

RUBEM P. MONDAINI

CONFIGURAÇÕES CLÁSSICAS DE CAMPOS DE CALIBRE
EM
ESPAÇOS-TEMPO CURVOS

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1984-

RESUMO

É feita uma introdução didática a campos de calibre não-abelianos, assim como ao problema de resolução de equações de campo acopladas de Einstein-Yang-Mills e Einstein-Yang-Mills-Higgs. Uma formulação das teorias de calibre no contexto da teoria Kaluza-Klein, aqui tratada em sua extensão não-abeliana mais simples, é dada com o objetivo de discutir o conceito de carga magnética como derivado da análise das equações de movimento de partículas não-abelianas em um espaço-tempo curvo. São apresentadas algumas soluções às equações de campo, em diversas simetrias, e dada interpretação a alguns de seus parâmetros, em termos de carga ou massa das configurações de campo. Finalmente, são esquematizados alguns problemas relacionados à fixação de calibre e às diferenças essenciais entre a teoria de Einstein e as teorias de calibre tipo Yang-Mills, como também sugestões de trabalho nas implicações cosmológicas das teorias Kaluza-Klein modificadas para incluir fermions, e de supergravidade.

SUMÁRIO

	Pág.
RESUMO	II
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - GENERALIDADES SOBRE CAMPOS DE CALIBRE	3
1.1 - INTRODUÇÃO ELEMENTAR A CAMPOS DE CALIBRE NÃO-ABELIANOS	3
1.2 - PROCEDIMENTO FORMAL DE INTRODUÇÃO DE UM CAMPO DE CALIBRE	26
1.3 - CAMPOS DE YANG-MILLS-HIGGS NO ESPAÇO-TEMPO CURVO	34
1.4 - A VERSÃO KALUZA-KLEIN	41
1.5 - CAMPOS DE YANG-MILLS E O PROGRAMA DE UNIFICAÇÃO DE RAINICH	61
CAPÍTULO 2 - ALGUMAS SOLUÇÕES CLÁSSICAS	71
2.1 - CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI, SOLUÇÕES CONFORMEMENTE CHATAS E A CONSTANTE COSMOLÓGICA	71
2.2 - SOLUÇÕES COM SIMETRIA PLANA	83
2.3 - A RELAÇÃO WEYL-MAJUMDAR PARA CAMPOS DE EINSTEIN-YANG-MILLS	104
2.4 - SOLUÇÕES COM SIMETRIAS AXIAL E CILÍNDRICA ...	108
2.5 - SOLUÇÕES CONFORMEMENTE CHATAS COM SIMETRIA ESFÉRICA	128
CAPÍTULO 3 - COMENTÁRIOS E PERSPECTIVAS DE TRABALHO	140
3.1 - "ANALOGIAS" ENTRE OS CAMPOS DE CALIBRE E O CAMPO GRAVITACIONAL	140

3.2 - O PROBLEMA DE FIXAÇÃO DE CALIBRE E AS IDENTIDADES DE BIANCHI	142
3.3 - TEORIAS KALUZA-KLEIN E VALIDADE DA TEORIA DE EINSTEIN COMO TEORIA COSMOLÓGICA. O PROGRAMA DE UNIFICAÇÃO GEOMÉTRICA	149

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de teorias de calibre adquiriu um ritmo vertiginoso desde meados da década passada. São desta época as primeiras tentativas de descoberta de soluções no espaço curvo, de configurações de campos de calibre conhecidas e bem estudadas no espaço de Minkowski. A motivação para tal estudo, pode ser procurada na não-trivialidade da topologia do campo gravitacional e nos efeitos desta topologia na dos campos de calibre não-abelianos. Na apresentação das soluções aqui tratadas, ver-se-á por muitas vezes a confirmação das principais linhas deste enfoque. Através do uso de diversas simetrias, veremos como simples constantes de integração podem ser identificadas como as quantidades fundamentais que caracterizam um campo de calibre em interação com o campo gravitacional. Por outro lado, os campos de calibre e sua topologia intrínseca podem deixar "marcas" na estrutura do espaço-tempo no qual "vivem". Estas "marcas" se evidenciam no cálculo da carga, da massa e dos invariantes topológicos das soluções.

Do ponto de vista da utilidade de tais soluções no tratamento de uma futura teoria quântica dos campos gravitacional e de calibre, é conveniente atentar para o fato de que um bom conhecimento de soluções clássicas em espaços-tempo curvos, pode ser uma pista ao comportamento quântico destas mesmas soluções. O limite semi-clássico de teorias de gravitação está agora em franco desenvolvimento; as soluções clássicas tornam-se como que testes da estrutura de soluções semi-clássicas e de futuras soluções quânticas. Há mais de uma década, quando se estudavam mode

los de estrutura hadrônica, postulando a existência de forças gravitacionais intensas dentro dos hadrons, tratados como micro-universos com uma grande constante cosmológica, surgiu e se desenvolveu o interesse em teorias de campos gravitacionais acoplados aos campos de calibre. Haviam conjecturas de que certas configurações, como os muitos modelos de "bag" apresentados, poderiam ser criados ou "induzidos" pela métrica, pela geometria. Teorias modernas de Kaluza-Klein ressuscitaram estes pontos de vista; as configurações em auto-interação, o campo gravitacional, surgem todos da consideração de uma teoria geométrica em um maior número de dimensões espaciais. As bases filosóficas de tais teorias são tão solidamente estabelecidas quanto a teoria da gravitação de Einstein ou a dos campos de calibre no estilo de Yang Mills. Além disso, o interesse teórico de obtenção dos campos físicos por meio de processos de redução dimensional ocorridos em eras cosmológicas anteriores à que vivemos, não deixa de ser fascinante. O estudo de teorias de campos de calibre em variedades curvas, conduz naturalmente à investigação de teorias em número maior de dimensões que as quatro usadas na "Relatividade Geral". A literatura atual, nesta área de vanguarda da pesquisa científica é farta de exemplos. O estudo a ser feito, pode ser considerado como uma introdução elementar e direta a esta literatura.

Dada a enorme quantidade de soluções e de técnicas de obtê-las atualmente existentes, nos restringimos tanto quanto possível a apresentar o nosso próprio trabalho. Isto introduz como que uma descontinuidade na passagem do tratamento de uma para outra solução. Preencher essas lacunas fazendo uma exposição simplificada, foi o primeiro objetivo desta monografia.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES SOBRE CAMPOS DE CALIBRE

1.1 - INTRODUÇÃO ELEMENTAR A CAMPOS DE CALIBRE NÃO-ABELIANOS

Vamos iniciar considerando um exemplo simples de teoria não-abeliana. Seja com esse fim, o modelo SU(2) de campos fermiônicos ψ , na representação dada pelas matrizes de Pauli. A densidade lagrangiana pode ser escrita ⁽¹⁾,

$$\mathcal{L}_\psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (1.1.1)$$

onde m é a massa do fermion e fica subentendida a soma sobre $\mu = 0, 1, 2, 3$, assim como sempre que aparecerem índices repetidos.

A invariância sob o grupo SU(2) pode ser expressa pelas transformações,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha \lambda^a \delta_a} \psi, \quad (1.1.2)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^a \delta_a}, \quad (1.1.3)$$

onde α é uma constante de acoplamento e λ^a os parâmetros da transformação. δ^a são as matrizes de Pauli, $a = 1, 2, 3$.

Seja agora $\lambda = \lambda(x^\mu)$, com o que perdemos a invariância da ação da teoria, ou seja, a densidade lagrangiana sob as transformações (1.1.2) e (1.1.3), torna-se neste caso,

$$\mathcal{L}'_{\psi} = \mathcal{L}_{\psi} + i \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^a \delta_a} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} e^{i\alpha \lambda^b \delta_b}) \psi. \quad (1.1.4)$$

Para recobrar a invariância, adicionamos um termo de interação na densidade lagrangiana, exigindo que a soma seja invariante. Seja este termo de interação dado por

$$\mathcal{L}_I = \alpha \bar{\psi} \delta_a \gamma^{\mu} \psi A_{\mu}^a, \quad (1.1.5)$$

onde introduzimos os potenciais de calibre A_{μ}^a .

A densidade lagrangiana completa, depois de transformada será dada então por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\psi} + \mathcal{L}'_I &= \mathcal{L}_{\psi} + i \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^a \delta_a} (\gamma^{\mu} \partial_{\mu} e^{i\alpha \lambda^b \delta_b}) \psi + \\ &+ \alpha \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^b \delta_b} \delta_c \gamma^{\mu} A_{\mu}^c e^{i\alpha \lambda^d \delta_d} \psi, \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

onde escrevemos $A_{\mu}^{'a}$ para os potenciais de calibre transformados.

Exigindo a invariância ⁽²⁾, ou $\mathcal{L}'_{\psi} + \mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_{\psi} + \mathcal{L}_I$, deveremos ter, das equações (1.1.6), (1.1.5) e (1.1.1),

$$\begin{aligned} i \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^a \delta_a} (\gamma^{\mu} \partial_{\mu} e^{i\alpha \lambda^b \delta_b}) \psi + \alpha \bar{\psi} e^{-i\alpha \lambda^b \delta_b} \delta_c \gamma^{\mu} A_{\mu}^c e^{i\alpha \lambda^d \delta_d} \psi \\ = \alpha \bar{\psi} \delta_a \gamma^{\mu} \psi A_{\mu}^a, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

de onde segue a lei de transformação para os potenciais de calibre A_{μ} , introduzidos na eq. (1.1.5), ou,

$$\delta_a A'_\mu{}^a = e^{i\alpha \lambda^b \sigma_b} \delta_a A_\mu{}^a e^{-i\alpha \lambda^c \sigma_c} - \frac{i}{\alpha} (\partial_\mu e^{i\alpha \lambda^b \sigma_b}) e^{-i\alpha \lambda^c \sigma_c} \quad (1.1.8)$$

Restringindo-nos a transformações infinitesimais, ou seja $O(\lambda^2) \approx 0$, teremos

$$e^{i\alpha \lambda^b \sigma_b} \approx \mathbb{1} + i\alpha \lambda^b \sigma_b, \quad (1.1.9)$$

com o que a equação (1.1.8) torna-se,

$$\delta_a A'_\mu{}^a \approx \delta_a A_\mu{}^a + i\alpha \lambda^b A_\mu{}^c (\sigma_b \sigma_c - \sigma_c \sigma_b) + \delta_a \lambda_{|\mu}{}^a, \quad (1.1.10)$$

onde a barra vertical denota derivada.

Das relações de comutação para as matrizes de Pauli, ou,

$$\sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c, \quad (1.1.11)$$

onde ϵ_{abc} são as constantes de estrutura anti-simétricas, teremos, após substituição na eq. (1.1.10) e uso do fato de que as δ_a são linearmente independentes,

$$A'_\mu{}^a \approx A_\mu{}^a + \lambda_{|\mu}{}^a + \epsilon \epsilon^abc A_\mu{}^b \lambda^c. \quad (1.1.12)$$

Note-se que redefinimos a constante de acoplamento através de $2\alpha = \epsilon$ em (1.1.12).

A eq. (1.1.12) pode também ser escrita como,

$$A_{\mu}^{\prime a} \approx A_{\mu}^a + D_{\mu} \lambda^a, \quad (1.1.13)$$

onde introduzimos a derivada covariante "interna" D_{μ} , construída em relação aos potenciais-conexões A_{μ}^a .

Com a introdução dos potenciais A_{μ}^a na eq. (1.1.5), torna-se necessário a construção da parte "livre" da densidade lagrangiana total que corresponda aos mesmos. Para campos abelianos costumamos usar,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} E_{\mu\nu} E^{\mu\nu}, \quad (1.1.14)$$

onde

$$E_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}. \quad (1.1.15)$$

Poderíamos tentar usar o mesmo procedimento, apenas considerando em (1.1.15) o índice interno adicional e em (1.1.14) a soma compreendida sobre esse índice. Observando a transformação de $E_{\mu\nu}^{\prime a}$, ou,

$$E_{\mu\nu}^{\prime a} = (E_{\mu\nu}^a + \epsilon \epsilon^{abc} E_{\mu\nu}^b \lambda^c) + \epsilon \epsilon^{abc} (A_{\nu}^b \lambda_{\mu}^c - A_{\mu}^b \lambda_{\nu}^c), \quad (1.1.16)$$

vemos que a densidade lagrangiana (1.1.14) seria invariante para uma lei de transformação igual à contida no 1º parêntese de (1.1.16). No entanto, devido aos outros termos, teremos,

$$E_{\mu\nu}^{\prime a} E^{\prime\mu\nu} = E_{\mu\nu}^a E^{a\mu\nu} + 4 \epsilon \epsilon_{abc} E^{\mu\nu a} (\lambda^b A_{\mu}^c)_{\nu}. \quad (1.1.17)$$

Seja $F_{\mu\nu}^a$, o tensor que torna a lagrangiana (1.1.14) invariante. Temos então o Ansatz de transformação,

$$F_{\mu\nu}^{\prime a} = F_{\mu\nu}^a + \epsilon \epsilon^a{}_{bc} F_{\mu\nu}^b \lambda^c. \quad (1.1.18)$$

Resta saber como tal tensor pode ser obtido a partir de $E_{\mu\nu}^a = A_{\nu|\mu}^a - A_{\mu|\nu}^a$. Seja,

$$F_{\mu\nu}^{\hat{a}} = E_{\mu\nu}^{\hat{a}} + H_{\mu\nu}^{\hat{a}}; \quad H_{\mu\nu}^{\hat{a}} = -H_{\nu\mu}^{\hat{a}}. \quad (1.1.19)$$

Usando esta última equação e a sua transformada, teremos, após usar (1.1.18) e (1.1.16) e desprezar termos de ordem $O(\lambda^2)$, para a transformação do tensor $H_{\mu\nu}^{\hat{a}}$ introduzido em (1.1.19),

$$H_{\mu\nu}^{\prime \hat{a}} = H_{\mu\nu}^{\hat{a}} + \epsilon \epsilon^a{}_{bc} (H_{\mu\nu}^b \lambda^c + A_{\mu}^b \lambda_{\nu}^c - A_{\nu}^b \lambda_{\mu}^c). \quad (1.1.20)$$

A equação (1.1.20) pode ser satisfeita na aproximação desejada por,

$$H_{\mu\nu}^{\hat{a}} = \epsilon \epsilon^a{}_{bc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c. \quad (1.1.21)$$

O tensor $F_{\mu\nu}^{\hat{a}}$ é chamado de campo de calibre não-abeliano e é dado então por,

$$F_{\mu\nu}^{\hat{a}} = A_{\nu|\mu}^{\hat{a}} - A_{\mu|\nu}^{\hat{a}} + \epsilon \epsilon^a{}_{bc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c. \quad (1.1.22)$$

Os campos $F_{\mu\nu}^{\hat{a}}$ introduzidos acima possuem auto-interação; da forma da eq. (1.1.22) vê-se que a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (1.1.23)$$

é de 4ª ordem nos potenciais de calibre A_μ^a . Note-se que uma das consequências da formulação de teorias de calibre não-abelianas, é a definição de interações sem a introdução de novos parâmetros. É de se notar ainda que começamos esta secção com o exemplo SU(2) de uma teoria de calibre, trabalhando na representação "doublet", na qual as matrizes da representação são simplesmente as matrizes de Pauli e os campos figurantes na densidade lagrangiana inicial são spinores de duas componentes. Poderíamos ter usado a representação "triplet" com os campos transformando-se como $\phi(x) = e^{i\alpha^a \mathcal{T}_a} \phi(x)$, sendo $\phi(x)$ isovetores de três componentes. Os geradores e matrizes nesta representação obedecem agora às relações de comutação

$$[\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b] = i \epsilon_{abc} \mathcal{T}_c, \quad (1.1.24)$$

e correspondem ao grupo SO(3). É desnecessário enfatizar aqui o homomorfismo entre os dois grupos⁽³⁾ e a similaridade de tratamento entre os dois casos. As constantes de estrutura nos mesmos são os símbolos Levi-Civita.

O problema da construção elementar de uma teoria de calibre não-abeliana pode então ser esquematizado nos seguintes termos:

Seja G um grupo não-abeliano de simetria interna e \mathcal{T}_a , $a = 1, 2, \dots$ seus geradores, em número correspondente ao da dimensão do grupo, satisfazendo às relações de comutação,

$$[\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b] = i f_{abc} \mathcal{T}_c, \quad (1.1.25)$$

onde as constantes de estrutura f_{ab}^c anti-simétricas são agora quaisquer. O grupo G é suposto semi-simples⁽⁴⁾, ou seja, não contém subgrupos abelianos invariantes.

Seja a transformação local nos campos "multiplet",

$$\phi'(x) = U(\lambda) \phi(x) \quad ; \quad U(\lambda) = e^{i \epsilon \lambda^a(x) T_a}, \quad (1.1.26)$$

onde as T_a representam as matrizes da representação escolhida de G , com relações de comutação idênticas a (1.1.25). A invariância da densidade lagrangiana, na formulação inicial, foi assegurada introduzindo o termo de interação (1.1.5). Como pode ser observado, esse procedimento corresponde a substituir na densidade lagrangiana (1.1.1), as derivadas comuns por derivadas covariantes internas dadas por

$$D_\mu = \partial_\mu - i \epsilon A_\mu^a T_a, \quad (1.1.27)$$

em analogia com a noção de acoplamento mínimo no caso abeliano.

Escrevendo as componentes internas explicitamente e usando a representação adjunta⁽⁵⁾ para as matrizes T_a ou,

$$(T_a)^b_c = -i f_a^b c; \quad (1.1.28)$$

a derivada covariante (1.1.27), terá então para suas componentes internas,

$$D_\mu^a_b = \delta^a_b \partial_\mu - \epsilon f_c^a_b A_\mu^c. \quad (1.1.29)$$

O passo seguinte na formulação generalizada da teoria, é exigir que a derivada (1.1.27) ou (1.1.29) transforme-se como os campos $\phi(x)$ em (1.1.26),

$$D'_\mu \phi' = U(\lambda) D_\mu \phi, \quad (1.1.30)$$

ou, em componentes internas,

$$D'^a{}_\mu \phi'^b = U^a{}_b D_\mu{}^b{}_c \phi^c. \quad (1.1.31)$$

Usando as matrizes $U(\lambda)$ em sua forma infinitesimal, $U(\lambda) \approx \mathbb{1} + i\epsilon \lambda^a T_a$ e a eq. (1.1.28), esta transformação pode ser escrita como,

$$D'^a{}_\mu \phi'^b = D_\mu{}^a{}_c \phi^c + \epsilon f_c{}^a{}_b \lambda^c D_\mu{}^b{}_d \phi^d, \quad (1.1.32)$$

onde foram novamente desprezados termos de ordem $O(\lambda^2)$. Deve-se observar que a transformação infinitesimal dos potenciais de calibre A_μ^a , não depende da representação usada para as matrizes T_a , a despeito das aparências. Das equações (1.1.30) e (1.1.27), temos genericamente,

$$T_a A'_\mu{}^a = U(\lambda) T_a A_\mu{}^a U^{-1}(\lambda) - \frac{i}{\epsilon} (\partial_\mu U(\lambda)) U^{-1}(\lambda). \quad (1.1.33)$$

Considerando a transformação como infinitesimal ($O(\lambda^2) \approx 0$), ou

$$U(\lambda) \approx \mathbb{1} + i\epsilon \lambda^a(x) T_a \quad ; \quad U^{-1}(\lambda) \approx \mathbb{1} - i\epsilon \lambda^a(x) T_a, \quad (1.1.34)$$

temos, após a substituição em (1.1.33),

$$\cdot \mathcal{T}_a A_\mu^{1a} \approx \mathcal{T}_a A_\mu^a - i \epsilon \lambda^c A_\mu^b [\mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c] - \lambda_{1\mu}^a \mathcal{T}_a. \quad (1.1.35)$$

A afirmação feita acima está relacionada com o fato de que a dependência da transformação dos potenciais nas matrizes da representação, aparece nos termos que contêm os comutadores em (1.1.34). A mesma pode ser verificada imediatamente, lembrando que relações de comutação nada têm a ver com a representação escolhida.

Usando as relações (1.1.25) e a independência linear das matrizes \mathcal{T}_a , teremos, de (1.1.35),

$$\cdot A_\mu^{1a} \approx A_\mu^a + D_\mu^a{}_b \lambda^b, \quad (1.1.36)$$

onde $D_\mu^a{}_b$ representa a derivada covariante interna dessas teorias, escrita em componentes e dada na representação adjunta (1.1.28), por (1.1.29).

A ação das derivadas covariantes (1.1.29) em um isovetor arbitrário ϕ^a , é não-comutativa quando $F_{\mu\nu}^a \neq 0$. Para demonstrar isso, observemos inicialmente que a identidade de Jacobi satisfeita pelas matrizes \mathcal{T}_a , ou⁽⁵⁾,

$$\cdot [\mathcal{T}_a, [\mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c]] + [\mathcal{T}_b, [\mathcal{T}_c, \mathcal{T}_a]] + [\mathcal{T}_c, [\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b]] \equiv 0, \quad (1.1.37)$$

pode ser referida também às constantes de estrutura através de (1.1.28). Temos,

$$\cdot f_b^c d f_a^d e + f_d^c a f_b^d e + f_b^d a f_e^c d \equiv 0. \quad (1.1.38)$$

Usando a identidade (1.1.38) e a eq. (1.1.29), é fácil ver que

$$(D_\mu^a D_\nu^b - D_\nu^a D_\mu^b) \phi^c = \epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^b \phi^c. \quad (1.1.39)$$

Da equação (1.1.39) podemos inferir como se transformam os campos de calibre $F_{\mu\nu}^a$. Operando à esquerda com $D_\nu^{d'}$ nos dois lados da eq. (1.1.31), teremos,

$$D_\mu^{d' a} U^b_c = U^a_b D_\mu^b c. \quad (1.1.40)$$

Usando uma relação análoga, obtida trocando μ por ν ,

$$(D_\mu^{d' a} D_\nu^{e' b} - D_\nu^{d' a} D_\mu^{e' b}) \phi^c = U^d_e (D_\mu^e b D_\nu^c - D_\nu^e b D_\mu^c) \phi^c. \quad (1.1.41)$$

Da equação (1.1.39) segue então,

$$f_a^{d' b} F_{\mu\nu}^{e' a} U^b_c \phi^c = U^d_e f_b^{e' c} F_{\mu\nu}^b \phi^c, \quad (1.1.42)$$

de onde tendo em conta que ϕ^a é um isovetor arbitrário e usando a representação adjunta (1.1.28),

$$F_{\mu\nu}^{e' a} (T_a)^b_c = U^b_d F_{\mu\nu}^e (T_e)^d_g (U^{-1})^g_c, \quad (1.1.43)$$

ou,

$$F_{\mu\nu}^{e' a} T_a = U(\lambda) F_{\mu\nu}^e T_e U^{-1}(\lambda). \quad (1.1.44)$$

É interessante observar que os campos e potenciais de calibre transformam-se diferentemente. No caso dos potenciais, existe ainda um termo contendo derivadas de $U(\lambda)$, como pode ser

visto na eq. (1.1.33). Por uma questão de consistência, se partirmos de potenciais nulos $A_\mu^a = 0$, ou seja,

$$T_a A_\mu^a = -\frac{i}{\epsilon} (\partial_\mu U(\lambda)) U^{-1}(\lambda), \quad (1.1.45)$$

deveremos conseguir campos $F_{\mu\nu}^a$ nulos, como segue da eq. (1.1.22) e da lei de transformação genérica para os mesmos, dada por (1.1.44). Assim, os novos campos $F_{\mu\nu}^a = A_{\nu\mu}^a - A_{\mu\nu}^a + \epsilon f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$ construídos com os potenciais dados por (1.1.45) devem ser nulos. Isto pode ser verificado por simples cálculo, para o qual é conveniente escrever os novos $F_{\mu\nu}^a$ em notação matricial como,

$$F_{\mu\nu}^a = A_{\nu\mu}^a - A_{\mu\nu}^a - i\epsilon [A_\mu^a, A_\nu^a], \quad (1.1.46)$$

onde $A_\mu^a = A_\mu^{\hat{a}} T_a$, $F_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^{\hat{a}} T_a$. Temos portanto, de (1.1.45),

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{i}{\epsilon} U_{\nu\mu} U^{-1} U_{\mu\nu} U^{-1} - \frac{i}{\epsilon} U_{\mu\nu} U^{-1} U_{\nu\mu} U^{-1} + \frac{i}{\epsilon} [U_{\mu\nu} U^{-1}, U_{\nu\mu} U^{-1}] = 0. \quad (1.1.47)$$

Da eq. (1.1.41), supondo novamente as transformações de calibre como infinitesimais, segue-se que,

$$F_{\mu\nu}^a (T_a)^b \approx F_{\mu\nu}^a (T_a)^b + i\epsilon \lambda^a F_{\mu\nu}^d \left((T_a)^b (T_d)^c - (T_d)^b (T_a)^c \right). \quad (1.1.48)$$

Usando as relações de comutação para as matrizes T_a , teremos,

$$F_{\mu\nu}^a (T_a)^b \approx F_{\mu\nu}^a (T_a)^b - \epsilon f^{ade} \lambda^a F_{\mu\nu}^d (T_e)^b, \quad (1.1.49)$$

do que resulta, pela independência linear das T_a ,

$$F_{\mu\nu}^{\prime a} = F_{\mu\nu}^a + \epsilon f^a{}_{bc} F_{\mu\nu}^b \lambda^c, \quad (1.1.50)$$

que é a transformação sugerida para os campos de calibre em (1.1.18).

Podemos fornecer agora, um exemplo das equações de campo da teoria, referindo-nos ao caso tratado no início de campos spinoriais. Com esse objetivo, note-se que a ação resultante que descreve a interação de partículas spinoriais mediada por campos de calibre⁽⁶⁾, é dada, resumindo os desenvolvimentos anteriores, por,

$$S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int (\bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}) d^4x, \quad (1.1.51)$$

onde D_μ é a derivada covariante interna (1.1.27).

Para determinar as equações de campo, procuramos configurações A_μ^a , ψ , $\bar{\psi}$ que façam estacionária a ação. Ou seja, devemos igualar a zero as derivadas funcionais primeiras ou,

$$\delta S / \delta A_\mu^a = 0; \quad \delta S / \delta \psi = 0; \quad \delta S / \delta \bar{\psi} = 0. \quad (1.1.52)$$

Concentrando-nos agora na 1ª equação (1.1.52) e usando a definição implícita de derivada funcional⁽⁷⁾, devemos calcular,

$$\left. \frac{d}{d\alpha} S[A_\mu^a + \alpha \lambda_\mu^a(x), \psi, \bar{\psi}] \right|_{\alpha=0} = \int \lambda_\mu^a \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} d^4x, \quad (1.1.53)$$

onde as λ_μ são funções definidas em um espaço $E = \{\lambda(x)\}$, tal

que os domínios de $S[A_\mu^a + \alpha \lambda_\mu^a]$ e $S[A_\mu^a]$ coincidam para todo $\lambda(x) \in E$. O cálculo se reduz então a

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \int (\bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu^{(A+\alpha\lambda)} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(A+\alpha\lambda) F_a^{\mu\nu}(A+\alpha\lambda)) d^4x \right|_{\alpha=0}, \quad (1.1.54)$$

o que deve ser comparado com o membro direito de (1.1.54), após a eliminação dos termos de superfície.

Expandindo $F_{\mu\nu}^a(A+\alpha\lambda)$, teremos

$$F_{\mu\nu}^a(A+\alpha\lambda) = F_{\mu\nu}^a(A) + \alpha (\lambda_{\nu/\mu}^a - \lambda_{\mu/\nu}^a) + \epsilon f^a{}_{bc} \alpha (A_\mu^b \lambda_\nu^c + A_\nu^c \lambda_\mu^b) + O(\alpha^2), \quad (1.1.55)$$

e uma igualdade análoga para $F_a^{\mu\nu}(A+\alpha\lambda)$. Contraíndo todos os índices e usando a anti-simetria de $F_{\mu\nu}^a$ e das constantes de estrutura f^{abc} , podemos obter,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(A+\alpha\lambda) F_a^{\mu\nu}(A+\alpha\lambda) &= F_{\mu\nu}^a(A) F_a^{\mu\nu}(A) - \\ &- 4\alpha \lambda_{\mu/\nu}^a F_a^{\mu\nu}(A) - 4\alpha \epsilon f^a{}_{bc} F_a^{\mu\nu}(A) A_\nu^b \lambda_\mu^c. \end{aligned} \quad (1.1.56)$$

O termo que contém a derivada covariante interna fornece simplesmente,

$$\bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu^{(A+\alpha\lambda)} - m) \psi = \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu^{(A)} - m) \psi + \alpha \epsilon \bar{\psi} \delta \lambda_\mu^a T_a \psi. \quad (1.1.57)$$

A equação (1.1.53) torna-se então, após rearranjar alguns índices,

$$\left. \frac{d}{d\alpha} (\dots) \right|_{\alpha=0} = \int \lambda_\mu^a \left[- (F_a^{\mu\nu}{}_{/\nu} - \epsilon f^a{}_{bc} A_\nu^c F_b^{\mu\nu}) + \epsilon \bar{\psi} \delta T_a \psi \right] d^4x, \quad (1.1.58)$$

onde foram desprezados os termos de superfície.

Comparando (1.1.58) com (1.1.53) tem-se, usando a definição de derivada covariante interna dada em (1.1.29),

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} = -D_\nu^b F_b^{\mu\nu} + \epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi. \quad (1.1.59)$$

Procedendo analogamente com o uso de expressões tais como (1.1.53), teremos para as outras derivadas funcionais,

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} = i \gamma^\mu \psi_{|\mu} - m \psi + \epsilon \gamma^\mu A_\mu^a T_a \psi, \quad (1.1.60)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = -i \bar{\psi}_{|\mu} \gamma^\mu - m \bar{\psi} + \epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T_a. \quad (1.1.61)$$

Com isto, as equações de campo resultam,

$$D_\nu^b F_b^{\mu\nu} = \epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi, \quad (1.1.62)$$

$$i \gamma^\mu \psi_{|\mu} - m \psi = -\epsilon \gamma^\mu A_\mu^a T_a \psi, \quad (1.1.63)$$

$$i \bar{\psi}_{|\mu} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = \epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T_a. \quad (1.1.64)$$

O membro direito da equação (1.1.62) é a constante de acoplamento ϵ , multiplicada pela corrente de fonte externa, dada no caso através dos campos ψ e $\bar{\psi}$. No caso genérico, esta equação é a equação de Yang-Mills com fonte externa, escrita como,

$$D_\nu^b F_b^{\mu\nu} = \epsilon j_a^\mu. \quad (1.1.65)$$

Tomando a derivada covariante dos dois lados de (1.1.

65), temos,

$$D_{\mu}^a D_{\nu}^b F_b^{M\nu} = \epsilon D_{\mu}^a j_a^M. \quad (1.1.66)$$

O lado esquerdo de (1.1.66) pode ser também calculado, utilizando a eq. (1.1.39), onde aplicamos a combinação de derivadas entre parênteses ao isovetor $F_b^{M\nu}$. Teremos então, da anti-simetria de $F_b^{M\nu}$,

$$2 D_{\mu}^a D_{\nu}^b F_b^{M\nu} = \epsilon f^b{}_{ca} F_{\mu\nu}^a F_b^{M\nu} = 0, \quad (1.1.67)$$

onde a última igualdade segue da anti-simetria das constantes de estrutura $f^b{}_{ca}$. A equação (1.1.67) fornece a lei de conservação covariante para a corrente j_a^M , ou,

$$D_{\mu}^a j_a^M = 0. \quad (1.1.68)$$

As derivadas covariantes internas (1.1.27) podem ser também escritas em linguagem de operadores como,

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i\epsilon [A_{\mu}, \dots], \quad (1.1.69)$$

como se verifica facilmente pela atuação de (1.1.27) em um isovetor arbitrário ϕ^b e uso das relações de comutação para as matrizes T_a . Com isso, a eq. (1.1.39) escreve-se,

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = -i\epsilon [F_{\mu\nu}, \dots], \quad (1.1.70)$$

onde os campos de calibre $F_{\mu\nu}$ são dados pelas matrizes,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} - i\epsilon [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.1.71)$$

Calculando outros comutadores, a partir de (1.1.70), contendo derivadas D_μ , temos,

$$[D_\alpha, [D_\mu, D_\nu]] = -i\epsilon [D_\alpha F_{\mu\nu}, \dots]. \quad (1.1.72)$$

A identidade de Jacobi (1.1.37) para as matrizes da representação, pode ser também escrita para as derivadas covariantes (1.1.27), temos,

$$[D_\alpha, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\alpha]] + [D_\nu, [D_\alpha, D_\mu]] \equiv 0, \quad (1.1.73)$$

do que resulta, pela equação (1.1.72),

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} \equiv 0. \quad (1.1.74)$$

As eqs. (1.1.74) são as identidades de Bianchi da teoria; elas são satisfeitas trivialmente pelos campos de calibre como expressos através dos potenciais em (1.1.71). Multiplicando as equações (1.1.74) por $\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\alpha\mu\nu}$ e contraindo índices, onde $\epsilon^{\beta\alpha\mu\nu}$ é o símbolo Levi-Civita totalmente anti-simétrico, teremos,

$$D_\alpha {}^*F^{\beta\alpha} \equiv 0, \quad (1.1.75)$$

onde ${}^*F^{\mu\nu}$ é o dual de $F^{\mu\nu}$, ou,

$$*F^{M\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . \quad (1.1.76)$$

As equações (1.1.74) e (1.1.75) são ainda escritas com todas as componentes, como,

$$D_\alpha^a F_{\mu\nu}^b + D_\mu^a F_{\nu\alpha}^b + D_\nu^a F_{\alpha\mu}^b \equiv 0, \quad (1.1.77)$$

$$D_\alpha^a *F^{\beta\gamma}{}^b \equiv 0 . \quad (1.1.78)$$

Da identidade (1.1.75) ou (1.1.78), vê-se que é desnecessário considerar na densidade lagrangiana construída para descrever as configurações de campo, a parte correspondente ao outro invariante que se possa formar com o tensor-isovetor $F_{\mu\nu}^a$. Variando uma ação tal como

$$S^* = - \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a *F_a^{\mu\nu} d^4x, \quad (1.1.79)$$

obteremos a identidade (1.1.78), ou,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\nu^c} &= \frac{1}{2} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} (\delta_c^a F_{\alpha\beta a/\mu} - \epsilon f_b^a{}_c A_\mu^b F_{\alpha\beta a}) \\ &= D_\mu^a *F_a^{\mu\nu} \equiv 0, \end{aligned} \quad (1.1.80)$$

o que se traduz dizendo que esta possível parte da ação total, não influencia a dinâmica das configurações de campo como descrita pelas equações (1.1.62) a (1.1.64).

O formalismo hamiltoniano é um interessante enfoque no estudo de campos de calibre, uma vez que ajuda a esclarecer o papel das transformações de calibre infinitesimais em termos de extensão da dinâmica, na obtenção de hamiltonianas que descrevam a

evolução de sistemas com movimentos mais gerais.

