JOEL BATISTA DA FONSECA NETO

SOBRE A GEOMETRIZAÇÃO DO ELETROMAGNETISMO ATRAVÉS DA TORÇÃO

TESE

de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1984 -

À minha filha

Luciana

AGRADECIMENTOS

Todo empreendimento humano resulta de um trabalho coletivo. A tarefa agora concluída não é exceção. Foram muitos os que, de uma forma ou de outra, contribuiram para que a mesma se tornasse possível.

A Victor de Oliveira Rivelles pela orientação, indispensável no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

A Carlos Augusto Pinto Galvão pela orientação, e pelos apoio e estímulo que foram indispensáveis na fase inicial deste trabalho.

A Mário Novello pela orientação durante a realização dos cursos.

A minha esposa, meus pais e irmãos, pela ajuda nas fases mais árduas.

A Luiz Jorge Negri e Jörg Erich Werth pelas discussões e sugestões.

Aos colegas do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, pelas condições oferecidas para a realização desta pesquisa. Particularmente, a Mário Assad, Ioav Waga e Natanael Rohr da Silva pelo empréstimo de livros e de trabalhos.

Aos amigos do CBPF. Expecialmente a Abílio Valério Tozini pelo incentivo em momentos difíceis.

A Maristela Porto pelo trabalho de datilografia.

Ao Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - pela concessão de bolsa de estudo nos anos de 1980 e 1981.

RESUMO

Investigamos a possibilidade de geometrização do eletromagnetismo utilizando uma geometria de Cartan quadrimensional.

Construímos uma densidade lagrangiana, que apresenta a invariância dual, para a eletrodinâmica dos dyons formulada em termos de dois potenciais. Descrevemos esta teoria através da associação dos dois potenciais com o traço e com o pseudo-traço da torção, e do campo com o divergente covariante da torção.

Depois, procuramos obter o acoplamento mínimo do campo gravitacional, de partículas, de campos escalares e de campos espinoriais com a teoria geométrica dos dyons através do acoplamento mínimo destes campos com a geometria de Cartan. Porém, os resultados da teoria de Einstein-Maxwell não são obtidos.

Também tentamos conseguir estes resultados através da imposição da invariância conforme, a fim de interpretar as transformações de gauge do 4-vetor potencial como decorrentes das transformações conformes das tetradas. Mas verificamos que a obtenção do acoplamento mínimo é incompatível com a interpretação geométrica das transformações de gauge.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A partir do surgimento da Teoria da Relatividade Geral, as interações fundamentais da natureza ficaram descritas por duas maneiras distintas. A gravitação passou a ser considerada como uma manifestação da estrutura geométrica do espaço-tempo, enquanto as outras interações continuaram a ser tratadas como estruturas exteriores ao espaço-tempo. Mas a geometria do espaço-tempo não ficou completamente determinada pela Teoria da Relatividade Geral, exceto para o vazio, pois a determinação do tensor momentum-energia das fontes do campo gravitacional não pode ser realizada sem o auxílio de outras teorias.

Insatisfeito com tal situação, Einstein considerou a Teoria da Relatividade Geral como sendo imcompleta e provisória, afirmando que ela apenas era uma teoria do campo gravitacional onde este campo estaria artificialmente isolado de um campo total, que unificaria todas as interações através de uma teoria que ele ainda desconhecia (6).

A fim de solucionar tal problema ele procurou obter uma teoria que descrevesse geometricamente a gravitação e o eletromagnetismo, a chamada teoria do campo unificado. Entretanto, nem ele nem muitos dos seus contemporâneos, que tentaram também atingir este objetivo, conseguiram sucesso (28).

Com o surgimento da mecânica quântica este problema saiu do centro das atenções e a maioria das pesquisas passou a ser realizada no estudo dos fenômenos atômicos, nucleares, e de partículas elementares. Estas pesquisas levaram à descoberta de duas novas interações fundamentais que, contrariamente ao que ocorre com a gravitação e o eletromagnetismo, são de curto alcance: as interações fraca e forte.

Assim, atualmente acredita-se que existem quatro interações fundamentais: a interação forte, que mantém o núcleo atômico unido; a interação eletromagnética, responsável pela formação de átomos e moléculas; a interação fraca, responsável pelo decaimento β do neutron e pela existência de diversos elementos radioativos; e a interação gravitacional, que é o elemento determinante da estrutura do universo em larga escala.

Estas interações podem ser formuladas através das físicas quântica e clássica. As interações fraca e forte são descritas apenas em termos da física quântica. A interação gravitacional é descrita apenas em termos da física clássica, pois até o momento não se obteve uma teoria quântica da gravitação satisfatória. O eletromagnetismo admite tanto uma formulação quântica quanto uma clássica.

A descrição das interações na física quântica é realizada através da teoria quântica de campos. Foi neste contexto que, recentemente, notáveis progressos foram obtidos na formulação de uma teoria unificada do campo. As interações fraca e eletromagnética foram unificadas através de uma teoria de gauge, no modelo de Glashow-Weinberg-Salam, com grande sucesso(*).

Este fato reviveu as tentativas de obter-se uma teoria unificada, agora em um contexto diferente daquele imaginado por Einstein.

(*) Uma revisão deste assunto pode ser encontrada na referência (38).

Na concepção de Einstein a teoria unificada descreveria as interações através da associação das mesmas com elementos da estrutura geométrica do espaço-tempo. Neste caso, a unificação seria do tipo forte quando interações diferentes fossem descritas através de um único elemento da estrutura geométrica, e seria do tipo fraco quando isto não ocorresse (28).

No modelo de Glashow-Weinberg-Salam as interações fraca e eletromagnética têm a mesma intensidade e as constantes de acoplamento destas interações têm igual ordem de grandeza para altas energias, diferindo entre si apenas para baixas energias. Este é o sentido da unificação eletrofraca. Mas, considera-se que, devido a existência de duas constantes de acoplamento independentes, estas interações não são realmente unificadas.

A descrição das interações fortes através da Cromodinâmica Quântica e a teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg - Salam foram o ponto de partida para a formulação de teorias que procuram unificar as interações forte, fraca e eletromagnética , chamadas de Teorias de Grande Unificação. Nestas teorias, para altas energias, todas estas interações têm a mesma intensidade e só existe uma constante de acoplamento.

Para baixas energias esta constante de acoplamento dá origem às várias constantes de acoplamento das diversas interações. Um fenômeno semelhante ocorre com as intensidades das interações.

Entretanto, as interações fundamentais da natureza não são completamente unificadas através das teorias de Grande Unificação, pois estas teorias não levam em consideração a gravitação. Este problema pretende ser superado pelas teorias de super gravidade que procuram realizar uma unificação de todas as interações fundamentais da natureza.

Embora as Teorias de Grande Unificação e as teorias de supergravidade possam ser descritas em termos geométricos, elas não representam uma unificação no sentido proposto por Einstein. Os campo de gauge são associados à conexão de um fibrado principal, que é uma variedade diferenciável com 4+n dimensões, onde n é o número de dimensões do espaço das simetrias internas (51). A supergravidade é descrita em um superespaço que além das coordenadas do espaço-tempo, apresenta também coordenadas espinoriais (47).

Portanto, permanece o problema da dicotomia existente na descrição das interações fundamentais: a gravitação é associada à estrutura do espaço-tempo e as outras interações são tratadas como estruturas exteriores ao espaço-tempo, embora passíveis de interpretação geométrica. Associadas a este problema existem as questões da geometrização das outras interações fundamentais (condição necessária para a formulação de uma teoria unificada de acordo com a concepção de Einstein), e da formulação de uma teoria quântica da gravitação (necessária para a unificação da gravitação com as outras interações de acordo com as concepções atuais (48).

Talvez por este motivo, as tentativas de obter-se uma teoria unificada clássica da gravitação e do eletromagnetismo nunca tenham sido completamente abandonadas, apesar dos insucessos. Em particular, recentemente, surgiram novas possibilidades com as tentativas de associação entre o eletromagnetismo e a torção - a parte anti-simétrica da conexão - em uma geometria de Cartan com quatro dimensões (31,32,33,18,27).

O conceito de torção foi utilizado pela primeira vez por E. Cartan, procurando obter uma teoria geométrica de algo semelhante ao spin (49). E, atualmente, a geometria de Cartan é utilizada na chamada Teoria de Einstein-Cartan, onde o spin é introduzido na geometria através da torção, no contexto da Teoria da Relatividade Geral (50).

Mas a utilização de uma geometria de Cartan com dimensão quatro na formulação de uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo não é recente, pois a primeira tentativa foi realizada por Einstein em 1928 (28).

Podemos classificar estas teorias com relação à **ausência** ou não de decomposição da torção, e com relação ao fato do tipo da decomposição realizada ser arbitrária ou não. As primeiras teorias propostas não realizaram a decomposição da torção. Elas foram abandonadas por não serem compatíveis com os resultados experimentais (28). As teorias recentes utilizam a decomposição da torção com a finalidade de associar o campo ou o 4-vetor potencial com alguma das partes em que a torção é decomposta. Contrariamente ao que ocorre com a associação do 4-vetor potencial, a associação do campo eletromagnético com a torção só é possível através de uma decomposição arbitrária da mesma. Além disso, quando o potencial é associado à torção o campo é definido com o auxílio de hipóteses ad hoc, e vice-versa. Em geral, estas teorias não conduzem aos resultados da teoria de Einstein-Maxwell, entre outras dificuldades.

Em nosso trabalho procuramos dar continuidade a estas tentativas, especialmente a realizada por Novello (18,27), que procura descrever geometricamente a eletrodinâmica clássica dos dyons (partículas que apresentam tanto carga elétrica quanto carga magnética). Investigamos a possibilidade de associação entre o eletromagnetismo e a torção, de um modo compatível com a teoria de Einstein-Maxwell e com o acoplamento mínimo de partículas, campos escalares e campos espinoriais com o campo eletromagnético, procurando não recorrer a hipóteses ad hoc que permitam a obtenção deste resultados. Acreditamos que, através deste procedimento, poderemos contribuir para o esclarecimento das razões que levaram as teorias unificadas que utilizam uma geometria com dimensão quatro ao insucesso.

Apresentamos uma teoria geométrica dos dyons onde os potenciais da eletrodinâmica dos dyons são associados ao traço e ao pseudo-traço da torção em uma geometria onde a parte sem traço e sem pseudo-traço da torção é identicamente nula, analogamente ao que ocorre na teoria proposta por Novello (18,27) onde esta geometria é chamada de Geometria de Cartan Restrita. A fim de evitar a adoção de hipóteses ad hoc, procuramos encontrar um tensor anti-simétrico de segunda ordem, linear nas derivadas primeiras dos potenciais, e formado a partir da curvatura ou da torção, que possa ser associado ao campo eletromagnético. Verificamos que o tensor procurado é o divergente covariante da torção.

Como a eletrodinâmica dos dyons é invariante sob rotações duais dos campos e das fontes, procuramos formular uma densidade de lagrangiana para o campo que também apresentasse esta invariância, pois é através de uma escolha adequada do ângulo da rotação dual que a eletrodinâmica dos dyons coincide com a eletrodinâmica de Maxwell (gauge de Maxwell), quando a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons for uma constante universal. Uma das dificuldades das teorias anteriores originavase justamente do fato das densidades lagrangianas propostas não apresentarem esta invariância.

Portanto, contrariamente ao que ocorre com as outras teorias propostas, mostramos que as equações de campo da eletrodinâmica dos dyons podem ser obtidas a partir de um princípio variacional onde a ação é invariante dual, e que tanto os potenciais quanto o campo podem ser associados à torção sem o auxílio de hipóteses ad hoc.

Entretanto, o sucesso de uma teoria geométrica do eletromagnetismo também depende do seu acoplamento com outros campos e com partículas, que deve estar de acordo com os resultados experimentais. Assim, procuramos verificar se o acoplamento do campo gravitacional, de partículas, de campos escalares e de campos espinoriais com a teoria geométrica dos dyons é compatível com os resultados da teoria de Einstein-Maxwell.

Inicialmente, procuramos determinar se o acoplamento mínimo, dos campos escalares e espinoriais, com a Geometria de Cartan Restrita, coincide com os resultados desejados. Verificamos que o campo escalar não apresenta acoplamento com o campo eletromagnético e que o acoplamento obtido para o campo espinorial não satisfaz às invariâncias da eletrodinâmica dos dyons, necessárias para a obtenção da equivalência com a teoria de Maxwell. Mas é possível a formulação de uma densidade lagrangiana para o campo gravitacional que conduz às equações de Einstein-Maxwell.

Depois, procurando dar uma interpretação geométrica para as transformações de gauge do 4-vetor potencial, investigamos a possibilidade do acoplamento mínimo da gravitação, de partículas, de campos escalares e de campos espinoriais com a teo ria geométrica dos dyons poder ser obtido através da imposição da invariância conforme. Recentemente, demonstrou-se que o comprimento é conservado sob transporte paralelo quando transformações conformes das tetradas são realizadas em uma geometria de Cartan e que, neste caso, as transformações do traço da torção assemelham-se às transformações de gauge do 4-vetor potencial (34,35). Verificamos que os resultados obtidos a partir da imposição da invariância conforme, coincidem com os da teoria de Einstein-Maxwell, se o traço da torção for imaginário puro. Mas, neste caso, há uma imcompatibilidade entre a obtenção do acoplamento mínimo e a interpretação geométrica das transformações de gauge. Porém, formulamos densidades lagrangianas para o campo gravitacional e para partículas carregadas, invariantes sob transformações conformes, que conduzem aos resultados da teorias de Einstein-Maxwell.

Logo, podemos afirmar que a teoria geométrica dos dyons só é satisfatória na ausência de fontes, pois a mesma não reproduz os resultados obtidos através do acoplamento mínimo em nenhum dos casos considerados.

A fim de facilitar a comparação dos resultados que obtivemos com a eletrodinâmica clássica e a teoria da Relatividade Geral, apresentamos um resumo dos principais resultados destas teorias nos capítulos 1 e 2. Em especial, o capítulo 1 contém uma exposição da eletrodinâmica dos dyons e uma demonstração de que a mesma é quivalente à teoria de Maxwell, quando a razão entre as cargas magnética e elétrica dos dyons for uma constante universal. É neste capítulo que formulamos uma densidade lagrangiana, para a eletrodinâmica dos dyons, que apresenta a invariância dual. Também apresentamos a teoria de Einstein-Maxwell no capítulo 2, onde as fontes consideradas são partículas, campos espinoriais e campos escalares.

No capítulo 3, apresentamos as teorias unificadas da gravitação e do eletromagnetismo que utilizam uma geometria de Cartan quadrimensional, com ênfase nas teorias mais recentes que decompõem a torção. Além disso, fazemos um resumo dos trabalhos que relacionam transformações conformes das tetradas com a torção, sugerindo que o traço da torção comporta-se como um campo de gauge neste caso.

No capítulo 4, formulamos uma teoria geométrica dos dyons, na linha de pesquisa dos trabalhos apresentados no capítulo anterior, e investigamos o acoplamento do campo eletromagnético com o campo gravitacional, com partículas, com campos escalares e com campos espinoriais, de acordo com o princípio do acoplamento mínimo com a Geometria de Cartan Restrita e de acordo com o princípio da invariância conforme.

Finalmente, apresentamos as conclusões a que chegamos em virtude deste trabalho, a respeito da possibilidade de obtenção de uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo através de uma geometria quadrimensional. A partir das hipóteses consideradas, podemos afirmar que uma descrição geométrica satisfatória do eletromagnetismo não pode ser obtida em uma geometria de Cartan quadrimensional.

No apêndice A, fazemos um resumo de vários resultados e definições da geometria diferencial, que são utilizados nesta dissertação.

CAPÍTULO 1

ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo fazemos uma revisão da eletrodinâmica classica e apresentamos diversos resultados que adotaremos como critérios necessários para a formulação de uma teoria geométrica do eletromagnetismo.

Inicialmente, desenvolvemos a formulação covariante da eletrodinâmica de Maxwell a partir de um princípio variacional e apresentamos o acoplamento mínimo do campo eletromagnético com partículas, campos escalares e campos espinoriais.

A seguir, apresentamos a eletrodinâmica das partículas que têm tanto carga elétrica quanto carga magnética, chamadas de dyons. Esta teoria é invariante sob rotações duais e, quando formulada em termos de dois potenciais, sob transformações de gauge generalizadas.

Depois, formulamos uma densidade lagrangiana para a teoria que é invariante sob estes dois tipos de transformações. A invariância dual não foi considerada nas pesquisas anteriores sobre a existência de um princípio variacional, quando as fontes têm cargas elétrica e magnética.

Finalmente, mostramos que a eletrodinâmica de Maxwell e dos dyons são equivalentes, através de uma escolha da rotação dual e das transformações de gauge generalizadas, quando a razão entre as cargas magnética e elétrica dos dyons for uma constante universal.

1.2 - ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

Antes do surgimento da Teoria da Relatividade Restrita, admitia-se que o espaço e o tempo eram absolutos (independentes entre si e com relação aos demais constituíntes do universo) e acreditava-se que a separação entre eles era um dado objetivo da Realidade (1). De acordo com esta concepção, Maxwell formulou a eletrodinâmica em termos das intensidades de campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ e magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$ cuja dinâmica é dada pelas equações(*)

$$\nabla.\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.2.1}$$

$$\nabla\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1.2.2}$$

$$\nabla.\vec{H} = 0 \tag{1.2.3}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.2.4}$$

Nestas equações as fontes dos campos são as densidades de carga $\rho(\vec{x},t)$ e de corrente elétrica $\vec{j}(\vec{x},t)$, e $\underline{c}$ é a velocidade da luz no vácuo (2).

As equações de Maxwell implicam na conservação da carga elétrica, expressa através da equação de continuidade

---

(*) Estamos utilizando o sistema de unidades gaussiano nesta dissertação.

$$\nabla . \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1.2.5)$$

Os campos elétrico e magnético podem ser descritos em termos de um potencial escalar ϕ e de um potencial vetor $\vec{A}$ de acordo com

$$\vec{E} = - \nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (1.2.6)$$

e

$$\vec{H} = \nabla x \vec{A} \qquad (1.2.7)$$

Os potenciais não são univocamente definidos, pois a um mesmo campo podem estar associados diferentes potenciais relacionados por

$$\phi \to \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \sigma}{\partial t} \qquad (1.2.8)$$

e

$$\vec{A} \to \vec{A} - \nabla\sigma \qquad (1.2.9)$$

onde $\sigma(\vec{x},t)$ é uma função arbitrária. Estas são as transformações de gauge (calibre) dos potenciais. Só têm significado físico as grandezas que forem invariantes sob as mesmas (3).

Mas Einstein (4) mostrou, ao formular a Teoria da Relatividades Restrita, que os conceitos de espaço e tempo não são absolutos. Contrariamente ao que se considerava, o espaço e o tempo estão de tal modo relacionados entre si que as medidas de comprimentos e de intervalos de tempo dependem do referencial inercial utilizado. Um fenômeno semelhante ocorre com os campos elétrico e magnético, que estão intimamente associados, pois o surgimento ou o desaparecimento de um desses campos também dependem da escolha do referencial inercial.

Tendo em vista os resultados mencionados no parágrafo anterior, pode-se concluir que a formulação da eletrodinâmica apresentada tem o incoveniente de não indicar explicitamente a existência das relações entre espaço e tempo, e entre os campos elétrico e magnético. Tal problema não existe com relação a uma formulação que seja covariante em relação às transformações de Lorentz, quando as mesmas são encaradas como transformações de coordenadas em uma geometria quadrimensional de acordo com os resultados apresentados por Minkowski (5).

Embora o espaço e o tempo não sejam absolutos, eles podem ser combinados para formar o espaço-tempo de Minkowski que é absoluto. Em um referencial inercial, o elemento infinitesimal de comprimento deste espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (1.2.10)$$

onde a coordenada temporal é $x^0 = ct$ e as espaciais são as cartesianas $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$ (*). A métrica é dada por

---

(*) Nesta dissertação utilizamos as seguintes convenções: índices gregos assumem os valores 0,1,2 e 3; índices latinos minúsculos tomam os valores 1,2 e 3; cada par de índices iguais representa uma soma em todos os valores que esses índices podem assumir.

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}\,(+1,\ -1,\ -1,\ -1) \tag{1.2.11}$$

No espaço-tempo de Minkowski o eletromagnetismo é formulado em termos de um tensor $F_{\mu\nu}$, anti-simétrico, chamado de campo eletromagnético cujas componentes são

$$F_{oi} = E_i \tag{1.2.12}$$

e

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} H^k \tag{1.2.13}$$

sendo E_i as componentes do campo elétrico, H^k as componentes do campo magnético, e ε_{ijk} o tensor completamente anti-simétrico com $\varepsilon_{123} = -1$.

As equações de Maxwell, expressas em termos do campo eletromagnético, são formuladas no espaço-tempo de Minkowski de acordo com

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{1.2.14}$$

e

$$\partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.15}$$

O dual do campo eletromagnético é definido por

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{1.2.16}$$

sendo $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor completamente anti-simétrico com $\varepsilon^{0123} = 1$.

A fonte do campo eletromagnético é o 4-vetor densidade de corrente

$$(J^{\mu}) = (c\rho, \vec{j}) \tag{1.2.17}$$

que relaciona as densidades de carga e de corrente elétrica.

A lei de conservação da carga passa a ser expressa em termos do 4-vetor densidade de corrente por

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \tag{1.2.18}$$

Analogamente ao que ocorre com os campos elétrico e magnético, que podem ser expressos em termos do potencial escalar ϕ e do potencial vetor $\vec{A}$, o campo eletromagnético pode ser expresso em termos de um 4-vetor potencial

$$(A_{\mu}) = (\phi, -\vec{A}) \tag{1.2.19}$$

de acordo com

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \tag{1.2.20}$$

Neste caso, as transformações de gauge dadas pelas eqs.(8) e (9) assumem a forma

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\sigma \tag{1.2.21}$$

A formulação do campo eletromagnético em termos do 4-vetor potencial torna possível a obtenção das equações de Maxwell através de um princípio variacional.

A ação para o campo livre deve ser construída com invariantes sob transformações de Lorentz formados a partir do mesmo, a saber

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) \qquad (1.2.22)$$

e

$$F_{\mu\nu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = -4\,\vec{E}\,.\,\vec{H} \qquad (1.2.23)$$

Como o invariante dado pela eq.(23) é uma divergência total, a ação é formulada apenas em termos do outro invariante de acordo com

$$S_c = \frac{-1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x \qquad (1.2.24)$$

onde d^4x é o elemento infinitesimal de volume do espaço-tempo de Minkowski.

Através do princípio da ação mínima obtem-se a eq.(14), na ausência de fontes, variando-se o 4-vetor potencial na ação acima. A eq.(15) é uma decorrência da formulação do campo em termos do potencial dada pela eq.(20).

Devido a linearidade das equações de Maxwell, as equações do movimento das fontes do campo eletromagnético devem ser postuladas independentemente das mesmas (6). Em vista deste fato, a ação para o sistema formado pelo campo e suas fontes deve ser composta de três partes: uma que descreve o campo livre (dada pela eq.(24)) e outras duas que representam as fontes livres e a interação entre o campo e as fontes, respectivamente.

A seguir, apresentaremos os sistemas onde as fontes do campo eletromagnético são partículas, campos escalares e campos espinoriais.

