2.6)$$

A substituição, pura e simplesmente, das derivadas simples por derivadas covariantes na densidade lagrangeana que descreve o processo físico estudado, é chamado acoplamento mínimo. Neste caso, exclui-se da densidade lagrangeana um termo que acople os campos gravitacional e eletromagnético envolvendo qualquer funcional da curvatura do espaço-tempo.

2.3 - O ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO

Como já citamos na Seção 2.2, acoplar não minimalmente a gravitação com qualquer outro campo físico, significa adicionar à densidade lagrangeana usual termos de acoplamento que envolvam funcionais da curvatura. Estes termos adicionais não quebram os critérios de covariância geral pedidos a qualquer teoria física.

No caso do acoplamento do eletromagnetismo com a gravitação, usando termos em primeira ordem na curvatura, temos duas possibilidades, a saber ⁽⁵⁾:

$$L_I = \sqrt{-g} R W_\mu W^\mu \quad (2.3.1)$$

ou

$$L_{II} = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \quad , \quad (2.3.2)$$

onde

$$W^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad . \quad (2.1.6)$$

Não é necessário que o campo vetorial acoplado não minimalmente seja o campo do fóton, pois a teoria se aplica a qualquer campo vetorial.

Se compararmos (2.3.1) com a lagrangeana de Proca ⁽³⁾,

$$L_{Proca} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2J_\mu W^\mu + \sigma^2 W_\mu W^\mu \quad , \quad (2.3.3)$$

onde $\sigma \equiv$ massa do fóton, vemos que L_I será responsável por uma massa não nula dos fótons, onde a massa será proporcional a \sqrt{R} . Da mesma forma que na teoria de Proca, a adição de L_I quebra a invariância de gauge do Eletromagnetismo.

CAPÍTULO III

O ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO I

3.1 - AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DOS CAMPOS

Vamos considerar uma densidade lagrangeana do tipo

$$L = L_A + L_B + L_C + L_D , \quad (3.1.1)$$

onde

$$L_A = \sqrt{-g} \frac{R}{k} , \quad (3.1.2)$$

$$L_B = \sqrt{-g} \frac{\lambda}{k} R W_\mu W^\mu , \quad (3.1.3)$$

$$L_C = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (3.1.4)$$

$$L_D = L_{\text{matéria}} , \quad (3.1.5)$$

onde λ é uma constante com a mesma dimensão da constante de Einstein k ,

$$\text{Dim } k = \text{Dim } \lambda = (\text{comprimento})^2 .$$

Nossa ação é

$$S = \int_D \{ \sqrt{-g} \left[\frac{R}{k} (1 + \lambda W_\mu W^\mu) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + L_{\text{matéria}} \} d^4x , \quad (3.1.6)$$

onde a integral é efetuada em todo o domínio quadridimensional.

Notemos que se $\lambda = 0$, obtemos variando a ação em re

lação a W_μ e a $g_{\mu\nu}$, respectivamente (2.2.3) e

$$G_{\mu\nu} = -k (T_{\mu\nu}^* + E_{\mu\nu}) \quad ,$$

isto é, no limite $\lambda = 0$ voltamos às equações de Einstein e às equações de Maxwell no espaço curvo.

Variando a ação em relação a W_μ e tendo sempre em mente que W_μ e $g_{\mu\nu}$ são variáveis independentes, temos:

$$\delta_{W_\mu} S = \int_D \sqrt{-g} \left[\frac{\lambda R}{k} (2W_\mu \delta W^\mu) - \frac{1}{2} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] d^4x \quad .$$

Mas, usando que

$$\begin{aligned} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= (\delta F^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\ &= 2F^{\mu\nu} \delta (W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}) = 4F^{\mu\nu} \delta (W_{\mu,\nu}) \end{aligned}$$

Temos,

$$\delta_{W_\mu} S = 2 \int_D \sqrt{-g} \left[\frac{\lambda}{k} R W_\mu \delta W^\mu - F^{\mu\nu} \delta (W_{\mu,\nu}) \right] d^4x \quad .$$

Mas:

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta W_\mu)_{,\nu} = (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \delta W_\mu + F^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\delta W_\mu)_{,\nu}$$

e substituindo na expressão anterior, ficamos com

$$\begin{aligned} \delta_{W_\mu} S &= 2 \int_D \left[\sqrt{-g} \frac{\lambda R}{k} W_\mu \delta W^\mu + (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \delta W_\mu - \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta W_\mu)_{,\nu} \right] d^4x \quad . \end{aligned}$$

O último termo pode ser transformado numa integral de

superfície, mas como pedimos que as variações dos campos se anulam nas fronteiras de integração, resta apenas

$$\delta_{W_\mu} S = \int_D [\sqrt{-g} \frac{\lambda}{k} R W^\mu + (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu}] \delta W^\mu d^4x \quad . \quad (3.1.7)$$

Como δW_μ é arbitrário dentro do quadri-volume de integração, (2.1.4) é satisfeita se e somente se o termo entre colchetes é identicamente nulo.

Então,

$$-\frac{\lambda}{k} R W^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu}$$

E agora usando que:

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu}$$

encontramos finalmente,

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{\lambda}{k} R W^\mu \quad (3.1.8)$$

Esta equação é análoga à equação (2.2.6) onde o lado direito de (3.1.8) pode ser interpretado como um termo de "fonte" do campo W_μ . Vemos que, no caso de $\lambda = 0$ a equação (3.1.8) reduz-se a (2.2.3), como era de se esperar. No caso de $\lambda \neq 0$ o campo gravitacional é responsável pela criação de cargas. Note-mos que a criação de cargas nesse modelo só ocorre em regiões onde o escalar de curvatura é diferente de zero.

Da expressão (3.1.8) podemos tirar uma condição local sobre a conservação de corrente. A saber:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} &= -\frac{\lambda}{k} RW^\mu \\ (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} &= -\frac{\lambda}{k} RW^\mu \sqrt{-g} \\ (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu,\mu} &= -\frac{\lambda}{k} (\sqrt{-g} RW^\mu)_{,\mu} \end{aligned} .$$

Então,

$$(RW^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (3.1.9)$$

Vamos agora fazer uma variação da ação (eq. (3.1.6)) em relação a $g_{\mu\nu}$. Por motivos de simplicidade vamos calcular ca da termo separadamente.

Para L_D temos:

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L_{\text{matéria}} d^4x = \int_D \sqrt{-g} T_{\mu\nu}^* \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (\text{por definição}) \quad (3.1.10)$$

onde $T_{\mu\nu}^*$ é o tensor momento energia da matéria.

Para L_A temos:

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D \sqrt{-g} \frac{R}{k} d^4x = \frac{1}{k} \int_D \delta (\sqrt{-g} R) d^4x ,$$

como $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, então

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L_A d^4x = \frac{1}{k} \int_D [\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu})] d^4x. \quad (3.1.11)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g}}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} .$$

Substituindo o resultado anterior em (3.1.11), temos

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L_A d^4x = \frac{1}{K} \int_D \sqrt{-g} [(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}] d^4x .$$

Mostraremos agora que o último termo da expressão acima pode ser transformado numa integral de superfície ⁽¹¹⁾. O último termo é

$$\int_D \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x . \quad (3.1.12)$$

É importante notar que os símbolos de Christoffel não são tensores, mas se duas conexões afins estão definidas no mesmo espaço, suas diferenças

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(x) - \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho}(x') = \delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$$

transformam-se como tensores mistos de 3ª ordem.

Vamos estudar (3.1.12) num sistema localmente geodésico de coordenadas. Então num ponto P, $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0$, $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ e $g_{\mu\nu,\rho} = 0$. Neste sistema temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta [\Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho}] = \\ &= g^{\mu\nu} [(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{,\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{,\rho}] = \\ &= g^{\mu\rho} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu})_{,\rho} - g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{,\rho} = \\ &= (g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{,\rho} = \omega^{\rho}_{,\rho} , \end{aligned}$$

onde

$$\omega^\rho = g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad .$$

Como ω^ρ é um tensor, num sistema arbitrário (3.1.12) fica:

$$\int_D \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int_D (\sqrt{-g} \omega^\rho)_{,\rho} d^4x = \oint_\Sigma \omega^\rho \sqrt{-g} dS_\rho = 0 \quad ,$$

pois, nas fronteiras de integração a variação dos campos se anula.

Ficamos com

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L_A d^4x = \int_D \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.13)$$

No caso de termos um termo de matéria (L_D), L_A e $L_B=L_C=0$, chegamos a (2.1.15).

$$\text{Para } L_C = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \int_D L_C d^4x &= \\ &= -\frac{1}{2} \int_D (\delta \sqrt{-g}) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{2} \int_D \sqrt{-g} \delta (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) d^4x = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_D -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^\nu \delta g^{\mu\alpha} d^4x + \right. \\ &\quad \left. + \int_D \sqrt{-g} F_{\nu}{}^\alpha F_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} d^4x \right] = \\ &= \int_D \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + F_{\alpha\nu} F_{\beta}{}^\nu \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x = \\ &= \int_D \sqrt{-g} E_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad , \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

onde usamos (2.2.4).

Para L_B temos:

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L_B d^4x = \delta g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{k} \int_D R W_\mu W^\mu \sqrt{-g} d^4x \quad . \quad (3.1.15)$$

Trabalhando com

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \int_D R W_\mu W^\mu \sqrt{-g} d^4x &= \\ &= \int_D \delta (R\sqrt{-g}) W_\mu W^\mu d^4x + \int_D R \sqrt{-g} \delta (W_\mu W_\nu g^{\mu\nu}) d^4x \quad , \end{aligned}$$

e definindo $W_\mu W^\mu = W^2 = \Omega$, temos:

$$\begin{aligned} \int_D \delta (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \Omega d^4x + \int_D \sqrt{-g} R W_\mu W_\nu \delta g^{\mu\nu} d^4x &= \\ = \int_D \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Omega \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int_D R_{\mu\nu} \Omega \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x + \\ + \int_D \sqrt{-g} R W_\mu W_\nu \delta g^{\mu\nu} d^4x &= \\ = \int_D \sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int_D R_{\mu\nu} \Omega (\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\sigma\rho} \delta g^{\sigma\rho} g^{\mu\nu}) d^4x + \\ + \int_D \sqrt{-g} R W_\mu W_\nu \delta g^{\mu\nu} d^4x &= \\ = \int_D \sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int_D \sqrt{-g} \Omega (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \\ + \int_D \sqrt{-g} R W_\mu W_\nu \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.16) \end{aligned}$$

Da expressão (3.1.16) falta apenas estudarmos o seu primeiro termo:

$$\int_D \sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.17)$$

Devido ao Princípio da Equivalência da Teoria Geral da Relatividade, é sempre possível escolher um sistema de coordenadas, onde anulamos o campo gravitacional dentro de um elemento de volume espacial infinitesimal. Isto significa que localmente estamos anulando os símbolos de Christoffel. Este sistema de coordenadas é chamado sistema localmente inercial ⁽⁸⁾. Desta forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad , \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad .$$

Realmente, seja um ponto dado escolhido como origem das coordenadas e que as grandezas $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ tenham nele valores primitivos $(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_0$ (em coordenadas x^{σ}). Efetuando nas proximidades do ponto a transformação

$$x'^{\sigma} = x^{\sigma} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})_0 x^{\mu} x^{\nu} \quad .$$

então

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} \right)_0 = (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})_0$$

e usando que:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \Gamma_{\tau\lambda}^{\sigma} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}$$

vemos que todos os Γ 's se anulam.

Para a transformação acima, temos que

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_0 = \delta_{\nu}^{\mu} \quad ,$$

logo, qualquer tensor não é alterado no ponto dado por essa trans

formação, nos permitindo então anular os símbolos de Christoffel reduzindo simultaneamente os $g_{\mu\nu}$ à forma minkowskyana $\eta_{\mu\nu}$.

Vamos então trabalhar num sistema localmente inercial. Desta forma, (3.1.17) se reduz a:

$$\begin{aligned}
 & \int_D \Omega g^{\alpha\beta} \delta [\Gamma_{\alpha\rho, \beta}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\beta, \rho}^{\rho}] d^4x \\
 &= \int_D (\Omega g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^{\rho})_{, \beta} - (\Omega g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho})_{, \rho} d^4x + \\
 &+ \int_D (\Omega g^{\alpha\beta})_{, \rho} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} d^4x - \int_D (\Omega g^{\alpha\beta})_{, \beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^{\rho} d^4x = \\
 &= \int_D [(\Omega g^{\alpha\beta})_{, \nu} - \delta_{\nu}^{\beta} (\Omega g^{\alpha\rho})_{, \rho}] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.18)
 \end{aligned}$$

Definindo agora

$$(\Omega g^{\alpha\beta})_{, \nu} - \delta_{\nu}^{\beta} (\Omega g^{\alpha\rho})_{, \rho} = A_{\nu}^{\alpha\beta}$$

e usando que

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} [(\delta g_{\alpha\lambda})_{, \beta} + (\delta g_{\lambda\beta})_{, \alpha} - (\delta g_{\alpha\beta})_{, \lambda}] \quad ,$$

vemos que (3.1.18) fica,

$$\frac{1}{2} \int_D A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} [(\delta g_{\alpha\lambda})_{, \beta} + (\delta g_{\lambda\beta})_{, \alpha} - (\delta g_{\alpha\beta})_{, \lambda}] d^4x \quad . \quad (3.1.19)$$

Estudaremos separadamente cada termo da expressão acima.