Consideremos com esse fim, a lagrangiana "livre" dos campos de Yang-Mills,

$$L = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} d^3x, \quad (1.1.81)$$

onde $K, l = 1, 2, 3$.

Os momenta canonicamente conjugados são definidos por,

$$\pi_a^\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu^a(x)}, \quad (1.1.82)$$

onde o ponto acima de A_μ^a designa derivada em relação ao tempo. A dinâmica é toda construída sobre superfícies de tempo constante. Usando a forma deduzida dos campos de calibre, podemos escrever para a parte "elétrica",

$$F_{0K}^a(x) = \dot{A}_K^a(x) - A_{0IK}^a(x) + \epsilon f^a{}_{bc} A_0^b(x) A_K^c(x), \quad (1.1.83)$$

de onde podemos concluir que

$$\frac{\delta F_{0K}^b(x)}{\delta \dot{A}_\mu^a(y)} = \delta^b{}_a \delta^\mu{}_K \delta^3(x-y). \quad (1.1.84)$$

Segue-se então, das eqs. (1.1.82) e (1.1.81),

$$\pi_a^\mu(x) = -F_a^{0\mu}(x). \quad (1.1.85)$$

Note-se que $\pi_a^0 = 0$, o que é chamado de vínculo primário da teoria.

Com as variáveis canonicamente conjugadas A_μ^a e π_a^μ , podemos construir a hamiltoniana canônica,

$$H = \int \dot{A}_\mu^a \pi_a^\mu d^3x - L. \quad (1.1.86)$$

Das equações (1.1.81), (1.1.83) e (1.1.85), podemos escrever para a hamiltoniana (1.1.86),

$$H = \int \left(-\frac{1}{2} \pi_K^a \pi_a^K + \frac{1}{4} F_{K\ell}^a F_a^{K\ell} - A_{0a} D_K^a \pi^{Kb} \right) d^3x, \quad (1.1.87)$$

onde foram eliminados os termos que continham as "velocidades" \dot{A}_μ^a .

Na dedução de (1.1.87), foi desprezado o termo de superfície ⁽⁸⁾, $\int A_0^a \pi_a^K dS_K$.

As equações de movimento são dadas pelos parênteses de Poisson, calculados para tempos iguais, das variáveis dinâmicas com a hamiltoniana ⁽⁹⁾. Temos para uma variável dinâmica arbitrária $A(x)$,

$$\dot{A}(x) = \left\{ A(x), H(x') \right\}_{t=t'} = \int \left(\frac{\delta A(x)}{\delta A_\mu^a(y)} \frac{\delta H(x')}{\delta \pi_a^\mu(y)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \pi_a^\mu(y)} \frac{\delta H(x')}{\delta A_\mu^a(y)} \right) d^3y. \quad (1.1.88)$$

Os parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas básicas da teoria, podem ser calculados com a estrutura (1.1.88), temos,

$$\left\{ \pi_a^\mu(x), \pi_b^\nu(x') \right\} = 0 \quad ; \quad \left\{ A_\mu^a(x), A_\nu^b(x') \right\} = 0;$$

$$\left\{ A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(x') \right\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(x-x'). \quad (1.1.89)$$

Deve-se observar a incompatibilidade do vínculo primá-

rio $\pi_a^0 = 0$ com a última das equações (1.1.89). A técnica aqui usada é a de definir uma nova hamiltoniana H_1 que difere de H pela adição de um múltiplo arbitrário do vínculo primário $\pi_a^0 = 0$. Temos,

$$H_1 = H + \int \lambda_1^a \pi_a^0 d^3x. \quad (1.1.90)$$

Agora podemos verificar a evolução no tempo de π_a^0 , calculando seu parêntese de Poisson com a nova hamiltoniana (1.1.90),

$$\dot{\pi}_a^0 = \left\{ \pi_a^0(x), H_1(x') \right\}_{t=t'}, \quad (1.1.91)$$

temos então,

$$\dot{\pi}_a^0 = \int \delta^3(x-y) \delta_a^b \delta^3(x'-y) D_{\kappa b}^c \pi_c^K(x') d^3y d^3x' = D_{\kappa a}^c \pi_c^K(x). \quad (1.1.92)$$

Exigindo que o vínculo $\pi_a^0 = 0$, mantenha-se no tempo, ou $\dot{\pi}_a^0 = 0$, teremos,

$$D_{\kappa a}^c \pi_c^K = 0. \quad (1.1.93)$$

A equação (1.1.93) constitui então o que é chamado de um vínculo secundário da teoria e é também incompatível com as relações (1.1.89). A mesma coincide com uma das equações (1.1.62), aí fazendo $\mu = 0$ e $j_a^\mu = 0$. Podemos então construir uma nova hamiltoniana que incorpora os vínculos primários e secundários, através de múltiplos arbitrários, ou,

$$H_2 = H + \int \left(\lambda_1^a \pi_a^0 + \lambda_2^a D_{\kappa a}^c \pi_c^K \right) d^3x. \quad (1.1.94)$$

Para a determinação dos múltiplos $\lambda_1^a(x)$, $\lambda_2^a(x)$, exigimos a consistência da hamiltoniana (1.1.94) com as equações de movimento. Temos por exemplo,

$$\dot{A}_\mu^a = \left\{ A_\mu^a(x), H_2(x') \right\}_{t=t'}, \quad (1.1.95)$$

ou,

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu^a = & -\delta_\mu^\kappa \pi_\kappa^a + \delta_\mu^0 \lambda_1^a(x) + \\ & + \delta_c^a \delta_\mu^\kappa \int \delta^3(x-y) (\lambda_2^d(x') - A_0^d(x')) D_{\kappa d}^c \delta^3(x'-y) dx' dy, \end{aligned} \quad (1.1.96)$$

o que fornece para \dot{A}_0^a , \dot{A}_κ^a ,

$$\dot{A}_0^a = \lambda_1^a; \quad \dot{A}_\kappa^a = -\pi_\kappa^a + A_{0|\kappa}^a - \epsilon f_b^a c A_\kappa^b A_0^c - D_{\kappa c}^a \lambda_2^c. \quad (1.1.97)$$

Na segunda das equações (1.1.96), usando (1.1.83) e (1.1.85), devemos fazer $\lambda_2^a = 0$ para consistência. Temos assim,

$$\lambda_1^a = \dot{A}_0^a; \quad \lambda_2^a = 0. \quad (1.1.98)$$

A primeira equação (1.1.98) mostra a significação do termo $\int \lambda_1^a \pi_a^0 dx^3$ da hamiltoniana (1.1.94). Ela mostra que a variação no tempo, de t a $t + \delta t$ da variável canônica A_0^a , é dada totalmente através da função λ_1^a , ou $\delta A_0^a = \lambda_1^a \delta t$. A segunda equação (1.1.96) mostra que não é necessário adicionar à densidade hamiltoniana nenhum outro múltiplo de $D_{\kappa c}^a \pi_c^\kappa$, além do que já aparece no último termo de (1.1.87). Este termo é na verdade, gerador de transformações de calibre infinitesimais,

Como se comprova calculando

$$\delta A_K^a = \left\{ A_K^a, - \int_{t=t'} A_0^b D_K^c \Pi_c^K d^3x' \right\} \delta t, \quad (1.1.99)$$

ou, após usar a eq. (1.1.88),

$$\delta A_K^a = \delta t D_K^a b A_0^b. \quad (1.1.100)$$

Comparando este último resultado com a eq. (1.1.36), vemos que o mesmo corresponde a uma transformação de calibre infinitesimal dos potenciais A_K^a com parâmetro $A_0^b \delta t$.

Como estamos trabalhando sobre superfícies de tempo constante, o penúltimo termo do lado direito de (1.1.94) pode ser escrito,

$$- \int \lambda_i^a \Pi_a^0 d^3x = \int \dot{A}_0^a \Pi_a^0 d^3x = - \int A_0^b D_0^c b \Pi_c^0 d^3x, \quad (1.1.101)$$

o que permite escrever,

$$\delta A_\mu^a = \left\{ A_\mu^a, - \int_{t=t'} A_0^b D_\mu^c \Pi_c^\mu d^3x' \right\} \delta t = D_\mu^a c A_0^c \delta t. \quad (1.1.102)$$

Podemos agora repetir a afirmação que foi feita anteriormente em relação aos potenciais A_K^a ($K=1, 2, 3$), para os potenciais A_μ^a ($\mu=0, 1, 2, 3$). Ou seja, os termos adicionados na hamiltoniana são, tomados em conjunto,

$$G(x') = - \int A_0^b D_\mu^c b \Pi_c^\mu d^3x'. \delta t, \quad (1.1.103)$$

geradores de transformações de calibre infinitesimais, de parâmetro $\Lambda^a = A_0^a \delta t$.

O gerador (1.1.103) pode ser escrito, após eliminação de um termo de superfície e manipulação de índices, como,

$$G(x') = \int \pi_a^m D_m^a b A_0^b d^3x' \delta t. \quad (1.1.104)$$

Do parênteses de Poisson de qualquer variável canonicamente conjugada da teoria com o gerador (1.1.103) ou (1.1.104), podemos saber o comportamento da mesma sob transformações de calibre infinitesimais, temos, como exemplos,

$$\delta D_m^a \phi^b = \left\{ D_m^a \phi^b(x), G(x') \right\}_{t=t'} = \epsilon f_c^a b \phi^c(x) D_m^b d A_0^c(x) \delta t, \quad (1.1.105)$$

e,

$$\delta F_{\mu\nu}^a(x) = \left\{ F_{\mu\nu}^a(x), G(x') \right\}_{t=t'} = \epsilon f_c^a b A_0^c F_{\mu\nu}^b \delta t, \quad (1.1.106)$$

onde foram usadas as expressões,

$$\frac{\delta F_{\mu\nu}^a(x)}{\delta A_\mu^b(y)} = \delta_\nu^\alpha D_\mu^a b \delta^3(x-y) - \delta_\mu^\alpha D_\nu^a b \delta^3(x-y), \quad (1.1.107)$$

$$\frac{\delta G(x')}{\delta \pi_a^m(y)} = D_m^a b A_0^b(y) \delta t, \quad (1.1.108)$$

$$(D_m^a b D_\nu^c - D_\nu^a b D_m^c) A_0^c(x) = \epsilon f_c^a b A_0^c(x) F_{\mu\nu}^b(x), \quad (1.1.109)$$

onde a última equação é a eq. (1.1.41) para $\phi^a \equiv A_0^a$.

Um cuidado especial deve ser tomado quando da substituição das derivadas presentes no lado direito das eqs. (1.1.107),

no parênteses de Poisson a ser calculado em (1.1.106). Note-se que elas são tomadas no domínio com elemento de volume d^3x e assim, não participam na integração a ser definida pelo parênteses (1.1.106), que é feita em um domínio diferente. A formulação apresentada trivialmente aqui, com o único objetivo de mostrar consistência com o tratamento anterior, torna-se de muita importância no estudo de vínculos de calibre, quando são definidos novos parênteses e os vínculos são classificados, de forma a não termos mais casos em que variáveis dinâmicas ou funções das mesmas possam ser igualladas a zero fora dos parênteses de Poisson mas não dentro dos mesmos. Um tal tipo de formalismo é ainda de grande conveniência no estudo das condições de fixação ⁽¹⁰⁾ de ca-
libres não-abelianos.

1.2 - PROCEDIMENTO FORMAL DE INTRODUÇÃO DE UM CAMPO DE CALIBRE

Na secção precedente, mostramos elementarmente como introduzir os campos de calibre, o que constituiu uma forma simpli-
ficada de apresentação do conceito de invariância completa da a-
ção da teoria ⁽¹¹⁾. Outro ponto de vista, mais formal, no objeti-
vo de construção de uma teoria generalizada de interação entre
partículas, baseia-se no estudo da estrutura da variedade em re-
lação à qual são definidos os potenciais A_{μ}^a e é mais próximo
ao que se possa conceituar como formulação de uma teoria de cam-
pos de calibre na linguagem de espaços fibrados. O processo de
construção, consiste em resumo, de estender a variedade de defi-
nição das configurações de campos e potenciais e em seguida cons

truir sua geometria. Na variedade assim generalizada, os campos de calibre que aparecem naturalmente do processo de extensão, caracterizam-lhe parte da estrutura. Lembremos que no procedimento anterior, os mesmos são introduzidos ad hoc, sem referência à variedade em que são definidos.

Estas idéias podem ser introduzidas de maneira elementar, pensando na estrutura complexa de pontos do espaço-tempo da experiência física. Ou seja, cada ponto do espaço-tempo é pensado como uma variedade interna (o espaço interno I). No caso de uma teoria $SO(3)$, esta variedade seria levada em si mesma por todas as transformações de um grupo 3-dimensional, real e ortogonal. Os desenvolvimentos iniciais sobre essa idéia não associavam uma métrica ao espaço I , o que significava considerá-lo como uma variedade homogênea, onde careciam de sentido os conceitos de comprimento, translação, etc. O surgimento de teorias modernas de Kaluza-Klein, veio substituir considerações simplistas como esta, dando significação às componentes da métrica do espaço interno I como funções dos campos e potenciais de calibre.

Seja então uma variedade genérica V de dimensão $(4+N)$, produto direto da variedade de espaço-tempo R^4 pela variedade do espaço interno n -dimensional I_N .

$$V = R^4 \times I_N. \quad (1.2.1)$$

O grupo de simetria da variedade V é também dado pelo produto direto do grupo da variedade R^4 e do grupo do espaço interno I_N . Devemos fazer a extensão da variedade R^4 e de seu grupo associado, na forma dada em (1.2.1). No processo de extensão ⁽¹²⁾, surge naturalmente do preenchimento de condições de in

tegrabilidade, a necessidade de introduzir um novo campo que caracterize a estrutura da variedade interna, na mesma forma em que o campo gravitacional caracteriza a estrutura do espaço-tempo. Denotemos então por I_P , o ponto do espaço-tempo R^4 , considerado como um I - espaço, fixo ao ponto P. Os pontos genéricos P do espaço-tempo e os espaços I_P estão em correspondência biunívoca. Procuremos construir agora a geometria do espaço-I, ou seja, façamos uma aplicação elementar da geometria de conexões ⁽¹³⁾.

Seja G o grupo de simetria interna. Consideremos uma representação "fiel" deste grupo e tomemos uma base no espaço da representação considerada. Chamemos B_a ($a = 1, 2, \dots, N$), a base escolhida, onde N é a dimensão do grupo G. Um elemento qualquer no espaço da representação assim introduzido, será expresso em função de suas coordenadas no mesmo espaço por

$$E = B_a \mu^a. \quad (1.2.2)$$

Os μ^a , coordenadas do elemento E , dependem das coordenadas x^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$); $\mu^a = \mu^a(x^\mu)$.

Consideremos que no espaço I_P associado ao ponto P, temos uma realização do grupo G, seja G_P . Se houver uma transformação em G_P , haverá uma mudança de bases da seguinte forma,

$$B'_a = U^b_a(x) B_b. \quad (1.2.3)$$

Considerando o mesmo elemento E expresso nas novas bases, após a transformação em G_P , teremos para a mudança correspondente nas coordenadas μ^a ,

$$u^b(x) = U^b_a(x) u^a(x). \quad (1.2.4)$$

Através de uma escolha conveniente das bases B_a , sempre pode ser conseguido que os coeficientes $U^b_a(x)$ satisfaçam a

$$U^a_b(x) U^b_c(x) = \delta^a_c. \quad (1.2.5)$$

As eqs. (1.2.2) a (1.2.5) mostram então a construção de uma base no espaço I_P , com os u^a denotando as coordenadas de um elemento qualquer E de I_P . Se I_P for uma variedade dita invariante, poderemos escrever,

$$u^a(x) u_a(x) = R^2(x), \quad (1.2.6)$$

onde $R^2(x)$ é uma função arbitrária. Por uma redefinição das bases $B_a \rightarrow B_a R(x)$, teremos a eq. (1.2.6) reescrita em uma forma mais conveniente para aplicações subsequentes, ou,

$$u^a(x) u_a(x) = 1. \quad (1.2.7)$$

Necessitamos relacionar o espaço I , definido para o ponto de coordenadas $(x^\mu + dx^\mu)$, seja I_{P+dP} com o espaço I_P . Dizemos que se $E \in I_P$, então $E \in I_{P+dP}$; com isto, as bases em I_{P+dP} , ou $(B_a + dB_a)$ podem ser expressas como combinação linear das bases em I_P , seja,

$$B_a + dB_a = B_a - B_b \Gamma^b_a(x, dx), \quad (1.2.8)$$

ou,

$$dB_a = -B_b \Gamma^b_a(x, dx). \quad (1.2.9)$$

A eq. (1.2.9) constitui uma transformação infinitesimal nas bases. Os $\Gamma^a_b(x, dx)$ aqui introduzidos são as conexões; usualmente, estas são escritas como formas diferenciais das coordenadas x^μ , do que resulta para (1.2.9),

$$dB_a = -B_b \Gamma^\mu_b{}^a dx^\mu. \quad (1.2.10)$$

Seja agora $E + dE$ um elemento de $I_P + dP$. Teremos, usando a eq. (1.2.2),

$$E + dE = B_a u^a(x) + d(B_a u^a(x)). \quad (1.2.11)$$

Da eq. (1.2.10) segue-se então,

$$E + dE = (u^a(x) + du^a(x) - \Gamma^\mu_b{}^a dx^\mu u^b(x)) B_a. \quad (1.2.12)$$

Como I_P e $I_P + dP$ são variedades invariantes, as coordenadas definidas nas mesmas devem obedecer a eq. (1.2.7); com o que temos,

$$(u^a(x) + du^a(x) - \Gamma^\mu_b{}^a dx^\mu u^b(x))^2 = 1. \quad (1.2.13)$$

Como a transformação de bases que estamos tratando é infinitesimal, podemos desprezar quantidades de ordem superior à primeira nas diferenciais que aparecem em (1.2.13), do que resulta,

$$\cdot \quad u^b(x) u_a(x) \Gamma_{\mu b}^a dx^\mu + u^b(x) u_a(x) \Gamma_{\nu}^a{}_b dx^\nu = 0, \quad (1.2.14)$$

de onde, usando as eqs. (1.2.10) , (1.2.9) e a arbitrariedade dos $u^a(x)$, segue-se,

$$\cdot \quad \Gamma_b^a(x, dx) = - \Gamma^a{}_b(x, dx). \quad (1.2.15)$$

Esta última equação mostra que a transformação infinitesimal de bases dada por (1.2.8) ou (1.2.9) é ortogonal.

A transformação definida nas bases, eq. (1.2.3), ou nas coordenadas, eq. (1.2.4), não deixa invariante as conexões $\Gamma_b^a(x, dx)$. Para ver como as mesmas se transformam, escrevamos a eq. (1.2.10) depois de transformada, ou,

$$\cdot \quad dB'_a = B'_b \Gamma_{\mu}{}'^b{}_a dx^\mu. \quad (1.2.16)$$

Usando a equação de transformação das bases (1.2.3) nos dois lados de (1.2.16), teremos,

$$(\Gamma_{\mu}{}'^b{}_a U^c{}_b(x) - U^b{}_a(x) \Gamma_{\mu}^c{}_b - \partial_{\mu} U^c{}_a(x)) B_c dx^\mu = 0. \quad (1.2.17)$$

Da arbitrariedade das bases B_a e dos dx^μ teremos então,

$$\cdot \quad \Gamma_{\mu}{}'^b{}_a U^c{}_b = U^b{}_a \Gamma_{\mu}^c{}_b - \partial_{\mu} U^c{}_a. \quad (1.2.18)$$

Esta última equação pode ser escrita em forma matricial, fazendo as identificações $(\Gamma_{\mu}^a{}_b) = \Gamma_{\mu} \in \Gamma_{\mu}$; $(U^a{}_b) = U$ onde \in é a constante de acoplamento introduzida na secção anterior. Te

mos,

$$\Gamma_{\mu}^{\prime} = U \Gamma_{\mu} U^{-1} - \frac{i}{\epsilon} (\partial_{\mu} U) U^{-1}. \quad (1.2.19)$$

Esta equação é análoga à equação (1.1.33). A identidade entre as mesmas é conseguida identificando as conexões matriciais com os potenciais de calibre $A_{\mu} = A_{\mu}^a T_a$, onde os T_a são como sempre, as matrizes da representação do grupo G do espaço interno.

Procuramos as condições em que sob a transformação (1.2.4), tenhamos $dB_a^{\prime} = 0$, ou seja, quando os $\Gamma_{\mu}^{\prime a}$ se anulam em (1.2.16). Assim, teremos de (1.2.18),

$$U^c_{a|\mu} = U^b_a \Gamma_{\mu}^c_b, \quad (1.2.20)$$

onde a barra denota derivada.

Para que o sistema de equações (1.2.20) seja completamente integrável⁽¹³⁾, devemos ter,

$$U^c_{a|\mu|\nu} = U^c_{a|\nu|\mu}, \quad (1.2.21)$$

do que resulta, usando novamente as eqs. (1.2.20),

$$U^d_a (\Gamma_{\nu}^c d|\mu - \Gamma_{\mu}^c d|\nu - \Gamma_{\mu}^b d \Gamma_{\nu}^c_b + \Gamma_{\nu}^b d \Gamma_{\mu}^c_b) = 0. \quad (1.2.22)$$

As eqs. (1.2.22) são satisfeitas genericamente, quando o tensor contido nos parênteses, $C_{\mu\nu}^c d$ é nulo. Fazendo as identificações que permitiram escrever a eq. (1.2.19), podemos escrever para a condição mencionada,

$$C_{\mu\nu} = i\epsilon \left(F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu} - i\epsilon [F_{\mu}, F_{\nu}] \right) = 0. \quad (1.2.23)$$

Como as conexões F_{μ} são identificadas com os potenciais de calibre A_{μ} , teremos por comparação das eqs. (1.2.23) e (1.1.71),

$$C_{\mu\nu} = i\epsilon F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.24)$$

Observando a eq. (1.2.24), notamos que aos F_{μ} e portanto aos A_{μ} que a satisfazem, não podemos emprestar nenhum significado físico importante, uma vez que sempre poderíamos escolher uma transformação como (1.2.4) que anulasse o membro esquerdo de (1.2.18). Da mesma forma, podemos afirmar que os F_{μ} que violarem (1.2.24), possuirão um significado físico bem determinado, pois não mais poderemos fazer uma transformação de bases ou sua correspondente nas coordenadas que conduza a um conjunto dos F_{μ} todos nulos. Assim, a estes F_{μ} fica associado algo que represente a realidade física, como um campo. Notemos que não basta considerar que a variedade extensa com que trabalhamos seja dada por um produto direto do espaço-tempo e do espaço interno I; nem mesmo que o grupo de tal variedade seja um produto direto dos grupos que o constituem. É necessário caracterizar a estrutura da variedade extensa; a introdução dos $C_{\mu\nu}$ ($F_{\mu\nu}$) através de seus potenciais F_{μ} (A_{μ}), preenche essa condição. Finalizando, note-se ainda que o conceito de derivada covariante interna, introduzido também ad hoc na 1a secção, acha-se intrinsecamente presente aqui. As eqs. (1.2.11) e (1.2.12) fornecem,

$$d(B_a u^a) = B_a (\delta^a_b \partial_\mu - \Gamma_\mu^a_b) u^b dx^\mu. \quad (1.2.25)$$

O membro direito de (1.2.25), contém na combinação adequada, a derivada covariante interna da teoria, construída com as conexões $\Gamma_\mu^a_b$ (A_μ). Podemos ainda escrever a eq. (1.2.25) na forma,

$$d(B_a u^a) = B_a (\partial_\mu - i e A_\mu)^a_b u^b dx^\mu. \quad (1.2.26)$$

1.3 - CAMPOS DE YANG-MILLS-HIGGS NO ESPAÇO-TEMPO CURVO

O interesse teórico de conhecimento de soluções acopladas de uma teoria de campos auto-interagentes com uma teoria em que o conceito de auto-interação já é implícito, fala por si mesmo da necessidade de se procurar tais soluções. Como também anunciamos na introdução desta monografia, aparece a questão de saber como as configurações clássicas de campo a serem descobertas, podem ser consideradas como marcos fundamentais e limite clássico de teorias quânticas consequentes de gravitação. Para ter idéia do trabalho a ser realizado com soluções acopladas, consideremos a ação para campos de Einstein e Yang-Mills em interação,

$$S_{EYM} = - \int \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{2k} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a \right) d^4x, \quad (1.3.1)$$

onde k é a constante de gravitação, Λ a constante cosmológica e R o escalar de curvatura. Os $F_{\mu\nu}^a$ são as componentes in

ternas dos campos de Yang-Mills dadas por (1.1.23), onde as constantes de estrutura devem ser consideradas como quaisquer.

Fazendo as variações em $g_{\mu\nu}$ e A_{μ}^a na ação (1.3.1), obteremos as equações de campo,

$$\frac{\delta S_{EYM}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2k} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right], \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\delta S_{EYM}}{\delta A_{\mu}^a} = 0 = -\sqrt{-g} F_{a||\nu}^{\mu\nu}. \quad (1.3.3)$$

O tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$ no lado direito de (1.3.2), é definido implicitamente por

$$\delta \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right) d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (1.3.4)$$

do que resulta,

$$T_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}. \quad (1.3.5)$$

A barra dupla em (1.3.3) representa a estrutura de derivada covariante interna escrita com relação ao espaço curvo;

$$F_{a||\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} F_a^{\mu\nu} \right)_{|\nu} + \epsilon f_c{}^b{}_a A_{\nu}^c F_b^{\mu\nu}, \quad (1.3.6)$$

que pode ainda ser escrita,

$$F_{a||\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} D_{\nu}{}^b{}_a \left(\sqrt{-g} F_b^{\mu\nu} \right). \quad (1.3.7)$$

As identidades de Bianchi são aqui satisfeitas diretamente. Temos,

$$D_\nu (\sqrt{-g} {}^*F^{\mu\nu}) \equiv 0, \quad (1.3.8)$$

em lugar da eq. (1.1.75). O dual em (1.3.8) é definido por

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} F_{\alpha\beta}. \quad (1.3.9)$$

A identidade (1.3.8) explica porque não se considera u ma densidade lagrangiana adicional, originando uma ação tal como

$$S^* = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^a {}^*F^{\mu\nu}_a d^4x. \quad (1.3.10)$$

Campos escalares de Higgs são indissociáveis de campos de Yang-Mills, no que respeita à determinação da carga e das propriedades topológicas destes últimos. A consideração de potenciais de Higgs com valores não-triviais de vácuo, permite descrever o conteúdo de massa de modelos cosmológicos, através do processo de quebra espontânea de simetria ⁽¹⁴⁾. O problema de interpretação da constante cosmológica, acha-se também associado ao valor esperado dos campos de Higgs no estado de vácuo não-trivial. A ação completa para uma teoria deste tipo, incluindo os "multiplets" de Higgs, escreve-se,

$$S_{EYM H} = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{R-2\Lambda}{2k} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi^a D_\nu \phi_a - \lambda V(\phi) \right) d^4x, \quad (1.3.11)$$

onde as derivadas covariantes internas dos potenciais de Higgs ϕ^a e o potencial $V(\phi)$ são dados respectivamente por,

$$D_\mu \phi^a = \phi^a{}_{;\mu} + \epsilon f^a{}_{bc} A_\mu^b \phi^c, \quad (1.3.12)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{4} (\phi^a \phi_a)^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \phi^a \phi_a, \quad (1.3.13)$$

onde,

$$\alpha^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = \langle 0 | \phi^a \phi_a | 0 \rangle, \quad (1.3.14)$$

é o valor esperado de vácuo do campo de Higgs, associado à criação espontânea de massa; λ é uma constante de acoplamento adimensional e positiva.

Uma região do espaço-tempo é dita ser um vácuo de Higgs quando $D_\mu \phi^a = 0$ e $V(\phi) = cte.$. Uma afirmação corrente é a de que soluções de energia finita, sempre preenchem essas condições, ainda que assintoticamente, no espaço de Minkowski. Esta propriedade não parece existir em espaços-curvos; podemos ter energia finita para configurações que não estejam no vácuo de Higgs, em nenhuma região do espaço-tempo em questão. Um exemplo será apresentado no 2º capítulo, secção 2.5.

Fazendo as variações $\delta g_{\mu\nu}$, δA_μ^a e $\delta \phi^a$ na ação (1.3.11), poderemos escrever as equações de campo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \quad (1.3.15)$$

$$D_\nu (\sqrt{-g} F_{\alpha}^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi^b D_\nu \phi^c = 0, \quad (1.3.16)$$

$$D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu \phi_a) - \sqrt{-g} \lambda (\phi^b \phi_b - \alpha^2) \phi_a = 0, \quad (1.3.17)$$

onde o tensor energia-momentum no lado direito de (1.3.15) é dado, através de uma identificação análoga a (1.3.4), por

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} = & -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F^{\alpha\beta}_a - \\
 & - D_\mu \phi^a D_\nu \phi_a + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} D_\alpha \phi^a D_\beta \phi_a + \\
 & + g_{\mu\nu} \lambda V(\phi).
 \end{aligned}
 \tag{1.3.18}$$

As derivadas covariantes internas que aparecem em (1.3.16) e (1.3.17), possuem a significação usual, dada pela eq. (1.3.12), ou seja,

$$\begin{aligned}
 D_\nu (\sqrt{-g} F_a^{\mu\nu}) &= D_\nu^c{}_a (\sqrt{-g} F_c^{\mu\nu}) = \\
 &= (\sqrt{-g} F_a^{\mu\nu})_{;\nu} + \epsilon \sqrt{-g} f_b{}^c{}_a A_\nu^b F_c^{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3.19}$$

Presentemente, o problema de criação de massa em modelos cosmológicos ⁽¹⁴⁾, devido à quebra espontânea de simetria conforme, ocupa um lugar extenso em pesquisas de cosmologia semi-clássica ⁽¹⁵⁾. A ação de tais teorias inclui um campo escalar acoplado de forma não-mínima à gravitação. É interessante estudar modelos cosmológicos cujo conteúdo de massa seja criado pela quebra de invariância de simetria conforme, realizada por um potencial de Higgs com mínimos não-triviais, o que corresponde a valores de vácuo diferentes daquele dado por $V(\phi)=0$. Podemos escrever para a ação típica destas teorias,

$$S_Q = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} D_\mu \phi^a D_\nu \phi_a g^{\mu\nu} - \frac{R}{12} \phi^a \phi_a + \lambda V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a \right) d^4x, \tag{1.3.20}$$

onde R é o escalar de curvatura. $V(\phi)$ é o potencial de Higgs com mínimos não-triviais, dado pela eq. (1.3.13). Observando a eq. (1.3.20), nota-se que a invariância conforme da teoria, ou

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}, \quad (1.3.21)$$

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{-\sigma(x)} \phi, \quad (1.3.22)$$

é quebrada pela introdução do potencial $V(\phi)$. Podemos deduzir formas generalizadas deste potencial que ainda conservam a invariância conforme, utilizando considerações elementares. Observemos que as equações para os campos de Higgs ϕ^a , deduzidas das variações $\delta\phi^a$, escrevem-se aqui,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_a) + \frac{R}{6} \phi_a - \lambda \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi_a} = 0. \quad (1.3.23)$$

O tensor energia-momentum é dado pelo efeito da variação,

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int (T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(YM)}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.3.24)$$

onde separamos a parte correspondente aos campos de Yang-Mills.

Fazendo a variação $\delta g^{\mu\nu}$ indicada em (1.3.21), teremos,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(YM)} &= D_\mu \phi^a D_\nu \phi_a - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha \phi^a D_\beta \phi_a g^{\alpha\beta} - g_{\mu\nu} V(\phi) - \\ &- \frac{1}{6} \left[(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \phi^a \phi_a + (\phi^a \phi_a)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square (\phi^a \phi_a) \right] - \\ &- g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F^{\alpha\beta}_a. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Consideremos que as massas a serem criadas pelo processo de quebra da invariância conforme, aparecem à observação, na forma de um fluido, ou seja,

$$(\rho + P) v_\mu v_\nu - P g_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + q_{(\mu} v_{\nu)} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(YM)} \quad (1.3.26)$$

onde $\pi_{\mu\nu}$ - pressão anisotrópica, com $q^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} = 0$ e q_μ
 - condução de calor, com $q_\mu v^\mu = 0$. Ver M. Novello
 - "Cosmologia Relativista" - II Escola de Cosmologia e Gravitação, vol. I, pág. 203.

Tomando o traço da equação acima, obteremos, após usar as eqs. (1.3.25) e (1.3.23),

$$\rho - 3P = -\lambda \left(4V(\phi) - \phi^a \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi^a} \right). \quad (1.3.27)$$

Para uma situação em que se tenha apenas radiação, ou $\rho = 3P$, poderemos então ter, além do resultado trivial $V(\phi) = 0$, a forma do potencial como $V(\phi) = K(\phi^a \phi_a)^2$, onde K é uma constante arbitrária e a teoria ainda é conformemente invariante. Assim, atribuindo a quebra de invariância conforme à criação de massa, introduzimos mais um termo no potencial $V(\phi)$, escrevendo-o como,

$$V(\phi) = K(\phi^a \phi_a)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \phi^a \phi_a, \quad (1.3.28)$$

que é a eq. (1.3.13), escolhendo $K = \frac{1}{4}$.

O problema da criação de massa foi estudado para modelos cosmológicos do tipo Gödel, com campos escalares não-minimamente acoplados e auto-interagentes, com uma só componente, interagindo com campos eletromagnéticos através do campo gravitacional (16,17). É interessante discutir problemas relacionados à quebra de causalidade, que são comuns em tais modelos, como estritamente vinculados à quebra de invariância conforme através da criação de massa. Essa linha de trabalho, ou seja, o estudo da possível eliminação de patologias inerentes na teoria da rela

tividade de Einstein com um mecanismo de criação de massa, continua em aberto. Particularmente, o desenvolvimento deste estudo com campos de Higgs e Yang-Mills, como esquematizado na ação (1.3.11), pode vir a relacionar a quebra de causalidade com a estrutura interna dos campos nas configurações de calibre, fornecendo uma prova definitiva da impossibilidade de se ter quebra de causalidade em modelos cosmológicos reais. Nesse sentido, parecer válido confeccionar trabalhos que estendam o que foi apresentado nas referências (16) e (17).

1.4 - A VERSÃO KALUZA-KLEIN

O enfoque adotado na 1ª secção, de introdução de um campo de calibre, não define a lagrangiana sem ambiguidade. É somente uma prescrição na construção de uma possível lagrangiana, tendo em conta sua dependência no tensor de "curvatura" $F_{\mu\nu}^a$. Nada é dito sobre a forma explícita desta dependência. Esta é a teoria desenvolvida na referência (11), em que se apela para a invariância da lagrangiana, definindo as quantidades de que a mesma pode depender, uma vez dado o grupo de calibre. De há muito é conhecido o fato de que esta teoria pode ser reformulada, no caso de grupos abelianos, como em eletromagnetismo como uma teoria de conexões em um espaço fibrado principal, construída sobre uma variedade riemanniana quadridimensional, com um grupo interno $U(1)$. Como o grupo de estrutura é aqui unidimensional, podemos entender tal teoria, como uma do tipo Kaluza-Klein em sua formulação original, que faz deduzir os campos eletromagnético e

CAPÍTULO 2

ALGUMAS SOLUÇÕES CLÁSSICAS

2.1 - CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI. SOLUÇÕES CONFORMEMENTE CHATAS E A CONSTANTE COSMOLÓGICA.

