

JOSE MÁRCIO MACHADO

APLICAÇÕES DE UMA TEORIA MATRICIAL DE  
1.<sup>a</sup> ORDEM NO CÁLCULO DE UM ANEL DE ES  
TOCAGEM DESTINADO À PRODUÇÃO DE RADI  
AÇÃO SÍNCROTRON

Tese de Mestrado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

dezembro de 1984

Para Marina

"Acredito nisso: no fascínio  
na doentia obstinação  
na paixão mais absurda  
que nos torna transparentes para nós mesmos  
para os outros eternamente impenetráveis"

(Bruna Lombardi - Identidade)

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq; pelo apoio material

Aos professores Jader B. Martins,  
Augusto B. de Oliveira e Ramiro P.  
A. Muniz, pelo estímulo e orienta-  
ção recebidos.

## RESUMO

É revista a teoria matricial de 1.<sup>a</sup> ordem (aproximação linear) utilizada no cálculo dos elementos constituintes de um acelerador de partículas empregando o princípio do síncrotron de gradiente alternado. Com base nessa teoria, estabelecem-se critérios para dimensionamento de um síncrotron destinado exclusivamente à produção de radiação eletromagnética. Resolve-se então o problema de encontrar uma disposição ótima de elementos (secções retas, lentes magnéticas quadrupolares, etc.) que aproveite os ímãs defletores do síncrotron DCI (Laboratório do Acelerador Linear de Orsay, França) com o objetivo de construir um síncrotron de características inteiramente distintas, destinado a operar como fonte de radiação eletromagnética.

## SUMÁRIO

Resumô	I
Introdução	1
Capítulo I - O Método da Aproximação Linear	
1.1 Princípios Fundamentais	5
1.2 Equações de Movimento	10
1.3 Separação do Movimento Radial	19
1.4 Oscilações Bétatron	22
1.5 Matrizes de Twiss	29
1.6 Números Bétatron	38
1.7 Emitância	45
1.8 Sistema de Rádio-Frequência	53
1.9 Cromaticidades Naturais	56
1.10 Wigglers	58
Capítulo II - Tratamento Computacional da Aproximação Linear	
2.1 Descrição do software utilizado: o programa AGS	60
2.2 Emprêgo Comparativo do AGS	68
Capítulo III - Propostas de Configuração para um Síncrotron Dedicado	
3.1 Introdução	70
3.2 Resultados para o Critério I	75
3.3 Resultados para o Critério II	84
3.4 Conclusões e Sugestões	91
Apêndice A - tabelas	94
Bibliografia	108

## INTRODUÇÃO

Em meados desta década, a comunidade científica internacional viu crescer, de forma notável, o interesse pelas máquinas denominadas de síncrotrons dedicados\* e aceleradores de partículas destinados exclusivamente à produção de radiação eletromagnética, radiação esta com características especiais de intensidade, polarização e amplitude de espectro. Nos últimos cinco anos, cerca de uma dezena dessas máquinas apareceu em todo o mundo, e existe atualmente uma quantidade igual em construção ou em fase de estudos. O aspecto notável da chamada radiação de síncrotron é sua distribuição, de forma monocromática e extremamente intensa, numa região do espectro onde as convencionais são muito deficientes: a região dos raios X e dos ultra-violeta. De fato, as máquinas síncrotron são o único modo conhecido de produzir radiação eletromagnética polarizada na faixa citada, e com uma intensidade cerca de mil vezes maior que as fontes comuns.

O potencial de aplicação científica desta técnica é enorme: sua utilização como instrumento de pesquisa se estende da Física Atômica e Molecular à Medicina, englobando a Física do Estado Sólido, Biologia, Química, Ciência dos Materiais e outros campos.

As possibilidades tecnológicas e industriais também são grandes: para ilustrá-las, basta mencionar a existência de pesquisas visando o enriquecimento isotópico do  $U^{235}$ , usando ra

\* Adotamos aqui a tradução do inglês "dedicated" - já empregada em outros trabalhos escritos em Português (22)

diacção síncrotron, bem como a recente produção do laser de elétrons livres, e os trabalhos para execução de microlitografia de circuitos com radiação X, que permitiriam avanços de inestimável importância em Microeletrônica.

No Brasil, os fatos já expostos provocaram um esforço concentrado de vários pesquisadores, no sentido de dotar o nosso país de uma máquina síncrotron dedicada.

Esse esforço culminou na elaboração, pelo CNPq, de um programa de formação de recursos humanos, no âmbito do chamado Projeto de Radiação Síncrotron, que visa a preparação de quadros que executariam a construção de um Laboratório Nacional para uso de todos os pesquisadores ligados, direta ou indiretamente, às aplicações técnicas e científicas da radiação síncrotron.

Para esclarecer previamente a motivação desta tese, uma breve recapitulação histórica se faz agora necessária. Informações mais completas podem ser encontradas nas fontes citadas nas referências bibliográficas, de modo que serão recordados apenas os fatos essenciais.

Em fins de março de 1982, o CNPq aprovou um projeto de Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, designado "Projeto Preliminar de Estudo de Viabilidade visando a Implantação de um Laboratório Nacional de Radiação Síncrotron". Essa proposta foi formulada com o intuito de discutir amplamente com a comunidade científica brasileira, não só a conveniência do projeto, mas todas as etapas e consequências do mesmo.

Como decorrência natural das expectativas geradas, realizou-se no Rio de Janeiro, em agosto de 1983, um "Encontro sobre Técnicas e Aplicações da Radiação Síncrotron", do qual participaram representantes de diversas instituições científicas do

País e do Exterior.

Ampliou-se, como seria natural num evento dessa ordem, a compreensão sobre uma série de problemas que caracterizam o projeto. Em especial, iniciou-se uma discussão mais detalhada de aspectos técnicos envolvendo a construção da máquina síncrotron que mais se adequaria às nossas necessidades.

Contatos com o laboratório do Acelerador Linear de Orsay, na França, então realizados, evoluíram para uma oferta feita em meados de 1984, que consistiria na doação por parte daquele laboratório, de 12 ímãs defletores (bending magnets) do anel DCI em vias de desativação, e que poderiam ser eventualmente empregados numa máquina dedicada que fôsse construída no Brasil.

No entanto, sendo o DCI uma máquina concebida para experimentos específicos em Física de Partículas, a aceitação da oferta mencionada dependeria, entre outros fatores, de estudos que confirmassem a possibilidade de emprêgo daqueles magnetos num síncrotron com características distintas.

Nos propusemos, nesta tese, a elaborar um estudo que ajudasse a resolver este problema. Com base nas características magnéticas dos ímãs defletores procuramos dimensionar configurações satisfatórias de todos os outros elementos constituintes da máquina. Em resumo, conservando apenas certos parâmetros referentes aos ímãs, modificamos a configuração inicial do DCI, visando obter, do ponto de vista da ótica do feixe, um síncrotron com características desejáveis numa fonte dedicada.

Expomos, nas seções seguintes, um resumo da teoria utilizada e nossas conclusões e cálculos. O capítulo I aborda os elementos fundamentais da chamada Aproximação Linear, que é

a base teórica para a execução dos trabalhos descritos nos capítulos seguintes. O capítulo II descreve aspectos gerais sobre os recursos computacionais empregados nesta tese, e apresenta resultados obtidos ao reproduzirmos características de configurações propostas em outros trabalhos. O capítulo III estabelece as características fundamentais que deve possuir uma máquina síncrotron para produção de radiação, e a partir daí analisa os resultados que encontramos em nossa tentativa de aproveitamento dos defletores originais do DCI.

Muito embora a aceitação desses defletores envolva questões técnicas que transcendam o âmbito da Física de Feixe (a adequação de características geométricas dos ímãs ao problema da extração de radiação, por exemplo), esperamos que a presente tese possa fornecer subsídios ao projeto, mesmo que venha a ocorrer a recusa da oferta francesa.

CAPÍTULO I

## O MÉTODO DA APROXIMAÇÃO LINEAR

## 1.1. Princípios fundamentais

Uma máquina síncrotron dedicada funciona graças a um fato bem conhecido da Eletrodinâmica: cargas elétricas aceleradas irradiam. Portanto, se mantivermos um fluxo de cargas confinado e em movimento ao longo de uma dada órbita fechada, obteremos radiação nos pontos onde houver aceleração radial, mesmo no caso de as cargas possuírem aceleração tangencial nula. Isso sem levar em consideração a possibilidade desse fluxo ser acelerado em outros pontos, por meio de campos externos convenientemente aplicados. A escolha do tipo de carga empregado prende-se à relação (21):

$$W = \frac{4 \pi}{3} \frac{r_0}{R} \beta^3 \gamma^4 M c^2 \quad (1.1.1)$$

que fornece a perda de energia por revolução,  $W$ , para uma partícula carregada de massa  $M$  movendo-se num círculo de raio  $R$  com velocidade constante  $\underline{v}$ . Na relação acima,  $r_0$  é o raio clássico do elétron, beta e gama são os correspondentes às fórmulas da transformação de Lorentz da relatividade especial. Sendo proporcional a beta e gama, a perda  $W$  de energia por radiação será considerável no caso de um elétron. Por exemplo, a 10 GeV, um elétron possui  $\gamma = 2 \times 10^4$ , contra  $\gamma = 10$ , para um próton com a mesma energia. Portanto, uma máquina dedicada opera com

elétrons (ou pósitrons!). Isso coloca problemas distintos de projeto, já que a perda de energia maior, acarretará maiores alterações dinâmicas no comportamento do feixe.

Por ora, traçaremos um perfil geral da configuração para um síncrotron dedicado. Dispomos magnetos ao longo de uma órbita ideal, que é uma curva fechada circular, ou uma poligonal com seções de curvatura não nula. Ajustando-se os campos desses magnetos para um conjunto de valores consistentes, um elétron que entre na órbita de referência com certa energia nominal  $E_0$  aí permanecerá, se repusermos as perdas por irradiação convenientemente. Outros elétrons com energias diferentes tendem a executar trajetórias estáveis na vizinhança da órbita ideal, dentro de uma faixa de variação determinável. O estudo do movimento dos elétrons sob essas condições é o primeiro passo no cálculo de uma máquina síncrotron. O tratamento inicial limita-se à chamada aproximação linear, que se aplica a partículas com energia constante, ignorando os efeitos por perdas de radiação e perdas nos campos aceleradores de rádio frequência, que repõem energia ao feixe. No entanto, esses efeitos podem ser estudados depois, como perturbações nas trajetórias obtidas pela aproximação linear. Já temos assim, os elementos fundamentais para a colocação do problema: uma órbita pré-estabelecida e uma configuração de campos, com dispositivos (cavidades de RF) que aceleram o feixe em sincronização com o movimento dos elétrons. O nome síncrotron, aliás, provém disso. A situação descrita condiciona nossa escolha de coordenadas: é conveniente caracterizar o movimento dos elétrons em relação à órbita ideal. A posição instantânea de uma partícula será dada pelo ponto  $(s, x, z)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco ao longo da órbita ideal,

partindo de uma referência arbitrária até o ponto mais próximo da partícula, e  $\underline{x}$  e  $\underline{z}$  são os deslocamentos horizontal e vertical respectivamente, localmente perpendiculares a partir da órbita ideal. Por convenção consideramos o sentido de  $\underline{s}$  positivo quando acompanhando o movimento dos elétrons,  $\underline{x}$  positivo quando crescendo na direção externa a partir da órbita de referência, e  $\underline{z}$  crescendo positivamente numa direção convencional. Nos interessa que os deslocamentos em  $\underline{x}$  e  $\underline{z}$  permaneçam pequenos quando comparados ao raio de curvatura local da trajetória. Isso equivale a minimizar a divergência do feixe e significa, na dedução das equações de movimento, que vamos considerar variações dos campos magnéticos na vizinhança da órbita ideal apenas até a 1.<sup>a</sup> ordem em  $\underline{x}$  e  $\underline{z}$ . Nisso consiste a aproximação linear já mencionada. Em outras palavras os campos são tais que suas componentes transversais, atuando sobre um elétron em  $(s, x, z)$ , vem dadas pelas expressões (4):

$$B_z(s, x, z) = B_z(s, 0, 0) + \left. \frac{\partial B_z(s, x, 0)}{\partial x} \right|_{(x=0)} x \quad (1.1.2)$$

$$B_x(s, x, z) = \left. \frac{\partial B_z(s, x, 0)}{\partial x} \right|_{(x=0)} z \quad (1.1.3)$$

Nas expansões em Taylor acima, a eq. (1.1.3) provém de considerações de simetria adequadamente impostas. De fato, podemos escolher uma disposição de campos tal que em cada

ponto, o campo total seja simétrico em relação ao plano da órbita ideal.

Mas ainda, estando o plano da órbita inteiramente contido na horizontal, o campo magnético total para um ponto  $(s, 0, 0)$  deverá ter sempre uma única componente vertical, para garantir a permanência dos elétrons no plano da órbita. Tais condições são consistentes com as equações (1.1.2) e (1.1.3), a equação (1.1.3) foi transformada usando as equações de Maxwell, que fornecem

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

para a simetria imposta, o que acarreta, para a componente  $B_x$  a modificação:

$$B_x(s, s, z) = \left\{ \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\} z + B_x(s, 0, 0) = 0 + \left\{ \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} z$$

Vê-se claramente que a componente  $B_z(s)$  é a responsável pela curvatura da órbita ideal, devida à força de Lorentz, enquanto o gradiente de campo responde com forças de enfoque que atuam sobre as trajetórias estáveis na vizinhança daquela órbita. O modo mais simples de viabilizar fisicamente uma tal disposição de campos é a chamada operação com funções separáveis: os magnetos ao longo da órbita possuirão ou uma componente de campo vertical pura (ímãs defletores), ou serão lentes magnéticas, onde não há campo na órbita de referência,

(quadrupólos de enfoque), mas gradientes atuando fora dela. Nesta tese, estudamos apenas configurações desse tipo, onde os elementos físicos são dipólos, quadrupólos, secções retas, cavidades de RF e eventuais hexapólos, cuja função será explicada mais tarde.

Vale esclarecer que tal característica não é obrigatória, podemos construir elementos que sejam ao mesmo tempo defletores e óticamente ativos. Da mesma forma, a disposição da órbita de referência em um único plano nem sempre é encontrada em máquinas síncrotron. O DCI, por exemplo, é uma máquina de colisões feixe-feixe com 2 planos de operação, e ímãs defletores com plano de operação vertical. No entanto, uma tal configuração é dispensável numa máquina dedicada: o eventual estudo matemático envolvendo as alterações citadas não traz todavia grandes mudanças nas equações obtidas pela aproximação linear, para máquinas monoplanares e operando com elementos separados. Além disso, todas as proposições deste estudo referem-se às máquinas classificadas como isomagnéticas: o raio de curvatura da órbita em todos os ímãs defletores tem sempre o mesmo valor.

Dizendo de outra forma, a componente vertical pura  $B_z(s)$  ou é nula ou então tem sempre o mesmo valor, nos pontos onde é diferente de zero. Evidentemente, isso permanece uma idealização, já que é fisicamente impossível obter campos descontínuos. Haverá sempre uma zona de transição próxima à fronteira do magneto, onde o campo evoluirá continuamente de zero até seu valor nominal. No entanto, essa idealização é perfeitamente adequada para nossos objetivos iniciais, e será extensivamente empregada ao longo de todo este trabalho.

## 1.2 Equações de Movimento

De acordo com a discussão precedente, a produção de radiação eletromagnética por elétrons acelerados é um fenômeno considerável apenas em situações relativísticas, quando as velocidades em questão aproxima-se bastante de  $c$ . Neste caso, relacionamos energia e momentum linear por meio da equação

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.2.1)$$

Face à massa reduzida do elétron, podemos usar da qui por diante a aproximação  $E = pc$ , que empregaremos na dedução das equações de movimento. O processo de obtenção dessa equações pode variar: uma formulação Hamiltoniana, ou a resolução da equação para a força de Lorentz,

$$\vec{F} = e \vec{V} \times \vec{B} \quad (1.2.2)$$

onde parametrizamos as quantidades  $V$  e  $F$  de acordo com a escolha do sistema de coordenadas que por mais conveniente, e onde  $B$  é decomposto em suas componentes no referido sistema, cada componente sendo então, expandida de acordo com as condições de simetria. Este é o caminho adotado na maioria dos trabalhos (p.ex., refs. 1 e 3). Antes de mais nada, além de supor condições isomagnéticas, impomos também que os gradientes de campo tem módulo constante, nas regiões onde são distintos de zero. Isso é uma situação aproximadamente exequível, e simplificará depois, o trabalho de resolução das equações obtidas.

Usando coordenadas cilíndricas, escrevemos a eq. (1.2.2) como:

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \frac{dr}{dt} & \frac{rd\theta}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ B_r & B_\theta & B_z \end{vmatrix}$$

$t$  é o parâmetro tempo; a decomposição de  $F$  em suas componentes nas direções dadas pelos vetores unitários  $u_i$  fornece:

(1.2.3)

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dr}{dt} \right) - m r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = e \left( r \frac{d\theta}{dt} B_z - B_\theta \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( m r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = e \left( B_r \frac{dz}{dt} - \frac{dr}{dt} B_z \right) \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dz}{dt} \right) = e \left( \frac{dr}{dt} B_\theta - r \frac{d\theta}{dt} B_r \right) \quad (1.2.5)$$

Essas equações podem ser modificadas, se observarmos que as propriedades dos campos escolhidas para uma máquina síncrotron correspondem, matematicamente, às condições

$$B_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = 0,$$

$$z = 0 \text{ é um plano de simetria}$$

que caracterizam a chamada simetria rotacional. Obtemos então:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = e r \frac{d\theta}{dt} B_z \quad (1.2.6)$$

$$\frac{d}{dt} (m \frac{dz}{dt}) = - e r \frac{d\theta}{dt} B_r, \quad (1.2.7)$$

permanecendo inalterado a eq. (1.2.4), que uma vez integrada, pode ser escrita como:

$$m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{e \psi}{2\pi} = \text{const.}, \text{ onde}$$

$$\psi = 2\pi \int^r B_z r \, dr \text{ de } \psi \text{ é o fluxo do campo limitado.}$$

Isto é o resultado do teorema de Busch (ref. 1) que relaciona o momentum angular na direção de  $\underline{z}$ ,  $I_z = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ , com o valor da integral de fluxo dado acima.