As equações do movimento de uma partícula, com massa m e carga q, em um campo eletromagnético podem ser obtidas a partir da ação

$$S_p = - mc \int dS - \frac{1}{c} q \int A_\mu dZ^\mu \qquad (1.2.25)$$

onde $dS = \sqrt{dZ_\mu dZ^\mu}$ é o elemento infinitesimal de comprimento da linha de universo da partícula. A forma desta ação não pode ser obtida apenas com base em considerações gerais (3). Ela é construída de modo que as equações do movimento resultantes, obtidas através da variação da linha de universo da partícula de acordo com o princípio da mínima ação, sejam dadas por

$$mc \frac{dV^\mu}{dS} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} V_\nu \qquad (1.2.26)$$

onde V^μ é a 4-velocidade da partícula. Este procedimento justifica-se pelo fato de a eq.(26) estar em concordância com os resultados experimentais, pois as suas componentes temporal e espaciais são, respectivamente, a variação da energia cinética da partícula

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q\vec{E}.\vec{v} \qquad (1.2.27)$$

e a força de Lorentz

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\,(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v} \times \vec{H}) \qquad (1.2.28)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula.

Considerando-se que esta partícula também seja fonte do campo eletromagnético, o 4-vetor densidade de corrente fica dado por

$$J^{\mu} = q \int V^{\mu} \delta^{4}(X - Z)\,dS \qquad (1.2.29)$$

onde $\delta^4(X) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$. A hipótese de que esta corrente seja conservada implica na invariância da ação descrita pela eq.(25) sob as transformações de gauge dadas pela eq.(21), e vice-versa. Há uma estreita associação entre a conservação da carga e a invariância sob transformações de gauge.

Contrariamente ao que ocorre com as partículas carregadas, as densidades lagrangianas que descrevem as interações de um campo eletromagnético com campos escalares e campos espinoriais, são determinadas a partir da exigência de que as densidades lagrangianas desses campos sejam invariantes sob transformações de Lorentz e sob transformações de gauge de segunda espécie(*).

Seja Φ um campo escalar complexo ou um campo espinorial. Uma transformação de gauge do campo Φ é definida por

---

(*) Maiores detalhes poderão ser encontrados na referência (7)

$$\Phi' = e^{iq\sigma}\Phi \tag{1.2.30}$$

Esta transformação será de segunda espécie se o parâmetro σ for dependente das coordenadas do espaço-tempo; em caso contrário, ela é chamada de primeira espécie. A invariância da densidade lagrangiana do campo ϕ sob estas transformações traduz a arbitrariedade da escolha da fase do campo. No primeiro caso, esta escolha pode ser realizada localmente, sem referência ao restante do espaço-tempo.

A densidade lagrangiana de um campo escalar complexo ϕ livre, com massa m, é

$$L_\phi = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi\phi^* \tag{1.2.31}$$

Esta lagrangiana é invariante sob transformações de gauge de primeira espécie, mas não é invariante sob as transformações de segunda espécie porque as derivadas parciais não se transformam do mesmo modo que o campo, neste caso.

O mesmo fenômeno ocorre com relação a um campo espinorial ψ, com massa m, que satisfaz a equação de Dirac. A densidade lagrangiana deste campo, livre, é

$$L_\psi = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - 2im\bar{\psi}\psi\} \tag{1.2.32}$$

Sendo γ^μ as matrizes constantes de Dirac e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ o espinor conjugado a ψ.

A invariância sob transformações de gauge de segunda espécie pode ser obtida para as densidades lagrangianas dos campos escalares e espinoriais através do princípio do acoplamento mínimo.

Dada a densidade lagrangiana de um campo Φ livre, escalar ou espinorial, realiza-se o acoplamento mínimo do mesmo com o campo eletromagnético através da substituição

$$\partial_\mu \Phi \rightarrow D_\mu \Phi \qquad (1.2.33)$$

na densidade lagrangiana. As derivadas parciais são substituídas pelas derivadas covariantes sob transformações de gauge de segunda espécie

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - iqA_\mu)\, \Phi \qquad (1.2.34)$$

nas quais o potencial eletromagnético desempenha um papel semelhante ao realizado por uma conexão afim na geometria diferencial, compensando a não-covariância das derivadas parciais através das transformações de gauge dadas pela eq.(21).

Neste caso, a densidade lagrangiana do campo escalar ϕ em interação com o campo eletromagnético resulta

$$L_\phi = D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - m^2 \phi\phi^* \qquad (1.2.35)$$

O 4-vetor densidade de corrente deste campo é dado por

$$J_\mu = iq(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \qquad (1.2.36)$$

Analogamente, a densidade lagrangiana do campo espinorial ψ em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - 2im\bar{\psi}\psi\} \qquad (1.2.37)$$

A densidade de corrente do campo espinorial é

$$J_\mu = iq\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \qquad (1.2.38)$$

A conservação das correntes dos campos escalares e espinoriais dadas, respectivamente, pelas eqs.(36) e (38) é uma consequência da invariância das densidades lagrangianas destes campos, sob transformações de gauge. Como ocorreu no caso de uma partícula carregada, verifica-se aqui novamente a associação entre a invariância de gauge e a conservação da carga elétrica.

1.3 - ELETRODINÂMICA DOS DYONS

As equações de Maxwell, na ausência de fontes, são invariantes sob rotações duais do campo eletromagnético definidas por

$$\begin{pmatrix} F'_{\mu\nu} \\ \\ F'^{*}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \\ \overset{*}{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (1.3.1)$$

nas quais considera-se que o parâmetro θ não depende das coordenadas do espaço-tempo.

A invariância dual pode ser estendida para as equações de campo na presença de fontes, postulando-se a existência de um 4-vetor densidade de corrente magnética

$$(K_\mu) = (c\,\lambda, -\vec{k}) \qquad (1.3.2)$$

formado com as densidades de carga λ e de corrente $\vec{k}$ magnéticas.

Neste caso, as equações do campo eletromagnético ficam dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \qquad (1.3.3)$$

e

$$\partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} K^\nu \qquad (1.3.4)$$

Estas equações serão invariantes sob as rotações duais dos campos se, simultaneamente a estas transformações, as fontes se transformarem de acordo com

$$\begin{pmatrix} J^{\mu'} \\ \\ K^{\mu'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^\mu \\ \\ K^\mu \end{pmatrix} \qquad (1.3.5)$$

Mas, para que a invariância dual seja válida para o sistema formado pelo campo eletromagnético e suas fontes, deve ter-se a invariância dual das equações do movimento das fontes além da invariância dual das equações de campo.

Contrariamente ao que ocorre na eletrodinâmica de Maxwell, o campo eletromagnético gerado por cargas elétricas e magnéticas não pode ser formulado em termos de apenas um potencial não-singular, pois tal hipótese equilave à ausência de cargas magnéticas (8). Entretanto, este campo pode ser descrito em termos de dois potenciais, A_μ e B_μ, de acordo com (9)

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - B^*_{\mu\nu} \tag{1.3.6}$$

e

$$F^*_{\mu\nu} = A^*_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \tag{1.3.7}$$

onde

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.3.8}$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{1.3.9}$$

Nesta formulação, as rotações duais do campo, dadas pela eq.(1), podem ser obtidas a partir das rotações dos potenciais, definidas por (10)

$$\begin{pmatrix} A'_\mu \\ B'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{1.3.10}$$

O campo eletromagnético agora torna-se invariante sob transformações de gauge generalizadas dos potenciais definidas por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + Z_\mu \qquad (1.3.11)$$

e

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + W_\mu \qquad (1.3.12)$$

onde Z_μ e W_μ são campos que devem satisfazer à condição de campo nulo

$$\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu - \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha W_\beta = 0 \qquad (1.3.13)$$

Esta condição tem como decorrência a exigência de que os rotacionais dos campos Z_μ e W_μ satisfaçam às equações

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.14)$$

e

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.15)$$

Os campos Z_μ e W_μ não são univocamente determinados pela condição dada pela eq.(13), pois a mesma é satisfeita por diversos campos associados pelas transformações

$$Z_\mu \rightarrow Z_\mu + \partial_\mu \sigma \qquad (1.3.16)$$

e

$$W_\mu \rightarrow W_\mu + \partial_\mu \rho \qquad (1.3.17)$$

onde σ e ρ são funções arbitrárias. Por esta razão, designaremos as transformações apresentadas acima, eqs. (16) e (17), por transformações de gauge residuais.

Analogamente ao que ocorre na eletrodinâmica de Maxwell, a formulação do campo eletromagnético em termos de potenciais permite que as equações de campo sejam obtidas a partir de um princípio variacional (11,12).

A ação para o campo eletromagnético livre é dada por

$$S_c = \frac{1}{16\pi c} \int (n F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + h F_{\mu\nu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}) d^4x \qquad (1.3.18)$$

onde $\underline{n}$ e $\underline{h}$ são parâmetros adimensionais. Neste caso o invariante $F_{\mu\nu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}$ não é uma divergência total. As equações de campo são obtidas, de acordo com o princípio da ação mínima, através da variação dos potenciais A_μ e B_μ, que são as variáveis independentes. As equações de campo resultantes são

$$n\partial_\mu F^{\mu\nu} + h\partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.19)$$

e

$$h\partial_\nu F^{\mu\nu} - n\partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.20)$$

Este sistema de equações tem apenas a solução trivial, dada pelas equações de campo na ausênsia de fontes, pois o determinante

$$\begin{vmatrix} n & h \\ h & -n \end{vmatrix} = -(n^2 + h^2) \qquad (1.3.21)$$

é não-nulo, considerando-se que n e h não podem ser ambos nulos.

Embora a ação para o campo livre, eq.(18), seja invariante sob as transformações de gauge generalizadas, ela não permanece invariante quando os potenciais sofrem uma rotação dual. Neste caso, os invariantes do campo sob transformações de Lorentz também apresentam uma rotação dual dada por (13)

$$\begin{pmatrix} F'_{\mu\nu} F^{\mu\nu'} \\ F'_{\mu\nu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ F_{\mu\nu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{1.3.22}$$

Contudo, as equações de campo obtidas a partir desta ação são invariantes duais.

A seguir, examinaremos a validade da invariância dual para as equações do movimento das fontes. Admitiremos duas possíveis interpretações para a origem das densidades de corrente elétrica e magnética, considerando que as fontes são constituídas apenas por partículas. Uma delas supõe que estas densidades de correntes são geradas por dois tipos de partículas que comportam-se, respectivamente, como monopolos elétricos e magnéticos (14). A outra baseia-se na hipótese da existência de apenas um tipo de partícula (dyon), que possui tanto carga elétrica quanto carga magnética (15).

Também procuraremos formular uma densidade lagrangiana que apresente a invariância dual, da qual possam ser obtidas as equações de campo e as equações do movimento das partículas. Este aspecto não foi abordado por outros autores.

Inicialmente, consideraremos a teoria onde as partículas são monopolos elétricos e magnéticos. Em geral, supõe-se que os monopolos elétricos têm as mesmas propriedades das partículas carregadas da teoria de Maxwell, sendo as suas equações do movimento dadas pela eq. (2.26). Quanto aos monopolos magnéticos, usualmente admite-se que as suas propriedades são análogas às dos monopolos elétricos. Postula-se que as equações do movimento de um monopolo magnético, com massa $\underline{M}$ e carga $\underline{b}$, são dadas por (8)

$$Mc\,\frac{dU^{\mu}}{d\tau} = \frac{b}{c}\,\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}U_{\nu} \qquad (1.3.23)$$

onde U^{μ} é a 4-velocidade e $d\tau$ é o elemento infinitesimal de comprimento ao longo da linha de universo de monopolo magnético. Neste caso, as equações do movimento dos monopolos elétricos e magnéticos são invariantes sob transformações de gauge generalizadas, mas não são invariantes sob rotações duais, como constata-se facilmente.

Considerando-se a existência de um monopolo elétrico e de um monopolo magnético, as densidades de corrente elétrica e magnética ficam dadas, respectivamente, pela eq.(2.29) e por

$$K^{\mu} = b\int U^{\mu}\delta^{4}(X - Y)d\tau \qquad (1.3.24)$$

Contrariamente ao que acontece na teoria de Maxwell, não existe um princípio variacional do qual possam ser obtidas tanto as equações de campo quanto as equações do movimento dos monopolos elétricos e magnéticos, a menos que sejam assumidas condições subsidiárias (16,17). Este resultado foi obtido supondo-se que as cargas elétricas e magnéticas têm propriedades análogas às das cargas da teoria de Maxwell. Abandonando-se esta suposição, pode-se formular um princípio variacional sem a necessidade da imposição de vínculos (11,12).

Vamos considerar um sistema formado por dois monopolos: um elétrico e outro magnético. O monopolo elétrico tem massa m, carga e, e move-se com 4-velocidade V^μ ao longo de uma linha de universo cujo elemento infinitesimal de comprimento é dS. O monopolo magnético tem massa M, carga b, 4-velocidade U^μ e a sua linha de universo tem o elemento infinitesimal de comprimento $d\tau$. As equações do movimento destes monopolos podem ser obtidas a partir da ação

$$S_p = -mc\int dS - \frac{e}{c}\int (nA_\mu - hB_\mu)V^\mu dS -$$

$$- Mc\int d\tau - \frac{b}{c}\int (hA_\mu - nB_\mu)U^\mu d\tau \qquad (1.3.25)$$

onde n e h são os parâmetros da eq.(18). Variando-se as linhas de universo dos monopolos elétrico e magnético nesta ação, obtêm-se, respectivamente, as seguintes equações do movimento

$$mc\,\frac{dV^\mu}{dS} = \frac{e}{c}\,(nA^{\mu\nu} - hB^{\mu\nu})V_\nu \qquad (1.3.26)$$

e

$$Mc\,\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{b}{c}\,(hA^{\mu\nu} - nB^{\mu\nu})U_\nu \qquad (1.3.27)$$

onde $A^{\mu\nu}$ é definido pela eq.(8) e $B^{\mu\nu}$ pela eq.(9).

A ação dada pela eq.(25) e as equações do movimento obtidas a partir da mesma não são invariantes nem sob transformações de gauge generalizadas nem sob rotações duais.

As equações do campo eletromagnético na presença das fontes, obtidas a partir da variação dos potenciais A_μ e B_μ na ação formada pela soma das eqs.(18) e (25), resultam em

$$n\left(\frac{1}{4\pi}\,\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}\,eV^\nu\right) + h\left(\frac{1}{4\pi}\,\partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} - \frac{1}{c}\,bU^\nu\right) = 0 \qquad (1.3.28)$$

e

$$h\left(\frac{1}{4\pi}\,\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}\,eV^\nu\right) - n\left(\frac{1}{4}\,\partial_\nu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} - \frac{1}{c}\,bU^\nu\right) = 0 \qquad (1.3.29)$$

O sistema formado pelas equações acima, eqs.(28) e (29), só admite a solução trivial que é dada pelas eqs. (3) e (4).

Portanto, constatamos que a teoria dos monopolos elétricos e magnéticos não apresenta a invariância dual, e que a invariância sob transformações de gauge generalizadas só é válida, quando as equações do movimento forem dadas pelas eqs.(2.2 6) e (23). Estas equações não podem ser obtidas a partir de um princípio variacional (17).

Considerando os resultados anteriores, investigaremos agora a possibilidade da invariância dual ser válida para a eletrodinâmica dos dyons. Em geral, supõe-se que as cargas dos dyons têm propriedades análogas às das cargas da teoria de Maxwell, e postula-se que as equações do movimento de um dyon, com massa m, carga elétrica e e carga magnética b, são dadas por (15,18)

$$mc\,\frac{dV^{\mu}}{dS}=\frac{1}{c}(eF^{\mu\nu}+b\overset{*}{F}{}^{\mu\nu})V_{\nu} \tag{1.3.30}$$

onde V^{μ} é a 4-velocidade do dyon ao longo de sua linha de universo, cujo elemento infinitesimal de comprimento é dS.

As densidades de corrente elétrica e magnética geradas por um dyon podem ser escritas, respectivamente, como

$$J^{\mu} = e\int V^{\mu}\delta^{4}(X-Z)dS \tag{1.3.31}$$

e

$$K^{\mu} = b\int V^{\mu}\delta^{4}(X-Z)dS \tag{1.3.32}$$

Admitindo-se a hipótese da existência dos dyons , a rotação dual das fontes pode ser definida apenas em termos das cargas de acordo com

$$\begin{pmatrix} e' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ b \end{pmatrix} \tag{1.3.33}$$

Neste caso, pode-se verificar facilmente a validade da invariância dual para a eletrodinâmica dos dyons, pois tanto as equações de campo quanto as equações do movimento permanecem inalteradas, quando realizam-se rotações duais para os campos e as cargas (18).

Embora alguns dos resultados, acerca da inexistência de um princípio variacional, obtidos para a teoria dos monopolos também sejam válidos para a eletrodinâmica dos dyons, as duas teorias não são equivalentes. A validade da invariância dual para a eletrodinâmica dos dyons permite que a equivalência da mesma com a eletrodinâmica de Maxwell (onde existe um princípio variacional) seja demonstrada. Levando em consideração este fato, procuramos construir uma ação para a eletrodinâmica dos dyons que seja invariante dual.

Admitindo que a ação para o campo livre da eletrodinâmica dos dyons seja dada pela eq.(18), procuramos encontrar parâmetros $\underline{n}$ e $\underline{h}$ que transformam-se sob uma rotação dual de modo a compensar as transformações dos invariantes do campo sob transformações de Lorentz dadas pela eq.(22). Só nos foi possível encontrar tais parâmetros, a partir da suposição de que a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons é uma constante universal. Neste caso, encontramos que

$$n = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \tag{1.3.34}$$

e

$$h = \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} \tag{1.3.35}$$

onde γ é a constante universal, definida pela razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons. Considerando um sistema com N dyons, tem-se (não somar os índices repetidos)

$$\gamma = \frac{b_i}{e_i} \tag{1.3.36}$$

para i = 1,2,...,N. As transformações das eqs.(34) e (35) são obtidas a partir das trasformações da eq.(36). Estas, por sua vez, resultam das rotações duais das cargas dadas pela eq.(33).

Substituindo as eqs.(34) e (35) na eq.(18), podemos escrever a ação para o campo livre como

$$S_c = - \frac{1/16\pi c}{1+\gamma^2} \int (F_{\mu\nu} + \gamma F_{\overset{*}{\mu\nu}})(F^{\mu\nu} + \gamma F^{\overset{*}{\mu\nu}}) d^4x \qquad (1.3.37)$$

A ação que descreve o movimento de um dyon pode ser obtida a partir da ação dada pela eq.(25), considerando-se a existência de apenas uma massa e igualando-se as 4-velocidades e as linhas de universo dos monopolos. Verificamos que a ação resultante apresenta a invariância dual quando substituímos os parâmetros n e h, respectivamente, pelas eqs.(34) e (35). Neste caso, ela pode ser escrita na forma

$$S_p = -mc \int dS - \frac{1}{c} \int (eA_\mu + bB_\mu) V^\mu d^4x \qquad (1.3.38)$$

As equações do movimento de um dyon que resultam da eq.(38) são dadas por

$$mc \frac{dV^\mu}{dS} = \frac{1}{c} (eA^{\mu\nu} + bB^{\mu\nu}) V_\nu \qquad (1.3.39)$$

e já tinham sido obtidas anteriormente por Leiter (19), também a partir de um princípio variacional. Mas ele não considerou as transformações de gauge generalizadas nem construiu uma ação invariante dual para o campo. Estas equações diferem da eq.(30) por não apresentarem o termo

$$- \frac{1}{c} (e\overset{*}{B}^{\mu\nu} - b\overset{*}{A}^{\mu\nu})V_\nu \qquad (1.3.40)$$

existente naquela. Está demonstrado que termos como este não podem ser obtidos a partir de uma densidade lagrangiana local (17)

Analogamente ao que ocorre com a teoria dos monopolos elétricos e magnéticos, quando as equações do movimento são obtidas a partir de um princípio variacional, verificamos que nem a ação dada pela eq.(38) nem as equações que dela resultam são invariantes sob transformações de gauge generalizadas, embora apresentem a invariância dual.

As equações de campo da eletrodinâmica dos dyons, na presença de fontes, são obtidas a partir da ação formada pela soma das eqs.(37) e (38). O cálculo é análogo ao realizado na obtenção das equações de campo da teoria dos monopolos elétricos e magnéticos.

Portanto, constatamos que a teoria dos dyons apresenta a invariância dual. Analogamente ao que ocorre com a teoria dos monopolos, a invariância sob transformações de gauge generalizadas só existe quando o movimento dos dyons é descrita pela eq.(30), que não pode ser obtida a partir de um princípio variacional, por apresentar o termo dado pela eq.(40).

Também verificamos que existe uma ação que apre a invariância dual, da qual podem ser obtidas as equações de campo da teoria, quando a razão entre as cargas elé trica e magnética dos dyons for uma constante universal. Mas, neste caso, a ação que descreve o movimento das partículas não é invariante sob transformações de gauge generalizadas.

A teoria dos monopolos elétricos e magnéticos e a eletrodinâmica dos dyons não diferem apenas com relação à invariancia dual. Elas também se diferenciam com relação aos resultados experimentais. A teoria dos monopolos se distingue da eletrodinâmica de Maxwell porque admite a existência de monopolos magnéticos que, até o momento, não têm uma comprovação experimental (20). A teoria dos dyons conduz aos mesmos resultados experimentais que a teoria de Maxwell, se a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons for uma constante universal (15,18).

As equações de campo da eletrodinâmica dos dyons coincidirão com as equações de Maxwell, se todas as cargas magnéticas dos dyons puderem ser eliminadas através de uma única escolha do ângulo de rotação dual. Neste caso, considerando a existência de N dyons, devemos ter (não somar os índices repetidos)

$$e_i' = e_i\cos\theta\left(1 + \frac{b_i}{e_i}\,tg\theta\right) = q_i \qquad (1.3.41)$$

e

$$b_i' = e_i\cos\theta\left(1 - \frac{e_i}{b_i}\,tg\theta\right) = 0 \qquad (1.3.42)$$

para $i = 1,2,\ldots,N$. Isto só será possível, se a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons for uma constante universal. Assumimos esta hipótese quando construímos uma ação invariante dual para a teoria e denotamos esta constante por γ.

Admitindo que a hipótese mencionada acima seja válida, verifica-se que todas as cargas magnéticas são anuladas por uma rotação dual cujo ângulo é dado por

$$\theta = \mathrm{arctg}\gamma \tag{1.3.43}$$

Associada à rotação dual das cargas, existe uma rotação dual dos potenciais, que gera uma transformação do campo eletromagnético de acordo com

$$\phi_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\,(F_{\mu\nu} + \gamma F^*_{\mu\nu}) \tag{1.3.44}$$

e

$$\phi^*_{\mu\nu} = F'^*_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\,(-\gamma F_{\mu\nu} + F^*_{\mu\nu}) \tag{1.3.45}$$

Considerando-se a invariância dual das equações de campos e a eliminação de todas as cargas magnéticas, através de uma rotação dual cujo ângulo é dado pela eq.(43), segue-se que o campo dado pela eq.(44) deve satisfazer às equações de Maxwell

$$\partial^\mu \phi_{\mu\nu} = J^\nu \tag{1.3.46}$$

e

$$\partial^\mu \phi^*_{\mu\nu} = 0 \tag{1.3.47}$$

onde J^ν é a densidade de corrente elétrica gerada pelas cargas dadas pela eq.(41). Neste caso, resulta da eq.(47) que o campo $\phi_{\mu\nu}$ pode ser descrito apenas em termos de um 4-vetor potencial ϕ_μ, de acordo com

$$\phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu \qquad (1.3.48)$$

como na eletrodinâmica de Maxwell.

