

*RENATO PORTUGAL*

MODELOS COSMOLÓGICOS TIPO BIANCHI I, II, VIII, IX E  
KANTOWSKI-SACHS COM FLUIDO PERFEITO E CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS  
COM CORRENTE DE CONDUTIVIDADE

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro — 1984

- a Roberto e Marisa,  
meus pais

## RESUMO

Apresentamos três processos de soluções das equações de Einstein-Maxwell para modelos cosmológicos tipo Bianchi I, II, VIII, IX e Kantowski-Sachs com fluido perfeito em regime de magnetohidrodinâmica. Consideramos modelos tipo Bianchi diagonais com no máximo duas direções de anisotropia. Encontramos soluções para modelos tipo Bianchi II e IX com condições de energia a serem analisadas. Encontramos soluções para modelos tipo Bianchi IX e Kantowski-Sachs com condutividade elétrica positiva e satisfazendo às condições dominantes de energia. Encontramos soluções para modelos tipo Kantowski-Sachs isotrópicos satisfazendo à equação de estado  $p = \lambda\rho$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  com  $\rho > 0$ , admitindo, além do fluido perfeito, apenas campo elétrico. Mostramos que uma classe de soluções tipo Bertotti-Robinson é instável por perturbações e é levada em modelos tipo Kantowski-Sachs com condutividade elétrica não nula.

## AGRADECIMENTOS

A Ivano Damião Soares pela sugestão do tema e pela orientação.

A Jayme Tiomno pelas discussões e pelas críticas a algumas posturas que eu sustentei, que se revelaram fundamentais para a realização desta tese.

A Marcelo Rebouças, Antonio Teixeira e Mario Novello pelas referências, e em especial ao Marcelo pelas frutíferas discussões.

A Maurício, Nelson, Romero, Bartolomeu, Abílio, Cláudia, Renato e aos amigos do CBPF pelas discussões e pelo convívio.

À Helena de Souza Ferreira e Marilene Bernardi pelo trabalho de datilografia.

Ao CNPq pela concessão da bolsa de estudos.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
CONVENÇÕES .....	vii
INTRODUÇÃO .....	1
1. A GEOMETRIA .....	5
2. O CONTEÚDO MATERIAL .....	11
3. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN .....	14
4. AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E SOLUÇÕES .....	17
5. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES EINSTEIN-MAXWELL .....	25
5.1 Soluções tipo potência de $t$ .....	25
5.2 Soluções Kantowski-Sachs Isotrópicas .....	37
5.3 Soluções na variável $\eta$ .....	47
6. AS EQUAÇÕES EINSTEIN-MAXWELL PARA BIANCHI I .....	56
APÊNDICE A	
I. COORDENADAS COMOVENTES .....	58
II. TENSOR MOMENTUM-ENERGIA PARA FLUIDO PERFEITO E CAMPO ELETROMAGNÉTICO .....	59
III. DECOMPOSIÇÃO DO TENSOR MOMENTUM ENERGIA E DO TENSOR DE MAXWELL .....	63
IV. CONDIÇÕES DE ENERGIA .....	66
V. DISCUSSÃO CONCEITUAL DA OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN .....	68
APÊNDICE B	
I. INTRODUÇÃO .....	73
II. VETORES, 1-FORMAS E TENSORES .....	73
III. FORMAS DIFERENCIAIS .....	76
IV. DERIVADA DE LIE, DERIVADA COVARIANTE E VETORES DE KILLING .....	77
V. TETRADAS E CÁLCULO COM FORMAS .....	80

VI. EQUAÇÕES DE MAXWELL NA BASE DE TETRADAS .....	83
APÊNDICE C	
I. A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI-BEHR .....	85
II. CARACTERIZAÇÃO DO ELEMENTO DE LINHA DOS MODELOS ESTUDADOS ....	88
BIBLIOGRAFIA .....	92

## CONVENÇÕES

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$  - índices de coordenadas - valores: 0, 1, 2, 3.

$A, B, C, \dots$  - índices de tetradas - valores: 0, 1, 2, 3.

$(0), (1), \dots$  - índices de tetradas - não colocamos parêntesis quando não havia dificuldade de diferenciação do tipo de índice.

$(\alpha\beta\dots)$  - índices totalmente simétricos.

$[\alpha\beta\dots]$  - índices totalmente antissimétricos.

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$$V_{\alpha;\beta;\lambda} - V_{\alpha;\lambda;\beta} = R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda} V_{\mu}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}$$

Tensor de Maxwell

$$F_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Símbolo de Levi-Civita  $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} : \epsilon^{0123} = 1$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{oijk}$$

$$g = \det g_{\alpha\beta}$$

" 'Mas como foi', disse (Adso) admirado, 'que vós conseguistes resolver o mistério da biblioteca olhando-a de fora e não o resolvestes quando estáveis lá dentro ?'

'Assim Deus conhece o mundo, (disse Guilherme) porque o concebeu em sua mente, como se estivesse de fora, antes que fosse criado, enquanto nós não conhecemos a regra, porque vivemos dentro dele encontrando-o já pronto'."

Umberto Eco  
'O Nome da Rosa'  
2ª edição, pg. 255

"... Toda vida se tornou, para mim, sonhadora e irreal, ao passo que o Passado majestoso, carregado de tempo e cheio de inenarrável sabedoria, surgiu ante mim e dominou todo meu ser."

Bertrand Russell  
Carta a Lucy Donnelly  
6 de julho de 1902

*Tudo se relaciona: meu modo de ser, meu modo de pensar, minha paixão pela física e pela ciência, meu modo de relacionar com as pessoas, meu modo de ver e de sentir... Sentir uma vida que vem de fora e atinge as profundezas de meu ser, e ser alguém em cujo interior fervilham idéias sobre o mundo e sobre as pessoas num turbilhão angustiante, e minha perplexidade atinge às raias do êxtase num sentimento que queima em meu peito e me dá forças para viver. Viver sendo e ser.... vivendo.*

## INTRODUÇÃO

Se não podemos conhecer a regra quando estamos dentro do la birinto da biblioteca, como podemos descobrir a arquitetura do universo se não podemos sair dele ? Apesar dessa questão aparentemente mostrar certos limites à cosmologia, que é a ciência que estuda o universo como um todo, existem argumentos que nos deixam confiantes. A cosmologia dos gregos antigos, que estudava tudo o que existia no mundo, na verdade se restringia a uma esfera com raio um pouco maior que a órbita de Saturno, que era a esfera das estrelas fixas. A questão acima podia ter sido colocada pelos gregos, porém sabemos hoje, que não havia contradição alguma, pois além da esfera das estrelas fixas existia todo um universo a ser descoberto. Talvez hoje estejamos na mesma situação, e venhamos no futuro descobrir novas dimensões a serem pesquisadas, sejam dimensões espaciais, sejam dimensões de outras naturezas. Talvez a questão acima se coloque para o estudo do cosmo tal como Carl Sagan o vê. Para ele o cosmo é tudo o que existe que existiu ou que existirá.

Depois dos gregos, a cosmologia adormeceu através dos séculos, e foi despertada em 1917 quando Einstein aplicou a Teoria da Relatividade Geral para descrever um modelo para o universo. Desde então a cosmologia tem tido seu desenvolvimento teórico próprio. Uma parte desse desenvolvimento consiste na busca de soluções exatas das equações de Einstein para o universo como um todo. Inicialmente as soluções foram obtidas para conteúdos materiais simples, como poeira e fluido perfeito<sup>[22]</sup>. À medida que a pesquisa se desenvolvia, esses conteúdos passaram a ser cada vez

mais complexos, admitindo viscosidade, campos eletromagnéticos, fluxo de calor, campos escalares, etc. Esta tese se propõe a achar soluções exatas para uma certa classe de modelos cosmológicos cujo conteúdo material é fluido perfeito com campos eletromagnéticos admitindo condutividade elétrica não nula. Modelos com fluido perfeito e campos eletromagnéticos já têm sido exaustivamente tratados, no entanto, modelos que admitem condutividade elétrica só nos últimos anos vêm sendo sistematicamente tratados [12,33,34]. O conteúdo material neste caso, em geral obedece ao chamado regime de magnetohidrodinâmica [6], onde certas suposições sobre a corrente elétrica e sobre o campo elétrico devem ser satisfeitas, como por exemplo, a validade da lei de Ohm (generalizada).

Os modelos que estamos estudando são espacialmente homogêneos, isto é, as seções espaciais têm curvatura constante. Isso está de acordo com os dados observacionais. O conteúdo material do universo atual, por outro lado, é composto basicamente de poeira, diferente do conteúdo que estudamos. No entanto o universo certamente possuía em outras fases de sua existência, um conteúdo material diferente de poeira, quando a matéria era mais densa. Podemos argumentar ainda, que mesmo que o problema não esteja de acordo com os dados observacionais, ainda assim se justifica analisá-lo por uma necessidade teórica, caso o modelo obedeça aos requisitos físicos fenomenológicos.

O desenvolvimento desta tese pode ser resumido da seguinte forma: No Capítulo 1 descrevemos a geometria dos modelos usando o método de formas. No Capítulo 2 descrevemos o conteúdo material do modelo e comentamos o regime de magnetohidrodinâmica. No Capítulo 3 apresentamos as equações de Einstein-Maxwell visando

esgotar as possibilidades dos modelos. No Capítulo 4 resolvemos as equações de Maxwell sob uma determinada hipótese particular, obtendo soluções que foram usadas na seção 3 do Capítulo 5. Na seção 1 do Capítulo 5 apresentamos soluções tipo potência do tempo para a métrica e na seção 2 tratamos o caso Kantowski-Sachs isotrópico, onde as soluções para as equações de Einstein-Maxwell são facilmente encontradas. Mostramos também que uma classe de modelos tipo Bertotti-Robinson é instável por perturbações na condutividade elétrica, decaindo em modelos tipo Kantowski-Sachs com condutividade elétrica positiva e satisfazendo à equação de estado  $p = \lambda\rho$ . Exigimos que todas as soluções satisfizessem às condições dominantes de energia, e até onde foi possível, impusemos também a equação de estado  $p = \lambda\rho$ . As equações de estado e as condições de energia são frutos de considerações fenomenológicas, que são considerações de natureza física que limitam a gama de soluções admissíveis para as equações que descrevem o problema. No Capítulo 6 apresentamos, sem resolver, as equações de Einstein-Maxwell para os modelos tipo Bianchi I.

No Apêndice A definimos as coordenadas comóveis usadas nos modelos estudados, obtivemos o tensor momentum-energia através do princípio variacional, para os modelos que estudamos e apresentamos as condições dominantes de energia. Fizemos ainda a decomposição espaço+tempo de um tensor de segunda ordem arbitrário e apresentamos uma discussão conceitual da obtenção das equações de Einstein.

O Apêndice B foi escrito com o intuito de tornar a tese autossuficiente em termos de conceitos de geometria diferencial em espaços curvos, e também apresentar o cálculo com formas.

No Apêndice C complementamos a caracterização da geometria dos modelos dada no Capítulo 1, apresentando a classificação de Bianchi-Behr, e situando os modelos estudados nessa classificação.

Usamos o sistema de unidades MKSA racionalizado<sup>[35]</sup> e tomamos  $k = 8\pi G/c^2 = 1$ .

## 1. A GEOMETRIA

Considere o seguinte elemento de linha em coordenadas comoventes\*

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) (d\chi + 4m^2(\theta)d\phi)^2 - B^2(t) k^2(\theta) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

vamos supor que  $m(\theta)$  e  $k(\theta)$  satisfazem as equações

$$\frac{4mm'}{k^2 \text{sen } \theta} = \lambda_1 \quad \text{onde} \quad m' = \frac{dm}{d\theta} \quad (1.2)$$

e

$$\frac{1}{k^2} \left( \frac{k''}{k} + \frac{k'}{k} \cotg \theta - \frac{k'^2}{k^2} - 1 \right) = \lambda_2 \quad (1.3)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são constantes. Essas condições sobre  $m(\theta)$  e  $k(\theta)$  implicam que as seções  $t = \text{constante}$  tem curvatura constante. Para mostrar esse fato, basta calcular o tensor de Riemann da seção  $t = \text{constante}$ . Não faremos esse cálculo para evitar repetições. Vamos calcular, por sua vez, o tensor de Riemann da métrica completa. Para isso defina os seguintes objetos geométricos:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= A(t) (d\chi + 4m^2(\theta) d\phi) \\ \theta^2 &= B(t) k(\theta) d\theta \\ \theta^3 &= B(t) k(\theta) \text{sen}\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Em geral podemos escrever

$$\theta^A = e^A_{\mu} dx^{\mu}$$

de forma que no nosso caso

---

\* As coordenadas comoventes estão definidas no apêndice A.I.

$$\begin{aligned}
 e^{(0)}_0 &= 1 \\
 e^{(1)}_1 &= A \\
 e^{(1)}_3 &= 4 Am^2 \\
 e^{(2)}_2 &= k B \\
 e^{(3)}_3 &= k B \operatorname{sen} \theta
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Os objetos  $\theta^A$  são chamados de 1-formas diferenciais exteriores e os  $e^A_\mu$  são chamados de tetradas. No apêndice B fizemos um resumo dos resultados do formalismo das formas diferenciais que serão utilizados nesta tese, fixando a notação que seguiremos. A métrica pode ser escrita então, como:

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B, \quad \eta_{AB} = \operatorname{diag} (+1, -1, -1, -1)$$

Diferenciando as formas das expressões (1.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
 d\theta^0 &= 0 \\
 d\theta^1 &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{8Am m'}{2B^2 \operatorname{sen} \theta} \theta^2 \wedge \theta^3 \quad \text{onde } \dot{A} = \frac{dA}{dt} \\
 d\theta^2 &= \frac{\dot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^2 \\
 d\theta^3 &= \frac{B}{B} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{1}{kB} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right) \theta^2 \wedge \theta^3
 \end{aligned}$$

Usando a equação (B.15)\* obtemos os coeficientes  $C^A_{BC}$  não nulos:

$$\begin{aligned}
 C^1_{01} &= \frac{\dot{A}}{A} \\
 C^2_{02} &= C^3_{03} = \frac{\dot{B}}{B} \\
 C^1_{23} &= \frac{2\lambda_1 A}{B^2}
 \end{aligned}$$

---

\* A notação (B.15) significa a equação (15) do apêndice B.

$$C^3_{23} = \frac{1}{kB} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right)$$

Da equação (B.14), obtemos os coeficientes de Ricci  $\gamma_{ABC}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{011} &= \frac{\dot{A}}{A} \\ \gamma_{022} &= \gamma_{033} = \frac{\dot{B}}{B} \\ \gamma_{213} &= \gamma_{132} = \gamma_{231} = \frac{\lambda_1 A}{B^2} \\ \gamma_{233} &= \frac{1}{kB} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

As 1-formas de rotação  $\omega_{AB} = \gamma_{ABC} \theta^C$  são:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^1 \\ \omega_{02} &= \frac{\dot{B}}{B} \theta^2 \\ \omega_{03} &= \frac{\dot{B}}{B} \theta^3 \\ \omega_{12} &= -\frac{A\lambda_1}{B^2} \theta^3 \\ \omega_{13} &= \frac{A\lambda_1}{B^2} \theta^2 \\ \omega_{23} &= \frac{A\lambda_1}{B^2} \theta^1 + \frac{1}{kB} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right) \theta^3 \end{aligned}$$

Diferenciando, obtemos:

$$\begin{aligned} d\omega_{01} &= \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{2\lambda_1 A}{B^2} \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\omega_{02} &= \frac{\ddot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$d\omega_{03} = \frac{\ddot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{B}}{kB^2} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right) \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\omega_{13} = -\frac{\lambda_1 A}{B^2} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{\lambda_1 A}{kB^3} \left( \frac{k'}{k} + \cotg \theta \right) \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\omega_{23} = \frac{\lambda_1 A}{B^2} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{1}{B^2} \left( \lambda_2 + \frac{2A^2 \lambda_1^2}{B^2} \right) \theta^2 \wedge \theta^3$$

Da expressão (B. 16), obtemos as componentes do tensor de curvatura:

$$R^0_{101} = \frac{\ddot{A}}{A}$$

$$R^0_{202} = R^0_{303} = \frac{\ddot{B}}{B}$$

$$R^1_{212} = R^1_{313} = \frac{\ddot{A}\ddot{B}}{AB} + \frac{\lambda_1^2 A^2}{B^4}$$

$$R^2_{323} = -\frac{3\lambda_1^2 A^2}{B^4} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda_2}{B^2}$$

$$R^0_{123} = 2R^0_{213} = 2R^0_{321} = \frac{2\lambda_1 A}{B^2} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right)$$

As componentes do tensor de Ricci  $R_{AB} = R^C_{ACB}$  são:

$$R_{00} = -\left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right)$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\ddot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4}$$

(1.7)

$$R_{22} = R_{33} = \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2}$$

O escalar de curvatura  $R = R^A_A$  é dado por:

$$R = - \left( \frac{2\ddot{A}}{A} + \frac{4\ddot{B}}{B} + \frac{4\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\lambda_2}{B^2} - \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} \right) \quad (1.8)$$

Quando o elemento de linha não tem termos cruzados envolvendo  $dt$ , por exemplo do tipo  $dt.dX$ , podemos obter os objetos geométricos da tri-superfície  $t = \text{constante}$ , usando as expressões obtidas para o espaço-tempo e tomando  $t$  constante. O escalar de curvatura da seção  $t = \text{constante}$  é dado então por:

$${}^{(3)}R = \frac{2}{B^2} \left( \frac{\lambda_1^2 A^2}{B^2} + \lambda_2 \right) \quad (1.9)$$

quando a métrica na base de tetradas para essa seção é:

$$\eta_{ij} = \text{diag} (-1, -1, -1) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

Os modelos cosmológicos que tem curvatura constante para a seção espacial  $t = \text{constante}$ , são chamados de modelos espacialmente homogêneos. As seções  $t = \text{constante}$  são variedades tridimensionais que admitem um grupo de isometrias simplesmente transitivo, e esses grupos foram classificados por Bianchi em 1897<sup>[1]</sup>, e o resultado foi aplicado à cosmologia primeiramente por Taub em 1951<sup>[2]</sup> e complementado por Behr em 1968<sup>[3]</sup>. No Apêndice C descrevemos a classificação de Bianchi-Behr.

Vamos analisar agora o sinal de  ${}^{(3)}R$  dependendo dos possíveis casos de Bianchi. Observe que os modelos que estamos tratando são casos particulares de Bianchi, pois o tensor de Ricci é diagonal, o que não ocorre no caso mais geral e o elemento de linha tem apenas duas direções de anisotropia espaciais ( $A$ ,

B,B), enquanto que o caso mais geral admite tres direções. Po  
demos ver, usando a equação (1.9), que:

- i) Bianchi I  $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ :  $(^3)_R = 0$
- ii) Bianchi II  $(\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 = 0)$ :  $(^3)_R > 0$
- iii) Bianchi VIII  $(\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 = 1)$ :  $(^3)_R > 0$
- iv) Bianchi IX  $(\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1)$ : 
$$\begin{cases} (^3)_R < 0 \text{ se } B^2 > \lambda_1^2 A^2 \\ (^3)_R = 0 \text{ se } B^2 = \lambda_1^2 A^2 \\ (^3)_R > 0 \text{ se } B^2 < \lambda_1^2 A^2 \end{cases}$$
- v) Kantowski-Sachs  $(\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0)$ : sinal  $(^3)_R = \text{sinal } (\lambda_2)$

O resultado para os Bianchi gerais foi dado por Harvey [4].  
Para os casos acima veja a tese de M.Assad [5]. Assad discute o  
fato de que o escalar de curvatura  $(^3)_R$  não está associado com  
as propriedades topológicas dos modelos.