Para o primeiro termo temos:

$$\frac{1}{2} \int_D A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} (\delta g_{\alpha\lambda})_{, \beta} d^4x \quad (3.1.20)$$

Usando que:

$$(A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda})_{,\beta} = A_{\nu,\beta}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda} + A_{\nu}^{\alpha\beta} (g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda})_{,\beta}$$

e

$$g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda} = -g_{\alpha\lambda} \delta g^{\nu\lambda} \quad ,$$

encontramos para (3.1.20)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_D [(A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda})_{,\beta} - A_{\nu,\beta}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda}] d^4x \\ & = -\frac{1}{2} \int_D A_{\nu,\beta}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\lambda} d^4x = \frac{1}{2} \int_D g_{\alpha\lambda} A_{\nu,\beta}^{\alpha\beta} \delta g^{\nu\lambda} d^4x \quad . \end{aligned}$$

Onde usamos que o termo de divergência se transforma numa integral de superfície que se anula nas fronteiras de integração .

Observe que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\lambda} A_{\nu,\beta}^{\alpha\beta} & = g_{\alpha\lambda} [(\Omega g^{\alpha\beta})_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} (\Omega g^{\alpha\rho})_{,\rho}]_{,\beta} = \\ & = \Omega_{,\nu,\beta} \delta_{\lambda}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\beta} \Omega_{,\rho,\beta} \delta_{\lambda}^{\rho} = \\ & = \Omega_{\nu,\lambda} - \Omega_{\lambda,\nu} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Logo, vemos que (3.1.20) se anula.

Para o segundo termo temos:

$$\frac{1}{2} \int A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} (\delta g_{\lambda\beta})_{,\alpha} d^4x \quad , \quad (3.1.21)$$

e de maneira semelhante,

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} \int A_{\nu,\alpha}^{\alpha\beta} g_{\lambda\beta} \delta g^{\nu\lambda} d^4x = \\ & = \frac{1}{2} \int g_{\lambda\beta} A_{\nu,\alpha}^{\alpha\beta} \delta g^{\nu\lambda} d^4x \quad . \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 g_{\lambda\beta} A_{\nu,\alpha}^{\alpha\beta} &= g_{\lambda\beta} [(\Omega g^{\alpha\beta})_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} (\Omega g^{\alpha\rho})_{,\rho}]_{,\alpha} = \\
 &= g_{\lambda\beta} g^{\beta\alpha} \Omega_{,\nu,\alpha} - g_{\lambda\beta} \delta_{\nu}^{\beta} \Omega_{,\rho}^{\rho} \\
 &= \Omega_{,\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda} \Omega_{,\rho}^{\rho}
 \end{aligned}$$

Então (3.1.21) se transforma em

$$\frac{1}{2} \int_D (\Omega_{,\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda} \Omega_{,\rho}^{\rho}) \delta g^{\nu\lambda} d^4x \quad . \quad (3.1.22)$$

Para o terceiro termo temos:

$$-\frac{1}{2} \int_D A_{\nu}^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\alpha\beta,\lambda} d^4x = \frac{1}{2} \int_D g^{\nu\lambda} A_{\nu,\lambda}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} d^4x$$

Mas

$$\begin{aligned}
 g^{\nu\lambda} A_{\nu,\lambda}^{\alpha\beta} &= g^{\nu\lambda} [(\Omega g^{\alpha\beta})_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} (\Omega g^{\alpha\rho})_{,\rho}]_{,\lambda} = \\
 &= g^{\alpha\beta} \Omega_{,\rho}^{\rho} - \Omega_{,\rho,\lambda} g^{\alpha\rho} g^{\nu\lambda} \delta_{\nu}^{\beta} \\
 &= g^{\alpha\beta} \Omega_{,\rho}^{\rho} - \Omega_{,\rho,\lambda} g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta} \quad .
 \end{aligned}$$

Usando que

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\nu\beta} g_{\alpha\lambda} \delta g^{\nu\lambda}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_D (g^{\alpha\beta} \Omega_{,\rho}^{\rho} - \Omega_{,\rho,\sigma} g^{\alpha\rho} g^{\sigma\beta}) (-g_{\nu\beta} g_{\alpha\lambda} \delta g^{\nu\lambda}) d^4x &= \\
 = -\frac{1}{2} \int_D (g_{\nu\lambda} \Omega_{,\rho}^{\rho} - \Omega_{,\lambda,\nu}) \delta g^{\nu\lambda} d^4x \quad . \quad (3.1.23)
 \end{aligned}$$

Definindo $\Omega_{,\rho}^{\rho} = \square \Omega$ e somando (3.1.22) e (3.1.23), levando

em conta que as expressões são tensoriais, valendo em qualquer sistema de coordenadas, encontramos (para (3.1.17)):

$$\int_D \sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int_D (\Omega_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \Omega) \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.24)$$

Substituindo (3.1.24) em (3.1.16) temos:

$$\int_D \sqrt{-g} [\Omega G_{\mu\nu} + RW_{\mu}W_{\nu} + \Omega_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \Omega] \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (3.1.25)$$

Somando agora L_A (3.1.13), L_B (3.1.25), L_C (3.1.14) e L_D (3.1.10), obtemos:

$$\delta g_{\mu\nu} \int_D L d^4x = \int_D [(1+\lambda\Omega)G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \square \Omega + \lambda \Omega_{,\mu;\nu} + \lambda RW_{\mu}W_{\nu} + k(T_{\mu\nu}^* + E_{\mu\nu})] \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad .$$

Como a variação do $g_{\mu\nu}$ é arbitrária dentro do volume de integração, e pedindo (2.1.4), chegamos a:

$$(1+\lambda\Omega)G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \square \Omega + \lambda \Omega_{,\mu;\nu} + \lambda RW_{\mu}W_{\nu} = -k[T_{\mu\nu}^* + E_{\mu\nu}] \quad . \quad (3.1.26)$$

A equação acima é uma generalização das equações de Einstein, e vemos que se $\lambda = 0$ obtemos as equações convencionais da gravitação.

A equação (3.1.26) juntamente com (3.1.8) formam um sistema de 14 equações não lineares que acoplam não minimalmente o eletromagnetismo com a gravitação. Mostraremos no capítulo seguinte duas soluções para este sistema citado acima.

CAPÍTULO IV

AS SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS

4.1 - AS EQUAÇÕES COSMOLÓGICAS

Neste capítulo mostraremos que o sistema de equações encontradas no Capítulo III, a saber:

$$(1+\lambda\Omega)G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \square \Omega + \lambda \Omega_{,\mu;\nu} + \lambda RW_{\mu}^{\nu} = -k(T_{\mu\nu}^* + E_{\mu\nu}) \quad (3.1.26)$$

e

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{\lambda}{k} RW^{\mu} \quad , \quad (3.1.8)$$

obtidas a partir da densidade lagrangeana L , admite soluções cosmológicas anisotrópicas.

O tensor momento-energia da matéria na expressão (3.1.26) é:

$$T_{\mu\nu}^* = (p+\rho)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad , \quad (4.1.1)$$

onde p é a pressão isotrópica e ρ a densidade de energia e matéria.

A quadrivelocidade do fluido cosmológico é definida como:

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \quad ,$$

então,

$$u_{\alpha} u^{\alpha} = 1 \quad .$$

Já vimos que o tensor $E_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Maxwell, e representa o tensor momento-energia do campo eletromagnético. A saber

$$E_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad . \quad (2.2.4)$$

Na expressão (3.1.26) Ω representa a norma do quadripotencial, desta forma

$$\Omega = W_{\alpha} W^{\alpha} \quad (4.1.2)$$

Ao sistema de equações (3.1.26) e (3.1.8), devemos ainda associar uma equação de estado que relaciona a pressão isotrópica e a densidade ρ , isto é, uma equação do tipo

$$p = p(\rho) \quad (4.1.3)$$

Tirando o traço de (3.1.26), obtemos:

$$R = -3 \lambda \square \Omega + k(\rho - 3p) \quad (4.1.4)$$

Novello e Salim argumentam que, na presença de "campos gravitacionais fortes", isto é, quando o valor do escalar de curvatura é grande, devemos acrescentar à densidade lagrangeana cosmológica de Einstein-Maxwell um termo do tipo $RW_{\mu} W^{\mu}$ acoplando os campos gravitacionais e eletromagnéticos ⁽⁵⁾.

Podemos nos perguntar se o modelo isotrópico de Robertson-Friedman-Walker, que descreve bem o estágio atual do universo, é também um modelo adequado para a descrição da evolução inicial do universo, isto é, nas vizinhanças de um ponto singu-

lar.

Na verdade, Belinski, Lifshitz e Khalatnikov, mostraram que nas vizinhanças de um ponto singular temos regimes Kasnerianos ⁽¹³⁾. Este trabalho nos motivou a procurar uma solução do sistema (3.1.26) e (3.1.218) do tipo Kasner. Utilizaremos um elemento de linha do tipo

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad . \quad (4.1.5)$$

É importante notar que como $g_{00} = 1$, a coordenada $x^0 = t$ representa o tempo próprio em cada ponto do espaço-tempo. Como além disso $g_{0i} = 0$, é possível a sincronização de relógios em todo o espaço. Um referencial que satisfaz às condições

$$g_{00} = 1 \quad e \quad g_{0i} = 0$$

é chamado referencial sincrônico. Neste referencial, as linhas do tempo são geodésicas no espaço-tempo. De fato,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

tem componentes $u^0 = 1$ $u^i = 0$, satisfazendo automaticamente

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 = \Gamma_{00}^\alpha = 0 \quad . \quad (4.1.6)$$

Para

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad , \quad (4.1.5)$$

temos:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 & g_{11} &= -a^2(t) & g_{22} &= -b^2(t) & g_{33} &= -c^2(t) \\ g^{00} &= 1 & g^{11} &= -\frac{1}{a^2} & g^{22} &= -\frac{1}{b^2(t)} & g^{33} &= -\frac{1}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a} & \Gamma_{22}^0 &= b\dot{b} & \Gamma_{33}^0 &= c\dot{c} \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{20}^2 &= \frac{\dot{b}}{b} & \Gamma_{30}^3 &= \frac{\dot{c}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

onde

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{dx^0}, \quad \dot{b} = \frac{db}{dt}, \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}$$

As componentes mistas do tensor de Ricci são:

$$R^0_0 = \ddot{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \quad (4.1.9a)$$

$$R^1_1 = \ddot{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (4.1.9b)$$

$$R^2_2 = \ddot{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (4.1.9c)$$

$$R^3_3 = \ddot{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) \quad (4.1.9d)$$

Na posse destes valores obtemos para o escalar de curvatura:

$$R = 2 \left(\ddot{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (4.1.10)$$

E, finalmente, as componentes mistas do tensor de Einstein são:

$$G^0_0 = - \left[\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right] \quad (4.1.11a)$$

$$G^1_1 = - \left[\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right] \quad (4.1.11b)$$

$$G^2_2 = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \right] \quad , \quad (4.1.11c)$$

$$G^3_3 = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \right] \quad . \quad (4.1.11d)$$

Nas seções 4.2 e 4.3 vamos estudar dois casos distintos.

$$\text{Caso I} \quad - \quad T_{\mu\nu}^* = 0 \quad E_{\mu\nu} = 0$$

$$\text{Caso II} \quad - \quad T_{\mu\nu}^* \neq 0 \quad E_{\mu\nu} \neq 0 \quad .$$

Faremos ainda uma imposição sobre o nosso W_μ .

Vamos pedir que as componentes do quadripotencial dependam apenas da coordenada tempo $x^0 = t$.

Desta forma, temos que a norma de W_μ é um escalar dependendo também apenas do tempo, isto é:

$$W^2 = W_\alpha W^\alpha = \Omega \quad (4.1.2)$$

$$\Omega = \Omega(t) \quad , \quad (4.1.12)$$

Em vista disso, usando (4.1.7), (4.1.8) e (4.1.12), temos:

$$\begin{aligned} \square \Omega(t) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \Omega_{, \nu} g^{\mu\nu})_{, \mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \Omega_{, 0} g^{\mu\nu})_{, \mu} = \\ &= \frac{1}{abc} (abc \Omega_{, 0})_{, 0} = \ddot{\Omega} + \dot{\Omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\Omega'_{;0}{}^0 = (g^{00} \Omega_{, 0})_{;0} = \Omega'_{,0}{}^0 + \Gamma^0_{\sigma 0} \Omega'^{\sigma} = \ddot{\Omega} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega'_{;1}{}^1 &= (g^{11} \Omega_{, 1})_{;1} = \Omega'_{,1}{}^1 + \Gamma^1_{1\sigma} \Omega'^{\sigma} = \\ &= \Gamma^1_{10} \Omega'^0 = \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned}\Omega'_{;2}{}^2 &= g^{22} \Omega_{,2}{}^2)_{;2} = \Omega'_{,2}{}^2 + \Gamma_{2\sigma}^2 \Omega'^{\sigma} = \\ &= \Gamma_{20}^2 \Omega'^0 = \frac{\dot{b}}{b} \dot{\Omega}\end{aligned}\quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned}\Omega'_{;3}{}^3 &= (g^{33} \Omega_{,3}{}^3)_{;3} = \Omega'_{,3}{}^3 + \Gamma_{3\sigma}^3 \Omega'^{\sigma} = \\ &= \Gamma_{30}^3 \Omega'^0 = \frac{\dot{c}}{c} \dot{\Omega}\end{aligned}\quad (4.1.17)$$

Na posse destes valores já calculados podemos passar ao estudo dos dois casos já citados.