Mas, a rotação dual definida pela eq.(43) não elimina nenhum dos dois potenciais, pois tem-se

$$\phi_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu} - B'^{*}_{\mu\nu} \qquad (1.3.49)$$

e

$$\phi^{*}_{\mu\nu} = A'^{*}_{\mu\nu} + B'_{\mu\nu} \qquad (1.3.50)$$

onde $A'_{\mu\nu}$ e $B'_{\mu\nu}$ são, respectivamente, os rotacionais dos potenciais

$$A'_\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} (A_\mu + \gamma B_\mu) \qquad (1.3.51)$$

e

$$B'_\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} (-\gamma A_\mu + B_\mu) \qquad (1.3.52)$$

Portanto, apenas podemos considerar que o potencial ϕ_μ é determinado, implicitamente, pelos potenciais A'_μ e B'_μ através da eq.(49).

Entretanto, a eliminação de um dos potenciais e a conseqüente obtenção do potencial ϕ_μ de forma explícita podem ser realizadas através de uma escolha adequada da transformação de gauge generalizada, dada pelas eqs.(11) e (12). Mas um dos potenciais só poderá ser eliminado através de uma escolha adequada do campo Z_μ, ou do campo W_μ, se ele satisfizer à eq.(14), ou a eq.(15), que é válida para este campo.

A fim de verificar qual dos potenciais satisfaz à condição mencionada no parágrafo anterior, substituímos as eqs. (49) e (50) nas eqs.(46) e (47), e tivemos como resultado as equações dadas por

$$\partial^\mu A'_{\mu\nu} = J^\nu \qquad (1.3.53)$$

e

$$\partial^\mu B'_{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.54)$$

Este resultado foi obtido levando em consideração as identidades

$$\partial^\mu A'^{*}_{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.55)$$

e

$$\partial^\mu B'^{*}_{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.56)$$

As eqs.(53) e (54) nos mostram que apenas o potencial B'_μ pode ser eliminado através de uma escolha adequada da transformação de gauge generalizada.

A eliminação de B'_μ e a obtenção de ϕ_μ de forma explícita resultam de uma transformação de gauge generalizada dada por

$$B'_\mu \to B'_\mu + W_\mu = 0 \tag{1.3.57}$$

e

$$A'_\mu \to B'_\mu + Z_\mu = \phi_\mu \tag{1.3.58}$$

Nesta transformação W_μ é determinado pela eq.(57), considerando-se que B'_μ é dado pela eq.(52). O campo Z_μ é determinado em termos de W_μ através da eq.(13).

Chamaremos de Gauge de Maxwell as escolhas da rotação dual, dada pela eq.(43), e da transformação de gauge generalizada dada pelas eqs.(57) e (58).

Na Gauge Maxwell, a eletrodinâmica dos dyons é invariante apenas sob as transformações de gauge residuais dadas pelas eqs.(16) e (17). Neste caso, as transformações do potencial ϕ_μ coincidem com as transformações de gauge do 4-vetor potencial da eletrodinâmica de Maxwell.

A equivalência da eletrodinâmica dos dyons com a de Maxwell ainda não está completa, pois ainda falta demonstrar que as equações do movimento dos dyons coincidem com as equações das partículas da teoria de Maxwell.

As equações do movimento obtidas a partir do princípio variacional, depois de realizada a rotação dual definida pela eq.(43), ficam na forma

$$mc\,\frac{dV^{\mu}}{dS} = \frac{1}{c}\,q\,A'^{\mu\nu}\,V_{\nu} \qquad (1.3.59)$$

onde

$$q = e\,\sqrt{1 + \gamma^{2}} \qquad (1.3.60)$$

é a carga elétrica do dyon. Estas equações não são equivalentes às equações da teoria de Maxwell, pois apresentam uma dependência explícita do potencial A'_{μ}. Ou do potencial B'_{μ} , quando a eq.(49) é substituída na eq.(59). Neste caso, a transformação de gauge generalizada dada pelas eqs.(11) e (12) não pode ser aplicada.

Mas quando as equações do movimento do dyon são dadas pela eq.(30), tem-se a equivalência com a teoria de Maxwell. Estas equações são escritas na Gauge de Maxwell como

$$mc\,\frac{dV}{dS} = \frac{1}{c}\,q\,\phi^{\mu\nu}V_{\nu} \qquad (1.3.61)$$

onde a carga elétrica observável é dada pela eq.(60).

Portanto, concluímos que a teoria dos dyons é equivalente a eletrodinâmica de Maxwell quando a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons for uma constante universal, e quando as equações do movimento destas partículas forem dadas pela eq.(30).

Por fim, observamos que, do mesmo modo que as cargas magnéticas foram eliminadas através de uma rotação dual, também pode-se eliminar as cargas elétricas. Nesta caso, a teoria pode ser expressa através de apenas um potencial com o auxílio de uma transformação de gauge generalizada que elimina o potencial A_μ. Logo, tendo em vista estes resultados, verificamos que a eletrodinâmica pode ser formulada em termos de monopolos elétricos ou monopolos magnéticos ou dyons, cuja razão entre as cargas elétrica e magnética é uma constante universal. Estas três formulações são indistinguíveis experimentalmente, pois as diferenças entre elas resultam apenas de diferentes escolhas de gauge.

CAPÍTULO 2

TEORIA DA GRAVITAÇÃO

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma revisão da teoria da gravitação de Newton e da Teoria da Relatividade Geral, com ênfase nesta última.

Estes resultados serão utilizados em uma posterior comparação com teorias unificadas da gravitação e do eletromagnetismo que utilizam uma geometria de Cartan com quatro dimensões.

A partir dos problemas existentes na teoria da gravitação de Newton, devido a sua incompatibilidade com a Teoria da Relatividade Restrita, desenvolvemos a Teoria da Relatividade Geral procurando reproduzir os passos dados por Einstein na formulação desta teoria e analisando as características da grativação que possibilitaram a obtenção de uma interpretação geométrica para esta interação.

A seguir, mostramos que a Teoria da Relatividade Restrita é válida em referenciais inerciais definidos localmente, onde são definidas as medidas dos intervalos de tempo e de comprimentos, bem como as componentes físicas dos tensores. Também apresentamos o acoplamento mínimo do campo gravitacional com as suas fontes.

Depois, formulamos a teoria de Einstein-Maxwell e obtemos o acoplamento mínimo de partículas, campos escalares e campos espinoriais com esta teoria.

2.2 - TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Antes do advento da Teoria da Relatividade Geral, os fenômenos gravitacionais eram descritos através da Lei da Gravitação Universal de Newton. Na linguagem da teoria de campo, esta lei afirma que a matéria tem uma propriedade universal, chamada de massa gravitacional, cuja densidade $\rho(\vec{x})$ origina um campo gravitacional $\vec{g}(\vec{x})$ em todo o espaço de acordo com as equações

$$\nabla . \vec{g} = -4\pi G\rho \qquad (2.2.1)$$

e

$$\nabla x \vec{g} = 0 \qquad (2.2.2)$$

onde $\underline{G}$ é a constante universal da gravitação.

Estas equações diferem das equações da eletrostática apenas pelo fato de não existirem massas gravitacionais negativas, enquanto as cargas elétricas podem ser tanto positivas quanto negativas. Portanto, a interação gravitacional é sempre atrativa.

O campo gravitacional pode ser expresso em termos de um potencial gravitacional U(x), em decorrência da eq.(2), através da equação

$$\vec{g} = - \nabla U \qquad (2.2.3)$$

Neste caso, as equações da Teoria da Gravitação de Newton reduzem-se à equação

$$\nabla^2 U = +4\pi\rho G \tag{2.2.4}$$

A interação entre as fontes do campo gravitacional e uma partícula, com massa gravitacional m_g, é descrita em termos de uma força gravitacional, que atua na partícula, dada por

$$\vec{F} = m_g \vec{g} \tag{2.2.5}$$

As equações do movimento de uma partícula são obtidas a partir da segunda lei do movimento de Newton. De acordo com esta lei, a aceleração de uma partícula, que move-se sob a ação de uma força, é diretamente proporcional a esta força e inversamente proporcional à massa inercial da partícula. Esta massa é uma medida da inércia da partícula, que é uma propriedade da matéria responsável pela tendência que a partícula tem de permanecer em repouso ou em estado de movimento retilíneo uniforme.

Neste caso, as equação do movimento de uma partícula, com massas gravitacional e inercial dadas, respectivamente, por m_g e m_i, em um campo gravitacional $\vec{g}$ são

$$m_i \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m_g \vec{g} \tag{2.2.6}$$

onde $\vec{x}$ é o vetor posição da partícula.

Considerando que a razão entre as massas gravitacional e inercial dos corpos é uma constante universal (21), verifica-se que a aceleração gravitacional de um corpo independe da composição e estrutura do mesmo. A Teoria da Gravitação de Newton não tem uma explicação para este fato, que já era de conhecimento de Galileu.

Mas o principal problema da Teoria da Gravitação de Newton reside na suposição de que a interação gravitacional ocorre através da ação-à-distância, implicando em uma velocidade infinita para a propagação do campo gravitacional. Portanto, a Teoria da Gravitação de Newton não é uma teoria de campo, e está em contradição com a Teoria da Relatividade Restrita que prevê uma velocidade finita para a propagação das interações.

Surgiram várias teorias de campo para a gravitação na tentativa de solucionar este problema, mas apenas a Teoria da Relatividade Geral mostrou-se compatível com os resultados experimentais, tanto com relação à previsão de fenômenos até então desconhecidos quanto com relação àqueles explicados pela Teoria de Newton.

2.3 - *TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL*

A teoria da Relatividade Geral fundamenta-se, essencialmente, no princípio de equivalência que admite duas formulações. Na forma fraca, ele estabelece que a aceleração gravitacional de um corpo independe da composição e estrutura do mesmo, e tem como suporte experimental a igualdade entre as massas gravitacional e inercial. Na forma forte, ele afirma a equivalência , existente, localmente, entre um referencial não-inercial e um referencial inercial, quando neste último existe um campo gravitacional e a aceleração do primeiro coincide com a aceleração da gravidade (21).

Como as forças inerciais também independem da estrutura e composição dos corpos em que atuam, pode-se concluir que as forças gravitacional e inercial são indistinguíveis, localmente. Mas, apesar deste semelhança, elas se distinguem do ponto de vista global, pois apenas as forças inerciais podem ser eliminadas através de uma mudança de referencial.

A equivalência local entre gravidade e inércia, indica que existe uma íntima relação entre estas propriedades da matéria e implica na impossibilidade da aceleração de uma partícula ser decomposta, de modo unívoco, em uma parte com origem gravitacional e em outra com origem inercial. O mesmo acontece com a distinção entre referenciais inerciais e não-inerciais. Neste caso, as leis da física devem ser expressas por equações que sejam covariantes sob o grupo das transformações contínuas de coordenadas. Este é o princípio da covariância geral, e pode ser encarado como uma extensão do princípio da relatividade, cujo grupo de simetria é o grupo de Poincaré (22).

Esta equivalência também permite que as forças gravitacionais sejam interpretadas geometricamente, de modo análogo ao que ocorre com as forças inerciais. Tanto na teoria de Newton quanto na Teoria da Relatividade Restrita, as forças inerciais são introduzidas com a finalidade exclusiva de tornar possível a aplicação das leis da física em referenciais não-inerciais. A única exceção é a lei da ação e reação (3º lei de Newton), pois estas forças não resultam de uma interação entre os constituintes da matéria e admite-se que elas são originadas pelo espaço-tempo. Neste caso, o espaço-tempo é tão absoluto quanto o espaço da teoria de Newton, tendo a propriedade peculiar de influenciar campos e partículas sem ser, por sua vez, influenciado pelos mesmos (23).

Assim, analogamente ao que ocorre com as forças inerciais, a existência de um campo gravitacional está relacionada com o fato das componentes da métrica serem funções das coordenadas do espaço-tempo, pois em um referencial não-inercial tem-se

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta \tag{2.3.1}$$

onde $g_{\alpha\beta}(x)$ são as componentes da métrica

A diferença que existe, globalmente, entre os campos de força gravitacional e inercial também pode ser interpretada geométricamente. Ela significa que o espaço-tempo é curvo na presença de um campo gravitacional. Neste caso, não existe um referencial que seja válido para todo o espaço-tempo, como ocorre no caso em que apenas existe um campo de forças inerciais, onde as componentes da métrica sejam dadas pela eq.(1.2.11).

Com a interpretação geométrica da gravitação o espaço-tempo perde o caráter absoluto e torna-se um elemento dinâmico da teoria da gravitação de Einstein.

O espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral tem as seguintes características: é uma variedade diferenciável quadrimensional dotada de uma conexão métrica, sem torção, onde a métrica pode ser assinatura +2 ou -2, dependendo da convenção adotada (ver apêndice A).

A exigência de uma conexão métrica garante a existência de uma unidade de comprimento invariante sob transporte paralelo (ver apêndice A), e está associada à hipótese de que os intervalos de tempo e comprimentos medidos por réguas e relógios independem das histórias dos mesmos (23).

A imposição de que a métrica tenha assinatura + 2 ou - 2 tem a finalidade de permitir que, através de uma escolha adequada de coordenadas, ela possa sempre ser expressa localmente como a métrica do espaço-tempo de Minkowski.

Por fim, a ausência de torção resulta da exigência de que paralelogramos infinitesimais possam ser construídos (ver apêndice A) (23).

A geometria do espaço-tempo deve ser determinada pelo tensor momentum-energia das fontes do campo gravitacional, pois na Teoria da Gravitação de Newton o campo gravitacional é gerado pela massa e, de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, a massa é aquivalente à energia. A partir de considerações semelhantes e procurando obter as equações da teoria da gravitação de Newton como a primeira aproximação através da associação da métrica com o potencial gravitacional, Einstein postulou as seguintes equações (chamadas de equações de Einstein)

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (2.3.2)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia das fontes, $\dot{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $\dot{R}$ é o escalar de curvatura do espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral definidos, respectivamente pelas eqs.(A.32) e (A.33).

As exigências de que as equações de Einstein sejam lineares nas derivadas segundas da métrica e satisfaçam o princípio da covariância geral, são suficientes para garantir a unicidade das mesmas, a menos de uma constante cosmológica (22).

As equações de Einstein, na ausência de fontes, podem ser obtidas através da variação da métrica, de acordo com o princípio da ação mínima, a partir da seguinte ação

$$S_g = - \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R \, d^4x \qquad (2.3.3)$$

Além das equações de campo para a gravitação as equações de movimento de uma partícula de teste em um campo gravitacional também foram obtidas por Einstein.

Inicialmente, ele postulou que elas seriam dadas pelas equações da geodésica

$$\frac{dV^\alpha}{dS} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} V^\mu V^\nu = 0 \qquad (2.3.4)$$

onde V^α é a 4-velocidade da partícula, dS é o intervalo infinitesimal do seu tempo próprio, e $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ é o símbolo de Christoffel de segunda espécie definido pela eq.(A. 30). Estas equações podem ser obtidas a partir da ação

$$S_p = \int dS \qquad (2.3.5)$$

através da variação da linha de universo da partícula. Mas depois ele verificou que estas equações também podiam ser obtidas a partir das equações de campo, em vista da não-linearidade destas últimas.

A ação do campo gravitacional sobre o movimento de partículas de teste vizinhas resulta da curvatura do espaço-tempo, tornando desnecessário o conceito de força gravitacional, de acordo com a equação do desvio geodésico

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{dS^2} = \dot{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta V^\mu \eta^\nu \qquad (2.3.6)$$

Nesta equação η^α e V^α são, respectivamente, o vetor posição e a velocidade de uma partícula em relação a outra, cujo tempo próprio é dado pelo parâmetro $\underline{S}$, e $R^{\cdot\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ são as componentes do tensor de curvatura definido pela eq.(A. 31).

De acordo com o princípio da covariância geral, todos os referenciais são igualmente válidos para a formulação das leis da física. Mas, no referencial de repouso de uma partícula em queda livre (sem girar), devido à ausência do campo gravitacional-inercial na vizinhança da mesma, esta formulação coincide com a da Teoria da Relatividade Restrita. Este é o chamado referencial inercial local da partícula.

No referencial inercial local de uma partícula que move-se com 4-velocidade V^μ, o elemento infinitesimal de linha entre dois pontos do espaço-tempo pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - d\ell^2 \qquad (2.3.8)$$

Nesta equação

$$d\tau = V^{\mu}dx_{\mu} \tag{2.3.8}$$

é o intervalo infinitesimal de tempo próprio da partícula, e

$$d\ell^2 = -h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.3.9}$$

é o comprimento medido por uma régua em repouso em relação à partícula, onde,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_{\mu}V_{\nu} \tag{2.3.10}$$

Os vetores que formam a base do referencial inercial local são usualmente chamados de tetradas e distinguidos entre si, e com relação à base do sistema de coordenadas do espaço-tempo, através de letras latinas maiúsculas que assumem os valores 0,1,2, e 3.

No sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$, definido na vizinhança do ponto P ocupado pela partícula, as componentes das tetradas podem ser escritas na forma

$$e^{\alpha}_{(A)} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^{A}}\Big|_{P} \tag{2.3.11}$$

onde $\{X^{A}\}$ é o sistema de coordenadas do referencial inercial local definida na vizinhança da partícula. Também tem-se que

$$e_{\alpha}^{(A)} = \frac{\partial X^A}{\partial x^{\alpha}}\Big|_P \qquad (2.3.12)$$

As eqs.(11) e (12) satisfazem as seguintes relações

$$e_{\alpha}^{(A)} e^{\beta}_{(A)} = \delta^{\beta}_{\alpha} \qquad (2.3.13)$$

e

$$e_{\alpha}^{(A)} e^{\alpha}_{(B)} = \delta^{A}_{.B} \qquad (2.3.14)$$

Devido à curvatura do espaço-tempo as tetradas não são integráveis, isto é, as transformações das coordenadas $X^A = X^A(x^{\alpha})$ e $x^{\alpha} = x^{\alpha}(X^A)$ não podem ser obtidas a partir da integração das eqs.(11) e (12) na vizinhança da partícula.

Mas pode-se transformar as componentes de um tensor, por exemplo, de um destes sistemas de coordenadas para o outro, no ponto ocupado pela partícula. Neste caso, as componentes de um tensor nos sistemas de coordenadas do espaço-tempo e do referencial inercial local dadas, respectivamente, por $T^{\alpha}{}_{\beta}$ e $T^{A}{}_{B}$, estão relacionadas através das transformações

$$T^{A}{}_{B} = e_{\alpha}^{(A)} e^{\beta}_{(B)} T^{\alpha}{}_{\beta} \qquad (2.3.15)$$

e

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = e^{\alpha}_{(A)} e_{\beta}^{(B)} T^{A}{}_{B} \qquad (2.3.16)$$

Em particular, para a métrica obtém-se que

$$\eta_{AB} = e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} g_{\alpha\beta} \qquad (2.3.17)$$

e

$$g_{\alpha\beta} = e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} \eta_{AB} \qquad (2.3.18)$$

onde as componentes da métrica na base de tetradas, η_{AB}, coincidem com as componentes da métrica da espaço-tempo de Minkowski em um referencial inercial.

As componentes de um tensor na base de tetradas são chamadas de componentes físicas porque as coordenadas do referencial inercial local têm um significado métrico, representam distâncias e intervalos de tempo, que não existe para as coordenadas curvilíneas do espaço-tempo, em geral (6).

As tetradas não são definidas univocamente, pois uma transformação de Lorentz local definida por

$$L^{A}{}_{B} \eta_{AC} L^{C}{}_{D} = \eta'_{BD} = \eta_{BD} \qquad (2.3.19)$$

onde

$$\eta'_{BD} = e'^{\alpha}_{(B)} e'^{\beta}_{(C)} g_{\alpha\beta} \qquad (2.3.20)$$

implica em uma transformação das mesmas, dada por

$$e'^{(A)}_{\alpha} = L^{A}{}_{B} e^{(B)}_{\alpha} \qquad (2.3.21)$$

que preserva a estrutura de Minkowski local.

Tendo em vista que a 4-velocidade da partícula é um 4-vetor unitário, as componentes das tetradas do referencial inercial local desta partícula satisfazem as relações

$$e^{\alpha}_{(0)} = V^{\alpha} \tag{2.3.22}$$

e

$$g_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{(i)}e^{\beta}_{(j)} = -\delta_{ij} \tag{2.3.23}$$

onde

$$V_{\alpha}e^{\alpha}_{(i)} = 0 \tag{2.3.24}$$

Em geral, um tensor pode ser expresso com algumas componentes no sistema de coordenadas do espaço-tempo e outras no sistema de coordenadas do referencial inercial local. Considerando-se um tensor com componentes $T^{A\mu}{}_{B\nu}$, obtemos as seguintes leis de transformação

$$T^{A\mu'}{}_{B\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} T^{A\alpha}{}_{B\beta} \tag{2.3.25}$$

e

$$T^{A'\mu}{}_{B'\nu} = L^{A'}{}_{C}(L^{-1})^{D}{}_{B'} T^{C\mu}{}_{D\nu} \tag{2.3.26}$$

sob transformações de coordenadas da variedade e sob transformações de Lorentz, respectivamente.

A derivada covariante deste tensor é definida por

$$\dot{\nabla}_\alpha T^{A\mu}{}_{B\nu} = T^{A\mu}{}_{B\nu;\alpha} = \partial_\alpha T^{A\mu}{}_{B\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} T^{A\beta}{}_{B\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} T^{A\mu}{}_{B\beta} +$$

$$+ \omega^{A}{}_{\alpha C} T^{C\mu}{}_{B\nu} - \omega^{C}{}_{\alpha B} T^{A\mu}{}_{C\nu} \qquad (2.3.27)$$

onde a conexão é representada pelas componentes $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, definidas no sistema de coordenadas da variedade, e pelas componentes $\omega^{A}{}_{\alpha B}$, com dois índices no sistema de coordenadas do referencial inercial local e um índice no sistema de coordenadas do espaço - tempo. Usualmente, a conexão recebe a denominação de conexão de Lorentz quando as suas componentes são dadas por $\omega^{A}{}_{\alpha B}$(24).

Esta derivada covariante é um tensor tanto em relação às transformações de coordenadas da variedade quanto em relação às transformações de Lorentz.

A derivada covariante das tetradas é identicamente nula, em decorrência do fato da conexão ser métrica. Neste caso, tem-se

$$\dot{\nabla}_\mu e^{\alpha}{}_{(A)} = \partial_\mu e^{\alpha}{}_{(A)} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} e^{\nu}{}_{(A)} - \omega^{B}{}_{\mu A} e^{\alpha}{}_{(B)} = 0 \qquad (2.3.28)$$

e daí segue que as componentes da conexão dadas por $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ e $\omega^{A}{}_{\mu B}$ estão relacionadas por

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = e^{\alpha}{}_{(A)} e^{(B)}_{\nu} \omega^{A}{}_{\mu B} + e^{\alpha}{}_{(A)} \partial_\mu e^{(A)}_{\nu} \qquad (2.3.29)$$

Em geral, as componentes do tensor de curvatura, determinadas a partir das componentes da conexão consideradas acima, $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ e $\omega^{A}{}_{\mu B}$, estão relacionadas através da equação

$$\dot{\nabla}_{\rho}\dot{\nabla}_{\nu}e_{\mu}^{(A)} - \dot{\nabla}_{\nu}\dot{\nabla}_{\rho}e_{\mu}^{(A)} = -2\,\tau^{\alpha}{}_{\nu\rho}\,\dot{\nabla}_{\alpha}e_{\mu}^{(A)} +$$

$$\dot{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}e_{\alpha}^{(A)} - \dot{R}^{A}{}_{B\nu\rho}e_{\mu}^{(B)} \qquad (2.3.30)$$

onde $\dot{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ é definido pela eq.(A.31), $\dot{R}^{A}{}_{B\nu\rho}$ é definido por

$$R^{A}{}_{B\nu\rho} = \partial_{\rho}\omega^{A}{}_{\nu B} - \partial_{\nu}\omega^{A}{}_{\rho B} + \omega^{A}{}_{\rho C}\omega^{C}{}_{\nu B} - \omega^{A}{}_{\nu C}\omega^{C}{}_{\rho B} \qquad (2.3.31)$$

e $\tau^{\alpha}{}_{\nu\rho}$ é a torção do espaço-tempo definida pela eq.(A.15). Considerando-se que o espaço-tempo da Teoria da Relatividade não tem torção, e utilizando a eq.(28), obtem-se que

$$\dot{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = e^{\sigma}_{(A)}\,e_{\mu}^{(B)}\dot{R}^{A}{}_{B\nu\rho} \qquad (2.3.32)$$

No referencial inercial local as equações de um campo Φ^{A}, qualquer, podem ser obtidas a partir da ação

$$S = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}(\Phi^{A},\ \partial\Phi^{A})d^{4}x \qquad (2.3.33)$$

definida de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, pois esta é a forma que a ação definida no espaço-tempo curvo assume na base de tetradas. Mas este resultado não pode ser generalizado, através de um procedimento único, a fim de que a forma da ação seja conhecida em um sistema de coordenadas qualquer da variedade.