Portanto, restam para a análise do movimento apenas as eqs. (1.2.6) e (1.2.7). Se fizermos nelas a substituição

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \text{ encontraremos:}$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{m V_\theta^2}{r} + e V_\theta B_z \quad (1.2.8)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = - eV_{\theta} V_r \quad (1.2.9)$$

Agora, pelas condições da aproximação linear, se  $\rho$  é o raio local de curvatura para a órbita ideal, os deslocamentos  $\frac{x}{\rho}$ ,  $\frac{z}{\rho}$  e  $\frac{\dot{x}}{V_{\theta}}$ ,  $\frac{\dot{z}}{V_{\theta}}$  são bem pequenos, de modo que podemos considerar:

$$v = V_{\theta} \left( 1 + \frac{(\dot{x})^2}{(V_{\theta})^2} + \frac{(\dot{z})^2}{(V_{\theta})^2} \right)^{1/2} = V_{\theta} ,$$

e com isso, estamos em condições de eliminar o tempo como variável independente nas equações de movimento, pois  $v$  para os elétrons é praticamente constante e bem próxima à velocidade da luz. Sendo  $s = v.t.$ , obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} = v^2 \frac{d^2}{ds^2} ,$$

e como  $r = x + \rho$ , pela nossa escolha de coordenadas, o que implica:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{r} + \frac{eB_z}{mV} \quad (1.2.10)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = - \frac{eB_r}{mV} , \quad (1.2.11)$$

completamos a transformação procurada.

Notando que  $mV = p_0 + \Delta p$ , onde  $p_0$  corresponde à energia de referência para a órbita ideal, encontramos:

$$\frac{1}{mV} = \frac{1}{p_0} \left( 1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{-x}{\rho} \right)$$

Estamos assim, prontos para substituir nas equações de movimento, as expressões das componentes do campo apresentadas na seção anterior.

Sendo

$$B_z(s, x, z) = B_z(s) + \left\{ \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\} x,$$

e se pusermos

$$n(s) = - \frac{\rho}{B_z(s, 0, 0)} \frac{\partial B_z(s, x, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

a eq. (1.2.10) se escreverá como;

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{r} + \frac{e}{mV} B_z (1 - \frac{nx}{\rho}) \quad (1.2.12)$$

Pela expressão da força de Lorentz,  $p_0 = eB_z (s, 0, 0)$   $\rho(s)$ , uma vez que

$$\frac{mV^2}{\rho} = eVB_z (s, 0, 0) \quad (1.2.13)$$

e com isso, mais as expansões para  $1/r$  e  $1/mV$ , encontramos finalmente:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2} \right\} x = \frac{\Delta p}{\rho p} \quad (1.2.14)$$

Um procedimento inteiramente análogo para a componente radial do campo fornecerá:

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{n(s)}{\rho^2} z = 0 \quad (1.2.15)$$

Não podemos perder de vista alguns fatos relevantes sobre as eqs. (1.2.14) e (1.2.15), inicialmente, observamos que a órbita fechada torna a coordenada  $\underline{s}$  cíclica, se chamarmos de  $\underline{C}$  o comprimento total da órbita de referência, as funções dependentes de  $\underline{s}$  serão periódicas em  $\underline{C}$ :

$$n(s + C) = n(s)$$

$$\rho(s + C) = \rho(s)$$

pois se relacionam à disposição dos campos que atuam na máquina; pode ser interessante, como característica de projeto, agrupar os elementos físicos que constituem o síncrotron em grupos idênticos que se repetem regularmente ao longo do percurso da órbita. Neste caso, podemos ter também:

$$n(s + L) = n(s)$$

$$\rho(s + L) = \beta(s), \quad L < C$$

Essa "periodicidade intrínseca", como podemos chamá-la, caracteriza a distribuição dos elementos (quadrupólos, seções retas, etc.) em superperíodos de comprimento L. Por ora, notaremos que essa periodicidade condiciona as soluções das equações de movimento de forma peculiar.

De fato, elas tornam-se do tipo Hill, características de problemas clássicos da Mecânica Celeste, e que possuem uma teoria bem estabelecida para seu estudo. A exposição suscinta dessa teoria é o tema do restante deste capítulo. No entanto, nossos trabalhos até aqui foram conseguidos graças a uma série de aproximações. Por exemplo, poderíamos ter estendido nossas expansões até à 2.<sup>a</sup> ordem em  $\underline{x}$ ,  $\underline{z}$  e suas derivadas. Como consequência, encontraríamos equações muito mais complexas; em particular, o movimento nas duas coordenadas não mais estaria separado. Uma exposição detalhada da teoria de 2.<sup>a</sup> ordem pode ser encontrada no trabalho de Karl L. Brown (3). A título de ilustração, exibimos aqui as equações de movimento obtidas com o auxí-

lio dessa teoria:

$$\underbrace{\frac{d^2 x}{ds^2} + (1 - n) h^2 x}_{p.} = \frac{h \Delta p}{p} + (2n - 1 - \beta) h^3 x^2 +$$

$$+ \frac{dh}{ds} x \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2} h \frac{(dx)^2}{ds} + (2 - n) h^2 \frac{x \Delta p}{p} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 h}{ds^2} - nh^3 + 2\beta h^3 \right) z^2 + \frac{dh}{ds} z \frac{dz}{ds} -$$

$$- \frac{1}{2} h \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 - h \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \dots + \dots$$

$$\underbrace{\frac{d^2 z}{ds^2} + nh^2 z}_{p.} = 2(\beta - n) h^3 xz + \frac{dh}{ds} x \frac{dz}{ds} -$$

$$- \frac{dh}{ds} \frac{dx}{ds} z + h \frac{dx}{ds} z + nh^2 z \frac{\Delta p}{p} + \dots + .$$

onde

$$\beta = \frac{1}{2h^2 B_z} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

e

$$h = \frac{1}{\rho}$$

Notamos que cada equação para uma dada coordenada contém sempre termos envolvendo a outra coordenada, o que não ocorria antes. O movimento é agora inseparável: ocorre um acoplamento (coupling). Posteriormente, veremos que esse efeito pode ser estudado a partir das equações deduzidas pela aproximação linear, quando tratarmos dos números,  $\nu_x$  e  $\nu_z$ , que aparecem no estudo das oscilações bétatron.

As chaves colocadas nas equações acima indicam claramente a sua consistência com os resultados obtidos pela teoria linear: as equações de Hill ali aparecem, perturbadas por termos que correspondem às não linearidades e acoplamentos citados.

## 1.3 Separação do Movimento Radial

As equações de movimento (2):

$$\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2(s)} \right\} \underline{x} = \frac{1 \Delta p}{\rho(s) p} \quad (1.3.1)$$

e

$$\frac{d^2 \underline{z}}{ds^2} = \frac{-n(s)}{\rho^2(s)} \underline{z} \quad (1.3.2)$$

dēduzidas na seção anterior, são descrições aproximadas do movimento das partículas em anéis de estoçagem, sendo obtidas ao desprezarmos termos de 2.<sup>a</sup> ordem e ordens mais elevadas, tanto ' em  $\underline{x}$  e  $\underline{z}$  como em suas derivadas.

É conveniente separarmos o movimento radial, referente à coordenada  $\underline{x}$ , em duas partes, uma relativa à curva fechada que é a nova órbita de equilíbrio para os elétrons de momentum  $p + \Delta p$ , e a outra referente às oscilações transversais em tórno dessa órbita.

Escrevendo  $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_b$ , e substituindo na eq. (1.3.

1) encontramos

$$\frac{d^2 \underline{x}_p}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2(s)} \right\} \underline{x}_p = \frac{1 \Delta p}{\rho(s) p} \quad (1.3.3)$$

$$\frac{d^2 x_b}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2(s)} \right\} x_b = 0 \quad (1.3.4)$$

Podemos, para garantir a unicidade dessa decomposição, impor que  $x_p(s)$  seja uma função periódica tal que  $x_p(s+L) = x_p(s)$ ; temos assim, uma órbita fechada  $x_p(s)$  para um elétron de momentum  $p + \Delta p$  (com  $x_b = 0$ ), e o movimento radial consistirá, agora, da superposição do deslocamento dessa nova órbita de equilíbrio com a oscilação livre dada pela eq. (1.3.4). Observe - mos ainda, que tanto a eq. (1.3.4) quanto a eq. (1.3.2) são equações de Hill (lineares sem termos de 1.<sup>a</sup> ordem, e com coeficientes periódicos) e descrevem oscilações bêtatron livres que ocorrem no feixe. Essas oscilações são de importância capital para o projeto de anéis de estocagem, e seu estudo detalhado é objeto das seções seguintes. Por ora, vale dizer que se  $x_p$  é proporcional ao incremento de momentum  $\Delta p$ , podemos escrever

$$x_p(s) = \eta(s) \frac{\Delta p}{p}, \quad (1.3.5)$$

onde  $\eta(s)$  guarda as mesmas condições de periodicidade de  $x_p$ , e é solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 \eta(s)}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2(s)} \right\} \eta(s) = \frac{1}{\rho(s)} \quad (1.3.6)$$

Essa nova função  $\eta(s)$  é também conhecida como função compactificação de momentum  $\alpha p$ , ou ainda, função dispersão de energia  $D(s)$ . Sua importância para nós reside no estudo de

de máquinas com gradientes de campo elevados, bem como na deter  
minação de trajetórias fechadas para partículas fora da energia  
de referência de uma dada máquina síncrotron. Os métodos de cál  
culo empregados na determinação de  $\eta(s)$  estão expostos na seção  
que descreve o programa AGS; um estudo mais completo de suas ca  
racterísticas foi também inserido ali,

## 1.4 Oscilações Bétatron

Inicialmente, notemos que as equações (1.3.2) e (1.3.3) possuem a mesma estrutura matemática, podemos então representá-las como

$$\frac{d^2 x_b}{ds^2} + K_b x_b = 0 \quad (1.4.1)$$

e

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z z = 0 \quad (1.4.2)$$

sendo  $K_z = \frac{n(s)}{\rho^2}$ , e  $K_b = \frac{1}{\rho^2} - K_z$ .

Essas novas funções  $K_z$  e  $K_b$  são denominadas funções de enfoque, e especificadas em qualquer posição azimutal  $s$ , pelas características de desenho do anel. Não seria difícil integrar numericamente, qualquer uma das equações acima, mas uma característica de projeto torna mais fácil o problema de resolvê-las: em geral, o campo guia é constituído de segmentos nos quais os valores de  $K_z$  são constantes. Desse modo, a integração pode ser feita algébricamente para cada segmento, o movimento para qualquer das coordenadas é então conhecido. Representando as equações (1.4.1) e (1.4.2) por meio da expressão genérica

$$Y'' + K Y = 0,$$

dependendo de  $K$  ser positivo, negativo ou nulo, encontramos as seguintes soluções:

$$K > 0: \quad Y = a \cos (\sqrt{K} s + b),$$

$$K = 0: \quad Y = a s + b,$$

$$K < 0: \quad Y = a \cos h (\sqrt{-K} s + b)$$

Aqui,  $a$  e  $b$  são constantes determinadas a partir das condições iniciais (valores de  $Y$  e  $Y'$  na entrada de cada segmento). Mais formalmente, a solução de qualquer equação diferencial linear de 2.<sup>a</sup> ordem do tipo  $Y'' + K Y = 0$ , seja ou não  $K(s)$  uma função periódica, é determinada unicamente pelas condições iniciais  $Y(s_0)$  e  $Y'(s_0)$ :

$$Y(s) = m_{11}(s, s_0) Y(s_0) + m_{12}(s, s_0) Y'(s_0),$$

$$Y'(s) = m_{21}(s, s_0) Y(s_0) + m_{22}(s, s_0) Y'(s_0),$$

onde  $m_{11}(s, s_0)$  e  $m_{12}(s, s_0)$  são soluções particulares da equação, satisfazendo às exigências

$$m_{11}(s_0, s_0) = 1, \quad m_{12}(s_0, s_0) = 0,$$

e  $m_{21}(s, s_0)$  e  $m_{22}(s, s_0)$  são as derivadas dessas soluções, também satisfazendo às condições

$$m_{21}(s_0, s_0) = 0, \quad e \quad m_{22}(s_0, s_0) = 1.$$

Tais imposições são feitas, com o intuito de preservar a consistência ao tomarmos  $Y(s) \Big|_{s_0} = Y(s_0)$ ,  $Y'(s) \Big|_{s_0} = Y'(s_0)$

Podemos condensar as igualdades acima em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} Y(s) \\ Y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}(s, s_0) & m_{12}(s, s_0) \\ m_{21}(s, s_0) & m_{22}(s, s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(s_0) \\ Y'(s_0) \end{pmatrix}$$

A matriz 2 x 2 acima, que designaremos por  $M(s, s_0)$ , é chamada a matriz de transferência para o segmento. Esse modo de representar a solução tem 2 grandes vantagens: primeiro, a matriz  $M(s, s_0)$  só depende da função  $K(s)$  entre  $s$  e  $s_0$ , sendo uma característica da máquina, e não da situação inicial da partícula. Segundo, a matriz para um conjunto de segmentos é justamente o produto de todas as matrizes que representam cada segmento,

$$M(s_2, s_0) = M(s_2, s_1) M(s_1, s_0)$$

Notamos agora, que as soluções já exibidas ao início desta seção, para  $K < 0$ ,  $K > 0$  e  $K = 0$  nos permitem escrever facilmente as seguintes matrizes de transferência:

$$\text{Se } K < 0, M(s, s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & (-K)^{-1/2} \sinh \psi \\ (-K)^{1/2} \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } K > 0, M(s, s_0) = \begin{pmatrix} \cos \phi & K^{-1/2} \sin \phi \\ -(K)^{1/2} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } \phi = K^{1/2} (s-s_0) \qquad e\Psi = (-K)^{1/2} (s-s_0)$$

$$\text{Se } K = 0, \quad M(s, s_0) \quad \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tabela I)

sendo L o comprimento do segmento dentro do qual K se anula.

Com isso, já possuímos um método de determinar as novas coordenadas de uma partícula à saída de um dado segmento, conhecidas suas coordenadas à entrada (condições iniciais). No entanto, precisamos ainda descrever as características de enfoque para uma dada configuração de segmentos, e de maneira mais geral, por meio, de uma função dependente de s, conhecida em cada ponto, que nos fornecesse uma medida das amplitudes das oscilações em cada azimuth da máquina. Relacionando essa descrição com o método matricial já exposto, nossa tarefa estaria completada.

Com esse intuito, escrevemos a solução geral da equação de Hill,  $Y'' + K Y = 0$ , sob a forma

$$Y(s) = a \cdot \xi(s) \cos(\phi(s) + \delta) \quad (1.4.3)$$

e procuramos condições a serem cumpridas pelas funções  $\xi(s)$  e  $\phi(s)$ , que permitam satisfazer essa nossa escolha. Especificamente, se definirmos  $\phi(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\xi(\bar{s})}$ , e escolhermos  $\xi(s)$

como uma função positiva definida que seja solução analítica da

equação

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = -K(s)\xi + 1/\xi^3, \quad (1.4.4)$$

verificamos, por substituição direta, que a eq. (1.4.3) é realmente, uma solução da equação de Hill proposta. Aqui,  $\delta$  e  $a$  são novamente, constantes que dependem das condições iniciais. Cumpre observar que é prática difundida representar-se a função  $\xi^2(s)$  como sendo  $\beta(s)$ . Podemos agora, escrever as equações que descrevem as oscilações bêtatron nas coordenadas  $\underline{x}$  e  $\underline{z}$ :

$$x_b(s) = a_b (\beta_x(s))^{1/2} \cos \left\{ \int_0^s \frac{d(\bar{s})}{\beta_x(\bar{s})} + \delta_b \right\} \quad (1.4.5)$$

$$z(s) = a_z (\beta_z(s))^{1/2} \cos \left\{ \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta_z(\bar{s})} + \delta_z \right\} \quad (1.4.6)$$

Notamos inicialmente, que os valores para  $\beta_x$  e  $\beta_z$  são diferentes, dada a diferença entre  $K_z$  e  $K_b$ . Consequentemente, as fases descritas pelas integrais que aparecem no argumento dos cosenos, também o serão. Chamamos as oscilações descritas pelas equações (1.4.5) e (1.4.6) de pseudoharmônicas: um elétron se movendo ao longo do anel, executará em cada coordenada uma oscilação que não é harmônica nem periódica. O movimento se assemelha a uma onda senoidal distorcida, com uma amplitude variável a  $(\beta(s))^{1/2}$ , modulada em proporção à raiz da

função beta correspondente, e com uma fase que avança com  $s$  em proporção inversa à referida função beta. Uma importante consequência das oscilações bêtatron é observada de imediato, pelo exame das equações já apresentadas. Em qualquer posição azimutal, o deslocamento de um elétron circulante, nas duas coordenadas, está sempre abaixo dos valores limites

$$X_b(s) = a_b (\beta_x(s))^{1/2} \quad (1.4.7)$$

$$Z(s) = a_z (\beta_z(s))^{1/2} \quad (1.4.8)$$

Portanto, a trajetória final de um elétron na energia de referência, estará sempre dentro de uma envoltória definida por  $\pm X_b(s)$ ,  $\pm Z(s)$ . Isso é um dado importante ao projetar-se uma câmara de aceleração para uma máquina síncrotron, já que os valores acima dão diretamente as dimensões do feixe confinado. Os valores  $X_b(s)$  e  $Z(s)$  estão ligados às condições iniciais pelas constantes  $a_b$  e  $a_z$ ; essas constantes, por sua vez, relacionam-se com a emitância do feixe. Ao tratarmos da emitância, explicitaremos claramente tal relação. Por ora, é fácil notar que valores de  $\beta(s)$  pequenos são condição necessária para obtermos um feixe bem confinado, contudo, não basta apenas minimizarmos  $\beta_x(s)$  e  $\beta_z(s)$  tanto quanto possível: existem condições de ressonância indesejável, acoplamentos entre as oscilações nas duas coordenadas, que ocorrem para determinados valores das integrais que dão as fases nas equações (1.4.5) e (1.4.6). Como essas integrais dependem explicitamente dos betas, um compromisso entre os valores das fases e os valores dos betas terá que ser conside

rado, no projeto de um anel de estocagem. Antes de apresentar -  
mos um estudo suscinto sobre as características indesejáveis a  
que fizemos menção, completaremos a tarefa de relacionar nos -  
sas novas funções, com os elementos das matrizes introduzidas '  
ao início da presente seção. Ou seja, procuraremos relacionar  
todos os elementos da eq. (1.4.3) com quantidades obtidas a part  
tir de operações simples, envolvendo matrizes. Com isso, simplifi  
camos bastante o tratamento computacional do problema.