4.2 - A SOLUÇÃO ANISOTRÓPICA NO VAZIO ⁽¹⁵⁾

Vamos procurar uma solução para o sistema (3.1.8) e (3.1.26) utilizando o elemento de linha de Kasner (4.1.5) supondo que não temos nem matéria, nem campos eletromagnéticos; isto é:

$$T_{\mu\nu}^* = 0 \quad (4.2.1a)$$

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.1b)$$

De (2.2.4) vemos que

$$E_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.1c)$$

Vamos escolher o quadripotencial

$$W_{\mu} = (\phi(t), 0, 0, 0) \quad (4.2.2)$$

Substituindo (4.2.1b) e (4.2.2) em (3.1.8), obtemos:

$$R = 0 \quad (4.2.3)$$

Da equação do traço de (3.1.26), a equação (4.1.4), utilizando (4.2.1a) fica:

$$R = -3\lambda \square \Omega .$$

Mas $R = 0$, então

$$\square \Omega = 0 . \quad (4.2.4)$$

Substituindo (4.2.1a), (4.2.1c), (4.2.3) e (4.2.4) em (3.1.26) encontramos:

$$(1+\lambda\Omega)R_{\mu\nu} + \lambda\Omega_{,\mu;\nu} = 0 . \quad (4.2.5)$$

Definindo agora uma nova variável $\gamma(t) = 1+\lambda\Omega(t)$, nas equações (4.2.4) e (4.2.5) ficam

$$\square \gamma(t) = 0 \quad (4.2.6)$$

$$\gamma(t)R_{\mu\nu} + \gamma_{,\mu;\nu} = 0 . \quad (4.2.7)$$

Tendo em vista que γ é um escalar que depende apenas da coordenada t podemos utilizar as fórmulas (4.1.14) a (4.1.17). A equação (4.2.7) fica para cada componente mista do tensor R^μ_ν .

$$R^0_0 + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} = 0 , \quad (4.2.8a)$$

$$R^1_1 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0 , \quad (4.2.8b)$$

$$R^2_2 + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0 , \quad (4.2.8c)$$

$$R^3_3 + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0 .$$

Substituindo agora (4.1.13) em (4.2.6) e (4.1.9a) ,
 (4.1.9b), (4.1.9c), (4.1.9d) em (4.2.8a), (4.2.8b), (4.2.8c)
 e (4.2.8d), respectivamente, encontramos:

$$\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = 0 \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0 \quad (4.2.10a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) = 0 \quad (4.2.10b)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) = 0 \quad (4.2.10c)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) = 0 \quad (4.2.10d)$$

Vamos tentar agora uma solução do tipo potência:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^p \\ b(t) &= b_0 t^q \\ c(t) &= c_0 t^r \\ \gamma(t) &= \gamma_0 t^s \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

onde p, q, r, s são constantes (parâmetros).

Substituindo (4.2.11) em (4.2.9) e (4.2.10), encontramos:

$$s^2 + s(p+q+r-1) = 0 \quad (4.2.12a)$$

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - (p+q+r+s) = 0 \quad (4.2.12b)$$

$$p^2 + p(q+r+s-1) = 0 \quad (4.2.12c)$$

$$q^2 + q(p+r+s-1) = 0 \quad (4.2.12d)$$

$$r^2 + r(p+q+s-1) = 0 \quad (4.2.12e)$$

É fácil ver que se:

$$p + q + r + s = 1 \quad (4.2.13)$$

as equações (4.2.12a), (4.2.12c), (4.2.12d) e (4.2.12e) se tornam identidades. Na realidade as equações (4.2.12a), (4.2.12c), (4.2.12d) e (4.2.12e) são formalmente idênticas.

Agora, substituindo (4.2.13) em (4.2.12b), temos

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1 \quad (4.2.14)$$

É bastante instrutivo o estudo das equações (4.2.13) e (4.2.14) no espaço dos parâmetros. Neste espaço, a solução do sistema (4.2.13) e (4.2.14) é dada pela intersecção das duas hipersuperfícies, a saber: a equação (4.2.13) define um hiperplano, enquanto que (4.2.14) define a superfície de uma hiperesfera de raio unitário.

A intersecção da hiperesfera e do hiperplano é a superfície de uma esfera em \mathbb{R}^3 .

4.3 - A SOLUÇÃO ANISOTRÓPICA COM CONTEÚDO MATERIAL E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Vamos passar agora ao estudo de uma interessante solução do sistema de equações (3.1.26) e (3.1.8), a saber:

$$(1+\lambda\Omega)G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \square \Omega + \lambda \Omega_{,\mu;\nu} + \lambda R W_{\mu} W_{\nu} = -k(T_{\mu\nu}^* + E_{\mu\nu}) \quad (3.1.26)$$

e

$$F^{\mu\nu}{}_{; \nu} = - \frac{\lambda}{k} RW^{\mu} \quad , \quad (3.1.8)$$

onde

$$\Omega = W_{\alpha} W^{\alpha} \quad . \quad (4.1.2)$$

Vamos admitir um universo preenchido com um fluido perfeito, e um campo elétrico definindo uma direção privilegiada no espaço, gerando assim uma anisotropia.

É importante ter em mente que estamos procurando uma solução para o sistema de equações (3.1.26) e (3.1.8), utilizando o elemento de linha de Kasner (4.1.5), isto é, a métrica escolhida já é anisotrópica, a não ser que $a(t) = b(t) = c(t)$. Neste caso, temos três eixos coordenados se expandindo ou contraindo da mesma forma.

Como já havíamos dito, queremos escolher um quadripotencial que defina um campo elétrico na direção \hat{x} . É fácil ver que um quadripotencial da forma:

$$W_{\mu} = (0, \phi(t), 0, 0) \quad (4.3.1a)$$

satisfaz à exigência anterior.

Para as componentes contravariantes de W_{μ} temos:

$$W^{\mu} = g^{\mu\sigma} W_{\sigma} \quad ,$$

e com a ajuda de (4.1.7) encontramos

$$\begin{aligned} W^0 &= g^{0\sigma} W_{\sigma} = 0 \\ W^1 &= g^{1\sigma} W_{\sigma} = g^{11} W_1 = - \frac{\phi(t)}{a(t)^2} \\ W^2 &= W^3 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Assim,

$$W^\mu = \frac{1}{a^2(t)} (0, -\dot{\phi}(t), 0, 0) \quad . \quad (4.3.1b)$$

Lembrando que o módulo do quadripotencial nos é dado pela equação (4.1.2), encontramos que W_μ é um quadrivetor tipo espaço, a saber:

$$\Omega = W_\mu W^\mu = -\left(\frac{\dot{\phi}(t)}{a(t)}\right)^2 \quad . \quad (4.3.2)$$

De posse das componentes covariantes e contravariantes do quadripotencial podemos calcular as componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}$.

Da definição

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu;\nu} - W_{\nu;\mu} = W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu} \quad (2.1.7)$$

tira-se:

$$F_{01} = W_{0,1} - W_{1,0} = -\dot{\phi}(t) \quad (4.3.3a)$$

$$F_{10} = \dot{\phi}(t) \quad (4.3.3b)$$

As outras componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ são nulas e vemos que realmente temos um campo elétrico na direção x.

$$E_x = F_{10} = \dot{\phi}(t) \quad . \quad (4.3.3c)$$

Como $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$, tem-se:

$$F^{01} = g^{00} g^{11} F_{01} = \frac{\dot{\phi}(t)}{a(t)^2} \quad (4.3.2a)$$

$$F^{10} = -\frac{\dot{\phi}(t)}{a(t)^2} \quad . \quad (4.3.2b)$$

Vamos agora calcular as componentes mistas do tensor

de Maxwell e do tensor momento-energia da matéria. Para isto é necessário calcular primeiro

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10} = -2\left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 .$$

Da definição (2.2.4) temos:

$$E^{\mu}_{\nu} = F^{\mu\sigma}F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} ,$$

então,

$$E^0_0 = F^{0\sigma}F_{\sigma 0} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 \quad (4.3.5a)$$

$$E^1_1 = F^{1\sigma}F_{\sigma 1} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 \quad (4.3.5b)$$

$$E^2_2 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 \quad (4.3.5c)$$

$$E^3_3 = E^2_2 . \quad (4.3.5d)$$

Da definição (4.1.1) temos:

$$T^{\mu*}_{\nu} = (\rho+p)u^{\mu}u_{\nu} - p \delta^{\mu}_{\nu} , \quad (4.1.1)$$

onde ρ é a energia interna total da matéria e p é pressão medida num sistema em repouso no fluido, isto é, em coordenadas co-moventes. Neste referencial co-movente, onde $u^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}$, encontramos

$$T^{*0}_0 = \rho \quad (4.3.6a)$$

$$T^{*1}_1 = -p \quad (4.3.6b)$$

$$T^{*2}_2 = -p \quad (4.3.6c)$$

$$T^{*3}_3 = -p . \quad (4.3.6d)$$

Vamos agora escrever o nosso sistema de equações derivado da densidade lagrangeana L , que acopla não minimalmente o campo eletromagnético com a gravitação. A saber:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{\lambda}{k} RW^{\mu} \quad (3.1.8)$$

e

$$(1+\lambda\Omega)G^{\mu}{}_{\nu} - \lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} \square \Omega + \lambda\Omega'{}^{\mu}{}_{;\nu} + \lambda RW^{\mu}W_{\nu} = -k[T^{*\mu}{}_{\nu} + E^{\mu}{}_{\nu}] \quad (3.1.26)$$

onde

$$\Omega = W_{\mu}W^{\mu} \quad (4.1.2)$$

Mostraremos que o sistema anterior admite uma solução anisotrópica, com um conteúdo material, no nosso caso fluido perfeito, e campo eletromagnético.

Substituiremos os valores anteriormente calculados no sistema acima.

Para a equação (3.1.8) temos uma única equação que não se anula identicamente.

$$F^{1\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{1\nu})_{,\nu} = -\frac{\lambda}{k} RW^1$$

Utilizando (4.1.7), (4.3.4b) e (4.3.1b), temos:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) + \frac{\lambda}{k} R = 0 \quad (4.3.7)$$

A anisotropia na direção \hat{x} gerada pelo campo E_x surge na equação acima, onde aparece o sinal (-) na frente do termo $a(+)$

Para as componentes mistas da equação (3.1.26) temos:

A) Componente $[{}^0_0]$

$$(1+\lambda\Omega)G^0{}_0 - \lambda \square \Omega + \lambda\Omega'{}^0{}_0 = -k[T^{*0}{}_0 + E^0{}_0]$$

Utilizando (4.1.11a), (4.1.13), (4.1.14), (4.3.5a) e (4.3.6a) , encontramos:

$$(1+\lambda\Omega) \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) + \lambda \dot{\Omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) + \frac{k}{2} \Omega \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - k\rho = 0 \quad (4.3.8)$$

Na dedução acima e nas posteriores usamos que:

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{a} \right)^2 = -\Omega \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \right)$$

facilmente dedutível de (4.3.2).

B) Componente [1_1]

$$(1+\lambda\Omega)G^1_1 - \lambda \square \Omega + \lambda \Omega'^1_1 + \lambda RW^1W_1 = -k (T^{*1}_1 + E^1_1)$$

Utilizando (4.1.11b), (4.1.13), (4.1.15), (4.3.2), (4.3.5b) e (4.3.6b), encontramos:

$$(1+\lambda\Omega) \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) + \lambda [\ddot{\Omega} + \dot{\Omega} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right)] - \lambda R\Omega + \frac{k}{2} \Omega \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + k\rho = 0 \quad (4.3.9)$$

C) Componente [2_2]

$$(1+\lambda\Omega)G^2_2 - \lambda \square \Omega + \lambda \Omega'^2_2 = -k (T^{*2}_2 + E^2_2)$$

Novamente, utilizando agora (4.1.11c), (4.1.13), (4.1.16) , (4.3.5c) e (4.3.6c), encontramos:

$$(1+\lambda\Omega) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \right) + \lambda [\ddot{\Omega} + \dot{\Omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right)] - \frac{1}{2} k\Omega \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right]^2 + k\rho = 0 \quad (4.3.10)$$

D) Componente [3_3]

$$(1+\lambda\Omega)G^3_3 - \lambda \square \Omega + \lambda \Omega'^3_3 = -k[T^{*3}_3 + E^3_3] \quad .$$

Utilizando finalmente (4.1.11d), (4.1.14), (4.1.17), (4.3.6d) e (4.3.5d), encontramos

$$(1+\lambda\Omega) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \right) + \lambda (\ddot{\Omega} + \dot{\Omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right)) - \frac{1}{2} k\Omega \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + k\rho = 0 \quad .$$

A solução geral deste sistema não linear de equações ordinárias se existe é de difícil obtenção.

Desta forma, vamos impor certas restrições, onde nos baseamos no estudo das simetrias da lagrangeana L.

Devido ao termo L_B a lagrangeana L não é invariante sobre uma transformação de gauge. Neste caso, o quadrivetor potencial W torna-se um observável físico da teoria.