No estudo das soluções de equações de Yang-Mills, um procedimento que tem resultado bastante útil, é o da procura de um "Ansatz" apropriado, sujeito a uma escolha conveniente de calibre. Consideremos o exemplo de uma teoria $SO(3)$, impondo o calibre de Lorentz, ou,

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^a = 0 ; a = 1, 2, 3, \quad (2.1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Uma classe de "Ansätze" apropriada é descrita, expressando os potenciais procurados em termos dos denominados potenciais tensores de Hertz ^(42, 43). Teremos assim para os potenciais,

$$A_{\mu}^a = \delta_{\mu}^b \Pi^a_{b|\alpha} . \quad (2.1.2)$$

Cada Ansatz é obtido escolhendo adequadamente Π^a_b . As δ_{μ}^b são as análogas das matrizes introduzidas na referência ⁽³⁴⁾, e dadas por,

gravitacional de um tipo especial de geometria em um espaço de cinco dimensões. Um tal isomorfismo de teorias, continua mesmo no caso de grupos de calibre não-abelianos ^(18,19). Vamos construir um exemplo de uma teoria deste tipo, usando as hipóteses de maior simplicidade.

Em cada ponto de um espaço riemanniano $(4+N)$ -dimensional, onde N corresponde ao nº de geradores do grupo G , espaço este parametrizado com coordenadas locais $z^A = (x^\alpha, y^a)$; $\alpha = 0, 1, 2, 3$; $a = 4, 5, \dots, m = N+3$, podemos definir um referencial local usando as $(4+N)$ -"bein" generalizadas de componentes $\theta^{\hat{A}}_{\hat{B}}$. Índices latinos maiúsculos com acento circunflexo, são transformados pela operação fundamental do grupo do espaço tangente do espaço de $(4+N)$ dimensões, $SO(3+N, 1)$, temos,

$$\theta^{\hat{A}}_{\hat{B}} = L^{\hat{A}}_{\hat{C}} \theta^{\hat{C}}_{\hat{B}}, \quad (1.4.1)$$

onde $L^{\hat{A}}_{\hat{C}}$ é a forma matricial de um elemento característico de um subgrupo de $SO(3+N, 1)$, o produto direto $O(3, 1) \times O(N)$.

$$L = \left(\begin{array}{c|c} l_4 & 0 \\ \hline 0 & l_N \end{array} \right). \quad (1.4.2)$$

Usando M^T para representar a transposta de uma matriz genérica M , temos, para as submatrizes em (1.4.2),

$$l_4 \eta \quad l_4^T = \eta \quad ; \quad l_N l_N^T = \mathbb{1}_{(N \times N)}. \quad (1.4.3)$$

onde $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

Os índices latinos maiúsculos sem circunflexo, sofrem

o efeito das transformações lineares generalizadas em $(4+N)$ dimensões, ou,

$$\theta^{\hat{A}}_{\hat{D}} = \theta^{\hat{A}}_B T^B_{\hat{D}}, \quad (1.4.4)$$

onde $T^B_{\hat{D}}$ é um elemento característico do grupo $GL(4+N, R)$ de transformações lineares generalizadas.

A transformação combinada nas $(4+N)$ -"bein" é portanto,

$$\theta^{\hat{A}}_{\hat{D}} = L^{\hat{A}}_{\hat{C}} \theta^{\hat{C}}_B T^B_{\hat{D}}. \quad (1.4.5)$$

Podemos agora particularizar as transformações (1.4.4), exigindo que as mesmas sejam infinitesimais e dadas por,

$$T(\lambda)^A_B = \delta^A_B + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_2 \lambda^a_{1\mu} & k_3 f^a_{bc} \lambda^c \end{pmatrix}, \quad (1.4.6)$$

onde k_2 e k_3 são constantes arbitrárias e as λ^a são funções infinitesimais das coordenadas "externas", $\lambda^a = \lambda^a(x^m)$. Índices gregos tomam os valores 0,1,2,3 e índices latinos minúsculos os valores 4,5,.....,N+3. Os símbolos f^a_{bc} são as constantes de estrutura associadas ao grupo G.

A matriz (1.4.2) pode ser ainda simplificada, exigindo que sua sub-matriz pseudo-ortogonal l_4 seja $\text{diag}(+1,+1,+1,+1) \equiv \mathbb{1}$. Como estamos procurando uma transformação combinada infinitesimal nas $(4+N)$ -bein, devemos considerar a matriz l_N , infinitesimal nas $\lambda^a(x^m)$. Resumindo, o elemento do grupo $O(3,1) \times O(N)$ de interesse, possui para representação matricial,

$$L = \left(\begin{array}{c|c} \delta^{\hat{m}}_{\hat{v}} & 0 \\ \hline 0 & \delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + \Lambda_N^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}(\lambda) \end{array} \right), \quad (1.4.7)$$

onde a matriz $\Lambda_N^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$ é infinitesimal em $\lambda^a(x^m)$.

Considerando a matriz (1.4.6) como geradora de uma expansão infinitesimal nas coordenadas z^A , as mesmas se transformarão como,

$$y^{\prime\prime b} = y^b + k_2 \lambda_{1\mu}^b x^\mu + k_3 f^b{}_{ac} \lambda^c y^a; \quad x^{\prime\prime v} = x^v. \quad (1.4.8)$$

Na matriz das componentes das $(4+N)$ -bein, seus quatro tipos de sub-matrizes, possuem para elementos característicos, $\theta^{\hat{m}}_{\hat{v}}$, $\theta^{\hat{a}}_{\hat{v}}$, $\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$, $\theta^{\hat{m}}_{\hat{b}}$. O primeiro e o terceiro são facilmente interpretados como as componentes das vierbein e das N-bein nos espaços tangentes ao espaço-tempo e ao espaço interno, respectivamente; o segundo pode ser relacionado ao terceiro, na introdução dos potenciais de calibre A_μ^a como,

$$\theta^{\hat{b}}_{\hat{\mu}} = k_1 \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} A_\mu^a. \quad (1.4.9)$$

O quarto tipo de elemento é tomado igual a zero, por simplicidade, do que resulta que a matriz das componentes das $(4+N)$ -bein possui então a forma,

$$\theta = \left(\begin{array}{c|c} \theta^{\hat{m}}_{\hat{v}} & 0 \\ \hline \theta^{\hat{a}}_{\hat{v}} = k_1 \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} A_v^b & \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \end{array} \right). \quad (1.4.10)$$

As novas componentes das $(4+N)$ -bein, após a transformação realizada pelas matrizes (1.4.6) e (1.4.7) e indicada genericamente em (1.4.5), constituem a nova matriz θ'' dada por,

$$\theta'' = \left(\begin{array}{c|c} \theta^{\hat{a}}_{\hat{v}} & 0 \\ \hline \lambda_{\hat{N}\hat{b}}^{\hat{a}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{v}} + k_2 \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \lambda_{1v}^b & \lambda_{\hat{N}\hat{c}}^{\hat{a}} \theta^{\hat{c}}_{\hat{b}} + \theta^{\hat{a}}_{af} f^a_{bc} \lambda^c \end{array} \right) \quad (1.4.11)$$

A transformação dos potenciais $A_{\hat{m}}^{\hat{a}}$ como definidos em (1.4.9), dá-se então por,

$$\theta^{\hat{a}}_{\hat{v}} = k_1 \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} A^{\hat{b}}_{\hat{v}} = \lambda_{\hat{N}\hat{b}}^{\hat{a}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{v}} + k_2 \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \lambda_{1v}^b. \quad (1.4.12)$$

Substituindo no 2º e 3º membro da eq. (1.4.12) a transformação para $\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ e a eq. (1.4.9), respectivamente, teremos,

$$k_1 A^{\hat{a}}_{\hat{v}} = k_1 A^a_{\hat{v}} + k_2 \lambda_{1v}^a + k_1 k_3 f^a_{bc} A^{\hat{b}}_{\hat{v}} \lambda^c. \quad (1.4.13)$$

Podemos iterar a eq. (1.4.13), lembrando que a transformação é infinitesimal, ou seja, de

$$k_1 A^{\hat{a}}_{\hat{v}} = k_1 A^a_{\hat{v}} + k_2 \lambda_{1v}^a + k_1 k_3 f^a_{bc} \left(A^b_{\hat{v}} + \frac{k_2}{k_1} \lambda_{1v}^b + k_3 f^b_{de} A^{\hat{d}}_{\hat{v}} \lambda^e \right) \lambda^c, \quad (1.4.14)$$

teremos, após desprezar os dois últimos termos no membro direito,

$$A^{\hat{a}}_{\hat{v}} \cong A^a_{\hat{v}} + \frac{k_2}{k_1} \lambda_{1v}^a + k_3 f^a_{bc} A^b_{\hat{v}} \lambda^c. \quad (1.4.15)$$

Fazendo $k_1 = k_2$ e $k_3 = -\epsilon$, onde ϵ é a constante de acoplamento dos campos de Yang-Mills, chegamos a escrever (1.4.15)

como a transformação de calibre infinitesimal (1.1.36), ou,

$$A_v^a \approx A_v^a + (\delta_c^a \partial_v - \epsilon f_b^a{}_c A_v^b) \lambda^c = A_v^a + D_v^a \lambda^c, \quad (1.4.16)$$

com D_v denotando a derivada covariante interna.

Note-se que partimos de uma teoria invariante por transformações generalizadas lineares em $(4+N)$ dimensões e estamos chegando a uma teoria invariante por transformações de calibre de um grupo não-abeliano G . A forma das transformações de coordenadas em (1.4.8), já denotava isto. Note-se ainda que somente as variáveis internas sofrem transformações que dependem das variáveis externas. Estas últimas são invariantes, o que é característico de transformações de calibre locais.

De posse das $(4+N)$ -bein, podemos construir o tensor métrico de uma variedade riemanniana de $(4+N)$ dimensões; temos,

$$\gamma_{AB} = \eta_{\hat{C}\hat{D}} \theta^{\hat{C}}_A \theta^{\hat{D}}_B, \quad (1.4.17)$$

do que segue, para todos os tipos de componentes, usando a eq. (1.4.10),

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_{\hat{a}\hat{b}} \theta^{\hat{a}}_\mu \theta^{\hat{b}}_\nu = g_{\mu\nu} + k_0^2 g_{cd} A_\mu^c A_\nu^d, \quad (1.4.18)$$

$$\gamma_{ab} = g_{ab}, \quad (1.4.19)$$

$$\gamma_{\alpha\nu} = \eta_{\hat{b}\hat{c}} \theta^{\hat{b}}_\alpha \theta^{\hat{c}}_\nu = k_1 g_{ac} A_\nu^c, \quad (1.4.20)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \theta^{\hat{\alpha}}_\mu \theta^{\hat{\beta}}_\nu, \quad (1.4.21)$$

e,

$$g_{ab} = \eta_{\hat{c}\hat{d}} \theta^{\hat{c}}_a \theta^{\hat{d}}_b, \quad (1.4.22)$$

são os tensores métricos das variedades de 4 e N dimensões, respectivamente.

A teoria até aqui apresentada, ainda não é a que nos interessa; ela é definida em um espaço riemanniano $(4+N)$ -dimensional. Todas as quantidades assemelhadas a componentes de tensor métrico, dependem das $(4+N)$ coordenadas; assim, por exemplo, o tensor g_{ab} não define a métrica de Killing associada ao grupo não-abeliano G. Isto é contrário à experiência física usual, em que estamos habituados a "ver" somente as quatro dimensões do espaço-tempo. Sem entrar aqui em considerações sobre a interpretação física das dimensões internas ou "extras", o procedimento a ser usado, baseia-se no adotado por Kaluza e Klein, considerando estas dimensões como que compactadas na era presente do universo. Ou seja, que estas dimensões seriam ativas ou "visíveis", em escalas comparáveis ao comprimento característico de Planck de 10^{-33} cm; o que equivale a falar em energias da ordem de 10^{19} GeV. Esta é a ordem de energias em que se devem realizar experiências para detectar as dimensões internas. A capacidade dos aceleradores atuais está muito abaixo desta ordem. No entanto, de um ponto de vista teórico, existe a esperança de que a topologia intrínseca e não-trivial de diversos modelos cosmológicos, modifique as conjecturas acerca do comprimento de Planck, de modo a que possamos "ver" as dimensões extras a uma escala de distâncias muito maior. Existem trabalhos cuja argumentação consiste em demonstrar que em eras remotas da evolução do universo, as dimensões extras eram comparáveis em escala

às que são hoje observadas. É possível encontrar modelos em que a expansão do universo a partir dessas eras remotas, se dá preferencialmente nas três dimensões espaciais conhecidas. Contudo, este enfoque semi-clássico de trabalho parece ainda requerer muita investigação ^(20,21).

A estrutura da variedade com que se trabalha para evitar a dependência nas coordenadas internas, y^4, y^5, \dots, y^{3+N} , não é mais a de um espaço riemanniano de $(4+N)$ dimensões propriamente dito, mas a de um espaço fibrado organizado como um espaço riemanniano $(4+N)$ -dimensional, com o espaço-tempo como base e grupo não-abeliano G do espaço interno, como grupo de estrutura. Os potenciais A_μ^a tomam-se as formas de conexão deste espaço fibrado ^(22,23); supondo que o mesmo é localmente trivial, teremos,

$$g_{ab|\mu} = 0 \quad ; \quad g_{\mu\nu|a} = 0, \quad (1.4.23)$$

ou seja, a parte externa do tensor métrico não depende das coordenadas internas, dando-se o mesmo para a parte interna com relação às coordenadas do espaço-tempo.

De forma a eliminar qualquer dependência nas coordenadas internas, exigimos também que

$$g_{ab|c} = 0. \quad (1.4.24)$$

Podemos agora expressar as componentes g_{ab} da métrica interna, em termos das constantes de estrutura da álgebra de Lie associada ao grupo. No espaço tangente à variedade do grupo, a métrica é dada em função dos geradores por,

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \text{Tr} (\mathcal{T}_{\hat{a}} \mathcal{T}_{\hat{b}}), \quad (1.4.25)$$

onde "Tr" significa traço do produto de matrizes indicado.

Usando a representação adjunta para os geradores, ou,

$$(\mathcal{T}_{\hat{a}})^{\hat{b}}_{\hat{c}} = -i f_{\hat{a}}^{\hat{b}}{}^{\hat{c}}, \quad (1.4.26)$$

a eq. (1.4.25) pode também ser escrita,

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}} = f_{\hat{a}}^{\hat{d}}{}^{\hat{c}} f_{\hat{d}}^{\hat{c}}{}^{\hat{b}}. \quad (1.4.27)$$

Substituindo a eq. (1.4.27) na eq. (1.4.22) e usando a ortonormalidade das N-bein, teremos,

$$g_{ab} = f_a^d{}^c f_d^c{}^b. \quad (1.4.28)$$

A eq. (1.4.28) mostra a estrutura do tensor de Killing associado ao grupo não-abeliano G. A métrica g_{ab} como definida pela eq. (1.4.28) é realmente a métrica do grupo G, como segue do fato de que a mesma é independente das coordenadas tanto internas como externas, expresso pelas eqs. (1.4.23) e (1.4.24). Daqui segue também a afirmação de que o grupo G deve ser semi-simples, ou seja, não contém subgrupos abelianos invariantes⁽⁴⁾, caso contrário, o determinante da matriz dada por (1.4.28) seria nulo e a mesma não poderia ser invertida, o que introduziria singularidades na métrica do grupo.

Na métrica dada pelas eqs. (1.4.18) a (1.4.20), é usual tomar a constante $k_1 = \epsilon$; desta forma, a única constante arbitrária da teoria até o momento, passa a ser a constante de acq

plamento ϵ . Usando as eqs. (1.4.23) e (1.4.24), a métrica γ_{AB} resultante, eq. (1.4.17), pode ser escrita,

$$\gamma_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \epsilon^2 g_{ac} A_\mu^a A_\nu^c & \epsilon g_{ac} A_\nu^c \\ \hline \epsilon g_{ac} A_\mu^a & g_{ac} \end{array} \right) \quad (1.4.29)$$

A matriz inversa àquela dada em (1.4.29), satisfazendo a $\gamma^{AC} \gamma_{AB} = \delta_B^C$, pode ser calculada da mesma forma; teremos,

$$\gamma^{AC} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -\epsilon g^{\mu\beta} A_\beta^b \\ \hline -\epsilon g^{\alpha\nu} A_\alpha^a & g^{ab} + \epsilon^2 g^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^b \end{array} \right), \quad (1.4.30)$$

onde $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ e $g^{ab} g_{ac} = \delta_c^b$.

Podemos calcular o determinante $\gamma = \det \gamma_{AB}$ da métrica (1.4.29), da seguinte forma: consideremos que este determinante é uma função da constante de acoplamento ϵ . Calculemos a derivada em relação a ϵ do determinante γ , teremos,

$$\frac{d\gamma}{d\epsilon} = \gamma T_r \left(\frac{d}{d\epsilon} \ln \gamma_{AB}(\epsilon) \right) = \gamma T_r \left(\gamma^{AB} \frac{d\gamma_{AB}}{d\epsilon} \right). \quad (1.4.31)$$

Substituindo aqui as eqs. (1.4.30) e (1.4.29), teremos,

$$\frac{d\gamma}{d\epsilon} = \gamma T_r \left(\begin{array}{c|c} \epsilon g^{\mu\nu} g_{ab} A_\mu^a A_\nu^b & g^{\mu\nu} g_{ac} A_\nu^c \\ \hline -\epsilon^2 g_{bc} g^{\nu\alpha} A_\mu^b A_\nu^c A_\alpha^a & -\epsilon g^{\nu\alpha} g_{ac} A_\nu^c A_\alpha^a \\ + g_{ab} g_{dc} A_\mu^d & \end{array} \right) = 0 \quad (1.4.32)$$

Assim, vemos que na verdade o determinante da matriz não depende de ϵ . Temos ainda que

$$\gamma(0) = \varphi^2 g \quad ; \quad \gamma(\epsilon) = \gamma, \quad (1.4.33)$$

onde $\varphi^2 = \det g_{ab}$ e $g = \det g_{\mu\nu}$.

Das eqs. (1.4.32) e (1.4.33), segue-se,

$$\gamma = \det \gamma_{AB} = \varphi^2 \det g_{\mu\nu} = \varphi^2 g. \quad (1.4.34)$$

No caso em que estamos tratando, a constante $\varphi^2 = \det g_{ab}$ pode ser tomada igual a unidade, com a métrica g_{ab} dada pela eq. (1.4.28).

Devido às constantes de estrutura anti-simétricas $f^a{}_{bc}$, a métrica (1.4.29) com inversa (1.4.30) está na verdade escrita em uma base não-coordenada ou não-holônoma ⁽²⁴⁾, o que assegura a decomposição das $(4+N)$ -bein como,

$$\theta_{\hat{A}} = \theta^{\mu}_{\hat{A}} \partial_{\mu} - i \theta^b_{\hat{A}} T_b. \quad (1.4.35)$$

Utilizando a base dual a esta, podemos escrever,

$$\theta^{\hat{B}} = \theta^{\hat{B}}_{\mu} dx^{\mu} - i \theta^{\hat{B}a} T^a. \quad (1.4.36)$$

A parte não-holônoma e_a da base $e_{\hat{A}} = (\partial_{\mu}, e_a = -iT_a)$ possui as relações de comutação,

$$[e_a, e_b] = -[T_a, T_b] = f^c{}_{ab} e_c, \quad (1.4.37)$$

onde T_a são as matrizes da representação escolhida do grupo G e T^b suas inversas.

As conexões na base não-holônoma podem ser escritas,

$$\begin{aligned} \{A B\}^D &= \frac{1}{2} \gamma^{DC} (\gamma_{AC|B} + \gamma_{BC|A} - \gamma_{AB|C}) + \\ &+ \frac{1}{2} \gamma^{DC} (f_{AC}{}^E \gamma_{EB} + f_{BC}{}^E \gamma_{EA} - f_{AB}{}^E \gamma_{EC}), \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

de onde temos explicitamente,

$$\{a b\}^d = \frac{1}{2} f^a{}^d{}_b = \Gamma^d{}_{ab} \quad (1.4.39)$$

$$\{a b\}^\mu = 0, \quad (1.4.40)$$

$$\{\alpha b\}^\mu = \frac{\epsilon}{2} g^{\mu\nu} g_{bd} F_{\alpha\nu}^d, \quad (1.4.41)$$

$$\{a \beta\}^d = \frac{\epsilon}{2} f^a{}^d{}_b A_\beta^b + \frac{\epsilon^2}{2} g^{\mu\nu} g_{ab} A_\nu^d F_{\mu\beta}^b, \quad (1.4.42)$$

$$\begin{aligned} \{\alpha \beta\}^d &= \frac{\epsilon}{2} (A_{\alpha| \beta}^d - A_{\beta| \alpha}^d) - \epsilon A_\nu^d \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + \\ &+ \frac{\epsilon^3}{2} g^{\mu\nu} A_\nu^d g_{ab} (A_\alpha^a F_{\mu\beta}^b + A_\beta^a F_{\mu\alpha}^b), \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

$$\{\alpha \beta\}^\delta = \Gamma_{\alpha\beta}^\delta + \frac{\epsilon^2}{2} g^{\delta\mu} g_{ab} (A_\alpha^a F_{\beta\mu}^b + A_\beta^a F_{\alpha\mu}^b), \quad (1.4.44)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ e $\Gamma^d{}_{ab}$ são os coeficientes de Christoffel das partes holônoma e não-holônoma, respectivamente.

Consideremos uma geodésica genérica no espaço $(4+N)$ -dimensional, com um campo tangente $U^A = \frac{dx^A}{dP}$. A equação da geodésica escreve-se portanto,

$$\frac{dU^A}{dP} + \{A\}_{BC} U^B U^C = U^A{}_{|B} U^B + \{A\}_{BC} U^B U^C = 0. \quad (1.4.45)$$

Tendo o espaço com que estamos lidando, a estrutura de um fibrado principal trivial como descrito pelas eqs. (1.4.23), para um observador que vive na base do fibrado, ou seja, no espaço-tempo, a eq. (1.4.45) não expressa a geodésica mas sim a trajetória de partículas carregadas com carga não-abeliana. Isto pode ser visto escrevendo explicitamente os dois tipos de equações decorrentes de (1.4.45), para $A=\alpha$, índice de espaço-tempo e $A=a$, índice de espaço interno. Temos assim, para $A=\alpha$,

$$\dot{U}^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \sigma \end{matrix} \right\} U^\beta U^\sigma + 2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta a \end{matrix} \right\} U^\beta U^a = 0, \quad (1.4.46)$$

de onde, substituindo os coeficientes de conexão necessários, teremos,

$$\dot{U}^\alpha + \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha U^\beta U^\sigma + g^{\alpha\mu} g_{ab} F_{\sigma\mu}^b U^\sigma (\epsilon^2 A_\beta^a U^\beta + \epsilon U^a) = 0. \quad (1.4.47)$$

A este ponto é necessário conhecer todas as possíveis componentes dos potenciais introduzidos em (1.4.9), na base escolhida. Temos, além de A_μ^a ,

$$A_a^d = \gamma^{d\alpha} g_{ab} A_\alpha^b + \gamma^{de} g_{ab} A^b_e. \quad (1.4.48)$$

Substituindo as componentes necessárias da métrica inversa (1.4.30), teremos,

$$0 = -\epsilon g^{\alpha\beta} g_{ab} A_\beta^d A_\alpha^b + \epsilon^2 g^{\alpha\beta} g_{ab} A_\alpha^d A_\beta^e A^b_e, \quad (1.4.49)$$

do que resulta,

$$A_a^b = \frac{1}{\epsilon} \delta_a^b. \quad (1.4.50)$$

Procedendo analogamente em relação a A^m_a e usando a eq. (1.4.50), teremos,

$$A^m_a = \delta^{m\alpha} g_{ab} A_\alpha^b + \delta^{me} g_{ab} A^b_e, \quad (1.4.51)$$

ou ainda, após usar a eq. (1.4.30),

$$A^m_a = g^{m\alpha} g_{ab} A_\alpha^b + (-\epsilon g^{mv} A^e_v) g_{ab} \frac{1}{\epsilon} \delta^b_e = 0. \quad (1.4.52)$$

Usando (1.4.50), podemos escrever então o segundo termo no parênteses da eq. (1.4.47) na forma,

$$\epsilon U^a = \epsilon \delta^a_b U^b = \epsilon^2 A^a_b U^b. \quad (1.4.53)$$

A eq. (1.4.47) resulta finalmente,

$$\dot{U}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} U^\beta U^\delta + g^{\alpha\mu} g_{ab} Q^a F_{\mu\nu}^b U^\delta = 0. \quad (1.4.54)$$

A quantidade Q^a , para uma partícula de massa igual à unidade, pode ser identificada com o isovetor de carga. Temos,

$$Q^a = \epsilon^2 A^a_\nu U^\nu. \quad (1.4.55)$$

A equação (1.4.54), com Q^a dado por (1.4.55), é a equação da trajetória de uma partícula não-abeliana como observada no espaço-tempo. É interessante notar que para uma partícula com estrutura não-abeliana interna, para que sua trajetória seja uma geodésica, além dos casos triviais existentes para uma partícula abeliana, de nulidade do campo externo ou da carga, existe

aqui também a possibilidade de que o isovetor de carga Q^a seja ortogonal ao isovetor de campo $F_{\mu\nu}^a$, como segue trivialmente da eq. (1.4.54).

Para $A=a$, a eq. (1.4.45) após a substituição dos coeficientes de conexão necessários, fornece,

$$\begin{aligned} \dot{U}^a + \epsilon (A_{\mu\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha^a) U^\mu U^\nu + \epsilon f_c^a e A_\mu^e U^\mu U^c + \\ + g^{\alpha\beta} g_{bc} (\epsilon^3 A_\beta^a A_\mu^b F_{\alpha\nu}^c U^\mu U^c + \epsilon^2 A_\beta^a F_{\alpha\mu}^b U^\mu U^c) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

Podemos adicionar à eq. (1.4.56), a identidade,

$$\epsilon f_c^a e A^e_d U^d U^c \equiv 0, \quad (1.4.57)$$

obtida de (1.4.50) e da anti-simetria das constantes de estrutura $f_a{}^b{}_c$. Teremos então, após usar novamente a eq. (1.4.50),

$$\begin{aligned} \dot{U}^a + \epsilon (A_{\mu\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha^a) U^\mu U^\nu + \epsilon f_c^a e A_B^e U^B U^c + \\ + \epsilon^3 g^{\alpha\beta} g_{bd} A_\beta^a F_{\alpha\mu}^b A_B^d U^B U^\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.4.58)$$

Multiplicando a eq. (1.4.58) por $\frac{1}{\epsilon} \delta^c_a = A^c_a$, após contração no índice a e uso da identidade,

$$A^c_a \dot{U}^a = (A^c_B U^B)^\cdot - (A^c_\alpha U^\alpha)^\cdot, \quad (1.4.59)$$

teremos, usando a eq. (1.4.54),

$$\dot{Q}^a + f_b{}^a{}_c U^b Q^c = 0. \quad (1.4.60)$$

As eqs. (1.4.54) e (1.4.60) são as equações da trajetória de uma partícula não-abeliana em um espaço-tempo curvo. A última equação mostra que a partícula "gira" no espaço interno, ao percorrer a trajetória.

A eq. (1.4.60) pode ser deduzida também das seguintes considerações:

Seja a eq. (1.4.45) escrita como,

$$U^B U^A \parallel B = 0, \quad (1.4.61)$$

onde a barra dupla significa derivada covariante na métrica γ_{AB} . Derivando a "isocarga" Q^a , definida em (1.4.55), em relação ao parâmetro P , escrevemos

$$\frac{dQ^a}{dP} = \dot{Q}^a = \epsilon^2 (A_B^{\hat{a}} U^B)' = \epsilon^2 (A_B^{\hat{a}} U^B) \parallel C U^C. \quad (1.4.62)$$

Usando a eq. (1.4.61), teremos,

$$\dot{Q}^a = \epsilon^2 A_B^{\hat{a}} \parallel C U^B U^C. \quad (1.4.63)$$

Aqui fazemos uso da identidade,

$$g_{ab} (A^a \parallel C + A^{\hat{c}} \parallel B) = \mathcal{L}_{A_b} \gamma_{BC} - A_b^D (f_{BD}^e \gamma_{eC} + f_{CD}^e \gamma_{eB}), \quad (1.4.64)$$

onde o 1º termo do 2º membro representa a derivada de Lie da métrica γ_{BC} , em relação ao isovetor A_b , ou seja,

$$\mathcal{L}_{A_b} \gamma_{BC} = A_b^D \gamma_{BC|D} + A_b^D \gamma_{CD} \parallel B + A_b^D \gamma_{BD} \parallel C. \quad (1.4.65)$$

Das componentes de A_b^D , eqs. (1.4.50) e (1.4.52), ve-

mos que os A_b são vetores de Killing da métrica γ_{BC} , uma vez que o lado direito de (1.4.65) é trivialmente igual a zero. Temos então, de (1.4.64),

$$A^a{}_{B||C} + A^a{}_{C||B} = -\frac{1}{\epsilon} g^{ab} (f_{Bb}{}^e \gamma_{eC} + f_{Cb}{}^e \gamma_{eB}). \quad (1.4.66)$$

Substituindo a última equação na eq. (1.4.63), teremos,

$$\begin{aligned} \dot{Q}^a &= -\frac{\epsilon}{2} g^{ab} (f_{Bb}{}^e \gamma_{eC} + f_{Cb}{}^e \gamma_{eB}) U^B U^C = \\ &= -\epsilon g^{ab} f_{db}{}^e \gamma_{eC} U^b U^C. \end{aligned} \quad (1.4.67)$$

Após substituição das componentes da métrica γ_{AB} e uso da anti-simetria das constantes de estrutura, teremos,

$$\begin{aligned} \dot{Q}^a &= -\epsilon^2 f d^a{}_m U^d A^m{}_B U^B = -\epsilon^2 f d^a{}_m A^m{}_B U^B U^d = \\ &= -f d^a{}_m U^d Q^m, \end{aligned} \quad (1.4.68)$$

onde na segunda igualdade foi usada a eq. (1.4.50).

Assim, obtivemos novamente a eq. (1.4.60), identifican-do de passagem uma classe de vetores de Killing para a métrica γ_{AB} .

As componentes do tensor de Riemann $R^A{}_{BCD}$, na base não-holônoma usada no cálculo das conexões (1.4.38), escrevem-se genericamente ⁽²⁴⁾,

$$R^A{}_{BCD} = \left\{ \begin{matrix} A \\ BD \end{matrix} \right\}_{|C} - \left\{ \begin{matrix} A \\ BC \end{matrix} \right\}_{|D} + \left\{ \begin{matrix} A \\ EC \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} E \\ BD \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} A \\ ED \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} E \\ BC \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} A \\ BE \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} E \\ CD \end{matrix} \right\}. \quad (1.4.69)$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são obtidos

através de

$$R_{BD} = R^A{}_{BAD}, \quad (1.4.70)$$

$$R^{A+N} = \gamma^{BD} R_{BD} = \gamma^{mn} R_{mn} + 2\gamma^{av} R_{av} + \gamma^{ab} R_{ab}. \quad (1.4.71)$$

Procedendo ao cálculo dos diversos tipos de componentes de R_{BD} como mostrados em (1.4.71), após várias manipulações e identificações de termos, teremos,

$$\begin{aligned} R_{mn} = & R_{mn} + \frac{\epsilon^2}{4} g_{bc} A_\mu^b A_\nu^c + \frac{\epsilon^2}{2} g^{\rho\delta} g_{cd} F_{\mu\rho}^d F_{\nu\delta}^c + \\ & + \frac{\epsilon^4}{4} g^{\alpha\delta} g^{\beta\rho} g_{cd} g_{ab} A_\mu^a A_\nu^c F_{\alpha\beta}^d F_{\rho\delta}^b + \\ & + \frac{\epsilon^2}{2} g^{\rho\delta} g_{cd} (A_\mu^c D_\rho F_{\nu\delta}^d + A_\nu^c D_\rho F_{\mu\delta}^d), \end{aligned} \quad (1.4.72)$$

onde R_{mn} é o tensor de Ricci em relação à base do fibrado, ou seja, ao espaço-tempo, temos,

$$R_{mn} = \Gamma_{\mu\nu|\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha|v}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta. \quad (1.4.73)$$

Dentro do parênteses da eq. (1.4.72), figuram termos contendo a derivada covariante geral da teoria, dada por

$$D_\rho F_{\nu\delta}^d = F_{\nu\delta|\rho}^d - \Gamma_{\rho\delta}^\beta F_{\nu\beta}^d - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha F_{\alpha\delta}^d + \epsilon f^d{}_{ae} A_\rho^a F_{\nu\delta}^e. \quad (1.4.74)$$

Temos ainda,

$$R_{ab} = R_{ab} - \frac{\epsilon^2}{4} g^{\alpha\delta} g^{\beta\delta} g_{bd} g_{ac} F_{\beta\delta}^d F_{\alpha\delta}^e, \quad (1.4.75)$$

onde R_{ab} é o tensor de Ricci construído com as conexões $\left\{ \begin{smallmatrix} a \\ bc \end{smallmatrix} \right\}$ na parte não-holônoma da base com relações de comutação (1.4.37), ou,

$$\begin{aligned} R_{ab} &= - \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ e b \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ a c \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a d \end{smallmatrix} \right\} f^c b^d \\ &= \frac{1}{4} f^a e^c f^e c^b = \frac{1}{4} g_{ab}. \end{aligned} \quad (1.4.76)$$

Finalmente, as componentes em que aparecem índices dos dois tipos $R_{\alpha\nu}$, escrevem-se como,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\nu} &= \frac{\epsilon}{4} g_{ab} A_\nu^b + \frac{\epsilon^3}{4} g_{ab} g_{cd} g^{\alpha\sigma} g^{\rho\delta} A_\nu^c F_{\sigma\delta}^b F_{\alpha\rho}^d + \\ &+ \frac{\epsilon}{2} g_{ab} g^{\alpha\rho} D_\alpha F_{\nu\rho}^b. \end{aligned} \quad (1.4.77)$$

Usando as eqs. (1.4.72), (1.4.75), (1.4.77) e a métrica inversa γ^{AB} , eq. (1.4.30), estaremos em condições de escrever o escalar de curvatura de acordo com (1.4.71), obtendo,

$$R^{4+N} = R + R^N - \frac{\epsilon^2}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g_{cd} F_{\mu\rho}^c F_{\nu\sigma}^d, \quad (1.4.78)$$

onde R e R^N denotam os escalares de curvatura para o espaço-tempo e o espaço interno, respectivamente.