Em geral, a forma da ação de um campo Φ^A, em interação com o campo gravitacional, é obtida através do princípio do acoplamento mínimo. De acordo com este princípio, as derivadas parciais e as componentes da métrica de Minkowski são substituídas pelas devidas covariantes e as componentes da métrica definidas em um referencial qualquer do espaço-tempo curvo. Neste caso, realizam-se as substituições

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \tag{2.3.34}$$

e

$$\partial_\mu \rightarrow \dot{\nabla}_\mu \tag{2.3.35}$$

Assim, de acordo com o princípio do acomplamento mínimo, a ação que descreve a interação de um campo Φ^A qualquer com o campo gravitacional é dada por

$$S = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\mathcal{L}\,(\Phi^A,\dot{\nabla}\Phi^A)\,d^4x = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\mathcal{L}\,(\Phi^A,\partial\Phi^A,\partial g,g)\,d^4x \tag{2.3.36}$$

onde Φ^A e $g_{\mu\nu}$ são as variáveis independentes.

O sistema formado pelo campo Φ^A em interação com o campo gravitacional é descrito pela ação formada a partir da soma das eqs.(3) e (36). Variando Φ^A e $g^{\mu\nu}$ nesta ação obtem- se as equações do movimento para Φ^A, dadas por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \equiv \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} = 0 \qquad (2.3.37)$$

e as equações de Einstein, eq.(2), onde o tensor momentum-energia do campo é obtida a partir da definição

$$\int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2c} \int \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x \qquad (2.3.38)$$

Por fim, considerando os aspectos principais da Teoria da Relatividade Geral, podemos afirmar que o sucesso da geometrização da gravitação está relacionado com dois fatos: em primeiro lugar, a teoria não está em desacordo com os resultados experimentais; em segundo lugar, o acoplamento da gravitação com outros campos e partículas independe das propriedades específicas dos mesmos, como pode constatar-se através das eq.(34) e (35), de acordo com o princípio de equivalência.

2.4 - TEORIA DE EINSTEIN-MAXWELL

A teoria de Einstein-Maxwell descreve o sistema formado pelos campos gravitacional e eletromagnético, admitindo que a interação entre os mesmos resulta da aplicação do princípio do acoplamento mínimo.

Neste caso, a ação do campo eletromagnético no espaço-tempo curvo é definido por

$$S = -\frac{1}{16\pi c}\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} d^4x \qquad (2.4.1)$$

Logo, a ação do sistema é formada pela soma das eqs.(3.3) e (1).

As equações de Maxwell resultantes da variação do potencial eletromagnético na eq.(1), e da eq.(1.2.20), são

$$\dot{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (2.4.2)$$

e

$$\dot{\nabla}_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \qquad (2.4.3)$$

No espaço-tempo curvo o dual do campo eletromagnético fica dado por

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \qquad (2.4.5)$$

onde

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (2.4.6)$$

é o tensor de Levi-Civita.

As fontes do campo gravitacional, na teoria de Einstein-Maxwell, são o tensor momentum-energia do campo eletromagnético

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}(F_{\mu}^{\ \alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \qquad (2.4.7)$$

obtido através da definição dada pela eq.(3.38), a partir da ação dado pela eq.(1).

A seguir apresentaremos o acoplamento mínimo de partículas, campos escalares e campos espinoriais com a teoria de Einstein-Maxwell.

A ação para uma partícula, com massa m e carga q, em interação com os campos gravitacional e eletromagnético, é obtida a partir da eq.(1.2.25) através das substituições dadas pelas eqs.(3.34) e (3.35). Neste caso, as equações do movimento da partícula resultam em

$$\frac{dV^{\mu}}{dS} + \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} V^{\alpha}V^{\beta} = \frac{q}{m} F^{\mu}_{\ \ \nu} V^{\nu} \qquad (2.4.8)$$

Considerando-se que esta partícula também seja fonte do campo eletromagnético, as equações de Maxwell ficam escritas como

$$\dot{\nabla}_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu} \qquad (2.4.9)$$

e

$$\dot{\nabla}_{\mu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \qquad (2.4.10)$$

onde o 4-vetor densidade de corrente J^{ν} é dado pela eq.(1.2.29).

Neste contexto, a lei da conservação da carga elétrica fica expressa por

$$\dot{\nabla}_{\mu} J^{\mu} = 0 \tag{2.4.11}$$

onde J^{μ} é o 4-vetor densidade de corrente elétrica.

O acoplamento mínimo de campo escalares e campos espinoriais com a teoria de Einstein-Maxwell resulta das substituições, nas densidades lagrangianas que descrevem os campos livres, apresentadas nas eqs.(1.2.33), (3.34) e (3.35).

Neste caso, a densidade lagrangiana que descreve o acoplamento de um campo escalar complexo ϕ , com massa m, com a teoria de Einstein-Maxwell resulta em

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} D_{\mu}\phi (D_{\nu}\phi)^* - m^2 \phi\phi^* \tag{2.4.12}$$

onde $D_{\mu}\phi$ é definida por (1.2.34).

A densidade lagrangiana de um campo espinorial acoplado com a teoria de Einstein-Maxwell não pode ser obtida de um modo análogo ao utilizado para a obtenção da densidade lagrangiana de um campo escalar, pois a definição de um campo espinorial no espaço-tempo curvo é mais complexa do que a de campos escalares e tensoriais. Os espinores só podem ser definidos com relação ao grupo das transformações de Lorentz locais.

Um espinor de Dirac no espaço-tempo curvo é definido como um objeto com quatro componentes que se comportam, sob as transformações de Lorentz locais, do mesmo modo que os espino res de Dirac no espaço-tempo de Minkowski. E que, que sob transformações de coordenadas da variedade, se comportam como escalares (25,26).

Consideremos um espinor ψ e seu conjugado $\bar{\psi}$ com componentes ψ^a e ψ_a, respectivamente.

Com relação a uma transformação de Lorentz local $L^A{}_{.B}$ tem-se que

$$\psi^{a'} = S^{a'}{}_b \psi^b \qquad (2.4.13)$$

e

$$\psi_{a'} = (S^{-1})^b{}_{a'} \psi_b \qquad (2.4.14)$$

onde S(L) é uma representação do grupo de Lorentz local, dada por uma matriz 4 x 4 tal que

$$\det S = 1 \qquad (2.4.15)$$

Em relação a uma transformação de coordenadas da variedade, estas componentes comportam-se de acordo com

$$\psi^{a'} = \psi^a \qquad (2.4.16)$$

e

$$\psi_{a'} = \psi_a \qquad (2.4.17)$$

A derivada covariante de um espinor é definida, através da introdução de uma conexão espinorial $\Gamma^{\cdot a}{}_{\alpha b}$, como

$$\dot{\nabla}_\alpha \psi^a = \partial_\alpha \psi^a - \dot{\Gamma}^a{}_{\alpha b} \psi^b \qquad (2.4.18)$$

A conexão espinorial se transforma de acordo com

$$\dot{\Gamma}^{a'}{}_{b'\alpha} = S^{a'}{}_c \dot{\Gamma}^c{}_{\mu n} (S^{-1})^n{}_{b'} + (\partial_\mu S^{a'}{}_c)(S^{-1})^c{}_{b'} \qquad (2.4.19)$$

sob transformações de Lorentz locais, e comportam-se como um vetor sob transformações de coordenadas da variedade. Neste caso, a derivada covariante de um espinor transforma-se sob transformações de Lorentz locais e sob transformações de coordenadas da variedade, respectivamente, como um espinor e como um 4-vetor.

A derivada covariante do espinor conjugado $\bar{\psi}$ pode ser obtida admitindo-se que a derivada covariante do espinor ψ satisfaz à regra de Leibnitz, e levando-se em consideração que $\psi_a \psi^a$ é invariante tanto sob transformações de Lorentz locais quanto sob transformações de coordenadas da variedade. Neste caso, segue que

$$\dot{\nabla}_\alpha \bar{\psi}_a = \partial_\alpha \bar{\psi}_a + \bar{\psi}_b \dot{\Gamma}^b{}_{\alpha a} \qquad (2.4.20)$$

Omitindo-se os índices espinoriais nas eqs.(18) e (20), pode escrever-se

$$\dot{\nabla}_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \dot{\Gamma}_\alpha \psi \qquad (2.4.21)$$

e

$$\nabla_\alpha \bar{\psi} = \partial_\alpha \bar{\psi} + \bar{\psi}\Gamma_\alpha \qquad (2.4.22)$$

A formulação covariante da dinâmica do campo espinorial não pode ser estabelecida sem o auxílio das matrizes constantes de Dirac, $\gamma^{(A)}$, que são definidas em um referencial inercial e satisfazem às relações de anti-comutação

$$\gamma^{(A)}\gamma^{(B)} + \gamma^{(B)}\gamma^{(A)} = 2\eta^{AB}\,\mathbb{1} \qquad (2.4.23)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz unidade 4 x 4.

No sistema de coordenadas da variedade, estas matrizes formam campos definidos por

$$\gamma^\mu = e^\mu{}_{(A)}\gamma^{(A)} \qquad (2.4.24)$$

que satisfazem às relações

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{1} \qquad (2.4.25)$$

O campo de matrizes de Dirac, dado pela eq.(24), comporta-se como um 4-vetor sob transformações de coordenadas da variedade, e transforma-se de acordo com

$$\gamma^{\mu a'}{}_{b'} = S^{a'}{}_c (S^{-1})^d{}_{b'} \gamma^{\mu c}{}_d \qquad (2.4.26)$$

sob as transformações de Lorentz locais, onde tem-se que

$$(L^{-1})^{A}{}_{B}\gamma^{(B)} = S\gamma^{(A)}S^{-1} \qquad (2.4.27)$$

sem alterar as matrizes constantes de Dirac.

O espinor conjugado de ψ é expresso por $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{(0)}$ onde $\psi^{\dagger}$ é o adjunto de ψ e $\gamma^{(0)}$ é uma das matrizes constantes de Dirac.

A compatibilização das relações de anti-comutação com o fato da derivada covariante da métrica ser nula pode ser obtida considerando-se que

$$\dot{\nabla}_{\lambda}\gamma^{(A)} = \partial_{\lambda}\gamma^{(A)} + \omega^{A}{}_{\lambda B}\gamma^{(B)} - \dot{\Gamma}_{\lambda}\gamma^{(A)} + \gamma^{(A)}\dot{\Gamma}_{\lambda} = 0 \qquad (2.4.28)$$

Neste caso, a conexão espinorial pode ser escrita em termos da conexão de Lorentz de acordo com

$$\dot{\Gamma}_{\lambda} = \frac{1}{8}\,\omega^{A}{}_{\lambda B}(\gamma^{B}\gamma_{A} - \gamma_{A}\gamma^{B}) \qquad (2.4.29)$$

ou pode ser expressa em termos das componentes da conexão no sistema de coordenadas das variedades através da equação

$$\dot{\Gamma}_{\alpha} = -\frac{1}{8}\{\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\gamma_{\mu} - (\partial_{\alpha}\gamma_{\mu})\gamma^{\mu} - \{^{\rho}_{\mu\alpha}\}(\gamma^{\mu}\gamma_{\rho} - \gamma_{\rho}\gamma_{\mu})\} \qquad (2.4.30)$$

Agora podemos definir a densidade lagrangiana para um campo espinorial acoplano com a teoria de Einstein-Maxwell, através da realização do acoplamento mínimo da eq.(1.2.37) com o campo gravitacional, de acordo com as eqs.(3.34) e (3.35). Este procedimento resulta em

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \dot{\Gamma}_{\mu} + iqA_{\mu})\psi$$

$$- (\partial_{\mu}\bar{\psi} + \bar{\psi}\dot{\bar{\Gamma}}_{\mu} - iqA_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi - 2im\bar{\psi}\psi\} \qquad (2.4.31)$$

Por fim, observamos que o tensor momentum-energia do campo espinorial não pode ser obtido a partir da definição dada pela eq.(3.38) considerando-se apenas a variação da métrica . As variações das tetradas devem ser levadas em consideração. Neste caso, o tensor momentum-energia fica definido por

$$\int \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e^{\mu}_{(A)}}\,\delta e^{\mu}_{(A)}\,d^4x = -\frac{1}{2c}\int e\,T^{\mu}{}_{\nu}\,e^{(A)}\,\delta e^{(A)}_{\mu}\,\delta e^{\nu}_{(A)}\,d^4x \qquad (2.4.32)$$

onde $e = \det(e^{(A)}_{\mu})$, tendo em vista que

$$\delta g^{\mu\nu} = e^{\nu}_{(B)}\,\delta e^{(A)\mu} + e^{(A)\mu}\,\delta e_{(B)}{}^{\nu} \qquad (2.4.33)$$

e

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\,e\,e^{(A)}_{\mu}\,\delta e^{\mu}_{(A)} \qquad (2.3.34)$$

CAPÍTULO 3

TEORIAS UNIFICADAS EM UMA GEOMETRIA DE CARTAN

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo fazemos uma apresentação das teorias unificadas da gravitação e do eletromagnetismo que associam o eletromagnetismo à torção de uma geometria de Cartan quadrimensional.

Inicialmente, apresentamos as razões que justificam as tentativas de obter-se uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo.

A seguir, fazemos breves comentários sobre as teorias que não realizam a decomposição da torção, pois estamos interessados nas teorias mais recentes, onde esta decomposição é realizada.

Depois, apresentamos as teorias que decompõem arbitrariamente a torção e mostramos diversos problemas que existem nas mesmas. E, em seguinda, fazemos uma exposição das teorias onde a torção é decomposta em partes irredutíveis que, embora superiores às primeiras, também apresentam diversos problemas.

Finalmente, resumimos algunas trabalhos recentes que associam a torção e transformações conforme das tetradas, mostrando que as transformações do traço da torção resultantes da transformações conforme são semelhantes às transformações de gauge do 4-vetor potencial, e que o comprimento é conservado sob transporte paralelo, neste caso. Estes resultados sugerem uma possível interpretação geométrica para as transformações de gauge.

3.2 - A NECESSIDADE DE UMA TEORIA UNIFICADA

A partir do surgimento da Teoria da Relatividade Geral, as interações fundamentais da natureza ficaram descritas por duas maneiras distintas. A gravitação passou a ser considerada como uma manifestação da estrutura geométrica do espaço-tempo, enquanto as outras interações continuaram a ser tratadas como estruturas exteriores ao espaço-tempo. Mas a geometria do espaço-tempo não ficou determinada completamente pela teoria da gravitação de Einstein, exceto para o vazio, pois a determinação do tensor momentum-energia das fontes do campo gravitacional não pode ser realizada sem o auxílio de outras teorias físicas.

Insatisfeito com tal situação, Einstein considerou a Teoria da Relatividade Geral como sendo incompleta e provisória, afirmando que ela era apenas uma teoria do campo gravitacional onde este campo estaria artificialmente isolado de um campo total, que unificaria todas as interações através de uma teoria que ele ainda desconhecia (6).

A fim de solucionar tal problema ele procurou obter uma teoria que descrevesse geometricamente a gravitação e o eletromagnetismo, a chamada teoria do campo unificado. As interações nucleares não foram consideradas porque, naquela época, a mêcanica quântica estava apenas começando a surgir. Desde então muitos físicos têm tentado obter uma teoria unificada, mas sem grande sucesso.

Estas tentativas não utilizaram a estrutura geométrica da Teoria da Relatividade Geral porque os elementos desta geometria são tão restritos que as equações de Einstein os determinam completamente. Logo, não há meios de impor-se condições adicionais que resultem nas equações da eletrodinâmica (28).

A descrição geométrica da gravitação e do eletromagnetismo só pode ser conseguida através da introdução de novos elementos nesta estrutura geométrica. Isto pode ser feito de três maneiras: mantendo-se a estrutura existente na Teoria da Relatividade Geral e aumentando-se o número de dimensões da geometria; modificando-se a estrutura geométrica através do uso de uma conexão mais geral do que o símbolo de Christoffel em uma geometria quadrimensional; e utilizando-se uma geometria mais complexa do que a da Teoria da Relatividade Geral com mais de quatro dimensões.

A estrutura de uma variedade métrica com uma conexão qualquer apresenta três elementos principais: curvatura, homotetia e torção (ver apêndice A). Estes elementos contêm graus de liberdade em número suficiente para tornar possível a construção de uma teoria unificada.

Através de uma das maneiras citadas acima, e considerando a existência de um ou de vários destes elementos, as tentativas de formular uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo procuraram obter, de forma rigorosa ou aproximada, os resultados da teoria de Einstein-Maxwell.

A formulação de uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo tem como pressuposto a possibilidade de escrever-se o eletromagnetismo em termos geométricos, nos moldes da geometrização da gravitação realizada pela Teoria da Relatividade Geral. Porém, apesar da gravitação e do eletromagnetismo serem semelhantes em muitos aspectos, existem diferenças fundamentais entre estas interações.

A principal diferença entre a gravitação e o eletromagnetismo, do ponto de vista da construção de uma teoria geométrica, reside na não existência de um princípio de equivalência para o eletromagnetismo. O acoplamento de campos e partículas com o campo eletromagnético depende das propriedades específicas dos mesmos, essencialmente da carga elétrica.

A maior dificuldade que existe com relação à obtenção de uma descrição geométrica da força de Lorentz reside no fato da trajetória de uma partícula carregada em um campo eletromagnético depender da razão entre a carga e a massa da partícula, que não é uma constante universal.

Por outro lado, a descrição geométrica do acoplamento de outros campos com o campo eletromagnético é dificultado pelo fato deste acoplamento depender das cargas elétrica dos campos que são, em geral, diferentes em sinal e em magnitude.

Por fim, pode argumentar-se que estas dificuldades surgem quando as fontes do campo eletromagnético são levadas em consideração. Entretanto, mesmo para o campo na ausência de fontes, permanece a dificuldade de obter-se uma descrição geométrica para as transformações de gauge do 4-vetor potencial.

Mas, apesar das dificuldades e das tentativas infrutíferas, a procura de uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo nunca foi completamente abandonada.

3.3 - *TEORIAS UNIFICADAS QUE ASSOCIAM O ELETROMAGNETISMO À TORÇÃO*

Recentemente, surgiram novas propostas de unificação do eletromagnetismo e da gravitação em uma geometria de

Cartan quadrimensional, onde o eletromagnetismo é associado à torção, que adotam um ponto de vista diferente dos trabalhos anteriores.

Uma variedade diferenciável tem uma geometria de Cartan quando ela é dotada de uma conexão métrica, com torção, cujas componentes são dadas por

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \{^{\alpha}_{\mu\nu}\} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{3.3.1}$$

onde $K^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ é o tensor de contorção, determinado pela métrica e pela torção através da relação

$$K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}(g_{\lambda\mu}\tau^{\lambda}{}_{\beta\nu} + g_{\lambda\nu}\tau^{\lambda}{}_{\beta\mu}) + \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{3.3.2}$$

Este tensor satisfaz à condição

$$g_{\alpha\nu}K^{\alpha}{}_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}K^{\alpha}{}_{\beta\nu} = 0 \tag{3.3.3}$$

A derivada covariante da métrica, na geometria de Cartan, é definida por

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu;\alpha} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} \tag{3.3.4}$$

Substituindo-se a eq.(1) na eq.(4), tem-se como resultado a equação

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \dot{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} - K^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - K^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} = 0 \qquad (3.3.5)$$

Portanto, o comprimento é conservado na geometria de Cartan.

A torção pode ser decomposta, em partes irredutíveis, de acordo com (18)

$$\tau^\alpha{}_{\mu\nu} = L^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\delta^\alpha_\mu \tau_\nu - \delta^\alpha_\nu \tau_\mu\right) - \frac{1}{3}\eta^\alpha{}_{\mu\nu\beta}\Sigma^\beta \qquad (3.3.6)$$

onde

$$\tau_\mu = \tau^\alpha{}_{\alpha\mu} \qquad (3.3.7)$$

é o traço da torção,

$$\Sigma_\mu = \tau^{\alpha}{}^{*}_{\alpha\mu} \qquad (3.3.8)$$

é o pseudo-traço da torção, e

$$L^\alpha{}_{\mu\nu} \qquad (3.3.9)$$

é a parte sem traço e sem pseudo-traço, que satisfaz a $L^\alpha{}_{\alpha\mu} = 0$ e a $L^{\alpha}{}^{*}_{\alpha\mu} = 0$

O tensor de curvatura da geometria de Cartan, definido pela eq.(A.11), quando a conexão é dada pela eq.(1), tem as seguintes simetrias

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = - R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha} \qquad (3.3.10)$$

e

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = - R_{\nu\mu\alpha\beta} \qquad (3.3.11)$$

Este tensor satisfaz as identidades

$$R^{\mu}{}_{\{\nu\rho\alpha\}} = - 2\tau^{\mu}{}_{\{\nu\rho:\sigma\}} + 4\tau^{\alpha}{}_{\{\nu\rho}\tau^{\mu}{}_{\sigma\}\alpha} \qquad (3.3.12)$$

onde

$$R^{\mu}{}_{\{\nu\rho\sigma\}} \equiv R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + R^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} + R^{\mu}{}_{\sigma\nu\rho} \qquad (3.3.13)$$

Também são válidas as identidades de Bianchi generalizadas, dadas por (18)

$$R^{\alpha}{}_{\varepsilon\{\mu\nu:\lambda\}} = 2R^{\alpha}{}_{\varepsilon\sigma\{\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda\}} \qquad (3.4.14)$$

As teorias unificadas que utilizam uma geometria de Cartan podem ser classificadas de acordo com a ausência ou não da decomposição da torção, e quanto ao fato desta decomposição ser arbitrária ou não.

Inicialmente, consideramos as teorias sem decomposição da torção; mas faremos apenas breves comentários sobre as mesmas. Maiores detalhes e as referências originais poderão ser encontrados nos trabalhos de M. A. Tonnelat (28) e de C. G. de Oliveira (29,30), pois estamos interessados nas tentativas de unificação mais recentes, onde a decomposição da torção é realizada. A primeira tentativa de obter-se uma teoria unificada utilizando uma geometria de Cartan foi realizada por Einstein. Mas a teoria que ele propôs apresenta dois problemas principais: na aproximação para campos fracos não há acoplamento entre a gravitação e o eletromagnetismo e, a torção intervem nas equações de campo sem comparecer nas equações do movimento das partículas. Infield e Mariany também procuraram obter uma teoria unificada, através de uma associação explícita entre a torção e o eletromagnetismo, mas sem sucesso. Finalmente, existe a teoria assimétrica de Einstein-Schrödinger, onde o eletromagnetismo é associado à parte anti-simétrica da métrica, também sem grande sucesso.