Vamos pedir que a norma de W_μ não varie no tempo. W_μ será então um vetor tipo espaço com norma constante

$$\Omega = - \left(\frac{\phi}{a} \right)^2 = \text{cte} \quad . \quad (4.3.12)$$

Novamente tentaremos, como no caso anisotrópico na vazio, uma solução do tipo potência.

Assim:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^\mu \\ b(t) &= b_0 t^\nu \\ c(t) &= c_0 t^\epsilon \\ \phi(t) &= \phi_0 t^\mu \\ p(t) &= p_0 t^\xi \\ \rho(t) &= \rho_0 t^\sigma \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{a}}{a} &= \mu t^{-1} & \frac{\ddot{a}}{a} &= \mu(\mu-1)t^{-2} \\
 \frac{\dot{b}}{b} &= \nu t^{-1} & \frac{\ddot{b}}{b} &= \nu(\nu-1)t^{-2} \\
 \frac{\dot{c}}{c} &= \varepsilon t^{-1} & \frac{\ddot{c}}{c} &= \varepsilon(\varepsilon-1)t^{-2} \\
 \frac{\dot{\phi}}{\phi} &= \mu t^{-1} & \frac{\ddot{\phi}}{\phi} &= \mu(\mu-1)t^{-2}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.14}$$

Substituindo (4.3.13) em (4.3.7), obtemos:

$$[\mu(\mu-1) + \mu(-\mu + \nu + \varepsilon)]t^{-2} + \frac{\lambda}{k} R = 0 \quad ,$$

ou melhor,

$$R = -\frac{k}{\lambda} \mu(\nu + \varepsilon - 1)t^{-2} \quad .
 \tag{4.3.15}$$

Substituindo (4.3.12), (4.3.13), (4.3.14), (4.3.15) nas quatro equações (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10) e (4.3.11), obtemos:

$$t^{-2} [(1 + \lambda\Omega)(\mu\nu + \mu\varepsilon + \nu\varepsilon) + \frac{k}{2} \Omega\mu^2] - k\rho_0 t^\sigma = 0 \quad ,
 \tag{4.3.16}$$

$$t^{-2} [(1 + \lambda\Omega)(\nu(\nu-1) + \varepsilon(\varepsilon-1) + \nu\varepsilon) + k\mu(\nu + \varepsilon - 1)\Omega + \frac{k}{2} \Omega\nu^2] + k\rho_0 t^\xi = 0
 \tag{4.3.17}$$

$$t^{-2} [(1 + \lambda\Omega)(\mu(\mu-1) + \varepsilon(\varepsilon-1) + \mu\varepsilon) - \frac{1}{2} k\Omega\mu^2 + k\rho_0 t^\xi] = 0
 \tag{4.3.18}$$

e

$$t^{-2} [(1 + \lambda\Omega)(\mu(\mu-1) + \nu(\nu-1) + \nu\mu) - \frac{1}{2} k\Omega\mu^2 + k\rho_0 t^\xi] = 0 \quad .
 \tag{4.3.19}$$

Estas quatro equações s3o s3o satisfeitas identicamente se $\xi = \sigma = -2$. Logo, encontramos para $p(t)$ e $\rho(t)$:

$$p(t) = p_0 t^{-2} \quad (4.3.20)$$

$$\rho(t) = \rho_0 t^{-2} \quad . \quad (4.3.21)$$

Usando agora a relação

$$\mu(\mu-1)+v(v-1)+\mu v = \mu^2 + v^2 + \mu v - (\mu+v) \quad ,$$

(4.3.20) e (4.3.21) as equações (4.3.8) a (4.3.11) se transformam em:

$$(1+\lambda\Omega)(\mu v+\mu\varepsilon+v\varepsilon) + \frac{k}{2} \Omega \mu^2 - k\rho_0 = 0 \quad (4.3.22)$$

$$(1+\lambda\Omega)(v^2+\varepsilon^2+v\varepsilon-(\xi+\varepsilon)) + k\mu(v+\varepsilon-1)\Omega + \frac{k}{2} \Omega \mu^2 + k\rho_0 = 0 \quad (4.3.23)$$

$$(1+\lambda\Omega)(\mu^2+\varepsilon^2+\mu\varepsilon-(\mu+\varepsilon)) - \frac{k}{2} \Omega \mu^2 + k\rho_0 = 0 \quad (4.3.24)$$

$$(1+\lambda\Omega)(\mu^2+v^2+\mu v-(\mu+v)) - \frac{k}{2} \Omega \mu^2 + k\rho_0 = 0 \quad . \quad (4.3.25)$$

Subtraindo (4.3.25) de (4.3.24), encontramos:

$$(1+\lambda\Omega)(\varepsilon^2-v^2+\mu(\varepsilon-v) - (\varepsilon-v)) = 0 \quad .$$

Desta forma,

$$(1+\lambda\Omega)(\varepsilon+\mu+v-1) = 0 \quad .$$

Concluimos então que:

$$\mu + v + \varepsilon = 1 \quad . \quad (4.3.26)$$

Lembremos que a solução encontrada por Kasner para as equações de Einstein sem matéria, também obedecem uma relação como a relação acima.

Na posse da equação (4.3.26) podemos voltar à equação (4.3.15), a saber:

$$\frac{\lambda}{k} R = -\mu (v+\epsilon-1)t^{-2} .$$

Assim:

$$R = \frac{k}{\lambda} \mu^2 t^{-2} . \quad (4.3.27)$$

Utilizando (4.3.26), (4.3.22) se transforma em:

$$-(1+\lambda\Omega)(v^2+\epsilon^2+v\epsilon - (v+\epsilon)) + \frac{k}{2} \Omega \mu^2 - k\rho_0 = 0 ,$$

isto é,

$$(1+\lambda\Omega)(v^2+\epsilon^2+v\epsilon - (v+\epsilon)) - \frac{k}{2} \Omega \mu^2 + k\rho_0 = 0 . \quad (4.3.28)$$

Substituindo agora (4.3.26) em (4.3.23), encontramos:

$$(1+\lambda\Omega)(v^2+\epsilon^2+v\epsilon - (v+\epsilon)) - k\mu^2\Omega + \frac{k}{2} \mu^2\Omega + k\rho_0 = 0 . \quad (4.3.29)$$

Subtraindo (4.3.28) de (4.3.29), encontramos que,

$$\rho_0 = p_0 . \quad (4.3.30)$$

Vemos que $p(t) = \rho(t)$ na nossa solução. Vamos considerar o fluido com uma entropia constante (fluido isentrópico) ⁽⁶⁾. A existência de uma equação de estado é fundamental, como já citamos (eq. (4.1.3)). As equações de estado frequentemente usadas são:

$$1) \text{ V\u00e1cuo: } T_{\mu\nu}^* = 0 \quad \rho = p = 0$$

$$2) \text{ Poeira: } p = 0$$

3) $p = c\rho$ onde c é uma constante

4) Equação politrópica: $p = m\rho^{(1 + \frac{1}{n})}$ onde n, m são constantes, e n é chamado índice politrópico.

Devemos ter no entanto, sempre $p \leq \rho$, pois a velocidade do som, $c_s = (\frac{dp}{d\rho})^{1/2}$ entropia constante não pode ultrapassar a velocidade da luz ($c=1$).

Notemos que a densidade lagrangeana L descreve bem a interação entre campos eletromagnéticos, gravitacionais e de matéria, em estágios do universo nas vizinhanças de um ponto singular, onde aparece um fluido perfeito ultra-relativístico, isto é ($c_s = 1$). Aqui, a influência da matéria não pode ser desprezada nas regiões próximas à singularidade.

Para os escalares, pressão isotrópica e densidade de energia temos:

$$p(t) = p_0 t^{-2} \tag{4.3.20}$$

$$\rho(t) = \rho_0 t^{-2} \tag{4.3.21}$$

A presença de matéria em $t \rightarrow 0$ afeta de uma maneira decisiva a dinâmica do universo nas regiões próximas à singularidade.

A equação do traço de (3.1.26) é:

$$R = - 3 \lambda \square \Omega + k(\rho - 3p) \tag{4.1.4}$$

Utilizando $\Omega = cte$, $p = \rho = \rho_0 t^{-2}$ temos:

$$R = - 2k\rho_0 t^{-2} \tag{4.3.31}$$

O escalar de curvatura é sempre negativo e torna-se singular em $t = 0$.

Como $R < 0$, comparando com (4.3.27) verificamos que obrigatoriamente $\lambda < 0$.

A situação é bastante interessante,

$$\lambda < 0 \quad , \quad R < 0 \quad e \quad \Omega < 0 \quad .$$

Comparando (4.3.27) com (4.3.31), temos:

$$\mu^2 = -2\rho_0\lambda \quad . \quad (4.3.32)$$

Somando (4.3.24) e (4.3.25) obtemos

$$(1+\lambda\Omega)(2\mu^2 + v^2 + \varepsilon^2 + \mu(v+\varepsilon) - 2\mu - (v+\varepsilon)) - k\Omega\mu^2 + 2k\rho_0 = 0 \quad (4.3.33)$$

Mas sabemos que:

$$\mu^2 = (1-(v+\varepsilon))^2 \quad (4.3.26a)$$

Substituindo (4.3.26a) em (4.3.33), chegamos finalmente a

$$(1+\lambda\Omega)(v^2 + \varepsilon^2 + v\varepsilon - (v+\varepsilon)) = \frac{k}{2}\Omega\mu^2 + k\rho_0 = 0 \quad . \quad (4.3.34)$$

Em todas as deduções acima ainda não utilizamos a expressão do escalar de curvatura que provém da escolha da métrica (4.1.5). A saber:

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) t^{-2} \quad . \quad (4.1.10)$$

Novamente, utilizando (4.1.10), (4.3.14) e (4.3.26), obtemos para o escalar de curvatura,

$$R = 2(v^2 + \varepsilon^2 + v\varepsilon - (v+\varepsilon)) t^{-2} \quad . \quad (4.3.35)$$

Vamos resumir rapidamente os resultados obtidos:

$$a) \quad R = -\frac{k}{\lambda} \mu (v+\varepsilon-1)t^{-2} \quad (4.3.15)$$

$$b) \quad R = -2\rho_0 kt^{-2} \quad (4.3.31)$$

$$c) \quad R = 2(v^2 + \varepsilon^2 + v\varepsilon - (v+\varepsilon))t^{-2} \quad (4.3.35)$$

$$d) \quad (1+\lambda\Omega)(v^2 + \varepsilon^2 + v\varepsilon - (v+\varepsilon)) - \frac{k}{2}\Omega\mu^2 + k\rho_0 = 0 \quad (4.3.34)$$

$$e) \quad \mu + v + \varepsilon = 1 \quad (4.3.26)$$

A equação d) , (4.3.34), é identicamente satisfeita se usarmos (4.3.31), (4.3.32) e (4.3.35). Falta apenas igualarmos a equação (4.3.35) que é proveniente da definição geométrica do escalar de curvatura, com (4.3.15) que vem da equação de Maxwell não linear, onde um termo do tipo $-\frac{\lambda}{k} RW^\mu$ é fonte do W^μ . Isto é:

$$k(1-(v+\varepsilon))^2 = 2\lambda(v^2 + \varepsilon^2 + v\varepsilon - (v+\varepsilon)) \quad , \quad (4.3.36)$$

e, utilizando (4.3.31) e (4.3.32) chegamos finalmente a:

$$\mu^2 + v^2 + \varepsilon^2 = 1 - 2\rho_0 k \quad . \quad (4.3.37)$$

Como $1 - 2\rho_0 k > 0$

$$\rho_0 \leq \frac{1}{2k} \quad .$$

Mostramos que o sistema de equações provenientes da densidade lagrangeana L onde acoplamos não minimalmente a gravitação e o eletromagnetismo admite uma solução com matéria e campo eletromagnético, onde o elemento de linha é do tipo Kasner. Assim

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad . \quad (4.1.5)$$

Os coeficientes a_0, b_0, c_0 de (4.3.13) são facilmente eliminados da seguinte forma:

$$a^2(t) = a_0^2 t^{2\mu}$$

$$a^2 dx^2 = a_0^2 t^{2\mu} dx^2 = (a_0 dx)^2 t^{2\mu} \quad .$$

Definindo $\tilde{dx} = a_0 dx$, $\tilde{dy} = b_0 dy$ e $\tilde{dz} = c_0 dz$ nosso elemento de linha se transforma em

$$ds^2 = dt^2 - t^{2\mu} \tilde{dx}^2 - t^{2\nu} \tilde{dy}^2 - t^{2\varepsilon} \tilde{dz}^2 \quad . \quad (4.3.38)$$

É importante salientar que ρ_0 e ϕ_0 são quantidades da das a priori não dedutíveis da teoria portanto.

Conhecendo ρ_0 encontramos o valor de $\rho(t)$ e $p(t)$ no tempo

$$\rho(t) = p(t) = \rho_0 t^{-2} \quad (4.3.20)$$

O escalar de curvatura é dado por:

$$R = - 2k\rho_0 t^{-2} \quad (4.3.31)$$

Todos os escalares associados à teoria divergem em $t=0$, mostrando-nos que o modelo contém uma singularidade física não eliminável por qualquer transformação de coordenadas. Somente o escalar Ω , devido à equação (4.3.12), não diverge em $t=0$. Isto não compromete a singularidade do modelo, pois $\Omega = cte$ foi uma imposição adicional.