## 2. O CONTEÚDO MATERIAL

Vamos supor que o conteúdo material do nosso modelo é um fluido perfeito condutor e campos eletromagnéticos. O fluido é suposto ser neutro em média, embora possa possuir partículas carregadas. A magnetohidrodinâmica<sup>[6]</sup> é o tópico da física que estuda a dinâmica de fluidos condutores em presença de campos eletromagnéticos. No regime de magnetohidrodinâmica existem partículas carregadas que chamaremos de cargas livres, que se movem pelo fluido sem influenciar relevantemente o movimento do fluido. Essa aproximação é válida quando a massa das cargas livres é pequena comparada com a massa das partículas do fluido ou quando o número de cargas livres por unidade de volume é pequeno comparado com a densidade de partículas do fluido, havendo, é claro, um compromisso entre essas situações. No nosso caso a densidade de partículas carregadas do fluido é igual a densidade de cargas livres.

O movimento do fluido e das cargas livres é influenciado pelo campo eletromagnético que por sua vez é influenciado pelo movimento do fluido e das cargas livres. Assim, o movimento do fluido é descrito por um acoplamento entre a dinâmica dos fluidos e o eletromagnetismo, que pode ser expresso pelas seguintes equações<sup>[7]</sup>:

$$T^{AB}_{;B} = 0$$

$$F^{AB}_{;B} = J^A$$

$$F_{[AB;C]} = 0$$

onde  $T^{AB}$  é o tensor momentum-energia do fluido e do campo ele

tromagnético e as duas últimas equações são as equações de Maxwell.

Pela equação (A.7), o tensor momentum-energia na base de tetradas para fluido perfeito e campo eletromagnético é dado por:

$$T^{AB} = \rho u^A u^B - p(\eta^{AB} - u^A u^B) + F^{AC} F_C^B + \frac{1}{4} \eta^{AB} F_{CD} F^{CD}$$

onde  $u^A = e^A_\mu u^\mu = e^A_0$  é o campo de velocidades do fluido na base de tetradas. As componentes diagonais desse tensor são:

$$T^{00} = \rho + \frac{1}{2} (F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2)$$

$$T^{11} = p + \frac{1}{2} (-F_{01}^2 - F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2)$$

$$T^{22} = p + \frac{1}{2} (F_{01}^2 + F_{23}^2 - F_{02}^2 - F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2)$$

$$T^{33} = p + \frac{1}{2} (F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 - F_{03}^2 - F_{12}^2)$$

As componentes não diagonais são dados por:

$$T^{01} = F_{02} F_{21} + F_{03} F_{31}$$

$$T^{02} = F_{01} F_{12} + F_{03} F_{32}$$

$$T^{03} = F_{01} F_{13} + F_{02} F_{23}$$

$$T^{12} = F_{10} F_{02} + F_{13} F_{23}$$

$$T^{13} = F_{10} F_{03} + F_{12} F_{23}$$

$$T^{23} = F_{20} F_{03} + F_{21} F_{31}$$

(2.1)

O traço desse tensor é dado por:

$$T = T^A_A = \rho - 3p$$

Colocando numa forma que será útil mais adiante, temos:

$$\begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} T &= \frac{1}{2} (\rho + 3p + F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \\ T^{11} + \frac{1}{2} T &= \frac{1}{2} (\rho - p - F_{01}^2 - F_{23}^2 - F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \\ T^{22} + \frac{1}{2} T &= \frac{1}{2} (\rho - p + F_{01}^2 + F_{23}^2 - F_{02}^2 - F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \\ T^{33} + \frac{1}{2} T &= \frac{1}{2} (\rho - p + F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 - F_{03}^2 - F_{12}^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

O tensor momentum-energia é o tensor que contém as informações necessárias para se saber como a matéria influencia a gravitação. Neste tensor estão incluídas todas as informações necessárias sobre o fluido perfeito, porém isso não ocorre em relação ao campo eletromagnético, pois este obedece às equações de Maxwell que não estão contidas na lei de conservação  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , como estão contidas as equações do movimento do fluido perfeito. Antes de obtermos as equações de Maxwell para os modelos que estamos estudando, obteremos as equações de Einstein, e veremos que as componentes não diagonais dessas equações reduzem drasticamente o número de componentes não nulas do tensor de Maxwell.

### 3. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações de Einstein\* na base de tetradas são:

$$R_{AB} = T_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} T$$

Não introduziremos a constante cosmológica  $\Lambda$ , porém isso não é perda de generalidade pois para fluido perfeito podemos simular o termo cosmológico  $\Lambda \eta_{AB}$  fazendo a transformação

$$\rho \rightarrow \rho - \Lambda$$

$$p \rightarrow p + \Lambda$$

no tensor momentum-energia do fluido perfeito.

Usando as expressões (1.7) e (2.2) vemos que as equações de Einstein "diagonais" para o nosso modelo são:

$$-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2\ddot{B}}{B} = \frac{1}{2} (\rho + 3p + F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \quad (3.1)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\ddot{AB}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} = \frac{1}{2} (\rho - p - F_{01}^2 - F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \quad (3.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\ddot{AB}}{AB} - \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} = \frac{1}{2} (\rho - p + F_{01}^2 + F_{23}^2 - F_{02}^2 - F_{13}^2 + F_{03}^2 + F_{12}^2) \quad (3.3)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\ddot{AB}}{AB} - \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} = \frac{1}{2} (\rho - p + F_{01}^2 + F_{23}^2 + F_{02}^2 + F_{13}^2 - F_{03}^2 - F_{12}^2) \quad (3.4)$$

E as componentes não diagonais são:

$$F_{02}F_{21} + F_{03}F_{31} = 0$$

---

\* No apêndice A.V fizemos uma discussão conceitual da obtenção das equações de Einstein.

$$\begin{aligned}
 F_{01}F_{12} + F_{03}F_{32} &= 0 \\
 F_{01}F_{13} + F_{02}F_{23} &= 0 \\
 F_{10}F_{02} + F_{13}F_{23} &= 0 \\
 F_{10}F_{03} + F_{12}F_{32} &= 0 \\
 F_{20}F_{03} + F_{21}F_{31} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

As soluções não triviais possíveis das equações acima são:

- i)  $F_{02} = F_{03} = F_{12} = F_{13} = 0$  ;  $F_{01}$  e/ou  $F_{23} \neq 0$
- ii)  $F_{01} = F_{03} = F_{12} = F_{23} = 0$  ;  $F_{02}$  e/ou  $F_{13} \neq 0$
- iii)  $F_{01} = F_{02} = F_{13} = F_{23} = 0$  ;  $F_{03}$  e/ou  $F_{12} \neq 0$

Assim existem apenas três possibilidades. Uma vez que o lado esquerdo das equações (3.3) e (3.4) são iguais, os casos ii) e iii) não são possíveis. Assim, as únicas componentes do tensor de Maxwell que podem ser diferentes de zero são  $F_{01}$  e  $F_{23}$ . Isso decorreu do fato de termos tomado apenas duas direções de anisotropia. Conforme a notação do apêndice A.III tomaremos:

$$\begin{aligned}
 E &= F_{10} \\
 H &= F_{23}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

As equações de Einstein se reduzem, após uma manipulação algébrica às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{4\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} &= E^2 + H^2 \\
 \rho &= \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{5\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$p = \frac{1}{2} \left( -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{3\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{2\lambda_1 A^2}{B^4} + \frac{\lambda_2}{B^2} \right)$$

Trataremos agora das equações de Maxwell, que junto com as equações acima constituirão as equações do nosso problema.

#### 4. AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E SOLUÇÕES

Antes de procurar soluções para as equações de Maxwell, estabeleceremos um modelo para a corrente elétrica. Podemos decompôr a corrente, como fizemos com o tensor momentum-energia e o tensor de Maxwell no apêndice A, nas suas partes paralelas e ortogonais a  $u^\alpha$ , da seguinte forma:

$$J^\alpha = \rho_e u^\alpha + j^\alpha$$

onde

$$\rho_e = -J^\alpha u_\alpha$$

é a carga elétrica vista por um observador comovente com o fluido e  $j^\alpha$  é a parte espacial da corrente, isto é:

$$j^\alpha u_\alpha = 0$$

O termo  $\rho_e u^\alpha$  é chamado de corrente de convecção, que no nosso modelo suporemos ser nula, e o termo  $j^\alpha$  é chamado de corrente de condução.

Vamos supor que o fluido que estamos estudando obedece à lei de Ohm. Isso ocorre quando o período de variação do campo elétrico é grande comparado com o tempo médio da colisão das cargas livres com o fluido, de forma que os efeitos inerciais das cargas livres não precisam ser levados em conta. Na ausência de campos magnéticos, as cargas elétricas são aceleradas pelo campo elétrico e ao mesmo tempo são desaceleradas pelos sucessivos choques com as partículas do fluido, de modo que a força elétrica é compensada por uma força resistiva do meio.

Nessa situação a corrente de condução depende linearmente do campo elétrico da forma

$$j^\alpha = \sigma F^{\beta\alpha} u_\beta \quad (4.1)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do fluido que geralmente é dada por [7]:

$$\sigma = \frac{n_q q^2 \tau}{m}$$

onde  $q$  e  $m$  são a carga e a massa das cargas livres, e  $n_q$  é a densidade de cargas livres. A condutividade é uma propriedade do meio e pode-se mostrar que, como consequência do fato de que a entropia cresce para qualquer sistema fechado, a condutividade é positiva [8]. Na presença de campos gravitacionais, não podemos construir um sistema fechado, já que não podemos blindar o campo gravitacional e portanto a princípio a condutividade poderia ser negativa. Em espaços curvos é natural supor que o sinal positivo da condutividade ainda está relacionado com o crescimento da entropia.

Como vimos no Apêndice B.VI, as equações de Maxwell na base de tetradas são dadas por:

$$F^{AB}{}_{,\alpha} e^\alpha_B + \gamma^A_{CB} F^{CB} + \gamma^C_{BC} F^{AB} = J^A$$

$$F_{[AB,\rho e^\rho C]} - F_D[B\gamma^D AC] + F_D[A\gamma^D BC] = 0$$

Como vimos no capítulo anterior, as únicas componentes do tensor de Maxwell que podem ser diferentes de zero são  $F_{01}$  e  $F_{23}$ .

Vamos supor que essas componentes só dependem da coordenada  $t$ , de forma que o tensor de Maxwell é constante na hipersuperfície  $t = \text{constante}$ . No caso mais geral, a matéria não precisa ter as simetrias da geometria e existem soluções na literatura onde isso ocorre [9] especialmente em relação ao campo eletromagnético [10]. Usando as equações (1.6), a equação (4.1) e a convenção (3.6), as eqs. de Maxwell se reduzem à:

$$\frac{dE}{dt} + \left( \frac{2\dot{B}}{B} + \sigma \right) E = \frac{2\lambda_1 A}{B^2} H \quad (4.2)$$

$$\frac{dH}{dt} + \frac{2\dot{B}}{B} H = - \frac{2\lambda_1 A}{B^2} E \quad (4.3)$$

Da equação (4.3) temos que:

$$\frac{d}{dt} (B^2 H) = - 2\lambda_1 A E$$

Vamos definir  $\bar{H}$  e  $\bar{E}$  da seguinte forma:

$$\bar{H} = B^2 H$$

$$\bar{E} = B^2 E$$

Assim:

$$\frac{B^2}{A} \frac{d\bar{H}}{dt} = -2\lambda_1 \bar{E} \quad (4.4)$$

Vamos definir a variável  $\eta$  de forma que:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{A}{B^2} \quad (4.5)$$

Assim

$$\eta = \int_{t_0}^t \frac{A(x)}{B^2(x)} dx$$

Observe que  $A(t)$  ou  $\bar{E}$  é sempre positivo ou sempre negativo pois  $A=0$  é uma singularidade do modelo. Vamos supor então, sem perda de generalidade que  $A > 0$ . Isso significa que  $\eta(t)$  é uma função monotonicamente crescente de  $t$ . A equação (4.4) fica então:

$$\frac{d\bar{H}}{d\eta} = - 2\lambda_1 \bar{E} \quad (4.6)$$

Multiplicando a equação (4.2) por  $B^2$ , e após uma manipulação algébrica obtemos:

$$\frac{d}{dt} B^2 E + \sigma B^2 E = 2\lambda_1 A H$$

Multiplicando por  $B^2/A$ , temos que:

$$\frac{d\bar{E}}{d\eta} + \sigma_0 \bar{E} = 2\lambda_1 \bar{H} \quad (4.7)$$

onde

$$\sigma_0 = \frac{B^2 \sigma}{A}$$

As equações de Maxwell se reduziram a um sistema de equações diferenciais lineares, porém com o coeficiente  $\sigma_0$  variável. Vamos supor que  $\sigma_0$  é constante. Derivando a equação (4.7) e usando a equação (4.6), temos que:

$$\frac{d^2 \bar{E}}{d\eta^2} + \sigma_0 \frac{d\bar{E}}{d\eta} + 4\lambda_1^2 \bar{E} = 0 \quad ; \quad \sigma_0 = \text{constante} \quad ; \quad \lambda_1 \neq 0$$

A equação acima tem três tipos de soluções<sup>[11]</sup> dependendo do sinal do discriminante da equação característica

$$x^2 + \sigma_0 x + 4\lambda_1^2 = 0$$

O discriminante é dado por

$$k = \sigma_0^2 - 16\lambda_1^2$$

As soluções são da forma

$$\bar{E} = e^{-\frac{\sigma_0}{2} \eta} [C_1 u_1(\eta) + C_2 u_2(\eta)]$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias, e ocorrem os seguintes casos:

i)  $k = 0$  :  $u_1(\eta) = 1$  e  $u_2(\eta) = \eta$

ii)  $K > 0$  :  $u_1(\eta) = \exp \frac{\sqrt{k}}{2} \eta$  e  $u_2(\eta) = \exp \frac{-\sqrt{k}}{2} \eta$

ou  $u_1(\eta) = \cosh \frac{\sqrt{k}}{2} \eta$  e  $u_2(\eta) = \sinh \frac{\sqrt{k}}{2} \eta$

iii)  $K < 0$  :  $u_1(\eta) = \cos \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta$  e  $u_2(\eta) = \sin \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta$

Para obter  $\bar{H}$  usamos a equação (4.7). Assim as soluções das equações de Maxwell com  $\sigma_0$  constante são:

caso i) :  $k = \sigma_0^2 - 16\lambda_1^2 = 0$

$$E = \frac{1}{B^2} e^{-\frac{\sigma_0}{2} \eta} (C_1 + C_2 \eta)$$

$$H = \frac{1}{2\lambda_1 B^2} e^{-\frac{\sigma_0}{2} \eta} \left( \frac{C_1 \sigma_0}{2} + C_2 + \frac{C_2 \sigma_0}{2} \eta \right)$$

e

$$E^2 + H^2 = \frac{1}{B^4} e^{-\sigma_0 \eta} \left[ 2 C_1^2 + \frac{4C_1 C_2}{\sigma_0} + \frac{4C_2^2}{\sigma_0^2} + 4 \left( C_1 C_2 + \frac{C_2^2}{\sigma_0} \right) \eta + 2C_2^2 \eta^2 \right] \quad (4.8)$$

caso ii) :  $k > 0$

$$E = \frac{1}{B^2} \left( C_1 e^{\Sigma_+ \eta} + C_2 e^{\Sigma_- \eta} \right)$$

$$H = \frac{1}{2\lambda_1 B^2} \left[ C_1 (\Sigma_+ + \sigma_0) e^{\Sigma_+ \eta} + C_2 (\Sigma_- + \sigma_0) e^{\Sigma_- \eta} \right]$$

onde  $\Sigma_{\pm} = -\frac{\sigma_0}{2} \pm \frac{\sqrt{k}}{2}$

$$E^2 + H^2 = \frac{1}{B^4} \left[ \frac{C_1^2 \sigma_0^2}{8\lambda_1^2} (\sigma_0 + \sqrt{k}) e^{2\Sigma_+ \eta} + 4C_1 C_2 e^{-\sigma_0 \eta} + \frac{C_2^2 \sigma_0^2}{8\lambda_1^2} (\sigma_0 - \sqrt{k}) e^{2\Sigma_- \eta} \right] \quad (4.9)$$

caso iii):  $k < 0$

$$E = \frac{1}{B^2} e^{-\frac{\sigma_0}{2} \eta} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta \right]$$

$$H = \frac{1}{4\lambda_1 B^2} e^{-\frac{\sigma_0}{2} \eta} \left[ (C_1 \sigma_0 + C_2 \sqrt{-k}) \cos \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta + (C_2 \sigma_0 - C_1 \sqrt{-k}) \operatorname{sen} \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta \right]$$

e

$$\begin{aligned} E^2 + H^2 = \frac{1}{B^4} e^{-\sigma_0 \eta} & \left[ \left( C_1^2 \left( 1 + \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} \right) + C_2^2 \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} \right) + \frac{C_1 C_2 \sigma_0 \sqrt{-k}}{8\lambda_1^2} \right) \cos^2 \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta + \right. \\ & + \left( C_2^2 \left( 1 + \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} \right) + C_1^2 \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} \right) - \frac{C_1 C_2 \sigma_0 \sqrt{-k}}{8\lambda_1^2} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta + \\ & \left. + \left( \frac{C_1 C_2 \sigma_0^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\sigma_0 \sqrt{-k}}{8\lambda_1^2} (C_2^2 - C_1^2) \right) \operatorname{sen} \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta \cos \frac{\sqrt{-k}}{2} \eta \right] \quad (4.10) \end{aligned}$$

Vamos discutir agora um método de análise do sinal de  $\sigma$ .

Da equação (4.2) temos que:

$$\sigma = - \frac{\dot{E}}{E} - \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{2\lambda_1 AH}{B^2 E}$$

Da equação (4.3), após uma manipulação algébrica, obtemos:

$$\frac{2\lambda_1 AH}{B^2 E} = - \frac{H(HB^2)^\cdot}{E^2 B^2}$$

Assim, nos casos em que  $\lambda_1 \neq 0$ , temos:

$$\sigma = - \frac{(EB^2)^\cdot}{EB^2} - \frac{H(HB^2)^\cdot}{E^2 B^2}$$

Observe que  $(EB^2)^\cdot = \frac{1}{2} \frac{(E^2 B^4)^\cdot}{EB^2}$ , assim

$$\sigma = - \frac{(E^2 B^4)^\cdot}{2E^2 B^4} - \frac{(H^2 B^4)^\cdot}{2E^2 B^4}$$

Finalmente

$$\sigma = - \frac{1}{2E^2 B^4} \frac{d}{dt} \left[ B^4 (E^2 + H^2) \right] \quad (4.11)$$

Vemos então que o sinal de  $\sigma$  não depende do sinal de E, H ou B mas é determinado pela derivada da função  $B^4 (E^2 + H^2)$ . A condutividade será positiva se e somente se a derivada de  $B^4 (E^2 + H^2)$  for negativa. Por exemplo, se  $|B|$  é crescente então  $(E^2 + H^2)$  tem que decrescer mais rapidamente que  $B^{-4}$  para a condutividade ser positiva. Observe que a variação de A não influencia no sinal de  $\sigma$ .