Construindo uma ação tipo Einstein-Hilbert, a partir do escalar de curvatura calculado, eq. (1.4.78), teremos,

$$S^{4+N} = -\frac{1}{2k} \int \sqrt{(-1)^{N+1} \gamma} (R^{4+N} - 2\Lambda) d^4x d^N G, \quad (1.4.79)$$

onde Λ é uma constante cosmológica.

As integrais em d^4x e $d^N G$, são respectivamente sobre uma secção transversal do fibrado e sobre o volume do grupo

interno, suposto compacto. Usando a eq. (1.4.34), com $\gamma^2 = 1$ e lembrando que o volume de grupos compactos é finito, podemos integrar sobre o volume do grupo em (1.4.79), obtendo,

$$S = -\frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} \left(R + R^N - 2\Lambda - \frac{\epsilon^2}{4} g^{mn} g^{\rho\sigma} g_{cd} F_{\mu\rho}^c F_{\nu\sigma}^d \right) d^4x \quad (1.4.80)$$

Esta ação coincide com a ação usual de campos acoplados de Einstein-Yang-Mills, se for feita a identificação,

$$\epsilon^2 = 2k. \quad (1.4.81)$$

Note-se que existe a possibilidade de não haver constante cosmológica na teoria obtida, se

$$R^N = 2\Lambda. \quad (1.4.82)$$

Neste caso, com o objetivo de obter uma constante cosmológica nula para um universo de $(4+N)$ dimensões, podemos tentar definir uma métrica para um dado grupo G , tal que o escalar de curvatura associado seja zero. A cada processo de compactação das dimensões extras, corresponde uma teoria com ação diferente. Também, outras ações podem ser consideradas em lugar da de Einstein-Hilbert para a teoria de $(4+N)$ dimensões. Em princípio, qualquer teoria daquelas tipificadas na secção anterior, pode ser obtida com tais procedimentos. A discussão de critérios de renormalização, em termos da análise das diversas ações destas teorias, é algo inteiramente fora do escopo do presente texto ⁽¹⁰⁷⁾.

1.5 - CAMPOS DE YANG-MILLS E O PROGRAMA DE UNIFICAÇÃO DE RAINICH

O programa de unificação de Rainich ^(25,26), foi aplicado a campos Einstein-Yang-Mills ⁽²⁷⁾ no contexto da teoria de gravitação de Yang ⁽²⁸⁾, em uma variedade quadridimensional com métrica definida positiva. Tais desenvolvimentos foram tentados para configurações auto-duais ou anti-auto-duais, $F_{\mu\nu}^a = \pm *F_{\mu\nu}^a$. É bem conhecido o fato que para estes casos, a energia dos campos de calibre não é responsável pela curvatura do espaço, uma vez que o tensor energia-momentum é zero ⁽²⁹⁾. Isto costuma ser parafraseado, dizendo que campos de calibre deste tipo não "deixam marcas" na determinação da geometria, já que os mesmos não podem ser completamente codificados na geometria da variedade associada ao espaço-tempo. Assim, unificação de campos de Yang-Mills deste tipo com gravitação, no estilo de Rainich, parece possuir apenas interesse acadêmico. O propósito desta secção, é tentar a unificação tipo Rainich para outro caso particular, aquele dos campos de Yang-Mills SU(2) com potenciais invariantes por transformações de calibre geradas por subgrupos U(1) ⁽³⁰⁾.

Dando então continuidade ao processo de construção da teoria de Rainich para campos de calibre não-abelianos, consideremos os elementos de um subgrupo U(1) gerados por matrizes hermitianas $f_{(i)}$ de traço nulo ⁽³¹⁾, ou,

$$U_{f_{(i)}}(x) = e^{i \epsilon f_{(i)}(x)} \quad (1.5.1)$$

As matrizes infinitesimais $f_{(i)}$ podem ser escritas como,

$$f_{(i)}(x) = \eta_{(i)}^a(x) \beta_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.5.2)$$

onde σ_a são as matrizes de Pauli e $\eta_{(i)}^a$ as componentes dos vetores de Killing infinitesimais $\eta_{(i)}$, associados com cada classe de simetrias internas⁽³²⁾ dos potenciais A_μ^a , que se transformam de acordo com a eq. (1.3.33), ou,

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{\epsilon} U_{|\mu} U^{-1}. \quad (1.5.3)$$

A eq. (1.5.2) mostra que dado um vetor de Killing interno $\eta_{(i)}$, podemos associar ao mesmo um gerador de uma transformação de calibre infinitesimal $U(1)$. Da exigência da invariância de A_μ^a sob esta transformação, como dada em (1.5.3), temos

$$\delta_{g(i)} A_\mu^a = \eta_{(i)|\mu}^a + \epsilon \epsilon^a{}_{bc} A_\mu^b \eta_{(i)}^c = D_\mu \eta_{(i)}^a = 0, \quad (1.5.4)$$

onde $\epsilon^a{}_{bc}$ são as constantes de estrutura de $SU(2)$ e D_μ é a derivada covariante interna, escrita na representação adjunta⁽⁵⁾.

Multiplicando a eq. (1.5.4) por $\delta_a \eta_{(i)}^d \delta_d$, contraindo no índice a e tomando o traço do resultado, teremos, após usar a definição de métrica do grupo, ou $\text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = g_{ab}$,

$$(g_{ab} \eta_{(i)}^a \eta_{(i)}^b)_{|\mu} = 0. \quad (1.5.5)$$

Na eq. (1.5.5) e em todas as equações posteriores, índices dentro de parênteses repetidos não implicam soma sobre os valores que os mesmos assumem. Da eq. (1.5.5), podemos escrever os vetores de Killing internos como,

$$\eta_{(i)}^a(x) = \lambda \hat{\eta}_{(i)}^a(x), \quad (1.5.6)$$

onde $\hat{\eta}_{(i)}^a$ é um vetor de módulo igual à unidade e λ é uma constante infinitesimal dada por

$$\lambda = (g_{ab} \eta_{(i)}^a \eta_{(i)}^b)^{1/2}. \quad (1.5.7)$$

As eqs. (1.5.4) são satisfeitas pelos potenciais,

$$A_{(i)\mu}^a = \beta_{(i)\mu} \hat{\eta}_{(i)}^a - \frac{1}{\epsilon} \epsilon^{abc} \hat{\eta}_{(i)}^b \cdot \hat{\eta}_{(i)c|\mu}, \quad (1.5.8)$$

onde $\beta_{(i)\mu}$ são funções arbitrárias.

Os campos $F_{(i)\mu\nu}^a$ são portanto dados por,

$$F_{(i)\mu\nu}^a = A_{(i)\nu|\mu}^a - A_{(i)\mu|\nu}^a + \epsilon \epsilon^{abc} A_{(i)\mu}^b A_{(i)\nu}^c = \gamma_{(i)\mu\nu} \hat{\eta}_{(i)}^a, \quad (1.5.9)$$

onde

$$\gamma_{(i)\mu\nu} = \beta_{(i)\nu|\mu} - \beta_{(i)\mu|\nu} - \frac{1}{\epsilon} \hat{\eta}_{(i)}^a \epsilon_{abc} \hat{\eta}_{(i)|\mu}^b \hat{\eta}_{(i)|\nu}^c. \quad (1.5.10)$$

Na dedução das eqs. (1.5.9) e (1.5.10), foi usado o fato que para o grupo SU(2), de acordo com a eq. (1.5.5), as quantidades $\epsilon^{abc} \hat{\eta}_{(i)|\mu}^b \hat{\eta}_{(i)|\nu}^c$ constituem as componentes de um isovetor paralelo ao isovetor de componentes $\hat{\eta}_{(i)}^a$.

Das equações de campo de Yang-Mills, (1.3.3), teremos, usando a definição (1.5.10),

$$(\sqrt{-g} \gamma_{(i)}^{\mu\nu})_{|\nu} = 0 \quad (1.5.11)$$

Os campos $F_{(i)\mu\nu}^a$ dados em (1.5.9), são chamados de maxwellianos, no contexto da eq. (1.5.11). Deve-se observar que para

obter a eq. (1.5.9), podemos relaxar a condição (1.5.4), impondo somente,

$$D_\mu \hat{\eta}_{(i)}^a = 0. \quad (1.5.12)$$

É interessante ainda observar que a condição (1.5.12), é uma condição necessária e suficiente para escrever os campos de Yang-Mills na forma (1.5.9), com $\gamma_{(i)mn}$ dado por (1.5.10); a menos que o campo de Yang-Mills seja um campo nulo⁽³³⁾, ou $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = 0$ e $*F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = 0$; onde $*F_{\mu\nu}^a$ representa o dual de $F_{\mu\nu}^a$, ou,

$$*F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{a\alpha\beta}. \quad (1.5.13)$$

Isto constitui mais uma motivação para o desenvolvimento ulterior da teoria, uma vez que sabemos que modificações se tornam necessárias na teoria de Rainich, de forma a incorporar campos eletromagnéticos nulos. Essa analogia parece ser mesmo a chave de construção da teoria e tratamento de casos correspondentes a campos não-abelianos de estrutura mais complexa.

Os campos $\gamma_{(i)mn}$, são os campos maxwellianos associados a cada vetor de Killing interno $\hat{\eta}_{(i)}$. Interpretando as componentes $\hat{\eta}_{(i)}^a$ como as componentes de isovetores de Higgs de módulo unitário, podemos reescrever a eq. (1.5.10) na forma,

$$\gamma_{(i)mn} = \hat{\eta}_{(i)}^a F_{(i)mn}^a - \frac{1}{\epsilon} \hat{\eta}_{(i)}^a \epsilon_{abc} D_\mu \hat{\eta}_{(i)}^b D_\nu \hat{\eta}_{(i)}^c. \quad (1.5.14)$$

Este foi o tensor originalmente definido como o campo maxwelliano $\gamma_{\mu\nu}$ associado ao campo de Yang-Mills⁽³⁴⁾.

Da propriedade de comutação da derivada de Lie e da derivada covariante ⁽³⁵⁾, teremos como resultado final de impor a simetria descrita pelos vetores de Killing "externos" no campo maxwelliano $\varphi_{(i)\mu\nu}$, considerado não-nulo ^(36,37),

$$\mathcal{L}_\xi \varphi_{(i)\mu\nu} = K_{(i)}^* \varphi_{(i)\mu\nu}, \quad (1.5.15)$$

onde o asterisco representa o dual do tensor sobre o qual se encontra, definido analogamente como em (1.5.13), e $K_{(i)}$ é uma constante dada por,

$$K_{(i)} = \mathcal{L}_\xi \alpha_{(i)} = \xi^\mu \alpha_{(i)|\mu}. \quad (1.5.16)$$

A função $\alpha_{(i)}$ é o "complexion" ⁽²⁶⁾ do campo $\varphi_{(i)\mu\nu}$. Para estender o resultado dado pela eq. (1.5.15) a campos de Yang-Mills do tipo (1.5.9), teremos, tomando a derivada de Lie dos dois membros de (1.5.9) e usando a eq. (1.5.14),

$$\mathcal{L}_\xi F_{(i)\mu\nu}^a = K_{(i)}^* F_{\mu\nu}^a + \varphi_{(i)\mu\nu} \mathcal{L}_\xi \hat{\eta}_{(i)}^a. \quad (1.5.17)$$

Note-se que os isovetores de Killing $\hat{\eta}_{(i)}^a$, são escalares sob transformações de coordenadas externas, do que segue que suas derivadas de Lie são dadas simplesmente por,

$$\mathcal{L}_\xi \hat{\eta}_{(i)}^a = \xi^\mu \hat{\eta}_{(i)|\mu}^a. \quad (1.5.18)$$

Das eqs. (1.5.3), (1.5.17) e (1.5.18), temos,

$$\oint_{\mathcal{S}} F_{(i)\mu\nu}^a = K_{(i)}^* F_{(i)\mu\nu}^a + \epsilon \epsilon^{abc} F_{(i)\mu\nu}^b \Lambda_{(i)}^c, \quad (1.5.19)$$

onde $\Lambda_{(i)}^a$ são os parâmetros associados a uma transformação de calibre SU(2), e dados por,

$$\Lambda_{(i)}^a = \xi^\mu A_{(i)\mu}^a. \quad (1.5.20)$$

Esta última equação fornece uma condição de consistência evidente, uma vez que a eq. (1.5.15), válida para campos eletromagnéticos que satisfaçam à eq. (1.5.11), é novamente obtida quando os parâmetros $\Lambda_{(i)}^a$ são funcionalmente relacionados aos parâmetros $\eta_{(i)}^a$ de uma transformação de calibre U(1); ou seja, de modo a obter a relação (1.5.15), podemos fazer,

$$\xi^\mu A_{(i)\mu}^a = f(x) \eta_{(i)}^a, \quad (1.5.21)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária. Podemos daqui para adiante, abolir o índice (i), tendo em conta sua significação.

Ainda que deduzida para campos do tipo (1.5.9), a eq. (1.5.19) é proposta como a relação geral a ser satisfeita pelas componentes dos campos $F_{\mu\nu}^a$ (construídos em relação a um grupo não-abeliano genérico G, quando então as constantes de estrutura devem ser escritas f^{abc}), quando as simetrias da métrica são "herdadas" pelos mesmos. É fácil notar que quando isto acontece, a eq. (1.5.19) fornece uma solução à relação evidente,

$$\oint_{\mathcal{S}} T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.5.22)$$

que é uma consequência das equações de Einstein e da relação

$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, considerando a comutação da derivada de Lie, com todas as derivadas que aparecem na definição de quantidades geométricas tais como $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu}$.

Escrevendo o tensor energia-momentum como,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-F_{\mu\sigma}^a F_{\nu}^{\sigma a} + *F_{\mu\sigma}^a *F_{\nu}^{\sigma a}), \quad (1.5.23)$$

e usando a eq. (1.5.19), onde os símbolos ϵ^{abc} podem ser substituídos pelas constantes de estrutura genéricas f^{abc} , vemos que a eq. (1.5.22) é satisfeita identicamente.

Voltando à definição dada de isovetor de carga da seção anterior, eq. (1.4.55), vemos que podemos relacionar os parâmetros de uma transformação SU(2) com o mesmo. Para isto, consideremos os vetores de Killing externos ξ^A , como vetores tangentes a uma geodésica no espaço de $(4+N)$ dimensões, ou seja,

$$\xi^A = \alpha U^A, \quad (1.5.24)$$

onde α é uma constante infinitesimal.

Uma vez que as componentes internas do vetor de Killing ξ^A $(4+N)$ -dimensional, ξ^a , devem estar relacionadas com as componentes do vetor de Killing interno η^a , ou,

$$\xi^a = \gamma \eta^a = \gamma \lambda \hat{\eta}^a, \quad (1.5.25)$$

com γ sendo uma constante arbitrária, e λ dado por (1.5.6).

Usando as eqs. (1.5.24) e (1.5.25) na eq. (1.4.55), teremos,

$$Q^a = \frac{1}{\alpha} \left(\epsilon^2 \xi^m A_m^a + \epsilon \gamma \lambda \hat{\eta}^a \right). \quad (1.5.26)$$

Os parâmetros Λ^a das transformações de calibre SU(2), podem ser então expressos, usando a eq. (1.5.20), como

$$\Lambda^a = \frac{\alpha}{\epsilon^2} Q^a - \frac{\alpha}{\gamma \lambda \epsilon} \hat{\eta}^a. \quad (1.5.27)$$

Levando a expressão obtida acima para Λ^a na expressão aceita como geral, eq. (1.5.19), o último termo de (1.5.27) não fornece qualquer contribuição, devido à anti-simetria das constantes de estrutura e à eq. (1.5.9). O resultado será,

$$\oint_{\xi} F_{\mu\nu}^a = K^* F_{\mu\nu}^a + \frac{\alpha}{\epsilon} \epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^b Q^c. \quad (1.5.28)$$

O índice (i), referente a cada classe de simetrias internas, fica subentendido.

É interessante observar que muito embora tenhamos tentado reformular a teoria em termos do conceito de isovetor de carga, como na eq. (1.5.28), isto não pode ser feito em forma definitiva, uma vez que ainda persistem na literatura várias interpretações do que venha a ser carga não-abeliana (32,38,39,40).

Em nossa opinião, a linha de trabalho seguida aqui, que mostra o movimento dos isovetores de carga no espaço interno, através da eq. (1.4.60), é a que favorece uma melhor compreensão do conceito de carga não-abeliana.

Resta fazer a concordância da definição de carga utilizada, ou seja,

$$Q = (Q^a Q_a)^{1/2}, \quad (1.5.29)$$

com as considerações usuais da topologia elementar dos vetores de Killing internos, com o que se pode demonstrar que em unidades de $(1/\epsilon)$, a carga magnética de um monopolo não-abeliano é dada por um número inteiro ⁽⁴¹⁾, ou,

$$Q = \frac{n}{\epsilon}, \quad (1.5.30)$$

sendo n um nº inteiro.

Usando as eqs. (1.5.26) e (1.5.24), e a expressão (1.5.8) para os potenciais de calibre, podemos calcular,

$$Q^a Q_a = \frac{1}{\alpha^2} \left(\epsilon^4 \alpha^2 U^\mu U^\nu \beta_\mu \beta_\nu + \epsilon^2 \alpha^2 U^\mu U^\nu \hat{\eta}_{1\mu}^a \hat{\eta}_{a\nu} + \epsilon^2 \gamma^2 \lambda^2 + 2 \epsilon^2 \gamma \lambda \alpha U^\mu \beta_\mu \right). \quad (1.5.31)$$

Tendo em conta o fato de que os potenciais não determinam a carga magnética, a menos de uma transformação de calibre ⁽⁴¹⁾, é conveniente apelar para a arbitrariedade das funções $\beta_\mu = \hat{\eta}^a A_{a\mu}$, e exigir que

$$\beta_\mu U^\mu = 0. \quad (1.5.32)$$

Escolhendo agora $\alpha = \epsilon$, e fazendo,

$$\hat{\eta}_{1\mu}^a = \frac{m U_\mu \hat{v}^a}{b^2 \epsilon^2 \sqrt{2}} \quad ; \quad \delta\lambda = \frac{m}{\epsilon \sqrt{2}}, \quad (1.5.33)$$

onde $\hat{\eta}^a$ é um isovetor de módulo unitário e b é o módulo da parte externa U^μ do vetor tangente U^A , obteremos a expressão da carga como em (1.5.30). O módulo de U^a , pode ser obtido da parte interna das eqs. (1.5.24); temos, da compatibilidade destas com a eq. (1.5.25),

$$(U^a U_a)^{1/2} = \frac{m}{\epsilon^2 \sqrt{2}}. \quad (1.5.34)$$

Os vetores de Killing são dados então por,

$$\xi^\mu = \epsilon U^\mu \quad ; \quad \xi^a = \frac{m}{\epsilon \sqrt{2}} \hat{\eta}^a. \quad (1.5.35)$$

Podemos sempre reparametrizar a trajetória, de forma a que U^μ seja um vetor de módulo unitário. A 1ª equação em (1.5.35) expressa então o que é entendido por "infinitesimal" aqui; uma vez que $\epsilon^2 = 2k$ pela eq. (1.4.81), ou seja, ϵ é da ordem do comprimento de Planck, $\sqrt{k} \approx 10^{-33}$ cm. O nº inteiro n é o número de vezes que a esfera unitária $\hat{\eta}^a \hat{\eta}_a = 1$ é coberta pelo vetor unitário $\hat{\eta}^a$, quando a esfera de um elemento de volume tridimensional do espaço externo é coberta uma vez, através de um sistema de coordenadas (θ, φ) , nela definido (41). A expressão final a ser satisfeita pelas componentes do campo de Yang-Mills, quando as simetrias da métrica são "herdadas", pode ser escrita,

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu}^a = k * F_{\mu\nu}^a + \epsilon^a{}_{bc} F_{\mu\nu}^b Q^c. \quad (1.5.36)$$

CAPÍTULO 2

ALGUMAS SOLUÇÕES CLÁSSICAS

2.1 - CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI. SOLUÇÕES CONFORMEMENTE CHATAS E A CONSTANTE COSMOLÓGICA

No estudo das soluções de equações de Yang-Mills, um procedimento que tem resultado bastante útil, é o da procura de um "Ansatz" apropriado, sujeito a uma escolha conveniente de calibre. Consideremos o exemplo de uma teoria $SO(3)$, impondo o calibre de Lorentz, ou,

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^a = 0 ; a = 1, 2, 3, \quad (2.1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Uma classe de "Ansätze" apropriada é descrita, expressando os potenciais procurados em termos dos denominados potenciais tensores de Hertz (42, 43). Teremos assim para os potenciais,

$$A_{\mu}^a = \delta_{\mu}^b \Pi^a_{b|\alpha} . \quad (2.1.2)$$

Cada Ansatz é obtido escolhendo adequadamente Π^a_b . As δ_{μ}^b são as análogas das matrizes introduzidas na referência (34), e dadas por,

$$\sigma^b_{\mu\nu} = \epsilon^b_{\mu\nu} + \eta^b_{\mu} \eta_{\nu 0} - \eta_{\mu 0} \eta^b_{\nu}. \quad (2.1.3)$$

As matrizes $\sigma^b_{\mu\nu}$ mapeiam tensores de $SO(3,1)$ em vetores de um de seus subgrupos invariantes $SO(3)$, de acordo com o esquema,

$$SO(3,1) \approx SO(3) \times \frac{SO(3,1)}{SO(3)}. \quad (2.1.4)$$

Para escrever os campos $F_{\mu\nu}^a$, dados por (1.1.22), a partir dos potenciais (2.1.2), necessitaremos da seguinte propriedade, obedecida pelas matrizes $\sigma^a_{\mu\nu}$,

$$\epsilon_{abc} \sigma^b_{\mu\alpha} \sigma^c_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\mu\beta} \eta_{\alpha\nu} + \delta_{\alpha\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\alpha\nu} \eta_{\mu\beta}. \quad (2.1.5)$$

A escolha mais elementar para os potenciais Π^a_b é dada por,

$$\Pi^a_b = \delta^a_b f, \quad (2.1.6)$$

onde f é uma função arbitrária das coordenadas x^m .

Os potenciais A_μ^a são então dados através de,

$$A_\mu^a = \delta^a_{\mu\alpha} f_{|\alpha}. \quad (2.1.7)$$

As matrizes $\sigma^a_{\mu\nu}$ satisfazem também a

$$\sigma^a_{\mu\alpha} \sigma^b_{\nu\beta} = \epsilon^a_{bc} \delta^c_{\alpha\beta} + \delta^a_b \eta^{\beta}_{\alpha}. \quad (2.1.8)$$

Usando a eq. (2.1.8), podemos escrever de (2.1.7),

$$A_{\mu}^a A^{\mu}_b = \delta^a_b f_{|\mu} f^{|\mu}, \quad (2.1.9)$$

o que é garantido pela anti-simetria de $\delta^a_{\mu\nu}$ nos índices μ e ν , assim como,

$$A_{\mu}^a f^{|\mu} = \delta^a_{\mu}{}^{\alpha} f_{|\alpha} f^{|\mu} = 0. \quad (2.1.10)$$

As eqs. (2.1.7), (2.1.9) e (2.1.10), mostram que A_{μ}^a e $f_{|\mu}$ formam uma base de tetradas ortogonal.

Os campos $F_{\mu\nu}^a$, dados em (1.1.22), tornam-se,

$$F_{\mu\nu}^a = \delta^{\alpha}_\nu f_{|\alpha|\mu} - \delta^{\alpha}_\mu f_{|\alpha|\nu} + \epsilon \epsilon^a{}_{bc} f_{|\alpha} f_{|\beta} \delta^{\beta}_\mu \delta^c_\nu. \quad (2.1.11)$$

Usando as eqs. (2.1.5) e (2.1.10), teremos,

$$F_{\mu\nu}^a = \epsilon \delta^a_{\mu\nu} f_{|\alpha} f^{|\alpha} - \delta^{\alpha}_\mu (f_{|\alpha|\nu} + \epsilon f_{|\alpha} f_{|\nu}) + \delta^{\alpha}_\nu (f_{|\alpha|\mu} + \epsilon f_{|\alpha} f_{|\mu}). \quad (2.1.12)$$

As equações de campo sem fontes, no espaço de Minkowski, ou,

$$F^{\mu\nu}_a{}_{|\mu} + \epsilon \epsilon_{abc} A_{\mu}^b F^{\mu\nu c} = 0, \quad (2.1.13)$$

resultam,

$$\delta^{\alpha\nu} (\square f - \epsilon f_{|\mu} f^{|\mu})_{|\alpha} + 2\epsilon \delta^{\alpha\nu} f_{|\alpha} (\square f - \epsilon f_{|\mu} f^{|\mu}) = 0, \quad (2.1.14)$$

onde $\square f$ representa o d'Alembertiano covariante, $\square f = \eta^{\mu\nu} f_{|\mu|\nu}$.

Soluções interessantes são obtidas exigindo que as configurações de campo sejam auto-duais ou anti-auto-duais, $F_{\mu\nu}^a = \pm *F_{\mu\nu}^a$ onde $*F_{\mu\nu}^a$ é o dual dado por $\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{a\alpha\beta}$. As equações de campo de 2ª ordem são convertidas então em equações de 1ª ordem, através das identidades de Bianchi,

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_\mu F_a^{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (F_a^{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \epsilon \epsilon_{abc} A_\mu^b F^{a\beta c}) = 0. \quad (2.1.15)$$

Existe uma infinidade de configurações de campo, correspondente à infinidade de escolhas dos potenciais tensores π_b^a . Parece ser evidente que as identidades de Bianchi, ainda que fundamentais na procura de soluções auto-duais ou anti-auto-duais, em nada ajudam em soluções mais gerais, embora como é evidente, continuem a ser estritamente válidas. Estas observações podem ser mais especificadas, expressando as condições de dualidade, em função dos potenciais π_b^a . Assim, teremos para a expressão do dual,

$$*F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \left[\epsilon \delta_a^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{|\rho} f^{|\rho} - \delta_a^{\alpha\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (f^{|\beta} f^{|\lambda} + \epsilon f_{|\lambda} f^{|\lambda}) + \delta_a^{\beta\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (f^{|\alpha} f^{|\lambda} + \epsilon f_{|\lambda} f^{|\alpha}) \right]. \quad (2.1.16)$$

Usando em (2.1.16) uma outra identidade satisfeita pelas matrizes $\delta_a^{\alpha\beta}$,

$$\delta_a^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\nu\lambda\rho} = \delta_{a\nu\lambda} \delta^{\alpha\rho} + \delta_{a\rho\nu} \delta^{\alpha\lambda} + \delta_{a\lambda\rho} \delta^{\alpha\nu}, \quad (2.1.17)$$

teremos para algumas quantidades presentes nos termos do segundo membro da eq. (2.1.16),

$$\delta_a^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2 \delta_{a\mu\nu}, \quad (2.1.18)$$

$$\sigma_a^{\alpha\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -(\sigma_{\alpha\beta\mu} \delta^{\lambda\nu} + \sigma_{\alpha\nu\beta} \delta^{\lambda\mu} + \sigma_{\alpha\mu\nu} \delta^{\lambda\beta}), \quad (2.1.19)$$

$$\sigma_a^{\beta\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\mu\nu} \delta^{\lambda\alpha} + \sigma_{\alpha\alpha\mu} \delta^{\lambda\nu} + \sigma_{\alpha\nu\alpha} \delta^{\lambda\mu}. \quad (2.1.20)$$

O dual ${}^*F_{\mu\nu}^a$ pode ser então expresso por,

$$\begin{aligned} {}^*F_{\mu\nu}^a = & -\epsilon \delta^{\alpha\mu\nu} f_{i\lambda} f^{i\lambda} + \epsilon \delta^{\alpha}_{\mu\nu} f_{i\lambda} f^{i\lambda} + \sigma^{\alpha}_{\mu\nu} \square f \\ & + \sigma^{\alpha}_{\alpha\mu} (f^{i\alpha}_{i\nu} + \epsilon f_{i\nu} f^{i\alpha}) + \sigma^{\alpha}_{\nu\alpha} (f^{i\alpha}_{i\mu} + \epsilon f_{i\mu} f^{i\alpha}). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Comparando (2.1.21) com (2.1.12), teremos,

$${}^*F_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a + \delta^{\alpha}_{\mu\nu} (\square f - \epsilon f_{i\alpha} f^{i\alpha}), \quad (2.1.22)$$

o que mostra que as configurações com que estamos trabalhando, não são necessariamente auto ou anti-auto-duais. É trivial mostrar que a identidade de Bianchi possui, como é esperado, um caráter de validade absoluto. Teremos, tomando a derivada covariante dos dois membros de (2.1.22),

$$D^\mu {}^*F_{\mu\nu}^a = D_\mu F_{\mu\nu}^a + D^\mu \delta^{\alpha}_{\mu\nu} (\square f - \epsilon f_{i\alpha} f^{i\alpha}) = 0. \quad (2.1.23)$$

A segunda igualdade em (2.1.23), vem por cálculo direto de

$$D^\mu \delta^{\alpha}_{\mu\nu} (\square f - \epsilon f_{i\alpha} f^{i\alpha}) = -D^\mu F_{\mu\nu}^a, \quad (2.1.24)$$

após uso da presente estrutura da derivada covariante, ou,

$$D^\mu (\sigma^{\alpha}_{\mu\nu} F) = \sigma^{\alpha}_{\mu\nu} F^{i\mu} + \epsilon \epsilon^{\alpha}_{bc} \sigma^{\mu\nu} \sigma^c_{\alpha\beta} f^{i\beta} F. \quad (2.1.25)$$

onde F significa aqui, funções de $f|_{\alpha}$ e $f|_{\alpha|\beta}$ necessárias ao cálculo.

Para que as configurações de que tratamos sejam auto-duais, podemos ter, da eq. (2.1.22),

$$\square f - \epsilon f|_{\alpha} f'^{\alpha} = 0, \quad (2.1.26)$$

satisfazendo identicamente a eq. (2.1.14).

Fazendo a mudança de variáveis,

$$f = -\frac{1}{\epsilon} \ln \varphi, \quad (2.1.27)$$

teremos, de (2.1.26),

$$\square \varphi = 0. \quad (2.1.28)$$

Configurações não-auto-duais são obtidas, violando a condição (2.1.26), condição (2.1.26), com o que podemos escrever a eq. (2.1.14) na forma,

$$\left[\ln (\square f - \epsilon f|_{\alpha} f'^{\alpha}) \right]_{|\alpha} = -2\epsilon f|_{\alpha}. \quad (2.1.29)$$

Com a mudança de variáveis (2.1.27), teremos após uma integração,

$$\square \varphi - k \varphi^3 = 0, \quad (2.1.30)$$

onde k é uma constante de integração.

A última equação define uma classe muito ampla de soluções das equações de Yang-Mills. Em particular, soluções ondulatórias foram das primeiras a serem encontradas ⁽⁴⁴⁾.

Uma solução particular interessante é dada por,

$$\varphi = \frac{K_1}{x^2 + \lambda^2} ; \quad x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad \lambda = \text{cte}, \quad (2.1.31)$$

uma vez que a constante K_1 satisfaça a

$$K_1 = (-8\lambda^2/K)^{1/2}. \quad (2.1.32)$$

Escolhendo $K < 0$ para ter K_1 real, teremos a solução para os potenciais A_μ^a ,

$$A_\mu^a = \frac{2}{\epsilon} \sigma_{\mu\alpha}^a \frac{x^\alpha}{x^2 + \lambda^2}. \quad (2.1.33)$$

Segue-se a discussão dos casos $\lambda \neq 0$ e $\lambda = 0$. Para isto, escrevamos a eq. (2.1.33) genericamente como,

$$A_\mu^a = -2iC \sigma_{\mu\alpha}^a \frac{x^\alpha}{x^2 + \lambda^2}, \quad (2.1.34)$$

sendo C uma constante.

Após substituição nas equações de campo (2.1.13) e separação das partes real e imaginária, teremos,

$$\lambda^2(1 + iC\epsilon) = 0, \quad (2.1.35)$$

$$(1 + iC\epsilon)(1 + 2iC\epsilon) = 0. \quad (2.1.36)$$

O caso $\lambda \neq 0$, conduz diretamente à eq. (2.1.33). O caso $\lambda = 0$, fornece,

$$A_{\mu}^a = \frac{1}{\epsilon} \delta_{\mu\alpha}^a \frac{x^{\alpha}}{x^2}. \quad (2.1.37)$$

As eqs. (2.1.33) e (2.1.37) definem duas classes de soluções das equações de Yang-Mills no espaço chato de Minkowski, eqs. (2.1.13). As possíveis escolhas de Ansatzes para os potenciais Π_b^a , correspondem a um programa de pesquisa de soluções de equações do tipo de (2.1.30). É interessante observar o comportamento de soluções tais como as introduzidas acima, em espaços-tempo conformemente chatos, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.1.38)$$

A parte da ação para os campos de Yang-Mills no espaço com métrica $g_{\mu\nu}$, escreve-se,

$$S_{YM} = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta a} d^4x. \quad (2.1.39)$$

Quando $g_{\mu\nu}$ é a métrica de um espaço curvo conformemente chato, como em (2.1.38), teremos,

$$S_{YM} = -\frac{1}{4} \int \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta a} d^4x, \quad (2.1.40)$$

que é a ação correspondente no espaço de Minkowski. Isto tem como consequência evidente que qualquer solução neste espaço, será também solução em um espaço curvo conformemente chato. Em parti

cular, as soluções (2.1.33) e (2.1.37) são também soluções para a métrica dada por (2.1.38).

O tensor energia-momentum do campo de Yang-Mills, definido em (1.3.4), é escrito no espaço (2.1.38) como,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\varphi^2} \left(-\eta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\lambda} F_{\alpha\beta}^a F_{\rho\lambda}^a \right). \quad (2.1.41)$$

Os termos entre parênteses constituem o tensor energia-momentum, construído no espaço chato. Da expressão dos campos $F_{\mu\nu}^a$, dada em (2.1.12), aí substituindo a eq. (2.1.27), teremos, usando outra propriedade das matrizes $\sigma_{\mu\nu}^a$, ou,

$$\sigma_{\mu\nu}^a \sigma^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.1.42)$$

a expressão para o tensor (2.1.41),

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\varphi^2} \left[C_1 C_{2\mu\nu} + C_2 \delta_{\mu\nu} C_2^{\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} (C_1 C_2^{\alpha} + C_{2\alpha\beta} C_2^{\alpha\beta}) \right], \quad (2.1.43)$$

onde C_1 e $C_{2\mu\nu}$ são respectivamente, uma função escalar e uma função tensorial simétrica de φ , dadas por,

$$C_1 = \frac{1}{\epsilon} \frac{\varphi_{1\alpha} \varphi^{1\alpha}}{\varphi^2} \quad ; \quad C_{2\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon} \left(2 \frac{\varphi_{1\mu} \varphi_{1\nu}}{\varphi^2} - \frac{\varphi_{1\mu\nu}}{\varphi} \right). \quad (2.1.44)$$

A equação de Einstein com constante cosmológica, escreve-se,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \quad (2.1.45)$$

onde k é a constante de gravitação.