## 1.5 Matrizes de Twiss

Como já foi explicado, um anel típico é constituído por conjuntos de segmentos (dipolos, quadrupolos, seções retas, etc.); cada conjunto de segmentos que se repete ao longo do anel com certa periodicidade é denominado um superperíodo. A matriz de transferência  $M(s, s_0)$  obtida como produto das matrizes correspondentes a cada superperíodo, descreve as mudanças de coordenadas sofridas por uma dada partícula, ao realizar uma revolução completa em torno do anel. Simplificando a notação, chamaremos a matriz de transferência para um superperíodo, partindo do ponto  $s_0$ , de  $M(s_0)$ :  $M(s_0 + L, s_0)$ , onde  $L$  é a circunferência total do superperíodo; se  $N$  é o número de superperíodos, o comprimento total da trajetória na máquina será  $N.L$ , portanto, a matriz  $M(s_0 + N.L, s_0) = (M(s_0))^N$ , é a matriz de transferência para toda a estrutura. Consequentemente, a matriz que caracteriza  $k$  revoluções completas de uma partícula ao longo do anel é  $(M(s_0))^{kN}$ . Ora, para que tenhamos um movimento estável dentro da máquina, uma condição necessária e suficiente é que os elementos de  $(M(s_0))^{kN}$  permaneçam limitados a medida que  $k$  crescer indefinidamente. Formalizando, isso equivale a estudarmos as soluções do problema de auto-valores

$$M(s_0) \begin{pmatrix} Y(s_0) \\ Y'(s_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y(s_0) \\ Y'(s_0) \end{pmatrix}, \quad (1.5.1)$$

de modo a obtermos resultados para  $\lambda$  que não impliquem em soluções singulares para a equação acima. Procurando então, as raí-

zes do polinômio característico:

$\det (M(s_0) - \lambda I)$ , o que implica em

$$\lambda^2 - \lambda (m_{11} + m_{22}) + 1 = 0$$

Na obtenção desta equação de 2º grau em  $\lambda$  usamos o fato de que  $\det(M(s_0)) = 1$  (uma vez que essa matriz é o produto de outras do tipo das exibidas na tabela I da seção 1.4, cada qual possuindo também determinante 1). Se admitirmos agora, que  $\cos \mu = 1/2 \text{Tr} (M(s_0)) = 1/2(m_{11} + m_{22})$ , a equação

$$\lambda^2 - 2 \lambda \cos \mu + 1 = 0 \quad (1.5.2)$$

admitirá como soluções os valores

$$\lambda = \cos \mu \pm i \text{sen } \mu = e^{\pm i\mu}$$

Disto conclue-se que  $\mu$  será uma quantidade real se o traço de  $M(s_0)$  for menor ou igual a 2, e uma quantidade com - plexa se o traço for maior que 2. Procuraremos agora, uma forma para a matriz  $M(s_0)$  que explicita os auto-valôres e outras propriedades.

Definindo  $\cos \mu = 1/2 \text{Tr}(M(s_0))$ ,  $m_{12} = \bar{\beta} \text{sen } \mu$ ,

$$m_{21} = -\bar{\gamma} \text{sen } \mu, \quad m_{11} - m_{22} = 2 \bar{\alpha} \text{sen } \mu,$$

obtemos:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}_{s_0 + L} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \operatorname{sen} \mu & \beta \operatorname{sen} \mu \\ -\bar{\gamma} \operatorname{sen} \mu & \cos \mu - \bar{\alpha} \operatorname{sen} \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}_{s_0}$$

A matriz de transferência, escrita sob esta forma, é chamada de matriz de Twiss (1). Vamos representá-la também como  $M(s_0) = I \cos \mu + J \operatorname{sen} \mu$ , sendo  $I$  a matriz unidade, e  $J$  a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Até aqui, a definição das funções  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  foi inteiramente arbitrária e determinada por nossa conveniência. Nossa escolha ficará clara agora, ao relacionarmos essas funções com aquelas que caracterizam nossa solução geral para a equação de Hill. Um teorema devido a Floquet (ver ref. 1), estabelece que uma equação do tipo Hill possui sempre duas soluções particulares linearmente independentes,

$$Y_1 = e^{\frac{i \mu s}{L}} p_1(s), \quad Y_2 = e^{\frac{-i \mu s}{L}} p_2(s),$$

onde as funções  $p_1(s)$  e  $p_2(s)$  são periódicas,

$$p_{1,2}(s + L) = p_{1,2}(s),$$

e  $\mu$  é dado pela definição anterior, em termos do traço da ma -

triz de transferência. Além disso, o mesmo teorema estabelece que

$$Y_1(s + L) = Y_1(s) \cdot e^{+i\mu},$$

$$Y_2(s + L) = Y_2(s) \cdot e^{-i\mu}$$

Usando a definição da matriz de Twiss, escrevemos:

$$Y_1(s + L) = Y_1(s) \cos \mu + (Y_1(s) \bar{\alpha} + Y_1'(s) \bar{\beta}) \sin \mu,$$

$$Y_2(s + L) = Y_2(s) \cos \mu + (Y_2(s) \bar{\alpha} + Y_2'(s) \bar{\beta}) \sin \mu$$

e comparando essas equações com as expressões dadas pelo teorema de Floquet, encontramos:

$$Y_1 \bar{\alpha} + Y_1' \bar{\beta} = iY_1, \quad Y_2 \bar{\alpha} + Y_2' \bar{\beta} = -iY_2,$$

$$e \frac{Y_1'}{Y_1} = \frac{i - \bar{\alpha}}{\bar{\beta}}, \quad \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{-i - \bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (1.5.3)$$

Podemos agora, eliminar os índices, já que sabemos precisamente com quem estamos operando. Diferenciando logaritmicamente as equações (1.5.3) acima, obtemos:

$$\frac{Y''}{Y'} - \frac{Y'}{Y} = \frac{-\bar{\alpha}}{+i - \alpha} - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}}$$

expressão que simplificamos, usando a equação de Hill, para achar finalmente (ver ref. 1):

$$(\bar{\alpha}^2 + K\bar{\beta}^2 + \frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - 1) \pm i(2\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = 0$$

Igualando as duas partes dessa equação a zero separadamente, chegamos ao resultado final

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= 2\bar{\alpha}, \\ \bar{\alpha} &= K\bar{\beta} - \frac{1 + \bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Combinando as equações (1.5.4) e (1.5.3), encontramos uma equação diferencial de onde foi eliminada a função  $\bar{\alpha}$ ,

$$Y' = \frac{\pm i + (1/2)\bar{\beta}'}{\bar{\beta}} Y$$

e que admite como solução, conforme o sinal de  $i$ ,

$$Y_1^{(s)} = \bar{K} (\bar{\beta})^{1/2} e^{+i\Psi(s)}$$

$$Y_2^{(s)} = \bar{K} (\bar{\beta})^{1/2} e^{-i\Psi(s)},$$

$$\text{com } \Psi(s) = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{\beta}(\bar{s})}$$

Agora, podemos escrever uma solução real  $y(s)$  como combinação linear dessas duas soluções particulares,

$$y(s) = \bar{K} (\bar{\beta})^{1/2} \cos \left( \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\bar{\beta}(\bar{s})} + \delta \right)$$

Finalmente, é imediato concluirmos que os  $\bar{\beta}$  da matriz de Twiss são exatamente, os  $\beta(s)$  da solução geral da equação de Hill proposta na seção anterior. Esse é o método empregado computacionalmente, com maior frequência, para determinar as funções  $\beta_x$  e  $\beta_z$ : calcula-se a matriz de Twiss até o ponto onde se deseja conhecer a função, e aplica-se a definição

$$m_{12} = \bar{\beta}(s) \sin \mu = \beta(s) \sin \mu, \text{ d'onde}$$

se obtém então,  $\beta(s)$ . Evidentemente,  $\mu$  se obtém da relação para o traço da matriz de Twiss. Falta ainda, associarmos  $\mu$  com a integral  $\int_{0+s}^{s+L} \frac{d\bar{s}}{\bar{\beta}(\bar{s})}$ . Para tanto escrevemos

$$Y_{1,2}(s) = (\beta(s))^{1/2} e^{\pm i \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})}}, e$$

$$Y_{1,2}(s+L) = (\beta(s+L))^{1/2} e^{\pm i \int_0^{s+L} \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})}}$$

Mas, pelo teorema de Floquet,  $\beta(s) = \beta(s+L)$ , e assim,

$$Y_{1,2}(s+L) = (\beta(s))^{1/2} e^{\pm i \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})}} e^{\pm i \int_s^{s+L} \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})}}$$

e daqui concluímos:

$$Y_{1,2}(s+L) = Y_{1,2}(s) e^{\pm i \int_s^{s+L} \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})}} \quad (1.5.5)$$

Como, pelo citado teorema,

$$Y_{1,2}(s+L) = Y_{1,2}(s) e^{\pm i\mu} \quad (1.5.6)$$

Uma comparação das equações (1.5.5) e (1.5.6) revela de imediato a igualdade entre  $\mu$  e a integral da fase. Portanto, a matriz de Twiss nos fornece todas as informações para descrever as oscilações bétatron. Os elementos  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\gamma}$  podem ser associados a  $\beta$  apenas, de modo que precisamos somente dos betas e  $\mu$ 's para caracterizar inteiramente o problema. Já sabemos que  $\beta' = 2\bar{\alpha}$ , como o determinante de  $M(s_0)$  é unitário, deduzimos sem nenhum esforço que  $(\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}^2) = 1$ , e daí tiramos  $\bar{\gamma} = \frac{1 + \bar{\alpha}^2}{\beta}$ .

Falta agora, determinar sob que condições a matriz de Twiss descreve oscilações bétatron estáveis.

Esta talvez seja a arte mais fácil de nossa tarefa.

Relembrando que

$M(s_0) = I \cos \mu + J \operatorname{sen} \mu$ , notamos além disso, valer a relação

$$(I \cos \mu_1 + J \operatorname{sen} \mu_1) (I \cos \mu_2 + J \operatorname{sen} \mu_2) = I \cos (\mu_1 + \mu_2) + J \operatorname{sen} (\mu_1 + \mu_2)$$

a partir da qual concluimos indutivamente que

$$(M(s_0))^k = I \operatorname{cosk} \mu + J \operatorname{senk} \mu, \quad (1.5.7)$$

onde  $k$  assume qualquer valor inteiro. Como já visto, a matriz  $(M(s_0))^k$  está ligada à descrição de  $k$  revoluções executadas por uma partícula ao longo da máquina. Segue-se da eq. (1.5.7) que se  $\mu$  é real, os elementos da matriz  $(M(s_0))^k$  não crescem indefinidamente à medida que  $k$  aumenta, mas oscilam dentro de certos limites. Por outro lado, se  $\mu$  não é real,  $\operatorname{cosk} \mu$  e  $\operatorname{senk} \mu$  crescem exponencialmente, e com eles, também os elementos da matriz de transferência. Portanto, as oscilações são estáveis apenas se  $\mu$  é real, isto é, se

$$| m_{11} + m_{22} | < 2 \quad (1.5.8)$$

No projeto de anéis de estocagem, é costumeiro procurar-se uma região onde certos parâmetros importantes mesmo variando, ainda assim acarretam o cumprimento da condição de estabilidade (1.5.8). Esses parâmetros podem ser, por exemplo, valores de  $K_2$  para certos quadrupólos num dado superperíodo. Pro

cura-se representar, num diagrama, para esse exemplo, qual o espectro de valores dentro do qual podemos alterar as características de enfoque sem acarretar perturbações violentas do feixe.

Chamam-se esses diagramas, na literatura especializada, de "necktie diagrams", e apresentamos, nesta tese, indicações desse tipo referentes às nossas propostas de máquina síncrotron.

## 1.6 Números Bêatron

Uma propriedade marcante da integral  $\int_{s_0}^{s_0+L} ds / \beta(s)$

é a independência de seu valor da escolha do ponto  $s_0$ , quando integramos ao longo de uma extensão de arco de comprimento  $L$ , igual ao de um superperíodo. De fato, a periodicidade  $\beta(s+L) = \beta(s)$  acarreta:

$$\int_{s_0}^{s_0 + NL} \frac{ds}{\beta(s)} = \int_0^{NL} \frac{ds}{\beta(s)} = N \mu .$$

Chama-se o invariante  $\nu = N \mu / 2\pi$  de número bêatron; os dois números bêatron  $\nu_x$  e  $\nu_z$  em princípios distintos pela diferença entre  $\beta_x$  e  $\beta_z$ , são importantes parâmetros de um síncrotron, estando ligados às chamadas condições proibidas de oscilação ressonante. Mencionemos de início, as causas físicas dessas ressonâncias. Na prática, o campo total calculado para uma máquina sempre difere do seu valor ideal por uma quantidade  $\delta B_x$  ou  $\delta B_z$ , uma série de causas podendo provocar essas variações. Por exemplo, heterogeneidades ocasionadas por saturação do ferro nos magnetos, discrepâncias na construção dos gaps de passagem, perturbações pelo campo magnético terrestre ou outras fontes sempre introduzem variações  $\delta B_z$ . Da mesma forma, erros de alinhamento e inclinação dos elementos em relação à órbita ideal causam alterações  $\delta B_x$ , e assim por diante. Portanto, as equações de Hill originais se escreverão agora como:

$$\frac{d^2 x_b}{ds^2} + K_x x_b = F_x(s) \quad (1.6.1)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z z = F_z(s), \quad (1.6.2)$$

onde  $F_x(s) = \delta B_z / B_0 \rho$ , e  $F_z(s) = \delta B_x / B_0 \rho$ .  $B_0$  é na realidade, nossa conhecida componente de campo  $B_z(s, 0, 0)$ , e os termos adicionais  $F_x(s)$  e  $F_z(s)$  são consequências das igualdades facilmente verificáveis

$$x' = \frac{eV \delta B_z \Delta s}{E_0} \quad (1.6.3)$$

$$z' = \frac{eV \delta B_x \Delta s}{E_0} \quad (1.6.4)$$

Courant e Snyder, num trabalho clássico, (23) mostraram que as eqs. (1.6.1) e (1.6.2) podem ser transformadas em equações do oscilador harmônico forçado, por intermédio da mudança de variáveis

$$\eta_x = (\beta_x)^{-1/2} x, \quad \eta_z = (\beta_z)^{-1/2} z,$$

$$\Phi_x = \int \frac{ds}{v_x \beta_x}, \quad \Phi_z = \int \frac{ds}{v_z \beta_z}$$

resultando em

$$\frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + (v_x)^2 \eta_x = (v_x)^2 (\beta_x)^{3/2} F_x(s) \quad (1.6.5)$$

$$\frac{d^2 \eta_z}{ds^2} + (v_z)^2 \eta_z = (v_z)^2 (\beta_z)^{3/2} F_z(s) \quad (1.6.6)$$

Abandonando os subscritos  $x$  e  $z$ , pois as equações acima são formalmente idênticas, escrevemos a solução geral para elas como sendo

$$\eta(\Phi) = \frac{v}{2 \operatorname{sen} \pi v} \int_{\Phi}^{\Phi + 2\pi} f(\Psi) \cos v(\pi + \Phi - \Psi) d\Psi \quad (1.6.7)$$

onde  $f(\Psi) = (\beta)^{3/2} F(s)$ .