A singularidade do modelo também é vista pela definição de expansão.

A expansão é definida:

$$\theta = V^\alpha ;_\alpha = V^\alpha ,_\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha V^\beta = \Gamma_{0\alpha}^\alpha$$
$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = t^{-1} \quad . \quad (4.3.39)$$

Os coeficientes μ , ν , ϵ obedecem a duas igualdades;

$$\mu + \nu + \epsilon = 1 \quad (4.3.26)$$

$$\mu^2 + \nu^2 + \epsilon^2 = 1 - 2\rho_0 k \quad , \quad (4.3.37)$$

onde o valor de μ^2 é conhecido na posse do valor de ρ_0 , via (4.3.32), a saber:

$$\mu^2 = -2\rho_0 \lambda \quad . \quad (4.3.32)$$

Como já fizemos na Seção 4.2, estudaremos as equações (4.3.26), (4.3.37) e (4.3.32) no espaço dos parâmetros.

Vamos então definir três eixos ortogonais, com vetores unitários $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ e $\hat{\epsilon}$.

Substituindo (4.3.32) em (4.3.37) e tirando o quadrado em (4.3.32), nossas equações ficam:

$$\mu + \nu + \epsilon = 1 \quad (4.3.26)$$

$$\frac{\mu^2}{1 - \frac{k}{\lambda}} + \nu^2 + \epsilon^2 = 1 \quad (4.3.40)$$

$$\mu = \pm (-2\rho_0 \lambda)^{1/2} \quad . \quad (4.3.41)$$

No espaço dos parâmetros (4.3.26) é a equação de um

plano, que denominaremos de plano U, enquanto que a equação (4.3.40) define a superfície de um elipsoide de revolução ($a_2 = a_3$) cujo comprimento do semi eixo menor a_1 é uma função do valor da fração k/λ .

A equação (4.3.41) define dois planos paralelos $\mu = \pm \text{cte.}$

O conjunto de valores, que os parâmetros μ , ν e ϵ assumem, será dado então pela interseção destas quatro superfícies. (Ver Figura 4.3.1).

O conjunto de valores que os parâmetros assumem, dependem do valor do escalar ρ_0 . Para $\rho_0 = 0$ os dois planos M_+ e M_- se reduzem ao plano $\mu = 0$ e então nossos pontos soluções no espaço dos parâmetros são os pontos p_1 e p_2 (ver Figura 1).

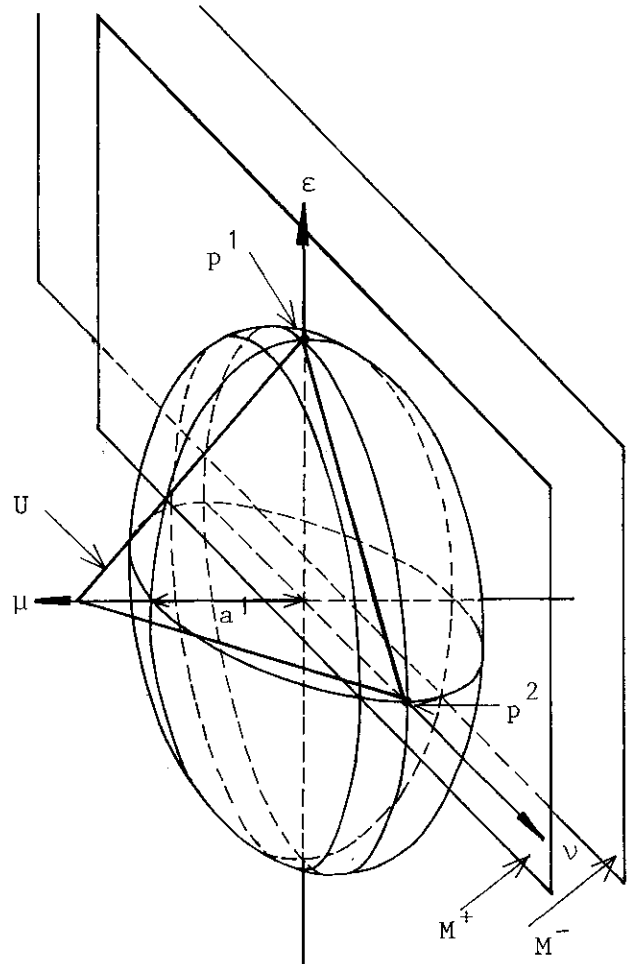


Figura 4.3.1

Os pontos p_1 e p_2 dão respectivamente os elementos de linha

$$ds^2 = dt^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - t^2 d\tilde{z}^2 \quad (4.3.42)$$

e

$$ds^2 = dt^2 - d\tilde{x}^2 - t^2 d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 \quad (4.3.43)$$

Estas soluções correspondem ao espaço tempo de Min -

kowski. Isto é, na ausência de matéria ($T_{\mu\nu}^* = 0$) e $F_{\mu\nu} = 0$, encontramos o elemento de linha de Minkowski.

Basta efetuarmos as transformações de coordenadas

$$\begin{aligned} t \sinh \tilde{z} &= \tilde{\xi} \\ t \cosh \tilde{z} &= \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

para (4.3.42) e

$$\begin{aligned} t \sinh \tilde{y} &= \tilde{\xi} \\ t \cosh \tilde{y} &= \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

para (4.3.43) obtendo respectivamente para os dois casos

$$ds^2 = d\tilde{\tau}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{\xi}^2 \quad (4.3.46)$$

e

$$ds^2 = d\tilde{\tau}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{\xi}^2 - d\tilde{z}^2 \quad (4.3.47)$$

Para $\rho_0 \neq 0$, isto é, na presença de matéria, temos soluções do tipo Kasner. Vamos estudar o comportamento dos parâmetros v e ε sobre os planos M_+ e M_- ($\mu = \text{cte}$).

Substituindo (4.3.32) em (4.3.26) e (4.3.37) encontramos:

$$v^2 + \varepsilon^2 = 1 + 2\rho_0(\lambda - k) \quad (4.3.48)$$

$$v^2 + \varepsilon = 1 \mp \sqrt{-2\rho_0\lambda} \quad (4.3.49)$$

A intersecção dos planos M_+ e M_- com o elipsoide são círculos (ver Fig. 1), e a intersecção do plano U com os planos M_+ e M_- são retas sobre os planos M_+ e M_- .

Como $\lambda < 0$ então o círculo (eq. (4.3.48)) tem raio menor que um.

Sobre um plano ve temos, então, um círculo de raio menor que um e duas retas de coeficiente angular menos um. A intersecção do círculo com as retas nos dão os pontos soluções no espaço dos parâmetros.

Notemos que o conjunto de pontos soluções no espaço dos parâmetros da intersecção das quatro superfícies admite si multaneamente os valores $\mu > 0$ e $\mu < 0$ (intersecção dos planos M_+ e M_- com o elipsoide e o plano U).

Definindo:

$$\eta = \sqrt{-2\rho_0\lambda} \quad . \quad (4.3.50)$$

O sistema de equações (4.3.48) e (4.3.49) é facilmente solúvel e encontramos para o parâmetro ϵ a seguinte expressão, on de os sinais menos mais (\mp) indicam se o valor do parâmetro μ é maior ou menor que zero. Desta forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[1 \mp \eta + \left\{ (1 \mp \eta)^2 - 2[(1 \mp \eta)^2 - 2(\rho_0(\lambda - k) + 1)] \right\}^{1/2} \right] \quad (4.3.51)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[1 \mp \eta - \left\{ (1 \mp \eta)^2 - 2[(1 \mp \eta)^2 - 2(\rho_0(\lambda - k) + 1)] \right\}^{1/2} \right] \quad (4.3.52)$$

Vamos definir duas funções Δ^+ e Δ^- que correspondem respectivamente às soluções $\mu > 0$ e $\mu < 0$. Temos:

$$\Delta^+ = \left\{ (1 - \eta)^2 - 2[(1 - \eta)^2 + 2\rho_0(k - \lambda) - 1] \right\}^{1/2} \quad (4.3.53)$$

$$\Delta^- = \left\{ (1 + \eta)^2 - 2[(1 + \eta)^2 + 2\rho_0(k - \lambda) - 1] \right\}^{1/2} \quad . \quad (4.3.54)$$

É fácil mostrar que:

$$\begin{aligned} & \{ (1 \mp \eta)^2 - 2[(1 \mp \eta)^2 + 2\rho_0(k-\lambda) - 1] \}^{1/2} = \\ & = (-\eta^2 \mp 2\eta + 4\rho_0(\lambda-k) + 1)^{1/2} . \end{aligned}$$

Então:

$$\Delta^+ = (-3\eta^2 - 2\eta - 4\rho_0 k + 1)^{1/2} \quad (4.3.55)$$

e

$$\Delta^- = (-3\eta^2 + 2\eta - 4\rho_0 k + 1)^{1/2} . \quad (4.3.56)$$

Desta forma, nossos quatro pontos soluções no espaço dos parâmetros têm coordenadas

$$\mu = \eta \quad v = \frac{1}{2} (1 - \eta - \Delta^+) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \eta + \Delta^+) \quad , \quad (4.3.57)$$

$$\mu = \eta \quad v = \frac{1}{2} (1 - \eta + \Delta^+) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \eta - \Delta^+) \quad , \quad (4.3.58)$$

$$\mu = -\eta \quad v = \frac{1}{2} (1 + \eta - \Delta^-) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (1 + \eta + \Delta^-) \quad , \quad (4.3.59)$$

$$\mu = -\eta \quad v = \frac{1}{2} (1 + \eta + \Delta^-) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (1 + \eta - \Delta^-) \quad . \quad (4.3.60)$$

Na posse do escalar ρ_0 (conhecendo-se, é claro, o valor da constante de acoplamento λ) obtemos as coordenadas no espaço dos parâmetros dos pontos soluções da intersecção das quatro superfícies, a saber, o elipsoide, o plano U e os dois planos M_+ e M_- .

Mostramos que o conjunto solução da intersecção das quatro superfícies se reduz a quatro pontos, ou dois,

no caso $\rho_0 = 0$. A intersecção do elipsoide com os planos M_+ e M_- serão círculos (ver Figura 4.3.1) e estes círculos cortam o plano U em quatro pontos. Temos então uma solução, cujo conjunto de pontos soluções é discreto. Na Seção 4.5 examinaremos uma classe de soluções representada por círculos no espaço dos parâmetros. Isto é, a solução não é mais discreta no espaço dos parâmetros, mas admite um valor contínuo de pontos para um determinado ρ_0 .

Note que o parâmetro μ assume valores reais possíveis apenas no intervalo $[-a_1, a_1]$

$$\mu \leq \frac{\lambda}{\lambda - k} \quad .$$

Para $\mu \neq 0$ (elemento de linha de Kasner) os fótons terão uma massa inercial diferente de zero.

Lembrando a Lagrangeana de Procca

$$L_{\text{Procca}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m_\gamma W_\mu W^\mu - 2J_\mu W^\mu \quad (2.3.3)$$

Comparando com a nossa densidade lagrangeana L (eq. (3.3.1)), encontramos

$$m_\gamma = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} R \quad (4.3.61)$$

Como $\lambda < 0$ e $R < 0$ a positividade da massa fica assegurada. Usando (4.3.27), chegamos a

$$m_\gamma = \sqrt{\mu^2 t^{-2}} = |\mu| t^{-1} \quad (4.3.62)$$

Nos pontos p_1 e p_2 (Espaço-Tempo de Minkowski) a mas-

sa inercial do fóton é zero enquanto que se $\rho_0 \neq 0$, $\mu \neq 0$ a massa do fóton é diferente de zero. Em $t = 0$ a massa diverge, o que é esperado devido à singularidade física em $t = 0$.

O modelo apresenta expansão, como já mencionamos, mas apresenta também dilatação.