Do fato de que o traço do tensor energia-momentum de interesse, eq. (2.1.41), seja zero, $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$, podemos escrever a eq. (2.1.45) na forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}, \quad (2.1.46)$$

com a constante cosmológica Λ dada por,

$$\Lambda = \frac{R}{4}. \quad (2.1.47)$$

Calculando o tensor de Ricci, eq. (1.4.73), com a métrica (2.1.38), teremos,

$$R_{\mu\nu} = 4 \frac{\varphi_{|\mu} \varphi_{|\nu}}{\varphi^2} - \eta_{\mu\nu} \frac{\varphi_{|\alpha} \varphi^{|\alpha}}{\varphi^2} - \eta_{\mu\nu} \frac{\square \varphi}{\varphi} - 2 \frac{\varphi_{|\mu\nu}}{\varphi}. \quad (2.1.48)$$

O escalar de curvatura será então dado por,

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R = -6 \frac{\square \varphi}{\varphi^3}. \quad (2.1.49)$$

Substituindo a eq. (2.1.49) em (2.1.47), obteremos,

$$\square \varphi + \frac{2}{3} \Lambda \varphi^3 = 0. \quad (2.1.50)$$

Esta equação será a eq. (2.1.30), com solução (2.1.31), desde que a constante K seja relacionada a Λ , através de,

$$-K = \frac{2}{3} \Lambda. \quad (2.1.51)$$

Essa última relação preenche o requisito que $K < 0$, uma vez que a constante cosmológica Λ seja positiva. A forma da métrica, após usar as eqs. (2.1.38), (2.1.31), (2.1.32) e (2.1.51), escreve-se como,

$$g_{\mu\nu} = \frac{12\lambda^2}{\Lambda} \frac{\eta_{\mu\nu}}{(\alpha^2 + \lambda^2)^2} . \quad (2.1.52)$$

As eqs. (2.1.33) e (2.1.52) constituem a primeira solução conformemente chata, aqui apresentada para o sistema de equações Einstein-Yang-Mills. Essa solução possui propriedades interessantes. Expressando o lado esquerdo da eq. (2.1.46) na métrica (2.1.38), teremos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = 2\epsilon \left(C_{2\mu\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} C_2^\alpha{}_\alpha \right) . \quad (2.1.53)$$

Agora podemos verificar por substituição direta nos segundos membros de (2.1.43) e (2.1.53), que a solução (2.1.31) os anula independentemente, transformando a eq. (2.1.46) em uma identidade. Assim, essa solução "desacopla" os campos de calibre e gravitação, já que para o caso em que não existe o campo de calibre, (2.1.52) é uma solução conformemente chata no vácuo, graças à presença da constante cosmológica. Quando o espaço chato possui métrica euclidiana, a solução descrita é conhecida como "instanton".

A este ponto torna-se claro que deve ser procurada uma outra solução da eq. (2.1.50), que não anule independentemente os dois lados de (2.1.46); essa solução escreve-se como,

$$\varphi = \frac{K_2}{\sqrt{\alpha^2}} , \quad (2.1.54)$$

onde a constante K_2 , suposta real, é dada por,

$$K_2 = \left(3/2\Lambda\right)^{1/2}. \quad (2.1.55)$$

Os potenciais de calibre correspondentes a esta última solução, são dados exatamente pela eq. (2.1.37). A forma da métrica é então dada por,

$$g_{\mu\nu} = \frac{3}{2\Lambda} \frac{\eta_{\mu\nu}}{x^2}. \quad (2.1.56)$$

Substituindo nos dois membros de (2.1.46), dados através de (2.1.43) e (2.1.53), a eq. (2.1.54), obteremos uma solução, se existir a relação entre a constante cosmológica e a constante de acoplamento do campo de Yang-Mills, da forma,

$$\Lambda = -\frac{3}{4} \frac{e^2}{k}. \quad (2.1.57)$$

As equações (2.1.37) e (2.1.56), constituem então a segunda solução conformemente chata do sistema Einstein-Yang-Mills aqui tratado. Quando a métrica é escrita com assinatura euclidiana, tal solução é conhecida na literatura como "meron". É interessante notar os comportamentos assintótico e na origem das partes gravitacionais das duas soluções apresentadas, como dadas em (2.1.52) e (2.1.56); assim como é importante enfatizar que a solução do tipo instanton existe para quaisquer valores da constante de acoplamento e da constante cosmológica, ao contrário do que acontece com a solução tipo meron.

2.2 - SOLUÇÕES COM SIMETRIA PLANA

Muito trabalho foi realizado em teorias de Yang-Mills, para encontrar soluções de onda plana no espaço de Minkowski; uma exposição do mesmo ocuparia uma grande monografia. Neste particular, os métodos desenvolvidos na secção anterior são bastante convenientes quando os potenciais π^a dependem de coordenadas nulas. Na presente secção, estudar-se-ão algumas soluções às equações (1.3.2) e (1.3.3), com a constante cosmológica feita explicitamente zero, no caso de métricas com simetria plana. No estudo de ondas planas, o uso de métricas desse tipo necessita pouca justificativa. Outros tipos de soluções são apresentadas, como configurações estáticas de simetria interna $SO(3)$, e também uma solução que descreve um universo homogêneo.

Consideremos o seguinte Ansatz de solução, para a equação (2.1.13),

$$A_a^2 = A_a^3 = A_a^- = 0; \quad A_a^+ = \varphi_a; \quad a = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2.1)$$

Estarão sendo usadas coordenadas nulas, dadas por,

$$x^\pm = x'^1 \pm x'^0; \quad x^2 = x'^2; \quad x^3 = x'^3. \quad (2.2.2)$$

Os potenciais expressam-se então analogamente por,

$$A_a^\pm = A_a'^1 \pm A_a'^0; \quad A_a^2 = A_a'^2; \quad A_a^3 = A_a'^3. \quad (2.2.3)$$

Procuremos uma solução da forma,

$$\varphi_a = F(x^2, x^3) f_a(x^-), \quad (2.2.4)$$

onde $f_a(x^-)$ é uma função limitada em x^- .

Substituindo (2.2.1) com (2.2.4) na eq. (2.1.13), teremos,

$$F_{1212} + F_{1313} = 0. \quad (2.2.5)$$

Entre as possibilidades de resolver esta equação, de forma não-trivial, ou seja, F linear em x^2, x^3 ; F harmônica em x^2, x^3 ; somente a primeira corresponde a uma densidade de energia limitada, e portanto, dado que isto é um requisito básico, deve ser a escolhida. Assim, escrevemos a função $F(x^2, x^3)$ como,

$$F(x^2, x^3) = \xi x^2 + \eta x^3 + \zeta \quad (2.2.6)$$

onde ξ, η, ζ são funções de x^- . A solução (2.2.1) torna-se então ⁽⁴⁵⁾,

$$A_a^2 = A_a^3 = A_a^- = 0; \quad A_a^+ = x^2 F_a(x^-) + x^3 G_a(x^-) + H_a(x^-)$$

$$F_a = \xi f_a; \quad G_a = \eta f_a; \quad H_a = \zeta f_a, \quad (2.2.7)$$

onde as $3n$ funções f_a , são limitadas em x^- .

A eq. (2.2.7) é uma das possibilidades de onda não-abeliana. O caráter não-abeliano da mesma se evidencia na impossibilidade de superpor duas dessas ondas propagando-se em direções diferentes. É interessante observar que uma onda propagando-se em sentido contrário ao da anterior, pode ser obtida com o Ansatz,

$$A_a^2 = A_a^3 = A_a^+ = 0; \quad A_a^- = \chi_a = G(x^2, x^3) h_a(x^+).$$

Podemos agora analisar os efeitos de configurações de calibre como as descritas acima, em universos com simetria plana tais como (46,47),

$$ds^2 = -A(x^+, x^-) dx^+ dx^- - B(x^+, x^-) (dx^{2^2} + dx^{3^2}), \quad (2.2.8)$$

caracterizados pela existência de três vetores de Killing, dois deles correspondendo a translações nas direções x^2 , x^3 e outro a uma rotação em torno da direção x^1 .

Escrevendo as equações de Yang-Mills, (1.3.3), nesta métrica, teremos após substituir o Ansatz (2.2.1),

$$\frac{2}{AB} (B \varphi_{a|+})_{|-} - \epsilon_{fab} \varphi^b \cdot \varphi^c{}_{|+} + \frac{1}{B} ((\varphi_{a|2})^2 + (\varphi_{a|3})^2) = 0, \quad (2.2.9)$$

$$(B \varphi_{a|+})_{|+} = 0, \quad (2.2.10)$$

$$A_{|+} \varphi_{a|2} + A \varphi_{a|+|2} = 0, \quad (2.2.11)$$

$$A_{|+} \varphi_{a|3} + A \varphi_{a|+|3} = 0. \quad (2.2.12)$$

A única componente diferente de zero do tensor energia-momentum, eq. (1.3.5), é dada por,

$$T_{--} = \frac{A^2}{4B} (F_a F^a + G_a G^a). \quad (2.2.13)$$

Se as funções φ_a , possuem a forma dada na eq. (2.2.4), as eqs. (2.2.9) a (2.2.12) reduzem-se a,

$$A_{|+} F_{12} = 0, \quad (2.2.14)$$

$$A_{1+} F_{13} = 0. \quad (2.2.15)$$

Assim, da eq. (2.2.6) vemos que para que exista uma solução como (2.2.7), deveremos ter,

$$A_{1+} = 0. \quad (2.2.16)$$

Um cálculo direto das componentes do tensor de Weyl, mostra que a métrica dada por (2.2.8), onde agora A não depende de χ^+ , é conformemente chata. Este é um resultado esperado, em razão do que foi exposto na secção anterior e do fato que (2.2.7) é uma solução no espaço de Minkowski.

As equações de Einstein (1.3.2) com $\Lambda = 0$, são por sua vez,

$$\frac{A_{1+} B_{1+}}{AB} - \frac{B_{1+1+}}{B} + \frac{B_{1+}^2}{2B^2} = 0, \quad (2.2.17)$$

$$-\left(\frac{A_{1+}}{A}\right)_{1-} - \frac{B_{1+1-}}{B} + \frac{B_{1+} B_{1-}}{2B^2} = 0, \quad (2.2.18)$$

$$\frac{A_{1-} B_{1-}}{AB} - \frac{B_{1-1-}}{B} + \frac{B_{1-}^2}{2B^2} = k \frac{A^2}{4B} Q, \quad (2.2.19)$$

$$-2 \frac{B_{1+1-}}{A} = 0, \quad (2.2.20)$$

onde fizemos,

$$Q = F_a F^a + G_a G^a. \quad (2.2.21)$$

Das eqs. (2.2.16), (2.2.21) e (2.2.18), podemos infe-

rir que B será também uma função da variável x^- somente, com o que o sistema de equações de Einstein-Yang-Mills reduz-se a,

$$\frac{A'B'}{A} - B'' + \frac{B'^2}{2B} = k \frac{A^2}{4} a, \quad (2.2.22)$$

onde $A' = A_1, \dots$ etc.

Consideremos agora uma família de espaços-tempo da forma (2.2.8), em que existe uma relação entre $A(x^-)$ e $B(x^-)$, seja,

$$A = k_1 B^{m/2}, \quad (2.2.23)$$

onde k_1 é uma constante arbitrária, e m um nº inteiro. Esta relação entre A e B , garante que não existirão expoentes semi-inteiros na eq. (2.2.22). Esta última reduz-se então a,

$$B'' - \frac{m+1}{2} \frac{B'^2}{B} + c a B^m = 0, \quad (2.2.24)$$

onde c é uma constante, $c = \frac{k k_1^2}{4}$.

A eq. (2.2.24) tem que ser resolvida com o requisito de que $Q(x^-)$ seja uma função limitada. Uma boa maneira de assegurar isto, uma vez que se deseja que a métrica usada seja bem comportada, é considerar que as superfícies de nível de $Q(x^-)$ e $B(x^-)$ coincidem, ou seja, que exista uma relação funcional ^(48,49) da forma $Q = Q(B)$.

Consideremos o caso de $m=0$ na eq. (2.2.23), e escolhamos,

$$c^{1/2} F^a = \lambda_1^a B^{1/2}; \quad c^{1/2} G^a = i \lambda_2^a B, \quad (2.2.25)$$

onde λ_1^a e λ_2^a são isovetores constantes. A eq. (2.2.24) resulta então,

$$B'' - \frac{B'^2}{2B} + \lambda_1^2 B - \lambda_2^2 B^2 = 0; \quad \lambda_1^2 = \lambda_1^a \lambda_{1a}, \text{ etc....} \quad (2.2.26)$$

A última equação, possui para solução⁽⁵⁰⁾,

$$B = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \tanh^2\left(\frac{\lambda_1}{2} x^-\right). \quad (2.2.27)$$

A métrica será então dada por⁽⁵¹⁾,

$$ds^2 = -k_1 dx^+ dx^- - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \tanh^2\left(\frac{\lambda_1}{2} x^-\right) (dx^{2^2} + dx^{3^2}), \quad (2.2.28)$$

e a componente diferente de zero do tensor energia-momentum, por,

$$T_{--} = \frac{c}{k} \frac{Q}{B} = \frac{\lambda_1^2}{k} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda_1}{2} x^-\right). \quad (2.2.29)$$

Da componente dada em (2.2.29), podemos calcular a densidade de energia do campo de Yang-Mills, T_{00} , que vemos possuir um máximo na frente de onda $x^- = 0$.

O espaço-tempo (2.2.28) é também assintoticamente chato. Exigindo que o mesmo tenha a forma do espaço de Minkowski na assíntota, podemos fazer,

$$k_1 = 1; \quad \lambda_1 = \pm \lambda_2. \quad (2.2.30)$$

Com a escolha (2.2.30), a métrica (2.2.28) possui apenas uma constante arbitrária.

É necessário notar que do fato dos coeficientes da métrica (2.2.8) serem apenas funções de uma das variáveis, χ^+ , χ^- , no caso χ^- , de acordo com as eqs. (2.2.16) e (2.2.23) para as soluções que estamos procurando, teremos que na ausência do campo de calibre o espaço-tempo associado é chato⁽⁴⁶⁾. Calculando as componentes do tensor de Riemann, encontramos que as únicas diferentes de zero são dadas através de,

$$R_{-2-2} = R_{-3-3} = -\frac{B}{2} R_{--}, \quad (2.2.31)$$

então, das equações de Einstein para o caso aqui tratado ($R_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$), usando a eq. (2.2.29), vemos que a energia da onda plana não-abeliana é a única responsável pela curvatura deste espaço-tempo com simetria plana. A eq. (2.2.31) mostra que $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ pode ser classificado como sendo do tipo Petrov II, correspondendo a radiação pura. Sabemos que radiação está presente quando o tensor de Riemann é do tipo II ou tipo III⁽⁵²⁾. Métricas descrevendo ondas planas devem ser do tipo II. O caso descrito aqui é especial, correspondendo a uma onda plana com um plano de polarização fixo, o que explica a presença de apenas uma componente independente e diferente de zero, como mostrado em (2.2.31). Em linhas gerais, das 20 componentes do tensor de Riemann, somente 6 serão independentes para o caso de ondas gravitacionais em uma teoria métrica de gravitação. No caso da teoria de Einstein, apenas 2 serão independentes para soluções de ondas planas, e estas se reduzirão a uma, quando o plano de polarização for fixo⁽⁵³⁾.

É conveniente lembrar que o tipo II na classificação

de Petrov, exclui aquele tipo de radiação originado em um sistema de massas localizado a uma distância finita. Aqui acontece exatamente aquela exclusão, o caso que está sendo descrito é o de radiação pura, e pode ser interpretado como o de uma estrutura de onda solitária com frente de onda plana, criada pela fonte de onda não-abeliana (2.2.7).

Uma observação final a ser feita, é a de que todos os 14 invariantes do campo gravitacional são iguais a zero neste caso, mas o tensor de Riemann, como segue da eq. (2.2.31), não é zero em todas as regiões, o que é uma outra característica de espaços-tempo de onda gravitacional plana (54, 55).

O trabalho a ser descrito em seguida, utiliza um outro tipo de Ansatz (44, 56), e foi inicialmente restrito a campos $SO(3)$ ou $SU(2)$.

Consideremos inicialmente condições elementares a serem satisfeitas pelos potenciais A_μ^a , $a = 1, 2, 3$, para que os mesmos sejam invariantes por transformações infinitesimais tais como,

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha), \quad (2.2.32)$$

o que conduz a afirmar que se uma transformação de calibre não compensa a transformação "externa" (2.2.32), então a derivada de Lie em relação a ξ^μ , pode ser igualada a zero, analogamente ao caso maxwelliano (57, 58), ou,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu^a = A_\mu^a{}_{,\alpha} \xi^\alpha + A_\alpha^a \xi^\alpha{}_{,\mu} = 0. \quad (2.2.33)$$

O elemento de linha em um espaço-tempo de simetria pla

na, é escolhido novamente na forma usada por Taub⁽⁵⁹⁾, ou,

$$ds^2 = e^{2u}(dt^2 - dx^2) - e^{2v}(dy^2 + dz^2), \quad (2.2.34)$$

onde u e v são funções de t, x .

Podemos escrever para os vetores de Killing associados à métrica (2.2.34),

$$\xi_{(1)}^\mu = \delta^\mu_t; \quad \xi_{(2)}^\mu = \delta^\mu_x; \quad \xi_{(3)}^\mu = y\delta^\mu_z - z\delta^\mu_y. \quad (2.2.35)$$

Usando as eqs. (2.2.35) nas eqs. (2.2.33), obteremos as condições a serem satisfeitas pelas componentes dos potenciais, o que nos pode sugerir posteriormente, um Ansatz de solução;

$$A_{x|i}^a = A_{t|i}^a = 0; \quad A_i^a = 0; \quad i = y, z. \quad (2.2.36)$$

Um possível Ansatz, que reproduz as condições (2.2.36), pertence a uma classe bem conhecida^(44,56), temos,

$$A_\mu^a = \delta_2^a p_\mu \varphi(t, x) + \delta_3^a q_\mu \psi(t, x), \quad (2.2.37)$$

onde p_μ e q_μ são vetores ortogonais dados por,

$$p_\mu = (1, 0, 0, 0); \quad q_\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (2.2.38)$$

Usando agora a expressão dos potenciais (2.2.37) no cálculo dos campos $F_{\mu\nu}^a$, obteremos para o conjunto de equações (1.3.2) e (1.3.3), na métrica (2.2.34) de simetria plana⁽⁶⁰⁾,

$$\ddot{\mu} - \mu'' + 2(\dot{v}^2 - \dot{v}\dot{\mu} - v'\mu' + \ddot{v}) = \frac{k}{2} e^{-2\mu} (\dot{\psi}^2 + \varphi'^2 + \epsilon^2 \varphi^2 \psi^2), \quad (2.2.39)$$

$$\mu'' - \ddot{\mu} + 2(v'^2 - \dot{v}\dot{\mu} - v'\mu' + v'') = -\frac{k}{2} e^{-2\mu} (\dot{\psi}^2 + \varphi'^2 + \epsilon^2 \varphi^2 \psi^2), \quad (2.2.40)$$

$$\dot{v} - v'' + 2(\dot{v}^2 - v'^2) = -\frac{k}{2} e^{-2\mu} (\dot{\psi}^2 + \varphi'^2 + \epsilon^2 \varphi^2 \psi^2), \quad (2.2.41)$$

$$\dot{v}' + \dot{v}v' - \dot{v}\mu' - v'\dot{\mu} = 0, \quad (2.2.42)$$

$$\ddot{\psi} + 2(\dot{v} - \dot{\mu})\dot{\psi} = 0, \quad (2.2.43)$$

$$\varphi'' + 2(v' - \mu')\varphi' = 0, \quad (2.2.44)$$

$$\dot{\varphi}' + 2(\dot{v} - \dot{\mu})\varphi' - \epsilon^2 \varphi \psi^2 = 0, \quad (2.2.45)$$

$$\dot{\psi}' + 2(v' - \mu')\dot{\psi} - \epsilon^2 \varphi^2 \psi = 0, \quad (2.2.46)$$

$$\dot{\varphi}\psi + \varphi\dot{\psi} + 2(\dot{v} - \dot{\mu})\varphi\psi + \varphi'\psi = 0, \quad (2.2.47)$$

$$\varphi'\psi + \varphi\psi' + 2(v' - \mu')\varphi\psi + \varphi\dot{\psi} = 0. \quad (2.2.48)$$

O ponto e a linha nas equações acima, representam derivações com relação a t e a x , respectivamente. Vamos restringir o estudo das eqs. (2.2.39) a (2.2.48), em primeiro lugar, a soluções estáticas. Como segue das eqs. (2.2.45) e (2.2.46), podemos então identificar dois casos:

Caso I: $\varphi = 0$ - as equações (2.2.42) a (2.2.48) são identicamente satisfeitas, ao passo que as eqs. (2.2.39) a (2.2.41) são as equações de Einstein para o vácuo, que possuem a bem

conhecida solução apresentada por Taub ⁽⁴⁶⁾.

Caso II: $\psi = 0$ - a única equação a ser resolvida entre as eqs. (2.2.42) a (2.2.48), é a eq. (2.2.44), que fornece após integração,

$$\varphi' = k_1 e^{2(\mu - \nu)}, \quad (2.2.49)$$

onde k_1 é uma constante de integração arbitrária.

Pode-se ver por cálculo direto, que a eq. (2.2.49) fornece exatamente a componente F_{tx} do campo de Maxwell, e as eqs. (2.2.39) a (2.2.41) tornam-se então as mesmas equações já resolvidas no caso estático de campos Einstein-Maxwell com simetria plana ⁽⁵⁷⁾. Assim, os dois casos de soluções estáticas não correspondem a configurações de campos de Yang-Mills determinando a curvatura. A primeira possibilidade correspondendo à solução de Taub para o vácuo, e a segunda, a um caso já conhecido em que a fonte de curvatura é apenas maxwelliana.

Uma outra possibilidade interessante seria a de existência de ondas planas progressivas tais como $\varphi = \varphi(x \pm t)$, $\mu = \mu(x \pm t)$, etc..., uma vez que o Ansatz em questão foi proposto originalmente para encontrar ondas planas de Yang-Mills. Lamentavelmente, em uma geometria tal como (2.2.34), com os potenciais de calibre obedecendo a (2.2.33), não existem soluções de ondas planas dadas pelo Ansatz (2.2.37), o que pode ser visto por substituição da dependência considerada para as várias funções, nas eqs. (2.2.39) a (2.2.48), o que conduz a,

$$\varphi = \psi = 0 \quad ; \quad \nu_{\pm}^2 + \nu_{\pm}^2 - 2\mu_{\pm} \nu_{\pm} = 0, \quad (2.2.50)$$

onde $\sqrt{\pm}$ denota $\partial r / \partial(x+t)$ ou $\partial r / \partial(x-t)$, respectivamente.

Uma primeira integração na eq. (2.2.50), fornece,

$$e^{2\mu} = C \sqrt{\pm} e^{\nu}, \quad (2.2.51)$$

onde C é uma constante de integração.

A última equação representa uma classe de soluções no vácuo, com uma função arbitrária, $\mu(x \pm t)$ ou $\nu(x \pm t)$, que sabemos do trabalho clássico de Taub, poder ser transformada simplesmente no espaço chato.

Como foi exposto, o trabalho realizado foi restrito à procura de soluções estáticas e de ondas planas progressivas. Recentemente, foi apresentado o tratamento generalizado das eqs. (2.2.39) a (2.2.48), sem introdução de restrições⁽⁶¹⁾. Aqui, a imposição de uma solução estática, conduziu ao surgimento de dois casos. Como foi provado, estes dois casos são necessários em qualquer circunstância, já que não existe solução às equações consideradas, para $\varphi \neq 0$ e $\psi \neq 0$ simultaneamente⁽⁶¹⁾. Os autores da última referência citada, mostram que se pode tratar o problema, usando condições menos restritivas que considerar como segunda hipótese, todas as funções presentes nas equações como dependentes de $(x+t)$ ou de $(x-t)$; mostram que as soluções podem ser classificadas como satisfazendo a $\dot{\nu}^2 = \nu'^2$ ou $\dot{\nu}^2 \neq \nu'^2$, o que subdivide cada caso citado acima em dois outros (I-A,B; II-A,B). As soluções de onda plana correspondem aos sub-casos B. No entanto, não é uma onda plana de Yang-Mills que gera aqui a onda gravitacional plana; as funções μ e ν possuem sempre nos sub-casos B, as formas,

$$u = f(x+t) + g(x-t) \quad ; \quad v = h(x+t), \quad (2.2.52)$$

que correspondem a ondas planas progressivas com escolha conveniente das funções f e g . Entretanto, as funções φ e ψ , nos dois sub-casos, têm a forma,

$$I-B: \varphi = 0, \psi = \psi(x) \quad ; \quad II-B: \psi = 0, \varphi = \varphi(t). \quad (2.2.53)$$

O primeiro sub-caso em (2.2.53), não pode ser interpretado sempre, pois pode corresponder a uma fonte estática irradiando ondas planas. O segundo sub-caso é mais realista, e diz que a fonte varia no tempo de alguma forma, e esta variação acarreta a produção de ondas planas. De qualquer forma, todas as soluções apresentadas, não são soluções não-triviais de Yang-Mills, uma vez que uma das funções φ ou ψ deve ser obrigatoriamente zero, o que dada a estrutura do Ansatz (2.2.37), conduz sempre a campos maxwellianos ou vácuo. Assim, não parece ser de interesse discorrer sobre as formas de solução apresentadas na referência (61); o mérito da mesma é ter mostrado diretamente que o caso $\varphi \neq 0, \psi \neq 0$, é incompatível com as eqs. (2.2.39) a (2.2.48), nada se acrescenta sobre o problema que motivou a pesquisa de procurar campos de Yang-Mills regidos pelo Ansatz (2.2.37), que sejam fontes de curvatura em um universo com simetria plana.

Consideremos novamente o caso de simetria plana, com a exigência explícita que os campos $F_{\mu\nu}^a$ sejam invariantes por transformações tais como (2.2.32), ou seja,

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu|\alpha}^a \xi^\alpha + F_{\mu\alpha}^a \xi_{|\nu}^\alpha + F_{\alpha\nu}^a \xi_{|\mu}^\alpha = 0. \quad (2.2.54)$$

Os campos $F_{\mu\nu}^{\tilde{a}}$ são assim considerados invariantes sob o grupo de isometrias que caracteriza a simetria plana. O elemento de linha é escolhido novamente na forma clássica de Taub e reescrito aqui como,

$$ds^2 = e^M dx^+ dx^- - e^N (dx^2{}^2 + dx^3{}^2), \quad (2.2.55)$$

onde M e N são funções de x^+ , x^- .

Os vetores de Killing característicos são novamente,

$$\xi_{(1)}^M = \delta_2^M, \quad \xi_{(2)}^M = \delta_3^M, \quad \xi_{(3)}^M = x^2 \delta_3^M - x^3 \delta_2^M. \quad (2.2.56)$$

O "complexion" do campo $F_{\mu\nu}^{\tilde{a}}$, dado por analogia com (1.5.15), pode ser calculado sistematicamente em relação à métrica (2.2.55) e verificado ser nulo ⁽³⁷⁾. Assim, a condição (2.2.54) significa que não são consideradas transformações de calibre infinitesimais tais como (1.5.3), que possam compensar as transformações (2.2.32).

Usando as eqs. (2.2.56) nas condições (2.2.54), obtemos que a única componente não-nula dos campos $F_{\mu\nu}^{\tilde{a}}$ é dada por $F_{+-}^{\tilde{a}}(x^+, x^-)$. Teremos então para as componentes não-nulas do tensor energia-momentum, como dado por (1.3.5),

$$T_{++} = e^{-M} F^2, \quad T_{22} = T_{33} = \frac{1}{2} e^{N-2M} F^2, \quad (2.2.57)$$

onde,

$$F^2 = F_{+-}^{\tilde{a}} F_{+-}^{\tilde{a}}. \quad (2.2.58)$$

Entre as equações de Einstein para o problema, ou,

$$R_{\mu\nu} = k \left(-F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 F^{\alpha\beta} \right), \quad (2.2.59)$$

selecionamos as duas que são homogêneas e dadas por,

$$N_{++} + \frac{1}{2} N_+^2 - M_+ N_+ = 0, \quad (2.2.60)$$

$$N_{--} + \frac{1}{2} N_-^2 - M_- N_- = 0, \quad (2.2.61)$$

onde $N_{\pm} = \partial N / \partial x^{\pm}$, etc... .

Uma integração direta fornece,

$$N_- f_+ = e^{M - \frac{N}{2}}, \quad (2.2.62)$$

$$N_+ h_- = e^{M - \frac{N}{2}}, \quad (2.2.63)$$

onde $f(x^+)$ e $h(x^-)$ são funções arbitrárias.

A compatibilidade das eqs. (2.2.62) e (2.2.63) exige que,

$$N = N(t) \quad ; \quad t = h(x^-) + f(x^+). \quad (2.2.64)$$

As outras equações de Einstein (2.2.59), com as equações de Yang-Mills, ou,

$$(\sqrt{-g} F_{\alpha}^{\mu\nu})_{|\nu} + \epsilon f_{abc} \sqrt{-g} A_{\nu}^b F^{\mu\nu c} = 0, \quad (2.2.65)$$

escrevem-se então,

$$N'' + M'' + \frac{1}{2} N'^2 = -k e^{-2M + \frac{N}{2}} N' F^2, \quad (2.2.66)$$

$$N'' + N'^2 = k e^{-2M + \frac{N}{2}} N' F^2, \quad (2.2.67)$$

$$\left[(N-M)' F_{+-}^a + F_{+-}^{\prime a} \right] f_+ + \epsilon f^a{}_{bc} A_+^b F_{+-}^c = 0, \quad (2.2.68)$$

$$\left[(N-M)' F_{+-}^a + F_{+-}^{\prime a} \right] h_- + \epsilon f^a{}_{bc} A_-^b F_{+-}^c = 0, \quad (2.2.69)$$

onde com N' , etc., denotamos derivada em relação a t , definido em (2.2.64).

Multiplicando as eqs. (2.2.68) e (2.2.69) por \bar{F}_{+-}^a e contraindo em \underline{a} , teremos,

$$(N-M)' F^2 + \frac{1}{2} (F^2)' = 0, \quad (2.2.70)$$

o que após uma integração, fornece,

$$F^2 = F_{+-}^a F_{+-a} = C^2 e^{2(M-N)}, \quad (2.2.71)$$

onde C^2 é uma constante de integração.

Pode ser observado das eqs. (2.2.71), (2.2.66) e (2.2.67), que o campo de Yang-Mills tem o mesmo efeito sobre a geometria que o campo de Maxwell, uma vez que estas são as mesmas equações conhecidas na literatura para o problema correspondente de Einstein-Maxwell. É necessário especificar o que é entendido então por uma solução não-abeliana, mesmo que o resultado acima tenha sido notado apenas para simetria plana. Prosseguindo com o tratamento das equações obtidas, vamos explicar primeiro a téc

nica de solução usada.

Das eqs. (2.2.62), (2.2.63) e (2.2.64), teremos,

$$e^M = 2\lambda' f + h_- \quad ; \quad \lambda = e^{N/2} \quad (2.2.72)$$

Definindo uma nova variável através de,

$$x = h(x^-) - f(x^+), \quad (2.2.73)$$

a métrica (2.2.55) pode ser escrita como,

$$ds^2 = \frac{1}{2} \lambda' (dt^2 - dx^2) - \lambda^2 (dx^{2^2} + dx^{3^2}). \quad (2.2.74)$$

A eq. (2.2.66) é uma consequência das eqs. (2.2.72) e (2.2.67). Por sua vez, a eq. (2.2.67), após substituição das eqs. (2.2.71) e (2.2.72), resulta,

$$2\lambda^2 \lambda' + b\lambda + 2k c^2 = 0, \quad (2.2.75)$$

onde b é uma constante de integração.

A solução desta última equação, é dada implicitamente por,

$$\left(\lambda + 2k \frac{c^2}{b}\right)^2 + \ln\left(\lambda - 2k \frac{c^2}{b}\right) = d - bt \quad ; \quad b \neq 0, \quad (2.2.76)$$

onde d é uma nova constante de integração.

A análise da eq. (2.2.76), e a discussão das soluções possíveis, segue os mesmos passos já conhecidos na literatura⁽⁶²⁾

Voltando ao exame das equações de Yang-Mills, (2.2.68) e (2.2.69), escreva-mo-las usando a métrica (2.2.74), temos,

$$\left(2 \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right) F_{tx}^a + F_{tx}^{\prime a} + \epsilon f^{abc} A_t^b F_{tx}^c = 0, \quad (2.2.77)$$

$$f^{abc} A_x^b F_{tx}^c = 0. \quad (2.2.78)$$

Para satisfazer à eq. (2.2.78), usando um procedimento bem conhecido ^(63,64), podemos escrever,

$$F_{tx}^a = A_x^{\prime a} + \epsilon f^{abc} A_t^b A_x^c = \alpha_t A_x^a, \quad (2.2.79)$$

onde α_x é uma função de t . Considerando que $A_x^a \neq 0$, a eq. (2.2.77) torna-se,

$$\left(2 \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right) \alpha_x + \alpha_x^2 + \alpha_x' = 0. \quad (2.2.80)$$

Definindo o isovetor de módulo unitário,

$$\hat{A}_x^a = A_x^a / A_x; \quad A_x = (A_x^a A_{xa})^{1/2}, \quad (2.2.81)$$

multiplicando-o pela eq. (2.2.79) e contraindo em \underline{a} , teremos,

$$\alpha_x = (\ln A_x)'. \quad (2.2.82)$$

Substituindo a expressão obtida de α_x na eq. (2.2.80),

$$\left(2 \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right) A_x' + A_x'' = 0. \quad (2.2.83)$$

Para esta última equação, uma primeira integração pode ser feita de imediato, e temos,

$$A_x = \alpha + \frac{\beta}{\lambda}, \quad (2.2.84)$$

onde α e β são constantes de integração.

O módulo do potencial de componentes A_x^a , fica determinado através de (2.2.84). Para ter alguma informação sobre direções internas, necessitamos de um Ansatz de solução. O outro potencial, \hat{A}_t^a , pode ser dado através da eq. (2.2.78), que pode ser escrita como,

$$A_t^a = \frac{1}{\epsilon} (f^a{}_{bc} \hat{A}_x^b \hat{A}_x^c + a_t \hat{A}_x^a), \quad (2.2.85)$$

onde

$$a_t = \epsilon \hat{A}_x^a A_t a, \quad (2.2.86)$$

é uma função arbitrária.

A função $\lambda(x)$ é dada pela eq. (2.2.76); quando $b \geq 0$, a solução que ela descreve é estática, mas para $b < 0$, podemos ter uma solução estática ou um universo homogêneo ⁽⁶²⁾.