Na variável  $\eta$  a mesma análise procede, pois usando a rela

ção (4.5), a equação (4.11) se escreve como:

$$\sigma = - \frac{A}{2E^2 B^6} \frac{d}{d\eta} \left[ B^4 (E^2 + H^2) \right] \quad (4.12)$$

Uma vez que estamos tomando A positivo,  $\sigma$  será positivo se e somente se a derivada de  $B^4 (E^2 + H^2)$  em relação a  $\eta$  for negativa.

Vamos agora tentar resolver as equações de Einstein-Maxwell primeiramente na variável  $t$ , em seguida vamos supor  $\sigma_0$  constante e usar as soluções das equações de Maxwell na variável  $\eta$  encontradas acima para resolver as equações de Einstein.

## 5. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES EINSTEIN-MAXWELL

### 5.1 Soluções tipo potência de $t$

Vamos tentar soluções tipo potência de  $t$  para  $A, B, E$  e  $H$  de forma a resolver simultaneamente as equações de Maxwell e de Einstein. Transcrevendo as equações (4.2), (4.3), (3.7), temos:

$$\sigma = -\frac{\dot{E}}{E} - \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{2\lambda_1 AH}{B^2 E} \quad (5.1)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{5\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} \right) \quad (5.2)$$

$$p = \frac{1}{2} \left( -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{3\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} + \frac{\lambda_2}{B^2} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\dot{H}}{H} + \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{2\lambda_1 A}{B^2} \frac{E}{H} = 0 \quad (5.4)$$

$$-\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{4\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} = E^2 + H^2 \quad (5.5)$$

Vamos tentar soluções do tipo

$$\begin{aligned} E &= E_0 t^e \\ H &= H_0 t^h \\ A &= A_0 t^a \\ B &= B_0 t^b \end{aligned}$$

As equações (5.4) e (5.5) se reduzem à:

$$\frac{h + 2b}{t} + \frac{2\lambda_1 A_0 E_0}{B_0^2 H_0} t^{a-2b+e-h} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{a^2 - 2b^2 - a + b + ab}{t^2} + \frac{4\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4 t^2 (2b-a)} + \frac{\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}} + \frac{E_0^2}{t^{-2e}} + \frac{H_0^2}{t^{-2h}} = 0 \quad (5.7)$$

Podem ocorrer os seguintes casos:

i)  $\lambda_1 \neq 0$  ;  $\lambda_2 \neq 0$  (Bianchi VIII e IX)

Da equação (5.6), igualando os expoentes e os coeficientes, obtemos:

$$a - 2b + e - h = -1$$

e

$$h + 2b = \frac{-2\lambda_1 A_0 E_0}{B_0^2 H_0}$$

A equação (5.7) nos fornece, após tentar todas as combinações possíveis, um único caso que é igualar o primeiro termo com o segundo, e igualar os três últimos termos, dando as seguintes equações

$$2b - a = 1$$

$$b = -e = -h$$

$$\frac{\lambda_2}{B_0^2} = - (E_0^2 + H_0^2)$$

$$\frac{4\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4} = 2b^2 - a^2 + a - b - ab$$

Observe que a separação das duas últimas equações não é necessá

ria no caso  $a = b = 1$  e portanto não obteríamos o resultado mais geral possível. Porém esse caso implica  $A = B$  que será visto. Assim as soluções são de forma

$$\begin{aligned} E &= E_0 t^{-b} \\ H &= H_0 t^{-b} \\ A &= A_0 t^{2b-1} \\ B &= B_0 t^b \end{aligned} \tag{5.8}$$

Com as restrições

$$\frac{2\lambda_1 A_0^2}{B_0^4} = -2b^2 + 3b - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} < b < 1 \tag{5.9}$$

$$\frac{2\lambda_1 A_0 E_0}{B_0^2 H_0} = -b$$

$$\lambda_2 = -(E_0^2 + H_0^2) B_0^2$$

Da última equação vemos que essa solução só é válida para Bianchi IX. Substituindo as expressões (5.8) nas equações (5.1), (5.2) e (5.3) e usando as restrições acima obtemos:

$$\sigma = -b \frac{(E_0^2 + H_0^2)}{E_0^2 t} \tag{5.10}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{12b^2 - 7b + 1}{t^2} - \frac{\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}} \right)$$

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{-12b^2 + 13b - 3}{t^2} + \frac{\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}} \right)$$

Vamos analisar agora as condições de energia. Da equação (A.19), temos

$$\rho \geq 0$$

$$\rho - p = \frac{1}{2} \left( \frac{4(6b^2 - 5b + 1)}{t^2} - \frac{2\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}} \right) \geq 0$$

$$p + \rho = \frac{1}{2} \left( \frac{6b - 2}{t^2} \right) \geq 0$$

Para satisfazer condições para  $t \in (-\infty, \infty)$  temos que ter simultaneamente

$$12b^2 - 7b + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b \in (-\infty, 1/4] \cup [1/3, \infty)$$

$$6b^2 - 5b + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b \in (-\infty, 1/3] \cup [1/2, \infty)$$

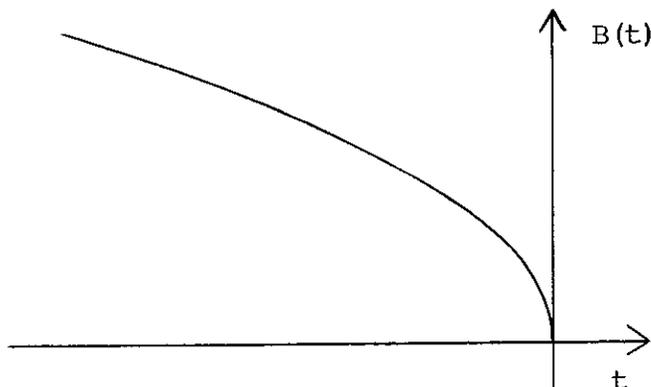
$$6b - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b \in [1/3, \infty)$$

Assim, as condições de energia são satisfeitas se  $b \geq 1/2$ .

De (5.9) vemos que os valores que  $b$  pode assumir no caso  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  são:

$$1/2 < b < 1$$

Segue então da equação (5.10), que para  $\sigma$  ser positivo, o universo tem que se contrair, de maneira que as soluções são da forma:



onde  $b$  só pode assumir valores onde tenha sentido  $(-1)^b$ . Vemos então que o universo parte de um raio infinito e se contrai até se tornar um ponto, onde as grandezas físicas  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $E$  e  $H$  tendem a infinito. Da expressão (1.8) temos que o escalar de curvatura é dado por:

$$R = \frac{-14b^2 + 16b - 4 + 2\lambda_1^2 A_0^2 / B_0^4}{t^2} + \frac{\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}}$$

Assim, o escalar de curvatura se torna infinito em  $t = 0$ . Portanto, este ponto é uma singularidade física do modelo. Note que o sinal da condutividade depende de o universo estar se expandindo ou se contraindo. Isso já podia ser notado pela expressão (4.11).

ii)  $\lambda_1 \neq 0$  ;  $\lambda_2 = 0$  (Bianchi II)

Da equação (5.7) obtemos nesse caso, uma única possibilidade, que é:

$$2b - a = -e = -h = 1$$

e

$$a^2 - 2b^2 - a + b + ab + \frac{4\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4} + E_0^2 + H_0^2 = 0 \quad (5.11)$$

Da equação (5.6) obtemos

$$2b - 1 = \frac{-2\lambda_1 A_0 E_0}{B_0^2 H_0}$$

As soluções são da forma:

$$\begin{aligned} E &= E_0 t^{-1} \\ H &= H_0 t^{-1} \\ A &= A_0 t^{2b-1} \\ B &= B_0 t^b \end{aligned} \tag{5.12}$$

Substituindo as expressões (5.12) nas equações (5.1), (5.2) e (5.3) obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{(1 - 2b)(E_0^2 + H_0^2)}{E_0^2 t} \\ \rho &= \left( 7b^2 - 5b + 1 + \frac{\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4} \right) \frac{1}{t^2} \\ p &= \left( -5b^2 + 5b - 1 + \frac{\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4} \right) \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Da equação (A.19) podemos ver que as condições de energia são:

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 \\ \rho - p &= \left( 12b^2 - 10b + 2 \right) \frac{1}{t^2} \geq 0 \\ p + \rho &= \left( 2b^2 + \frac{2\lambda_1^2 A_0^2}{B_0^4} \right) \frac{1}{t^2} \geq 0 \end{aligned}$$

A primeira e terceira condições são satisfeitas para qualquer valor de  $b$ , e a segunda condição implica que  $b$  tem que perten

cer ao intervalo

$$(-\infty, 1/3] \cup [1/2, \infty)$$

Para que a restrição dada pela equação (5.11) possa ser satisfeita temos que ter

$$-(a^2 - 2b^2 - a + b + ab) = -4b^2 + 6b - 2 > 0$$

A desigualdade acima é verdadeira se b estiver no intervalo (1/2, 1). Este intervalo está contido nas condições de energia. Novamente, para que a condutividade seja positiva o universo tem que partir de um raio infinito, e a análise do comportamento físico do modelo é análogo ao caso anterior. A solução neste caso já foi obtida por Dunn & Tupper<sup>[12]</sup>.

iii)  $\lambda_1 = 0$  ;  $\lambda_2 \neq 0$  (Kantowski-Sachs)

Da equação (5.7) vemos que esse caso admite duas possibilidades para os casos anisotrópicos, que são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2 - 2b^2 - a + b + ab}{t^2} = \frac{-E_o^2}{t^{-2e}} \\ \frac{\lambda_2}{B_o^2 t^{2b}} = \frac{-H_o^2}{t^{-2h}} \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2 - 2b^2 - a + b + ab}{t^2} = \frac{-H_0^2}{t^{-2h}} \\ \frac{\lambda_2}{B_0^2 t^{2b}} = \frac{-E_0^2}{t^{-2e}} \end{array} \right.$$

Usando a equação (5.6) vemos que na primeira situação temos:

$$b = h = 0$$

$$e = -1$$

$$a(a-1) = -E_0^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1$$

$$\frac{\lambda_2}{B_0^2} = -H_0^2$$

Assim as soluções são da forma

$$E = E_0 t^{-1}$$

$$H = H_0$$

$$A = A_0 t^a$$

$$B = B_0$$

Das equações (5.1), (5.2) e (5.3), obtemos:

$$\sigma = \frac{1}{t}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{a(a-1)}{t^2} - \frac{\lambda_2}{B_0} \right)$$

$$p = \frac{1}{2} \left( -\frac{a(a-1)}{t^2} + \frac{\lambda_2}{B_0} \right)$$

Vemos que  $\rho = -p$ . Neste caso, se o universo estiver em expansão a condutividade é positiva, porém a densidade  $\rho$  é negativa para

$$t^2 < \frac{a(a-1)}{\lambda_2} B_0^2$$

pois  $a(a-1) < 0$ . Assim, esse modelo não obedece as condições de energia (A.19).

A segunda possibilidade nos dá, usando também a equação.. (5.6), que:

$$h = -1$$

$$b = 1/2$$

$$e = -1/2$$

$$2a^2 - a = -2 H_0^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1/2$$

$$\frac{\lambda_2}{B_0^2} = -E_0^2$$

Assim as soluções são da forma

$$E = E_0 t^{-1/2}$$

$$H = H_0 t^{-1}$$

$$A = A_0 t^a$$

$$B = B_0 t^{1/2}$$

Das equações (5.1), (5.2) e (5.3), obtemos

$$\sigma = -\frac{1}{2t}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2 + 3a + 1}{2t^2} - \frac{\lambda_2}{B_0 t} \right)$$

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{-2a^2 + a + 1}{2t^2} + \frac{\lambda_2}{B_0 t} \right)$$

Para satisfazer as condições de energia (A.19), temos que  $t_0$  mar  $a \geq 0$ . Observe que neste caso a condutividade é sempre negativa, pois pela expressão de B vemos que o universo não pode se contrair. Estes modelos partem da singularidade  $t = 0$ , onde as grandezas  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $E$  e  $H$  são infinitas e se expandem até um raio infinito, onde as grandezas anteriores tendem a zero.

iv)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  (Bianchi I)

Da equação (5.6) e (5.7) obtemos:

$$e = h = -1$$

$$b = 1/2$$

$$2a^2 - a = -2 (E_0^2 + H_0^2) \Rightarrow 0 < a < 1/2 \quad (5.13)$$

Assim as soluções são da forma

$$E = E_0 t^{-1}$$

$$H = H_0 t^{-1}$$

(5.14)

$$A = A_0 t^a$$

$$B = B_0 t^{1/2}$$

Das equações (5.1), (5.2) e (5.3), obtemos:

$$\sigma = 0$$

$$\rho = \frac{2a^2 + 3a + 1}{4 t^2}$$

$$p = \frac{-2a^2 + a + 1}{4 t^2}$$

As condições de energia (A. 19 ) são dadas por:

$$\rho \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \in (-\infty, -1] \cup [-1/2, \infty)$$

$$\rho - p = \frac{2a^2 + a}{2 t^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \in (-\infty, -1/2] \cup [0, \infty)$$

$$p + \rho = \frac{2a + 1}{2 t^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \geq -1/2$$

Assim as condições de energia são satisfeitas se  $a \geq 0$  ou  $a = -1/2$  que é o caso  $\rho = p = 0$ . Porém, a equação (5.13) impõe um vínculo a mais, de forma que a restrição para os valores de  $a$  é dado por

$$0 < a < 1/2$$

Observe que no intervalo acima a pressão é positiva. A equação de estado é dada por

$$p = \lambda \rho$$

onde

$$\lambda = \frac{-2a^2 + a + 1}{2a^2 + 3a + 1}$$

O intervalo de valores que  $\lambda$  assume é

$$1/3 < \lambda < 1$$

O caso limite  $\lambda = 1/3$ , quando a equação de estado representa radiação, ocorre para  $a = 1/2$ . Pela equação (5.13) vemos que o campo eletromagnético tem que ser nulo. Observe que neste caso

$$A = B = A_0 t^{1/2}$$

$$\rho = \frac{3}{4 t^{1/2}}$$

$$p = \frac{1}{4 t^{1/2}}$$

que se reduz ao resultado conhecido de Friedmann com seção euclidiana (veja ref. [ 13 ] pag. 282).

Podemos ver que apesar de Bianchi I admitir um fluido com equação de estado de radiação, ele não admite campo eletromagnético puro, sob as suposições do nosso modelo (Bianchi diagonal, de pendência temporal tipo potencia), pois  $\rho = p = 0$  somente para  $a = -1/2$ , e esse valor é incompatível com a equação (5.13). A solução (5.14) foi obtida primeiramente por Jacobs<sup>[14]</sup>.

Convém notar aqui, um erro cometido por B.O.J. Tupper no artigo "Magnetohydrodynamic type-I cosmologies", publicado na Phys.Rev. D, 15, 2123 (1977). Neste artigo Tupper encontra a mesma solução acima, porém devido a um erro algébrico, obtem para a condutividade a seguinte expressão:  $\sigma = t^{-1}$ . Mas como vimos, a condutividade é nula.

## 5.2 Soluções Kantowski-Sachs Isotrópicas

Vamos supor que  $\lambda_1 = 0$  e  $A = B$ . As equações de Maxwell (4.2) e (4.3) se reduzem a:

$$\sigma = - \frac{(EB^2)^{\cdot}}{EB^2} \quad (5.15)$$

$$(HB^2)^{\cdot} = 0 \implies H = \frac{H_0}{B^2} \quad (5.16)$$

As equações de Einstein (3.7) se reduzem a:

$$B^2(E^2 + H^2) = -\lambda_2 \quad (5.17)$$

$$\rho = \frac{3\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda_2}{2B^2} \quad (5.18)$$

$$p = -\frac{2\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\lambda_2}{2B^2} \quad (5.19)$$

Observe que  $\lambda_2$  tem que ser negativo devido a equação (5.17). As condições de energia (A.19) são satisfeitas se:

$$\rho \geq 0 \quad (5.20)$$

$$\rho - p = \frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{4\dot{B}^2}{B^2} + \frac{|\lambda_2|}{B^2} \geq 0 \quad (5.21)$$

$$p + \rho = -\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{2\dot{B}^2}{B^2} \geq 0 \quad (5.22)$$

Sem perda de generalidade vamos supor que  $B > 0$ . Podemos ver que a condição (5.20) é sempre satisfeita independente dos valores que  $B(t)$  assuma. As condições (5.21) e (5.22), por sua vez, podem não ser satisfeitas dependendo do termo  $\ddot{B}/B$ . Se esse termo for positivo, isto é, a concavidade da curva  $B(t)$  for para cima, a condição (5.21) é automaticamente satisfeita porém a pressão, dada pela equação (5.19) é sempre negativa. Se o sinal de  $\ddot{B}$  for negativo, a condição (5.22) é automaticamente satisfeita e a pressão pode ser positiva dependendo dos valores que  $\ddot{B}/B$  assume em

relação aos termos  $\dot{B}^2/B^2$  e  $\lambda_2/B^2$ .

Usando as equações (5.16) e (5.17), temos que:

$$E^2 = \frac{|\lambda_2|}{B^2} - \frac{H_0^2}{B^4} \quad (5.23)$$

E da equação (5.15), usando a equação acima, obtemos:

$$\sigma = - \frac{(EB^2) \cdot}{EB^2} = - \frac{(E^2 B^4) \cdot}{2 E^2 B^4} = B^2 \left( \frac{H_0^2}{|\lambda_2|} - B^2 \right)^{-1} \frac{\dot{B}}{B} \quad (5.24)$$

Observe que o sinal da condutividade depende de dois fatores :  $\dot{B}/B$  e  $(H_0^2/|\lambda_2| - B^2)$ . Suponha que  $H_0$  é diferente de zero. Para que  $\sigma$  seja positivo temos duas possibilidades: Primeiro, se o universo estiver se expandindo,  $B(t)$  tem que assumir valores menores que  $H_0^2/|\lambda_2|$  e segundo, se o universo estiver se contraindo  $B(t)$  tem que ser sempre maior que  $H_0^2/|\lambda_2|$ . Assim, as soluções são da forma:

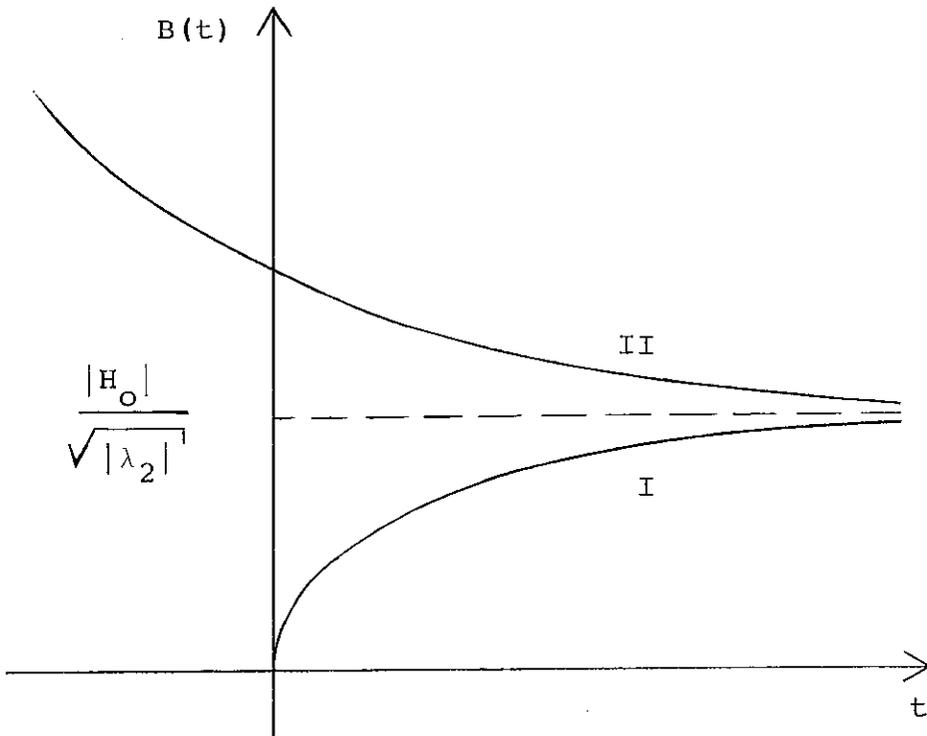


Figura 2 - Tipos de soluções com  $\sigma > 0$  para KS.