A seguir, apresentaremos as teorias onde a torção é decomposta arbitrariamente, que surgiram recentemente.

Considerando que o campo eletromagnético deve ser introduzido na geometria através da conexão, Batakis (31) utilizou uma geometria de Cartan cuja torção é dada por

$$\tau^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{4}{3}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}F_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{[\beta}F_{\gamma]\mu} + g_{\mu[\gamma}F_{\beta]}{}^{\alpha}\right)B^{\mu} \qquad (3.3.15)$$

onde

$$F_{\alpha\beta} = 2\,A_{[\beta;\alpha]} \tag{3.3.16}$$

é o campo eletromagnético e $B_\alpha = \partial_\alpha B(X)$.

A densidade lagrangiana da teoria é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R \tag{3.3.17}$$

onde $G = -B_\alpha B^\alpha$ desempenha um papel análogo ao da constante gravitacional da teoria de Newton, e

$$R = \dot{R} + B_\alpha B^\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.3.18}$$

é o escalar de curvatura da geometria de Cartan.

Assume-se que não há lagrangiana para o campo B(X) e, que o acoplamento do eletromagnetismo e da gravitação com a matéria é dado por

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{4\pi} A_\alpha J^\alpha + \mathcal{L}_M \tag{3.3.19}$$

Nesta equação, J^α é a densidade de corrente elétrica e $\mathcal{L}_M$ é a densidade lagrangiana da matéria. Esta lagrangiana não apresenta interação com o campo eletromagnético nem com o campo B.

As equações de campo são obtidas através das variações de B(X), A_μ, $g_{\mu\nu}$ e dos campos cujas densidades lagrangianas são dadas por $\pounds_M$, na ação formada com a densidade lagrangiana dada pela soma das eqs.(17) e (19). Este procedimento conduz às equações de Maxwell e às equações

$$\{(1/B_\mu B^\mu)\ \dot{R}\, B^\alpha\}_{;\alpha} = 0 \tag{3.3.20}$$

e

$$\dot{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot{R} = 8\pi B_\mu B^\mu \{t^{(B)}_{\alpha\beta} + t^{(EM)}_{\alpha\beta} + t^{(M)}_{\alpha\beta}\} \tag{3,3,21}$$

onde $t^{(EM)}_{\alpha\beta}$ é o tensor momentum-energia do campo eletromagnético, $t^{(M)}_{\alpha\beta}$ é o tensor momentum-energia obtido a partir de $\pounds_M$, e

$$t^{(B)}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi B_\mu B^\mu} \dot{R} B_\alpha B_\beta \tag{3.3.22}$$

Tomando o traço da eq.(21), obtem-se que

$$-2\dot{R} = 8\pi B_\alpha B^\alpha t^{(M)} \tag{3.3.23}$$

onde $t^{(M)}$ é o traço de $t^{(M)}_{\alpha\beta}$.

As leis de conservação obtidas a partir da eq.(21) resultam em

$$(B_\mu B^\mu)^{;\beta}\{t^{(B)}_{\alpha\beta} + t^{(EM)}_{\alpha\beta} + t^{(M)}_{\alpha\beta}\} + B_\mu B^\mu \{-\frac{1}{8\pi B_\nu B^\nu} RB_\beta (B_\alpha{}^{;\beta})$$

$$+ \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} J^\beta + t^{(M);\beta}_{\alpha\beta}\} = 0 \qquad (3.3.24)$$

Mas esta teoria apresenta uma série de problemas. Em primeiro lugar, a comparação com a Teoria da Relatividade Geral só é possível quando o campo B(x) é introduzido de um modo artificial. Mesmo assim, as duas teorias diferem, devido a eq. (23), inclusive quando $G = -B_\alpha B^\alpha$ é constante.

Em segundo lugar, falta justificar a ausência de uma dinâmica para o campo B(x), e esclarecer a sua interação com a matéria, da qual decorre a modificação das leis de conservação. Em particular, as equações do movimento de um fluido carregado diferem das equações obtidas a partir da teoria de Einstein-Maxwell, quando G é constante (31).

Finalmente a geometrização do campo eletromagnético é realizada através de uma decomposição arbitrária e artificial da torção. Uma tal associação impossibilita a interpretação das transformações de gauge, eq.(1.2.21), em termos geométricos.

Uma outra teoria foi proposta por Hammond (32) que, em lugar do campo eletromagnético, introduziu o 4-vetor potencial ao nível da conexão através da suposição de que, além de uma parte simétrica $\Lambda^\sigma{}_{\mu\nu}$ que descreve a gravitação, a conexão deve também conter termos lineares com relação a um vetor ϕ_μ, em analogia com a teoria unificada de Weyl. Neste caso, a forma mais geral da conexão é dada por

$$\Omega^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Lambda^{\sigma}{}_{\mu\nu} + a\delta^{\sigma}{}_{\nu}\phi_{\mu} + \delta^{\sigma}{}_{\mu}\phi_{\nu} \qquad (3.3.25)$$

onde a é uma constante adimensional.

A derivada covariante associada a esta conexão é definida, para um vetor A^{σ} qualquer, por

$$A^{\sigma}{}_{|\nu} = \partial_{\nu}A^{\sigma} + \Omega^{\sigma}{}_{\mu\nu}A^{\mu} \qquad (3.3.26)$$

O tensor de curvatura dessa geometria é

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = C^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} + a\delta^{\sigma}{}_{\rho}(\phi_{\mu|\nu} + \phi_{\mu}\phi_{\nu})$$

$$- a\,\delta^{\sigma}{}_{\nu}(\phi_{\mu|\rho} - \phi_{\mu}\phi_{\rho}) + \delta^{\sigma}{}_{\mu}(\phi_{\rho|\nu} - \phi_{\nu|\rho}) \qquad (3.3.27)$$

onde

$$C^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = -\partial_{\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu\rho} + \Lambda^{\beta}{}_{\mu\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Lambda^{\beta}{}_{\mu\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta\rho} \qquad (3.3.28)$$

e

$$\phi_{\mu|\nu} = \partial_{\nu}\phi_{\mu} - \phi_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\mu\nu} - (a+1)\phi_{\mu}\phi_{\nu} \qquad (3.3.29)$$

E daí segue que o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente, são

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma} = C_{\mu\nu} + 3a(\phi_{\mu|\nu} + \phi_{\mu}\phi_{\nu}) + \phi_{\mu|\nu} - \phi_{\nu|\mu} \qquad (3.3.30)$$

e

$$R = C + 3a\phi^{\mu}{}_{|\mu} + 3a\phi_{\mu}\phi^{\mu} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \qquad (3.3.31)$$

sendo $C_{\mu\nu} = C^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma}$ e $C = g^{\mu\nu}C_{\mu\nu}$.

Impondo a condição de que a conexão seja métrica, obtem-se que

$$\Lambda^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \{^{\sigma}_{\mu\nu}\} - \phi_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - \phi_{\nu}\delta^{\sigma}{}_{\mu} - (a - 1)\phi^{\sigma}g_{\mu\nu} \qquad (3.3.32)$$

e daí resulta

$$\Omega^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \{^{\sigma}_{\mu\nu}\} + (a - 1)(\delta^{\sigma}{}_{\nu}\phi_{\mu} - g_{\mu\nu}\phi^{\sigma}) \qquad (3.3.33)$$

onde se impõe a condição $a \neq 1$ a fim de que está não seja uma geometria de Riemann. Logo, a constante a pode ser eliminada através de uma redefinição do vetor ϕ_{μ}, resultando em

$$\Omega^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \{^{\sigma}_{\mu\nu}\} + \delta^{\sigma}{}_{\nu}\phi_{\mu} - g_{\mu\nu}\phi^{\sigma} \qquad (3.3.34)$$

com isto, as eq.(31) e (32) podem ser escritas como

$$R_{\theta\nu} = \dot{R}_{\theta\nu} + 2(\phi^{\sigma}\phi_{\sigma}g_{\theta\nu} - \phi_{\theta}\phi_{\nu}) - g_{\theta\nu}\phi^{\sigma}{}_{;\nu} - (\phi_{\theta;\nu} - \phi_{\nu;\theta}) - (\partial_{\nu}\phi_{\theta} - \partial_{\theta}\phi_{\nu}) \qquad (3.3.35)$$

e

$$R = \dot{R} - 6\phi^{\sigma}{}_{;\sigma} - 6\phi^{\sigma}\phi_{\sigma} \qquad (3.3.36)$$

respectivamente.

A introdução do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, nessa geometria é realizada através da suposição de que ϕ_{μ} é proporcional ao potencial eletromagnético, de acordo com a seguinte definição.

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\phi_{\mu} - \partial_{\mu}\phi_{\nu} \tag{3.3.37}$$

onde a substituição das derivadas parciais pelas derivadas covariantes definidas pela eq.(26), não altera o resultado. E a densidade lagrangiana do mesmo é dada por

$$\mathcal{L} = \kappa F^{\theta\nu} R_{\theta\nu} \tag{3.3.38}$$

onde κ é uma constante.

A ação proposta para esta teoria é

$$S = \int \sqrt{-g}(R + 6\phi_{\sigma}\phi^{\sigma} - \kappa F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \phi^{\sigma}{}_{;\sigma} + L_M)\, d^4x \tag{3.3.39}$$

sendo L_M a lagrangiana da matéria. Desta ação são obtidas as seguintes equações para o campo eletromagnético: a eq.(2.4.10) e a equação

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{4\kappa} (12\phi^{\mu} + B\, j^{\mu}) \tag{3.3.40}$$

onde B é uma constante tal que:

$$B\sqrt{-g}\, j^{\mu} = \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta\phi_{\mu}} \tag{3.3.41}$$

As equações do campo gravitacional ficam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = -2\kappa(T^{(EM)}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) - AT^{(M)}_{\mu\nu} \qquad (3.3.42)$$

onde $T^{(EM)}_{\mu\nu}$ é dado pela eq.(2.4.7),

$$t_{\mu\nu} = \frac{3}{\kappa} (\phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\phi_\sigma\phi^\sigma) \qquad (3.3.43)$$

e A é uma constante tal que:

$$\sqrt{-g}\, T^{(M)}_{\mu\nu} = \frac{1}{A} \frac{\delta(\sqrt{-g}\, L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (3.3.44)$$

Na ausência de matéria, as leis de conservação obtidas a partir da eq.(42) implicam na imposição da gauge de Lorentz ao 4-vetor potencial, isto é, $\phi^\alpha{}_{;\alpha} = 0$.

Quanto ao tensor dado pela eq.(43), sugere-se que ele é responsável pelas forças necessárias para manter uma partícula carregada unida.

Mas esta teoria também apresenta sérios problemas. Em primeiro lugar, ela não é uma geometrização do eletromagnetismo, mas de um campo de Procca, como indicam a eq.(39) ou eq.(40).

Em segundo lugar, quando o campo $F_{\mu\nu}$ é nulo a teoria não é equivalente à Teoria da Relatividade Geral. Além disso, a interpretação sugerida para o tensor dado pela eq.(43) não é satisfatória, uma vez que o mesmo não é nulo no caso de uma onda eletromagnética, onde não há carga elétrica.

Finalmente, como na teoria de Batakis, também encontramos aqui uma decomposição arbitrária da torção, pois mos mostramos que esta é uma geometria de Cartan onde o traço da torção é dado por

$$\tau_\mu = \frac{3}{2}(a-1)\phi_\mu \tag{3.3.45}$$

sendo a introdução da constante a e da imposição da condição $a \neq 1$ completamente artificial e desnecessária.

A partir das propostas da Batakis e Hammond podemos constatar que uma decomposição arbitrária da conexão tem diversos inconvenientes. Entre eles o fato dela ser artificial e de não conduzir a uma identificação da estrutura geométrica subjacente a tal decomposição.

Tais problemas não existem quando a torção é decomposta em partes irredutíveis, como ocorre nas teorias que agora passamos a examinar.

Inicialmente, temos a proposta de Kruger et all (33) que procura geometrizar a teoria dos monopolos elétricos e magnéticos, considerando o campo elétromagnético como sendo associado a dois potenciais de acordo com a eq.(1.3.6).

As densidades de corrente são geradas por campos espinoriais, com carga elétrica e com carga magnética que apresenta acoplamento mínimo com a geometria da teoria.

Para tanto, é utilizada uma estrutura geométrica cuja conexão é dada por

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \{^{\alpha}_{\mu\nu}\} + U^\alpha_{\mu\nu} \tag{3.3.46}$$

onde $U^\alpha_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas, que podem ter partes simétricas e anti-simétricas com relação aos índices inferiores.

Supondo-se que $\dot{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0$ e que a conexão é métrica, obtem-se que

$$\eta_{\nu\alpha}U^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \eta_{\mu\alpha}U^{\alpha}{}_{\beta\nu} = 0 \qquad (3,3,47)$$

em um referencial inercial global, onde as componentes da conexão são dadas apenas por

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = U^{\alpha}{}_{\mu\nu} \qquad (3.3.48)$$

Com a suposição adicional de que a derivada covariante das matrizes constantes de Dirac é nula, segue que (33)

$$U^{\alpha}{}_{\mu\nu} = -U^{\alpha}{}_{\nu\mu} \qquad (3.3.49)$$

Considerando a relação, dada pela eq.(48), entre a conexão e $U^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ no referencial inercial global e a condição descrita pela eq.(49), verificamos que a torção desse espaço é dado por

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = U^{\alpha}{}_{\mu\nu} \qquad (3.3.50)$$

a qual deve ser completamente anti-simétrica, tendo em vista a eq.(47), podendo ser escrita como

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}\Sigma^{\beta} \qquad (3.3.51)$$

onde Σ^{β} é um campo proporcional ao pseudo-traço definido pela eq.(8), e $\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita.

A conexão espinorial desta geometria é dada por

$$\Gamma_{\rho} = C_{\rho}\,\mathbb{1} + \frac{1}{8}\gamma_5(\gamma_{\rho}\gamma_{\lambda} - \gamma_{\lambda}\gamma_{\rho})\Sigma^{\lambda} \qquad (3.3.52)$$

onde C_ρ é um vetor arbitrário e $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

A introdução dos potenciais eletromagnéticos A_μ e B_μ na geometria ocorre através da associação dos mesmos com os vetores C_ρ e Σ_μ de acordo com

$$C_\mu = - ieA_\mu \tag{3.3.53}$$

$$\Sigma_\mu = \frac{2}{3} qB_\mu \tag{3.3.54}$$

onde $\underline{e}$ e $\underline{q}$ são constantes reais. Tal escolha é motivada pelo fato do acoplamento mínimo de um campo espinorial com a geometria resultar em uma densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - i\,\overline{\psi}\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi \tag{3.3.55}$$

cujas parcelas são, respectivamente, as densidades lagrangianas do campo livre e de interação, sendo esta última dada por

$$\mathcal{L}_{int} = - eA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi + q\,B_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{3.3.56}$$

quando se considera a geometrização dos potenciais segundo a especificação dada pelas eqs. (53) e (54).

A lagrangiana do campo eletromagnético é definida como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \overset{*}{F}_{\mu\nu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}) - A_\mu J^\mu - B_\mu K^\mu \tag{3.3.57}$$

onde, para um campo espinorial,

$$J^\mu = e\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad (3.3.58)$$

e

$$K^\mu = -q\,\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \qquad (3.3.59)$$

Mas enquanto as equações de Maxwell obtidas a partir da eq.(57) implicam na conservação das densidades de corrente dadas pelas eqs.(58) e (59), as equações do campo espinorial resultantes da eq.(55) conduzem à não conservação a corrente magnética onde

$$\partial_\mu K^\mu = -\,2imq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad (3.3.60)$$

sendo m a massa do campo espinorial. Portanto, as cargas elétrica e magnética devem estar associadas a campo espinoriais distintos, tendo massa nula o campo correspondente a esta última.

A conservação das cargas elétrica e magnética está associada a invariância da densidade lagrangiana com relação as transformações de gauge do potencial, eq.(1.2.21), e as transformações

$$\psi_I \rightarrow e^{i\sigma}\psi_I \qquad (3.3.61)$$

e

$$\psi_{II} \rightarrow e^{\sigma\gamma_5}\psi_{II} \qquad (3.3.62)$$

definidas para os campos com carga elétrica e magnética, respectivamente, onde σ é constante.

Os problemas apresentados por essa teoria são vários. Embora a geometrização do potencial B_μ através da eq.(54) seja aceitável o mesmo não ocorre com relação ao potencial A_μ que é associado a um campo vetorial arbitrário, a menos do qual a conexão espinorial é determinada pela conexão do espaço-tempo e pelas matrizes de Dirac (26). Outro ponto fraco reside no fato da lagrangiana do campo eletromagnético, eq.(57), não resultar de condições impostas a um elemento da estrutura geométrica. Por fim, nesta teoria todos os campos existente devem ter cargas iguais e não nulas, em vista das eqs.(53), (54), (58) e (59).

Uma proposta mais elaborada do que a anterior foi formulada por Novello que, procurando geometrizar a eletrodinâmica dos dyons, considerou que a razão entre as cargas elétrica e magnética dos dyons deve ter um papel na geometrização do eletromagnetismo análogo ao que a razão entre as massas inercial e gravitacional das partículas teve com relação à formulação da Teoria da Relatividade Geral, por serem ambas as razões constantes universais(18,27).

Os potenciais eletromagnéticos são introduzidos na geometria através da associação dos mesmos com o traço e com o pseudo-traço da torção. Considera-se que a parte sem traço e sem pseudo-traço da torção é identicamente nula, através do argumento de que não se pretende geometrizar outros campos além do campo eletromagnético, não sendo necessário, portanto, a introdução de graus de liberdade adicionais. Esta estrutura geométrica foi chamada de Geometria de Cartan Restrita.

Nesta geometria a contorção dada pela eq.(3.2), fica descrita de acordo com

$$K^{\rho}{}_{\lambda\nu} = \frac{2}{3}\,(\delta^{\rho}{}_{\lambda}\tau_{\nu} - g_{\lambda\nu}\tau^{\rho}\,) - \frac{1}{3}\,\eta^{\rho}{}_{\pi\nu\alpha}\Sigma^{\alpha} \qquad (3.3.63)$$

Além disso, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente, podem ser escritos como

$$R_{\sigma\lambda} = \dot{R}_{\sigma\lambda} + \frac{4}{3}\,\tau_{\sigma;\lambda} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\,g_{\sigma\lambda} - \frac{8}{9}\,\tau_{\sigma}\tau_{\lambda}$$

$$+ \frac{8}{9}\,g_{\sigma\lambda}\tau^{2} - \frac{2}{9}\,g_{\alpha\lambda}\Sigma^{2} + \frac{2}{9}\,\Sigma_{\sigma}\Sigma_{\lambda} + \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha\rho}{}_{\sigma\lambda}\partial_{\rho}\Sigma_{\alpha} \qquad (3.3.64)$$

e

$$R = \dot{R} + 4\tau^{\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{2}{3}\,(4\tau^{2} - \Sigma^{2}) \qquad (3.3.65)$$

onde $\tau^2 = g^{\mu\nu}\tau_{\mu}\tau_{\nu}$ e $\Sigma^2 = g^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha}\Sigma_{\beta}$.

O campo eletromagnético da eletrodinâmica dos dyons, eq.(1.3.6), é associado à parte anti-simétrica do tensor de Ricci, dada por

$$R_{[\mu\nu]} = \frac{2}{3}\,(\partial_{\nu}\tau_{\mu} - \partial_{\mu}\tau_{\nu} + \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\Sigma_{\alpha}) \qquad (3.3.66)$$

devido a hipótese de geometrização dos potenciais considerada. Este fato leva à consideração da necessidade da lagrangiana do campo eletromagnético ser, pelo menos, quadrática no tensor de curvatura.

Por sua vez, devido a simetria dual da eletrodinâmica dos dyons, o traço e o pseudo-traço da torção não são univocamente determinados, sendo associada uma classe de equivalência de geometrias de Cartan ao campo eletromagnético, pois a cada escolha do ângulo de rotação dual correspondende uma dada geometria de Cartan.

São propostas duas densidades lagrangianas para uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo, a saber

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{k} (R + \sigma^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \tag{3.3.67}$$

e

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{k} [R + \sigma^2 (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2)] + (eA_\mu + bB_\mu) V^\mu \tag{3.3.68}$$

onde σ é uma constante com dimensão de comprimento.

A geometrização dos potenciais é realizada de acordo com

$$\tau_\mu = \frac{3}{4} \beta A_\mu \tag{3.3.69}$$

$$\Sigma_\mu = \frac{3}{2} \beta B_\mu \tag{3.3.70}$$

onde β é uma constante dimensional. No caso da lagrangiana dada pela eq.(67) considera-se que $\beta = 1$ e que a constante γ, dada pela eq.(1.3.36), é igual a unidade.

As equações de campo são obtidas através da suposição de que os potenciais eletromagnéticos são paralelos, tal que

$$B_\mu = \gamma A_\mu \tag{3.3.71}$$

Neste caso, as lagrangianas ficam dadas, a menos de uma divergência total, por

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{k}\{\dot{R} + \sigma^2 \dot{R}_{\mu\nu}\dot{R}^{\mu\nu} - \frac{\sigma^2}{4} f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \sigma^2 A_{\mu;\nu}A^{\mu;\nu}\} \qquad (3.3.72)$$

e

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{k}\{\dot{R} + \frac{3}{2}\beta(1-\gamma^2)A_\mu A^\mu + \sigma^2 [\dot{R}_{\mu\nu}\dot{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\dot{R}^2$$

$$+ (\frac{1}{2} - \frac{\gamma^2}{4}) f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} + \gamma^2 \dot{R}^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\} +](eA_\mu + bB_\mu)V^\mu \qquad (3.3.73)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é dado pela eq.(1.2.20). Considera-se que o potencial eletromagnético satisfaz a gauge de Lorentz, no caso da lagrangiana $\mathcal{L}_1$.

A partir das eqs.(72) e (73) obtem-se respectivamente as equações de campo

$$\begin{cases} f^{\mu\nu}{}_{;\nu} - 2\dot{R}^\mu{}_\nu A^\nu = 0 & (3.3.74) \\ \overset{*}{f}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 & (3.3.75) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = e_o V^\mu & (3.3.76) \\ \overset{*}{f}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 & (3.3.77) \end{cases}$$

com relação à densidade lagrangiana $\mathcal{L}_2$ define-se a carga renormalizada

$$e_o = 2\left(\frac{2e + \gamma b}{\gamma^2 - 2}\right) \tag{3.3.78}$$

e considera-se que

$$\dot{R}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.79}$$

Por fim, também é estudado o acoplamento de um campo espinorial de Dirac com o eletromagnetismo, admitindo - se que o mesmo é obtido através do acoplamento mínimo do campo espinorial com a geometria de Cartan Restrita, isto é, fazendo-se

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \tag{3.3.80}$$

e

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \tag{3.3.81}$$

As equações do movimento para o campo espinorial são obtidas a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu \nabla_\mu \psi \tag{3.3.82}$$

cujo termo de interação é dado por

$$\mathcal{L}_{int} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \tau_\mu + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \psi \Sigma_\mu \tag{3.3.83}$$

Admitindo-se a geometrização dos potenciais eletromagnéticos de acordo com as eqs.(69) e (70), escolhendo-se a constante β como

$$\beta = a\frac{c}{e} \qquad (3.3.84)$$

onde c é a velocidade da luz, e é a carga do elétron e a é uma constante adimensional, a densidade lagrangiana do campo espinorial, eq.(82), reduz-se à da teoria de partículas com carga dupla (27).