Soluções abelianas triviais estão sempre imersas em soluções não-abelianas. Um dos modos de construir soluções abelianas ⁽⁶⁵⁾, será dado a seguir. Consideremos n parâmetros γ^a , satisfazendo a

$$g_{ab} \gamma^a \gamma^b = 1, \quad (2.2.87)$$

onde g_{ab} é a métrica invariante em um grupo de Lie de n parâmetros. Os potenciais e campos podem ser então escritos,

$$A_t^a = \gamma^a \varphi ; A_x^a = \gamma^a \psi ; F_{tx}^a = \gamma^a \psi', \quad (2.2.88)$$

onde φ e ψ correspondem aos potenciais de uma solução Einstein Maxwell com simetria plana. A eq. (2.2.78) é então satisfeita identicamente, o que significa que φ é uma função arbitrária. A eq. (2.2.77) transforma-se em,

$$\left(2 \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda'} \right) \psi' + \psi'' = 0. \quad (2.2.89)$$

Esta equação é da mesma forma da eq. (2.2.83), com solução,

$$\psi = A + \frac{B}{\lambda}, \quad (2.2.90)$$

onde A e B são novas constantes de integração.

A existência de soluções abelianas tais como (2.2.88), foi apresentada como um sério obstáculo à extensão da teoria unificada de Rainich a campos de Yang-Mills⁽⁶⁵⁾; o argumento principal sendo novamente aquele que foi usado contra configurações auto-duais, ou seja, configurações de calibre do tipo (2.2.88), não deixam "marcas" na geometria, que permitam caracterizar a estrutura interna, no espírito do programa de unificação de Rainich, e no entanto, são ainda obtidas como um caso particular de soluções tipicamente não-abelianas. Ao que parece, o processo de unificação necessita ser compreendido dentro de um esquema energético. Provavelmente, pode-se construir uma teoria em uma

determinada faixa de energias, que possua como soluções assintóticas, configurações do tipo de (2.2.88). Ou seja, o programa de unificação do tipo Rainich deve ser seguido dentro de uma faixa de energias muito altas, e em seguida, procurar na teoria assim construída, que modificações introduzir para abrigar também configurações abelianas de energia mais baixa, para as quais a teoria já é bem conhecida. De qualquer forma, a técnica de construção de soluções como (2.2.88), parece ser a mais trivial de todas, e assim, uma explicação em termos do comportamento de uma partícula não-abeliana de teste, pela análise de suas equações de movimento, como dadas por (1.4.54) e (1.4.60), é algo de muito mais fundamental para o que se possa dizer quanto ao entendimento do papel desempenhado por uma dada configuração de calibre no programa de unificação.

Uma classe não-abeliana de soluções às equações (2.2.66) a (2.2.69), pode ser dada escolhendo o potencial \hat{A}_x^a como (66),

$$\hat{A}_x^a = \delta_2^a \text{sen } \phi - \delta_3^a \text{cos } \phi, \quad (2.2.91)$$

onde ϕ é uma função arbitrária de t , eq. (2.2.64). Usando as eqs. (2.2.81), (2.2.84) e (2.2.85), podemos escrever, para os potenciais,

$$A_x^a = \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda} \right) \left(\delta_2^a \text{sen } \phi - \delta_3^a \text{cos } \phi \right), \quad (2.2.92)$$

$$A_x^a = \frac{1}{\epsilon} \left[f_{32}^a \phi' + a_x \left(\delta_2^a \text{sen } \phi - \delta_3^a \text{cos } \phi \right) \right]. \quad (2.2.93)$$

Os campos F_{tx}^a , são então dados por,

$$F_{tx}^a = \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda} \right) \left(\delta_2^a \operatorname{sen} \phi - \delta_3^a \cos \phi \right). \quad (2.2.94)$$

Quando ϕ for constante, teremos uma classe correspondente de soluções abelianas. O modelo com $\lambda = \lambda(t)$, sendo t , interpretado como tempo, o que pode ser conseguido considerando $b < 0$ em (2.2.76), é o mais interessante ⁽⁶²⁾. Este último caso corresponde a campos de Yang-Mills como fontes de curvatura de um universo homogêneo com simetria plana.

Algo que deve ser observado aqui é que as soluções obtidas, não podem ser consideradas como simples soluções maxwellianas, uma vez que a dependência dos campos de Yang-Mills nas direções internas, não necessita ser a mesma daquela da carga de uma partícula teste. Isto tem como resultado que uma partícula não-abeliana é suscetível à presença do campo de Yang-Mills, entretanto, o efeito deste campo na geometria é o mesmo que o do campo de Maxwell, o que significa que a estrutura interna do campo de Yang-Mills é imperceptível a uma partícula abeliana.

2.3 - A RELAÇÃO WEYL-MAJUMDAR PARA CAMPOS DE EINSTEIN-YANG-MILLS

Consideremos o elemento de linha para um espaço-tempo estático generalizado,

$$ds^2 = -\lambda dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.3.1)$$

onde λ e g_{ij} são independentes do tempo.

Por uma transformação de calibre ⁽⁴¹⁾, podemos escrever

os potenciais na forma correspondente à ausência de campo magnético, ou,

$$A_{\hat{i}}^{\hat{a}} = 0 \quad ; \quad A_{\hat{o}}^{\hat{a}} = \varphi^{\hat{a}}. \quad (2.3.2)$$

A componente (00) das equações de Einstein, pode ser escrita usando (2.3.1) e (2.3.2), como,

$$(g^{ij} \lambda_{ij})_{|\hat{i}} - g^{ij} \frac{1}{\lambda} \lambda_{|\hat{i}} \lambda_{ij} + g^{ij} \lambda_{ij} (l_{mn} \sqrt{-g})_{|\hat{i}} = k g^{ij} \varphi^{\hat{a}}_{|\hat{i}} \varphi_{\hat{a}|j}. \quad (2.3.3)$$

As equações de Yang-Mills, tornam-se aqui,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \frac{1}{\lambda} g^{ij} \varphi^{\hat{a}}_{ij})_{|\hat{i}} = 0, \quad (2.3.4)$$

$$- \epsilon^{abcd} \varphi^b \frac{1}{\lambda} g^{ij} \varphi^c_{ij} = 0. \quad (2.3.5)$$

Podemos admitir uma restrição, que é a de considerar $\varphi^{\hat{a}}$ como uma função de λ , $\varphi^{\hat{a}}(\lambda)$. As eqs. (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.5), assumem então a forma (67, 68),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{ij} \lambda_{ij})_{|\hat{i}} = g^{ij} \frac{1}{\lambda} \lambda_{|\hat{i}} \lambda_{ij} + k g^{ij} \lambda_{|\hat{i}} \lambda_{ij} \varphi^{\hat{a}}{}' \varphi_{\hat{a}}, \quad (2.3.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{ij} \lambda_{ij})_{|\hat{i}} \varphi^{\hat{a}} + g^{ij} \lambda_{|\hat{i}} \lambda_{ij} \varphi^{\hat{a}}{}' - g^{ij} \frac{1}{\lambda} \lambda_{|\hat{i}} \lambda_{ij} \varphi^{\hat{a}} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$f^{abcd} \varphi^b \varphi^c = 0, \quad (2.3.8)$$

onde a linha (') significa derivada com relação a λ .

Multiplicando a eq. (2.3.7) por $\varphi^{\hat{a}}$ e contraindo no fn

dice \underline{a} , teremos, comparando com (2.3.6),

$$\varphi''^a + k \varphi'^b \varphi'_b \varphi'^a = 0. \quad (2.3.9)$$

Esta equação possui como solução geral,

$$\varphi^a = h(\lambda) C^a + D^a, \quad (2.3.10)$$

onde C^a e D^a são isovetores constantes de integração e $h(\lambda)$ é uma função com uma inversa que pode ser escrita,

$$\lambda(h) = a + bh + ch^2, \quad (2.3.11)$$

sendo a, b, c , constantes. A eq. (2.3.11) é a relação Weyl-Majumdar; um exemplo dessa relação no caso de simetria esférica pode ser dado, escolhendo a princípio um Ansatz com essa simetria (69), para resolver a eq. (2.3.8), temos,

$$\varphi^a = q \hat{\kappa}^a \frac{J(r)}{r}, \quad (2.3.12)$$

onde $\hat{\kappa}^a$ é um isovetor de módulo unitário, dirigido radialmente.

Escrevamos o elemento de linha para um espaço-tempo esféricamente simétrico, na forma de Reissner-Nordstrom, ou,

$$ds^2 = -\lambda(r) dt^2 + \frac{1}{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.13)$$

Substituindo a eq. (2.3.12) com a métrica (2.3.13) na eq. (2.3.7), teremos,

$$q \frac{\hat{r}^a}{r^2} (r J_{1r} - J)_{1r} = 0. \quad (2.3.14)$$

A solução para $J(r)$ escreve-se,

$$J(r) = Ar + B, \quad (2.3.15)$$

onde A e B são constantes de integração.

A solução esfericamente simétrica para os potenciais é dada então por,

$$\varphi^a = q \hat{r}^a \left(A + \frac{B}{r} \right). \quad (2.3.16)$$

O Ansatz (2.3.12) pode ser substituído na eq. (2.3.9) para obter uma equação que determine $\lambda(r)$, temos,

$$\lambda_{1r}/r + \frac{2}{r} \lambda_{1r} - k \frac{q^2}{r^4} = 0, \quad (2.3.17)$$

que possui a solução geral,

$$\lambda(r) = 1 - \frac{2m}{r} + k \frac{q^2}{2r^2}, \quad (2.3.18)$$

sendo m e q , a massa e a carga contínua da fonte. Neste sentido, podemos fazer $A=0$ e $B=1$, na solução (2.3.16), para ter um monopolo elétrico na origem⁽⁶⁹⁾. A solução representa então um campo gravitacional do tipo Reissner-Nordstrom, criado por um monopolo elétrico situado na origem. Soluções do tipo Reissner-Nordstrom são comuns na literatura, particularmente as associadas a um monopolo magnético do tipo Wu-Yang⁽⁶⁸⁾, de carga dada

por um número inteiro ⁽⁷⁰⁾, em unidades de $(1/\epsilon)$, ou as de "dyon", ou seja, um monopolo com duas cargas, elétrica e magnética, sobre o qual se podem impor as condições de Dirac de quantização da carga ⁽⁷¹⁾. Para todos esses casos, a forma de solução (2.3.18) é a mesma, com as constantes de integração tendo diferentes interpretações. Novamente se infere um resultado análogo ao da secção anterior, que do ponto de vista de uma solução das equações de campo, sem proceder a uma análise das equações de movimento, encontramos que para uma carga de teste abeliana, o comportamento dos campos estáticos e esfericamente simétricos de Yang-Mills, não difere dos campos de Maxwell ⁽⁷²⁾

2.4 - SOLUÇÕES COM SIMETRIAS AXIAL E CILÍNDRICA

O tratamento de campos vetoriais como fontes de curvatura em simetrias axial e cilíndrica, é bastante conhecido na teoria de gravitação de Einstein. Um dos objetivos desta secção é dar mais fundamento à relação Weyl-Majumdar, conceituada na secção anterior, aqui tratando o caso de configurações com simetria axial, assim como interpretando, através de uma solução, o valor $(1/\epsilon)$ como carga magnética elementar do monopolo não-abeliano. Tratamos também de configurações de simetria cilíndrica, na presença de um campo de Higgs, em rotação estacionária, obtendo uma possível interpretação da criação de singularidades no eixo do cilindro.

Consideremos as condições de compensação por transformações infinitesimais de calibre das transformações (2.2.32), ou

seja, como foi desenvolvido na secção 1.5, considerando o "complexion" como nulo na eq. (1.5.19), teremos,

$$F_{\mu\nu}^a \xi^\mu + F_{\mu\alpha}^a \xi^\alpha + F_{\alpha\nu}^a \xi^\mu = \epsilon f^a{}_{bc} \Lambda^b F_{\mu\nu}^c, \quad (2.4.1)$$

onde $\Lambda^a(x)$ são os parâmetros locais da transformação infinitesimal de calibre.

O elemento característico do grupo de calibre não-abeliano pode ser escrito,

$$U(x) = e^{-i\epsilon \Lambda^a(x) T_a}, \quad (2.4.2)$$

do que resulta para o elemento de matriz da transformação infinitesimal,

$$U^a{}_b(x) = \delta^a{}_b - \epsilon f^a{}_{bc} \Lambda^c(x). \quad (2.4.3)$$

As condições (2.4.1), tornam-se simplesmente,

$$\delta_{\xi} F_{\mu\nu}^a(x) = -\mathcal{L}_{\xi} F_{\mu\nu}^a(x) = -\delta_{\epsilon} F_{\mu\nu}^a(x), \quad (2.4.4)$$

onde \mathcal{L}_{ξ} designa a derivada de Lie em relação a um vetor de Killing da métrica a ser usada, e δ_{ϵ} é a transformação de calibre infinitesimal dos campos de Yang-Mills, ou,

$$\delta_{\epsilon} F_{\mu\nu}^a(x) = \epsilon f^a{}_{bc} \Lambda^b(x) F_{\mu\nu}^c(x). \quad (2.4.5)$$

Restringindo-nos a uma teoria SU(2), consideremos que

os potenciais A_μ^a sejam invariantes por um subgrupo $U(1)$, gerado por uma matriz hermitiana $q(x)$ de traço nulo ⁽³¹⁾, ou,

$$U_q(x) = e^{-i\epsilon q(x)}, \quad (2.4.6)$$

onde podemos fazer,

$$q(x) = q^a(x) \sigma_a, \quad (2.4.7)$$

sendo σ_a , as matrizes de Pauli e as componentes do isovetor q^a , os parâmetros da transformação.

Sob este subgrupo, os potenciais $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \sigma_a$, transformam-se genericamente como,

$$\delta_q A_\mu(x) = -(q^a \sigma_a)_{|\mu} + \epsilon \epsilon^{abc} \sigma^a q^b A_\mu^c. \quad (2.4.8)$$

Usando a independência linear das σ_a , e exigindo a invariância dos potenciais, teremos,

$$-q^a_{|\mu} + \epsilon \epsilon^{abc} q^b A_\mu^c = 0. \quad (2.4.9)$$

A este estágio, notemos que a matriz q não é totalmente arbitrária. Multiplicando o lado direito da eq. (2.4.8) por $\sigma_d q^d$, teremos, após tomar o traço do resultado e usar que $\text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = g_{ab}$, a métrica do grupo não-abeliano (no caso $SU(2)$, $g_{ab} = 2 \delta_{ab}$),

$$g_a \cdot q^a_{|\mu} = 0. \quad (2.4.10)$$

Podemos satisfazer a eq. (2.4.10), impondo, sem perda de generalidade, que o isovetor q^a tenha módulo unitário, ou,

$$q^a q_a = 1. \quad (2.4.11)$$

Das eqs. (2.4.9), (2.4.10) e (2.4.11), os potenciais podem ser determinados através de,

$$A_\mu^a = -\frac{1}{\epsilon} \epsilon^{abc} g^b \cdot g^c / \mu, \quad (2.4.12)$$

do que resulta para os campos de Yang-Mills (1.1.22),

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{2}{\epsilon} \epsilon^{abc} g^b / \mu g^c / \nu + \frac{1}{\epsilon} g^a \epsilon^{abcd} g^b / \mu g^c / \nu g^d. \quad (2.4.13)$$

Necessitamos agora preencher a exigência de simetria axial, o que significa ter aqui os campos $F_{\mu\nu}^a$, invariantes por rotações em torno do eixo-z. Assim, o isovetor unitário q^a pode ser escolhido como,

$$q^a = \delta_1^a (1-\varphi^2)^{1/2} \cos \phi + \delta_2^a (1-\varphi^2)^{1/2} \sin \phi + \delta_3^a \varphi, \quad (2.4.14)$$

onde $\varphi = \varphi(r, z)$ e ϕ é o ângulo de rotação em torno do eixo-z. A eq. (2.4.14) descreve uma classe ampla de Ansatzes com simetrias axial e cilíndrica ⁽⁷³⁾. O problema a ser tratado em primeiro lugar, corresponde à determinação do campo de um conjunto de monopolos magnéticos situados no eixo-z.

As eqs. (2.4.12), (2.4.13) e (2.4.14) fornecem para os potenciais e campos não-nulos,

$$A_r^a = -\frac{1}{\epsilon} (1-\gamma^2)^{-1/2} \gamma_{1r} (\delta_1^a \sin \phi - \delta_2^a \cos \phi), \quad (2.4.15)$$

$$A_z^a = -\frac{1}{\epsilon} (1-\gamma^2)^{-1/2} \gamma_{1z} (\delta_1^a \sin \phi - \delta_2^a \cos \phi), \quad (2.4.16)$$

$$A_\phi^a = -\frac{1}{\epsilon} \left[\delta_3^a (1-\gamma^2) - (1-\gamma^2)^{1/2} \gamma (\delta_1^a \cos \phi + \delta_2^a \sin \phi) \right], \quad (2.4.17)$$

$$F_r^a \phi = \frac{1}{\epsilon} g^a \gamma_{1r}, \quad (2.4.18)$$

$$F_z^a \phi = \frac{1}{\epsilon} g^a \gamma_{1z}. \quad (2.4.19)$$

Analisemos o efeito de uma configuração de calibre tal como a dada nas eqs. (2.4.15) a (2.4.19), na curvatura do espaço tempo. Uma vez que o problema foi restrito a campos estáticos, que dependem apenas das variáveis espaciais r, z , podemos escolher o elemento de linha axialmente simétrico, na forma canônica de Weyl ^(74,75), ou,

$$ds^2 = -e^{2\lambda} dt^2 + e^{2(\nu-\lambda)} (dr^2 + dz^2) + e^{-2\lambda} r^2 d\phi^2, \quad (2.4.20)$$

onde λ e ν são funções de r, z .

Os vetores de Killing são dados por,

$$\xi_{(t)}^M = \delta_t^M \quad ; \quad \xi_{(\phi)}^M = \delta_\phi^M. \quad (2.4.21)$$

Substituindo-os na eq. (2.4.1), tendo em conta que $f_{abc} \equiv \epsilon_{abc}$ para $SU(2)$,

$$F_r^a \phi = \epsilon \epsilon^{abc} \Lambda^b F_r^c \phi, \quad (2.4.22)$$

$$F_{z\phi}^a = \epsilon \epsilon^a{}_{bc} \Lambda^b F_{z\phi}^c. \quad (2.4.23)$$

Usando as eqs. (2.4.18) e (2.4.19) em (2.4.22) e (2.4.23) respectivamente, obtemos uma condição para determinar $\Lambda^a(x)$,

$$g_{\phi}^a = \epsilon \epsilon^a{}_{bc} \Lambda^b g^c. \quad (2.4.24)$$

Da eq. (2.4.10) vemos que a última equação pode ser sempre satisfeita, ou seja, o efeito de uma transformação infinitesimal de coordenadas em campos de Yang-Mills estáticos com simetria axial, pode ser sempre compensado por uma transformação local de calibre gerada pelas funções $\Lambda^a(r, z, \phi)$. A forma do Ansatz (2.4.14), garante ainda que ao menos uma das funções Λ^a é arbitrária.

Procedendo à análise das equações de campo, usando as eqs. (2.4.15) a (2.4.20), teremos para a parte de Yang-Mills, eq. (2.2.65),

$$\left[\left(\frac{e^{2\lambda}}{r} \varphi_{1r} \right)_{1r} + \left(\frac{e^{2\lambda}}{r} \varphi_{1z} \right)_{1z} \right] g^a = 0. \quad (2.4.25)$$

Todas as demais equações de Yang-Mills sendo identicamente nulas.

As equações de Einstein (2.2.59) são escritas,

$$v_{1r1r} + v_{1z1z} = \Delta\lambda - (\lambda_{1r}^2 + \lambda_{1z}^2), \quad (2.4.26)$$

$$\frac{v_{1r}}{r} = \lambda_{1r}^2 - \lambda_{1z}^2 + \frac{k}{2\epsilon^2} \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (\varphi_{1r}^2 - \varphi_{1z}^2), \quad (2.4.27)$$

$$\Delta\lambda = \frac{k}{2\epsilon^2} \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (\varphi_{1r}^2 + \varphi_{1z}^2), \quad (2.4.28)$$

$$\frac{\psi_{1z}}{r} = 2 \left(\lambda_{1r} \lambda_{1z} + \frac{k}{2\epsilon^2} \frac{e^{2\lambda}}{r^2} \varphi_{1r} \varphi_{1z} \right), \quad (2.4.29)$$

onde Δ denota o operador laplaciano em coordenadas cilíndricas.

Uma análise simples ⁽⁷⁵⁾, mostra que para resolver as eqs. (2.4.25) a (2.4.29), basta que resolvamos as eqs. (2.4.25) e (2.4.28), quando então a função $v(r, z)$ será determinada das eqs. (2.4.27) e (2.4.29). A eq. (2.4.26) será então identicamente satisfeita pelas funções v, λ encontradas. É interessante notar que o sistema de equações aqui tratado possui duas classes principais de soluções que se caracterizam por admitir ou não, uma dependência funcional entre λ e φ . Estas classes são conhecidas na literatura como Weyl ^(74, 75, 76) e não-Weyl ^(74, 75, 77). Iremos aqui tratar de uma solução do tipo Weyl; de acordo com o procedimento usual ⁽⁷⁶⁾, definimos novos "potenciais", através de,

$$\psi_{1z} = \frac{e^{2\lambda}}{r} \varphi_{1r}, \quad (2.4.30)$$

$$\varphi_{1r} = -\frac{e^{2\lambda}}{r} \psi_{1z}. \quad (2.4.31)$$

Assim, a eq. (2.4.25) torna-se simplesmente a condição de compatibilidade $\psi_{1r1z} = \psi_{1z1r}$. Uma vez que se tem também trivialmente $\varphi_{1r1z} = \varphi_{1z1r}$, podemos escrever, das eqs. (2.4.30) e (2.4.31),

$$\Delta \psi = 2 \left(\lambda_{1r} \psi_{1r} + \lambda_{1z} \psi_{1z} \right). \quad (2.4.32)$$

Suponhamos agora, de acordo com a definição da classe de Weyl de soluções, uma relação tal como $\psi = \psi(\lambda)$; então, a eq. (2.4.32) pode ser resolvida como,

$$\psi = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} \epsilon e^\lambda + a, \quad (2.4.33)$$

onde a é uma constante de integração que pode ser escolhida de forma a que tenhamos por condição de contorno, que a métrica (2.4.20) esteja assintoticamente na forma de Minkowski; seja então,

$$a = -\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} \epsilon, \quad (2.4.34)$$

com o que a relação Weyl-Majumdar para o problema, escrever-se-á,

$$e^{2\lambda} = 1 + \frac{(2k)^{1/2}}{\epsilon} \psi + \frac{k}{2\epsilon^2} \psi^2. \quad (2.4.35)$$

A análise posterior deste problema, é bem desenvolvida na literatura ^(74,75), onde podem ser encontradas soluções explícitas para ψ , λ , e v . O que nos interessa aqui é observar que da forma da relação Weyl-Majumdar apresentada acima, segue-se que $(1/\epsilon)$ deve ser a unidade de carga magnética para as fontes de monopolo. Deve-se notar também, que se a teoria de Einstein-Yang-Mills que está sendo tratada, provém de um possível processo de redução dimensional, tal como foi exemplificado na secção 1.4, eqs.(1.4.80) e (1.4.81); a eq. (2.4.35) simplifica-se então, em

$$e^{2\lambda} = \left(1 + \frac{1}{2} \psi\right)^2, \quad (2.4.36)$$

que não coincide com a forma em que foi originalmente deduzida ⁽⁶⁷⁾ e que corresponderia a $\epsilon^2 = k$. Note-se entretanto, que a exigência de que o espaço-tempo seja da forma de Minkowski na assíntota, satisfeita através da escolha da constante de integração a ,

como em (2.4.34), pode fornecer informação sobre o processo de redução dimensional, e aqui parece indicar que as constantes de gravitação k e de acoplamento do campo de Yang-Mills ϵ , no universo de $(4+N)$ dimensões, não são as mesmas como as do universo observado atualmente, ou,

$$k_{4+N} = \left(1 + \frac{R^N - 2\Lambda_{4+N}}{R}\right) k ; \quad \epsilon_{4+N}^2 = 2 k_{4+N}. \quad (2.4.37)$$

Assim, a constante cosmológica não poderia ser eliminada, contrariamente ao que aduzimos na secção 1.4, sendo necessária para explicar o atual valor da constante de gravitação. Torna-se claro que todos esses argumentos em favor da existência da constante cosmológica, ficarão sem sentido, se não exigirmos que a condição assintótica seja ter a métrica na forma de Minkowski.

Como foi mencionado no início desta secção, trataremos também um problema que mostra que tipo de influência possui o campo de Higgs na existência de configurações singulares de calibre. Partimos das eqs. (1.3.15) a (1.3.17), aí fazendo $\Lambda = 0$, tendo em conta (1.3.12) a (1.3.14) e (1.3.18). O sistema de equações mencionado ^(78,79) é tratado no limite Prasad-Sommerfield com $\lambda \rightarrow 0$, onde λ é a constante de acoplamento do campo de Higgs ⁽⁸⁰⁾. Imponhamos a condição ⁽³³⁾,

$$D_\mu \hat{\phi}^a = 0, \quad (2.4.38)$$

onde $\hat{\phi}^a$ é o isovetor unitário de Higgs, $\hat{\phi}^a = \phi^a / (\phi^b \phi_b)^{1/2}$.

É conhecida a afirmação de que a condição (2.4.38),

quando tomada conjuntamente com a de constância do módulo dos campos de Higgs na região assintótica, assegura que a energia das configurações é finita; ao menos isto é válido para todas as soluções conhecidas no espaço de Minkowski ⁽⁸¹⁾. É comum encontrar na literatura, para configurações com simetria cilíndrica ou esférica, os isovetores de Higgs expressos por,

$$\phi^a = H(r) \hat{\phi}^a, \quad (2.4.39)$$

onde $H(r)$ é uma função cujo quadrado se exige coincidir assintoticamente com o valor esperado do campo de Higgs no estado de vácuo dado em (1.3.14). Isto fornece então, também assintoticamente,

$$D_\mu \phi^a = 0 \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H^2(r) = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (2.4.40)$$

o que define uma região conhecida por "vácuo de Higgs" ⁽⁸³⁾. De qualquer forma, a simples exigência da condição (2.4.38) é mais geral, e será usada a seguir.

No limite Prasad-Sommerfield, as equações de Yang-Mills e Higgs, (1.3.16) e (1.3.17), escrever-se-ão como,

$$D_\nu (\sqrt{-g} F_{\alpha}^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.4.41)$$

$$D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} H_{\nu} \hat{\phi}^a) = 0. \quad (2.4.42)$$

Uma vez imposta a condição (2.4.38), teremos para os potenciais,

$$A_{\mu}^{\hat{a}} = \alpha_{\mu} \hat{\phi}^a - \frac{1}{\epsilon} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c{}_{,\mu}, \quad (2.4.43)$$

onde as α_{μ} são funções arbitrárias. Escolhemos,

$$\alpha_{\mu} = (\alpha(r), 0, 0, 0). \quad (2.4.44)$$

Os campos correspondentes aos potenciais (2.4.43), escrevem-se,

$$F_{\mu\nu}^a = f_{\mu\nu} \hat{\phi}^a, \quad (2.4.45)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é dado por,

$$f_{\mu\nu} = \alpha_{\nu|\mu} - \alpha_{\mu|\nu} - \frac{1}{\epsilon} \epsilon_{abc} \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b{}_{,\mu} \hat{\phi}^c{}_{,\nu}. \quad (2.4.46)$$

Usando as eqs. (2.4.43) e (2.4.45), podemos escrever para (2.4.41) e (2.4.42),

$$(\sqrt{-g} f^{\mu\nu})_{;\nu} = 0, \quad (2.4.47)$$

$$\square H = 0, \quad (2.4.48)$$

onde \square representa o d'Alembertiano covariante.

Escolhamos a forma generalizada do elemento de linha com simetria cilíndrica, descrevendo rotação estacionária ^(83,84),

$$ds^2 = -f dt^2 + e^{2\psi} (dr^2 + dz^2) + l dp^2 + 2mr dt dp, \quad (2.4.49)$$

onde f , ψ , l , m , são funções de r , a coordenada radial.

Para conseguir um Ansatz para os campos de calibre, respeitando a simetria desejada, usamos o conceito de simetria interna, o que nos permite associar a cada vetor de Killing "externo" ξ^μ , correspondendo a uma classe de isometria, um isovetor da forma $\Lambda_\xi^a = \xi^\mu A_\mu^a$, parâmetro de uma transformação de calibre infinitesimal que compensa a transformação de coordenadas gerada por ξ^μ (cf. secção 1.5). Usando a relação proposta em (1.5.19) e o fato que o campo $f_{\mu\nu}$ é do tipo maxwelliano, como segue de sua equação (2.4.47), ou seja $\hat{\mathcal{L}}_\xi f_{\mu\nu} = (\hat{\mathcal{L}}_\xi \alpha_c)^* f_{\mu\nu}$, α_c sendo o complexion da métrica (2.4.49) e $^* f_{\mu\nu}$ o dual de $f_{\mu\nu}$, teremos,

$$\xi^\mu \hat{\mathcal{L}}_{\mu}^a = \epsilon \epsilon^a{}_{bc} \hat{\mathcal{L}}^b \xi^\mu A_\mu^c. \quad (2.4.50)$$

Substituindo nesta última equação os vetores de Killing ξ^μ de (2.4.49), teremos,

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mu}^a = \epsilon \epsilon^a{}_{bc} \hat{\mathcal{L}}^b A_\mu^c; \quad i = t, z, \varphi, \quad (2.4.51)$$

onde φ é uma coordenada angular ⁽¹⁷⁾, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{rr}} = \lim_{r \rightarrow 0} (l e^{-2\psi}) \rightarrow r^2.$$

As eqs. (2.4.51) podem ser satisfeitas com um Ansatz da forma (2.4.14), que aqui reescrevemos como,

$$\hat{\mathcal{L}}^a = \delta_1^a (1-K^2)^{1/2} \cos \varphi + \delta_2^a (1-K^2)^{1/2} \sin \varphi + \delta_3^a K, \quad (2.4.52)$$

onde K é uma função de r .

Das eqs. (2.4.44), (2.4.46), (2.4.49) e (2.4.52), temos

para as componentes diferentes de zero dos campos $f_{\mu\nu}$,

$$f_{r\alpha} = \alpha' \quad ; \quad f_{r\varphi} = K'/\epsilon. \quad (2.4.53)$$

As equações de Yang-Mills, quando reduzidas à forma (2.4.47), são,

$$D\alpha' = b m - a f, \quad (2.4.54)$$

$$D\frac{K'}{\epsilon} = a m + b l, \quad (2.4.55)$$

onde $D^2 = f l + m^2$ e a , b , são constantes de integração.

A eq. (2.4.48) pode ser resolvida trivialmente, na métrica (2.4.49), por,

$$H(r) = C \ln(r/r_0), \quad (2.4.56)$$

onde C e r_0 são constantes de integração.

É interessante observar que a configuração descrita acima, não pode estar em um vácuo de Higgs para $C \neq 0$. Note-se também que as derivadas covariantes como (2.4.38), reduzem-se aqui a,

$$D_r \hat{\phi}^a = \frac{C}{r} \hat{\phi}^a, \quad (2.4.57)$$

que devido à forma de $\hat{\phi}^a$ em (2.4.52), não é zero assintoticamente (ver a solução adiante para $K(r)$). Assim, vácuo de Higgs significa aqui, ausência simples do campo de Higgs e não será

portanto de interesse.

Procedendo à escrita das equações de campo de Einstein, observa-se que das componentes do tensor energia-momentum, eq. (1.3.18), no limite Prasad-Sommerfield de $\lambda \rightarrow 0$, podemos inferir que,

$$R^t_t + R^{\varphi}_{\varphi} = 0, \quad (2.4.58)$$

ou,

$$f l + m^2 = D^2 = (C_1 r + C_2)^2. \quad (2.4.59)$$

O sistema de coordenadas canônicas de Weyl⁽⁸⁴⁾, é introduzido, fazendo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Como é conhecido, uma transformação linear das diferenciais das coordenadas tal como,

$$dt = dt' \cosh \chi - d\varphi' \sinh \chi; \quad d\varphi = d\varphi' \cosh \chi - dt' \sinh \chi, \quad (2.4.60)$$

onde χ é uma constante, reduz o elemento de linha (2.4.49), à forma,

$$ds^2 = -F dt'^2 + e^{2\chi} (dr^2 + dz^2) + L d\varphi'^2, \quad (2.4.61)$$

onde os coeficientes F , L , estão relacionados aos coeficientes f , l , m , de (2.4.49), através de,

$$f = F \cosh^2 \chi - L \sinh^2 \chi, \quad (2.4.62)$$

$$l = L \cosh^2 \chi - F \sinh^2 \chi, \quad (2.4.63)$$

$$m = \frac{1}{2} (L - F) \operatorname{senh} 2\chi. \quad (2.4.64)$$

A eq. (2.4.55) pode ser então escrita nas coordenadas de Weyl, ou,

$$FL = r^2. \quad (2.4.65)$$

Esta última equação sugere que se façam as substituições,

$$F = e^{2\beta} \quad ; \quad L = r^2 e^{-2\beta}. \quad (2.4.66)$$

Para o caso aqui considerado de χ constante, podemos definir novas constantes γ , w , tais que $\gamma = (1 - w^2)^{1/2}$, escrevendo $\operatorname{Cosh} \chi = \gamma$; $\operatorname{Senh} \chi = \gamma w$. As eqs. (2.4.62) a (2.4.64), serão então,

$$f = \gamma^2 (e^{2\beta} - w^2 r^2 e^{-2\beta}), \quad (2.4.67)$$

$$g = \gamma^2 (r^2 e^{-2\beta} - w^2 e^{2\beta}), \quad (2.4.68)$$

$$m = \gamma^2 w (r^2 e^{-2\beta} - e^{2\beta}). \quad (2.4.69)$$

As eqs. (2.4.54) e (2.4.55), tornam-se agora,

$$\alpha' = \gamma^2 w r (b + a w) e^{-2\beta} - \frac{\gamma^2}{r} (a + b w) e^{2\beta}, \quad (2.4.70)$$

$$\frac{\kappa'}{\epsilon} = \gamma^2 r (b + a w) e^{-2\beta} - \frac{\gamma^2}{r} w (a + b w) e^{2\beta}. \quad (2.4.71)$$

A parte correspondente às equações de Einstein, pode ser escrita,

$$\gamma^2(1+w^2)(r\beta')' = \frac{k}{2} r e^{2\psi} (-f_{rt} f^{rt} + f_{r\varphi} f^{r\varphi}), \quad (2.4.72)$$

$$2\gamma^2 w (r\beta')' = -k r e^{2\psi} f^{rt} f_{r\varphi}, \quad (2.4.73)$$

$$-2\gamma^2 w (r\beta')' = -k r e^{2\psi} f_{rt} f^{r\varphi}, \quad (2.4.74)$$

$$-\gamma^2(1+w^2)(r\beta')' = \frac{k}{2} r e^{2\psi} (f_{rt} f^{rt} - f_{r\varphi} f^{r\varphi}), \quad (2.4.75)$$

$$r\psi'' - \psi' - 2\beta'(1-r\beta') = -\frac{k}{2} r e^{2\psi} (f_{rt} f^{rt} + f_{r\varphi} f^{r\varphi}) - k \frac{c^2}{r}, \quad (2.4.76)$$

$$(r\psi')' = \frac{k}{2} r e^{2\psi} (f_{rt} f^{rt} + f_{r\varphi} f^{r\varphi}). \quad (2.4.77)$$

Das eqs. (2.4.73) e (2.4.74), temos,

$$f_{rt} f^{r\varphi} + f^{rt} f_{r\varphi} = 0. \quad (2.4.78)$$

Após substituição das eqs. (2.4.53), (2.4.70) e (2.4.71), a condição (2.4.78) transforma-se em,

$$\gamma^4 (a + bw)(b + aw) = 0. \quad (2.4.79)$$

A última equação conduz a identificar dois tipos de soluções, seja,

$$\alpha' = f_{rt} = \gamma^2 w b (1-w^2) r e^{-2\beta}, \quad (2.4.80)$$

$$\frac{K'}{\epsilon} = f_{r\varphi} = \gamma^2 b (1-w^2) r \bar{e}^{-2\beta}, \quad (2.4.81)$$

ou,

$$\alpha' = f_{rt} = -\frac{\gamma^2}{r} a (1-w^2) e^{2\beta}, \quad (2.4.82)$$

$$\frac{K'}{\epsilon} = f_{r\varphi} = -\frac{\gamma^2}{r} a w (1-w^2) e^{2\beta}. \quad (2.4.83)$$

Estas soluções correspondem aos dois modos de descrição de campos estáticos para um observador em um sistema de referência em rotação⁽⁸⁵⁾. No primeiro caso, eqs. (2.4.80) e (2.4.81), o observador "vê" somente um campo magnético estático axial; para o segundo caso, tem-se um campo elétrico estático radial.