Aparece claramente aqui, a primeira restrição importante sobre os números  $v_x$  e  $v_z$ . Se forem inteiros,  $\operatorname{sen} \pi v = 0$ , e a solução  $\eta(\Phi)$  tenderá ao infinito, é o caso das forças perturbativas estarem ressonantes com as oscilações bêtatron livres. Por conseguinte, sendo inevitável a ocorrência das variações de campo, garantimos a eliminação das ressonâncias indesejáveis calculando o síncrotron de tal forma que os números bêtatron não sejam inteiros. Na realidade, um conhecimento detalhado da função  $F(s)$  é usualmente impossível, conhecemos apenas certas características estatísticas das perturba-

ções que ela descreve. Mas, mesmo numa formulação estatística, os valores médios dos quadrados das amplitudes de oscilação continuam dependendo do termo  $\sin \pi v$ , como quociente, (2) de maneira que o critério de escolha  $v_x$  e  $v_z$  dado acima permanece inteiramente válido.

A distribuição dos gradientes de campo ao longo da órbita ideal também sofre variações que precisam ser consideradas. É o caso de escrevermos

$$K(s)_{\text{real}} = K(s)_{\text{ideal}} + k(s) \quad (1.6.8)$$

sendo  $k(s)$  o valor da alteração causada por discrepâncias na intensidade dos gradientes. Essa alteração provocará uma mudança da função  $\beta(s)$  correspondente para  $\beta(s) + \Delta\beta(s)$ ; no trabalho de M. Sands (4) existe uma demonstração bem simplificada mas elegante, para o valor de  $\Delta\beta(s)$ , dado em cada coordenada como sendo

$$\Delta\beta_x(s) = \frac{\beta_x(s)}{2\sin 2\pi v_x} \oint k_x(\bar{s}) \beta_x(\bar{s}) \cos 2(\phi(\bar{s}) - \phi\pi v_x) d\bar{s}$$

$$\Delta\beta_z(s) = \frac{z(s)}{2\sin 2\pi v_z} \oint k_z(\bar{s}) \beta_z(\bar{s}) \cos 2(\phi(s) - \phi(\bar{s}) - \pi v_z) d\bar{s}$$

onde  $\phi(s) = \int_0^s ds/\beta(s)$ , significando o símbolo  $\oint$  uma

integral de caminho estendida a todo o percurso da órbita ideal. Uma nova restrição aparece aqui, como consequência do termo  $\sin 2\pi v$ . Agora, valores semi-inteiros ( $1/2, 3/2, \dots$ ) causarão tam-

bêm uma "explosão" nas quantidades  $\beta(s)$ , o que amplia a nossa faixa de valores proibidos para os números bêtatron.

Até o presente momento, todos os dados expostos relacionam-se às alterações nas equações da aproximação linear. Entretanto, é interessante dizer que podemos estudar os efeitos de não linearidades e acoplamentos também através de parametrizações que envolvam os números bêtatron. Não é nosso interesse discutir em detalhe sobre tais efeitos, mas citamos como fonte para os interessados o texto de Henri-Bruck (1). Lá encontramos as seguintes descrições matemáticas para as oscilações acopladas:

$$\frac{d^2 x_b}{ds^2} + (v_x)^2 x_b = \varepsilon z \cos k\theta \quad (1.6.9)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (v_z)^2 z = \varepsilon x \cos k\theta \quad (1.6.10)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante, e  $\theta$  evidentemente uma função do comprimento de arco  $s$ , e os termos  $\cos k\theta$  são componentes harmônicos de ordem  $k$ -ésima para a série de Fourier que descreve a força de acoplamento. As equações de acoplamento podem ser transformadas de modo a dependerem de termos da forma

$$1/2 \left\{ \cos (v_z + k) + \cos \left\{ \begin{matrix} v_z + k \\ k - v_z \end{matrix} \right\} \theta \right\},$$

o que introduz novas condições proibidas:

$$v_x = \left\{ \begin{array}{l} v_z + k \\ v_z - k \\ k - v_z \end{array} \right\}$$

as quais resumimos nas equações:

$$\begin{aligned} |v_x - v_z| &= k, \\ v_x + v_z &= k \end{aligned}$$

Uma análise mais profunda mostra que apenas a soma é instável, enquanto a diferença corresponde a batimentos entre as duas amplitudes. Da mesma forma, análises similares podem ser estendidas a equações contendo acoplamentos e não linearidades de ordem conhecida, como por exemplo,

$$\frac{d^2 x_b}{ds^2} + (v_x)^2 x = \epsilon x^{\ell-1} \cos kN\theta \quad (1.6.11)$$

esta última equação possui soluções instáveis para

$$v_x = kN/\ell$$

Em resumo, todas as condições proibidas envolvendo números bêtatron, sejam oriundas de fenômenos não lineares, sejam ocasionadas por alterações correntes em valores de campos e gradientes, podem ser assumidas pela chamada condição de Wal -

kinshaw:

$$l\nu_x + m\nu_z = n, \quad l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sendo  $|l| + |m| = p$  a ordem da ressonância. No projeto de uma máquina síncrotron, é usual escolherem-se os números bêta - tron de forma a não ser cumprida a condição de Walkinshaw para valores de  $p$  até 4. Ressonâncias de ordem mais elevada podem ser ignoradas, numa primeira abordagem da situação.

## 1.7 Emitância

Usualmente, define-se a emitância de um feixe de partículas como sendo o produto de sua secção reta pelo ângulo ' sólido dentro do qual cada elemento (partícula) está contido. Como nas equações da aproximação linear, o movimento para as coordenadas  $x$  e  $z$  está separado e difere em suas características, usamos uma definição plana para a emitância, segundo a qual essa quantidade em cada coordenada, é fornecida pelas integrais

$$E_x = \iint dx dx' \quad E_y = \iint dy dy' \quad ,$$

que se estendem ao longo de um diâmetro da secção reta do feixe, e onde  $x' = dx/ds$  e  $z' = y' = dz/ds$  são quantidades angulares, pela natureza da parametrização por comprimento de arco. No espaço de fase para cada coordenada, as quantidades  $E_x$  e  $E_z$  como veremos, representam áreas de elipses. A medida que o feixe evolui ao longo dos elementos que constituem o síncrotron, a forma dessas áreas varia, mas seu valor permanece constante, pelo teorema de Liouville. Se tomarmos qualquer das soluções já obtidas para as equações de Hill, e as representarmos genericamente por  $Y$ , a invariância do determinante Wronskiano

$$W = Y Y_1' - Y' Y_1 = \text{cte. fornece,}$$

para  $Y_1 = (\beta)^{1/2} e^{i\Psi}$ , a seguinte relação:

$$\frac{Y^2}{\beta} + (\alpha Y + \beta Y')^2 = \text{cte.} \quad (1.7.1)$$

Isto é fácil de mostrar, pois a solução particular  $Y_1$  satisfaz à equação  $Y_1' = \left( \frac{i - \alpha}{\beta} \right) Y_1$ , que substituída na definição do determinante fornece:

$$Y_1 \left( \frac{i - \alpha}{\beta} Y - Y' \right) = W = \text{cte.} \quad (1.7.2)$$

Notando apenas que  $Y_1 Y_1^* = \beta$ , deduzimos a partir da eq. (1.7.2) o seguinte:

$$WW^* = \frac{Y^2 + (\alpha Y + \beta Y')^2}{\beta} = \text{cte.} \quad (1.7.3)$$

Esta última expressão é conhecida também como invariante de Courant e Snyder, e pode ser escrita usando os resultados da seção 5, como:

$$\gamma Y^2 + 2 \alpha YY' + \beta (Y')^2 = WW^* \quad (1.7.4)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  são as funções de  $s$  que aparecem na definição da matriz de Twiss. A eq. (1.7.4) descreve uma elipse centrada na origem do sistema de coordenadas  $YY'$ . Consideremos agora uma partícula numa dada posição azimutal  $s_0$ , e em movimento ao longo da órbita ideal. As sucessivas posições que essa partícula assume em cada passagem pelo ponto  $s_0$  são soluções para a equação

$$Y^2 + \frac{(\alpha_0 Y + \beta_0 Y')^2}{\beta_0} = \text{cte.} \quad (1.7.5)$$

onde  $\alpha(so) = \alpha_0$  e  $\beta(so) = \beta_0$ .

O valor máximo assumido por  $Y$  na eq. (1.7.5) ocorrerá para a condição  $(\alpha_0 Y + \beta_0 Y') = 0$ , e vale

$$Y_M = (\beta_0 C)^{1/2} \quad (1.7.6)$$

sendo  $\underline{C}$  a quantidade  $WW^*$ .

Pelo teorema de Apolloniuns, a área da elipse ligada ao invariante de Courant-Snyder é dada por

$$S = \pi Y_M Y'_0, \quad Y'_0 = (C/\beta_0)^{1/2}$$

Desse modo,  $S = \pi C$ , e redefinimos a quantidade  $S$  como sendo a emitância  $x(\pi)$  para o feixe em discussão. Ou seja, a emitância passa a ser a área da elipse no espaço de fase, vezes um fator de escala  $1/\pi$ .

Com os resultados anteriores, podemos escrever as eqs. (1.4.5) e (1.4.6) do seguinte modo:

$$x_b = (\epsilon_x)^{1/2} (\beta_x)^{1/2} \cos \left( \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta_x(\bar{s})} + \delta_b \right) \quad (1.7.7)$$

$$z = (\epsilon_z)^{1/2} (\beta_z)^{1/2} \cos \left( \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta_z(\bar{s})} + \delta_z \right) \quad (1.7.8)$$

$\epsilon_x$  e  $\epsilon_z$  representarão, daqui por diante, os valores das emitâncias  $C_x$  e  $C_z$  correspondentes ao espaços de fase definidos para

cada coordenada. As dimensões de feixe  $G_x$  e  $G_z$  são obtidas das relações acima, como sendo:

$$G_x = (\epsilon_x \beta_x)^{1/2} \quad (1.7.9)$$

$$G_z = (\epsilon_z \beta_z)^{1/2} \quad (1.7.10)$$

Em todas as nossas deduções, consideramos apenas os resultados encontrados pela aproximação linear, que não leva em conta alterações oriundas das perdas por radiação. Em aceleradores de prótons, onde essas perdas são normalmente muito pequenas, os fatores  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_z$  dependem praticamente das condições iniciais, ou seja, são influenciados apenas pela situação do feixe à saída do sistema injetor. Em aceleradores de elétrons, o problema cresce em complexidade. As emitâncias para este caso são ao contrário, independentes das características de injeção, mas dependem fortemente dos processos de excitação das oscilações por emissão de radiação, e do comportamento do sistema de cavidades de RF que atuam na aceleração do feixe. Uma discussão matemática detalhada desses aspectos foge aos objetivos do presente resumo, mas daremos alguns resultados úteis para o cálculo das dimensões de feixe no caso em que os processos de excitação das oscilações e amortecimento forçado pelo sistema de RF estejam em equilíbrio.

A seção que descreve o sistema de RF complementarará esses dados. Para começar, recapitularemos alguns fatos referentes à situação física que encontramos num síncrotron de elétrons.

O deslocamento radial total a partir da órbita de referência, é dado por

$$x = x_b + \eta(s) \frac{\Delta p}{p},$$

e no caso de ocorrer uma variação  $\delta E$  da energia, devida por exemplo, à emissão de um quantum de radiação, haverá uma mudança na órbita de referência, mas não uma alteração no deslocamento radial descrito pela equação acima. Matematicamente,

$$\delta x = \delta x_b + \frac{\delta E}{E_0} \eta(s) = 0, \text{ o que acarreta}$$

$$\delta x_b = - \eta(s) \frac{\delta E}{E_0} \quad (1.7.11)$$

Como a radiação é emitida dentro de um cone com semi-abertura  $1/\delta \ll 1$ , podemos assumir também a aproximação

$$\delta x' = 0 \rightarrow \delta x'_b = - \eta'(s) \frac{\delta E}{E_0} \quad (1.7.12)$$

Tudo isso nos permite escrever uma expressão para  $\delta W$ , relacionada ao invariante de Courant-Snyder:

$$\delta W = -\frac{E^2}{E_0^2} (\gamma \eta^2 + 2 \alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2) - \frac{2E}{E_0} (\gamma x \eta + \alpha (x \eta' + \eta x') + \beta x' \eta') \quad (1.7.13)$$

Não existe qualquer correlação entre as fases da oscilação betatron radial e o tempo da emissão do quantum E, de modo que podemos calcular o valor médio  $\delta \langle W \rangle$  sobre todas as fases iniciais. Obtemos:

$$\delta \langle W \rangle = \frac{E^2}{E_0^2} (\gamma \eta^2 + 2 \alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2) = \frac{E^2 H}{E_0^2} \quad (1.7.13)$$

A função H depende apenas da disposição de campos ao redor da máquina, sendo dependente de modo explícito do azimute  $s$ .

Uma discussão mais aprofundada das características da distribuição de energia radiante (5) permitirá escrever uma equação de evolução temporal para  $\langle W \rangle$ :

$$\frac{\delta \langle W \rangle}{\delta t} = N \dot{\gamma} \langle E^2 \rangle \frac{H}{E_0^2} \quad (1.7.15)$$

sendo  $N \dot{\gamma}$  a taxa de emissão de quantum por unidade de tempo.

Após uma revolução completa, a variação total de W será

$$\Delta \langle W \rangle = \int \frac{\delta \langle W \rangle}{\delta t} dt = \frac{1}{c} \oint ds N \dot{\gamma} \langle E^2 \rangle \frac{H}{E_0^2} \quad (1.7.16)$$

Para uma máquina isomagnética,

$$\Delta \langle W \rangle = \frac{2 \pi \rho}{c E_0^2} N \dot{\gamma} \langle E^2 \rangle \langle H \rangle_M \quad (1.7.17)$$

sendo  $\langle H \rangle_M = \frac{1}{2 \pi \rho} \int_M H(s) ds$ . Essa última integral é

calculada apenas nos ímãs defletores, onde ocorre normalmente a emissão dos quantum de energia radiante. Isto é o quanto basta para escrevermos uma equação diferencial que descreva um processo de difusão  $\langle W \rangle$ . Os cálculos detalhados estão expostos na referência já mencionada; exibimos aqui o resultado final obtido para a dimensão radial do feixe:

$$G_x^2 = \frac{\gamma^2 \langle H \rangle_M}{J_x \rho} \frac{55 \eta \beta}{32 (3)^{1/2} mc} \quad (1.7.18)$$

onde  $J_x = 1 - D$ ,  $D = \frac{1}{2 \pi \rho} \oint \eta \frac{(s)}{\rho} ds$

Uma simplificação posterior permite escrever, com os resultados antecedentes, uma equação que expressa a emitância radial  $\epsilon_x$  como função da quantidade  $\langle H \rangle_M$ :

$$\epsilon_x = \left\{ 0,86 \cdot 10^{-3} \frac{E(\text{GeV})}{R^{1/2}(\text{m})} \right\}^2 \bar{U}_x \quad (1.7.19)$$

$$\bar{U}_x = 2 \left\langle \frac{1}{\beta_x} \left( \eta^2 + \left( \beta_x \eta' - \frac{1}{2} \beta'_x \eta \right)^2 \right) \right\rangle \quad (1.7.20)$$

$\bar{U}_x$  é o invariante  $\langle H \rangle_M$  reescrito sob outra forma, considerando os valores de  $\alpha$  e  $\gamma$  em termos de  $\beta_x(s)$  e sua derivada.

A média indicada calcula-se sobre o comprimento magnético efetivo dos defletores, ou seja, sobre a extensão em que se faz sentir a ação de seus campos. A quantidade  $R$  na eq. (1.7.19) relaciona-se com o comprimento total da órbita de referência por meio de igualdade:  $C = 2 \pi R$ . Está claro o aspecto mais notável do problema: podemos estimar a emitância devida aos processos que envolvem emissão de radiação, por meio de uma equação que considera apenas as funções bêtatron e a dispersão calculadas com o uso da aproximação linear. Em resumo, as características geométricas do anel permitirão prever o comportamento da emitância radial. Notamos da eq. (1.7.20) que podemos atuar com baixos valores de emitância radial restringindo o crescimento de  $\eta$  e  $\beta_x$  nos ímãs defletores. Considerações experimentais (10) acarretam o aparecimento também de uma emitância vertical, mesmo em máquinas monoplanares nas quais não existe a função  $\eta_z$ . Existe uma estimativa para o coeficiente de acoplamento entre  $\bar{U}_x$  e  $\bar{U}_z$ :

$$\bar{U}_z / \bar{U}_x = 0,1 \quad (1.7.21)$$

Com isso o problema fica inteiramente determinado, já que

$$\epsilon_z = \bar{U}_z \left\{ 0,86 \cdot 10^{-3} (E/R)^{1/2} \right\}^2 \quad (1.7.22)$$

### 1.8 Sistema de Rádio-Frequência

As perdas por irradiação de um elétron são compensadas, no síncrotron, por meio de um sistema de cavidades de RF encarregado de repôr ao feixe. A voltagem de pico  $\bar{V}$  da tensão de RF aplicada precisa ser maior que o fator  $U_0/e$ , onde  $U_0$  é a perda de energia por irradiação média para uma partícula na órbita de referência. Uma partícula síncrona, isto é, que recebe do sistema de RF uma energia igual à perdida, cruza um setor de aceleração com fase  $\phi$  e obedecendo-se à equação

$$U_0 = e\bar{V} \text{ sen } ( h \omega_0 t + \phi ) \quad (1.8.1)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de revolução para uma partícula na órbita de referência, e  $h$  é um inteiro chamado de número harmônico. Partículas chegando em tempo certo à cavidade de RF aceleradora receberão a quantidade correta de energia. Por outro lado, uma partícula com mais energia que a partícula síncrona possuirá geralmente um período de revolução mais longo, exigirá menos energia do sistema de RF mas nele entrará fora de fase. Isso gerará oscilações em energia, designadas por oscilações síncrotron. Para pequenos valores  $\epsilon$  do desvio de energia, podemos escrever (14):

$$U = U_0 + D\epsilon \quad (1.8.2)$$

A partir dessa aproximação, deduzimos as equações longitudinais de movimento

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{T_0} (FF(\tau) - D) \quad (1.8.3)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\alpha c \frac{\varepsilon}{E_0} \quad (1.8.4)$$

onde  $\tau$  é o deslocamento longitudinal em relação à partícula síncrotron, ao longo da órbita de referência,  $\alpha$  é o fator de compactificação de momentum, e

$$FF(\tau) = eV_{RF}(\tau) - U_0 = \frac{-e\tau}{c} \left\{ \frac{dV_{RF}}{dt} \right\}_0 \quad (1.8.5)$$

Trataremos do fator  $\alpha$  a seguir, no capítulo 2. Combinando as equações anteriores, encontramos:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{\alpha}{E_0 T_0} e V'_{RF}(0)\tau + \frac{D}{T_0} \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad (1.8.6)$$

$T_0$  é um período de revolução para a frequência  $\omega_0$ . Essa equação descreve uma oscilação amortecida se  $D > 0$  e  $V'_{RF}(0)$  for menor que 0, no momento de passagem da partícula síncrona.