A existência de partículas sem carga elétrica efetiva, dada pela eq.(1,3,60), é considerada como resultando da divisão dos dyons em duas classes para as quais tem-se, respectivamente,

$$\gamma^2 = 1 \qquad (3.3.85)$$

e

$$\gamma^2 = -1 \qquad (3.3.86)$$

Assim, as partículas sem carga elétrica efetiva são aquelas cuja razão entre as cargas magnética e elétrica é um número imaginário puro. Como só a carga elétrica efetiva é observável este fato não traz problemas.

Embora esta seja a melhor de todas as propostas de unificação através da torção, ela também apresenta uma série de problemas. Em primeiro lugar, as lagrangianas propostas não apresentam a simetria dual. Logo a hipótese de que os potenciais são paralelos, eq.(71), não corresponde a uma escolha de gauge devido a este fato, embora formalmente pareça como tal, e é uma restrição à teoria. Este problema se evidencia quando constata-se que as equações de campo obtidas também não apresentam a simetria dual além de serem obtidas considerando-se a restrição dada pela eq.(79) e a imposição da gauge de Lorentz.

Em segundo lugar, a explicação para a existência de partículas sem carga elétrica efetiva viola a condição que exige a universalidade da razão entre as cargas magnética e elétrica dos dyons. Além disso os campos espinoriais existentes devem ter cargas iguais e não nulas.

Por fim, nem a teoria de Maxwell e nem a Teoria da Relatividade Geral são casos particulas das teorias unificadas propostas.

3.4 - TRANSFORMAÇÕES CONFORMES E A TORÇÃO

Recentemente, mostrou-se (34, 35) que o traço da torção de uma geometria de Cartan comporta-se, sob transformações conformes das tetradas, de um modo análogo ao do 4-vetor potencial do eletromagnetismo, quando são realizadas transformações de gauge.

As transformações conformes das tetradas são definidas por (34, 35, 30)

$$e'^{(A)}_{\mu} = e^{\sigma(x)} e^{(A)}_{\mu} \tag{3.4.1}$$

onde $\sigma(x)$ é um campo escalar. Estas transformações induzem as transformações conformes da métrica dadas por

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu} \tag{3.4.2}$$

que implicam na transformação do elemento de linha

$$ds' = e^{\sigma(x)} ds \qquad (3.4.3)$$

Admite-se que, sob transformações conformes das tetradas, a conexão de Lorentz permanece invariante. Isto é, tem-se (34, 35)

$$\omega'^{A}{}_{\mu B} = \omega^{A}{}_{\mu B} \qquad (3.4.4)$$

Por outro lado, as componentes da conexão em um referencial qualquer da variedade transformam-se de acordo com

$$\Gamma'^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \delta^{\alpha}{}_{\nu}\partial_{\mu}\sigma \qquad (3.4.5)$$

Este resultado é obtido através da substituição das eqs. (1) e (4) na eq. (2.3.29).

Considerando-se as eqs. (4) e (5), podemos obter as transformações da torção, eq. (A.15), e do tensor de curvatura, eq. (2.3.31), que resultam em

$$R'^{A}{}_{B\mu\nu} = R^{A}{}_{B\mu\nu} \qquad (3.4.6)$$

e

$$\tau'^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}{}_{\mu}\partial_{\mu}\sigma - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\partial_{\mu}\sigma\right) \qquad (3.4.7)$$

respectivamente. Tendo em vista a decomposição da torção em partes irredutíveis dada pela eq. (3.6), verifica-se através da eq. (7) que apenas o traço da torção é afetado pela transformação conforme, variando de acordo com

$$\tau'_\mu = \tau_\mu - \frac{3}{2}\partial_\mu \sigma \tag{3.4.8}$$

Na verdade, na sua origem, as transformações de gauge do potencial eletromagnético estavam relacionadas com as transformações conforme da métrica, eq.(2), pois surgiram em uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo proposto por Weyl pouco depois da formulação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein (36).

Nesta teoria, o 4-vetor potencial foi introduzido em uma geometria cuja conexão, dada por

$$\ddot{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \{^{\alpha}_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\mu \omega_\nu + \delta^\alpha_\nu \omega_\mu - g_{\mu\nu}\omega^\alpha) \tag{3.4.9}$$

é invariante sob transformações conforme da métrica, através da associação do mesmo com o vetor ω_μ. Esta é a chamada geometria de Weyl, sendo o vetor ω_μ também denominado de vetor de Weyl.

Da derivada covariante do determinante da métrica, com relação a esta conexão, obtem-se que (37)

$$\omega_\mu = \frac{1}{4}\ddot{\nabla}_\mu \ell n|g| \tag{3.4.10}$$

donde segue as transformações

$$\omega'_\mu = \omega_\mu + 2\partial_\mu \sigma \tag{3.4.11}$$

para o vetor de Weyl, em decorrência das transformações conformes da métrica eq.(1). Estas transformações, juntamente com as transformações dadas pela eq.(3), foram chamadas de transformações de gauge por Weyl, sendo a unidade arbitrária de comprimento em cada ponto do espaço-tempo denominada de "gauge". Depois que a teoria de Weyl foi rejeitada, as transformações do 4-vetor potencial dadas pela eq.(11) continuaram a receber esta denominação, que já não tinha mais nenhum significado geométrico.

O abandono da teoria de Weyl resultou do fato das variações das unidades de tempo e de comprimento através do transporte paralelo, presente na mesma, implicarem na dependência dos resultados de uma medição com relação a história dos aparelhos de medida, pois

$$\overset{w}{\nabla}_{\mu} g_{\alpha\beta} = \omega_{\mu} g_{\alpha\beta} \qquad (3.4.12)$$

Este resultado está em contradição com a Mecânica Quântica, uma vez que os espectros atômicos não dependem da história passada dos átomos e indicam a existência de padrões de tempo e de comprimento invariantes com relação ao transporte paralelo (23).

Contrariamente ao que ocorre com a teoria de Weyl, as transformações conformes dadas pelas eq.(1) definidas na geometria de Cartan preservam a estrutura geométrica e, consequentemente, resultam na conservação do comprimento sob transporte paralelo (35). Isto ocorre porque a derivada covariante da métrica na geometria de Cartam se transforma de acordo com

$$\nabla'_{\mu} g'_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} \nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} \qquad (3.4.13)$$

tendo em vista as eqs. (3.4), (4) e (5). Portanto, o problema da historicidade não ocorre neste caso.

Finalmente, observamos que a derivada covariante da métrica, com relação ao símbolo de Christoffel, comporta-se de acordo com

$$\dot{\nabla}'_\alpha g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma}\,\dot{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} \tag{3.4.14}$$

sob transformações conformes da métrica.

Portanto, admitindo-se a associação do potencial eletromagnético com o traço da torção, sugerida por Novello e Obuchov, existe a perspectiva de se obter uma interpretação geométrica para as transformações de gauge do potencial através das transformações conformes como foi realizado na teoria de Weyl, mas mantendo a conservação do comprimento e sem introduzir um campo vetorial adicional na geometria como o vetor de Weyl.

CAPÍTULO 4

GEOMETRIZAÇÃO DO ELETROMAGNETISMO ATRAVÉS DA TORÇÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma interpretação geométrica para a eletrodinâmica dos dyons (formulada em termos de dois potenciais) onde os dois potenciais são associados ao traço e ao pseudo-traço da torção e o campo é associado ao divergente covariante da torção. Assim, mostramos que tanto os potenciais quanto o campo podem ser associados à torção, sem o auxílio de uma decomposição arbitrária da mesma e sem recorrer a hipoteses ad hoc, como ocorreu nos trabalhos anteriores.

A seguir, mostramos que as rotações duais e as transformações de gauge generalizadas podem ser interpretadas geometricamente através de transformações da conexão de Lorentz que preservam a estrutura geométrica.

Depois, procuramos obter o acoplamento mínimo do campo gravitacional, de partículas, de campos escalares e de campos espinoriais,com a teoria geométrica dos dyons através do acoplamento mínimo destes campos com a geometria de Cartan. Porém, os resultados da teoria de Einstein-Maxwell não são obtidos.

Finalmente, tantamos conseguir estes resultados através da imposição da invariância conforme, a fim de interpretar as transformações de gauge do 4-vetor potencial como decorrentes das transformações conformes das tetradas. Mas verificamos que a obtenção do acoplamento mínimo é incompatível com a interpretação geométrica das transformações de gauge.

4.2 - TEORIA GEOMÉTRICA DOS DYONS

A fim de que a geometrização do eletromagnetismo através da torção não seja realizada de um modo arbitrário e artificial, deve-se procurar associar ou o campo eletromagnético ou os potenciais com as partes irredutíveis da torção obtidas a partir da decomposição dada pela eq.(3.3.6).

Em geral, a associação do campo eletromagnético com a conexão do espaço-tempo, e em particular com a torção, apresenta diversos inconvenientes. Um deles é o fato desta associação só ser possível através de uma decomposição arbitrária da conexão, que não tem um tensor de segunda ordem como parte irredutível. Este fato pode ser constatado considerando-se a decomposição da torção, dada pela eq.(3.3.6.), e realizando-se a decomposição do tensor de não-metricidade, dado pela eq.(A.29), em partes irredutíveis. Além disso, a introdução dos potenciais na geometria deve ser realizada através de hipóteses ad hoc que definem o campo em termos dos mesmos, o que impossibilita qualque tentativa de obter-se uma interpretação geométrica para as transformações de gauge.

Por outro lado, os dois potenciais da Eletrodinâmica dos Dyons podem ser naturalmente associados ao traço e ao pseudo-traço da torção, permitindo uma possível interpretação geométrica para as transformações de gauge. Neste caso, a geometrização do campo através da associação do mesmo com algum elemento da geometria torna-se um resultado difícil de obter-se. Em Geral, o campo é definido em termos dos potenciais com o auxílio de hipóteses ad-hoc.

Estes problemas surgiram nos trabalhos mencionados no capítulo anterior. Mas mostramos que tais dificuldades podem ser superadas, obtendo uma interpretação geométrica tanto para os potenciais quanto para o campo a partir de hipóteses gerais.

A fim de evitar o surgimento de várias constantes dimensionais, utilizamos o sistema de unidades onde a constante de Planck e a velocidade da luz no vácuo são, respectivamente, iguais à unidade. Neste sistema, a conexão do espaço-tempo e o 4-vetor potencial têm a mesma dimensão.

Neste caso, a geometrização dos potenciais da eletrodinâmica dos dyons é obtida através da associação dos mesmos com o traço e o pseudo-traço da torção, de acordo com

$$A_\mu = \tau_\mu \tag{4.2.1}$$

e

$$B_\mu = \Sigma_\mu \tag{4.2.2}$$

Para que a torção esteja associada apenas ao eletromagnetismo consideramos que a parte sem traço e sem pseudo-traço da torção, eq. (3.3.9), seja idênticamente nula, obtendo uma Geometria de Cartan Restrita.

O campo eletromagnético deve ser associado a um tensor anti-simétrico de segunda ordem obtido a partir de condições impostas na curvatura ou na torção, a fim de que não seja necessária a adoção de hipóteses ad-hoc. Admitindo que este tensor é linear nas derivadas primeiras dos potenciais, as hipóteses anteriores implicam em duas possibilidades: a parte anti-simétrica do tensor de Ricci dada pela eq.(3.3.66), e o divergente covariante da torção dado por

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu} = -\frac{2}{3}\,(\partial_\nu \tau_\mu - \partial_\mu \tau_\nu - \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Sigma_\beta) \qquad (4.2.3)$$

Estas duas possibilidades estão relacionadas entre si através da equação

$$R_{[\nu\sigma]} = \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \tau_\sigma - \partial_\sigma \tau_\nu \qquad (4.2.4)$$

obtida a partir da contração dos índices μ e ρ na identidade do tensor de curvatura dada pela eq.(3.3.12).

Com a finalidade de tornar explícita a associação entre a torção e o eletromagnetismo consideramos que o campo eletromagnético da eletrodinâmica dos dyons, eq.(1.3.6), é descrito geometricamente pelo tensor

$$F_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}\,\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu} \qquad (4.2.5)$$

As equações de campo são obtidas a partir da ação dada pela eq.(1.3.37), quando a eq.(5) é substituída na mesma, através da variação do traço e do pseudo-traço da torção. Neste caso, tem-se as equações de campo

$$(\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu})^{;\nu} = 0 \qquad (4.2.6)$$

e

$$(\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\overset{*}{\mu\nu}})^{;\nu} = 0 \qquad (4.2.7)$$

Mas, como a eletrodinâmica dos dyons é invariante sob rotações duais e sob transformações de gauge generalizadas, a geometrização da teoria só estará completa se ambas as transformações puderem ser interpretadas em termos geométricos.

Em geral, as transformações da conexão de Lorentz definidas por

$$\omega'^{A}{}_{\mu B} = \omega^{A}{}_{\mu B} + C^{A}{}_{\mu B} \qquad (4.2.8)$$

onde $C^{\alpha}{}_{\mu\nu} = e^{\alpha}{}_{(A)} e^{(B)}{}_{\nu} C^{A}{}_{\mu B}$ é o tensor que satisfaz a condição

$$\tau'^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} + C^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} \neq 0 \qquad (4.2.9)$$

preservam a estrutura da geometria de Cartan. Isto ocorre porque a substituição da eq.(9) na eq.(3.3.2), resulta em

$$g_{\alpha\nu} K'^{\alpha}{}_{\beta\mu} + g_{\mu\alpha} K'^{\alpha}{}_{\beta\nu} = 0 \qquad (4.2.10)$$

Portanto, as transformações definidas pela eq.(8) levam uma geometria de Cartan em outra.

As rotações duais e as transformações de gauge generalizadas correspondem a escolhas de $C^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ dadas, respectivamente, por

$$C^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu}(\cos\theta - 1) + \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu}^{*}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (4.2.11)$$

onde $\partial_{\mu}\theta = 0$, e

$$C^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{3}\,(\delta^{\alpha}{}_{\mu} Z_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu} Z_{\mu}) - \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} W_{\beta} \qquad (4.2.12)$$

Os vetores Z_{μ} e W_{μ} satisfazem à condição descrita pela eq.(1.3.13).

A eletrodinâmica de Maxwell resultará de uma escolha de gauge dada pelas eqs.(1.3.43), (1.3.57) e (1.3.58), que fixa a conexão da geometria. Neste caso, as transformações de gauge do 4-vetor potencial descritas pela eq.(1.2.21), podem ser interpretadas como sendo uma decorrência das transformações conformes da tetradas, eq.(3.4.1), de acordo com os resultadas apresentados na seção quatro do capítulo anterior.

Embora a estrutura geométrica seja invariante sob as transformações dadas pela eq.(8). o mesma não ocorre com a geometria. Estas transformações alteram os invariantes, sob transformações de coordenadas, da geometria. O escalar de curvatura transforma-se sob rotações duais e sob transformações de gauge, respectivamente, de acordo com

$$R' = R + 4\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}(\cos\theta - 1) + 4\Sigma^{\alpha}{}_{;\alpha}\operatorname{sen}\theta +$$

$$+ \frac{10}{3}\,(\Sigma^2 - \tau^2)\,\operatorname{sen}^2\theta + 2\tau^{\alpha}\Sigma_{\alpha}\operatorname{sen}2\theta \qquad (4.2.13)$$

e

$$R' = R + 4Z^{\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{2}{3}\,(4Z^2 - W^2) + \frac{4}{3}\,(4\tau_{\alpha}Z^{\alpha} - \tau_{\alpha}W^{\alpha}) \qquad (4.2.14)$$

Com relação às transformações conformes das tetradas, devido as eqs.(3.4.2) e (3.4.6), obtem-se que

$$R' = e^{2\sigma}R \qquad (4.2.15)$$

Mas, adotando o mesmo ponto de vista que Novello (18), quando o mesmo problema surgiu em seus trabalhos, podemos considerar que todas as geometrias relacionadas pelas transformações dadas pelas eqs.(3.4.1), (11) e (8) formam uma classe de equivalência com relação à eletrodinâmica dos dyons. Estas geometrias não poderão ser distinguidas entre si a partir de resultados obtidos desta teoria.

Entretanto, o sucesso de uma teoria geométrica do eletromagnetismo depende também do seu acoplamento com outros campos e com partículas, que deve estar de acordo com os resultados experimentais. Tendo em vista esta exigência, verificamos se a teoria geométrica dos dyons reproduz os resultados da teoria de Einstein-Maxwell.

4.3 - O PRINCÍPIO DE ACOPLAMENTO MÍNIMO

O acoplamento entre a teoria geométrica dos dyons e a gravitação, partículas, campos escalares e campos espinoriais pode ser obtido através do princípio do acoplamento mínimo destes campos e destas partículas com a Geometria de Cartan Restrita, descrito pelas eqs. (3.3.80) e (3.3.81). Além disso, as densidades lagrangianas dos campos e partículas devem ter as mesmas invariâncias que a eletrodinâmica dos dyons, pois a escolha da Gauge de Maxwell implica em uma transformação da geometria que não deve alterar as equações da física.

As exigências de acoplamento mínimo entre a teoria geométrica dos dyons e a gravitação, e de invariância da densidade de lagrangiana do campo gravitacional sob rotações duais e sob transformações de gauge generalizadas, impedem que o escalar de curvatura dado pela eq. (3.3.65) seja escolhido como densidade lagrangiana, em analogia com a Teoria da Relatividade Geral. Isto ocorre porque o escalar de curvatura apresenta termos quadráticos na torção que não satisfazem às invariâncias desejadas.

Este problema pode ser solucionado escolhendo-se como densidade lagrangiana do campo gravitacional o escalar

$$\mathcal{L} = R - 7\tau_{\sigma\mu\nu}\tau^{\sigma\mu\nu} + 6\tau_{\sigma\mu\nu}\tau^{\rho\sigma\mu} \qquad (4.3.1)$$

onde

$$\tau_{\sigma\mu\nu}\tau^{\sigma\mu\nu} = \frac{2}{3}(\tau^2 - \Sigma^2) \qquad (4.3.2)$$

e

$$\tau_{\sigma\rho\mu}\tau^{\rho\sigma\mu} - \frac{1}{3}(\tau^2 - 2\Sigma^2) \qquad (4.3.3)$$

são os únicos termos quadráticos na torção independentes entre si. Os coeficientes dos mesmos são escolhidos de modo que as exigências requeridas sejam satisfeitas. Esta densidade lagrangiana coincide com a lagrangiana de Einstein, eq.(2.3.3), a menos de uma divergência total.

Logo, uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo poderia ter como densidade lagrangiana a soma das eqs. (1) e (1.3.37), onde $F_{\mu\nu}$ é substituído nesta última equação pela eq.(2.5). Os resultados desta teoria são indistinguíveis dos da teoria de Einstein-Maxwell, neste caso.

Com relação ao acoplamento com partículas admitimos as seguintes hipóteses: as equações do movimento das partículas carregadas são dadas pela eq.(1.3.30), admitindo-se que $F_{\mu\nu}$ é dado pela eq.(2.5); e as equações do movimento das partículas sem cargas são obtidas a partir da ação descrita pela eq.(2.3.5), coincidindo com as equações da Teoria da Relatividade Geral.

Quanto ao campo escalar, não obtem-se o acoplamento do mesmo com o eletromagnetismo através do princípio do acoplamento mínimo, pois a densidade lagrangiana resultante é

$$\mathcal{L} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi^* - m^2\phi\phi^* . \tag{4.3.4}$$

Os resultados obtidos para o campo espinorial através do princípio do acoplamento mínimo são mais satisfatórios do que os do campo escalar. Neste caso é conveniente considerar a possibilidade da torção ser um campo complexo.

A conexão espinorial, na geometria de Cartan, é dada por

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8}\{\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\gamma_{\mu} - (\partial_{\alpha}\gamma_{\mu})\gamma^{\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}(\gamma^{\mu}\gamma_{\rho} - \gamma_{\rho}\gamma^{\mu})\} \tag{4.3.5}$$

O procedimento realizado para obtê-la é análogo ao realizado para a obtenção da conexão espinorial, eq.(2.4.30), da Teoria da Relatividade Geral (39), onde supõe-se que

$$\nabla_{\alpha}\gamma^{\mu} = \partial_{\alpha}\gamma^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}\gamma^{\nu} - \Gamma_{\alpha}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\Gamma_{\alpha} = 0 \tag{4.3.6}$$

Assim, na geometria de Cartan as derivadas covariantes dos espinores ψ e $\overline{\psi}$ ficam dadas, respectivamente, por

$$\nabla_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \dot{\Gamma}_\alpha \psi + \frac{1}{8} K^\nu{}_{\alpha\mu}(\gamma^\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma^\mu) \tag{4.3.7}$$

e

$$\nabla_\alpha \overline{\psi} = \partial_\alpha \overline{\psi} + \overline{\psi}\dot{\Gamma}_\alpha - \frac{1}{8} K^{*\nu}{}_{\alpha\mu}(\gamma^\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma^\mu) \tag{4.3.8}$$

onde $\dot{\Gamma}_\alpha$ é definido pela eq.(2.4.30), $K^{*\nu}{}_{\alpha\mu}$ é o complexo conjugado de $K^\nu{}_{\alpha\mu}$, e γ^μ é o campo de matrizes de Dirac dado pela eq. (2.4.24).

Utilizando as propriedades das matrizes de Dirac

$$\gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma_\alpha = - 2\gamma_\mu \quad , \tag{4.3.9}$$

$$\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4\, \mathbb{1} \quad ,$$

e

$$\eta^{\beta\mu\nu\alpha} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha = i 6 \gamma_5 \gamma^\beta \tag{4.3.10}$$

onde $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, obtem-se que

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \gamma^\alpha \dot{\nabla}_\alpha \psi - \gamma^\alpha \psi \tau_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_5 \gamma^\alpha \psi \Sigma_\alpha \tag{4.3.11}$$

e

$$(\nabla_\alpha \overline{\psi}) \gamma^\alpha = (\dot{\nabla}_\alpha \overline{\psi}) \gamma^\alpha - \overline{\psi} \gamma^\alpha \tau^*_\alpha + \frac{i}{2} \overline{\psi} \gamma_5 \gamma^\alpha \Sigma^*_\alpha \tag{4.3.12}$$

Nestas equações $\dot{\nabla}_\alpha\psi$ e $\dot{\nabla}_\alpha\bar{\psi}$ são definidos, respectivamente, pelas eqs.(2.4.21) e (2.4.22).

Assim, considerando estes resultados, a generalização da densidade lagrangiana dada pela eq.(1.2.32) para a Geometria de Cartan Restrita, de acordo com o princípio do acoplamento mínimo, fica dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - (\nabla_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi + 2im\bar{\psi}\psi\} \qquad (4.3.13)$$

Esta densidade lagrangiana pode ser decomposta, utilizando as eqs. (11) e (12), em

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - (\dot{\nabla}_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi + 2im\bar{\psi}\psi\} + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\ \mathrm{Im}\tau_\mu$$
$$+ i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi\ \mathrm{Re}\Sigma_\mu \qquad (4.3.14)$$

onde

$$\mathrm{Im}\tau^\mu = -\frac{i}{2}(\tau_\mu - \tau_\mu^*) \qquad (4.3.15)$$

e

$$\mathrm{Re}\Sigma_\mu = \frac{1}{2}(\Sigma_\mu + \Sigma_\mu^*) \qquad (4.3.16)$$

Considerando-se a eletrodinâmica dos dyons na Gauge de Maxwell, pode-se concluir através da comparação da eq.(2.4.31) com a eq.(14) que os resultados da teoria de Einstein-Maxwell serão obtidos se o traço da torção for imaginário puro e se a geometrização do 4-vetor potencial for realizada de acordo com

$$\tau_\mu = i\, A_\mu \tag{4.3.17}$$

em lugar de ser através da eq.(2.1).