As equações de Einstein a ser resolvidas para o 1º caso, são,

$$(r\beta')' = \frac{k}{2} b^2 (1-w^2) r \bar{e}^{-2\beta}, \quad (2.4.84)$$

$$r\psi'' - \psi' - 2\beta'(1-r\beta') = -\frac{k}{2} b^2 (1-w^2) r \bar{e}^{-2\beta} - k \frac{c^2}{r}, \quad (2.4.85)$$

$$(r\psi')' = \frac{k}{2} b^2 (1-w^2) r \bar{e}^{-2\beta}. \quad (2.4.86)$$

A eq. (2.4.84) pode ser resolvida trivialmente por,

$$e^{\beta} = \xi_1 r^{1+\mu} + \eta_1 r^{1-\mu}, \quad (2.4.87)$$

onde ξ_1 , η_1 , μ , são constantes de integração que satisfazem a relação,

$$8\mu^2 \xi_1 \eta_1 = k b^2 (1-w^2). \quad (2.4.88)$$

A eq. (2.4.86) pode então ser resolvida para ψ , e

$$\psi = \beta + M \ln(r/r_1), \quad (2.4.89)$$

onde M e r_1 são constantes de integração.

A eq. (2.4.85) será satisfeita, se existir a seguinte relação entre as constantes de integração das duas outras equações, (2.4.84) e (2.4.86),

$$\mu^2 = 1 + M - \frac{k}{2} C^2. \quad (2.4.90)$$

Analogamente, teremos para o 2º caso,

$$(r\beta')' = \frac{k}{2} a^2 (1-w^2) \frac{e^{2\beta}}{r}, \quad (2.4.91)$$

$$r\psi'' - \psi' - 2\beta'(1-r\beta') = \frac{k}{2} a^2 (1-w^2) \frac{e^{2\beta}}{r} - k \frac{C^2}{r}, \quad (2.4.92)$$

$$(r\psi')' = -\frac{k}{2} a^2 (1-w^2) \frac{e^{2\beta}}{r}. \quad (2.4.93)$$

Resolvendo a eq. (2.4.91), podemos escrever,

$$\bar{e}^{-\beta} = \xi_2 r^v + \eta_2 r^{-v}, \quad (2.4.94)$$

onde ξ_2 , η_2 , e v , são constantes de integração relacionadas por,

$$8v^2 \xi_2 \eta_2 = -k a^2 (1-w^2). \quad (2.4.95)$$

Para a eq. (2.4.93), tem-se então como solução,

$$\psi = -\beta + N \ln(r/r_2), \quad (2.4.96)$$

sendo N e r_2 constantes de integração. As soluções (2.4.94) e (2.4.95). satisfarão à eq. (2.4.92), desde que,

$$v^2 = N - \frac{k}{2} c^2. \quad (2.4.97)$$

O objetivo do trabalho aqui relatado, foi o de analisar como o campo de Higgs, com seu mecanismo de quebra espontânea de simetria e conseqüente criação de massa, podia evitar a quebra de causalidade, ou seja, no caso, a existência de linhas tipo-tempo fechadas na métrica (2.4.49). Da inspeção das duas soluções acima, pode-se notar que a quebra de causalidade continua a existir; isto pode ser devido à restrição de trabalhar no limite Prasad-Sommerfield ($\lambda \rightarrow 0$). A este respeito, o tratamento aqui exposto pode ser comparado com aquele desenvolvido para um campo escalar linear, responsável pela interação de partículas de poeira de um cilindro infinito em rotação⁽⁸⁶⁾; aí também a quebra de causalidade não pode ser evitada. Quanto ao comportamento do campo auto-interagente de Higgs, pode-se notar, inspecionando cuidadosamente as soluções, que o mesmo introduz singularidades no eixo do cilindro, e é responsável pela densidade de energia infinita das configurações de campo⁽⁸⁷⁾. Isto pode ser confirmado trivialmente, por cálculo direto das densidades de energia e momentum angular por unidade de comprimento, ou,

$$\frac{dE}{dz} = 2\pi \int_0^\infty \sqrt{-g} T^z_x dr, \quad (2.4.98)$$

$$\frac{dL}{dz} = 2\pi \int_0^\infty \sqrt{-g} T^z_\varphi dr. \quad (2.4.99)$$

As duas soluções tratadas acima, fornecem,

$$\left(\frac{dE}{dz}\right)_1 = \frac{4\pi\gamma^2}{k} (1+w^2)\mu + \pi c^2 \ln r \Big|_0^\infty, \quad (2.4.100)$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_1 = \frac{8\pi\gamma^2}{k} w\mu, \quad (2.4.101)$$

e,

$$\left(\frac{dE}{dz}\right)_2 = -\frac{4\pi\gamma^2}{k} (1+w^2)v + \pi c^2 \ln r \Big|_0^\infty, \quad (2.4.102)$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_2 = -\frac{8\pi\gamma^2}{k} wv. \quad (2.4.103)$$

As densidades de momentum angular mostram que se houverem singularidades, devido à presença de massas ou monopolos, elas devem estar localizadas no eixo do cilindro, desde que aí as mesmas não participam na rotação. As densidades de energia entretanto, só são finitas na ausência do campo de Higgs ($C=0$). Seria ainda interessante trabalhar com configurações em que a condição de vácuo de Higgs estivesse realmente presente e não significasse o desaparecimento do campo de Higgs como a de acima. É válido notar o fato de que para a teoria de Yang-Mills-Higgs no espaço-tempo chato, soluções cilíndricamente simétricas singulares no eixo, podem ser obtidas a partir de soluções axialmente simétricas regulares⁽⁸⁸⁾. No exemplo de espaço curvo aqui desenvolvido, na ausência do campo de Higgs, escolhendo convenientemente as constantes M , N , teremos soluções regulares. Isto não é possível quando o campo de Higgs está presente ($C \neq 0$), o

que confirma que ele é responsável pela criação de singularidades no eixo. Algo de muito interessante seria trabalhar com uma solução não-estacionária para o sistema de Einstein-Yang-Mills-Higgs, de modo a revelar os estágios intermediários no processo de criação de singularidades no eixo do cilindro.

2.5 - SOLUÇÕES CONFORMEMENTE CHATAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

Nesta secção tratamos de soluções Einstein-Yang-Mills-Higgs com simetria esférica, em métrica conformemente chata. O tratamento de configurações de calibre em espaços curvos de simetria esférica, foi dos primeiros a ser desenvolvido⁽⁸⁹⁾, e é de grande importância, dada sua extensão para problemas cosmológicos elementares, onde o conteúdo de massa provenha de quebra espontânea de simetria⁽⁹⁰⁾. Problemas de cosmologia em número maior de dimensões podem também ser tratados com os métodos e Ansatz apresentados nesta secção, repetindo-os para as componentes dos campos e potenciais nas dimensões extras.

O elemento de linha para uma solução estática, conformemente chata e esfericamente simétrica, pode ser escrito,

$$ds^2 = e^{2\sigma(r)} (-dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.5.1)$$

Os potenciais e campos de Yang-Mills e os isovetores de Higgs, podem ser dados através dos métodos generalizados de "dedução" de Ansatz⁽⁹¹⁾; temos,

$$A_t^a = (J/\epsilon r) \hat{\lambda}_r^a; \quad A_r^a = 0; \quad A_\theta^a = [(K-1)/\epsilon] \hat{\lambda}_\varphi^a; \quad A_\varphi^a = [(1-K)/\epsilon] \sin\theta \hat{\lambda}_\theta^a \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned}
 F_{nt}^a &= (J/\epsilon r) \hat{\lambda}_n^a; F_{\theta t}^a = (kJ/\epsilon r) \hat{\lambda}_\theta^a; F_{\varphi t}^a = (kJ/\epsilon r) \sin\theta \hat{\lambda}_\varphi^a; \\
 F_{\theta\varphi}^a &= [(k^2-1)/\epsilon] \sin\theta \cdot \hat{\lambda}_n^a; F_{\varphi n}^a = (k'/\epsilon) \sin\theta \cdot \hat{\lambda}_\theta^a; F_{n\theta}^a = (k'/\epsilon) \hat{\lambda}_\varphi^a, \quad (2.5.3)
 \end{aligned}$$

$$\phi^a = (H/\epsilon r) \hat{\lambda}_n^a, \quad (2.5.4)$$

onde J , k , H , são funções de r , e $\hat{\lambda}_n$, $\hat{\lambda}_\theta$, $\hat{\lambda}_\varphi$, são as componentes do vetor radial, ou,

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_n &= (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \\
 \hat{\lambda}_\theta &= (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta), \\
 \hat{\lambda}_\varphi &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0). \quad (2.5.5)
 \end{aligned}$$

As equações de Einstein-Yang-Mills-Higgs, como dadas em (1.3.15) a (1.3.17), são, para este caso,

$$\begin{aligned}
 2\delta'' - \frac{4}{r} \delta' - e^{2\delta} \Lambda = -\frac{k}{\epsilon^2} \left[e^{-2\delta} \left(\frac{J}{r}\right)^2 + 2e^{-2\delta} \frac{k^2 J^2}{r^4} + \frac{1}{2} e^{2\delta} L \right] \\
 - k\lambda e^{2\delta} V(\phi), \quad (2.5.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{4}{r} \delta' - 3\delta'^2 + e^{2\delta} \Lambda = \frac{k}{\epsilon^2} \left[e^{-2\delta} \left(\frac{J}{r}\right)^2 - 2e^{-2\delta} \frac{k^2 J^2}{r^2} + \frac{1}{2} e^{2\delta} L - \left(\frac{H}{r}\right)^2 \right] \\
 + k\lambda e^{2\delta} V(\phi), \quad (2.5.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2r^2\delta'' - 2r\delta' - r^2\delta'^2 + r^2 e^{2\delta} \Lambda = \frac{k}{\epsilon^2} \left[e^{-2\delta} \frac{k^2 J^2}{r^2} - e^{-2\delta} k^2 - e^{-2\delta} \frac{(k^2-1)^2}{r^2} \right. \\
 \left. - \frac{H^2 k^2}{r^2} + \frac{1}{2} r^2 e^{2\delta} L \right] + k\lambda e^{2\delta} r^2 V(\phi), \quad (2.5.8)
 \end{aligned}$$

$$\left[\lambda^2 \left(\frac{J}{\lambda} \right)' \right]' - 2 \frac{K^2 J}{\lambda} = 0, \quad (2.5.9)$$

$$K'' + K \frac{J^2}{\lambda^2} + \frac{K(1-K^2)}{\lambda^2} - e^{2\sigma} \frac{KH^2}{\lambda^3} = 0, \quad (2.5.10)$$

$$\left[e^{2\sigma} \lambda^2 \left(\frac{H}{\lambda} \right)' \right]' - 2 \frac{K^2 H}{\lambda} e^{2\sigma} - \frac{e^{4\sigma} \lambda}{\epsilon^2 \lambda} (H^3 - c^2 \lambda^2 H) = 0, \quad (2.5.11)$$

onde a função $L(\lambda)$ está relacionada com K , J , H , por,

$$L = e^{-4\sigma} \left[- \left(\frac{J}{\lambda} \right)'{}^2 - 2 \frac{K^2 J^2}{\lambda^4} + 2 \frac{K^{12}}{\lambda^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{\lambda^4} \right] + e^{-2\sigma} \left[\left(\frac{H}{\lambda} \right)'{}^2 + 2 \frac{K^2 H^2}{\lambda^4} \right]. \quad (2.5.12)$$

A constante c^2 , aparecendo em (2.5.11), relaciona-se com o valor esperado de vácuo do campo de Higgs (1.3.14), por,

$$c^2 = \epsilon^2 \frac{\mu^2}{\lambda} = \epsilon^2 \alpha^2 = \epsilon^2 \langle 0 | \phi^a \phi_a | 0 \rangle. \quad (2.5.13)$$

É conveniente substituir as eqs. (2.5.6) a (2.5.8) por combinações tais que não envolvam o potencial $V(\phi)$, temos,

$$2\delta'' - 2\delta'^2 = \frac{k}{\epsilon^2} \left[-2e^{-2\sigma} \frac{K^2 J^2}{\lambda^4} - 2e^{-2\sigma} \frac{K^{12}}{\lambda^2} - \left(\frac{H}{\lambda} \right)'{}^2 \right], \quad (2.5.14)$$

$$2\delta'' - 2\delta'^2 - 2\frac{\delta'}{\lambda} = \frac{k}{\epsilon^2} \left[e^{-2\sigma} \left(\frac{J}{\lambda} \right)'{}^2 - e^{-2\sigma} \frac{K^{12}}{\lambda^2} - \left(\frac{H}{\lambda} \right)'{}^2 - e^{-2\sigma} \frac{K^2 J^2}{\lambda^4} + e^{-2\sigma} \frac{(K^2 - 1)^2}{\lambda^4} + \frac{H^2 K^2}{\lambda^4} \right], \quad (2.5.15)$$

$$2\frac{\delta'}{\lambda} = \frac{k}{\epsilon^2} \left[-e^{-2\sigma} \left(\frac{J}{\lambda} \right)'{}^2 - e^{-2\sigma} \frac{K^2 J^2}{\lambda^4} - e^{-2\sigma} \frac{(K^2 - 1)^2}{\lambda^4} - 2e^{-2\sigma} \frac{K^{12}}{\lambda^2} - \frac{H^2 K^2}{\lambda^4} \right]. \quad (2.5.16)$$

Devido à complexidade das equações acima, tentamos en-

contrar soluções não-triviais, simplificando-as. Examinando a estrutura do Ansatz (2.5.2) a (2.5.4), vemos que escolhas não-triviais a serem feitas são: I) $K=0$; II) $J=0$, $K=A$, sendo A uma constante. Com estas restrições, as eqs. (2.5.9) a (2.5.11) e (2.5.14) a (2.5.16) não são independentes. Particularmente, a eq. (2.5.15) é sempre identicamente satisfeita, como pode ser notado das duas soluções apresentadas a seguir.

Caso I - $K=0$ - monopolo magnético no vácuo de Higgs.

A eq. (2.5.9) pode ser integrada diretamente, fornecendo,

$$J(r) = a + br, \tag{2.5.17}$$

onde a e b são constantes de integração.

A eq. (2.5.16) torna-se então,

$$\frac{(e^{2\sigma})'}{r} = - \frac{k}{\epsilon^2} \frac{(1+a^2)}{r^4}. \tag{2.5.18}$$

Após uma integração, tem-se,

$$e^{2\sigma} = \beta + \gamma \frac{(1+a^2)}{r^2}, \tag{2.5.19}$$

onde β é uma constante de integração e $\gamma = k/2\epsilon^2$.

Usando as eqs. (2.5.18) e (2.5.19), podemos escrever para a eq. (2.5.14),

$$- \frac{3\gamma}{r^4} \frac{1}{\beta + \frac{\gamma}{r^2}} + \frac{3\gamma^2}{r^6} \frac{1}{\left(\beta + \frac{\gamma}{r^2}\right)^2} = \gamma \left(\frac{H}{r}\right)^2. \tag{2.5.20}$$

Procurando obter uma solução tipo Bertotti-Robinson (92, 93, 94), fazemos $\beta=0$ na eq. (2.5.20), com o que seu lado esquerdo se anula e temos,

$$H = D r, \quad (2.5.21)$$

onde D é uma nova constante de integração.

A única equação a ser resolvida ainda é (2.5.11). Após substituir as eqs. (2.5.19) e (2.5.21), temos,

$$-\frac{\lambda}{\epsilon^2} \frac{\gamma^2}{r^2} (D^3 - c^2 D) = 0. \quad (2.5.22)$$

Uma solução não-trivial pode ser dada por,

$$D = \pm C. \quad (2.5.23)$$

Pode ser observado que esta solução corresponde ao mínimo do potencial de Higgs, eq. (1.3.13), que pode ser escrita como,

$$V(\phi) = \frac{1}{4} (\phi^a \phi_a - \alpha^2)^2 - \frac{1}{4} \alpha^4. \quad (2.5.24)$$

Assim, temos para a solução I, usando a eq. (2.5.13),

$$V^{(I)}(\phi) = \frac{1}{4} \left(\frac{C^2}{\epsilon^2} - \alpha^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \alpha^4 = -\frac{1}{4} \alpha^4. \quad (2.5.25)$$

Através de um cálculo direto, podemos verificar que $D_\mu \phi^a = 0$ para esta solução, o que significa, quando tomado em conjunto com a eq. (2.5.25), que as configurações de campo aqui

descritas, estão no vácuo de Higgs ⁽⁸¹⁾, uma vez que podemos definir como potencial de Higgs, o primeiro termo do lado direito da eq. (2.5.24). Neste caso, o tensor energia-momentum possui traço nulo e a constante cosmológica será também nula, de acordo com a interpretação usual. No caso geral, tomamos a eq. (2.5.24) como a definição do potencial de Higgs. Deste modo, retornando ao sistema original de equações (2.5.6) a (2.5.11), e substituindo a solução encontrada acima, temos que as eqs. (2.5.6) e (2.5.7) tornam-se idênticas a,

$$1 + \frac{k}{2\epsilon^2} \Lambda = 1 + a^2 - \frac{\lambda k^2}{8\epsilon^2} \alpha^4. \quad (2.5.26)$$

A eq. (2.5.8) torna-se,

$$-1 + \frac{k}{2\epsilon^2} \Lambda = -(1 + a^2) - \frac{\lambda k^2}{8\epsilon^2} \alpha^4. \quad (2.5.27)$$

Estas duas últimas equações, servem para determinar a e Λ , como funções dos parâmetros conhecidos k , ϵ , λ , α . A solução para o 1º caso tratado ($K=0$), pode ser finalmente escrita como ⁽⁹⁶⁾,

$$e^{2\sigma} = \frac{k}{2\epsilon^2} \frac{1}{r^2}; \quad H = \pm \epsilon \alpha r; \quad K=0; \\ J = b r; \quad \Lambda = -\frac{1}{4} k \lambda \alpha^4. \quad (2.5.28)$$

Uma caracterização local dos campos "elétrico" e "magnético", pode ser feita de uma maneira invariante de calibre, pelo tensor introduzido em (2.4.46), que pode ser escrito ⁽³⁴⁾,

$$f_{\mu\nu} = \hat{\phi}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{\epsilon} \epsilon_{abc} \hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c, \quad (2.5.29)$$

onde os $\hat{\phi}^a$ são os isovetores unitários de Higgs.

Calculando as componentes dos campos dados em (2.5.29), no sistema de tetradas ortonormal ⁽²⁴⁾, $f_{\mu\nu}$, teremos para a única componente não-nula,

$$B_{\hat{r}}^{(I)} = f_{\hat{\theta}\hat{\phi}}^{(I)} = -\frac{2\epsilon}{k}, \quad (2.5.30)$$

o que corresponde a um campo magnético constante, de um monopolo magnético.

Pode ser notado que esta solução é na verdade, abeliana, devido a que fazendo $K=0$, todas as componentes não-nulas dos campos $F_{\mu\nu}^a$ e ϕ^a estão alinhadas, ou seja,

$$F_{r\theta}^a = (J/\epsilon r) \hat{\lambda}_r^a; \quad F_{\theta\phi}^a = -\frac{1}{\epsilon} \sin\theta \cdot \hat{\lambda}_r^a; \quad \phi^a = (H/\epsilon r) \hat{\lambda}_r^a \quad (2.5.31)$$

A não-comutatividade dos potenciais é apenas aparente, e pode ser removida por uma transformação de calibre ⁽⁹⁵⁾, da forma $U_r = e^{i\sigma_a \hat{\lambda}_r^a} \equiv e^{i\sigma_r}$, onde as σ_a são as matrizes de Pauli ⁽⁹⁶⁾.

Caso II - $J=0$, $K=A$, com A uma constante - monopolo magnético fora do vácuo de Higgs.

As eqs. (2.5.10) e (2.5.16), fornecem diretamente,

$$e^{2\sigma} H^2 = 1 - A^2, \quad (2.5.32)$$

$$\frac{(e^{2\sigma})'}{r} = \frac{k}{\epsilon^2} \left[-\frac{(1-A^2)^2}{r^4} - e^{2\sigma} \frac{A^2 H^2}{r^4} \right], \quad (2.5.33)$$

de onde, após substituição de (2.5.32) em (2.5.31), teremos por

uma integração,

$$e^{2\delta} = \beta + \gamma \frac{(1-A^2)}{\lambda^2}, \quad (2.5.34)$$

onde as constantes de integração β e γ são as mesmas da eq. (2.5.19). Tomando $\beta=0$ na eq. (2.5.34), e substituindo na eq. (2.5.14), sendo $H(\lambda)$ dado por (2.5.32), satisfazê-mo-la identicamente, e temos,

$$H = \gamma^{-1/2} \lambda. \quad (2.5.35)$$

A eq. (2.5.11) pode ser então satisfeita se for dado por,

$$\gamma = \frac{A^2(2\epsilon^2 - \lambda) + \lambda}{(1-A^2)\lambda\alpha^2\epsilon^2}, \quad \lambda \neq 0, \quad A \neq 1. \quad (2.5.36)$$

Comparando (2.5.36) com $\gamma = k/2\epsilon^2$, temos para a constante A ,

$$A^2 = \frac{(k\alpha^2 - 2)\lambda}{2(2\epsilon^2 - \lambda) + k\alpha^2\lambda}, \quad \lambda \neq 0, \quad A \neq 1. \quad (2.5.37)$$

Observe-se que esta solução não corresponde ao mínimo do potencial de Higgs; usando a eq. (2.5.24), temos,

$$\sqrt{II}(\phi) = \frac{1}{4} \left[\frac{(1-A^2)\lambda\alpha^2}{A^2(2\epsilon^2 - \lambda) + \lambda} - \alpha^2 \right]^2 - \frac{1}{4} \alpha^4, \quad (2.5.38)$$

Da eq. (2.5.38) e do cálculo das derivadas covariantes internas $D_\mu \phi^a$, vemos que as configurações de campo relacionadas com esta solução não estão no vácuo de Higgs para $A \neq 0$, uma

vez que então $D_\mu \phi^a \neq 0$. A exemplo do que foi feito em relação à solução anterior, podemos agora voltar às eqs. (2.5.6) a (2.5.11), para determinar a constante cosmológica como uma função dos parâmetros conhecidos. As eqs. (2.5.6) e (2.5.7), após substituição desta última solução, tornam-se novamente idênticas, e temos,

$$1 + \frac{k}{2\epsilon^2} (1-A^2) \Lambda = 1 + A^2 + \frac{k\lambda}{2\epsilon^2} (1-A^2) \left(\frac{1}{k} - \alpha^2 \right). \quad (2.5.39)$$

A eq. (2.5.8) torna-se agora,

$$-1 + \frac{k}{2\epsilon^2} (1-A^2) \Lambda = -1 + A^2 + \frac{k\lambda}{2\epsilon^2} (1-A^2) \left(\frac{1}{k} - \alpha^2 \right). \quad (2.5.40)$$

As duas últimas equações, determinam trivialmente a constante cosmológica Λ . Podemos escrever para a forma final da segunda solução,

$$e^{2\sigma} = \frac{k}{2\epsilon^2} \frac{(1-A^2)}{r^2}; \quad H = \pm \epsilon \left(\frac{2}{k} \right)^{1/2} r; \quad K = A;$$

$$J = 0 \quad ; \quad \Lambda = -\frac{1}{2} \lambda \alpha^2, \quad (2.5.41)$$

onde A é dada pela eq. (2.5.37).

Podemos proceder ao cálculo dos campos "elétrico" e "magnético" no sistema de tetradas ortonormal, usando o tensor (2.5.29); temos para a única componente não-nula,

$$B_{\hat{\lambda}}^{(\text{II})} = f_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}^{(\text{II})} = -\frac{2\epsilon}{k(1-A^2)}, \quad (2.5.42)$$

o que é novamente o campo de um monopolo magnético.

Resta caracterizar a estrutura dos dois tipos de configurações dadas acima, assim como expressar a energia das mesmas e o campo gravitacional por elas criado. Antes de mais nada, é conveniente observar que as duas soluções são idênticas para $A=0$ ($\alpha^2=2/k$), uma vez que as componentes dos potenciais podem ser relacionadas por uma transformação de calibre, ou,

$$0 = A_x^{a(II)} = A_x^{a(I)} - D_x^{(I)} \varphi^a, \quad (2.5.43)$$

onde os φ^a são os parâmetros da transformação de calibre.

Substituindo em (2.5.43) os potenciais A_x^a das soluções encontradas, teremos,

$$\frac{b}{\epsilon} \hat{\lambda}_\lambda^a - \varphi^a |_\lambda + \epsilon \epsilon^{abc} \frac{b}{\epsilon} \hat{\lambda}_\lambda^b \varphi^c = 0. \quad (2.5.44)$$

A transformação de calibre que satisfaz a (2.5.44), pode ser dada por,

$$\varphi^a = t \frac{b}{\epsilon} \hat{\lambda}_\lambda^a, \quad (2.5.45)$$

A energia das configurações de calibre pode ser calculada de,

$$E = \int \sqrt{-g} T^t_t dr d\theta d\varphi. \quad (2.5.46)$$

Para as duas soluções tratadas acima, temos,

$$E^{(I)} = \frac{2\pi}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2\epsilon^2}\right) \frac{1}{\lambda_0}, \quad (2.5.47)$$

$$E^{(II)} = \frac{2\pi}{\epsilon^2} \left[1 - A^4 + \frac{\lambda}{2\epsilon^2} (1 - A^2)^2 (1 - \alpha^2 k) \right] \frac{1}{R_0}. \quad (2.5.48)$$

Deve ser observado que a escolha de um valor particular para o valor esperado de vácuo do campo de Higgs, ou seja, $\alpha^2 = 2/k$, coloca a 2ª solução também no vácuo de Higgs, desde que se defina como potencial de Higgs, o primeiro termo do lado direito da eq. (2.5.24). A 2ª solução transforma-se assim na 1ª. A solução I é vista ser então um caso particular abeliano da solução II. De acordo com a eq. (2.5.37), a cada valor esperado de vácuo do campo de Higgs, existe associado um valor de A que corresponde a uma solução tipo II.

Nas integrações que conduziram às eqs. (2.5.47) e (2.5.48), foram introduzidas cascas esféricas de raios R_0 e R_0 , respectivamente, onde se considera que as cargas magnéticas estejam distribuídas de modo uniforme. Estes raios são considerados ser da ordem do comprimento de Planck (79,89).

O critério de positividade para a densidade de energia, $T^t_t \geq 0$, fornece um limite superior para a constante de acoplamento do campo de Higgs, ou,

$$\lambda \leq 2\epsilon^2. \quad (2.5.49)$$

Para as componentes do tensor de Riemann, calculadas no sistema de tetradas ortonormal, temos,

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{(II)} = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{(II)} = - \frac{2\epsilon^2}{k(1-A^2)}. \quad (2.5.50)$$

As componentes correspondentes à solução I, devem ser conseguidas fazendo $A=0$ na eq. (2.5.50), como foi observado aci-

ma, em relação à correspondência de soluções. As eqs. (2.5.42) e (2.5.50), caracterizam as configurações de campo de monopolo magnético aqui encontradas.

Notemos finalmente, que a despeito da introdução de uma casca esférica R_0 , o que foi apresentado acima, foi uma solução que descreve configurações que não estão no vácuo de Higgs. É válido enfatizar que a consideração do campo gravitacional, no estudo de soluções das teorias de calibre, conduz a não permitir a extensão de afirmações usualmente feitas sobre finitude de energia, estrutura de singularidades, etc., das configurações de calibre no espaço chato. A solução II encontrada acima, possui energia finita, é tipicamente não-abeliana, e não está no vácuo de Higgs.

CAPÍTULO 3

COMENTÁRIOS E PERSPECTIVAS DE TRABALHO

O trabalho descrito nas páginas anteriores, envolveu em linhas gerais, técnicas de campos de calibre e alguns conceitos relacionados à validade da teoria "relatividade geral" de Einstein. Damos a seguir algumas observações feitas sobre secções escolhidas, assim como sugestões possíveis de trabalho na área.

3.1 - "ANALOGIAS" ENTRE OS CAMPOS DE CALIBRE E O CAMPO GRAVITACIONAL

É comum encontrar autores citando e mesmo enfatizando pretensas analogias entre os campos gravitacional e de calibre. Isto parece ser típico entre os que cuidam da perfeição externa, ou aparência das teorias em exposições que pretendem ser didáticas, sem terem tido qualquer contacto com os problemas práticos que surgem na aplicação das mesmas e que envolvem dificuldades conceituais consideráveis. Examinemos a título de exemplo, a estrutura das não-linearidades na teoria de gravitação de Einstein, e na teoria de Yang-Mills. Na primeira, podemos fazer uma aproximação de "campo fraco", ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ considerado pequeno, para muitos problemas importantes que ao primeiro exame não parecem permití-la. Co

mo exemplo, citemos que a expansão mencionada é possível na vizinhança de dois buracos negros de massas arbitrárias, desde que sua separação seja maior (em unidades $C=1$, $k=1$) que qualquer das massas ⁽⁹⁷⁾, ainda que na vizinhança imediata de cada buraco negro, a expansão não seja válida. Isto é devido à própria estrutura da teoria de gravitação de Einstein, uma vez que aqui as não-linearidades provém de termos como $\int_{\mu\beta}^{\alpha} \cdot \int_{\nu\alpha}^{\beta}$, que contém produtos de derivadas primeiras do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, e assim, se amortecem rapidamente. No caso do campo de Yang-Mills, as não-linearidades não envolvem produtos de derivadas primeiras, e são da forma,

$$f_{abc} A^{b\mu} A_{\nu|\mu}^c ; f_{abc} f^c_{de} A^{b\mu} A_{\mu}^d A_{\nu}^e. \quad (3.1.1)$$

Suponhamos que os potenciais A_{μ}^a , possuem o comportamento $(1/r^n)$, onde n é um nº positivo e r a coordenada radial; vemos que para $n=1$, os termos não-lineares possuem a mesma ordem de grandeza dos termos lineares na equação de campo, não importando a distância em que os mesmos são calculados. Lembremos que $(1/r)$ é a dependência dos potenciais em algumas soluções apresentadas no capítulo 2. Estas constituem portanto, casos em que não é permitido fazer qualquer aproximação de campo fraco, em "analogia" ao tratamento das equações de Einstein. Ao falarmos de analogias entre essas teorias, é necessário então ter em conta essas observações.

A teoria de gravitação de Einstein pode ser reformulada como uma teoria de calibre, mas de um tipo especial. O grupo de simetria é o das translações infinitesimais das coordenadas.

Quando só consideramos translações constantes, o grupo é abeliano, mas tornar-se-á automaticamente não-abeliano, quando as translações dependerem das coordenadas, ou seja, quando forem locais. Nas teorias de calibre tipo Yang-Mills, se partimos de um grupo abeliano para grupo de simetria, após considerar as transformações de calibre como locais, o grupo continua a ser abeliano. Assim, devemos partir de um grupo não-abeliano, de modo a construir uma teoria de calibre não-abeliano. Embora isto possa parecer evidente para teorias do tipo Yang-Mills, não o é absolutamente para a teoria de Einstein.

3.2 - O PROBLEMA DE FIXAÇÃO DE CALIBRE E AS IDENTIDADES DE BIANCHI

Um outro ponto que sempre carece de explanação suficiente, é o de fixação de calibre para teorias que contêm grupos de simetria, como as de Yang-Mills ou a de Einstein. De modo a apresentar tal problema, iremos rever certos desenvolvimentos do 1º capítulo.

Para uma teoria Yang-Mills com grupo de simetria compacto e semi-simples G , a ação pode ser escrita,

$$S_{ym} = -\frac{1}{4} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x, \quad (3.2.1)$$

onde $\text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ é o traço tomado em relação ao produto de matrizes da representação escolhida de G , com $F_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} - i\epsilon [A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = A_\mu^a T_a$, etc... Variando a ação (3.2.1) em relação a A_μ , teremos para as equações de campo,

$$\frac{\delta S_{\text{ym}}}{\delta A_{\mu}} = -F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + i\epsilon [A_{\nu}, F^{\mu\nu}] = -D_{\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.2)$$

onde D_{ν} é a derivada covariante interna introduzida em (1.1.69).

As condições de calibre a serem impostas, como novas equações, aumentam o número de equações a serem satisfeitas pelas possíveis configurações dos campos, o que induz a afirmar que estas equações não serão todas independentes⁽⁹⁸⁾. É evidente que o que se entende por condição de fixação de calibre, é uma restrição imposta na evolução das configurações de campo, e portanto, imposta diretamente na lagrangiana da teoria, e não uma simples escolha de condições a serem satisfeitas por potenciais ou campos, uma vez já deduzidas as equações como em (3.2.2). Um exemplo específico pode elucidar mais as afirmações acima. Consideremos as componentes dos potenciais A_{μ}^{\sim} , no sistema do cone de luz, A_{+} , A_{-} , A_i , $i=1, 2$, onde $A_{\pm} = A_0 \pm A_3$, impondo na lagrangiana,

$$A_{+} = 0, \quad (3.2.3)$$

o que sempre pode ser obtido de uma transformação de calibre adequada.