Podemos ver pela equação (5.23), que nas soluções do tipo I (ver figura 2), o campo elétrico assume valores complexos, a menos que venhamos a supor que o universo parte de um raio finito. Assim, por considerações físicas excluiremos este tipo de solução. As soluções do tipo II (ver figura 2) não admitem pressão positiva para todo  $t$ , pois para  $t \rightarrow \infty$  a concavidade do gráfico  $B(t)$  é para cima.

Vamos supor agora que  $H_0$  é nulo. As equações (5.23) e (5.24) se reduzem a:

$$E = \pm \frac{\sqrt{|\lambda_2|}}{B}$$

$$\sigma = - \frac{\dot{B}}{B}$$
(5.25)

Neste caso a concavidade do gráfico de  $B(t)$  pode ser para baixo, isto é,  $\ddot{B}/B$  negativo para todo  $t$ , pois o universo pode se acabar num tempo finito (cf. figura 2 no caso  $H_0 = 0$ ). Vamos dar um exemplo, entre uma vasta gama de possibilidades facilmente encontráveis, de um modelo com  $H_0 = 0$ , satisfazendo às condições de energia e com condutividade positiva. Seja

$$A = B = \sqrt{-t} \quad ; \quad t \in (-\infty, 0]$$

Assim

$$E = \pm \sqrt{-\frac{|\lambda_2|}{t}}$$

$$\sigma = - \frac{1}{2t}$$

Das equações (5.18) e (5.19), temos que,

$$\rho = \frac{1}{2t^2} \left( \frac{3}{2} - |\lambda_2| t \right)$$

$$p = \frac{1}{2t^2} \left( \frac{1}{2} + |\lambda_2| t \right)$$

Os gráficos a seguir mostram o comportamento de todas as grandezas físicas envolvidas neste modelo.

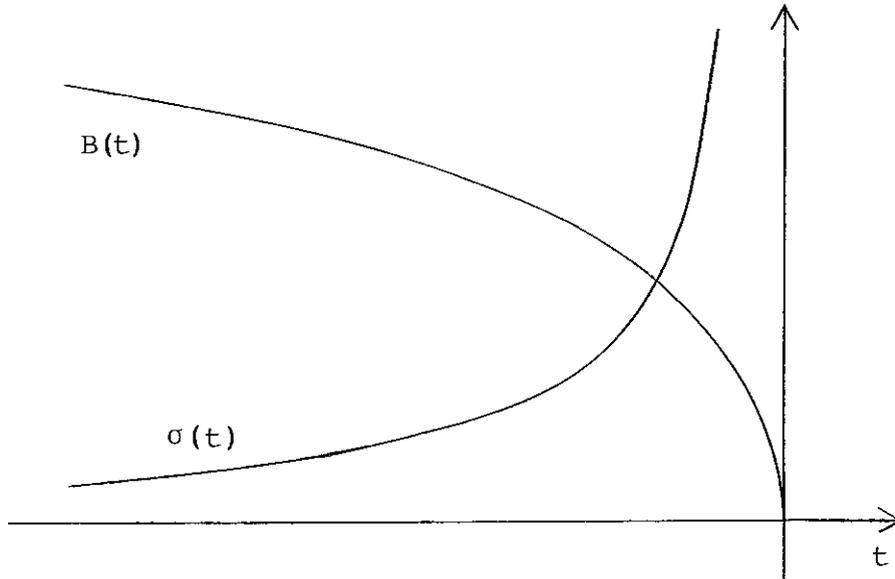


Figura 3

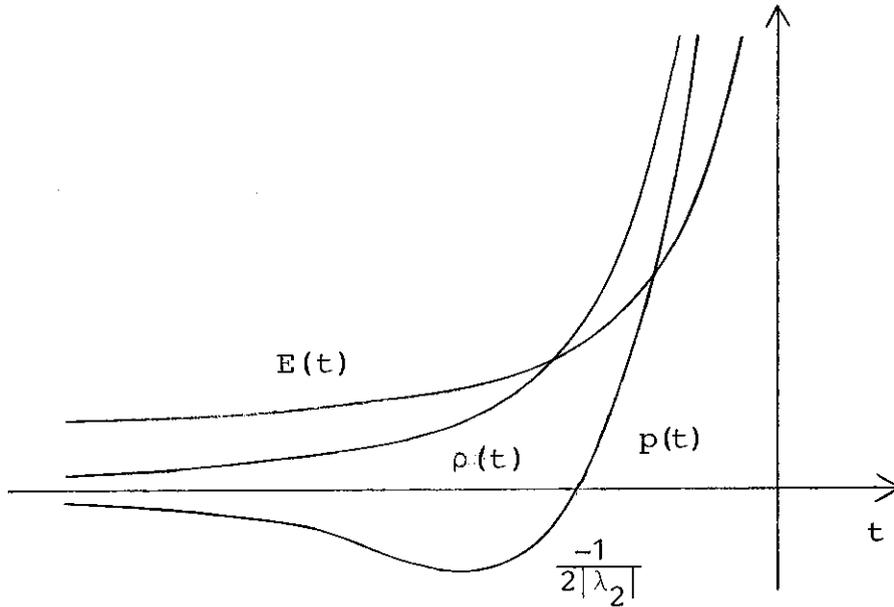


Figura 4

Vemos que este universo parte de um raio infinito e se contrai até atingir a singularidade em  $t = 0$ , onde todas as grandezas físicas assumem valores infinitos. Observe que a pressão inicialmente é negativa, e depois do tempo  $t = -1/2|\lambda_2|$  ela passa a ser positiva. A equação de estado para o fluido perfeito inicialmente

te é  $p = -\rho$  e perto da singularidade é  $p = \frac{1}{3}\rho$ .

Pela equação (5.24) podemos ver que o sinal da condutividade é sensível à expansão ou contração do universo. Isto já ocorreu na seção anterior e quer dizer que as equações de Einstein acopladas com as equações de Maxwell não admitem reversão temporal, pois grandezas físicas, como a condutividade, mudam de sinal dependendo se o universo estiver se contraindo ou se expandindo.

Vamos agora analisar as soluções que satisfazem à equação de estado

$$p = \lambda\rho \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Vamos supor que a constante cosmológica é diferente de zero. Usando (5.18) e (5.19), com as substituições  $p \rightarrow p+\Lambda$  e  $\rho \rightarrow \rho-\Lambda$ , obtemos para a equação de estado acima a seguinte expressão:

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{3\lambda+1}{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{(1+\lambda)|\lambda_2|}{4B^2} - \frac{(1+\lambda)\Lambda}{2} = 0 \quad (5.26)$$

Fazendo a mudança de variável  $d\phi = qdt$ , a equação acima fica:

$$q^2 \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\phi^2} + q \frac{dq}{d\phi} \frac{1}{B} \frac{dB}{d\phi} + \frac{(3\lambda+1)q^2}{2} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\phi}\right)^2 + \frac{(1+\lambda)|\lambda_2|}{4B^2} - \frac{(1+\lambda)\Lambda}{2} = 0 \quad (5.27)$$

Tomaremos  $q$  de tal forma que:

$$q \frac{dq}{d\phi} \frac{1}{B} \frac{dB}{d\phi} + \frac{(3\lambda+1)q^2}{2} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\phi}\right)^2 = 0$$

ou seja:

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{d\phi} + \frac{3\lambda+1}{2} \frac{1}{B} \frac{dB}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left( \ln q B^{\frac{3\lambda+1}{2}} \right) = 0$$

Isto é satisfeito se:

$$q = B^{-\frac{3\lambda+1}{2}} \quad (5.28)$$

Assim, a equação (5.27) fica:

$$\frac{d^2 B}{d\phi^2} + \frac{(1+\lambda)|\lambda_2|}{4} B^{3\lambda} - \frac{(1+\lambda)\Lambda}{2} B^{3\lambda+2} = 0$$

Multiplicando a equação acima por  $2 \frac{dB}{d\phi}$  e integrando, obtemos:

$$\left(\frac{dB}{d\phi}\right)^2 + \frac{|\lambda_2|(1+\lambda)}{2(1+3\lambda)} B^{3\lambda+1} - \frac{\Lambda}{3} B^{3\lambda+3} = C \quad (5.29)$$

Vamos definir

$$V(B) = \frac{|\lambda_2|(1+\lambda)}{2(1+3\lambda)} B^{3\lambda+1} - \frac{\Lambda}{3} B^{3\lambda+3} \quad (5.30)$$

que depende dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\Lambda$  e  $\lambda_2$ . A solução geral da equação (5.29) é da forma:

$$\phi = \int \frac{dB}{\sqrt{C-V(B)}}$$

Quando  $\Lambda = 0$  e  $\lambda = 0$  ou  $1/3$  as soluções da integral acima são dadas por funções elementares<sup>[15]</sup>. Quando  $\Lambda = 0$  e  $\lambda = 2/3$  ou  $1$ ;  $\Lambda \neq 0$  e  $\lambda = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  ou  $1$  as soluções são dadas por funções jacobianas elípticas. No caso geral as soluções são funções hipergeométricas<sup>[21]</sup>.

Antes de fazer uma análise qualitativa da equação (5.29), analisaremos as condições de energia. Para isso basta verificar se a densidade, agora com constante cosmológica, é positiva. Usando a equação (5.18) e a transformação  $\rho \rightarrow \rho - \Lambda$  temos que:

$$\rho = \frac{3\dot{B}^2}{B^2} + \frac{|\lambda_2|}{2B^2} - \Lambda$$

Usando que  $d\phi = qdt$  e a expressão (5.28) obtemos:

$$\rho = \frac{3}{B^{3\lambda+3}} \left(\frac{dB}{d\phi}\right)^2 + \frac{|\lambda_2|}{2B^2} - \Lambda$$

Usando a equação (5.29), temos que:

$$\rho = \frac{3C}{B^{3\lambda+3}} - \frac{|\lambda_2|}{(3\lambda+1)B^2} \quad (5.31)$$

Observe que  $\rho \rightarrow \infty$  quando  $B \rightarrow 0$ . A densidade é nula quando:

$$B = B_0 = \left( \frac{3C(3\lambda+1)}{|\lambda_2|} \right)^{\frac{1}{3\lambda+1}} \quad (5.32)$$

Ela é positiva quando  $B < B_0$ , e negativa quando  $B > B_0$ .

Faremos agora uma análise qualitativa das possíveis soluções da equação (5.29) baseada no gráfico de  $V(B)$ . Tomaremos o campo magnético nulo, pois veremos que as soluções fisicamente aceitáveis ou partem da singularidade  $B = 0$  ou terminam nela, de forma que o campo elétrico assumiria valores complexos se  $H \neq 0$  [vide equação (5.23)]. A condutividade é dada então pela equação (5.25), de modo que ela é positiva quando o universo está se contraindo, é negativa quando está se expandindo e é nula quando não há nem expansão nem contração. Podemos ver ainda que ela tende a infinito quando  $B$  tende a zero. De fato: a equação (5.25) escrita em termos da variável  $\phi$ , que é dada por  $d\phi = B^{-(3\lambda+1)/2} dt$  fica na forma:

$$\sigma = -B^{-\frac{3(\lambda+1)}{2}} \frac{dB}{d\phi}$$

Dividindo a equação (5.29) por  $B^{3\lambda+3}$  podemos ver que  $\sigma^2 \rightarrow \infty$  quando  $B \rightarrow 0$ .

Quando  $\Lambda \leq 0$ , o comportamento de  $V(B)$ , dado pela expressão (5.30), pode ser visto na Figura 5. Assim, para um dado  $C > 0$ , o universo parte da singularidade e se expande até que  $V(B) = C$ , onde a expansão cessa e o universo passa a se contrair até atingir novamente a singularidade. A densidade neste caso é sempre positiva. Podemos ver isto da seguinte forma: como  $V(B) \leq C$  segue que

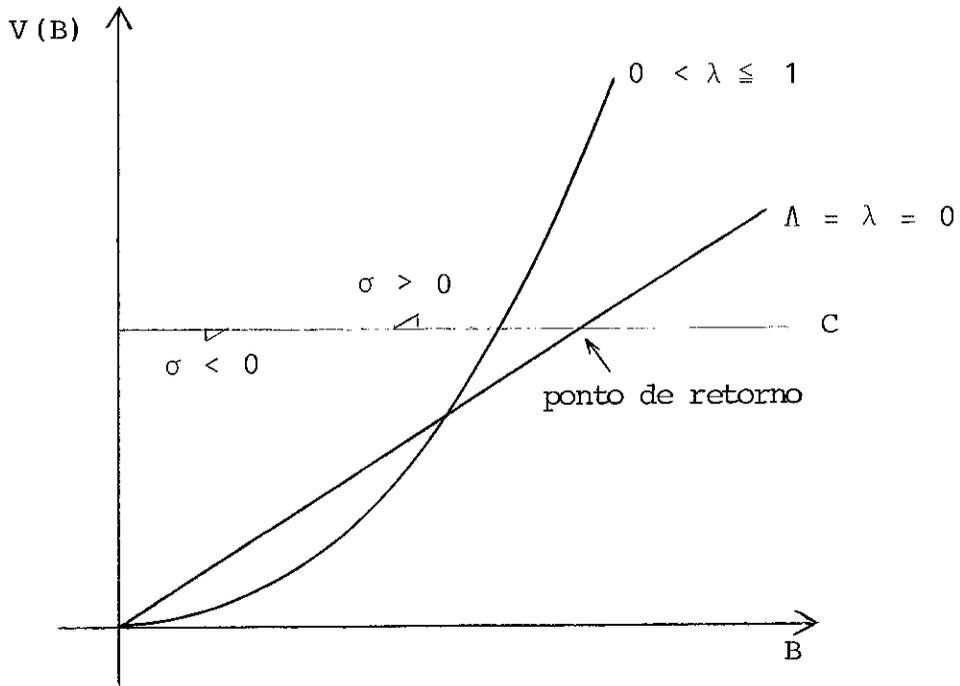


Figura 5 - Comportamento de  $V(B)$  para  $\Lambda \leq 0$ .

$$\frac{|\lambda_2| (1+\lambda)}{2(1+3\lambda)} B^{3\lambda+1} - \frac{\Lambda}{B} B^{3\lambda+3} \leq C$$

Como  $\Lambda \leq 0$  segue que:

$$\frac{|\lambda_2| (1+\lambda)}{2(1+3\lambda)} B^{3\lambda+1} \leq C$$

Por uma manipulação algébrica na expressão acima, e usando a equação (5.32) obtemos:

$$B \leq \left( \frac{2}{3(\lambda+1)} \right)^{\frac{1}{3\lambda+1}} B_0 < B_0$$

Quando  $\Lambda > 0$  o comportamento de  $V(B)$  pode ser visto pela Figura 6. A linha tracejada corresponde aos pontos  $(B_0, C(B_0))$  relacionados pela equação (5.32), que são os pontos do diagrama da fig. 6 onde a densidade se anula. À direita dessa linha a densidade é negativa pois  $B > B_0$  e à esquerda a densidade é positiva pois  $B < B_0$ . Observe que o gráfico possui um máximo em

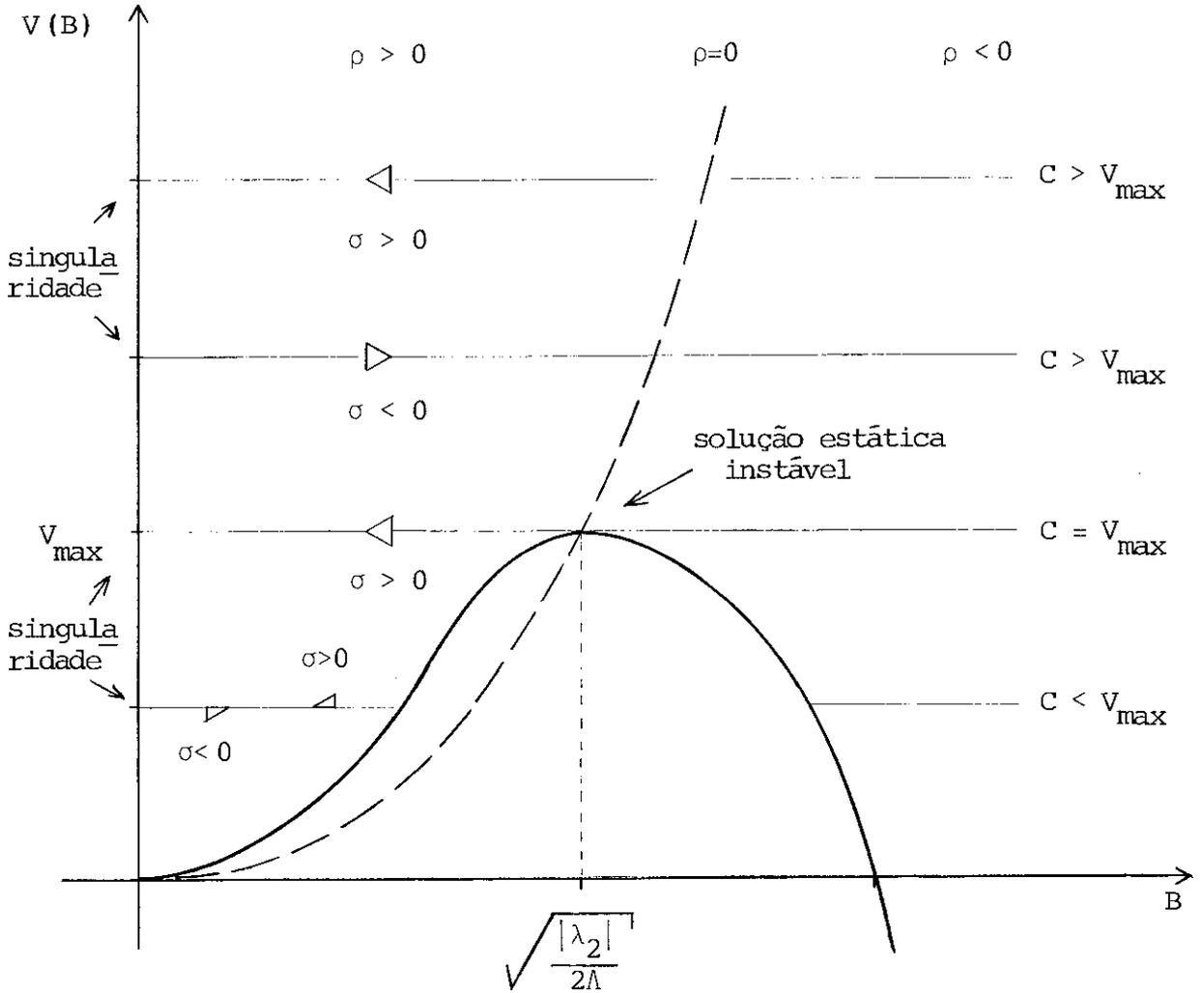


Figura 6 - Comportamento de  $V(B)$  para  $\Lambda > 0$ .