Para que uma tal escolha não invalide a associação entre o campo eletromagnético e o divergente covariante da torção, nem viole a invariância dual, é necessário substituir as eqs.(2.2) e (2.5) pelas equações

$$\Sigma_\mu = i\, B_\mu \tag{4.3.18}$$

e

$$F_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}\, i \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu} \tag{4.3.19}$$

Além disso, os campos Z_μ e W_μ, dados na eq.(2.12), também devem ser imaginários puros. Neste caso, o campo espinorial não interage com o pseudo-potencial B_μ, e não apresenta a invariância dual.

Mas a simetria dual pode ser preservada através de outra geometrização dos potenciais dada por

$$\begin{pmatrix} \tau_\mu \\ \Sigma_\mu \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{pmatrix} A_\mu + \gamma B_\mu \\ B_\mu - \gamma A_\mu \end{pmatrix} \tag{4.3.20}$$

onde γ é a razão entre as cargas magnética e elétrica dos dyons definida pela eq.(1.3.36). Substituindo a eq.(20) na eq. (2.3), e comparando com as eqs. (1.3.6) e (1.3.7), obtem-se que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\left(F_{\mu\nu} + \gamma F^*_{\mu\nu}\right) = -\frac{3}{3}\,(1-i)\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu} \tag{4.3.21}$$

Passando a lagrangiana da eletrodinâmica dos dyons, eq.(1.3.37), a ser identificada com

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{16\pi c} \cdot \frac{9}{4} (1 - i)^2 \nabla_\alpha \hat{\tau}^\alpha{}_{\mu\nu} \nabla_\beta \tau^{\beta\mu\nu} \qquad (4.3.22)$$

Agora a interação do campo espinorial com o eletromagnetismo torna-se

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} [\bar{\psi}\gamma^\mu \psi (A_\mu + \gamma B_\mu) + i \bar{\psi}\gamma_5 \gamma^\mu \psi (B_\mu - \gamma A_\mu)] \qquad (4.3.23)$$

Esta segunda hipótese da geometrização dos potenciais impede que as rotações duais recebam uma interpretação geométrica, pois a torção é invariante sob as mesmas de acordo com a eq. (20), embora todos os resultados obtidos apresentem esta invariância. Quanto às transformações de gauge generalizadas, eq. (2.12), verifica-se que a lagrangiana do campo espinorial não é invariante sob as mesmas.

Portanto, o acoplamento do campo espinorial com a Geometria de Cartan Restrita, neste caso, não satisfaz as invariâncias da eletrodinâmica dos dyons impedindo que a passagem à Gauge de Maxwell possa ser realizada.

4.4 - O PRINCIPIO DA INVARIÂNCIA CONFORME

Considerando a teoria geométrica dos dyons, apresentada na segunda seção deste capítulo, na Gauge de Maxwell, investigamos a possibilidade de interpretar geometricamente as transformações de geuge do 4-vetor potencial como decorrentes de transformações conformes das tetradas, tendo como motivação os resultados apresentados na última seção do capítulo anterior.

Supondo que esta interpretação também deva ser válida na presença de campos gravitacionais, partículas, campos escalares e campos espinoriais, procuramos obter o acoplamento destes campos e destas partículas com a teoria geométrica dos dyons a partir da imposição da invariância conforme nas densidades lagrangianas dos mesmos.

Pode interpretar-se que o conjunto de transformações dadas pelas eqs.(3.4.1) e (3.4.4) origina uma mudança das unidades de tempo e de comprimento, realizada nos referenciais inerciais locais associados através destas transformações, dada por

$$dt' = e^{\sigma}dt \qquad (4.4.1)$$

e

$$d\ell' = e^{\sigma}d\ell \qquad (4.4.2)$$

Estas equações são obtidas através da substituição das eqs.(3.4.2) e (3.4.3) nas eqs.(2.3.8) e (2.3.9).

Como as mudanças de unidades ocorrem localmente , as transformações dadas pelas eqs.(1) e (2) implicam no uso de um sistema de unidades diferente em cada ponto do espaço-tempo. Logo, as unidades de todas as grandezas variarão de ponto para ponto, formando campos definidos em todo o espaço-tempo, analogamente ao que ocorre com as unidade de tempo e de comprimento.

Neste caso, o princípio da homogeneidade dimensional, que implica na invariância das equações da física sob trans formações de unidades e que usualmente é considerado do ponto de vista das transformações de unidades definidas globalmente, deve ser estendido para o caso em que estas transformações são definidas localmente e apresentam um fator de conversão dependente das coordenadas do espaço-tempo.

Porém, enquanto é possível dar uma interpretação geométrica para as transformações das unidades de tempo e de comprimento, o mesmo não ocorre com as unidades das outras grandezas fundamentais, pois elas não estão associadas a elementos da geometria.

Adotando esta interpretação para as transformações conformes, Bekenstein e Meisels (40) fizeram uma analogia entre o princípio da invariância sob transformações de gauge de segunda espécie e o princípio da invariância sob transformações de sistemas de unidades locais que eles chamaram de princípio da invariância conforme. Mas eles não chegaram a apresentar o campo de gauge que corresponderia ao 4-vetor potencial do eletromagnetismo, embora tenham demonstrado que as dinâmicas das partículas fundamentais (léptons e quarks) e dos campos através dos quais elas interagem (Maxwell, gluon, W e Higgs), de acordo com as teorias atuais das interações fortes, fracas e eletromagnéticas, satisfazem ao princípio da invariância conforme.

Além disso, eles demonstraram que a imposição da invariância conforme ao campo que determina a variação das massas dos campos e partículas conduz necessariamente à Teoria da Relatividade Geral admitindo-se que este campo também descreva a gravitação. Neste caso, será impossível distinguir-se os sistemas de unidades diferentes entre si, a partir das equações da física.

A seguir apresentamos os principais resultados obtidos por eles tendo em vista uma posterior adaptação para a teoria geométrica dos dyons, onde procuramos identificar o traço da torção como o campo de gauge necessário para a implementação do princípio da invariância conforme.

Verifica-se que, sob transformações de unidades locais, a velocidade da luz no vácuo $\underline{c}$, a constante de Planck $\underline{h}$, e a carga elétrica são invariantes. Entretanto, as massas de repouso e a constante gravitacional variam, respectivamente, de acordo com

$$m' = e^{-\sigma} m \tag{4.4.3}$$

e

$$G' = e^{-2\sigma} G \tag{4.4.4}$$

Estes resultados estão em concordância com a análise dimensional, e já tinha sido obtidos anteriormente por diversos pesquisadores (41,42).

As transformações das massas não implicam em uma quebra da invariância sob transformações de escala da métrica e representam uma restrição que um campo deve satisfazer a fim de apresentar uma dinâmica conformalmente invariante, a saber

$$2g^{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta m} = 0 \tag{4.4.5}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana do mesmo. Logo, o traço do tensor momento-energia deve conter apenas termos de massa.

A fim de que o princípio de equivalência, na for ma fraca, não seja violado, todas as massas devem ser expressas como

$$m = m_o \beta(x) \tag{4.4.6}$$

onde m_o é uma constante adimensional específica, característica de uma partícula ou campo, e $\beta(x)$ é um campo escalar, que se transforma de acordo com a eq.(3), chamado de campo de massa. Neste caso os sistemas de unidades naturais utilizados na física atômica e na física de partículas são equivalentes. Adicionando-se à hipótese descrita pela eq.(6) a suposição de que a constante gravitacional também é determinada pelo campo de massa de acordo com

$$G = G_o \beta^{-2}(x) \tag{4.4.7}$$

obtem-se a equivalência dos sistemas de unidades naturais de Partículas e de Planck-Wheller. Neste caso, pode-se formular a dinâmica dos campos gravitacional e de massa em termos de uma única ação dada por

$$S = \int (\partial_\alpha \beta \partial^\alpha \beta - \frac{1}{6} \dot{R} \beta^2) \sqrt{-g}\, d^4x \tag{4.4.8}$$

Quando o campo de massa for constante o mesmo ocorre com todas as massas de repouso, e a ação para o campo gravitacional, eq.(8), coincide com a ação da Teoria da Relatividade Geral. Este resultado equivale a fixar o parâmetro σ das transformações conformes. Mas, como a ação dada pela eq.(8) é invariante sob estas transformações, pode concluir-se que a mesma conduz a resultados equivalentes aos da Teoria da Relatividade Geral independentemente dessa escolha, chamada por Dirac (43) de Gauge de Einstein. Este fato foi descoberto através de diferentes maneiras, por diversos pesquisadores.

Um resultado análogo ocorre com as equações do movimento de uma partícula de teste sem carga que são dadas por

$$\frac{d}{dS}(\beta V^{\mu}) - \{{}^{\mu}_{\rho\sigma}\} V^{\rho}V^{\sigma} - \partial^{\mu}\beta = 0 \qquad (4.4.9)$$

Estas equações são obtidas a partir da ação

$$S_p = - m_o \int \beta\, dS \qquad (4.4.10)$$

que é invariante sob as transformações dadas pela eq.(3.4.3).

A invariância conforme da eletrodinâmica resulta da suposição de que o 4-vetor potencial não é alterado pelas transformações conformes, isto é, quando

$$A'_{\mu} = A_{\mu} \qquad (4.4.11)$$

Neste caso, a ação dada pela eq.(2.4.1) não é alterada pelas transformações conformes.

A dinâmica do campo espinorial apresenta a invariância conforme quando as matrizes constante de Dirac não são alteradas pelas transformações conformes e quando o campo espinorial varia de acordo com

$$\psi' = e^{-(3/2)\sigma}\psi \qquad (4.4.12)$$

onde σ é o parâmetro das transformações conformes das tetradas definidas pela eq.(3.4.1), supondo-se que a densidade lagrangiana deste campo é dada pela eq.(2.4.31).

Embora seja possível obter-se a invariância conforme dos campos espinorial e eletromagnético admitindo-se que os mesmos apresentem o acoplamento mínimo com a gravitação, o mesmo não ocorre com o campo escalar cuja ação deve apresentar um acoplamento não-mínimo dado por

$$S = \int \{\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - (m^2 + \frac{1}{6}\dot{R})\phi^2\} \sqrt{-g}\, d^4x \qquad (4.4.13)$$

onde o escalar de curvatura atua como um campo de gauge para compensar as variações do campo escalar que são definidas por

$$\phi' = e^{-\sigma}\phi \qquad (4.4.14)$$

A fim de verificar a validade da hipótese de que as transformações de gauge do 4-vetor potencial da teoria geométrica dos dyons, na Gauge de Maxwell, são resultantes de transformações conformes, procuramos estender os resultados que acabamos de apresentar para o contexto da Geometria de Cartan Restrita.

Antes, porém, é necessário desenvolver um cálculo simultaneamente covariante sob transformações de coordenadas e sob transformações conformes, usualmente chamado de cálculo co-covariante (43,44).

Os tensores ou espinores Y (omitimos os índices tensoriais e espinoriais) que transformam-se de acordo com

$$Y' = e^{n\sigma}Y \tag{4.4.15}$$

onde n é um número real, quando é realizada uma transformação conforme da métrica, são chamados de co-tensores ou de co-espinores de potência n.

Em geral, as derivadas covariantes de co-tensores e de co-espinores são não, respectivamente, co-tensores e co-espinores. Neste caso, é necessário definir uma derivada com estas propriedades chamada de derivada co-covariante.

Para um campo co-escalar ϕ de potência n, tem-se que

$$\nabla'_\alpha\phi' = e^{n\sigma}(\partial_\alpha\phi + n\phi\partial_\alpha\sigma) \tag{4.4.16}$$

Mas, considerando-se que sob as transformações conformes da métrica o traço da torção se transforma de acordo com a eq.(3.4.8), segue que

$$\partial_\mu\sigma = \frac{2}{3}(\tau_\mu - \tau'_\mu) \tag{4.4.17}$$

Logo, através de um procedimento análogo ao realizado para se definir a derivada covariante, eq.(1.2.34), de um campo escalar sob transformações de gauge de segunda espécie, define-se a derivada co-covariante de um campo co-escalar de potência n por

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + \frac{2}{3}n\tau_\mu)\phi \tag{4.4.18}$$

que é um co-vetor de potência $\underline{n}$, isto é, transforma-se de acordo com

$$(D_\mu \phi)' = e^{n\sigma}(D_\mu \phi) \tag{4.4.19}$$

Com relação a um campo co-vetorial A^α , de potência $\underline{n}$, a derivada covariante se transforma de acordo com

$$\nabla'_\mu A'^\alpha = e^{n\sigma}(\nabla'_\mu A^\alpha + nA^\alpha \partial_\mu \sigma) \tag{4.4.20}$$

onde

$$\nabla'_\mu A^\alpha = \partial_\mu A^\alpha + \Gamma'^\alpha{}_{\mu\beta} A^\beta \tag{4.4.21}$$

Substituindo-se a eq.(3.4.5) na eq.(21), pode escrever-se a eq. (20) como

$$\nabla'_\mu A'^\alpha = e^{n\sigma}[\nabla_\mu + (n+1)\partial_\mu \sigma]\, A^\alpha \tag{4.4.22}$$

Portanto, tendo em vista a eq.(17) a derivada co-covariante de um campo co-vetorial A^α de potência $\underline{n}$ é definida por

$$D_\mu A^\alpha = [\nabla_\mu + \frac{2}{3}(n+1)\tau_\mu]\, A^\alpha \tag{4.4.23}$$

Analogamente, para um co-tensor de segunda ordem, tem-se que

$$D_\alpha T^{\mu\nu} = [\nabla_\alpha + \frac{2}{3}(n+2)\tau_\alpha] T^{\mu\nu} \tag{4.4.24}$$

e

$$D_\alpha T_{\mu\nu} = [\nabla_\alpha + \frac{2}{3}(n-2)\tau_\alpha] T_{\mu\nu} \tag{4.4.25}$$

Em particular, como $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ são co-tensores de segunda ordem com potencias $+2$ e -2, respectivamente, segue que

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \qquad (4.4.26)$$

e

$$D_\alpha g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0 \qquad (4.4.27)$$

Logo, a métrica é um tensor co-covariante constante. Em vista deste resultado, pode subir-se e descer-se índices livremente, antes ou depois de realizar-se a derivada co-covariante de um tensor.

A regra de Leibnitz também permanece válida para a derivada co-covariante, e tem-se

$$D_\alpha(TU) = (D_\alpha T)U + T(D_\alpha U) \qquad (4.4.28)$$

para o produto de quaisquer tensores T e U, onde os índices foram omitidos.

Do mesmo modo que a derivada covariante a derivada co-covariante não é comutativa. Em particular, para campos co-escalares e co-vetores de potência n, tem-se, respectivamente,

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = \frac{2}{3} n\phi(\nabla_\nu \tau_\mu - \nabla_\mu \tau_\nu) \qquad (4.4.29)$$

que pode ser escrita como

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = \frac{2}{3} n\phi \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_{\mu\nu} \qquad (4.4.30)$$

e

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)A_\alpha = - R^{\beta}{}_{\alpha\mu\nu}A_\beta + 2\tau^{\beta}{}_{\mu\nu}\nabla_\beta A_\alpha - \frac{2}{3}(n-1)A_\alpha \nabla_\beta \tau^{\beta}{}_{\mu\nu} \qquad (4.4.31)$$

Como admite-se que as matrizes constantes de Dirac são invariantes sob transformações conformes da métrica, considerando-se as eqs.(2.4.24) e (3.4.1), tem-se que

$$\gamma'^{\mu} = e^{-\sigma}\gamma^{\mu} \qquad (4.4.32)$$

Utilizando-se as transformações acima, juntamente com a eq.(3.4.5), na conexão espinorial da geometria de Cartan dada pela eq.(3.5.), obtem-se a seguinte lei de transformação

$$\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \qquad (4.4.33)$$

Para a condição dada pela eq.(3.6.), por um procedimento semelhante, o resultado é

$$\nabla'_\alpha \gamma'^{\mu} = e^{-\sigma}(\nabla_\alpha \gamma^{\mu}) = 0 \qquad (4.4.34)$$

Portanto, as transformações conformes das tetradas preservam a condição dada pela eq.(3.6.) e a conexão espinorial da geometria de Cartan.

Finalmente, em vista dos resultados apresentados acima a derivada co-covariante de um campo co-espinorial de potencia $\underline{n}$, é definida por

$$D_\alpha \psi = (\nabla_\alpha + \frac{2n}{3}\tau_\alpha)\psi \qquad (4.4.35)$$

Considerando-se que o espinor conjugado $\bar{\psi}$ também é um co-espinor de potência n, obtem-se que

$$D_\alpha \bar{\psi} = (\nabla_\alpha + \frac{2}{3} n \tau_\alpha) \bar{\psi} \tag{4.4.36}$$

Apresentado o cálculo co-covariante, passamos a estender os resultados obtidos por Bekenstein e Meisels para o contexto da Geometria de Cartan Restrita.

Na Gauge de Maxwell, a ação da eletrodinâmica dos dyons fica dada por

$$S_e = \int \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\lambda \tau^\lambda{}_{\mu\nu} \nabla_\rho \tau^\rho{}_{\alpha\beta} d^4x \tag{4.4.37}$$

Esta ação é invariante sob transformações conformes, considerando-se as eqs.(4.2.3), (3.4.8) e (3.4.2). Desta última equação, as transformações conformes da métrica, resulta

$$\sqrt{-g'} = e^{4\sigma} \sqrt{-g} \tag{4.4.38}$$

Definimos a ação para os campos gravitacionais e de massa, na Geometria de Cartan Restrita , como

$$S_g = \int \{D_\alpha \beta D^\alpha \beta - \frac{1}{6} R \beta^2\} d^4x \tag{4.4.39}$$

onde R é o escalar de curvatura dado pela eq.(3.3.65) e

$$D_\alpha \beta = (\partial_\alpha - \frac{2}{3} \tau_\alpha) \beta \tag{4.4.40}$$

é a derivada co-covariante do campo de massa. Esta ação coincide com a eq.(8), e os resultados obtidos por Bekenstein e Meisels permanecem válidos na Geometria de Cartan Restrita.

Quanto às partículas, campos escalares e campos espinoriais, o princípio da invariância conforme será automaticamente satisfeito quan o o acoplamento dos mesmos com a Geometria de Cartan Restrita for realizado através da substituição das derivadas parciais e da métrica de Minkowski, respectivamente, pelas derivadas co-covariantes e pela métrica da Geometria de Cartan Restrita. Isto é, o acoplamento ocorre quando as substituições

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \tag{4.4.41}$$

e

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \tag{4.4.42}$$

são realizadas nas densidades lagrangianas que descrevem os campos escalares e os campos espinoriais livres, respectivamente, as eqs.(1.2.31) e (1.2.32). Chamamos a este procedimento de acoplamento co-covariante.

O acoplamento co-covariante de um campos co-escalar ϕ , de potência $\underline{n}$, com a Geometria de Cartan Restrita resulta na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi + \frac{2}{3}n\,\tau_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi^* + \frac{2}{3}n\tau_\beta{}^*\phi^*) - m^2\phi\phi^* \tag{4.4.43}$$

A densidade lagrangiana de um campo escalar que interage com o eletromagnetismo de acordo com o princípio do acoplamento mínimo, eq.(1.2.33), coincide com a equação acima quando a associação en tre o traço da torção e o 4-vetor potencial for dado pela eq.(3.17).

O princípio da invariância conforme exige que o campo co-escalar tenha potência n= -1, transformando-se de acordo com a eq.(14). Neste caso, todos os campos co-escalares existentes devem ter cargas iquais e não nulas.

Campos co-escalares sem carga, de potência n = -1, são acoplados com a Geometria de Cartan Restrita de acordo com

$$\pounds = D_\alpha \phi D^\alpha \phi - (m^2 + \frac{1}{6} R)\phi^2 \qquad (4.4.44)$$

Esta densidade lagrangiana coincide com a da ação dada pela eq. (13), a menos de uma divergência total. Este resultado pode ser verificado através da substituição das eqs.(3.3.65) e (40) na eq.(44) acima.

Por sua vez, a densidade lagrangiana de um campo co-espinorial de potência n, obtida através do acoplamento co-covariante, é dado por

$$\pounds = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi}\gamma^\alpha D_\alpha \psi - (D_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha \psi - 2im\bar{\psi}\psi \} \qquad (4.4.45)$$

e pode ser escrita, considerando-se as eq. (36) e (34), como

$$\pounds = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi}\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - (\nabla_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha \psi - \frac{2}{3} n\bar{\psi}\gamma^\alpha \psi \mathrm{Im}\tau_\alpha - 2im\bar{\psi}\psi \} \qquad (4.4.46)$$

Substituindo as eqs.(3.7) e (3.8), na eq.(46) acima, obtem-se que

$$\pounds = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi}\gamma^\alpha \dot{\nabla}_\alpha \psi - (\dot{\nabla}_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha \psi - \frac{2}{3} (n - \frac{3}{2}) \bar{\psi}\gamma^\alpha \psi \mathrm{Im}\tau_\alpha - 2im\bar{\psi}\psi \} \qquad (4.4.47)$$

A exigência de que a ação do campo co-espinorial seja invariante sob transformações conformes elimina todos os campos com potências diferentes de n = -3/2, e implica no fato de todos os campos existentes terem cargas iguais e diferentes de zero. Neste caso, os campos sem carga podem ser considerados como campos co-espinoriais de potência -3/2 que não acoplam com a torção, sendo as densidades lagrangianas dos mesmos dadas por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\dot{\nabla}_{\alpha}\psi - (\dot{\nabla}_{\alpha}\bar{\psi})\gamma^{\alpha}\psi - 2im\bar{\psi}\psi\} \qquad (4.4.48)$$

Esta densidade lagrangiana é invariante sob transformações conformes, a menos de uma divergência total.

A densidade lagrangiana de um campo espinorial que apresenta o acoplamento mínimo do mesmo com o eletromagnetismo e a gravitação, eq.(2.4.31), coincide com a eq.(45) quando a geometrização do 4-vetor potencial dor dada pela eq.(3.17).

Por fim, as equações do movimento de partículas carregadas podem ser a partir da ação

$$S_p = - m_o \int \beta dS + q \int V^{\mu}(D_{\mu}\beta)\beta^{-1}dS \qquad (4.4.49)$$

que é invariante sob transformações conformes, e onde

$$q \int \beta^{-1}(D_{\mu}\beta)V^{\mu}dS = q \int \{\frac{d\ell n\beta}{dS} + \frac{2}{3}\tau_{\mu}V^{\mu}\}dS \qquad (4.4.50)$$

Neste caso, as equações do movimento ficam dadas por

$$\frac{d}{dS}(\beta V^{\mu}) + \{^{\mu}_{\alpha\beta}\}V^{\alpha}V^{\beta} - \partial^{\mu}\beta = \frac{q}{m}(\nabla_{\alpha}\tau^{\alpha\mu\nu})V_{\nu} \qquad (4.4.51)$$

Uma ação formalmente igual a eq.(49) foi apresentada por Dirac, no contexto da teoria unificada de Weyl (43).

Embora não haja problemas na obtenção das equações do movimento das partículas em uma forma invariante sob transformações conformes, o mesmo não acontece com os campos escalares e os campos espinoriais.

A obtenção do acoplamento mínimo destes campos com o eletromagnetismo, eq.(1.2.33), só é possível quando o traço da torção dor inaginário puro, eq.(3.17). Esta hipótese implica em transformações de gauge do 4-vetor potencial incorretas, pois substituindo-se a eq.(3.17) na eq.(3.4.8) o resultado

$$iA'_{\alpha} = iA_{\alpha} - \frac{3}{2}\partial_{\alpha}\sigma \qquad (4.4.52)$$

coincidirá com a eq.(1.2.21) apenas quando o parâmetro σ também for imaginário puro. Mas isto não é possível porque este parâmetro deve ser real, em vista da eq.(3.4.3).