Esse é um aspecto importante do problema: o comportamento do sistema de RF pode amortecer ou reforçar as oscilações de energia, como é intuitivo inferior. A frequência de oscilação síncrotron  $\Omega_0$  é dada por:

$$\Omega_0^2 = \frac{-\alpha e V_{RF}'(0) \omega_0}{2 \pi E_0} \quad (1.8.7)$$

Em analogia aos números de oscilações bêtatron, definimos também

$$\nu_s = \frac{\Omega_0}{2 \pi f_0} \quad (1.8.8)$$

É importante ressaltar que afora as ressonâncias devidas à condição de Walkinshaw, podem ocorrer também as chamadas ressonâncias síncron-bêtatron, para as quais contribui a existência de valores não nulos da dispersão  $D$  nos pontos onde se inserem cavidades de RF. Para essa situação, vale a condição

$$l \nu_x + m \nu_z + r \nu_s = k \quad (1.8.9)$$

Sob o ponto de vista do cálculo de uma disposição de elementos usando a aproximação linear, este último fato é muito significativo. Ele nos diz que, embora as características do sistema de RF estejam fisicamente separadas da disposição de campos, é necessário prevermos regiões livres nas secções retas, nas quais a dispersão  $D$  seja nula ou tão pequena quanto possível, de modo a introduzirmos ali as cavidades de RF.

## 1.9 Cromaticidades Naturais

Como podemos verificar, o fator  $K_V$  que define a função de enfoque quadrupolar é expresso por

$$K_V = \frac{1}{B_Z(s,0,0) \rho} \frac{\partial B_Z}{\partial x} \quad (1.9.1)$$

O termo  $1/B_Z(s,0,0) \rho$  é dependente da energia de referência  $E_0$  e conseqüentemente, uma dispersão  $\Delta p/p$  do momento acarretará uma variação  $\Delta K_V/K_V$  de tal modo que

$$\frac{\Delta K_V}{K_V} = \frac{-\Delta p}{p} \quad (1.9.2)$$

Como os valores do número de oscilações bétatron  $\nu_z$  estão ligados aos parâmetros de enfoque, temos também

$$\frac{\Delta \nu_z}{\nu_z} = \frac{-\Delta p}{p} \tau \quad (1.9.3)$$

onde o fator de proporcionalidade  $\tau$  é denominado cromaticidade natural, pela analogia existente com a aberração cromática de sistemas ópticos. É possível deduzir uma expressão integral para  $\Delta \nu_z$  envolvendo  $K_V$  e  $\beta_z$ , (5), a eq. (1.9.3) pode então ser modificada para

$$\frac{\Delta \nu_z}{\nu_z} = \left\{ \frac{-1}{4 \pi \nu_z} \int_0^C K_V(s) \beta_z(s) ds \right\} \frac{\Delta p}{p} \quad (1.9.4)$$

A integral entre chaves, estendida a toda a circunferência do anel, define a cromaticidade natural para a coordenada  $z$ ; uma expressão análoga possibilita o cálculo de uma cromaticidade natural radial. As cromaticidades podem ser corrigidas com o uso de campos hexapolares, no entanto, esses campos não podem a rigor ser tratados pela aproximação linear: a matriz de transferência para um hexapólo, em 1.<sup>a</sup> ordem, coincide com a matriz de transferência para uma secção reta (3). Campos hexapolares podem ser estudados por dois caminhos: utilizando uma teoria de 2.<sup>a</sup> ordem, como o faz por exemplo, o programa TRANSPORT (ref. 11), ou substituindo a representação matricial do elemento hexapolar por uma estrutura que a aproxime em 1.<sup>a</sup> ordem.

Um interessante trabalho de H. Wiedemann (13) mostra como simular a presença de hexapólos por meio de quadrupólos com pequeno comprimento magnético, e função de enfoque  $K_V$  expressa matematicamente em termos de parâmetros do campo hexapolar. No referido trabalho, os dados obtidos com um programa do autor (PATRÍCIA) foram comparados posteriormente com resultados encontrados com o uso do AGS, que foi o programa utilizado no desenvolvimento desta tese. Portanto, numa etapa futura, o AGS poderia ser eventualmente empregado no cálculo de correções cromáticas para as nossas propostas de máquina síncrotron.

## 1.10 Wigglers

Wigglers são dispositivos que produzem aceleração radial no feixe de elétrons de um síncrotron, em trechos fora dos ímãs defletores. Estruturalmente, o tipo padrão, com ímãs horizontais, consiste de uma sequência de dipolos com campo particularmente intenso, de modo que o raio de curvatura para a aceleração radial induzida é muito pequeno: o feixe emite radiação de comprimento de onda mais curto que aquela presente nos ímãs defletores. Por várias razões, é grande em nosso País o interesse pela construção e operação desses dispositivos; portanto, resumiremos aqui os efeitos decorrentes da inserção de wigglers em máquinas síncrotron, que podem ser tratados com o emprêgo da aproximação linear. Numa primeira abordagem, um wiggler pode ser simulado naturalmente como um conjunto de ímãs defletores retangulares de campo muito elevado. No entanto, em um wiggler real, os efeitos do campo nas bordas da estrutura devem ser levados em conta; a ref. 14 apresenta as matrizes de transferência que consideram tais efeitos, para wigglers consistindo de 3 defletores horizontais. Por sua vez, os trabalhos de Isoyama e outros (15), indicam que um wiggler horizontal é equivalente a uma secção reta no plano horizontal, e a um quadrupôlo no plano vertical, com o valor da função de enfoque igual a  $L/2\rho_W^2$ , onde  $L$  é o comprimento do wiggler, e  $\rho_W$  o seu raio de encurvamento. Via de regra, os efeitos apresentados num feixe de elétrons pela operação desses dispositivos são principalmente os seguintes:

- 1 - Alterações de  $v_z$ ;
- 2 - Alterações na emitância
- 3 - Elevação das perdas por radiação em um ci-

clo de excursão do feixe.

Sob o ponto de vista do desenho de um arranjo de elementos para um anel síncrotron, podemos garantir previamente a redução dos efeitos 1 e 2. Para reduzir o efeito 1 se requer um baixo valor de  $\beta_z$  na região de inserção para um wiggler. O efeito 2 também pode ser minimizado, prevendo-se um baixo valor da dispersão de energia na região de inserção. O efeito 3 é compensado elevando-se a voltagem de trabalho no sistema de RF. Como norma de projeto, procura-se geralmente obter uma configuração de elementos com secções retas onde  $\beta_z$  e  $\eta_x$  assumam valores mínimos, e que tenham comprimento suficiente para acomodar os dispositivos requeridos, sejam wigglers, sejam cavidades de rádio frequência.

Concluindo assim, este resumo, iremos nos próximos capítulos discutir os aspectos mais técnicos desta tese, ou seja, os recursos computacionais empregados, e os resultados e conclusões a que chegamos.

## CAPÍTULO II

### TRATAMENTO COMPUTACIONAL DA APROXIMAÇÃO LINEAR

#### 1.2 Descrição do software utilizado: o programa AGS

O programa AGS (Alternating Gradient Synchrotron) é um conjunto de rotinas FORTRAN capaz de executar, com o uso da Aproximação Linear, os cálculos mais frequentes que aparecem no projeto de máquinas síncrotron (7). Em resumo, as principais possibilidades oferecidas são as seguintes:

i) Cálculo das matrizes de transformação (matrizes de transferência ou transporte) características de um arranjo determinado de Elementos (dipolos, quadrupolos, etc.);

ii) Cálculo das funções  $\eta_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_z$ ,  $\mu_x/2\pi$ ,  $\mu_z/2\pi$ ,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_z$  que compõem a matriz de Twiss correspondente a cada ponto do arranjo;

iii) Modificação de parâmetros da estrutura do anel (comprimentos, gradientes, etc.) visando obter valores previamente especificados dos números e funções bêtatron, e dispersão de energia:

iv) Determinação da órbita fechada, caso haja, para uma partícula com  $\Delta p/p \neq 0$ ;

v) Determinação de trajetórias de partículas ao longo de toda a estrutura ou parte dela, dadas as coordenadas iniciais. Esse cálculo é feito porém, com base nas matrizes do ítem i), e não leva em conta perdas por radiação;

Maiores detalhes poderão ser encontrados na ref. 7, que contém todas as informações necessárias não só à compreen-

são como também, perfeita utilização do programa.

Daremos aqui uma visão global das características principais do AGS, procurando situá-las dentro da teoria exposta anteriormente.

Como dados iniciais, são fornecidos ao programa os elementos que compõem a estrutura, descritos em termos de seus parâmetros típicos. No caso em estudo, em que calculamos estruturas compostas de ímãs defletores, quadrupólos e secções retas, os parâmetros foram os seguintes:

Para quadrupólos:

Comprimento magnético efetivo e valor de  $K_z$ ;

Para secções retas:

Comprimento;

Para ímãs defletores:

Ângulo de deflexão e comprimento magnético efetivo.

Por comprimento magnético efetivo entende-se a extensão da região do elemento onde se confina a ação do campo ou gradiente de campo.

Esta é a situação mais simples, em que algumas condições são assumidas implicitamente pelo programa. São elas: quadrupólos perfeitamente retangulares, separabilidade entre funções de enfoque e fleccão, e ímãs defletores do tipo curvilíneo. Mas se os quadrupólos não forem retangulares, se tiverem formato trapezoidal os mesmo se a estrutura não obedecer à condição de separabilidade, o programa pode ler os parâmetros que descrevem essas situações e computar as matrizes de transferência sem maiores problemas. A questão da diferença entre ímãs defletores retangulares e curvilíneos também pode ser tra

tada pelo AGS. Nos magnetos do tipo curvilíneo, como os usados pelo DCI, a órbita ideal corta a região de limite do campo magnético perpendicularmente, tanto na entrada quanto na saída do magneto. Já nos defletores retangulares, os ângulos de saída e incidência para a órbita são distintos de 90°, e a condição de separabilidade não será cumprida em geral: aparecerão gradientes de enfoque às bordas do magneto. Para maiores detalhes, as refs. 8 e 9 apresentam cálculos completos para ambas as situações. Com base nos parâmetros dos elementos, são calculadas então as matrizes de transferência.

Vale observar que o programa assume  $K_z$  como sendo

$$K_z = \frac{-1}{\rho B_z(s)} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

ou seja, é empregada a condição do gradiente vertical negativo para representar enfoque no plano  $z$ . Adotando a terminologia empregada no manual do AGS, se IEL é o número de elementos em um superperíodo, já que sabemos as matrizes de transferência  $M_i$ , para cada elemento, calcula-se então:

$$IEL,1 = M_{IEL} M_{IEL-1} \dots M_2 M_1 \quad (2.1.1)$$

Mas a equação acima representa a matriz de Twiss para todo o superperíodo, o programa assume então a igualdade

$$IEL,1 = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_1 \sin \mu & \beta_1 \sin \mu \\ \gamma_1 \sin \mu & \cos \mu - \alpha_1 \sin \mu \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  são as funções bêatron à entrada do ele-

mento 1. Como é fácil de verificar, (2) os valores para  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i = i = 1, \dots, IEL$  podem ser obtidos a partir de uma transformação de similaridade, já que

$$IEL + i, i+1 = M_i^{-1} IEL + i - 1, i \quad (2.1.3)$$

Na realidade, manipulando-se convenientemente os dados iniciais, podemos obter as funções bétatron para qualquer ponto da estrutura, e não apenas para as entradas dos elementos. Para os avanços de fase, é imediato concluir que

$$\mu_i = \arctan \frac{m_{12}^i}{\beta_i m_{11}^i - \alpha_i m_{12}^i} \quad (2.1.4)$$

O programa fornece então, a soma dos avanços de fase até o k-ésimo elemento,

$$\mu_k = \sum_{i=1}^k \mu_i \quad (2.1.5)$$

Uma listagem de saída simples do AGS conterá então, além dos dados de entrada, os valores  $\alpha_x, \alpha_z, \beta_x, \beta_z, \alpha_p, \alpha_p$ , calculados para a entrada de cada elemento, e os avanços de fase  $\mu_x/2\pi$  e  $\mu_z/2\pi$  correspondentes à saída de cada elemento.

São fornecidos ainda os co-senos dos avanços de fase totais, para demarcar as regiões de estabilidade, os números bétatron  $\nu_x$  e  $\nu_z$ , as cromaticidades naturais e o fator de compactificação de momentum. Explicaremos a partir de agora o papel desta última quantidade, que está relacionada à dispersão de energia  $\eta_x$ . Para o cálculo de  $\eta_x$ , o programa adota a seguin-

te abordagem:

Tomando uma equação geral do tipo

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + \left\{ \frac{1 - n(s)}{\rho^2} \right\} X = \frac{1}{\rho(s)} \quad (2.1.6)$$

similar à eq. (1.3.6), notamos que ela admite uma solução completa tal que

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X'(s) \\ \frac{\Delta p}{\rho} \end{pmatrix} = M(s/s_0) \begin{pmatrix} X(s_0) \\ X'(s_0) \\ \frac{\Delta p}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

tendo a matriz  $M(s/s_0)$  uma forma característica para  $\frac{n(s)}{\rho^2} < 0$   
ou  $\frac{n(s)}{\rho^2} > 0$ :

$$\frac{n(s)}{\rho^2} > 0,$$

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} \cos \phi & K^{-1/2} \text{sen } \phi & \frac{1}{\rho K} (1 - \cos \phi) \\ -K^{-1/2} \text{sen } \phi & \cos \phi & \frac{1}{\rho K^{1/2}} \text{sen } \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{n(s)}{\rho^2} < 0,$$

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & (-K)^{-1/2} \sinh \psi & \frac{1}{\rho(-K)} (\cosh \psi - 1) \\ (-K)^{1/2} \sinh \psi & \cosh \psi & \frac{1}{\rho(-K)^{1/2}} \sinh \psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  tem os mesmos valores que na tab. 1.1.

Mas  $\eta_x(s)$  e  $\eta'_x(s)$  são soluções com periodicidade  $L$  da eq. (2.1.6); escrevemos então, para um superperíodo do anel:

$$\begin{pmatrix} \eta_x(s_0 + L) \\ \eta'_x(s_0 + L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x(s_0) \\ \eta'_x(s_0) \end{pmatrix} = \bar{M}(s_0 + L, s_0) \begin{pmatrix} \eta_x(s_0) \\ \eta'_x(s_0) \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

onde agora  $\bar{M}(s_0 + L, s_0)$  é o produto de matrizes do tipo das descritas pelas eqs. (2.1.8) e (2.1.9). O programa AGS computa a matriz  $\bar{M}(s_0 + L, s_0)$  para a entrada de cada elemento  $\underline{i}$ , resolvendo em seguida as igualdades

$$\eta'_{\underline{x}}{}^i = \alpha_{\underline{p}}^i = \frac{\bar{m}_{13}^i \bar{m}_{21}^i + (1 - \bar{m}_{11}^i) \bar{m}_{23}^i}{(1 - \bar{m}_{11}^i)(1 - \bar{m}_{22}^i) - \bar{m}_{21}^i \bar{m}_{12}^i} \quad (2.1.11)$$

$$\eta_{\underline{x}}^i = \alpha_{\underline{p}}^i = \frac{\bar{m}_{12}^i \alpha_{\underline{p}}^i + \bar{m}_{13}^i}{1 - \bar{m}_{11}^i} \quad (2.1.12)$$

obtidas a partir da eq. (2.1.10), sendo os  $\bar{m}^i$  evidentemente as  ${}_{jk}^i$

entradas da matriz  $\bar{M}(s_0 + L, s_0)$ . O fato de termos calculado arranjos de elementos que s3o possuem 3m3s defletores no plano horizontal, acarretar3a o aparecimento daqui em diante, apenas da dispers3o  $\eta_x$  raz3o pela qual suprimiremos o 3ndice x. Caso t3v3ssemos, como o DCI, 3m3s defletores verticais, um procedimento an3logo ao descrito acima permitiria calcular tamb3m  $\eta_z$ . Normalmente, o AGS fornece a dispers3o horizontal, sua derivada em rela3o ao par3metro  $\underline{s}$  e determina a 3rbita fechada, caso haja, para uma part3cula com  $\Delta p/p \neq 0$ , utilizando para isso um procedimento iterativo que resolve a eq. (2.1.7). Uma sequ3ncia importante de se ter  $\Delta p/p \neq 0$  para uma dada part3cula, 3 a mudan3a no comprimento da 3rbita fechada que ela vier a descrever. Pela aproxima3o linear, essa mudan3a  $\delta C$  pode ser calculada como sendo (4):

$$\oint \frac{\eta(s) \Delta p}{\rho(s) p} ds \quad (2.1.13)$$

O fator de compactifica3o de momentum 3 ent3o definido pela igualdade:

$$\gamma_T = \left( \frac{\delta C/C}{\Delta p/p} \right)^{1/2} \quad (2.1.14)$$

que mede o quanto est3o ligadas entre si as 3rbitas de part3culas com diferentes valores de momentum linear. O programa calcula  $C_i$  por meio da aproxima3o

$$\delta C_i = \frac{\phi_i}{2} (x_{i-1} + x_{i+1}) \quad (2.1.15)$$

sendo  $\delta C_i$  o deslocamento da órbita correspondente a um ímã defletor com ângulo de deflexão  $\phi_i$ . O AGS soma essas contribuições e aplica a eq. (2.1.14) para obter o fator de compactificação.