$B_c = (|\lambda_2|/2\Lambda)^{1/2}$  onde  $V$  assume o valor:

$$V_{\max} = V(B_c) = \frac{|\lambda_2|}{3(3\lambda+1)} \left(\frac{|\lambda_2|}{2\Lambda}\right)^{\frac{3\lambda+1}{2}}$$

Temos então os seguintes casos:

i)  $C > V_{\max}$ : Neste caso temos duas possibilidades: ou o universo parte da singularidade e se expande até atingir o raio  $B_0$  dado pela equação (5.32) onde  $\rho = 0$ , ou parte desse raio e se contrai até atingir a singularidade seja num tempo finito ou infinito. O universo não pode ser maior que o raio  $B_0$  pois a densidade seria negativa. Uma vez que para esse raio, o universo não atin-

ge nenhuma singulariedade, a princípio essas soluções não são fisicamente aceitáveis;

ii)  $C = V_{\max}$ : Este caso admite uma solução estática  $B = B_0$ , que tem condutividade, densidade e pressão nulas, como podemos ver da expressão (5.25) e das expressões (5.18) e (5.19) com a introdução da constante cosmológica. O tensor de curvatura neste caso é constante em todo o espaço-tempo, e a geometria é dita então homogênea no espaço-tempo. Pode-se mostrar<sup>[22]</sup> que, as únicas soluções das equações de Einstein-Maxwell, para um universo homogêneo no espaço-tempo com campo eletromagnético tipo não-nulo e que tem as simetrias do espaço-tempo, são as soluções tipo Bertotti-Robinson<sup>[23]</sup>. Uma vez que no nosso caso o campo eletromagnético é do tipo não-nulo e tem as simetrias do espaço-tempo, segue que a solução  $B = B_0$  é do tipo Bertotti-Robinson. Pelo gráfico de  $V(B)$  podemos ver que essa solução é instável. Ela pode decair em soluções com o universo se contraindo desde o raio  $B_0$  até a singularidade. Essas soluções têm condutividade positiva, densidade positiva e satisfaz à equação de estado  $p = \lambda\rho$ . A densidade inicialmente é nula, e a medida que o universo se contrai ela aumenta de valor e como já vimos, ela tende a infinito quando  $B$  tende a zero.

Esse caso admite ainda soluções com densidade positiva, porém com condutividade negativa, que são as que partem da singularidade  $B = 0$  e se expandem até atingir a solução estática  $B=B_0$ .

iii)  $0 < C < V_{\max}$ : Este caso admite somente as soluções onde o universo parte da singularidade  $B = B_0$  se expande até um raio máximo, onde a condutividade se anula e a densidade é diferente de zero e positiva. Então ele se contrai até atingir novamente a singulariedade.

### 5.3 Soluções na Variável $\eta$

No Capítulo 4 resolvemos as equações de Maxwell sob a hipótese de que  $\sigma_0 = \sigma B^2/A$  era constante. Vamos agora usar essas soluções para integrar as equações de Einstein. Para isso, vamos fazer uma mudança de variável nas equações de Einstein de modo a reescrevê-las na variável  $\eta$ . Da equação (4.5) temos que:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{A}{B^2}$$

Então:

$$\dot{A} = \frac{A}{B^2} \frac{dA}{d\eta}$$

$$\dot{B} = \frac{A}{B^2} \frac{dB}{d\eta}$$

Derivando em relação a  $t$  as expressões acima, obtemos:

$$\ddot{A} = \frac{A^2}{B^4} \frac{d^2A}{d\eta^2} + \frac{A}{B^4} \left(\frac{dA}{d\eta}\right)^2 - \frac{2A^2}{B^5} \frac{dA}{d\eta} \frac{dB}{d\eta}$$

$$\ddot{B} = \frac{A^2}{B^4} \frac{d^2B}{d\eta^2} + \frac{A}{B^4} \frac{dA}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} - \frac{2A^2}{B^5} \left(\frac{dB}{d\eta}\right)^2$$

Assim as equações (3.7) ficam:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{d^2A}{d\eta^2} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{dA}{d\eta}\right)^2 - \frac{2}{AB} \frac{dA}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} - \frac{1}{B} \frac{d^2B}{d\eta^2} + \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\eta}\right)^2 + 4\lambda_1^2 + \frac{B^2\lambda_2}{A^2} = \\ = -\frac{B^4}{A^2} (E^2 + H^2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{2} \left[ \frac{A}{B^4} \frac{d^2A}{d\eta^2} + \frac{1}{B^4} \left(\frac{dA}{d\eta}\right)^2 + \frac{2A}{B^5} \frac{dA}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} - \frac{A^2}{B^5} \frac{d^2B}{d\eta^2} + \right. \\ \left. + \frac{3A^2}{B^6} \left(\frac{dB}{d\eta}\right)^2 + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} - \frac{\lambda_2}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$P = \frac{1}{2} \left[ -\frac{A}{B^4} \frac{d^2 A}{d\eta^2} - \frac{1}{B^4} \left( \frac{dA}{d\eta} \right)^2 - \frac{2A}{B^5} \frac{dA}{d\eta} \frac{dB}{d\eta} - \frac{3A^2}{B^5} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \right. \\ \left. + \frac{5A^2}{B^6} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + \frac{2\lambda_1^2 A^2}{B^4} + \frac{\lambda_2}{B^2} \right] \quad (5.35)$$

Tomaremos as equações (5.34) e (5.35) como definição da densidade e da pressão. A equação (5.33) possui duas variáveis de forma que o problema está subdeterminado. Normalmente, as considerações fenomenológicas, como a equação de estado, restringem essa liberdade, de forma que teríamos mais uma equação diferencial para A e B. Atacaremos o problema de outra forma, vamos supor que A e B estão relacionados por:

$$A = A_0 B^m$$

Substituindo na equação (5.33), obtemos:

$$\frac{(m-1)}{B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{(2m^2-3m+1)}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + 4\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 B^{2-2m}}{A_0^2} = \\ = - \frac{B^{4-2m}}{A_0^2} (E^2 + H^2) \quad (5.36)$$

A equação diferencial acima pode ser simplificada se tomarmos o coeficiente de  $\dot{B}^2/B^2$  igual a zero. Obtemos então dois casos:  $m = 1$  ou  $m = 1/2$ .

1º Caso:  $A = A_0 B$

Nesse caso a expressão (5.36) se reduz a:

$$4\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2}{A_0^2} = - \frac{B^2}{A_0^2} (E^2 + H^2)$$

Ou, de outra forma

$$B^2 = - \frac{B^4 (E^2 + H^2)}{4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2} \quad (5.37)$$

Usando as equações (4.8), (4.9) e (4.10), com uma manipulação algébrica nesta última, obtemos as seguintes soluções dependendo de  $k = \sigma_0^2 - 16\lambda_1^2$ :

i)  $k = 0$

$$B^2 = - \frac{2e^{-\sigma_0 \eta}}{4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2} \left[ C_1^2 + \frac{2C_1 C_2}{\sigma_0} + \frac{2C_2^2}{\sigma_0^2} + 2 \left( C_1 C_2 + \frac{C_2^2}{\sigma_0} \right) \eta + C_2^2 \eta^2 \right]$$

ii)  $k > 0$

$$B^2 = - \frac{1}{4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2} \left[ \frac{C_1^2 \sigma_0^2}{8\lambda_1^2} (\sigma_0 + \sqrt{k}) e^{2\Sigma_+ \eta} + 4C_1 C_2 e^{-\sigma_0 \eta} + \frac{C_2^2 \sigma_0^2}{8\lambda_1^2} (\sigma_0 - \sqrt{k}) e^{2\Sigma_- \eta} \right]$$

iii)  $k < 0$

$$B^2 = - \frac{e^{-\sigma_0 \eta}}{4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2} \left[ C_1^2 + C_2^2 + ((C_1^2 - C_2^2) \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} + \frac{C_1 C_2 \sigma_0 \sqrt{-k}}{8\lambda_1^2}) \cos \sqrt{-k} \eta + ((C_1^2 - C_2^2) \frac{\sigma_0 \sqrt{-k}}{16\lambda_1^2} + \frac{C_1 C_2 \sigma_0^2}{8\lambda_1^2}) \operatorname{sen} \sqrt{-k} \eta \right]$$

Para que B seja real temos que ter:

$$4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2 < 0$$

Pela expressão (1.9) vemos que  $(3)R < 0$ . Assim os únicos casos isotrópicos são Bianchi IX ( $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ ) com a condição

(3)  $R < 0$  e Kantowski-Sachs ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ ). Este último caso já foi considerado na seção anterior, numa situação mais geral, pois lá não havia a condição  $\sigma_0 = \text{constante}$ . Vamos considerar então o primeiro caso.

A condutividade é dada por

$$\sigma = \frac{\sigma_0 A}{B^2} = \frac{\sigma_0 A_0}{B}$$

Assim, dependendo se  $k$  é maior, menor ou igual a zero, temos uma expressão diferente para a condutividade. Uma vez que estamos tomando  $A$  e  $B$  positivos, segue que o sinal da condutividade é dado pelo sinal da constante  $\sigma_0$ . Usando as equações (5.37), (4.12) e a equação acima obtemos

$$\sigma_0 = \frac{4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2}{E^2 B^3} \frac{dB}{d\eta}$$

Aqui novamente vemos que o sinal da condutividade está ligado diretamente com a expansão ou contração do modelo. Uma vez que  $4\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2 < 0$ , se tomarmos  $\sigma_0 > 0$  isso significa que  $B$  será uma função decrescente de  $\eta$ , e se  $\sigma_0 < 0$ ,  $B$  será uma função crescente.

Das equações (5.34) e (5.35) obtemos:

$$\rho = \frac{1}{B^2} \left[ \frac{3A_0^2}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + \lambda_1^2 A_0^2 - \frac{\lambda_2}{2} \right]$$

$$p = \frac{1}{B^2} \left[ -\frac{2A_0^2}{B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{A_0^2}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + \lambda_1^2 A_0^2 + \frac{\lambda_2}{2} \right]$$

As condições de energia (A.19) são satisfeitas se:

$$\rho \geq 0 \tag{5.38}$$

$$\rho - p = \frac{2A_0^2}{B^2} \left[ \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{1}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 - \frac{\lambda_2}{2A_0^2} \right] \geq 0 \tag{5.39}$$

$$p+\rho = \frac{2A_0^2}{B^2} \left[ \frac{1}{B} \frac{d^2B}{d\eta^2} + \frac{2}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + \lambda_1^2 \right] \geq 0 \quad (5.40)$$

Uma vez que B depende de muitos parâmetros, a determinação dos valores que estes parâmetros podem assumir, de modo a satisfazer as condições de energia, é em geral uma tarefa complicada. Faremos apenas uma análise qualitativa das condições acima, e trataremos esse ponto em um trabalho futuro. Essa discussão é análoga à discussão feita para Kantowski-Sachs na seção anterior. A condição (5.38) é satisfeita independente dos valores que B( $\eta$ ) assume. Se  $B^{-1} d^2B/d\eta^2$  for negativo a condição (5.40) é automaticamente satisfeita e a pressão é positiva a menos do fator  $(2\lambda_1^2 A_0^2 + \lambda_2)/B^2$  que é negativo. Se  $B^{-1} d^2B/d\lambda^2$  for positivo, a condição (5.39) é automaticamente satisfeita porém o sinal da pressão dependerá dos valores que B( $\eta$ ) venha a assumir. As soluções acima são isotrópicas. Analisaremos agora o caso  $m = 1/2$  que gera soluções anisotrópicas.

2º Caso:  $A = A_0 B^{1/2} \quad ; \quad B > 0$

Nesse caso a expressão (5.36) se reduz a:

$$\frac{d^2B}{d\eta^2} - 8\lambda_1^2 B - \frac{2\lambda_2}{A_0^2} B^2 = \frac{2}{A_0^2} B^4 (E^2 + H^2) \quad (5.41)$$

As soluções da equação acima nos casos Bianchi VIII, IX e Kantowski-Sachs, isto é  $\lambda_2 \neq 0$ , são em geral complexas. Estas equações podem, no entanto, ser analisadas por computação. Para as formas de  $E^2 + H^2$  obtidas nas equações (4.8), (4.9) e (4.10), a equação (5.41) pode ser reduzida a um sistema dinâmico planar

não autônomo, cujas características apresentam fenômenos típicos de bifurcações, turbulência, etc. que serão analisados futuramente. As soluções particulares que encontramos recaíram em casos já analisados anteriormente. Consideraremos então, o caso Bianchi II ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ). Dependendo do valor de  $k = \sigma_0^2 - 16\lambda_1^2$ , temos três tipos de expressões para  $B^4(E^2 + H^2)$  e conseqüentemente três equações diferenciais que são as seguintes:

$$i) \quad k = \sigma_0^2 - 16\lambda_1^2 = 0$$

Usando a expressão (4.8) a equação diferencial (5.41) se escreve como:

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} - 8\lambda_1^2 B = e^{-\sigma_0 \eta} (a + b\eta + c\eta^2)$$

onde

$$a = \frac{4}{A_0^2} \left( C_1^2 + \frac{2C_1 C_2}{\sigma_0} + \frac{2C_2^2}{\sigma_0^2} \right)$$

$$b = \frac{8C_2}{A_0^2} \left( C_1 + \frac{C_2}{\sigma_0} \right)$$

$$c = \frac{4C_2^2}{A_0^2}$$

A solução geral para a equação diferencial acima pode ser obtida integrando a equação homogênea e adicionando uma solução particular que pode ser facilmente encontrada por tentativa. Obtivemos:

$$B(\eta) = B_1 e^{2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + B_2 e^{-2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + \frac{2}{\sigma_0^2} e^{-\sigma_0 \eta} \left[ \left( a + \frac{4b}{\sigma_0} + \frac{28c}{\sigma_0^2} \right) + \left( b + \frac{8c}{\sigma_0} \right) \eta + c\eta^2 \right] \quad (5.42)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes.

ii)  $k > 0$

Usando a expressão (4.9) a equação (5.41) se escreve como:

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} - 8\lambda_1^2 B = a e^{2\Sigma_+ \eta} + b e^{-\sigma_0 \eta} + c e^{2\Sigma_- \eta}$$

onde

$$a = \frac{2C_1^2 \sigma_0 (\sigma_0 + \sqrt{k})}{8\lambda_1^2 A_0^2}$$

$$b = \frac{8C_1 C_2}{A_0^2}$$

$$c = \frac{2C_2^2 \sigma_0 (\sigma_0 - \sqrt{k})}{8\lambda_1^2 A_0^2}$$

A solução geral é da forma:

$$B(\eta) = B_1 e^{2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + B_2 e^{-2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + \frac{a}{4\Sigma_+^2 - 8\lambda_1^2} e^{2\Sigma_+ \eta} + \frac{b}{\sigma_0^2 - 8\lambda_1^2} e^{-\sigma_0 \eta} + \frac{c}{4\Sigma_-^2 - 8\lambda_1^2} e^{2\Sigma_- \eta} \quad (5.43)$$

iii)  $k < 0$

Usando a expressão (4.10), após uma manipulação algébrica, a equação (5.41) se escreve como:

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} - 8\lambda_1^2 B = e^{-\sigma_0 \eta} (a + b \cos \sqrt{-k} \eta + c \operatorname{sen} \sqrt{-k} \eta)$$

onde

$$a = C_1^2 + C_2^2$$

$$b = (C_1^2 - C_2^2) \frac{\sigma_0^2}{16\lambda_1^2} + \frac{C_1 C_2 \sigma_0 \sqrt{-k}}{8\lambda_1^2}$$

$$c = (C_1^2 - C_2^2) \frac{\sigma_o \sqrt{-k}}{16\lambda_1^2} + \frac{C_1 C_2 \sigma_o^2}{8\lambda_1^2}$$

A solução geral é da forma:

$$\begin{aligned} B(\eta) = & B_1 e^{2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + B_1 e^{-2\sqrt{2} \lambda_1 \eta} + e^{-\sigma_o \eta} \left( \frac{a}{\sigma_o^2 - 8\lambda_1^2} + \right. \\ & + \frac{\sigma_o \sqrt{-k} c + (\sigma_o^2 - 12\lambda_1^2) b}{2(\sigma_o^2 - 12\lambda_1^2)^2 - 2\sigma_o^2 k} \cos \sqrt{-k} \eta + \\ & \left. + \frac{(\sigma_o^2 - 12\lambda_1^2) c - \sigma_o \sqrt{-k} b}{2(\sigma_o^2 - 12\lambda_1^2)^2 - 2\sigma_o^2 k} \sin \sqrt{-k} \eta \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

As equações (5.34) e (5.35) se reduzem a:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{A_o^2}{2B^3} \left[ -\frac{1}{2B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{4}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + 2\lambda_1^2 \right] \\ p &= \frac{A_o^2}{2B^3} \left[ -\frac{7}{2B} \frac{d^2 B}{d\eta^2} + \frac{4}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 + 2\lambda_1^2 \right] \end{aligned}$$

Usando a equação (5.41) temos que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{A_o^2}{2B^3} \left[ \frac{4}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 - \frac{B^4 (E^2 + H^2)}{A_o^2 B} - 2\lambda_1^2 \right] \\ p &= \frac{A_o^2}{2B^3} \left[ \frac{4}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 - \frac{7B^4 (E^2 + H^2)}{A_o^2 B} - 26\lambda_1^2 \right] \end{aligned}$$

As condições de energia (A.19) são satisfeitas se:

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 \\ \rho - p &= \frac{3A_o^2}{B^3} \left[ \frac{B^4 (E^2 + H^2)}{A_o^2 B} + 4\lambda_1^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

$$p+\rho = \frac{4A_0^2}{B^3} \left[ \frac{1}{B^2} \left( \frac{dB}{d\eta} \right)^2 - \frac{B^4 (E^2 + H^2)}{A_0^2 B} - \frac{7}{2} \lambda_1^2 \right] \geq 0$$

Observe que a segunda condição é satisfeita em todos os casos .  
Aqui novamente B depende de muitos parâmetros, de modo que a análise das condições de energia é complicada. Trataremos deste ponto em um trabalho futuro. Por outro lado, podemos dar um exemplo de uma solução que satisfaz às condições de energia, que é  $B_1 = B_2 = C_2 = 0$ . Essa solução, nos três casos, recai numa solução tipo potência incluída nas expressões (5.12) com  $b = 2/3$ , que foi analisada na seção 1 do Capítulo 5.