Segue-se que não podemos escrever diretamente todas as eqs. (3.2.2), uma vez que não definimos a variação em relação a A_{+} devido a (3.2.3). No entanto, pode-se demonstrar que as outras equações ou $\delta S_{\text{ym}}/\delta A_{\hat{\mu}} = 0$, $\hat{\mu} = -, i$, tomadas em conjunto com as identidades de Bianchi da teoria, expressas por $D_{\mu} D_{\nu} F^{\mu\nu} = 0$, permitem escrever,

$$\partial_{+} \left(\delta S_{\text{ym}} / \delta A_{+} \right) \Big|_{A_{+}=0} = 0. \quad (3.2.4)$$

É no sentido da eq. (3.2.4) que podemos compreender o processo de variação em relação a A_+ , e mostrar que o mesmo está relacionado com as condições iniciais e de contorno presentes na teoria. Note-se que se tais condições forem especificadas, podemos definir um operador não-local, $(\partial_+)^{-1}$, tal que sua ação em uma função arbitrária $f(x^+)$, é dada por ⁽⁹⁹⁾,

$$(\partial_+)^{-1} f(x^+) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(x^+ - y^+) f(y^+) dy^+. \quad (3.2.5)$$

Assim, o problema de recobrar a equação $\delta S_{\text{Sym}} / \delta A_+ = 0$, está associado com a possibilidade de definição do operador $(\partial_+)^{-1}$, ou seja, de especificar as condições de contorno.

Qualquer escolha de calibre feita, deve poder ser obtida de uma transformação de calibre realizada em uma configuração dada. Como é conhecido (eq. (1.3.6)), os potenciais transformam-se como,

$$\delta A_\mu = D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i \epsilon [A_\mu, \phi], \quad (3.2.6)$$

onde ϕ é um isovetor infinitesimal arbitrário, parâmetro da transformação. A variação em relação a A_μ na ação (3.2.1), produz,

$$\delta S_{\text{Sym}} = \int T_n (F^{\mu\nu} (\delta A_{\mu\nu} + i \epsilon [\delta A_\mu, A_\nu])) d^4x. \quad (3.2.7)$$

Substituindo em (3.2.7) a transformação genérica (3.2.6), integrando por partes e usando a propriedade cíclica do traço, teremos,

$$\delta S_{\text{Sym}} = - \int T_n (D_\nu F^{\mu\nu} D_\mu \phi) d^4x. \quad (3.2.8)$$

Podemos aqui substituir a segunda igualdade em (3.2.6), integrar por partes, e usar novamente a propriedade cíclica do traço no termo que contém o comutador, obtendo,

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{Sym}} &= -\int \text{Tr} \left(-\partial_\mu D_\nu F^{\mu\nu} \phi + i\epsilon [A_\mu, D_\nu F^{\mu\nu}] \phi \right) d^4x \\ &= \int \text{Tr} \left(D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} \phi \right) d^4x. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Da arbitrariedade de ϕ , e da invariância por transformações de calibre como (3.2.6), segue-se,

$$D_\mu \frac{\delta S_{\text{Sym}}}{\delta A_\mu} = -D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.10)$$

que corresponde à identidade de Bianchi da teoria.

Podemos agora analisar a imposição de calibre $A_+ = 0$. Desde que todas as equações $\delta S_{\text{Sym}} / \delta A_\mu$; $\mu = -, i$, são válidas, teremos de (3.2.10),

$$D_\mu \frac{\delta S_{\text{Sym}}}{\delta A_\mu} \Big|_{A_+=0} = \partial_+ \frac{\delta S_{\text{Sym}}}{\delta A_+} \Big|_{A_+=0} = 0. \quad (3.2.11)$$

A ação pode então ser escrita em termos dos modos físicos transversos A_i , $i=1, 2$, usando o operador (3.2.5), uma vez discutidas as condições de contorno necessárias.

O mesmo procedimento pode ser seguido no caso da teoria de gravitação de Einstein, com ação,

$$S_G = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x. \quad (3.2.12)$$

A ação (3.2.12) deve ser invariante por transformações

de coordenadas tais como (2.2.32). As transformações correspondentes no tensor métrico $g_{\mu\nu}$, escrevem-se,

$$\delta g_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu||\nu} + \xi_{\nu||\mu}, \quad (3.2.13)$$

onde ξ_μ são vetores de Killing arbitrários, caracterizando as classes de isometrias.

Variando a ação S_G em relação a $g_{\mu\nu}$, usando a expressão de $R_{\mu\nu}$, (1.4.73), teremos, após integração por partes e uso de $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta S_G = -\frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x, \quad (3.2.14)$$

onde $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$.

Substituindo a eq. (3.2.13) em (3.2.14), teremos,

$$\delta S_G = -\frac{1}{k} \int \sqrt{-g} G^{\mu\nu} (\xi_{\mu||\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \xi_\alpha) d^4x. \quad (3.2.15)$$

Integrando por partes e tendo em conta que $G^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, temos,

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \frac{1}{k} \int [(\sqrt{-g} G^{\mu\nu})_{||\nu} + \sqrt{-g} G^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}] \xi_\mu d^4x \\ &= \frac{1}{k} \int \sqrt{-g} G^{\mu\nu}_{||\nu} \xi_\mu d^4x, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Usando a arbitrariedade de ξ_μ , podemos escrever as identidades de Bianchi contraídas para esta teoria, ou,

$$G^{\mu\nu}_{||\nu} = 0. \quad (3.2.17)$$

Note-se de passagem, comparando as eqs. (3.2.6) e (3.2.13), assim como (3.2.9) e (3.2.16), a origem da expressão "vetor de Killing interno", usada nos dois capítulos anteriores para isovetores como ϕ^a .

A imposição de condições de calibre sobre as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, no caso de calibre do cone de luz, costuma ser,

$$g_{+i} = 0 ; g_{++} = 0 ; g_{+-} = e^{\varphi} ; i = 1, 2, \quad (3.2.18)$$

onde φ é uma função arbitrária. Em geral podemos impor D condições em uma teoria de gravitação tipo Einstein em D dimensões. A quarta condição imposta em (3.2.18), é adicional, as primeiras três sendo geralmente usadas para impor o calibre do cone de luz. A função φ é então escolhida para integrar convenientemente as equações de vínculo, após aplicação de operadores tais como (3.2.5). O desenvolvimento subsequente deste assunto, é bastante conhecido ^(99,100). A ação final da teoria é escrita em termos dos campos físicos, correspondendo aos 2 graus de liberdade do graviton ^(100,101). Um preço geralmente pago é que esta ação final contém termos não-locais, devido ao uso dos operadores (3.2.5), na eliminação dos campos não-físicos.

Substituindo nas identidades de Bianchi, todas as equações de campo correspondentes a componentes de $g_{\mu\nu}$ que não estão prefixadas em (3.2.18), assim como as próprias condições (3.2.18), o resultado que se segue é que sempre podemos tomar os dados iniciais em superfícies nulas como $\chi^+ = 0$. O uso de superfícies nulas para especificação dos dados iniciais ⁽¹⁰²⁾, é motivado pelo

fato de que nem sempre podemos contar com superfícies tipo espaço (space-like) sem singularidades (24,102).

O problema de valor inicial pode ser esquematizado (103) a partir das identidades (3.2.17), escrevendo-as na forma,

$$G^{+M}_{|+} = -G^{\hat{\nu}M}_{|\hat{\nu}} - G^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\nu}^M - G^{\rho M}\Gamma_{\rho\nu}^{\nu}. \quad (3.2.19)$$

Note-se que o lado direito da última equação não contém derivadas terceiras da métrica em relação a x^+ , e assim, no lado esquerdo, G^{+M} não pode conter derivadas segundas da métrica em relação a x^+ . Desta forma, as equações,

$$G^{+M} = k T^{+M}, \quad (3.2.20)$$

correspondentes às componentes escolhidas em (3.2.18), podem ser usadas como as equações de valor inicial ou equações de vínculo dos 12 valores iniciais $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_+$, $\hat{\mu}, \hat{\nu} = -, i$, tomados sobre a superfície $x^+ = 0$.

O fato de que possamos escolher 4 condições como as dadas em (3.2.18), pode também ser constatado, considerando a derivada em relação a x^+ das equações de vínculo, ou,

$$G^{+M}_{|+} = k T^{+M}_{|+}. \quad (3.2.21)$$

Note-se que estas equações são independentes das que foram dadas em (3.2.20), uma vez que também podemos especificar $T^{+M}_{|+}$ sobre a superfície, independentemente dos vínculos já considerados. Temos então entre as 12 condições de valor inicial, $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_+$, 8 equações de vínculo, (3.2.20) e (3.2.21),

sendo que termos da forma $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_{+|+}$ em (3.2.21), são eliminados com o uso das equações dinâmicas $G^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = k T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Daqui segue-se então a possibilidade de escolha de 4 condições como (3.2.18), que podem ser interpretadas como originárias de dois campos e de suas primeiras derivadas em relação a x^+ , correspondendo aos 2 graus físicos de liberdade do campo gravitacional.

O estudo do problema de valor inicial para teorias com grupos de calibre, pode ser continuado em teorias modernas de Kaluza-Klein e de Supergravidade ⁽¹⁰⁴⁾. Particularmente importante é a especificação de condições de calibre em superfícies características de um espaço riemanniano de dimensão ímpar, como isto conduz a estudar a propagação e estrutura de características em tais espaços ⁽¹⁰⁵⁾, que é de grande valor na identificação dos modos físicos, e na construção de lagrangianas finitas em todas as ordens de perturbação.

3.3 - TEORIAS KALUZA-KLEIN E VALIDADE DA TEORIA CLÁSSICA DE EINSTEIN COMO TEORIA COSMOLÓGICA. O PROGRAMA DE UNIFICAÇÃO GEOMÉTRICA

A teoria de Einstein tem resistido a todos os testes clássicos e semi-clássicos, assim como tem fornecido previsões que concordam extraordinariamente com as experiências desenvolvidas nas últimas décadas ⁽¹⁰⁶⁾. Os testes mencionados ou previsões verificadas sempre se referem à estrutura de grande escala do universo; severas modificações são esperadas na construção de uma teoria válida em escalas da ordem do comprimento de Planck.

Na secção (2.5) desta monografia, para que se obtivessem energias finitas das configurações de campo, foram introduzidos raios R_0 e R_1 , considerados ser da ordem do comprimento de Planck. Uma das esperanças que se cultivavam ao trabalhar com campos de Higgs, era que na presença dos mesmos obter-se-iam configurações não singulares, sem apelar para o "Deus ex Machina" ⁽⁹⁶⁾ de considerar a teoria como válida exclusivamente para regiões de ordem superior a 10^{-33} cm. Assim encerrava-se toda e qualquer discussão, falando da inaplicabilidade da teoria de Einstein em regiões ultramicroscópicas. Teorias originais de Kaluza e Klein, no único contexto de resolução de equações de Einstein em número maior de dimensões, em nada contribuem para modificar esta situação, uma vez que persistem os problemas de quebra de causalidade, não definição do sinal de energia, estrutura de singularidades, etc., existentes em versões quadridimensionais, isto sem mencionar severos problemas de renormalização, de qualquer maneira importantes nas escalas de comprimento em que se pretende estender a teoria de Einstein, ou quaisquer outras dela derivadas ⁽¹⁰⁷⁾.

Uma ressalva deve ser feita com relação ao problema de definição do sinal de energia, que foi resolvido no contexto de gravitação euclidiana quadridimensional ^(108,109,110), assim como usando idéias da teoria clássica de supergravidade ^(107,111).

É interessante conduzir a discussão de teorias cosmológicas de número maior de dimensões, sem tomar em consideração as equações de Einstein ⁽¹¹²⁾. As propriedades topológicas da variedade riemanniana escolhida, podem nos fazer analisar e conhecer a estrutura de singularidades, assim como possíveis quebras de causalidade em regiões do universo acessíveis à experimentação física.

Em um contexto diferente, algo que poderia constituir um exercício interessante, seria a procura de modelos em que as quebras de causalidade se dessem nas regiões ultramicroscópicas referidas acima, assim como testar modelos de $(4+N)$ dimensões como candidatos a representar eras cosmológicas próximas à atual. Uma sugestão para iniciar, é o modelo $(4+2)$ com campos de Yang-Mills e Higgs, e dado pelos Ansatzes,

$$d\underset{(4+2)}{s}^2 = -dt^2 + R_3^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + R_2^2(t)(d\eta^2 + \sin^2 \eta d\xi^2), \quad (3.3.1)$$

$$A_t^a = J(t) \hat{\lambda}_t^a; \quad A_r^a = 0; \quad A_\theta^a = K(t) \hat{\lambda}_\varphi^a; \quad A_\varphi^a = L(t) \sin \theta \cdot \hat{\lambda}_\theta^a;$$

$$A_\eta^a = M(t) \hat{\lambda}_\xi^a; \quad A_\xi^a = N(t) \sin \eta \hat{\lambda}_\eta^a, \quad (3.3.2)$$

$$\phi^a = H(t) \hat{\lambda}_r^a, \quad (3.3.3)$$

onde $\hat{\lambda}_t$, $\hat{\lambda}_\theta$, e $\hat{\lambda}_\varphi$, são os vetores unitários dados em (2.5.5), e $\hat{\lambda}_\xi$, $\hat{\lambda}_\eta$, os análogos de $\hat{\lambda}_\varphi$, $\hat{\lambda}_\theta$, para as dimensões extras.

A ação da teoria é dada por,

$$S_{4+2} = \int \sqrt{-g_6} \left[\frac{1}{2k} (R_6 - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{AB}^a F_a^{AB} - \frac{1}{2} D_A \phi^a D^A \phi_a \right] d^6x, \quad (3.3.4)$$

onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

É evidente que o modelo esquematizado acima, corresponde a modificações na teoria Kaluza-Klein original, pois conside-

ra a presença de outros campos na era cosmológica a ser descrita, de natureza diferente da do campo gravitacional e com ele interagindo. Isto não constituiria dificuldade séria de interpretação, em termos da evolução do universo, uma vez que sempre poderíamos tentar caracterizar cada era cosmológica com o tipo predominante de partículas nela existente e seus campos associados, escrevendo uma ação correspondente que contenha todos esses campos, como foi feito em (3.3.4). O problema com esse programa é que as dúvidas de interpretação com relação às regiões ultramicroscópicas referidas anteriormente, persistem. É conhecido o fato que teorias Kaluza-Klein na forma em que foram formuladas, não introduzem e nem explicam o surgimento de campos spinoriais, e portanto não podem explicar interações na matéria na ordem de distâncias do comprimento de Planck, onde se supõe ser a matéria spinorial preponderante. Consciência explícita de tais dificuldades, leva a reformular o programa de Kaluza-Klein-Rainich de unificação geométrica de forma a introduzir e explicar a presença de fermions no universo⁽¹¹³⁾. Consideração de soluções exatas e suas implicações cosmológicas, para teorias de supergravidade, fundamentalmente a teoria $N=8$, são candidatas à melhor descrição física dos processos fundamentais em todas as escalas de comprimento na era cosmológica presente. Sabemos que supergravidade não tem problemas na definição do sinal de energia, sabemos que ela é mais finita que a teoria de Einstein; resta demonstrar que ela é completamente finita, e que pode fornecer uma solução aos problemas da existência de singularidades e da quebra de causalidade, encontrados na teoria de gravitação de Einstein. Esta última revela-se sem dúvida a melhor teoria na descrição de larga escala do estado atual do universo; extrapolações da mesma para regiões

ultramicroscópicas é que quase sempre são errôneas.

Do ponto de vista de evolução da parte do universo em que vivemos, é razoável que possamos chegar a eras em que a teoria de Einstein seja ainda melhor na descrição de sua estrutura, e satisfaça todos os testes a ela impostos com ainda maior precisão. Podemos também estar evoluindo para situações em que a teoria comece apresentando suas primeiras discordâncias graves, mesmo nos testes elementares clássicos. De qualquer modo, dado o intervalo de tempo cosmológico em que a teoria de Einstein pode ser considerada válida, e seguramente estamos vivendo dentro da melhor parte deste intervalo, é necessário procurar teorias que descrevam o comportamento da matéria em regiões ultramicroscópicas, que sejam mais finitas que a teoria de Einstein, que sejam curadas dos problemas acima referidos, a ela inerentes, que forneçam explicações tão concludentes para problemas de grande escala como ela o faz, e que sejam tão belas e cientificamente excitantes como ela é. Teorias de supergravidade ou Kaluza-Klein modificadas de forma a incluir fermions são as melhores candidatas de que dispomos para preencher essas condições, e ao que tudo indica, devem ocupar pesquisadores até o fim do século.

O conteúdo das páginas 151 e 153, no que concerne ao uso de teorias generalizadas de calibre para resolver problemas fundamentais de existência de singularidades, quebra de causalidade e descrição de fermions (quais) é ainda especulativo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - N.N.Bogoliubov, D.V.Shirkov - "Introduction to the Theory of Quantized Fields", 3rd. edition, Wiley-Interscience Publ. (1980), p.79.
- (2) - W.Drechsler, M.E.Mayer - "Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories", Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag (1977), p.60.
- (3) - R.P.Mondaini - "Princípios Elementares de Mecânica Quântica"- Parte I - monografia do Instituto de Física U.F. R.J. (1982), p.226.
- (4) - L.S.Pontryagin - "Topological Groups", 2nd. edition, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (1977), p.139.
- (5) - E.S.Abers, B.W.Lee - "Gauge Theories", Phys.Reports 9C (1973) 1.
- (6) - W.Marciano, H.Pagels - "Quantum Chromodynamics", Phys.Reports 36C (1978) 137.
- (7) - G.Rosen - "Formulation of Classical and Quantum Dynamical Theories" - Academic Press (1969), p.96.
- (8) - A.Hanson, T.Regge, C.Teitelboim - "Constrained Hamiltonian Systems" - Accademia Nazionale dei Lincei (1976), p. 92.
- (9) - P.Ramond - "Field Theory- A Modern Primer" - The Benjamin-Cummings Publ.Co. (1981), p. 302.
- (10) - R.P.Mondaini - "Consequences of Temporal and Axial Gauge Fixing" - preprint C.B.P.F. A0040/79, (1979).
- (11) - R.Utiyama - "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction", Phys.Rev. 101 (1956) 1597.
- (12) - M.Ikeda, Y.Miyachi - "On an Extended Framework for the Description of Elementary Particles", Prog.Theor.Phys. 16 (1956) 537.
- (13) - E.Cartan - "Leçons sur la Theorie des Espaces a Connexion Projective" - Cahiers Scientifiques, Fascicule XVII, Gauthier-Villars (1937) p. 112.

- (14) - V.M.Nikolaenko - "Higgs Mesons in the Gauge Gravitation", Theor.Math.Phys. 42 (1980) 195.
- (15) - A.D.Linde - "Phase Transitions in Gauge Theories and Cosmology", Rep.Prog.Phys. 42 (1979) 389.
- (16) - R.P.Mondaini - "Spontaneous Symmetry Breaking as the Source of Gödel-like Cosmological Models" - preprint KCL, Dept. of Mathematics, July 1983.
- (17) - R.P.Mondaini, M.M.Som - "Conformal Symmetry Breaking and Gödel-like Cosmological Models" - preprint I.F.U.F.R.J., novembro 1983.
- (18) - R.Kerner - "Generalization of the Kaluza-Klein Theory for an Arbitrary Non-Abelian Gauge Group", Ann.Inst.Henri Poincaré IX (1968) 143.
- (19) - Y.M.Cho, P.G.O.Freund - "Non-Abelian Gauge Fields as Nambu-Goldstone Fields", Phys.Rev.D12 (1975) 1711.
- (20) - A.Chodos, S.Detweiler - "Where has the Fifth Dimension gone?", Phys.Rev.D21 (1980) 2167.
- (21) - P.G.O.Freund - "Kaluza-Klein Cosmologies" - preprint Chicago University, E.F.I. 82-24 (1982).
- (22) - Y.M.Cho - "Higher-Dimensional Unifications of Gravitation and Gauge Theories", J.Math.Phys.16 (1975) 2029.
- (23) - Y.M.Cho, P.S.Jang - "Unified Geometry of Internal Space with Space-Time", Phys.Rev.D12 (1975) 3789.
- (24) - C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler - "Gravitation" - W.H. Freeman and Co. (1970), San Francisco, p.p. 210, 232, 239, 277; 461; 554.
- (25) - G.Y.Rainich - "Electrodynamics in General Relativity", Trans.Amer.Math.Soc. 27 (1925) 106.
- (26) - C.W.Misner, J.A.Wheeler - "Classical Physics as Geometry - Gravitation, Electromagnetism, Unquantized Charge, and Mass as Properties of Curved Empty Space", Ann.Phys.(NY) 2 (1957) 525.
- (27) - E.W.Mielke - "On Pseudoparticle Solutions in Yang's Theory of Gravity", Gen.Rel.Grav. 13 (1981) 175.
- (28) - C.N.Yang - "Integral Formalism for Gauge Fields", Phys.Rev.Lett. 33 (1974) 445.
- (29) - R.Jackiw - "Quantum Meaning of Classical Field Theory", Rev.Mod.Phys. 49 (1977) 681.

- (30) - R.P.Mondaini, N.O.Santos - "Maxwellian Yang-Mills Fields and Rainich Geometry" - preprint I.F.U.F.R.J., janeiro 1983.
- (31) - H.Bacry, J.Nuyts - "Pure Classical SU(2) Yang-Mills Theory with Potentials Invariant under a U(1) Gauge Subgroup" Nucl.Phys.B151 (1979) 469.
- (32) - L.F.Abbott, S.Deser - "Charge Definition in Non-Abelian Gauge Theories", Phys.Lett.B116 (1982) 259.
- (33) - N.S.Manton - "The Force between 't Hooft-Polyakov Monopoles", Nucl.Phys.B126 (1977) 525.
- (34) - G.'t Hooft - "Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories", Nucl.Phys.B79 (1974) 276.
- (35) - K.Yano - "The Theory of Lie Derivatives and its Applications" - North-Holland Publ.Co., Amsterdam (1955),p.217.
- (36) - H.Michalski, J.Wainwright - "Killing Vector Fields and the Einstein-Maxwell Field Equations in General Relativity", Gen.Rel.Grav. 6 (1975) 289.
- (37) - J.R.Ray, E.L.Thompson - "Spacetime Symmetries and the Complexion of the Electromagnetic Field", J.Math. Phys. 16 (1975) 345.
- (38) - S.Schlieder - "Some Remarks on Charges and their Conservation in a Classical SU(2) Yang-Mills Theory", Nuovo Cimento 63A (1981) 137.
- (39) - H.Loos - "Gauge Field of a Point Charge", J.Math.Phys. 8 (1967) 1870.
- (40) - C.A.Uzes - "Internal Charge of the Gauge Field", Ann.Phys. 50 (1968) 534.
- (41) - J.Arafune, P.G.O.Freund, C.J.Goebel - "Topology of Higgs Fields", J.Math.Phys. 16 (1975) 433.
- (42) - F.Corrigan, D.Fairlie - "Scalar Field Theory and Exact Solutions to a Classical SU(2) Gauge Theory", Phys.Lett. B67 (1977) 69.
- (43) - A.Nisbet - "Hertzian Electromagnetic Potentials and Associated Gauge Transformations", Proc.Roy.Soc.Lond. 231A (1955) 250.
- (44) - R.P.Treat - "Plane Non-Abelian Yang-Mills Waves", Nuovo Cimento 6A (1971) 121.
- (45) - S.Coleman - "Non-Abelian Plane Waves", Phys.Lett. 70B

- (1977) 59.
- (46) - A.H.Taub - "Empty Space-Times admitting a Three Parameter Group of Motions", Ann.Math. 53 (1951) 472.
- (47) - P.A.Amundsen, Ø.Grøn - "General Static Plane-Symmetric Solutions of Einstein-Maxwell Equations", Phys.Rev. D27 (1983) 1731.
- (48) - J.L.Synge - "Relativity - The General Theory" - North-Holland (1960), p. 360.
- (49) - A.Lichnerowicz - "Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme" - Masson (1955), p. 51.
- (50) - R.Rajaraman - "Some Non-Perturbative Semi-Classical Methods in Quantum Field Theory (A Pedagogical Review)", Phys.Reports 21C (1975) 227.
- (51) - R.P.Mondaini - "A Yang-Mills Plane Wave vs. Plane Symmetry", Nuovo Cimento 68B (1982) 315.
- (52) - H.Bondi, F.A.E.Pirani, I.Robinson - "Gravitational Waves in General Relativity III. Exact Plane Waves", Proc.Roy. Soc.Lond. A251 (1959) 519.
- (53) - A.P.Lightman, W.H.Press, R.H.Price, S.A.Teukolsky - "Problem Book in Relativity and Gravitation" - Princeton Univ. Press (1975), p. 303.
- (54) - D.Kramer, H.Stephani, E.Herlt, M.Mac Callum - "Exact Solutions of Einstein Field Equations" - Cambridge Univ. Press (1980), p. 353.
- (55) - V.D.Zakharov - "Gravitational Waves in Einstein's Theory" - Halsted Press, (1973), p. 53.
- (56) - C.R.Oh, R.Teh - preprint CERN, TH3276, April 1982.
- (57) - S.Patnaik - "Einstein-Maxwell Fields with Plane Symmetry. I", Proc.Camb.Phil.Soc. 67 (1970) 127.
- (58) - W.Israel - "Event Horizons in Static Eletrovac Space-Times", Comm.Math.Phys. 8 (1968) 245.
- (59) - G.T.Carlson, J.L.Safko - "An Investigation of Some of the Kinematical Aspects of Plane Symmetric Space-Times", J. Math.Phys. 19 (1978) 1617.
- (60) - R.P.Mondaini - "Fictitious Yang-Mills Fields in a Plane Symmetric Universe", Phys.Lett. 93A (1982) 61.
- (61) - P.K.Chanda, D.Ray - "On the Einstein-Yang-Mills Field Equations in a Plane Symmetric Universe", Phys.Lett. 100A

- (1984) 400.
- (62) - A.Banerjee, N.Chakrabarty - "On Plane Symmetric Einstein Maxwell Fields", J.Math.Phys. 18 (1977) 265.
- (63) - M.Kalb - "Time-Independent Yang-Mills Statics", Phys.Rev. D18 (1978) 2909.
- (64) - J.R.Morris - "Sourceless Static Yang-Mills Systems", Phys. Rev. D23 (1981) 556.
- (65) - P.Yasskin - "Solutions for Gravity coupled to Massless Gauge Fields", Phys.Rev. D12 (1975) 2212.
- (66) - R.P.Mondaini, N.O.Santos - "Solutions of Einstein-Yang-Mills Equations with Plane Symmetry", J.Math.Phys. 24 (1983) 2635.
- (67) - S.D.Majumdar - "A Class of Exact Solutions of Einstein's Field Equations", Phys.Rev. 72 (1947) 390.
- (68) - A.Das - "A Class of Exact Solutions of certain Classical Field Equations in General Relativity", Proc.Roy.Soc. 267A (1962) 1.
- (69) - B.Julia, A.Zee - "Poles with both Magnetic and Electric Charges in Non-Abelian Gauge Theory", Phys.Rev. D11 (1975) 2227.
- (70) - M.Y.Wang - "A Solution of Coupled Einstein-SO(3) Gauge Field Equations", Phys.Rev. D12 (1975) 3069.
- (71) - M.Kasuya, M.Kamata - "An Exact Dyon Solution with the Reissner-Nordström Metric", Nuovo Cimento 66B (1981) 75.
- (72) - R.P.Mondaini, N.O.Santos - "The Weyl-Majumdar Relation in Einstein-Yang-Mills Theory", Prog.Theor.Phys. 68 (1982) 1780.
- (73) - R.P.Mondaini, N.O.Santos - "Axially Symmetric Gauge Fields of Magnetic Monopoles", Prog.Theor.Phys. 69 (1983) 1548.
- (74) - R.Gautreau, R.B.Hoffman, A.Armenti Jr. - "Static Multi-particle Systems in General Relativity", Nuovo Cimento, 7B (1972) 71.
- (75) - J.Carminati - "An Investigation of Axially Symmetric Electrovac Solutions", Gen.Rel.Grav. 13 (1981) 1185.
- (76) - G.E.Tauber - "The Gravitational Field of Electric and Magnetic Dipoles", Can.J.Phys. 35 (1957) 477.
- (77) - W.B.Bonnor - "A Three Parameter Solution of the Static

- Einstein-Maxwell Equations", J.Phys. A12 (1979) 853.
- (78) - M.Kasuya - "An Exact Rotating Julia-Zee Dyon Solution with the Kerr-Newman Metric", Phys.Lett.103B (1981) 353.
- (79) - M.Kasuya - "Gravitating Julia-Zee Dyon and the Cosmological Term", Gen.Rel.Grav. 14 (1982) 293.
- (80) - M.K.Prasad, C.M.Sommerfield - "Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon", Phys. Rev.Lett. 35 (1975) 760.
- (81) - P.Goddard, D.I.Olive - "Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories", Rep.Prog.Phys. 41 (1978) 1357.
- (82) - D.I.Olive - "Monopoles in Quantum Field Theory" - World Scientific Publ.Co. (1982), p. 161.
- (83) - T.Lewis - "Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields", Proc.Roy.Soc. A136 (1932) 176.
- (84) - W.J.Van Stockum - "The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry", Proc.Roy.Soc.Edinburgh 57 (1937) 135.
- (85) - N.Arbex, M.Som - "Stationary Cylindrically Symmetric Electrovac Fields", Nuovo Cimento 13B (1973) 49.
- (86) - N.O.Santos, R.P.Mondaini - "Rigidly Rotating Relativistic Generalized Dust Cylinder", Nuovo Cimento 72B (1982) 13.
- (87) - R.P.Mondaini - "Cylindrically Symmetric Einstein-Yang-Mills-Higgs Configurations" - preprint KCL, Dept. of Mathematics, June 1983 - a ser publicado em Gen.Rel.Grav.
- (88) - M.K.Prasad, P.Rossi - "Construction of Exact Multimonopole Solutions", Phys.Rev. D24 (1981) 2182.
- (89) - F.A.Bais, R.J.Russel - "Magnetic-Monopole Solution of Non-Abelian Gauge Theory in Curved Spacetime", Phys. Rev. D11 (1975) 2692.
- (90) - J.M.Cerveró, P.G.Estévez - "Induced Gravity and Cosmology", Ann.Phys.(NY) 142 (1982) 64.
- (91) - P.Forgács, N.S.Manton - "Space-Time Symmetries in Gauge Theories", Comm.Math.Phys. 72 (1980) 15.
- (92) - D.Lovelock - "A Spherically Symmetric Solution of the Maxwell-Einstein Equation", Comm.Math.Phys. 5 (1967) 257.

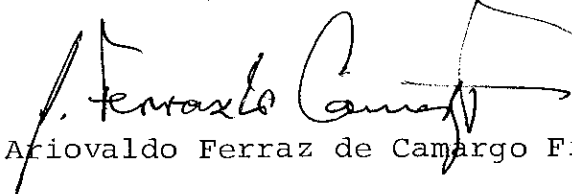
- (93) - P.Dolan - "A Singularity Free Solution of the Maxwell-Einstein Equations", *Comm.Math.Phys.* 9 (1968) 161.
- (94) - N.Tariq, B.O.J.Tupper - "The Uniqueness of the Bertotti-Robinson Electromagnetic Universe", *J.Math.Phys.* 15 (1974) 2232.
- (95) - R.P.Mondaini, N.O.Santos - "Conformally Flat Einstein-Yang-Mills-Higgs Solutions with Spherical Symmetry", *Phys.Rev.* D28 (1983) 1872.
- (96) - Correspondência de A.Chakrabarti ao autor - École Polytechnique-Centre de Physique Théorique, Palaiseau, France - 14/12/1983.
- (97) - R.E.Kates, A.Rosenblum - "Radiation Damping of Colour in Classical SU(2) Yang-Mills Theory"- preprint MPI - MPA73, May 1983.
- (98) - J.L.Anderson - "Principles of Relativity Physics" - Academic Press, (1967) p.p. 96, 98, 100.
- (99) - J.Scherk, J.Schwarz - "Gravitation in the Light Cone Gauge", *Gen.Rel.Grav.* 6 (1975) 537.
- (100) - M.Kaku - "Ghost-Free Formulation of Quantum Gravity in the Light-Cone Gauge", *Nucl.Phys.* B91 (1975) 99.
- (101) - S.W.Hawking, W.Israel - "General Relativity - An Einstein Centenary Survey" - Cambridge Univ.Press (1979), p. 12.
- (102) - F.G.Friedlander - "The Wave Equation on a Curved Space-Time" - Cambridge Univ. Press (1975), p.p. 50, 80.
- (103) - M.P.Ryan Jr., L.C.Shepley - "Homogeneous Relativistic Cosmologies" - Princeton Univ. Press (1975), p. 155.
- (104) - R.P.Mondaini, A.Restuccia, J.G.Taylor - "N = 1 Light-Front Gauge Supergravity in Superspace" - preprint KCL, Dept. of Mathematics, May 1984 - a ser publicado em *Phys.Lett.B*
- (105) - G.F.D.Duff - "Partial Differential Equations" - University of Toronto Press (1967), p. 236.
- (106) - R.D.Reasenbergl - "Unified Field Theories of more than 4 Dimensions, including Exact Solutions" - World Scientific (1983), p. 19.
- (107) - R.P.Mondaini - "From Gravity to Quantum Gravity and Supergravity - An Introduction for Classical Relativists" - KCL Monograph, Dept. of Mathematics, 1984, em preparação.

- (108) - G.W.Gibbons, S.W.Hawking, M.J.Perry - "Path Integrals and the Indefiniteness of the Gravitational Action", Nucl.Phys. B138 (1978) 141.
- (109) - R.Schoen, S.T.Yau - "Proof of the Positive Action Conjecture in Quantum Relativity", Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 547.
- (110) - R.Schoen, S.T.Yau - "Positivity of the Total Mass of a General Space-Time", Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1457.
- (111) - S.Deser - "Positive Classical Gravitational Energy from Classical Supergravity", Phys.Rev. D27 (1983) 2805.
- (112) - R.P.Geroch - "Topology in General Relativity", J.Math. Phys. 8 (1967) 782.
- (113) - S.Weinberg - "Quasi-Riemannian Theories of Gravitation in more than Four Dimensions", Phys.Lett. 138B (1984) 47.

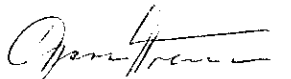
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



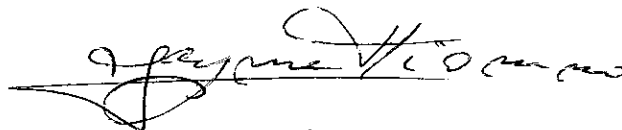
Prem Prakash Srivastava-Presidente



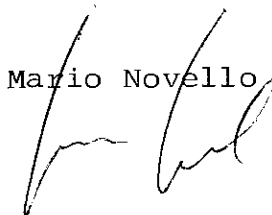
Ariovaldo Ferraz de Camargo Filho



Gerson Francisco



Jayme Tiomno



Mario Novello

Rio de Janeiro, 04 de outubro de 1984