Além disso, podem ser calculadas também as cromaticidades naturais descritas no capítulo I, aproximadas pelas integrais

$$Q'_x = \frac{-1}{4\pi} \int_{M+Q} K_h \beta_x ds \quad (2.1.16)$$

$$Q'_z = \frac{-1}{4\pi} \int_{M+Q} K_v \beta_z ds \quad (2.1.17)$$

O símbolo M+Q significa integração sobre magnetos fletores e quadrupólos: o programa efetua os cálculos acima assumindo condição de funções separáveis sem correções hexapolares. O AGS inclui ainda, facilidades para cálculos geométricos (coordenadas de pontos da estrutura, determinação do centro da máquina, raio máximo, etc.), podendo ser também estudados os efeitos da distribuição de erros de alinhamento nos fletores e quadrupólos, sejam essas distribuições uniformes ou mesmo gaussianas.

## 2.2 Emprêgo Comparativo do AGS

Como um teste operacional para a versão do AGS implementada no computador do CBPF (IBM 325), e visando adquirir habilidade e confiança no uso do programa, procuramos reproduzir os resultados de um cálculo previamente executado, de preferência desenvolvido por meio de um "softwarw" distinto.

Escolhemos para tanto, os trabalhos de Miyahara , Isoyama e outros (15 e 16). Tratam-se de levantamentos de características de uma máquina síncrotron dedicada, composta de 10 superperíodos contendo um magneto flêtor, dois doublets de quadrupólos e secções retas entre elementos. Nos trabalhos citados, empregou-se para o cálculo das funções bêtatron e dispersão de energia, o programa PETROS de J. Kewish, do Laboratório DESY de Hamburgo, em uma versão modificada no Japão para trabalhar com magnetos fletores curvilíneos, ao contrário da versão original que só aceita fletores retangulares.

Com os dados iniciais utilizados pela equipe japonesa, tentamos reproduzir as funções características para um dos modos de operação do síncrotron proposto por ela, só que empregando o AGS.

Os resultados encontrados coincidiram perfeitamente com os apresentados para o chamado modo de operação em emitância variável, que foi o escolhido para a realização do teste.

A fig. 2.1 ilustra o conjunto de gráficos correspondente ao modo de emitância variável, exposto nos trabalhos da equipe japonesa, que reproduzimos empregadno o AGS.

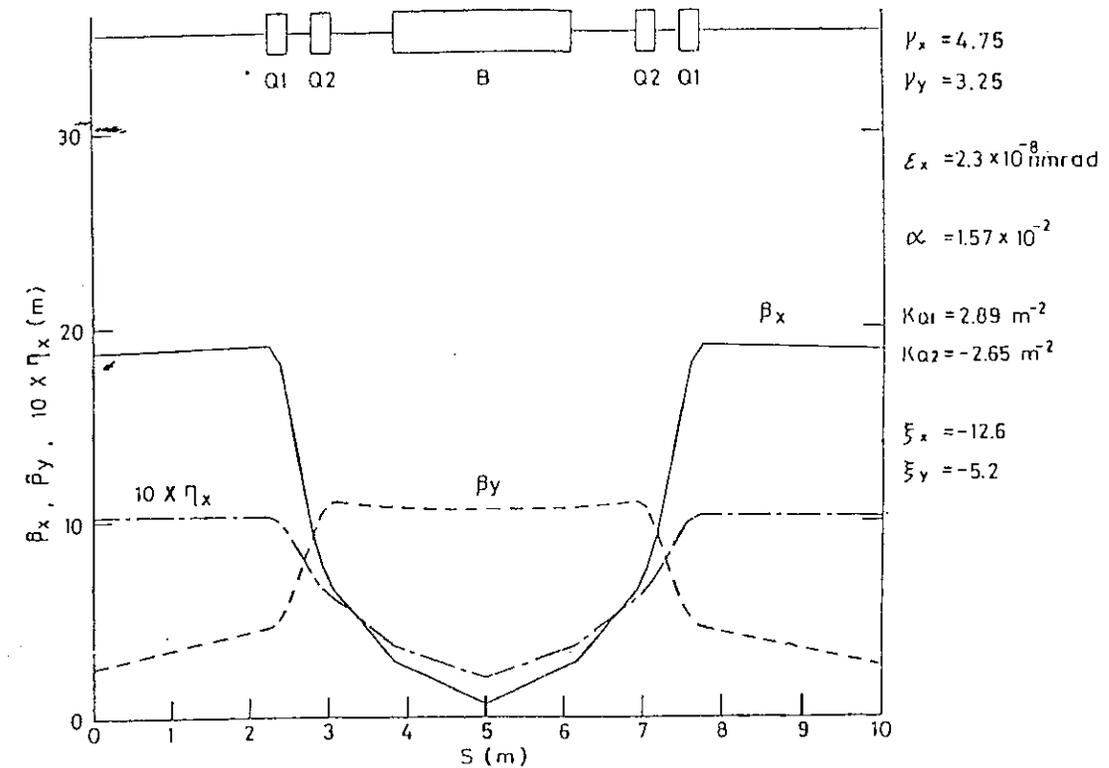
Nossa versão desse programa (75.01) ocupou um es-

paço total de memória de 78 páginas (1.204 bytes por páginas), com um tempo mínimo de CPU de 8 segundos.

Posteriormente, reproduzimos também os gráficos de funções bêatron correspondentes à configuração original do DCI (ver página 61, fig. 3.1).

No capítulo 3 desta tese, mostramos as conclusões de cálculos feitos para uma configuração similar à da fig. 2.1 abaixo, mas que aproveita os magnetos defletores horizontais originais do DCI.

fig. 2.1



CAPÍTULO III

## PROPOSTAS DE CONFIGURAÇÃO PARA UM SÍNCROTRON DEDICADO

## 3.1 Introdução

Baseados no exposto anteriormente, podemos resumir agora os principais requisitos necessários à construção de uma máquina síncrotron dedicada. Dispomos os elementos em arranjos que cumpram as seguintes condições:

- 1.1) Emitâncias de feixe tão baixas quanto possível;
- 2.1) Ressonâncias perigosas neutralizadas, através de uma seleção adequada dos números bétatron  $\nu_x$  e  $\nu_z$ , de modo que não se cumpra a condição de Walkinshaw;
- 3.1) Espaço livre suficiente para inserção de cavidades de RF, hexapólos de correção, wigglers, onduladores, etc.; nos lugares onde forem colocados wigglers, cavidades e onduladores, o feixe deve ter comportamento tal, que os campos dos elementos inseridos não introduzam perturbações destrutivas.

Do ponto de vista da Física de Feixe, isto significa:

- 1.2) Dimensões  $G_x$  e  $G_z$  tão pequenas quanto possível nos pontos de extração de radiação (ímas defletores), o que se consegue com baixos valores de  $\beta_x$ ,  $\beta_z$  e  $\eta_x$  nesses pontos.

Essas imposições estão obviamente, em correspondência com a condição de termos baixas emissões;

2.2) Nas secções retas,  $\beta_z$  deve ser pequena na região de inserção de um wiggler, caso este possua campo defletor horizontal;

3.2) A dispersão de energia  $\eta_x$  também deve ser minimizada nas secções retas, seja nos pontos de colocação de cavidades de RF, seja nas regiões de inserção de wigglers.

Tendo em mente as exigências acima, procuramos aproveitar os magnetos fletores do DCI em configurações que se guissem basicamente, dois critérios:

I) Uma geometria de periodicidade elevada, com grande número de secções retas e superperíodos (acima de 7) e na qual os parâmetros dos quadrupólos de enfoque pudessem ser calculados livremente, com o objetivo de obtermos um comportamento tão ideal quanto possível da dispersão e funções bêtatron,

II) Uma geometria distinta ainda, daquela característica do DCI, mas na qual aproveitariamos também os quadrupólos originais da máquina francesa, o que elimina no projeto, a possibilidade de livre cálculo dos parâmetros de enfoque. O trabalho de ajuste fica assim, limitado à variação dos afastamentos entre elementos, com vistas a reproduzir ou no máximo, otimizar um pouco certas características do DCI.

Os dados referentes aos ímãs defletores e quadrupólos de enfoque da citada máquina francesa acham-se expostos na tabela 3.1. São fornecidas as informações suficientes para se levantar, com o auxílio do programa AGS, as funções

características  $\beta_x$ ,  $\beta_z$ ,  $\eta_x$ , etc., referentes à qualquer outro tipo de configuração. Um exame dos gráficos dessas funções para o DCI ilustra claramente o cumprimento das condições 1.2, 2.2 e 3.2.

Em particular, estão evidenciados os baixos valores de  $\beta_z$  e  $\eta_x$  nas secções retas, o que significa adequação ao uso de wigglers. Poderíamos no entanto, tentar uma redução da emitância do feixe nos ímas defletores. Além disso, a configuração original possui 2 superperíodos com 2 secções retas longas, e seria desejável aumentar o número dessas secções.

Observando o critério I, foi testada uma disposição de 12 superperíodos, com 12 secções retas de 4m cada, um superperíodo sendo composto de um ímã defletor do DCI, e dois doublets de quadrupólos de focalização e defocalização, cada quadrupólo com .35m de comprimento magnético efetivo. Essa configuração foi calculada para dois modos de operação distintos, um designado de emitância variável e o outro, modo de arco acromático. Verificou-se também, o efeito causado nessa configuração, pelo aumento do comprimento das secções retas.

Observando-se o critério II, estudou-se uma geometria com 6 superperíodos, cada um composto por uma secção reta de 4m, e um arranjo com 3 quadrupólos e 2 ímas defletores originais do DCI. Testou-se ainda, uma configuração clássica de 12 superperíodos compostos por células simples de focalização e defocalização (arranjo FODO). Neste último caso, cada superperíodo contém, além das secções retas, um ímã defletor e dois quadrupólos originais do DCI. Os resultados conseguidos acham-se expostos nas páginas seguintes, com as devidas conclusões e sugestões, para os arranjos em conformidade com os critérios I e II.

Tabela (3.1)

## CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DO DCI

Magnetos fletores - (ação no plano horizontal)

Comprimento magnético efetivo:	2	m
Ângulo de fleccão:	0,5236	rad
Raio de curvatura:	3,82	m
Campo:	1,6	T

Quadrupólos de enfoque -

Comprimento magnético efetivo:	0,5	m
Gradiente máximo:	12	T/m

Rigidez magnética ( B ):

6,112 T.m

Energias:

0,6 a 1,85 GeV

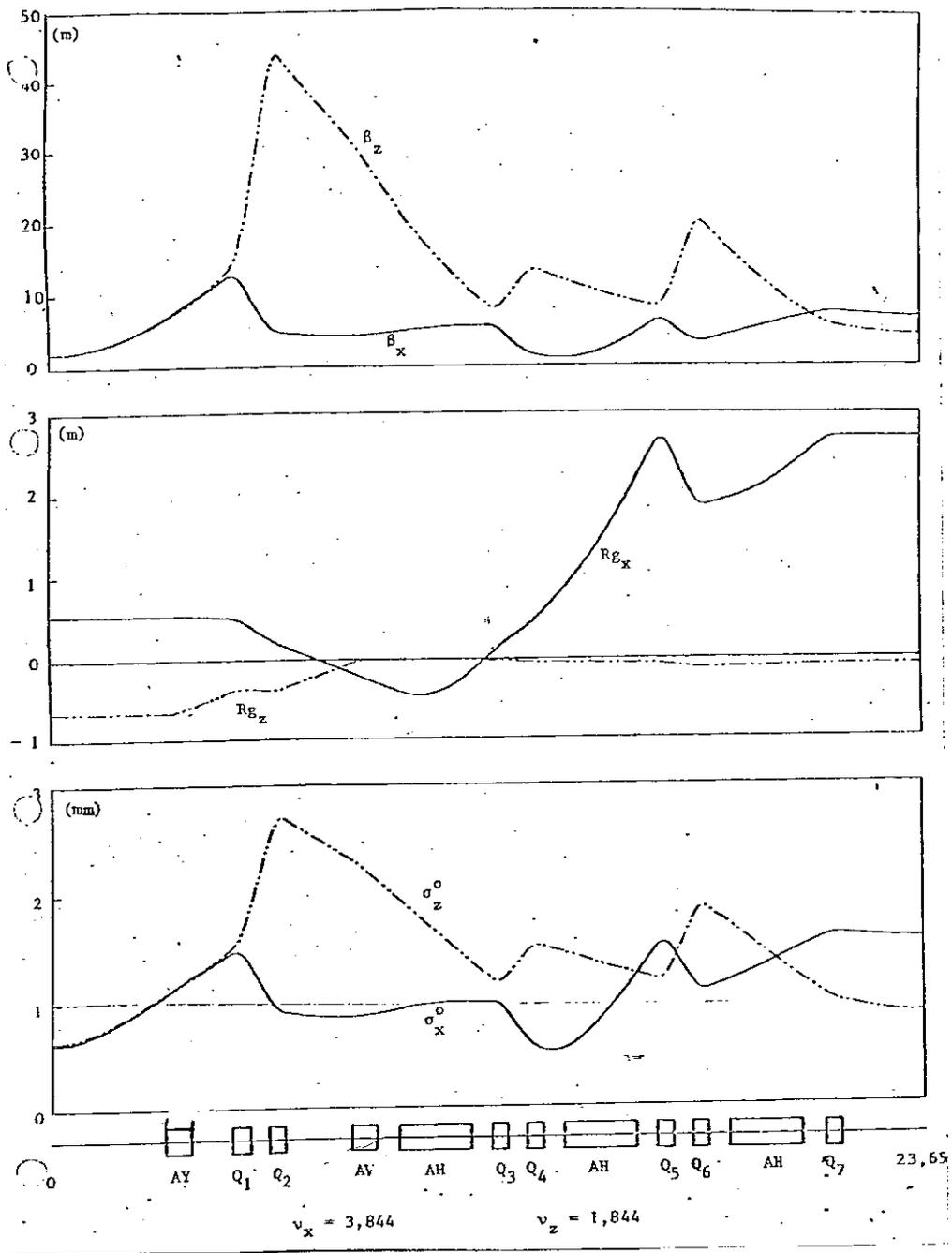
Emitâncias: para 1,85 GeV,

$$\epsilon_x = 1,3 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = 1,4 \times 10^{-7}$$

Na página a seguir, estão ilustrados os gráficos para as funções bêtatron  $\beta_x$  e  $\beta_z$ , as dispersões  $\eta_x$  e  $\eta_z$  (esta última, devida à presença de magnetos flectores no plano vertical), e dimensões de feixe  $G_x$  e  $G_z$ , para um superperíodo do DCI.

fig. 3.1



### 3.2 Resultados para o Critério I

Procurou-se dimensionar uma configuração que cumprisse os requisitos apresentados na introdução deste capítulo, aproveitando apenas os magnetos fletores do DCI. Para tanto, encontramos a solução ilustrada nas figs. 3.2 e 3.3, onde são dadas as principais medidas da configuração. Um superperíodo neste caso, é constituído pelos seguintes elementos:

- Secção reta S1, comprimento de 2m;
- Quadrupólo Q1, comprimento magnético efetivo de 0,35 m;
- Secção reta S2, comprimento de 0,2m;
- Quadrupólo Q2, comprimento magnético efetivo de 0,35 m;
- Secção reta S3, comprimento de 1 m;
- Ímã defletor original do DCI;
- Secção reta S4, comprimento de 1 m;
- Quadrupólo Q3, comprimento magnético efetivo de 0,35 m;
- Secção reta S5, comprimento de 0,2 m;
- Quadrupólo Q4, comprimento magnético efetivo de 0,35 m;
- Secção reta S6, comprimento de 2 m.