## 6. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL PARA BIANCHI I

A título de completeza, explicitaremos as equações para o caso Bianchi I ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). As equações de Einstein (3.7) se reduzem a:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} &= E^2 + H^2 \\
 \rho &= \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{5\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) \\
 p &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{3\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

As equações de Maxwell (4.2) e (4.3) se reduzem a:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{EB^2} \frac{d}{dt} EB^2 &= -\sigma \\
 \frac{d}{dt} HB^2 &= 0
 \end{aligned}$$

A solução geral é dada por:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{E_0}{B^2} \exp - \int_{t_0}^t \sigma(x) dx \\
 H &= \frac{H_0}{B^2}
 \end{aligned}$$

A equação (6.1) é dada então por:

$$-\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = \frac{1}{B^4} \left( E_0^2 \exp - \int_{t_0}^t \sigma(x) dx + H_0^2 \right) \tag{6.2}$$

As condições de energia (A.19) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{5\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) \geq 0 \\
 \rho - p &= \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{3\dot{A}\dot{B}}{AB} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$p+\rho = -\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} \geq 0$$

Até onde estamos cientes, não existe na literatura, nenhuma solução da equação (6.2) satisfazendo as condições de energia com condutividade não nula.

## APÊNDICE A

### I. COORDENADAS COMOVENTES<sup>[16]</sup>

Vamos supor que o espaço-tempo é preenchido por um fluido contínuo fictício, que é chamado de substratum, e que cada ponto desse fluido percorre uma linha de universo tipo-tempo cuja tangente  $u^\alpha$  é normalizada a 1, isto é:

$$u^\alpha u_\alpha = 1$$

Para os modelos estudados nesta tese, um sistema de coordenadas comovente com o substratum pode ser construído da seguinte forma: Seja  $S$  uma superfície tipo-espaço e seja  $\{x^i, i=1,2,3\}$  um sistema de coordenadas que cobre  $S$ . Cada partícula do substratum em  $S$  será caracterizada em coordenadas comoventes por  $\{0, x^i\}$  e vamos supor que suas coordenadas espaciais não mudam a medida que cada partícula percorre sua linha de universo. A coordenada temporal será dada pelo tempo próprio  $s$  medida a partir de  $S$ . Assim os eventos na mesma linha de universo de  $\{0, x^i\}$  serão caracterizados em coordenadas comoventes por  $\{s, x^i\}$ . Nesse sistema de coordenadas, a velocidade  $u^\alpha$  será dada então por:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = (1, 0, 0, 0)$$

satisfazendo a condição de normalização.

A princípio, o campo de velocidades do substratum não precisa coincidir com o campo de velocidades do conteúdo material. No caso em que a matéria é constituída por partículas de massa nula, por exemplo no caso de fótons, esses campos de velocidades não podem coincidir. Nos casos em que é possível identificar esses campos de velocidade, isso geralmente é feito. No problema que esta-

mos tratando consideramos o campo de velocidade do substratum co incidente com o campo de velocidade do fluido perfeito que junto com o campo eletromagnético, constitui o conteúdo material do nosso modelo. Assim, no nosso caso o campo de velocidades do fluido perfeito é dado por

$$u^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad .$$

## II. TENSOR MOMENTUM-ENERGIA PARA FLUIDO PERFEITO E CAMPO ELETRO-MAGNÉTICO [17]

Vamos supor que existe um tensor  $T^{\alpha\beta}$ , chamado tensor momentum-energia, que depende apenas das grandezas dinâmicas que descrevem a matéria (exemplo, campo eletromagnético, pressão, etc.), das derivadas covariantes dessas grandezas e da métrica. Vamos supor também que esse tensor se anula numa região finita do espaço se e somente se as grandezas que descrevem a matéria se anulam nesta região. Isso garante que qualquer conteúdo material será fonte de curvatura. E finalmente vamos supor que

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{A.1}$$

Essa equação significa que existem leis de conservação locais para a energia-momentum. Para ver isto, suponha primeiramente que o espaço-tempo admite um campo de Killing  $K$  (veja Apêndice B.IV). Defina o campo vetorial  $P^\alpha$  da forma:

$$P^\alpha = T^{\alpha\beta} K_\beta$$

Podemos ver que:

$$P^\alpha{}_{;\alpha} = T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} K_\beta + T^{\alpha\beta} K_{\beta;\alpha} = 0$$

onde usamos (A.1) e (B.6). Se  $V$  é um volume dado do espaço-tempo

e  $\partial V$  a sua fronteira então, pelo teorema de Gauss:

$$\int_V P^\alpha{}_{;\alpha} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial V} P^\alpha dS_\alpha = 0 \quad (A.2)$$

Isso define uma lei de conservação para  $P^\alpha$  que pode ser vista como uma componente do tensor momentum-energia sobre o campo  $K$ . Se o espaço-tempo não possui vetores de Killing, a lei de conservação acima vale localmente, onde o campo  $P$  é definido a partir dos vetores de Killing do espaço plano. Usando o princípio da equivalência pode-se mostrar que na vizinhança de um ponto onde escolhemos um sistema de coordenadas de maneira que a métrica assume a forma diag  $(+1, -1, -1, -1)$ , as integrais da equação (A.2) diferem de zero por uma quantidade arbitrariamente pequena<sup>[17]</sup>.

Vamos construir através do princípio da ação mínima, um tensor momentum-energia satisfazendo os requisitos acima. Para uma grande quantidade de sistemas físicos, as equações dinâmicas são obtidas através do princípio variacional sobre a ação, que é um funcional das grandezas dinâmicas que descrevem o sistema, e eventualmente da métrica do espaço-tempo. Seja  $I_m$  a ação de um dado conteúdo material e  $\delta I_m$  a variação da ação devido a uma variação funcional de  $g_{\alpha\beta}$ . A variação da ação devido a variação funcional das grandezas dinâmicas é nula pois essas grandezas obedecem às equações de movimento. Uma vez que  $g_{\alpha\beta}$  é um campo externo, em geral  $\delta I_m$  não será nulo e o coeficiente de  $\delta g^{\alpha\beta}$  nos define o tensor momentum-energia da forma:

$$\delta I_m = \frac{1}{2} \int T_{\alpha\beta}(x) \delta g^{\alpha\beta}(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \quad (A.3)$$

Pode-se mostrar<sup>[18]</sup> que o princípio da covariância garante que  $T_{\alpha\beta}$  satisfaz às leis de conservação (A.1).

Vamos obter agora o tensor momentum-energia para um fluido perfeito carregado com campos eletromagnéticos. A ação é dada por

$$I_m = \int \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \rho_m (1+\varepsilon) - \frac{1}{2} J^\alpha A_\alpha \right) \sqrt{-g} d^4x$$

onde  $\rho_m$  é a densidade do fluido e  $\varepsilon$  a sua energia interna que vamos supor ser função de  $\rho_m$  (nesse caso o fluido é dito isentrópico). A densidade de energia  $\rho$  é dada por  $\rho_m (1+\varepsilon)$  e a pressão é dada por:

$$p = \rho_m^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho_m}$$

O termo  $J^\alpha A_\alpha$  representa a interação do fluido com o campo eletromagnético, onde  $J^\alpha$  é a corrente elétrica que devido às equações de Maxwell, obedece à lei de conservação:

$$J^\alpha_{;\alpha} = 0$$

Podemos também definir uma corrente de massa que é dada por  $J_m^\alpha = \rho_m u^\alpha$ . Vamos supor que essa corrente se conserva. Pode-se mostrar (veja Hawking & Ellis<sup>[17]</sup>, pg. 70) que para uma corrente conservada  $J^\alpha$  tem-se que

$$\delta (\sqrt{-g} J^\alpha) = 0$$

Segue então desse fato e da suposição de que  $\delta A_\alpha = 0$  que o termo de acoplamento  $J^\alpha A_\alpha$  não gera nenhum termo no tensor momentum-energia. Assim, o tensor momentum-energia para o fluido perfeito carregado será a soma do tensor momentum-energia do campo eletromagnético com o do fluido perfeito. Este último é obtido através da variação de

$$I_{fp} = \int -\rho_m (1+\varepsilon) \sqrt{-g} d^4x$$

que é:

$$\delta I_{fp} = \int [-(1+\epsilon+\rho_m \frac{d\epsilon}{d\rho}) \delta\rho_m - \rho_m (1+\epsilon) \delta\sqrt{-g}] d^4x \quad (A.4)$$

Para calcular  $\delta\sqrt{-g}$  usaremos o resultado [18]

$$\delta \ln(\det M) = \text{tr}(M^{-1} \delta M)$$

onde  $M$  é uma matriz inversível. Assim

$$\delta g = -g g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (A.5)$$

Observe que

$$\rho_m^2 = J_m^\alpha J_m^\beta g_{\alpha\beta}$$

ou

$$\rho_m^2 = -g^{-1} (\sqrt{-g} J_m^\alpha) (\sqrt{-g} J_m^\beta) g_{\alpha\beta}$$

Uma vez que  $\sqrt{-g} J_m^\alpha$  é constante por variações da métrica, temos que

$$2\rho_m \delta\rho_m = (J_m^\alpha J_m^\beta - g^{\alpha\beta} J_m^\lambda J_{m\lambda}) \delta g_{\alpha\beta}$$

Ou ainda

$$\delta\rho_m = \frac{\rho_m}{2} (u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta}) \delta g_{\alpha\beta}$$

Uma vez que  $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}$ , segue que

$$\delta\rho_m = -\frac{\rho_m}{2} (u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \quad (A.6)$$

Substituindo a expressão acima e a equação (A.5) na eq. (A.4) obtemos

$$\delta I_{fp} = \int \frac{1}{2} [\rho_m (1+\epsilon) + \rho_m^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_m} u_\alpha u_\beta - \rho_m^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_m} g_{\alpha\beta}] \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x$$

Usando (A.3), segue que o tensor momentum-energia para o fluido perfeito é:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho+p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} .$$

O tensor momentum-energia do campo eletromagnético é obtido a partir da variação de:

$$I_{ce} = \int -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

que é dada por:

$$\delta I_{ce} = \int \frac{1}{2} (F_{\alpha}^{\mu} F_{\mu\beta} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x$$

onde usamos a expressão (A.5). De (A.3) vemos que o tensor momentum-energia do campo eletromagnético é:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha}^{\mu} F_{\mu\beta} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}$$

O tensor momentum-energia do fluido perfeito carregado com campos eletromagnéticos é dado então por:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho+p) u_{\alpha} u_{\beta} - p g_{\alpha\beta} + F_{\alpha}^{\mu} F_{\mu\beta} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \quad (A.7)$$

### III. DECOMPOSIÇÃO DO TENSOR MOMENTUM-ENERGIA E DO TENSOR DE MAXWELL [16]

O espaço de repouso local em um dado ponto de um observador com velocidade unitária  $u^{\alpha}$  é definido como sendo o espaço ortogonal à velocidade nesse ponto. Vamos introduzir o tensor de projeção  $h_{\alpha\beta}$  que é dado por:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_{\alpha} u_{\beta}$$

Observe que:

$$h_{\alpha\beta} u^{\beta} = 0$$

Isto quer dizer que  $h_{\alpha\beta}$  projeta os objetos geométricos ortogonal

mente a  $u^\alpha$ . Além disso é fácil ver que:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\nu = h^\alpha_\nu$$

logo  $h_{\alpha\beta}$  é de fato um projetor. O tensor  $h_{\alpha\beta}$  pode ser interpretado como uma métrica do espaço de repouso local, pois um deslocamento arbitrário  $dx^\alpha$  no espaço-tempo, corresponde no espaço de repouso local ao deslocamento  $h_{\alpha\beta} dx^\beta$ , de forma que a distância espacial local no espaço de repouso será:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= g_{\alpha\beta} (h^\alpha_\mu dx^\mu) (h^\beta_\nu dx^\nu) \\ &= h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Assim o tensor de projeção fornece uma decomposição do espaço - tempo em uma parte puramente espacial cuja métrica é dada por  $h_{\alpha\beta}$  e uma parte puramente temporal cuja distância é dada por  $u_\alpha dx^\alpha$ , pois

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (u_\alpha dx^\alpha)^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Podemos achar as componentes paralelas e ortogonais a  $u^\alpha$  de um tensor  $P_{\alpha\beta}$ , que a princípio não tem simetria definida, da seguinte forma. Projetando um dos índices de  $P_{\alpha\beta}$  temos as seguintes possibilidades:

$$P_{\alpha\beta} u^\beta ; P_{\alpha\beta} u^\alpha ; P_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu ; P_{\alpha\beta} h^\beta_\nu \quad (\text{A.8})$$

Por sua vez, para os dois primeiros termos temos:

$$P_{\alpha\beta} u^\beta = \rho u_\alpha + q_\alpha \quad (\text{A.9})$$

$$P_{\alpha\beta} u^\alpha = \bar{\rho} u_\beta + \bar{q}_\beta \quad (\text{A.10})$$

onde  $q_\alpha u^\alpha = \bar{q}_\beta u^\beta = 0$ . Observe que

$$\rho = \bar{\rho} = P_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (\text{A.11})$$

e

$$q_\alpha = h_\alpha^\sigma P_{\sigma\beta} u^\beta \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{q}_\beta = h_\beta^\sigma P_{\alpha\sigma} u^\alpha \quad (\text{A.13})$$

Assim, se  $P_{\alpha\beta}$  for simétrico  $q_\alpha = \bar{q}_\alpha$  e se for antissimétrico  $q_\alpha = -\bar{q}_\alpha$ . Os dois últimos termos de (A.8) podem também ser novamente projetados, fornecendo um único caso novo, que é:

$$P_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu$$

Podemos ainda decompor este tensor numa parte sem traço que é dada por

$$\pi_{\mu\nu} = P_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu - p h_{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

onde

$$p = \frac{1}{3} P_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \quad (\text{A.15})$$

É fácil ver que  $\pi^\mu_\mu = 0$  e que  $\pi_{\mu\nu} u^\mu = \pi_{\mu\nu} u^\nu = 0$ . Usando as equações (A.9), (A.10) e (A.14) vemos que a decomposição mais geral de  $P_{\alpha\beta}$  é dada por

$$P_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + q_\alpha u_\beta + \bar{q}_\beta u_\alpha + \pi_{\alpha\beta} - p h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.16})$$

onde  $\rho$ ,  $q_\alpha$ ,  $\bar{q}_\beta$ ,  $\pi_{\alpha\beta}$  e  $p$  são dados respectivamente pelas equações (A.11), (A.12), (A.13), (A.14) e (A.15).

Para um tensor simétrico  $T_{\alpha\beta}$ , como no caso do tensor momento-energia, a decomposição (A.16) se reduz à:

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + q(\alpha u_\beta) + \pi_{\alpha\beta} - p h_{\alpha\beta}$$

onde  $\pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}$ .

Para um tensor antissimétrico  $F_{\alpha\beta}$  a decomposição (A.16) se reduz à:

$$F_{\alpha\beta} = q_{[\alpha} u_{\beta]} + \pi_{\alpha\beta}$$

onde  $\pi_{\alpha\beta} = -\pi_{\beta\alpha}$  e  $p = 0$ . Observe que

$$q_{\alpha} = h_{\alpha}^{\mu} F_{\mu\nu} u^{\nu} = F_{\alpha\nu} u^{\nu}$$

Além disso, como  $\pi_{\alpha\beta}$  é um tensor antissimétrico do espaço de repouso local, segue que ele tem três componentes independentes e portanto pode ser escrito em termos de um vetor  $H^{\mu}$  também do espaço de repouso local, da seguinte forma:

$$\pi_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\mu\nu} u^{\nu} H^{\mu}$$

Assim

$$F_{\alpha\beta} = q_{\alpha} u_{\beta} - q_{\beta} u_{\alpha} + \eta_{\alpha\beta\mu\nu} u^{\nu} H^{\mu}$$

Podemos ver que:

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} u^{\beta} F^{\mu\nu}$$

Se  $F_{\alpha\beta}$  for o tensor de Maxwell,  $q_{\alpha}$  será o campo elétrico medido pelo observador com velocidade  $u^{\alpha}$  e  $H_{\alpha}$  o campo magnético medido por este mesmo observador.

#### IV. CONDIÇÕES DE ENERGIA<sup>[17]</sup>

Os conteúdos materiais conhecidos, em geral, os que são fisicamente aceitáveis, obedecem às chamadas condições dominantes de energia que dizem que a densidade de energia local medida por observador com velocidade  $u^{\alpha}$  não é negativa, isto é:

$$T^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} \geq 0$$

e que o vetor fluxo de energia  $W^{\alpha} = T^{\alpha\beta} u_{\beta}$  ou é do tipo-tempo ou do tipo-nulo, isto é:

$$W^\alpha W_\alpha \geq 0$$

Se em um dado ponto  $q$  do espaço-tempo escolhemos uma base ortogonal normal  $\{e_A, A = 0, 1, 2, 3\}$ , com  $e_0$  sendo um campo vetorial tipo-tempo, pode-se mostrar<sup>[17]</sup> que existem quatro formas canônicas para o tensor momentum-energia. O modelo que estamos estudando tem um tensor da forma:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & p_1 & & \\ & & p_2 & \\ & & & p_3 \end{pmatrix}$$

onde  $\mu$  é a densidade de energia medida por um observador cuja linha de universo em  $q$  tem  $e_0$  como vetor tangente. A grandeza  $p_i$  representa a pressão na direção  $e_i$  medida por este mesmo observador. Para um tensor da forma acima, as condições de energia ficam da seguinte maneira: Escolhendo a base  $\{e_A\}$  de forma que em  $q$  a métrica assuma a forma  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ , temos que

$$T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \mu (u_0)^2 + \sum_{i=1}^3 p_i (u_i)^2 \geq 0$$

$$W^\alpha W_\alpha = \mu^2 (u_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (p_i)^2 (u_i)^2 \geq 0$$

Uma vez que o campo  $u^\alpha$  é um campo tipo-tempo arbitrário segue que as condições de energia são satisfeitas se:

$$0 \leq \mu \tag{A.17}$$

$$-\mu \leq p_i \leq \mu \tag{A.18}$$

Para o modelo que estamos tratando (veja pag. 12), podemos ver que

$$\mu = \rho + \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$$

$$p_1 = p - \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$$

$$p_2 = p_3 = p + \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$$

A condição (A.17) se escreve como:

$$\rho + \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \geq 0$$

Na verdade, vamos impor algo mais restrito que a condição acima, que é  $\rho \geq 0$ . Isto é, a densidade de energia do fluido perfeito é positiva. A condição (A.18) nos dá:

$$-\rho \leq p \leq \rho$$

Assim, para todas as soluções que encontrarmos, exigiremos que satisfaçam às condições

$$0 \leq \rho$$

(A.19)

$$-\rho \leq p \leq \rho$$

## V. DISCUSSÃO CONCEITUAL DA OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações de Einstein não podem ser deduzidas de um conjunto de axiomas, pelo contrário, tal como as equações que descrevem um sistema físico qualquer, como as equações de Maxwell, equações de Schrödinger, etc., elas são postuladas e é através da experiência que verificamos a que situações físicas elas se aplicam. Por outro lado, sempre existem argumentos que eliminam uma série de possibilidades. Discutiremos rapidamente os argumentos que levaram Einstein às suas equações.