Da definição de dilatação $\sigma_{\mu\nu}$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (V_{\mu;\nu} + V_{\nu;\mu}) - \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} \quad (4.3.63)$$

Desta forma:

$$V_{1;1} = -\Gamma_{11}^0 = -a\dot{a}$$

$$\sigma_{11} = -a\dot{a} + \frac{1}{3} \theta a^2 \quad ,$$

logo,

$$\sigma^1_1 = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{3} \theta = (\mu - \frac{1}{3})t^{-1} \quad (4.3.64)$$

$$\sigma^2_2 = (\nu - \frac{1}{3})t^{-1} \quad (4.3.65)$$

$$\sigma^3_3 = (\varepsilon - \frac{1}{3})t^{-1} \quad . \quad (4.3.66)$$

4.4 - A SOLUÇÃO SEM ACOPLAMENTO NEM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Para termos uma idéia mais clara da solução anteriormente obtida, vamos voltar às equações de Einstein (eq.(3.1.15)) e mostrar que estas admitem uma solução, cujo elemento de linha é do tipo Kasner (eq. (4.1.5)), mas contém também matéria e ener

gia. Usando um fluido perfeito, como já fizemos anteriormente,

$$T^{\mu\nu*} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad , \quad (4.1.1)$$

e trabalhando num referencial co-movente com o fluido ($V^\alpha = \delta^\alpha_0$), temos

$$T^{*00} = \rho \quad (4.3.6a)$$

$$T^{*1}_1 = T^{*2}_2 = T^{*3}_3 = -p \quad . \quad (4.3.6b,c,d)$$

Substituindo as componentes mistas do tensor de Einstein (eqs. (4.1.11a) à (4.1.11d)) e as equações ((4.3.6a) à (4.3.6d)) nas equações de Einstein, obtemos:

$$G^0_0 = -kT^0_0^* \quad .$$

Isto é,

$$-\left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right) = -k\rho \quad (4.4.1)$$

$$G^1_1 = -kT^1_1^* \quad .$$

Isto é,

$$-\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}\right) = k\rho \quad (4.4.2)$$

$$G^2_2 = -kT^2_2^*$$

Então

$$-\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c}\right) = k\rho \quad , \quad (4.4.3)$$

e, finalmente,

$$G^3_3 = -kT^3_* \quad ,$$

isto é,

$$-\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b}\right) = kp \quad . \quad (4.4.4)$$

Note que temos cinco variáveis $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ e apenas quatro equações. Tentando novamente uma solução do tipo potência para este sistema de equações, isto é,

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^\mu \\ b(t) &= b_0 t^\nu \\ c(t) &= c_0 t^\epsilon \\ p(t) &= p_0 t^\xi \\ \rho(t) &= \rho_0 t^\sigma \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Substituindo (4.3.13) em (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) e (4.4.4), encontramos:

$$(\mu\nu + \mu\epsilon + \nu\epsilon) - k\rho_0 = 0 \quad (4.4.5)$$

$$\nu^2 + \epsilon^2 + \nu\epsilon - (\nu+\epsilon) + kp_0 = 0 \quad (4.4.6)$$

$$\mu^2 + \epsilon^2 + \mu\epsilon - (\mu+\epsilon) + kp_0 = 0 \quad (4.4.7)$$

$$\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu - (\mu+\nu) + kp_0 = 0 \quad (4.4.8)$$

onde

$$p(t) = p_0 t^{-2} \quad (4.3.20)$$

$$\rho(t) = \rho_0 t^{-2} \quad . \quad (4.3.21)$$

Estas quatro equações acima ((4.4.5) à (4.4.8)) são identicamente satisfeitas se $\rho_0 = p_0$ (temos novamente um fluido perfeito ultra-relativístico, $c_s = 1$) e os parâmetros μ , ν ,

ϵ , juntamente com o escalar ρ_0 obedecem às seguintes equações:

$$\mu + \nu + \epsilon = 1 \quad (4.3.20)$$

$$\mu^2 + \nu^2 + \epsilon^2 = 1 - 2\rho_0 k \quad (4.3.37)$$

Temos relações já conhecidas. A eq.(4.3.41) aqui não aparece pois não há acoplamento entre o eletromagnetismo e a gravitação. O acoplamento aparece no espaço dos parâmetros no comprimento do eixo menor do elipsoide e com os dois planos M_+ e M_- . Mostraremos que o acoplamento reduzirá em uma unidade a dimensão do conjunto de pontos soluções das nossas equações no espaço dos parâmetros.

Estudando novamente as equações

$$\mu + \nu + \epsilon = 1 \quad (4.3.20)$$

$$\mu^2 + \nu^2 + \epsilon^2 = 1 - 2\rho_0 k \quad (4.3.37)$$

no espaço dos parâmetros, vemos que (4.3.20) define um plano (como já vimos) e (4.3.37) uma superfície esférica de raio h onde

$$h = (1 - 2\rho_0 k)^{1/2} \quad (4.4.9)$$

O raio h da superfície esférica é uma função do escalar ρ_0 . Para $\rho_0 = 0$ o raio h é máximo. A intersecção do plano U com a superfície esférica, define os conjuntos de valores que os parâmetros μ , ν e ϵ assumem.

Na posse do valor de ρ_0 , a intersecção (círculo M) é conhecida (ver Figura 4.4.1).

É fácil ver que o círculo M degenera em um ponto (ponto p) no caso de $\rho_0 = \frac{1}{3k}$ ($\mu = \nu = \varepsilon = \frac{1}{3}$).

Para $\rho_0 > \frac{1}{3k}$ não há intersecção das superfícies de finidas pelas equações (4.3.26) e (4.3.37).

Desta forma,

$$0 \leq \rho_0 \leq \frac{1}{3k} .$$

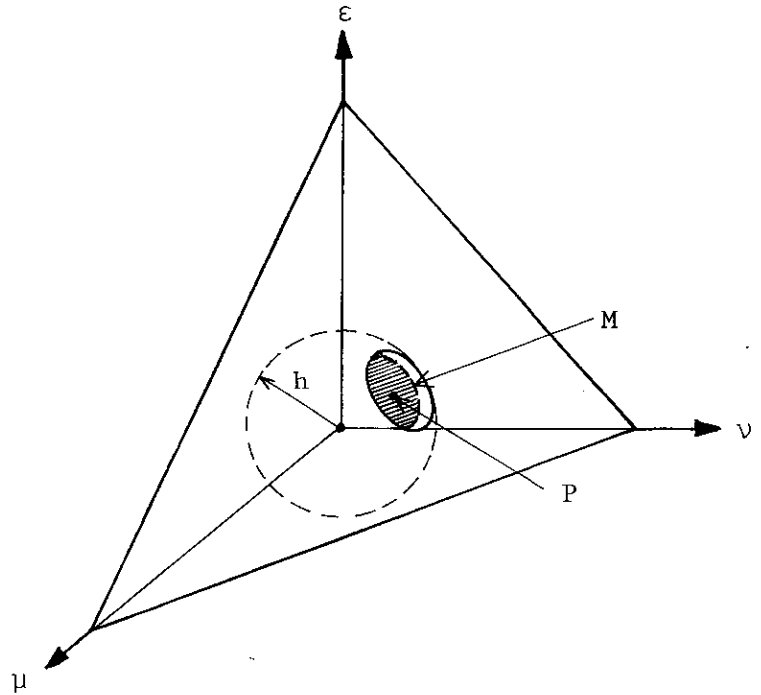


Figura 4.4.1

Para $\rho_0 = 0$ o círculo M é máximo (círculo N) (ver Figura 4.4.2).

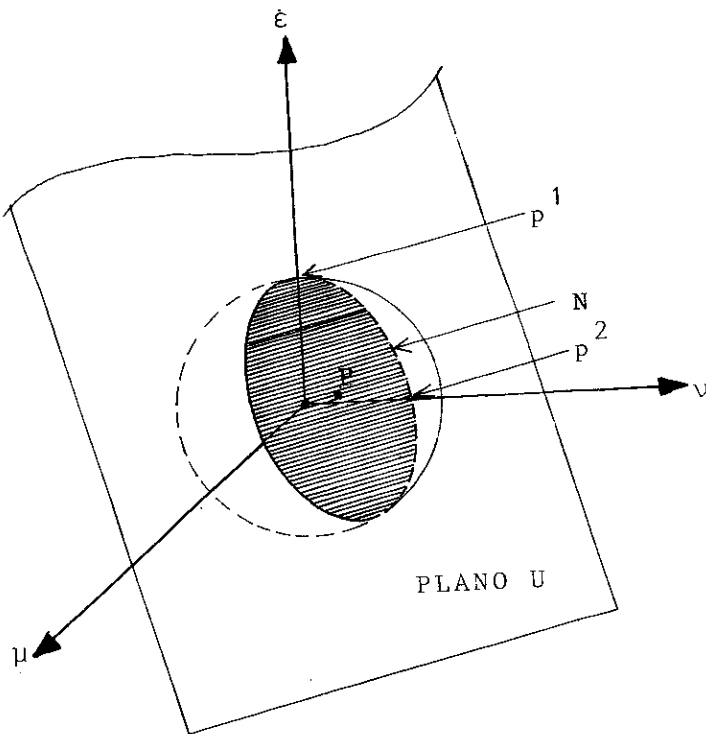


Figura 4.4.2

É extremamente instrutivo o estudo dos círculos gerados pelas intersecções das duas superfícies geradas pelas equações (4.3.26) e (4.3.37) sobre o próprio plano U. (Ver Figuras 4.4.3 e 4.4.4).

Desta forma, construiremos o diagrama da Figura 4.4.5.

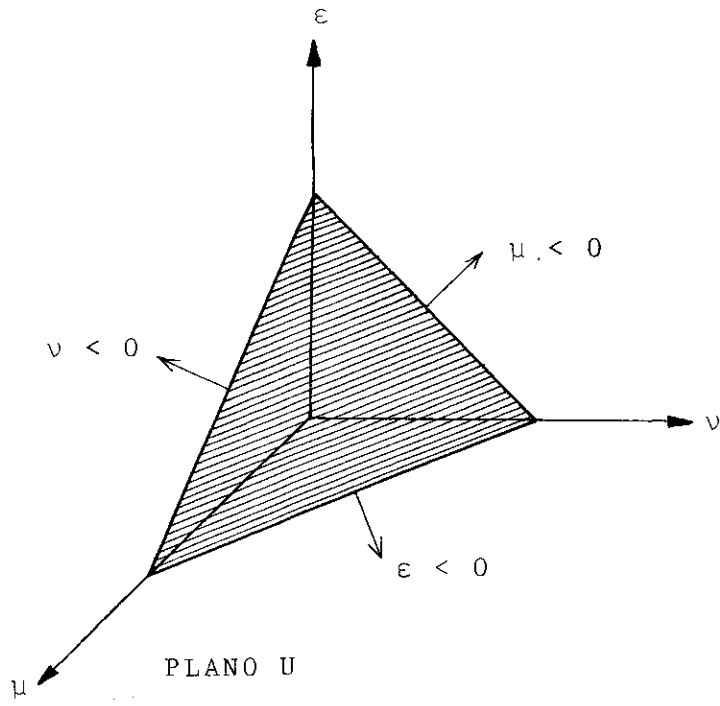


Figura 4.4.3

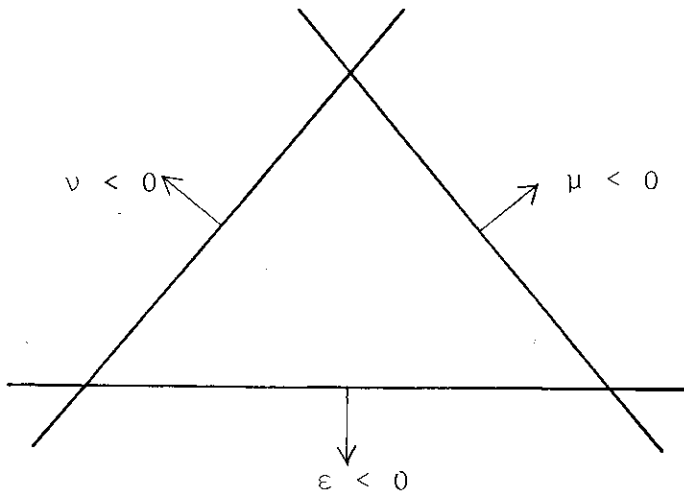


Figura 4.4.4

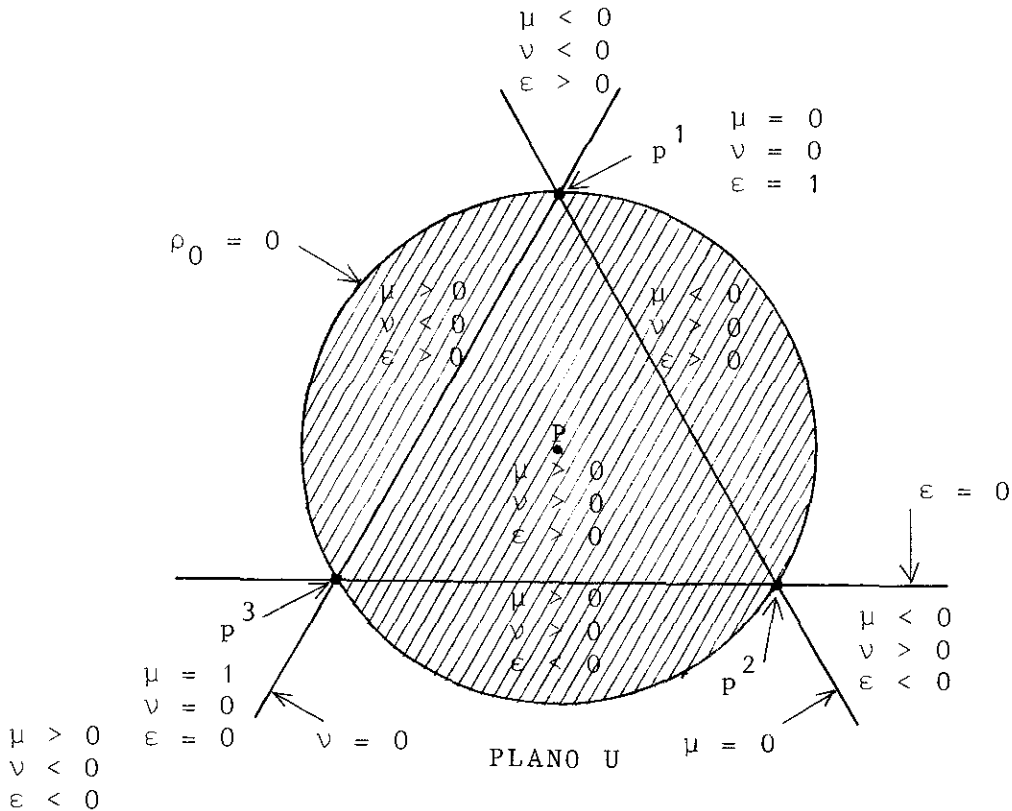


Figura 4.4.5

A solução de Kasner-1921 (no vazio) é a fronteira (círculo N). A presença de matéria ($\rho_0 \neq 0$) preenche o interior do círculo N. Notemos que para um determinado valor de ρ_0 , os parâmetros μ , ν e ϵ assumem valores contínuos sobre um círculo com centro em P. Cada ponto do círculo, e portanto cada ponto do interior do círculo N, representa uma solução possível de nossas equações, e como estes valores são contínuos, temos uma classe de soluções.