Como se vê, a estrutura possui no total 12 secções retas longas com 4 m de comprimento cada; a disposição é inteiramente similar à estudada nos trabalhos de Miyahara, Asaoka e outros. Com base em resultados levantados com o auxílio do AGS, escolhemos um ponto de operação tal que os requisitos citados na introdução fossem cumpridos da melhor forma possível, e o chama-

mos de ponto de operação principal. Ele é atingido com  $K_{Q1} = K_{Q4} = -2,100 \text{ m}^{-2}$ ,  $K_{Q2} = K_{Q3} = 2,138 \text{ m}^{-2}$ , onde os  $K_{Qi}$  são os valores da função de enfoque  $K_v$  para cada quadrupólo, e os seus valores numerosos seguem a convenção de sinal adotada pelo AGS, e explicada no capítulo 2. Os valores das funções bêtatron, da dispersão de energia e sua derivada para esse ponto de operação foram arrolados na tabela A.3, os gráficos correspondentes estão ilustrados na fig. 3.3. Adotando a convenção européia, que representa os números de oscilações bêtatron como  $Q_x$  e  $Q_z$ , encontramos, com os valores de  $K_v$  dados anteriormente:

$$Q_x = 4,8983, \quad Q_z = 5,1153.$$

Vale observar que se fizermos  $K_{Q1}$  maior em módulo que  $K_{Q2}$ , ao contrário do ponto de operação escolhido, obtemos valores ainda menores da dispersão na secção reta longa, mas  $\beta_z$  cresce ligeiramente. Portanto, nossa escolha se prendeu a um compromisso entre o comportamento dessas duas funções. Os dados que apresentamos aqui referem-se ao chamado modo de operação em emissão variável, quando podemos variar amplamente os valores das funções bêtatron e dispersão de energia deslocando os pontos de operação, de modo adequado, ao longo do necktie diagram para a configuração. Evidentemente, essa ampla variação só é possível caso não seja pequena a área de operação estável descrita pelo citado necktie diagram. Para o presente caso, uma parte da área de operação estável é mostrada na fig. 3.4. A poligonal demarca a região estudada, e os pontos situados fora dela indicam limites da região de estabilidade. Notamos, pela observação da fig. 3.4, que é pequena a área da região de estabilidade. Mantendo  $Q_z$  fixo e variando  $Q_x$ , a partir do ponto de operação principal, ob-

servamos que não ocorre uma ampla variação da emitância ao deslocar-se o ponto de operação, como era de se esperar. Procuramos então, uma disposição estrutural que permitisse uma região de operação mais ampla. Tentamos assim, um aumento do comprimento das secções S1 e S6 para 4 m, totalizando uma configuração com 12 secções retas longas de 8 m cada. As demais medidas permaneceram sem alteração. Como resultado, constatamos não ocorrer grande alteração na forma funcional das funções de dispersão e bêtatron, os novos valores para as regiões de interesse (secção reta S1 e ímã defletor) acham-se arrolados na tabela A. 4. O novo ponto de operação principal é agora atingido com:

$$K_{Q1} = K_{Q4} = -1,1657 \text{ m}^{-2}, \quad K_{Q2} = K_{Q3} = 1,662 \text{ m}^{-2},$$

sendo os números de oscilações bêtatron dados por:

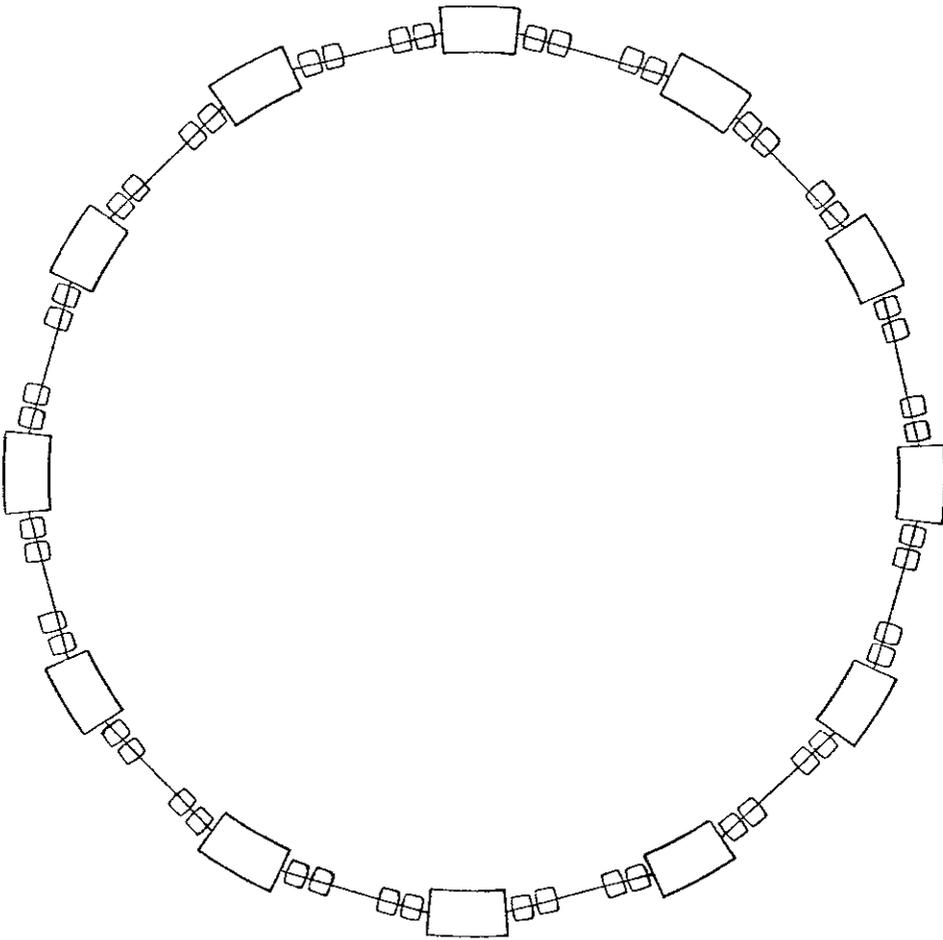
$$Q_x = 4,4859, \quad Q_z = 4,9450.$$

A fig. 3.5 ilustra o necktie diagram para a nova situação: é perceptível o aumento da área da região de estabilidade. Isto é confirmado pelos dados da fig. 3.6, onde plotamos os valores máximos de  $\beta_x$ ,  $\beta_z$ , e  $\eta_x$  em função da variação de  $Q_x$ , para  $Q_z$  constante e igual a 4,9450. O comportamento linear de  $\beta_z$  máx é previsto pela teoria (15) e caracteriza o modo de operação em emitância variável. As cromaticidades naturais calculadas para os dois casos foram:

- 1) Secção reta longa de 4 m:  $Q'_x = -7,2038,$   
 $Q'_z = -11,0677.$
- 2) Secção reta longa de 8 m:  $Q'_x = -3,9732,$   
 $Q'_z = -11,3460.$

No entanto, um exame dos dados da tabela 3.4 nos mostra que a aquisição de uma região de operação mais ampla, mexendo apenas no comprimento das secções retas principais, é conseguida à custa de uma ligeira elevação dos valores de dispersão e funções betatron no ponto de operação principal. Possivelmente, a adoção de secções retas longas com comprimento intermediário entre 4 m e 8 m acarretaria uma solução de compromisso, em que se aumentaria um pouco o valor mínimo da emitância no ponto de operação principal para obtermos uma região de operação maior. Verificamos também, nos dois casos, que é possível reduzir o valor da dispersão nas secções retas para números menores ainda que os apresentados nas tabelas A.3 e A.4, ajustando independentemente as funções de enfoque para os quadrupólos (operação em modo acromático). Acreditamos no entanto, baseados numa comparação com os resultados exibidos na ref. 15, que a solução conseguida para o modo de emitância variável já se adequa aos objetivos esperados (inserção de wigglers e cavidades de RF).