Dois princípios têm uma influência destacada na formulação da relatividade geral: o princípio da covariância geral e o princípio da equivalência. Em 1916<sup>[19]</sup> Einstein formulou nos seus

"Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral" o princípio da covariância geral, dizendo que:

*"As leis gerais da natureza devem ser expressas por equações que sejam válidas em qualquer sistema de coordenadas, isto é, são covariantes sob transformações gerais de coordenadas."*

Assim qualquer característica física que aparece apenas em determinados referenciais não podem ter significado físico intrínseco. Somente aquelas que aparecem em todos os referenciais, seja qual for seu estado de movimento, são as que podem ter significado físico intrínseco. As leis da física poderão então ser expressas por equações que não dependam de sistemas de coordenadas, e os tensores são justamente objetos geométricos que servem a esse propósito.

O princípio da relatividade de Galileu, que é um dos princípios assumidos pela Teoria da Relatividade Restrita, diz que as leis da física são válidas somente em referenciais inerciais. Dizer que as leis físicas são válidas apenas para uma certa classe de observadores, é dar propriedades físicas ao espaço-tempo, de modo que ele venha a influenciar em nossas observações (privilegiando certos referenciais) sem que por sua vez seja influenciado por coisa alguma. Assim, apesar da Teoria da Relatividade Restrita ter abolido a idéia de espaço absoluto e de tempo absoluto, ela criou, em outro sentido, um contínuo espaço-tempo absoluto. O princípio da covariância é uma extensão natural do princípio de Galileu e ele unifica todos os tipos de referenciais, permitindo então, que a estrutura do espaço-tempo venha a ser influenciada pelos objetos físicos.

O princípio da equivalência foi estabelecido por Einstein através da "experiência pensada" do elevador, onde ele concluiu

que por experiências locais, isto é, quando passa um pequeno intervalo de tempo e fazemos a experiência numa região pequena do espaço, não podemos distinguir se estamos num campo gravitacional ou num sistema acelerado. O princípio da equivalência diz então que localmente sempre podemos eliminar a gravitação por uma mudança de referencial. Isto quer dizer que localmente as leis físicas não gravitacionais se aplicam na sua forma compatível com a relatividade restrita (isto também é chamado de acoplamento mínimo).

O princípio de equivalência permite generalizar as leis da física válidas na Relatividade Restrita para a Relatividade Geral<sup>[20]</sup>: As leis na sua forma geométrica abstrata, isto é, independentes de coordenadas, tem a mesma forma tanto na Relatividade Restrita quanto na Relatividade Geral, e quando expressamos as equações num sistema de coordenadas, elas diferem pelas diferentes expressões, que assumem os objetos geométricos. Por exemplo, as equações de Maxwell formuladas independentemente do sistema de coordenadas são:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{J}$$

onde  $\mathbf{V}$  é o gradiente<sup>[20]</sup>,  $\mathbf{F}$  é o tensor de Maxwell e  $\mathbf{J}$  o vetor corrente elétrica. Na Teoria da Relatividade Restrita, as componentes dessa equação num sistema Cartesiano se escreveriam

$$F^{\mu\nu}_{, \nu} = 4\pi J^{\mu}$$

e na Teoria da Relatividade Geral seriam

$$F^{\mu\nu}_{; \nu} = 4\pi J^{\mu} .$$

Assim o princípio da equivalência justifica a regra de que as equações físicas na Teoria da Relatividade Geral são obtidas das

equações na teoria da Relatividade Restrita trocando as derivadas simples por derivadas covariantes. Quando ocorrem derivadas duplas, existem problemas de ordenamento pois as derivadas simples comutam mas as derivadas covariantes não. Problemas operacionais análogos ocorrem na passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica.

De posse desses princípios, Einstein deu o grande passo para a formulação da Teoria da Relatividade Geral, que tornou-a uma das teorias esteticamente mais admiradas na física, que foi a geometrização da gravitação. Faltava então saber como a matéria curva o espaço-tempo. Pelo que discutimos, fica claro que as equações de campo devem relacionar um tensor que descreve a matéria, que é o tensor momentum-energia, e um tensor que caracteriza a gravitação, que deve ser obtido apenas da geometria do espaço-tempo, isto é, do tensor métrico. Assim as equações de campo devem ser da forma

$$\mathbf{G} = k\mathbf{T}$$

Uma vez que para a conservação da energia e do momentum temos que  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ , segue que  $\mathbf{G}$  é de tal forma que  $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ . Além disso, como  $\mathbf{T}$  é um tensor de segunda ordem simétrico,  $\mathbf{G}$  também deverá sê-lo. Queremos também que  $\mathbf{G}$  se anule no espaço-tempo chato, e que a equação acima se reduza à lei de gravidade de Newton no limite de campos fracos e velocidades pequenas comparadas com a da luz. É possível mostrar<sup>[20,18]</sup> que o tensor mais simples satisfazendo esses requisitos é o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Assim as equações de campo para a gravitação são então

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu}$$

ou

$$R_{\mu\nu} = k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

onde  $k = 8\pi G/c^2$  e pode ser obtido comparando a equação acima no limite de campos fracos e baixas velocidades com a equação de Newton para a gravitação.

Além de saber como a matéria curva a geometria, temos que saber como a geometria determina o movimento da matéria. Isso é obtido a partir do princípio de que a matéria percorre, quando não está sob influência de nenhuma interação não-gravitacional, um caminho no espaço-tempo que extremiza o elemento de distância de universo no espaço-tempo. Portanto a matéria percorre trajetórias denominadas geodésicas cuja expressão pode ser obtida através do princípio variacional

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} ds = 0$$

onde  $\delta$  representa as variações de caminho  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \delta x^\alpha$  obtemos a equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

que é a equação da geodésica.

## APÊNDICE B

### I. INTRODUÇÃO

O objetivo deste Apêndice é dar definições de alguns conceitos de geometria diferencial em variedades, já supondo conhecidos os conceitos básicos de geometria diferencial em espaços de Banach, e também, apresentar o cálculo com formas. Não temos a pretensão de fazer um resumo formal deste tópico, mas apenas tentar tornar a tese auto-suficiente em termos de conceitos e fórmulas usadas na parte central do trabalho. Para aqueles que desejam estudar os tópicos aqui tratados sugerimos a referência [24]. Existem muitas outras boas referências como [25] e [26]. Sugerimos ainda as referências [27] e [5], que servem de alternativas para este Apêndice apresentado aqui.

### II. VETORES, 1-FORMAS E TENSORES

O espaço-tempo possui certas propriedades, entre outras como a continuidade, a existência de sistemas de coordenadas e transformações de coordenadas, que são incorporadas no conceito de variedade. Devido à possibilidade de se fazer medidas, o espaço-tempo é suposto ser uma variedade riemanniana. A definição precisa de variedade pode ser vista na referência [25], e vamos chamar de  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , e vamos supor que  $\{x^i, i=1, \dots, n\}$  é um sistema de coordenadas sobre  $M$ .

Uma curva parametrizada em  $M$  é uma aplicação de um aberto de  $\mathbb{R}$  em  $M$ . Uma função  $f$  na variedade é uma aplicação de  $M$  em

$\mathbb{R}$ . Um vetor tangente  $v_p$  à  $M$  no ponto  $p \in M$ , é uma aplicação do espaço das funções em  $\mathbb{R}$ , diferenciável em alguma vizinhança de  $p$ , satisfazendo:

$$v_p(af+bg) = av_p(f) + bv_p(g) \quad (B.1)$$

$$v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f) \quad (\text{regra de Leibnitz}) \quad (B.2)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g$  são funções. A aplicação:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_p = \left. \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

onde  $t$  é o parâmetro de uma curva  $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , e  $df/dt$  é a derivada direcional de  $f$  ao longo da curva  $\alpha$ , satisfaz as condições (B.1) e (B.2). Pode-se mostrar que as derivadas direcionais ao longo de todas as curvas que passam por  $p$ , formam um espaço vetorial de dimensão igual à variedade, chamado de espaço tangente à  $M$  em  $p$ , denotado por  $T_p$ . O conjunto de vetores  $\{\partial/\partial x^i, i=1, \dots, n\}$  forma uma base para  $T_p$ , e é chamada de base coordenada. Um vetor  $v$  em  $p$  pode ser escrito como

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

onde  $v^i \in \mathbb{R}$  são as componentes de  $v$  na base de coordenadas. Quando a cada ponto de  $M$  associamos um vetor, dizemos que esse conjunto de vetores forma um campo vetorial.

Vamos definir uma 1-forma  $\theta$  em  $p$  como sendo uma aplicação linear de  $T_p$  em  $\mathbb{R}$ , isto é:

$$\begin{aligned} \theta: T_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \theta(v) \quad \text{ou} \quad \langle \theta, v \rangle_p \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que, análogo ao caso de vetores, o conjunto de

1-formas em  $p$  define um espaço vetorial, que é chamado de espaço dual em  $p$ , denotado por  $T_p^*$ . Como exemplo de 1-forma, vamos analisar o gradiente de uma função  $f$ , que é definido da seguinte maneira:

$$df: T_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_p \rightarrow df \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_p \right) = \langle df, \left. \frac{d}{dt} \right|_p \rangle = \left. \frac{df}{dt} \right|_p$$

O conjunto de 1-formas  $\{dx^i, i=1, \dots, n\}$  é uma base para  $T_p^*$  e é chamada de base coordenada dual a base  $\langle \partial/\partial x^i \rangle$  pois

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta^i_j$$

Da mesma forma que uma 1-forma é uma aplicação de  $T_p$  em  $\mathbb{R}$ , um vetor é uma aplicação de  $T_p^*$  em  $\mathbb{R}$ , e a notação  $\langle , \rangle$  deixa clara essa dualidade entre 1-formas e vetores.

Vamos agora definir o conceito de tensor, que representa uma generalização das 1-formas e vetores. Um tensor misto  $F$ ,  $r$ -covariante e  $s$ -contravariante, é uma aplicação multilinear da forma:

$$F: \overbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}^s \otimes \overbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

onde  $F$ , na base de coordenadas é escrito como:

$$F = \frac{1}{s!r!} F^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_r} dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}$$

Uma aplicação é multilinear quando é linear em cada uma de suas variáveis. Um tensor é dito antissimétrico nos índices  $\gamma_k$  e  $\gamma_e$  do mesmo tipo se, no caso covariante por exemplo:

$$F_{\gamma_1 \dots \gamma_k \dots \gamma_e \dots \gamma_r} = -F_{\gamma_1 \dots \gamma_e \dots \gamma_k \dots \gamma_r}$$

Um tensor totalmente covariante ou totalmente contravariante é dito totalmente antissimétrico se ele é antissimétrico em relação a quaisquer dois índices. Quando não há mudança de sinal sob troca de índices, o tensor é dito simétrico. Os tensores antissimétricos totalmente covariantes, assim como os contravariantes, de uma determinada ordem  $r$  num ponto  $p$ , formam um espaço vetorial denotado por  $\Lambda^r(T_p)$ .

### III. FORMAS DIFERENCIAIS

Introduzimos na seção anterior o conceito de 1-forma. Vamos definir agora uma  $p$ -forma e apresentar a álgebra e a estrutura de diferenciação para esses objetos. Uma  $p$ -forma diferencial exterior é um tensor covariante totalmente antissimétrico. A álgebra das formas, além da soma e multiplicação por escalar, é baseada no produto exterior. Seja  $\theta$  uma  $r$ -forma e  $\omega$  uma  $s$ -forma, o produto exterior em um ponto  $p \in M$  é definido<sup>[25]</sup> como sendo uma aplicação:

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^r(T_p) \otimes \Lambda^s(T_p) &\rightarrow \Lambda^{r+s}(T_p) \\ (\theta, \omega) &\rightarrow \theta \wedge \omega \end{aligned}$$

tal que

$$\theta \wedge \omega(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (\text{signal}\pi) \pi \left[ \theta(v_1, \dots, v_p) \omega(v_{p_1}, \dots, v_{p+q}) \right]$$

onde  $v_i \in T_p$  e  $\pi$  é uma permutação de  $(1, 2, \dots, p+q)$ . Esse produto é associativo e bilinear, porém nem sempre comutativo, pois vale:

$$\theta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \theta$$

Na base de coordenadas, podemos ter uma p-forma como:

$$\theta = \frac{1}{p!} \theta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

No caso de 1-formas temos que:

$$\begin{aligned} \theta \wedge \omega &= \theta \otimes \omega - \omega \otimes \theta \\ &= \frac{1}{2} \theta_{i_j} \omega_j dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

A estrutura diferencial das r-formas está baseada no conceito de derivada exterior que é definido<sup>[25]</sup> pela aplicação:

$$\begin{aligned} d : \Lambda^r(T_p) &\rightarrow \Lambda^{r+1}(T_p) \\ \theta &\rightarrow d\theta \end{aligned}$$

satisfazendo:

- i)  $d(\theta + a\omega) = d\theta + ad\omega$
- ii)  $d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega$
- iii)  $d^2 = 0$
- iv) A derivada exterior de uma 0-forma é a diferencial comum.

Onde  $\theta$  é uma r-forma,  $\omega$  uma s-forma e  $a \in \mathbb{R}$ . Em base coordenada, podemos escrever a diferencial de uma r-forma  $\theta$  por:

$$d\theta = \frac{1}{p!} \frac{\partial \theta_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (B.3)$$

#### IV. DERIVADA DE LIE, DERIVADA COVARIANTE E CAMPOS DE KILLING

A derivada de Lie de um campo tensorial T r-covariante e s-contravariante em relação a um campo vetorial X é um novo cam-

po tensorial de mesma ordem de T dado, na base de coordenadas , por:

$$\begin{aligned} \left( \begin{matrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{X} \end{matrix} T \right)_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} &= T_{\beta_1 \dots \beta_r, \lambda}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} X^\lambda - X_{, \lambda}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_s} - \\ &- \dots - X_{, \lambda}^{\alpha_s} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \lambda} + X_{, \beta_1}^\lambda T_{\lambda \beta_2 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} + \dots + \\ &+ X_{, \beta_r}^\lambda T_{\beta_1 \dots \beta_{r-1}, \lambda}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \end{aligned} \quad (B.4)$$

Em particular se Y é um campo vetorial, então:

$$\left( \begin{matrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{X} \end{matrix} Y \right)^\alpha = Y^\alpha_{, \lambda} X^\lambda - X^\alpha_{, \lambda} Y^\lambda$$

Esta expressão coincide com a componente  $\alpha$  do comutador do campo vetorial X com Y na base de coordenadas. O comutador é definido por:

$$[X, Y] = XY - YX$$

onde  $(XY)f = X(Y(f))$  onde f é uma função. A derivada de Lie satisfaz à propriedade

$$\mathcal{E}_{X+aY} T = \mathcal{E}_X T + a \mathcal{E}_Y T \quad (B.5)$$

onde X, Y são campos vetoriais e  $a \in \mathbb{R}$ .

Uma variedade riemanniana é uma variedade que possui uma métrica simétrica. A métrica é um tensor simétrico de ordem 2. Na base de coordenadas escrevemos:

$$g = \frac{1}{2} g_{(\alpha\beta)} dx^\alpha \otimes dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

onde

$$dx^\alpha dx^\beta = \frac{1}{2} (dx^\alpha \otimes dx^\beta + dx^\beta \otimes dx^\alpha)$$

A partir da métrica podemos definir os símbolos de Christoffel

$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$  dados por

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\mu} + g_{\lambda\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\lambda})$$

Observe que  $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ . Quando isso ocorre dizemos que  $M$  é uma variedade sem torção.

A derivada covariante, denotada por ponto e vírgula, de um tensor  $r$ -covariante e  $s$ -contravariante é dada, na base de coordenadas, por:

$$\begin{aligned} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} ; \lambda &= T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} ; \lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\mu \alpha_2 \dots \alpha_s} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha_s} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \mu} - \\ &- \Gamma_{\beta_1 \lambda}^{\mu} T_{\mu \beta_2 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} - \dots - \Gamma_{\beta_r \lambda}^{\mu} T_{\beta_1 \dots \beta_{r-1} \mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \end{aligned}$$

Em particular, podemos ver que  $g_{\alpha\beta;\lambda} = 0$

A derivada de Lie da métrica, em relação a um campo vetorial  $K$ , é dada por:

$$\left( \frac{\mathcal{L}_K g}{K} \right)_{\alpha\beta} = K_{\alpha;\beta} + K_{\beta;\alpha}$$

Uma isometria é uma transformação gerada por  $K$ , tal que:

$$\frac{\mathcal{L}_K g}{K} = 0$$

Ou, em uma base coordenada

$$K_{\alpha;\beta} + K_{\beta;\alpha} = 0 \tag{B.6}$$

A equação acima é chamada de equação de Killing, e o campo vetorial  $K$  é chamado de campo de Killing. As isometrias formam um grupo, chamado grupo de isometrias. Uma variedade é dita invariante sob um grupo de isometrias de dimensão  $p$ , se ela tem  $p$  campos de Killing linearmente independentes. O grupo de isometrias de dimensão  $p$  é dito simplesmente transitivo sobre  $M$  de dimensão  $n$  se  $p = n$  e os vetores de Killing são linearmente independentes

em cada ponto de  $M$ . O grupo é dito multiplamente transitivo se  $p > n$ . Devido à propriedade (B.5), podemos ver que os campos de Killing formam um espaço vetorial. Pode-se mostrar<sup>[5]</sup> também que se  $X$  e  $Y$  forem dois campos de Killing, então  $[X, Y]$  também será um campo de Killing. Isso quer dizer que os campos de Killing, soluções da equação (B.6), formam uma álgebra com o produto dado pelo comutador. Se  $K_i, i=1, \dots, r$  é uma base para o espaço vetorial dos campos de Killing, então

$$[K_i, K_j] = C_{ij}^m K_m \quad (B.7)$$

onde  $C_{ij}^m$  são constantes reais sobre a variedade, denominadas constantes de estrutura da álgebra.

#### V. TETRADAS E CÁLCULO COM FORMAS<sup>[27]</sup>

Suponha que  $M$  tenha dimensão 4. Como  $T_p$  também tem dimensão 4 para todo  $p \in M$ , podemos escolher 4 campos vetoriais  $\{e_A, A=0, 1, 2, 3\}$  linearmente independentes em cada ponto  $p \in M$ . Além disso, podemos supor que os campos são ortonormais, isto é:

$$\begin{aligned} g(e_0, e_0) &= 1 \\ g(e_i, e_i) &= -1 \quad i = 1, 2, 3 \\ g(e_A, e_B) &= 0 \quad \text{se } A \neq B \end{aligned}$$

Embora estejamos chamando o espaço-tempo de variedade riemanniana, a rigor deveríamos chamar de variedade pseudo-riemanniana, pois se  $v$  é um vetor, então podem ocorrer os seguintes casos:

- i)  $g(v, v) > 0$
- ii)  $g(v, v) = 0$
- iii)  $g(v, v) < 0$

O vetor  $v$  é dito tipo-tempo, tipo-nulo ou tipo-espaço, dependendo se ocorre i), ii) ou iii). No caso i) o vetor  $v$  está dentro do cone de luz local, no caso ii) ele está sobre o cone e no caso iii) ele está fora do cone. Uma variedade em que só ocorre o caso i) é dita variedade riemanniana própria.