Da Figura 4.4.5 vemos que temos sempre dois eixos coordenados se expandindo.

Para $\rho_0 = \frac{1}{3k}$ ($\mu = \nu = \epsilon = \frac{1}{3}$) temos (ponto P)

$$ds^2 = dt^2 - t^{2/3} (d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2) \quad , \quad (4.4.10)$$

e ainda

$$p = \rho(t) = \frac{1}{3k} t^{-2} \quad . \quad (4.4.11)$$

Temos uma solução tipo Friedman com singularidade $t = 0$. Os escalares invariantes associados à teoria divergem nas vizinhanças de $t = 0$.

Uma solução tipo Friedman ($\mu = \nu = \varepsilon = \frac{1}{3}$) também é possível no caso de $\lambda \neq 0$. Mas esta solução só ocorre, se a seguinte relação existir:

$$\left| \frac{\lambda}{k} \right| = \frac{1}{6} \quad .$$

CONCLUSÕES

As conclusões deste trabalho podem ser resumidas da seguinte forma:

Obtivemos uma solução no vácuo material para as equações dos campos derivadas de uma densidade lagrangeana que acopla não minimalmente a gravitação e o eletromagnetismo.

A solução é anisotrópica, resultando no elemento de linha do tipo Kasner. Da mesma forma que na solução de Kasner das equações de Einstein, as componentes do tensor métrico são funções do tempo. Existe ainda uma outra variável que depende apenas do tempo. Na solução encontrada, esta variável é também do tipo potência.

Temos, nesta solução, quatro funções do tipo potência de t . As potências são números arbitrários que obedecem a duas equações (eqs. (4.2.13) e (4.2.14)). Estes números são parâmetros arbitrários e estudamos o conjunto de pontos soluções que nos é dado pelas equações (4.2.13) e (4.2.14) no espaço dos parâmetros.

Mostra-se que o conjunto de pontos soluções no espaço dos parâmetros é a superfície de uma esfera em R^3 .

A seguir, apresentamos uma solução anisotrópica para as mesmas equações dos campos, mas com conteúdo material e fótons não lineares.

Mostramos que esta solução descreve bem estágios singulares do universo aparecendo um fluido perfeito ultra-relativístico ($p = \rho$).

Fizemos, a seguir, um estudo completo desta solução no espaço dos parâmetros. Mostramos que neste espaço as soluções das nossas equações são pontos isolados.

Finalmente, mostramos que na ausência de acoplamento entre a gravitação e o eletromagnetismo, o conjunto de pontos soluções no espaço dos parâmetros se torna infinito.

Nesta solução também aparece um fluido perfeito ultra-relativístico e mostra-se que a solução encontrada por Kasner para as equações de Einstein é um subconjunto de uma classe mais geral de soluções (ver Fig. 4.4.5), encontrada neste trabalho.

APÊNDICE A

CÁLCULO TENSORIAL

Em face da arbitrariedade da escolha do referencial as leis da natureza devem ser escritas na teoria geral da Relatividade sob uma forma covariante, isto é, que são aplicáveis em qualquer sistema de coordenadas quadridimensional.

Consideremos a transformação de um sistema de coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 a outro $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$:

$$x^\mu = f^\mu(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad ,$$

onde os f^μ são funções das coordenadas $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$.

Com uma transformação de coordenadas, os seus diferenciais se transformam como

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad . \quad (A.1)$$

Denomina-se 4-vetores contravariantes a todo conjunto de grandezas A^μ , que sobre uma transformação de coordenadas, se transformam como seus diferenciais:

$$A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \bar{A}x'^\nu \quad (A.2)$$

Seja agora, um certo campo escalar ϕ . As derivadas $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi$ se transformam segundo as fórmulas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad . \quad (\text{A.3})$$

Chamamos então 4 vetor covariante a todo conjunto de quatro grandezas A_μ que se transforma como as derivadas do campo escalar, quando passamos de um referencial a outro.

$$A_\mu(x) = A'_\nu(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.4})$$

Para tensores de ordem mais altas temos:

$$A^{\mu\nu} = A'^{\sigma\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} \quad (\text{A.5})$$

$$A_{\mu\nu} = A'_{\sigma\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \quad (\text{A.6})$$

$$A^\mu_\nu = A'^\sigma_\rho \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \quad . \quad (\text{A.7})$$

Em virtude disto, vemos que o produto escalar de dois quadrivetores $A^\mu B_\mu$ é um invariante.

$$A^\mu B_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} A'^\mu B'_\sigma = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x'^\nu} A'^\nu B'_\sigma = A'^\nu B'_\nu \quad .$$

Vamos definir agora o tensor

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} .$$

Então, $A^\mu \delta^\sigma_\mu = A^\sigma$.

O quadrado do elemento de comprimento num sistema arbitrário de coordenadas é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (\text{A.8})$$

onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas e $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ (tensor simétrico).

Definindo agora o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ tal que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma} \quad . \quad (A.9)$$

Então

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma} \quad (A.10)$$

$$A_{\mu} = g_{\mu\sigma} A^{\sigma} \quad (A.11)$$

Num sistema Minkowskiano, o tensor métrico possui as componentes

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = g^{\mu\nu(0)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (A.12)$$

$$A^0 = A_0 \quad e \quad A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$$

$$A^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma\nu}$$

e

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} A_{\sigma\rho} \quad .$$

Podemos formar um escalar com as componentes do tensor $A^{\mu\nu}$ por meio da soma

$$g^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = A^{\mu}_{\mu} \quad (\text{traço}) \quad (A.13)$$

Diferenciação covariante:

Para um vetor covariante temos:

$$A_{\mu} = A'_{\nu} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad ,$$

então

$$\begin{aligned} dA_{\mu} &= A'_{\nu} d \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} dA'_{\nu} \\ &= A'_{\nu} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} dx^{\rho} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} dA'_{\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Vemos então que dA_{μ} não se transforma como um vetor. Somente no caso de:

$$\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} = 0 \quad ,$$

isto é,

$$x'^{\nu} = f^{\nu}(x^{\mu})$$

f^{ν} funções lineares.

Vamos definir então a diferença

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - \delta A^{\mu} \quad . \quad (\text{A.15})$$

Supondo um vetor contravariante. Se seu valor num ponto de coordenadas x^{μ} é A^{μ} , então num ponto vizinho $x^{\mu}+dx^{\mu}$ será $A^{\mu} + dA^{\mu}$.

Realizando um transporte paralelo infinitesimal do vetor A^{μ} ao ponto $x^{\mu}+dx^{\mu}$ e representando sua variação por δA^{μ} . Logo, a diferença num só ponto do espaço é:

$$(A^{\mu}+dA^{\mu}) - (A^{\mu}+\delta A^{\mu}) = DA^{\mu}$$

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - \delta A^{\mu} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} A^{\nu} dx^{\rho} \quad (\text{A.17})$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ são chamados símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{\mu, \nu\rho} = g_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}$$

e

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho, \nu\sigma} \quad .$$

Sejam dois vetores, um covariante e o outro contravariante. Então $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$

$$\delta A^\mu B_\mu + A^\mu \delta B_\mu = 0$$

$$B^\mu \delta A_\mu = -A_\mu \delta B^\mu = \Gamma^\mu_{\sigma\rho} B^\sigma A_\mu dx^\rho$$

ou

$$B^\mu \delta A_\mu = \Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma B^\mu dx^\rho .$$

Como B^μ é arbitrário,

$$\delta A_\mu = \Gamma^\rho_{\mu\sigma} A_\rho dx^\sigma \quad (\text{A.18})$$

Temos:

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma \right) dx^\nu , \quad (\text{A.19})$$

e de forma análoga,

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma \right) dx^\nu . \quad (\text{A.20})$$

As expressões entre parêntesis são tensores, pois multiplicadas por dx^μ dão um vetor. Definindo a derivada covariante de um vetor covariante A_μ da forma

$$A_{\mu;v} \quad \text{e} \quad A^\mu_{;v} = (g^{\mu\sigma} A_\sigma)_{;v} \quad (\text{A.21})$$

$$(\text{A.22})$$

Assim

$$DA^\mu = A^\mu_{;v} dx^\nu \quad \text{e} \quad DA_\mu = A_{\mu;v} dx^\nu \quad (\text{A.23})$$

$$(\text{A.24})$$

Então

$$A^\mu_{;v} = A^\mu_{,v} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma \quad (\text{A.25})$$

e

$$A_{\mu;v} = A_{\mu,v} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma \quad (\text{A.26})$$

Num referencial Minkowskiano $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$.

De maneira semelhante mostra-se que

$$A^{\mu\nu};\rho = A^{\mu\nu},\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} A^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} A^{\mu\sigma} \quad (\text{A.27})$$

e

$$A_{\mu\nu};\rho = A_{\mu\nu},\rho - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} A_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} A_{\mu\sigma} \quad (\text{A.28})$$

É preciso entender a derivada covariante de um escalar ϕ como uma derivada comum, isto é, como um vetor covariante $\phi_{\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}$ e $\delta\phi = 0$, e portanto,

$$D\phi = d\phi \quad (\text{A.29})$$

A derivada do produto $A_{\mu}B_{\nu}$ é:

$$(A_{\mu}B_{\nu});\sigma = A_{\mu};\sigma B_{\nu} + A_{\mu}B_{\nu};\sigma \quad (\text{A.30})$$

Para as derivadas contravariantes temos:

$$A^{\mu};\nu = g^{\nu\sigma} A^{\mu};\sigma \quad (\text{A.31})$$

e

$$A_{\mu};\nu = g^{\nu\sigma} A_{\mu};\sigma \quad (\text{A.32})$$

Suponha agora:

$$A_{\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} A_{\mu} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\sigma}$$

e de (A.26) temos:

$$A_{\mu};\nu - A_{\nu};\mu = (\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \frac{\partial\phi}{\partial x^{\sigma}} \quad (\text{A.33})$$

Num sistema galileano as derivadas covariantes se transformam em comuns; assim, o lado esquerdo se anula. Uma vez

que $A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ é um tensor, então, sendo nulo neste sistema, deve ser nulo também em qualquer sistema, logo:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \quad (\text{A.34})$$

e evidentemente

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho} = \Gamma_{\mu,\rho\nu} \quad (\text{A.35})$$

Para a transformação de símbolos de Christoffel de um sistema para outro temos:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma'^{\sigma}_{\xi\tau} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu\rho}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \quad (\text{A.36})$$

A fórmula acima nos mostra que $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ se comportam como tensores somente em relação às transformações lineares de coordenadas.

Suponha um vetor covariante DA_{μ} ;

$$DA_{\mu} = g_{\mu\nu} DA^{\nu}$$

mas

$$A_{\nu} = g_{\nu\sigma} A^{\sigma}$$

então

$$DA_{\mu} = D(g_{\mu\nu} A^{\nu}) = g_{\mu\nu} DA^{\nu} + Dg_{\mu\nu} A^{\nu}$$

então

$$Dg_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

Portanto:

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0 \quad (\text{A.37})$$

De (2.37) temos que:

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}) \quad (\text{A.38})$$

e

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) \quad . \quad (\text{A.39})$$

De (A.39) temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma \mu}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g_{\mu\rho, \sigma} \\ &= \frac{1}{2g} g_{\nu\sigma} = (\ln\sqrt{-g})_{, \sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Com as fórmulas obtidas, podemos encontrar o valor de $A^{\mu}_{; \mu}$ que é uma generalização de divergência de vetores em espaços curvos,

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{; \mu} &= A^{\mu}_{, \mu} + \Gamma_{\sigma \mu}^{\mu} A^{\sigma} = A^{\mu}_{, \mu} + A^{\sigma} (\ln\sqrt{-g})_{, \sigma} \\ A^{\mu}_{; \mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\mu})_{, \mu} \quad ; \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

esta fórmula é fundamental para nós.