Portanto, há uma incompatibilidade entre a obtenção do acoplamento mínimo e a obtenção das transformações de gauge do 4-vetor potencial. Este problema é uma decorrência do fato do grupo U(1), das transformações de gauge de segunda espécie, não ser isomorfo ao grupo GL(1.R), das transformações conformes.

CONCLUSÃO

Embora a teoria geométrica dos dyons, formulada no capítulo 4, seja superior em vários aspectos às teorias apresentadas no capítulo 3, ela também apresenta diversos problemas.

Considerando a existência apenas do campo eletromagnético e do campo gravitacional, a densidade lagrangiana formada pela soma das eqs.(4.4.37) e (4.4.39) conduz aos resultados da teoria de Einstein-Maxwell (na Gauge de Einstein) e permite que as transformações de gauge do 4-vetor potencial sejam interpretadas em termos geométricos através das transformações conformes das tetradas. Além disso, tanto o 4-vetor potencial quanto o campo eletromagnético são associados à torção de um modo natural. Entretanto, a teoria é formulada em uma geometria onde a parte sem traço e sem pseudo-traço da torção é idênticamente nula, o mesmo ocorre com o pseudo-traço. A eliminação do pseudo-traço, que é associado a um dos potenciais, poderia ser explicada através de uma rotação dual, com a densidade lagrangiana do campo gravitacional sendo formado por uma combinação das eqs.(4.3.1) e (4.4.39), mas este é um procedimento artificial. A eliminação da parte sem traço e sem pseudo-traço é mais arbitrária ainda, pois não há uma interpretação física para a mesma.

Por fim, o maior problema desta teoria e das teorias anteriores reside no fato de o acoplamento mínimo entre o eletromagnetismo e suas fontes não poder ser obtido de um modo natural, através do acoplamento mínimo destes campos com a Geometria de Cartan Restrita ou através da imposição da invariância conforme. Além disso, os resultados obtidos implicam na igualdade das cargas, de todas as fontes constituidas por campos, as quais devem ser não nulas. Portanto, não há lugar para campos sem carga, a menos que procedimentos artificiais sejam adotados para superar esta dificuldade. Este problema está relacionado com a ausência de um princípio de equivalência para o eletromagnetismo, contrariamente ao que ocorre com a gravitação, e constitui o principal obstáculo no caminho da geometrização do eletromagnetismo.

Portanto, podemos afirmar que não existe uma teoria geométrica do eletromagnetismo, de acordo com as hipóteses formuladas no capítulo 4, que seja satisfatória. Acreditamos que, em geral, a associação entre o eletromagnetismo e a torção não conduz a uma teoria aceitável, pois qualquer que seja a hipótese adotada, a obtenção do acoplamento mínimo entre o campo eletromagnético e suas fontes só será possível através de procedimentos arbitrários e artificiais.

Considerando que a geometria de Cartan tem a estrutura mais geral possível que é compatível com a preservação do comprimento sob transporte paralelo, e que as outras geometrias apresentam características semelhantes às da geometria de Weyl, os resultados obtidos no nosso trabalho indicam que a geometrização do eletromagnetismo através de uma geometria quadrimensional não pode ser obtida de um modo satisfatório. Entretanto, uma conclusão definitiva a respeito desta questão ainda não pode ser formulada, pois existe a possibilidade de que geometrias do tipo da de Weyl sejam utilizadas sem que a não conservação do comprimento sob transporte paralelo conduza a resultados imcompatíveis com as experiências, como ocorre no trabalho de Gregorash e Papini (44).

De qualquer forma, a geometrização do eletromagnetismo em uma geometria de Cartan, ou em uma geometria semelhante à de Weyl, conduziria a uma teoria unificada do tipo fraco, e há quem considere que tais teorias não representam uma verdadeira unificação da gravitação e do eletromagnetismo que só existe em teorias do tipo forte.

Por fim, como observamos na introdução, a unificação das interações fundamentais da natureza é uma questão mais complexa do que a formulação geométrica do eletromagnetismo e está associada ao problema da obtenção de uma teoria quântica da gravitação, que ainda não apresenta solução.

APÊNDICE A

NOTAS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Apresentamos neste apêndice algumas definições e resultados de geometria diferencial, que são utilizados nesta monografia, sem demonstração e de uma maneira suscinta. Maiores detalhes e as demonstrações poderão ser encontrados em Tonellat (28), Lovelock e Hund (45), Oliveira (29,30), e Rebouças (46).

Uma variedade é um conjunto M de pontos, dotado de um atlas, que é localmente homeomorfo a R^n.

Um sistema de coordenadas em um subconjunto aberto S_α da variedade é definido através de uma aplicação biunívoca f_α de S_α sobre um subconjunto aberto de R^n. As coordenadas de cada ponto $P \in S_\alpha$ são definidas como sendo as coordenadas do ponto $f_\alpha(P) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ de R^n que é associado univocamente ao mesmo.

Denomina-se carta ao par (f_α, S_α), e chama-se de atlas ao conjunto de todos estes pares quando

$$M = \bigcup_\alpha S_\alpha \tag{A.1}$$

Dadas duas cartas (f_α, S_α) e (f_β, S_β), diz-se que uma variedade é diferenciácel quando as coordenadas de uma destas cartas puderem ser expressas como funções contínuas das coordenadas da outra, nos pontos pertencentes à interseção $S_\alpha \cap S_\beta$. Neste caso, a aplicação composta $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ é diferenciável e tem inversa também diferenciável.

Na variedade podem ser definidos diversos objetos geométricos como, por exemplo, escalares e tensores.

Um campo tensorial contravariante de ordem 2 (ou de segunda ordem) e covariante de ordem 1 (ou de primeira ordem), por exemplo, tem componentes $T^{\alpha\beta}{}_{\mu}$ que sob transformações do sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$ para o sistema $\{x'^{\alpha}\}$, transformam-se de acordo com

$$T'^{\rho\sigma}{}_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} T^{\alpha\beta}{}_{\mu} \tag{A.2}$$

Em geral, um tensor pode ser contravariante de ordem $\underline{m}$, e covariante de ordem $\underline{n}$, onde $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são dois inteiros positivos quaisquer. Um escalar é um tensor de ordem nula, e um vetor é um tensor de primeira ordem.

Dados dois tensores de mesma ordem, $A^{\alpha}{}_{\beta}$ e $B^{\alpha}{}_{\beta}$, define-se a soma dos mesmos como sendo o tensor

$$C^{\alpha}{}_{\beta} = A^{\alpha}{}_{\beta} + B^{\alpha}{}_{\beta} \tag{A.3}$$

O produto destes tensores é definido como sendo o tensor

$$D^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu} = A^{\alpha}{}_{\beta} B^{\mu}{}_{\nu} \tag{A.4}$$

Igualando-se um índice contrariante a um índice covariante de um tensor e fazendo-se um somatório de todos os valores que o índice resultante pode tomar, operação de contração, obtem-se um outro tensor. Contraíndo-se os índices α e β no tensor cujas componentes são dadas pela eq.(A. 4), o resultado é o tensor

$$G^{\mu}{}_{\nu} = D^{\alpha\mu}{}_{\alpha\nu} \qquad (A.5)$$

Em geral, as derivadas parciais das componentes de um tensor não constituem-se em um novo tensor. Para que possa definir-se derivadas e diferenciais covariantes, sob transformações de coordenadas, é necessário dotar a variedade de uma conexão afim, através da noção de transporte paralelo.

A diferencial absoluta de um campo vetorial A_{μ} é definida por

$$DA_{\mu} = dA_{\mu} - \delta A_{\mu} \qquad (A.6)$$

onde $dA_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} dx^{\nu}$ é a variação do campo devido ao deslocamento infinitesinal e

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} A_{\alpha} dx^{\nu} \qquad (A.7)$$

é a variação do campo devido ao transporte paralelo do mesmo ao longo do deslocamento infinitensimal. As quantidades $\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}$ são as componentes da conexão afim definida na variedade.

A derivada covariante do campo vetorial A_{μ} é um tensor cujas componentes são

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} A_{\alpha} \qquad (A.8)$$

definido por

$$DA_{\mu} = (\nabla_{\nu} A_{\mu}) dx^{\nu} \qquad (A.9)$$

Como o transporte paralelo depende do trajeto ao longo do qual este transporte é realizado, a direção de um vetor A_μ varia quando o mesmo é transportado ao longo de um contorno infinitesimal fechado de acordo com

$$\oint \delta A_\nu = -\frac{1}{2}\iint R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A_\mu ds^{\alpha\beta} \tag{A.10}$$

onde $ds^{\alpha\beta}$ é o elemento infinitesimal de área e

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \tag{A.11}$$

são as componentes do tensor de curvatura da variedade. Este tensor tem as seguintes contrações

$$P_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\mu\alpha\beta} \tag{A.12}$$

$$R_{\nu\beta} \equiv R^\mu{}_{\nu\mu\beta} = \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} \tag{A.13}$$

e

$$R = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \tag{A.14}$$

Estas duas últimas contrações são chamadas, respectivamente, de tensor de Ricci e escalar de curvatura.

Além da curvatura a variedade diferenciável também pode ter uma torção, definida pelo tensor formado pela parte anti-simétrica da conexão

$$\tau^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}) \tag{A.15}$$

Dados dois vetores infinitesimais, $V^{\mu}d\sigma$ e $W^{\mu}d\lambda$, não é possível construir-se um paralelogramo com eles e com os vetores obtidos através do transporte paralelo de cada um destes vetores da direção do outro, quando a variedade é dotada de torção

A soma de $V^{\mu}d\sigma$ com o vetor resultante do transporte paralelo, na sua direção, de $W^{\mu}d\lambda$ é dada por

$$\Omega^{\mu}_{1} = V^{\mu}d_{\sigma} + \{W^{\mu}d\lambda - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}(W^{\nu}d\lambda)(V^{\alpha}d\sigma)\} \qquad (A.16)$$

Analogamente, a soma de $W^{\mu}d\lambda$ com o resultado do transporte de $V^{\mu}d\sigma$, é

$$\Omega^{\mu}_{2} = W^{\mu}d\lambda + \{V^{\mu}d\sigma - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}(V^{\alpha}d\sigma)(W^{\nu}d\lambda)\} \qquad (A.17)$$

Considerando que, neste caso, o elemento infinitesimal de área é dado por $ds^{\nu\alpha} = (W^{\nu}d\lambda)(V^{\alpha}d\sigma)$, pode escrever-se a diferença entre as eqs.(16) e (17), como

$$\Omega^{\mu} = 2\tau^{\mu}{}_{\nu\alpha}ds^{\nu\alpha} \qquad (A.18)$$

Medidas de comprimento e de ângulos só podem ser efetuadas se a variedade tiver uma estrutura geométrica, constituída por um tensor métrico com componentes $g_{\mu\nu}$ simétricas.

As componentes contravariantes e covariantes de um tensor são relacionadas entre si através da métrica. Por exemplo, a relação entre as componentes A_{α} e A^{α} de um vetor é dada pela equação

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta \tag{A.19}$$

Através da métrica pode determinar-se o quadrado do comprimento do intervalo infinitesimal entre os pontos com coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, de acordo com

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{A.20}$$

O quadrado do comprimento de um vetor A^μ é definido por

$$\ell^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu \tag{A.21}$$

Além da variação da direção de um vetor, o transporte paralelo também pode provocar uma mudança do seu comprimento de acordo com

$$2\ell d\ell = (dg_{\mu\nu})A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu}(A^\mu \delta A^\nu + A^\nu \delta A^\mu) \tag{A.22}$$

Substituindo a eq.(7) na eq.(22), a variação do comprimento de um vetor pode ser escrita como

$$2\ell d\ell = (Dg_{\mu\nu})A^\mu A^\nu \tag{A.23}$$

onde

$$Dg_{\mu\nu} = (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}g_{\mu\beta})dx^\alpha \tag{A.24}$$

é a diferencial absoluta da métrica.

Em um contorno infinitesimal fechado, tem-se

$$\oint d\ell = \frac{\ell}{4} \int P_{\alpha\beta} ds^{\alpha\beta} \qquad (A.25)$$

onde $P_{\alpha\beta}$ é definido pela eq.(12) e está relacionado com a derivada covariante da métrica

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} \qquad (A.26)$$

através da equação

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\alpha \nabla_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\beta \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} \nabla_\alpha g_{\mu\sigma} - 2\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} \nabla_\beta g_{\mu\sigma}) \qquad (A.27)$$

Portanto, o fato da derivada covariante da métrica ser nula implica na preservação dos comprimentos através do transporte paralelo. Neste caso, diz-se que a conexão é métrica.

Uma conexão não-métrica, com torção, pode ser expressa em termos da torção, da métrica e de suas derivadas de acordo com

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + g^{\rho\alpha}(g_{\nu\lambda} \tau^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + g_{\mu\lambda} \tau^{\lambda}{}_{\nu\alpha}) + \tau^{\rho}{}_{\mu\nu} -$$

$$- \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}(Q_{\mu\alpha\nu} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\mu\nu\alpha}) \qquad (A.28)$$

onde

$$Q_{\mu\alpha\nu} = \nabla_\nu g_{\mu\alpha} \qquad (A.29)$$

é o tensor de não-metricidade e

$$\{^{\rho}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}(\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \qquad (A.30)$$

é o símbolo de Christoffel de segunda espécie. Este resultado é obtido através da soma de permutações cíclicas da eq.(A.29).

Quando a variedade tem uma conexão métrica sem torção, a conexão fica completamente determinada pela métrica, sendo idêntica ao símbolo de Christoffel, dado pela eq.(A.30). Nesta caso, o tensor de curvatura, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura ficam dados, respectivamente, por

$$-\ \dot{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\{^{\mu}_{\nu\beta}\} - \partial_{\beta}\{^{\mu}_{\nu\alpha}\} + \{^{\sigma}_{\nu\beta}\}\{^{\mu}_{\sigma\alpha}\} - \{^{\sigma}_{\nu\alpha}\}\{^{\mu}_{\sigma\beta}\} \qquad (A.31)$$

$$-\ \dot{R}_{\nu\beta} = \partial_{\mu}\{^{\mu}_{\nu\beta}\} - \partial_{\beta}\{^{\mu}_{\nu\mu}\} + \{^{\sigma}_{\nu\beta}\}\{^{\mu}_{\sigma\mu}\} - \{^{\sigma}_{\nu\mu}\}\{^{\mu}_{\sigma\beta}\} \qquad (A.32)$$

e

$$\dot{R} = g^{\nu\beta}\dot{R}_{\nu\beta} \qquad (A.33)$$

Mas, em geral, uma variedade diferenciável dotada de conexão e de métrica é caracterizada por:

(i) uma torção, eq.(15), que torna impossível a construção de paralelogrmo;

(ii) uma curvatura, eq.(11), que é responsável pela variação da orientação de um vetor quando este sofre um trans porte paralelo; e

(iii) uma homotetia, eq.(12), que provoca variações na unidade de comprimento quando a mesma desloca-se através do transporte paralelo. Embora uma rotação nula implique em uma homotetia também nula. a recíproca não é verdadeira.

BIBLIOGRAFIA

(1) - Grünbaum, A. - "Philosophical Problems of Space and Time", Boston Studies in the Philosophy of Science, Ed. por Cohen, R. S. e Wartofsky, M. W., 2ª Edição, D. Reidel Publishing Company (1974). Capítulo 1.

(2) - Jackson, J. D. - "Classical Electrodynamics", 2ª Edição, John Wiley & Sons, Inc. (1975).

(3) - Landau, L., Lifshitz, E. - "Teoria do Campo", 2ª Edição, Mir (1980).

(4) - Einstein, A. - "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento", O Princípio da Relatividade, 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian (1971).

(5) - Minkowski, H. - "Espaço e Tempo", O princípio da Relatividade, 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian (1971).

(6) - Einstein, A. - "Autobiographical Notes", Albert Einstein, Philosopher - Scientist, 3ª Edição, Ed. P. Scilpp (1969).

(7) - Barut, A. O.- "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles", Macmillian (1964).

(8) - Dirac, P. A. M. - "The Theory of Magnetic Poles", Phys. Rev. 74 (1948), 817.

(9) - Cabibbo. N., Ferrari E. - "Quantum Electrodynamics with Dirac Monopoles", Nuovo Cimento 23 (1962) 1147.

(10) - Kresin, Y. V., Strazhev, V. I. - "Two Potential Description of the Electromagnetic Field", Theor. Mat. Fiz. 26 (1978) 426.

(11) - Gamblin, R. L. - "Comments on the Classical Theory of Magnetic Monopoles", Journal of Math. Phys. 10 (1969) 46.

(12) - Miller, D. T. - "Comments of the Classical Theory of Magnetic Monopoles", Proc. Camb. Phil. Soc. 69 (1971) 449.

(13) - Misner, C. W., Wheeler, J. A. - "Classical Physics as Geometry", Ann. Phys. 2 (1957) 525.

(14) - Dirac, P. A. M. - "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field", Proc. Roy. Soc. A 133 (1931) 60.

(15) - Harrison, H. et al - "Possibility of Observing the Magnetic Charge of an Electron", Am. J. Phys. 31 (1963) 249.

(16) - Rosenbaum, D. - "Proof of the Impossibility of a Classical Action Principle of Magnetic Monopoles and Charges Without Subsidiary Conditions", Phys. Rev. 147 (1966) 891.

(17) - Rohrlich, R, - "Classical Theory of Magnetic Monopoles", Phys. Rev. 150 (1966) 1104.

(18) - Novello, M. - "No Caminho da Geometrização do Eletromagnetismo", 2ª Escola de Cosmologia e Gravitação CBPF /UFPb, Vol. 1, Ed. por Mário Novello (1980).

(19) - Leiter, D. - "The Simmetrization of Maxwell's Equations, and Fractionally Charged Particles", Can. Journ. Phys. 48 (1970) 279.

(20) - Giacomelli, G. - "Experimental Status of Monopoles". pre-print do Ist. di Fis. dell'Universtà di Bologna 82-26.

(21) - Weinberg, S. - "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", 1ª Edição, John Wiley & Sons, Inc. (1972).

(22) - Anderson, J. L. - "Principles of Relativity Physics", 1ª Ediçãо, Academic Press (1967).

(23) - Einstein, A. - "The Meaning of Relativity", 5ª Edição, Princeton University Press (1974).

(24) - Srivastava, P. P. - "Introduction to Supersymmetry and Supergravity", III School of Gravitation and Cosmology C.B.P.F., Ed. por Sociedade Astronômica Brasileira (1983).

(25) - Brill, D. R., Wheeler, J. A. - "Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields", Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 465.

(26) - Soares, I. D. - "O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos", 2ª Escola de Cosmologia e Gravitação C.B.P.F./UFPB, Vol. 1, Ed. por Mário Novello (1980)

(27) - Novello, M. - "Geometric Theory of Dyons", C.B.P.F. - Report NF - A0003/80.

(28) - Tonnelat, M. A. - "Les Théories Unitaires de l'Électromagnétisme et de la Gravitation", 1ª Edição, Gauthier-Villars (1965).

(29) - Oliveira, C. G. - "Introdução à Formulação de Algumas Teo

rias do Campo Unitário", 2ª Escola de Cosmologia e Gravitação C.B.P.F/UFPb, Vol. 1, Ed. por Mário Novello.

(30) - Oliveira, C. G. - "Introduction to the Formulation of Some Unitary Theories and the Gauge Theory of the Group U(3,1)", III School of Gravitation and Cosmology C.B.P.F., Ed. por Sociedade Astronômica Brasileira (1983).

(31) - Batakis, N. A. - "A Unification Scheme for the Einstein and Maxwell Theories", Phys. Let. 90A(1982) 115.

(32) - Hammond, R. T. - "Generalized Affine Connection Applied to a Unified Field Theory", Phys. Rev. D 26 (1982) 1906.

(33) - Kruger, J., De Meyer, H., Berghe, G. V. - "Derivation of a Model for Symmetrized Eletromagnetism from a Space-Time with Torsion",J.Phys.A: Math. Gen. 9 (1976) 1323.

(34) - Neih, H. T., Yan M. L. - "Quantized Dirac Field in Curved Riemann - Cartan Background. I Symmetry Properties, Green's Function", Ann. Phys. (USA) 138 (1982) 237.

(35) - Obukhov, Y. N. - "Conformal Invariance and Space-Time Torsion", Phys. Let . 90A (1982) 13.

(36) - Weyl, H. - "Space-Time-Matter, 4ª Edição, Dover Publications, Inc. (1952).

(37) - Fulton, T., Rohrlich, R., Witten, L. - "Conformal Invariance in Physics", Rev. Mod. Phys. 34 (1962) 442.

(38) - Ellis, J. - "Phenomenology of Unified Gauge Theories", Lectures presented at the Les Houches Summer School (1981),

preprint TH - 3174 - CERN.

(39) - Galvão, C. A. P. - "Gravitação e Cosmologia em Espaços com Torção, Tese de Doutorado - C.B.P.F. (1976).

(40) - Bekenstein, J. D., Meisels, A. - "Conformal Invariance, Microscopic Physics, and the Nature of Gravitation", Phys. Rev. D 22 (1980) 1313.

(41) - Nariai, H., Ueno, Y. - "On the Concept of Regraduation in General Relativity", Prog. Theor., Phys. 24 (1960) 593.

(42) - Dicke, R. H. - "Mach's Principle and Invariance Under Transformation of Units", Phys. Rev. 125 (1962) 2163.

(43) - Dirac. P. A. M. - "Long Range Forces and Broken Symmetries", Proc. R. Soc. A333(1973) 403.

(44) - Gregorash, D., Papini, G. - "Weyl-Dirac Theory and Superconductivity", Nuovo Cimento 63B (1981) 487.

(45) - Lovelock, D., Hund, H. - " Tensors, Differential Forms, and Variational Principles", 1ª Edição, John Wiley and Sons, Inc. (1975).

(46) - Rebouças, M. J. - " Modelos do Universo com Rotação Dependente do Tempo e a Violação da Causalidade na Cosmologia", Tese de Doutorado - CBPF (1981).

(47) - Zumino, B. - "Supersymmetry: A Way to the Unitary Field Theory", Einstein Symposion, Berlin (Lectures Notes in Physics, 100), Springer-Verlag (1979).

(48) - Duff, M. - " What's up with Gravity?", New Scientist, 13 january 1977.

(49) - Cartan, E. - "Sur une généralization de la Notion de Corbure de Riemann et les Espaces à Torsion", C. R. Acad. Sci. (Paris) 174 (1922) 593;

- "Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée I", Ann. Éc. Norm. Sup. 40 (1923) 325;

- "Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée (suite)", Ann. Éc. Norm. Sup. 41 (1924) 1;

- "Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée II", Ann. Éc. Norm. Sup. 42 (1925) 17.

(50) - Hehl, F. W., von der Heyde, P., Kerlick, G. D. - " General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects" Rev. Mod. Phys. 48 (1976) 393.

(51) - Eguchi, T., Gilkey, P. B., Hanson, A.J. - " Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry", Physics Report 66 (1980) 213.

"SOBRE A GEOMETRIA DO ELETROMAGNETÍSMO ATRAVÉS DA TORÇÃO"

JOEL BATISTA DA FONSECA NETO

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Carlos Augusto Pinto Galvão/CBPF

Vitor de Oliveira Rivelles/UFPb

Mario Novello/CBPF

Rio de Janeiro, 01 de dezembro de 1984