Os campos  $e_A$  são chamados de tetradas. Na base de coordenadas escrevemos

$$e_A = e_A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Sejam  $\theta^A$  as 1-formas duais a  $e_A$ . Então:

$$\langle \theta^A, e_B \rangle = \delta^A_B$$

Na base de coordenadas,  $\theta^A$  pode ser expresso por:

$$\theta^A = e^A_\mu dx^\mu \tag{B.8}$$

onde  $e^A_\mu e^\mu_B = \delta^A_B$ . O elemento de linha

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

pode ser escrito como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$$

onde

$$g_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\beta_B = \eta_{AB}$$

A derivada exterior dos  $\theta^A$  dados pela expressão (B.8), é :

$$d\theta^A = e^A_{\mu,\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\mu = - e^A_{\mu;\lambda} e^\mu_B e^\lambda_C \theta^B \wedge \theta^C \tag{B.9}$$

Define-se os coeficientes de rotação de Ricci  $\gamma^A_{BC}$  por:

$$\gamma^A_{BC} = - e^A_{\mu;\lambda} e^\mu_B e^\lambda_C \tag{B.10}$$

Pode-se mostrar, devido ao fato de  $\eta_{AB}$  ser constante, que:

$$\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$$

Define-se as 1-formas de rotação por:

$$\omega_{AB} = \gamma_{ABC} \theta^C \quad (B.11)$$

Utilizando a equação acima, podemos escrever a expressão (B.9) como:

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B \quad (B.12)$$

que é a primeira equação de estrutura de Cartan. Pode-se mostrar, como decorrência do fato de a derivada covariante de  $g_{\alpha\beta}$  ser nula, que:

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA}$$

Define-se os coeficientes  $C^A_{BC}$  como sendo:

$$C^A_{BC} = \gamma^A_{BC} - \gamma^A_{CB} \quad (B.13)$$

A relação acima pode ser invertida, dando:

$$\gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) \quad (B.14)$$

A expressão (B.12) pode ser escrita então, como:

$$d\theta^A = \frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (B.15)$$

Da derivação exterior das 1-formas de rotação  $\omega_{AB}$  dadas pela expressão (B.11), obtemos:

$$\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (B.16)$$

que é a segunda equação de estrutura de Cartan, onde  $R^A_{BCD}$  são as componentes, na base de tetradas, do tensor de Riemann definido por:

$$V_{\alpha;\beta;\lambda} - V_{\alpha;\lambda;\beta} = R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda} V_{\mu}$$

onde  $V$  é um campo vetorial arbitrário.

Para se obter as componentes do tensor de Riemann, usando o cálculo com formas, procedemos da seguinte maneira: Escolhemos uma base  $\theta^A$  de forma que o elemento de linha  $ds^2$  seja expresso por  $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$ . Derivamos exteriormente as 1-formas  $\theta^A$ . A expressão (B.15) nos permite obter os coeficientes  $C^A_{BC}$  por leitura direta da expressão obtida para  $d\theta^A$ . Pela expressão (B.14) podemos então encontrar os coeficientes de rotação de Ricci  $\gamma^A_{BC}$ . Usando a expressão (B.11) obtemos as 1-formas de rotação  $\omega_{AB}$ , cuja derivação exterior nos permitirá encontrar as componentes do tensor de Riemann via equação (B.16).

## VI. EQUAÇÕES DE MAXWELL NA BASE DE TETRADAS

O tensor eletromagnético é expresso, na base de coordenadas, por:

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$$

Na base de tetradas, ele é dado por:

$$F = \frac{1}{2} F_{AB} \theta^A \wedge \theta^B$$

onde

$$F_{AB} = e^{\mu}_A e^{\nu}_B F_{\mu\nu} \tag{B.17}$$

As equações de Maxwell, na base de coordenadas, são:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = J^{\alpha} \tag{B.18}$$

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0 \tag{B.19}$$

Na base de tetradas, elas podem ser obtidas da seguinte forma :  
Multiplicando a equação (B.18) por  $e^A_\alpha$  e usando a equação (B.17),  
temos que:

$$(F^{CB} e^\alpha_C e^\beta_B) ;_\beta e^A_\alpha = J^\alpha e^C_\alpha$$

Desenvolvendo a equação acima, e usando a expressão (B.10), obtemos:

$$F^{AB}{}_{,\rho} e^\rho_B + \gamma^A_{CB} F^{CB} + \gamma^C_{BC} F^{AB} = J^A$$

onde  $J^A$  é a corrente elétrica na base de tetradas. Um procedimento  
análogo pode ser feito com a equação (B.19), obtendo-se:

$$F_{[AB, \rho} e^\rho_C] - F^D_{D[B \gamma^D AC]} + F^D_{D[A \gamma^D BC]} = 0 \quad .$$

## APÊNDICE C

### I. A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI-BEHR

Seja  $M$  uma variedade tridimensional que admite três campos de Killing  $\{K_i, i=1,2,3\}$  linearmente independentes em cada ponto de  $M$ . Isso é equivalente a dizer que a matriz  $\|K_i^a\|$ , onde  $a$  é índice de coordenadas e  $i$  índice de numeração da base, tem determinante não nulo. O grupo de isometrias atua então, simplesmente transitivamente sobre  $M$ . Pode-se mostrar que o grupo de isometrias é um grupo de Lie<sup>[24]</sup>, isto é, seus elementos são pontos de uma variedade. Todo grupo de Lie tem uma álgebra de Lie<sup>[24]</sup> associada. A álgebra de Lie do grupo de isometrias é dada pela álgebra dos campos de Killing, que uma vez fixada uma base para o espaço vetorial gerado por estes campos, a álgebra fica caracterizada de maneira única pelas constantes de estrutura  $C_{ij}^m$ , que são dadas por:

$$[K_i, K_j] = C_{ij}^m K_m$$

A partir das escolhas independentes dos  $C_{ij}^m$ , obtém-se todos os tipos de álgebras dos campos de Killing.

As constantes de estrutura satisfazem às seguintes propriedades:

$$C_{ij}^m = -C_{ji}^m \tag{C.1}$$

$$C_{i[j}^m C_{pq]}^i = 0 \quad (\text{identidade de Jacobi}) \tag{C.2}$$

que são satisfeitas para toda álgebra de Lie. Devido à expressão (C.1), pode-se definir uma matriz  $N^{pq}$ , que tem todas as informações de  $C_{ij}^q$ , da seguinte forma:

$$N^{pq} = \epsilon^{pij} C_{ij}^q \quad (C.3)$$

Podemos decompor  $N^{pq}$  nas suas partes simétrica e antissimétrica, de forma que:

$$N^{pq} = N^{(pq)} + N^{[pq]} \quad (C.4)$$

Uma vez que  $N^{[pq]}$  tem três componentes independentes, segue que ela pode ser escrita como:

$$a_j = \epsilon_{j pq} N^{[pq]}$$

Invertendo a expressão acima, obtemos:

$$N^{[pq]} = \epsilon^{pqj} a_j \quad (C.5)$$

A expressão (C.4) é dada então por:

$$N^{pq} = N^{(pq)} + \epsilon^{pqj} a_j \quad (C.6)$$

A expressão (C.3) pode ser invertida, dando que:

$$C_{ij}^q = \epsilon_{ijp} N^{pq}$$

Substituindo a expressão (C.6) na equação acima, obtemos:

$$C_{ij}^q = \epsilon_{ijp} N^{(pq)} + \frac{1}{2} (\delta_i^q a_j - \delta_j^q a_i) \quad (C.7)$$

Usando as expressões (C.2) e (C.3), obtemos que:

$$C_{pq}^m N^{[pq]} = 0$$

Substituindo as expressões (C.5) e (C.3) na equação acima, obtemos:

$$N^{mp} a_p = 0 \quad (C.8)$$

Finalmente, usando a expressão (C.6), obtemos:

$$N^{(mp)} a_p = 0$$

Uma vez que o tensor  $N^{(mp)}$  é simétrico, podemos, por uma mudança de base, escolher os campos de Killing como autovetores de  $N^{(mp)}$ , de forma que na nova base:

$$N^{(pq)} = \text{diag} ( n_1, n_2, n_3 ) \quad (C.9)$$

Se os  $\{n_i, i=1,2,3\}$  forem diferentes entre si, os vetores de Killing em cada ponto da variedade serão automaticamente ortogonais, e se os  $\{n_i\}$  não forem diferentes, podemos escolher os vetores de Killing ortogonais. Como pela expressão (C.9) segue que  $a_p$  também é um autovetor de  $N^{(pq)}$  podemos escolhê-lo, sem perda de generalidade, da forma:

$$a_p = (a, 0, 0) \quad (C.10)$$

Assim a expressão (C.8) se reduz à condição:

$$n_1 a = 0 \quad (C.11)$$

Usando as expressões (C.9), (C.10) e (C.11), a equação (C.7) nos dá que:

$$[K_1, K_2] = -\frac{a}{2} K_2 - n_3 K_3$$

$$[K_3, K_1] = -n_2 K_2 + \frac{a}{2} K_3$$

$$[K_2, K_3] = -n_1 K_1$$

As escolhas independentes possíveis para  $\{n_i\}$  e  $\underline{a}$ , são dadas na Tabela I [28].

As constantes  $\{n_i\}$  e  $\underline{a}$  podem ser normalizadas a  $\pm 1$  exceto [28] nos casos  $an_2 n_3 \neq 0$ . A definição de  $h$  é

TABELA I - Classificação dos grupos de isometrias tridimensionais.

CLASSE	TIPO	a	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	TIPO DE SIMETRIA
A	I	0	0	0	0	I
	II	0	+	0	0	II
	VII <sub>0</sub>	0	+	+	0	VII
	VI <sub>0</sub>	0	+	-	0	VI
	IX	0	+	+	+	IX
	VIII	0	+	+	-	VIII
B	V	+	0	0	0	V
	IV	+	0	0	+	IV
	VII <sub>h</sub>	+	0	+	+	VII
	VI <sub>h</sub>	+	0	+	-	VI

(III se h=-1)

$$h = \frac{a^2}{4n_2 n_3}$$

Originalmente Bianchi<sup>[1]</sup> classificou nove tipos de grupos e Behr<sup>[3]</sup> complementou mostrando que existem dez tipos de grupos de isometrias tridimensionais.

## II. CARACTERIZAÇÃO DO ELEMENTO DE LINHA DOS MODELOS ESTUDADOS

O elemento de linha (1.1), dependendo dos valores dos parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , representa um modelo do tipo Bianchi I, II, VIII, IX ou Kantowski-Sachs<sup>[29,30]</sup>. Cada modelo de Bianchi é caracterizado por um elemento de linha que pode ser obtido a partir das formas  $\omega$ , invariantes sob transformações geradas pelos campos de Killing, isto é:

$$\xi_k \omega = 0$$

As bases invariantes para todos os tipos de Bianchi estão tabeladas, por exemplo, na referência [31]. Os modelos tipo Kantowski-Sachs, apesar de serem espacialmente homogêneos no sentido de que o tensor de Riemann é constante na tri-superfície  $t = \text{constante}$ , não admite um grupo de isometrias tridimensional simplesmente transitivo, mas sim um grupo quadridimensional múltiplamente transitivo, atuando na superfície  $t = \text{constante}$ . A caracterização deste modelo pode ser encontrada na referência [32].

Vamos agora colocar o elemento de linha (1.1) nas formas padrões dos tipos de Bianchi. Os casos possíveis são:

i) Bianchi I ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ )

Tomaremos soluções particulares para as equações diferenciais (1.2) e (1.3), para exemplificar o procedimento. Quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , podemos tomar

$$m^2 = m_0 = \text{constante}$$

$$k = \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

O elemento de linha (1.1) se escreve então, como:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) (d\chi + 4m_0 d\phi)^2 - B^2(t) \left( \frac{d\theta^2}{\text{sen}^2\theta} + d\phi^2 \right)$$

Com a transformação de coordenadas

$$x = \chi + 4m_0 \phi$$

$$y = \ln \text{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$z = \phi$$

Obtemos

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) dx^2 - B^2(t) (dy^2 + dz^2)$$

que é a forma padrão [31] para Bianchi I com duas direções de anisotropia.

sotropia.

ii) Bianchi II ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ )

As soluções para as equações (1.2) e (1.3) podem ser:

$$m^2 = \frac{\lambda_1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$k = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

Com a transformação de coordenadas dada por:

$$x = \chi/2\lambda_1$$

$$y = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$z = \phi$$

Obtemos, para o elemento de linha (1.1), a expressão:

$$ds^2 = dt^2 - \bar{A}^2(t) (dx + ydz)^2 - B^2(t) (dy^2 + dz^2)$$

onde  $\bar{A} = 2\lambda_1 A$ .

iii) Bianchi VIII ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 1$ )

As soluções para as equações (1.2) e (1.3) podem ser:

$$m^2 = \frac{\lambda_1}{2} (\cos \theta + \cos^{-1} \theta)$$

$$k = \operatorname{tg} \theta$$

Com a transformação de coordenadas

$$x = \frac{\chi}{2\lambda_1}$$

$$y = \ln \cos^{-1} \theta$$

$$z = 2\phi$$

Obtemos, para o elemento de linha (1.1), a expressão:

$$ds^2 = dt^2 - \bar{A}^2(t) (dx + \cosh y dz)^2 - B^2(t) (dy^2 + \operatorname{senh}^2 y dz^2)$$

onde  $\bar{A} = 2\lambda_1 A$ .

iv) Bianchi IX ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = -1$ )

As soluções para as equações (1.2) e (1.3) podem ser:

$$m^2 = -\frac{\lambda_1}{2} \cos \theta$$

$$k = 1$$

Com a transformação de coordenadas

$$x = -\frac{\chi}{2\lambda_1}$$

$$y = \theta$$

$$z = \phi$$

Obtemos, para o elemento de linha (1.1), a expressão:

$$ds^2 = dt^2 - \bar{A}^2(t) (dx + \cos y dz)^2 - B^2(t) (dy^2 + \sin^2 y dz^2)$$

onde  $\bar{A} = -2\lambda_1 A$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - Bianchi, L. - Sugli Spazi a tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti, Mem. Soc. It. della Sc. (dei XL) 3, 267 (1897).
- [2] - Taub, A.H. - Empty Space-Time Admitting a Three Parameter Group of Motions, Ann. Math. 53, 472 (1951).
- [3] - Estabrook, F.B.; Wahlquist, H.D.; Behr, C.G. - Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models, J. Math. Phys. 9, 497 (1968).
- [4] - Harvey, A. - Curvatures of Hypersurfaces of Transitivity of Bianchi Models Universes, J. Math. Phys., 21, 870(1980).
- [5] - Assad, M.J.D., Modelos Cosmológicos Anistrópicos Bianchi VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético, Tese de Mestrado - CBPF (1980).
- [6] - Ferraro, V.C.A.; Plumpton, C., An Introduction to Magnets Fluid Mechanics, Oxford University Press (1961).
- [7] - Bekenstein, J.D.; Eliezer, O. - New Conservation Laws in General-Relativistic Magnetohydrodynamics, Phys. Rev. D, 18, 1809 (1978).
- [8] - Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. - Electrodinamic of Continuous Media, Addison-Wesley (1960).
- [9] - McLenaghan, P.G.; Tariq, N. - A New Solution of the Einstein-Maxwell Equations, J. Math. Phys. 16, 11(1975).
- [10] - Tupper, B.O.J. - A Class of Algebraically General Solutions of the Einstein-Maxwell Equations for Non-null Electromagnetic Fields, II, GRG 7, 479 (1976).
- [11] - Braun, M. - Differential Equations and Their Applications , 2nd Edition, Springer-Verlag (1978).
- [12] - Dunn, K.A.; Tupper, B.O.J. - Type I, II and III Spatially Homogeneous Cosmologies with Electromagnetic Field, Astro - phys. J. 235, 307 (1980).

- [13] - Novello, M. - *Cosmologia Relativística, II. Escola de Cosmologia e Gravitação*, vol. I, Novello, M. (editor) CBPF, (1980).
- [14] - Jacobs, K.C. - *Cosmologies of Bianchi Type I with a Uniform Magnetic Field*, *Astrophys. J.* 155, 379 (1969).
- [15] - Gradstein, J.S.; Ryzhik, I.M. - *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1980).
- [16] - Ellis, G.F.R. - *Relativistic Cosmology*, Cargèse, *Lectures in Physics*, vol. 6, Gordon and Breach, (1973).
- [17] - Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. - *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press (1973).
- [18] - Weinberg, S.; *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [19] - Einstein, A.; *Principles of Relativity*, Princeton University Press (1945).
- [20] - Misner, C.W.; Thorne, K.S.; Wheeler, J.A. - *Gravitation*, W.H. Freeman and Company (1973).
- [21] - Abramowitz, M.; Stegun, I.A. - *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (1965).
- [22] - Kramer, D.; Stephani, H.; MacCallum, M.; Herlt, E. - *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1980).
- [23] - Bertotti, B. - *Uniform Electromagnetic Field in the Theory of General Relativity*, *Phys. Rev.*, 116, 1331 (1959).
- [24] - Schutz, B.F. - *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Univ. Press (1980).
- [25] - Choquet-Bruhat, Y.; De Witt-Morette, C.; Dillard-Bleick, M. - *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publishing Company (1977).
- [26] - Flanders, H. - *Differential Forms with Application for the Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963).
- [27] - Soares, I.D. - *O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos*, II Escola de Cosmologia e Gravitação, vol. 3, Novello, M. (editor), CBPF (1980).

- [28] - Ellis, G.F.R.; MacCallum, M.A.H. - A Class of Homogeneous Cosmological Models, Commun. Math. Phys. 12, 108 (1969).
- [29] - Soares, I.D.; Assad, M.J.D. - Anisotropic Bianchi VIII/IX Cosmological Models with Matter and Electromagnetic Fields, Phys. Lett. A 66, 359 (1978).
- [30] - Assad, M.J.D.; Soares, I.D. - Anisotropic Bianchi Types VIII and IX Locally Rotationally Symmetric Cosmologies, Phys. Rev. D, 28, 1858 (1983).
- [31] - Ryan, M.P.; Shepley, L.C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princeton Series in Physics (1975).
- [32] - Kantowski, R.; Sachs, R.K. - Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models, J. Math. Phys., 7, 443 (1966).
- [33] - Tupper, B.O.J. - Conductivity in Type VI<sub>0</sub> Cosmologies with Electromagnetic Field, Astrophys. J. 216, 192 (1977).
- [34] - Fennelly, A.J., Some Effects of Magnetic Fields in Spatially Homogeneous Universes with Conductivity, Phys. Rev. D 21, 2107 (1980).
- [35] - Jackson, J.D. - Classical Electrodynamics, John Willey & Sons (1975).

**“MODELOS COSMOLÓGICOS TIPO BIANCHI I,II,VIII e IX E  
KANTOWSKI-SACHS COM FLUÍDO PERFEITO E CAMPOS  
ELETROMAGNÉTICOS COM CORRENTE DE CONDUTIVIDADE”**

**RENATO PORTUGAL**

Tese de mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Ívano Damião Soares /CBPF

Murari Moohan son/UFRJ

Carlos Augusto Pinto Galvão/CBPF

Jaime Tiomno/CBPF

Rio de Janeiro, 27 de abril de 1984