Para tensores de ordem mais altas temos:

Supondo $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$

$$A^{\mu\nu}_{; \nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\mu\nu})_{, \nu} . \quad (\text{A.42})$$

Vemos que

$$A_{\mu; \nu} - A_{\nu; \mu} = A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu} . \quad (\text{A.43})$$

Finalmente, supondo um escalar ϕ . Qual é o significado de $\phi_{; i}$ que é uma generalização de D'alambertiano em espaços curvos ?

$$\phi_{; \nu}^{\nu} = \square \phi$$

$$\phi_{; \mu} = \phi_{, \mu}$$

então

$$\phi_{; \mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} \phi_{, \nu}$$

e com ajuda de (A.41) temos que

$$\phi_{; \mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{, \nu})_{, \mu} . \quad (\text{A.44})$$

Vale notar que o teorema de Gauss para a transformação de uma integral de superfície para uma integral de volume se lê:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} A^{\mu} \sqrt{-g} \, dS_{\mu} &= \int_{\Omega} A^{\mu}{}_{;\mu} \sqrt{-g} \, d^4x = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\mu}){}_{,\mu} \sqrt{-g} \, d^4x \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$\oint_{\Sigma} \sqrt{-g} A^{\mu} \, dS_{\mu} = \int_{\Omega} (\sqrt{-g} A^{\mu}){}_{,\mu} \, d^4x$$

onde

$$dS^{\mu} = -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dS_{\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.46})$$

e

$$dS^{\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} dx^{\mu} & dx'^{\mu} & dx''^{\mu} \\ dx^{\nu} & dx'^{\nu} & dx''^{\nu} \\ dx^{\rho} & dx'^{\rho} & dx''^{\rho} \end{vmatrix} \quad (\text{A.47})$$

e

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ permutação par} \\ 0 & \text{se índices repetidos} \\ -1 & \text{se permutação ímpar} \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

É fácil ver que as derivadas covariantes não comutam, isto é,

$$\begin{aligned} A^{\mu}{}_{;\nu;\rho} - A^{\mu}{}_{;\rho;\nu} &\neq 0 \\ A^{\mu}{}_{;\nu;\rho} - A^{\mu}{}_{;\rho;\nu} &= A^{\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\nu\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$A_{\mu;\nu;\rho} - A_{\mu;\rho;\nu} = -A_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho}$$

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\eta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\eta\gamma,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\sigma} \Gamma^{\tau}{}_{\beta\eta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\beta} \Gamma^{\tau}{}_{\eta\gamma} \quad (\text{A.50})$$

$R^{\alpha}_{\eta\beta\sigma}$ é chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann.

O tensor de Riemann contém as seguintes simetrias:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 \quad . \quad (\text{A.51})$$

Identidade de Bianchi:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\alpha} + R^{\mu}_{\nu\sigma\alpha;\rho} + R^{\mu}_{\nu\alpha\rho;\sigma} = 0 \quad . \quad (\text{A.52})$$

Definimos agora o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\lambda\mu\sigma} \quad (\text{A.53})$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (\text{A.54})$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \quad .$$

Enfim, simplificando obtemos o invariante

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.55})$$

R é conhecido como curvatura escalar do espaço-tempo.

APÊNDICE B

FORMAS DIFERENCIAIS

Os tensores de Riemann das métricas usadas no texto podem ser calculadas facilmente pelo método de Cartan, utilizando a teoria das formas diferenciais. Este método, pelo menos para métricas, com um certo grau de simetria, é muito mais eficiente que os métodos tradicionais. Dado um conjunto $\{\theta^A\}$ de vetores de base contravariante, escreveremos a métrica como

$$ds^2 = g_{AB} \theta^A \theta^B \quad (\text{B.1})$$

Definindo-se as formas ω^A_B por

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C \quad (\text{B.2})$$

verifica-se que

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B \quad (\text{B.3})$$

e

$$dg_{AB} = \omega_{AB} + \omega_{BA} \quad (\text{B.4})$$

γ^A_{BC} são chamados de coeficientes de Ricci ou coeficientes de rotação. O símbolo \wedge indica o produto externo (ou de Grassman) cujas propriedades relacionaremos a seguir. A equação (B.3) é chamada de "primeira equação de Cartan".

Definindo-se as 2-forma de curvatura Ω^A_B por

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (B.5)$$

mostra-se que

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D, \quad (B.6)$$

onde R^A_{BCD} são as componentes do tensor de Riemann. A equação (B.5) é a "segunda equação de Cartan".

Para o nosso caso particular, dado o sistema de coordenadas x^A , é conveniente usar como base local os vetores $\vec{e}^A = \text{grad } x^A$, de modo que $\theta^A = dx^A$ e $g_{AB} = (\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B) = \text{constante}$. Da equação (B.3) tem-se que

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \quad (B.7)$$

Logo, dados θ^A e g_{AB} , podemos calcular as formas ω^A_B e, de (B.5) e (B.6) obter as componentes do tensor de Riemann por inspeção. (Observemos que as formas ω^A_B são determinadas univocamente pelas equações (B.3) e (B.4)).

- SUMÁRIO DAS FÓRMULAS BÁSICAS

a) - Se α e β são duas formas diferenciais de ordem m e n , respectivamente, e f é um escalar, então

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{m+n} \beta \wedge \alpha$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge d\beta$$

$$d(f\alpha) = fd\alpha + df \wedge \alpha$$

$$d^2 \alpha = 0 \quad .$$

b) - Equações de Cartan

$$d\theta^A = - \omega^A_B \wedge \theta^B$$

$$dg_{AB} = \omega_{AB} + \omega_{BA}$$

$$\begin{aligned} \Omega^A_B &= d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \\ &= \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad . \end{aligned}$$

APÊNDICE C

CÁLCULO DOS TENSORES DE EINSTEIN, RICCI E O
ESCALAR DE CURVATURA NO ELEMENTO DE LINHA
DE KASNER UTILIZANDO FORMAS DIFERENCIAIS

A métrica de Kasner se escreve sob a forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad . \quad (C.1)$$

Escolhendo as 1-formas diferenciáveis θ^A como

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt & \theta^2 &= b(t)dy \\ \theta^1 &= a(t)dx & \theta^3 &= c(t)dz \quad , \end{aligned} \quad (C.2)$$

onde $\theta^A = e^A_{\alpha} dx^{\alpha}$; e $\{e^A_{\alpha}\}$ constitui uma base de tetradas em cada ponto da variedade.

Derivando, e lembrando que:

$$d\theta^A = -\omega^A_B \theta^B \quad (C.3)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \\ \omega_2^0 &= \frac{\dot{b}}{b} \theta^2 \\ \omega_3^0 &= \frac{\dot{c}}{c} \theta^3 \quad . \end{aligned} \quad (C.4)$$

Derivando uma vez mais, e notando que

$$\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C \quad (C.5)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ \Omega_2^0 &= \frac{\ddot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2 \\ \Omega_3^0 &= \frac{\ddot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3 \\ \Omega_2^1 &= \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega_3^1 &= \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_3^2 &= \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (C.6)$$

Dai, obtemos as componentes não-nulas da curvatura na base de tetradas:

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{202}^0 &= -\frac{\ddot{b}}{b} \\ R_{303}^0 &= -\frac{\ddot{c}}{c} \\ R_{212}^1 &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \\ R_{313}^1 &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \\ R_{323}^2 &= -\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Contraindo,

$$R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R_1^1 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right)$$

$$R_2^2 = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right)$$

$$R_3^3 = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) .$$

(C.8)

As equações de Einstein para o vazio são:

$$R_{AB} = 0 .$$

APÊNDICE D

A SOLUÇÃO DE KASNER

Escrevamos a métrica de Kasner sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad . \quad (D.1)$$

Usando as curvaturas tabeladas no Apêndice C (eqs. (C.8)), as equações de Einstein para o vácuo se escrevem

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{b}}{b} &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (D.2)$$

Fazendo agora

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_1} \\ b(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_2} \\ c(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_3} \end{aligned} \quad (D.3)$$

as equações (D.2) conduzem às seguintes relações entre os nú-

meros p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{D.4}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad .$$

Os três números (p_1, p_2, p_3) desempenham um papel fundamental no estudo da métrica de Kasner. Das equações (D.4) pode-se concluir que apenas um dos três números é independente ; os três não podem ser simultaneamente iguais podendo ser iguais aos pares apenas nos casos $(0, 0, 1)$ e $(-1/3, 2/3, 2/3)$. Em qualquer outra situação os três são diferentes, sendo um deles negativo e os outros dois positivos.

APÊNDICE E

CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

Definição: Dada uma transformação infinitesimal de coordenadas $\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^A \xi_A^\mu(x)$, onde ε^A são os parâmetros da transformação, a condição para que esta transformação seja uma isometria é que os vetores $\vec{\xi}_A$ sejam vetores de Killing, isto é, $\xi_{A\alpha;\beta} + \xi_{A\beta;\alpha} = 0$.

Estes vetores podem ser interpretados como operadores e como consequência, podem ser desenvolvidos na base $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$, fazendo-se $\vec{\xi}_A = \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Pode-se mostrar então que o comutador de Lie de dois vetores de Killing $\vec{\xi}_A$ e $\vec{\xi}_B$ é dado por

$$[\vec{\xi}_A, \vec{\xi}_B] = \left(\xi_A^\mu \frac{\partial \xi_B^\alpha}{\partial x^\mu} - \xi_B^\mu \frac{\partial \xi_A^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (E.1)$$

$$= C_{AB}^D \vec{\xi}_D, \quad (E.2)$$

onde os coeficientes C_{AB}^D são os coeficientes de estrutura da álgebra de Lie gerada pelos vetores de Killing $\vec{\xi}_A$.

Consideremos então um espaço tempo cujo tri-espaço admite um grupo de isometrias tri-paramétrico. Pode-se mostrar que as constantes de estrutura definidas por (E.2) são iguais aos coeficientes de Ricci γ_{BC}^A , definidos em (E.2) como os coeficien-

tes da expansão das formas ω na base das formas θ^A . Usando-se a equação (B.3), tem-se:

$$d\theta^A = C_{BC}^A \theta^B \wedge \theta^C \quad . \quad (E.3)$$

A expressão acima é característica de espaços homogêneos tri-dimensionais e os diferentes tipos de universo podem ser caracterizados pelas constantes de estrutura associadas aos grupos de isometrias.

Baseando-se neste esquema, temos a seguinte classificação para espaços homogêneos, criada por Bianchi.

CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

TIPO	CONSTANTES DE ESTRUTURA
I	$C_{BC}^A = 0$
II	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$
III	$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
IV	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
V	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
VI	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1 \quad ; \quad C_{32}^2 = -C_{23}^2 = -h \quad (h \neq 0,1)$
VII	$\left\{ \begin{array}{l} C_{32}^1 = -C_{23}^1 = C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1 \\ C_{23}^2 = -C_{32}^2 = h \quad (h^2 < 4) \end{array} \right.$
VIII	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{12}^3 = -C_{21}^3 = C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1$
IX	$C_{BC}^A = \epsilon_{BC}^A$

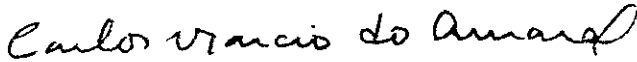
BIBLIOGRAFIA

- (1) - Hawking, S.W. & Ellis, G.F.R. - The Large Scale Structure of Space Time. Cambridge U.P. Cambridge (1973).
- (2) - Adler, R., Bazin, M. e Schiffer, M. - Introduction to General Relativity - 2nd ed. McGraw-Hill, New York (1975).
- (3) - Jackson, J.D. - Classical Electrodynamics, 2nd. ed. Wiley, New York (1975).
- (4) - Novello, M. - Cosmologia Relativista. II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, Vol. I.
- (5) - Novello, M. e Salim, J.M. - Non Linear Photons in the Universe. Phys. Rev. 200/2 (1979, 377).
- (6) - Ryan Jr., M.D. & Shepley, L.C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton U.P. Princeton (1975).
- (7) - Anderson, J.L. - Principles of Relativistic Physics. Academic Press. New York (1967).
- (8) - Landau, L.D. & Lifchitz, E.M. - Teoria do Campo. Editora MIR (1980) Moscou.
- (9) - Weinberg, S. - Gravitation and Cosmology. Wiley. New York, (1972).
- (10) - Lorentz, H.A., Einstein, A., Minkovski, H. - O Principio da Relatividade. Fundação Calouse Gulbekian, 2ª Edição.
- (11) - Bergmann, P.G. - Introduction to the Theory of Relativity. Dover Publications, New York (1976).
- (12) - Barut, A.O. - Electrodynamics and Classical Theory of Field & Particles. Dover Publications, New York (1980).


- (13) - Belinski, V.A., Lifchitz, E.M., Khalatnikov I.M. - Advance in Physics 19, 525 (1970).
- (14) - Eddington, A.S. - The Mathematical Theory of Relativity . Chelsea P. Comp., New York (1965).
- (15) - Rückert, E.V. - Tese de Mestrado - Um Estudo do Acoplamento Não Mínimo Entre a Gravitação e o Eletromagnetismo . CBPF 1972.
- (16) - Galvão, C.A.P. - Tese de Mestrado - Criação de Partículas em Universos em Expansão e a Questão da Isotropização do Cosmos. CBPF, 1974.
- (17) - Schutz, B.F. - Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge U. Press (1980).
- (18) - Synge, J.L. and Schild, A. - Tensor Calculus - Dover Pub. Inc., New York (1969).
- (19) - Lorentz, H.A., Hilbert, D. - Publikationend Koninkl. Akad. van Wetench, te Amsterdam, Volumes Anos 1915 e 1916.
- (20) - Pound e Rebka. Phys. Rev. Letters 4, 377 (1960).
- (21) - M.G. Adam, Mon. Nat. Roy. Astron. Soc. 119, 460 (1959).
- (22) - J.L. Greenstein and Trimble, Ap. J. 149, 283 (1967).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Mario Novello - Presidente



Carlos Marcio do Amaral



Carlos Augusto Pinto Galvão



Ívano Damião Soares - Suplente

Rio de Janeiro, 11 de outubro de 1984