fig. 3.2



Circunferência:	117,6	m
Raio máximo:	18,80373	m
Raio mínimo:	18,37467	m

fig. 3.3

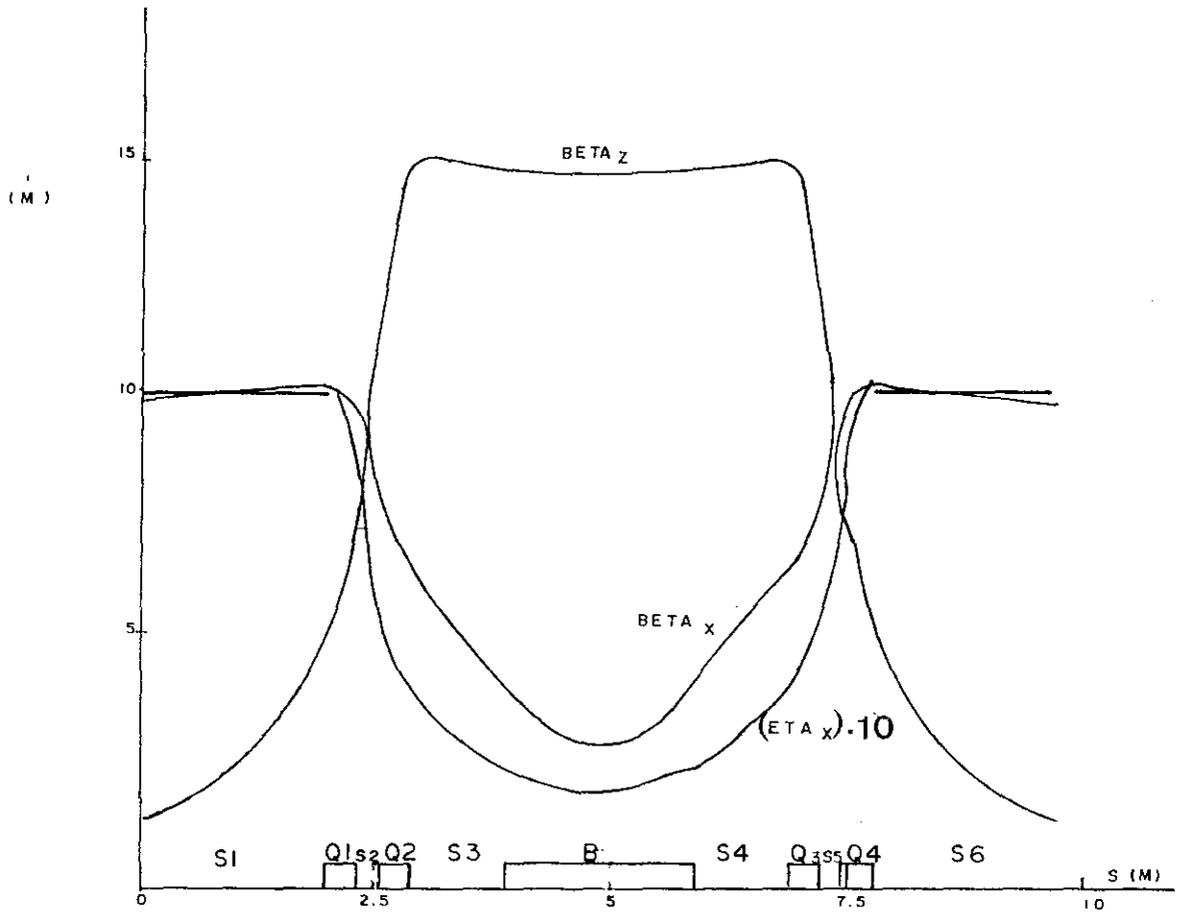


fig. 3.4

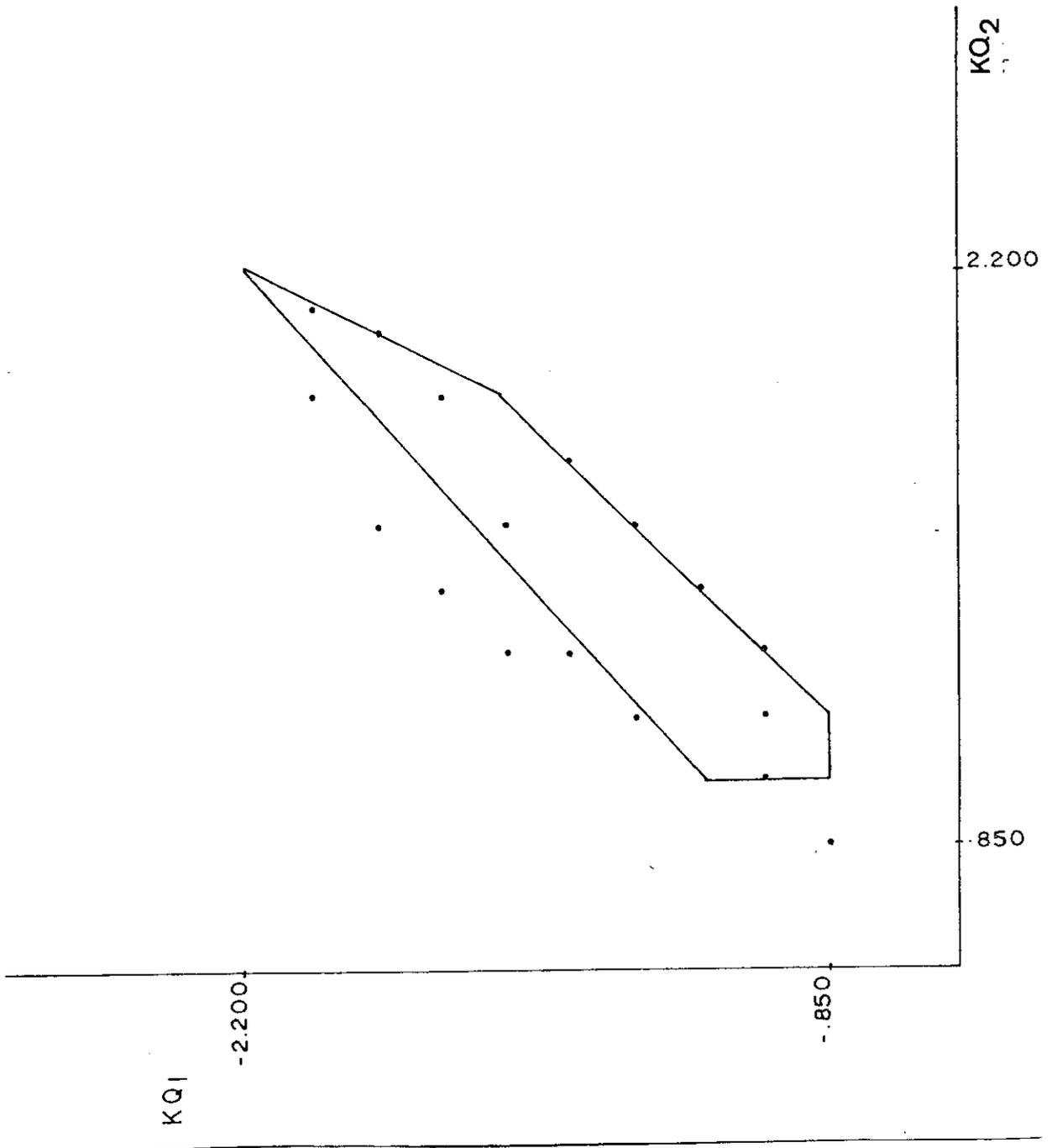


fig. 3.5

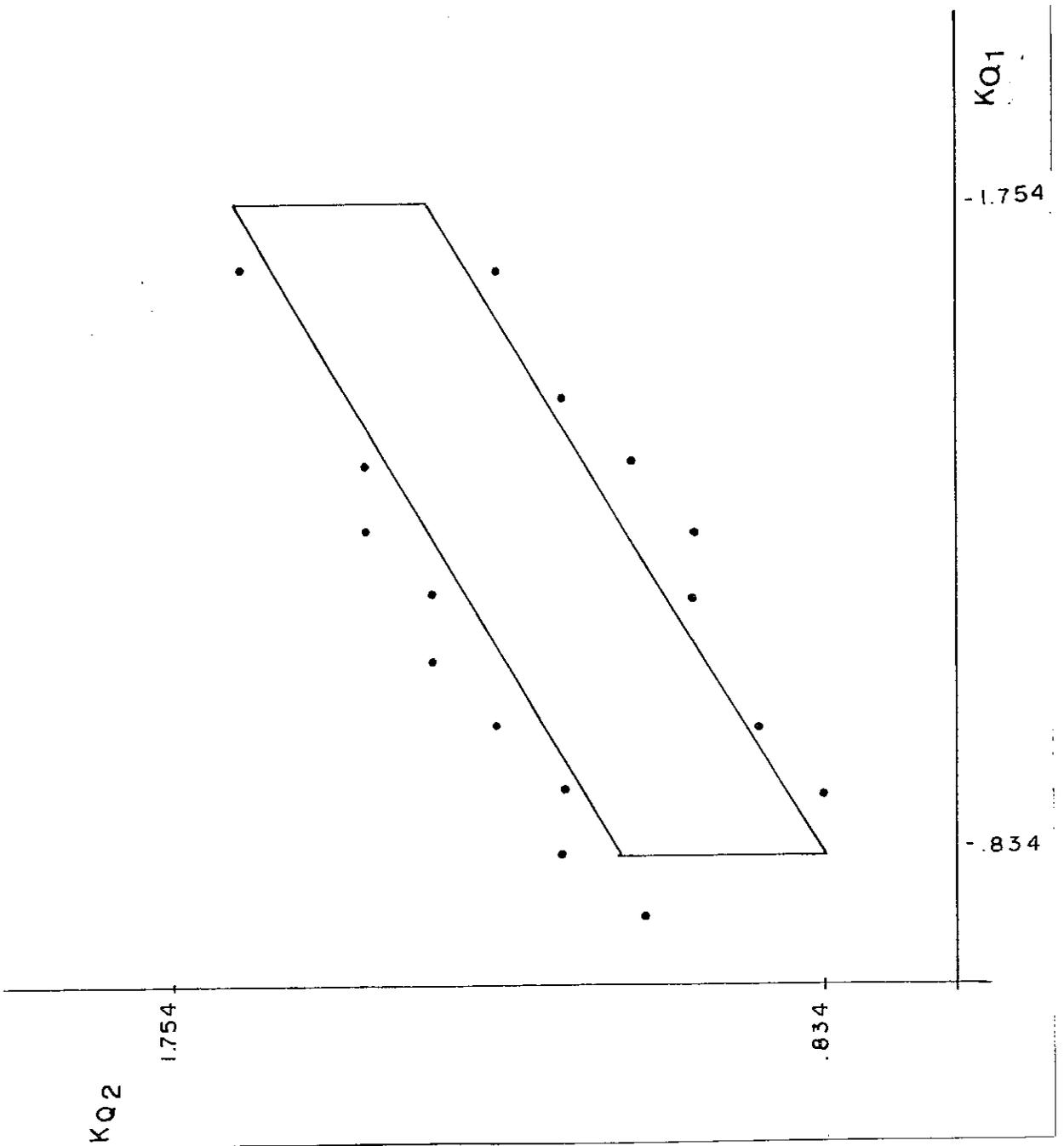
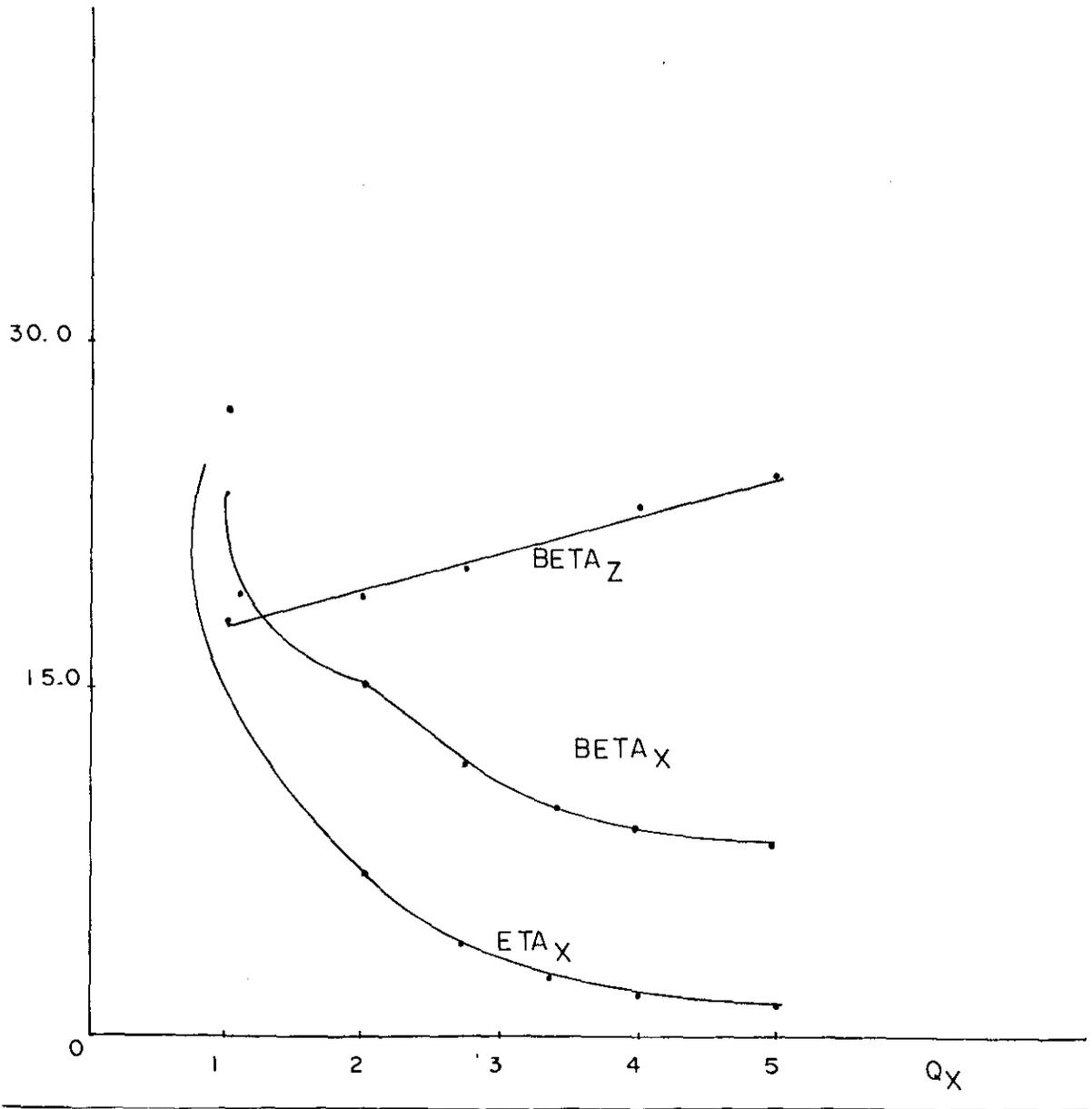


fig. 3.6



### 3.3 Resultados para o Critério II

Aproveitando aqui todos os elementos originais do DCI (quadrupólos e defletores), optamos no entanto por uma geometria radicalmente distinta, que enfatizasse o aumento do número de secções retas longas, e permitisse uma colocação mais acessível dos pontos de extração da radiação nos ímãs defletores.

Testamos assim uma disposição clássica com 12 células de focalização e defocalização simples (denominadas na literatura de células FODO). As figs. 3.7 e 3.8 dão as medidas correspondentes para o arranjo, cada superperíodo contém os seguintes elementos:

- Secção reta S1: comprimento de 2 m;
- Quadrupólo Q1 original do DCI;
- Secção reta S2, comprimento de 0,3 m;
- Ímã defletor original do DCI;
- Secção reta S3, comprimento de 2,2 m;
- Quadrupólo original do DCI (Q2);
- Secção reta S4, comprimento de 2 m.

Como na opção anterior, obtemos uma disposição que totaliza 12 secções retas longas com 4 m de comprimento cada. A fig. 3.9 ilustra os gráficos para a dispersão e funções beta no tron que correspondem aos resultados da tabela A.2. Essa Tabela corresponde por sua vez, ao ponto de operação principal caracterizado por:

$$\begin{aligned}
 K_{Q1} &= + 0,799 \text{ m}^{-2}, & K_{Q2} &= -0,770 \text{ m}^{-2} \\
 Q_x &= 4,6402, & Q_z &= 4,4142.
 \end{aligned}$$

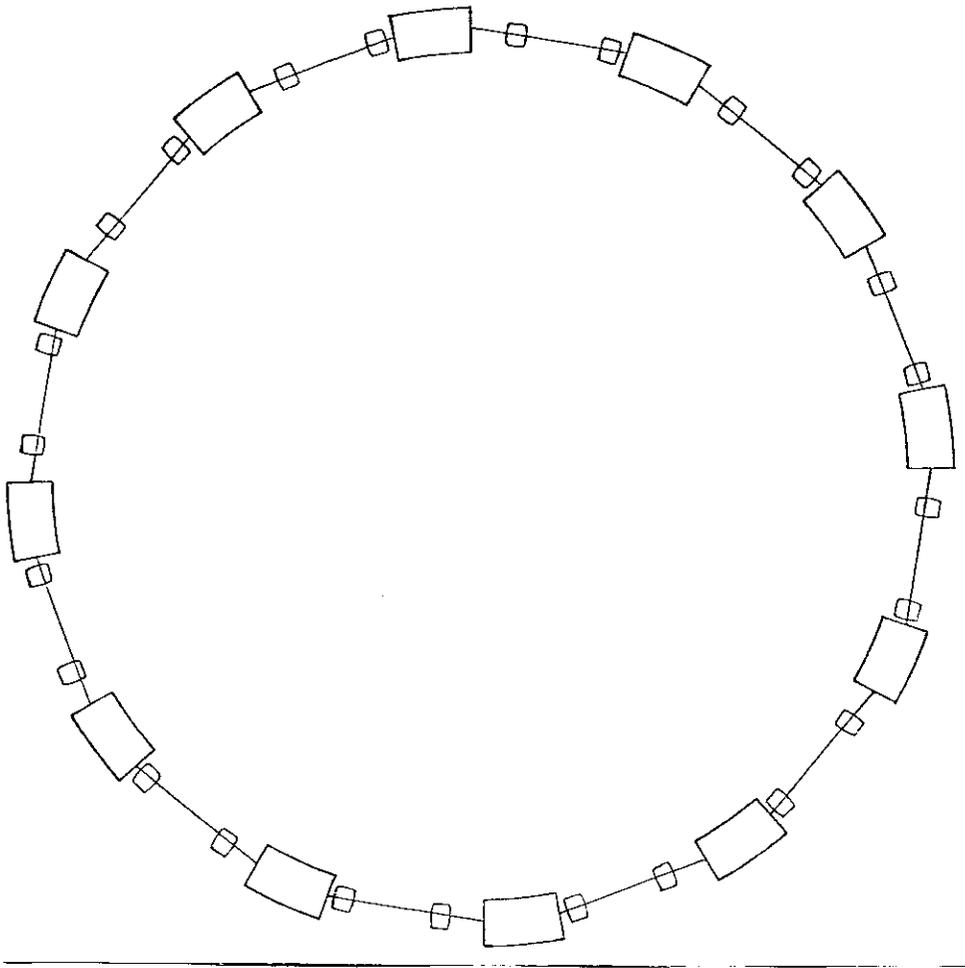
O necktie diagram da fig. 3.10 mostra a poligonal que delinea uma porção da região de operação, onde as funções bétatron e a dispersão de energia tem uma larga margem de variação, desde números aceitáveis até valores praticamente assintóticos. A reta assinalada dentro da poligonal indica a região de variação para  $1 < Q_x < 6$ , com  $Q_z$  constante e igual a 4,4142. A fig. 3.11 dá os gráficos de valores máximos para funções bétatron e dispersão de energia, em função de  $Q_x$ . Como é típico desse tipo de arranjo, não se consegue uma otimização dos requisitos que descrevemos na introdução deste capítulo, mas existe a vantagem de operarmos ao longo de uma faixa de estabilidade mais ampla, com valores relativamente menores das funções de enfoque. A disposição assimétrica da célula é um recurso empregado para reduzir os valores da dispersão; seria interessante verificar a possibilidade de inserção de um pequeno wiggler dentro da secção S3, onde os gráficos indicam um comportamento mais apropriado da função  $\beta_z$ . As cromaticidades naturais calculadas foram, para esse arranjo:

$$Q'_x = -8,0199, \quad Q'_z = -8,4822.$$

Foram realizados também, cálculos para o critério II correspondendo a uma disposição hexagonal, com 6 superperíodos compostos de 2 fletores e 3 quadrupólos originais do DCI, totalizando 6 secções retas longas. Verificou-se porém, que tanto neste caso como numa disposição de 4 superperíodos, só se atinge um comportamento desejável da dispersão e funções bétatron por meio de inserções adicionais de elementos nas secções retas longas.

Isso aumenta a complexidade da solução, e conflita com os objetivos do critério II. Além disso, sugestões da Comissão Técnico-Científica do Projeto Síncrotron indicam que uma máquina adequada às necessidades brasileiras deveria possuir periodicidade a partir de 7, com o fim de possibilitar o seu emprêgo por usuários distintos, razão pela qual nos concentramos nesta tese em detalhar mais acuradamente as soluções com periodicidade elevada.

fig. 3.8



---

Circunferência:	114,0	m
Raio máximo:	18,22485	m
Raio mínimo:	17,83513	m

fig. 3.9

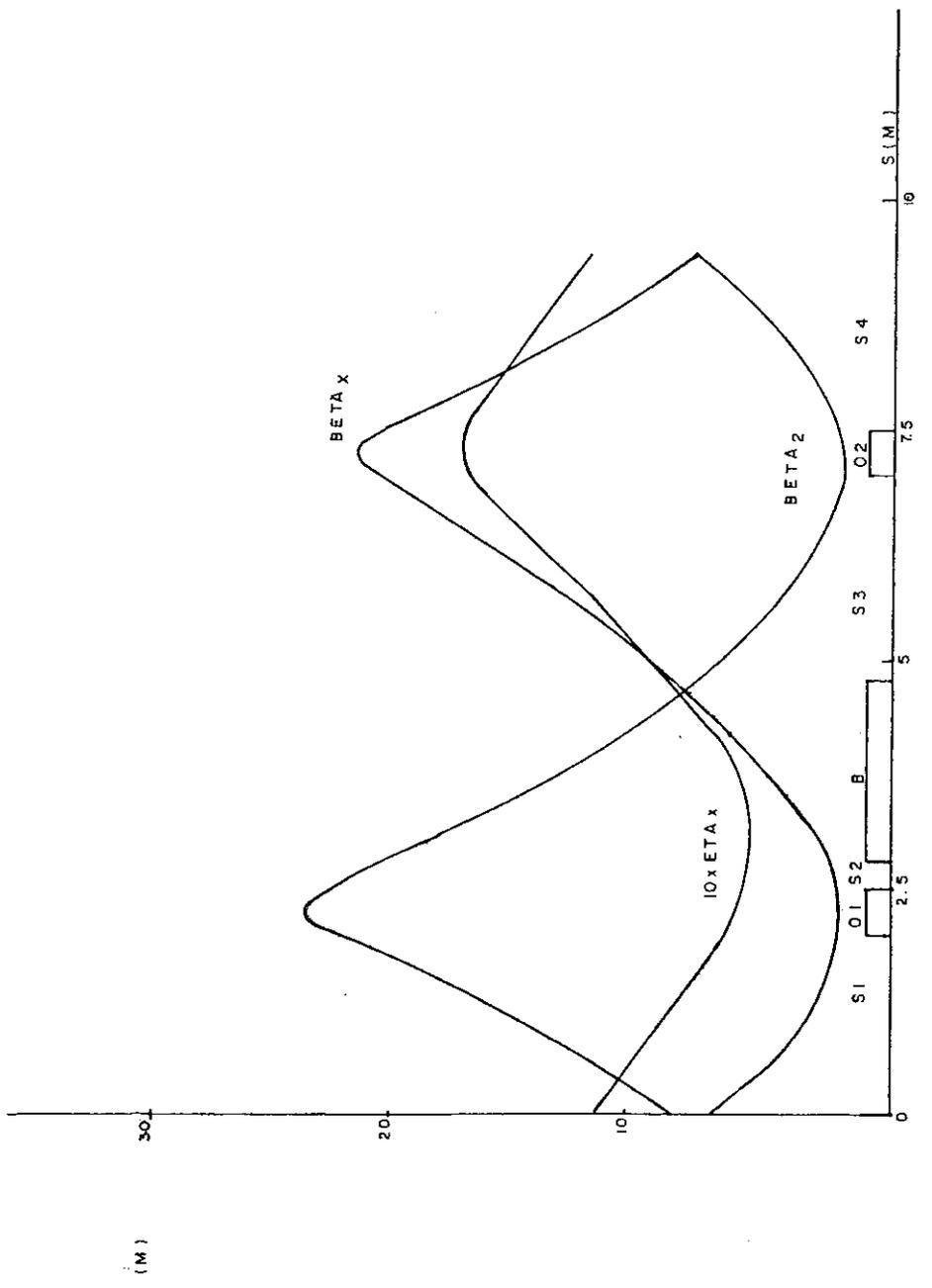


fig. 3.10

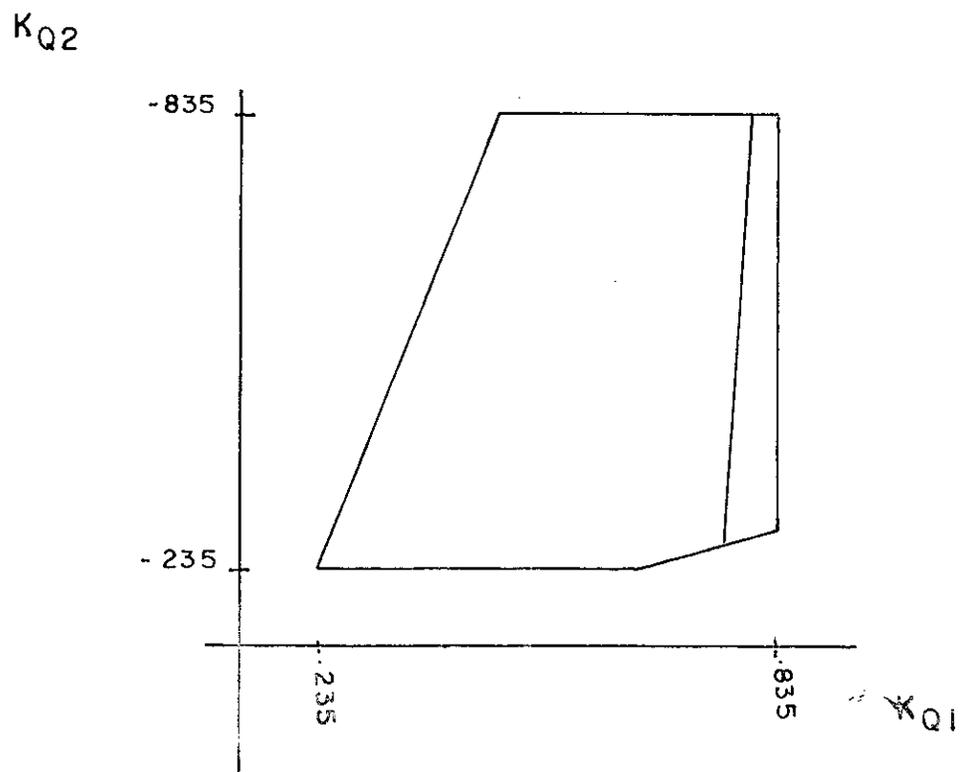
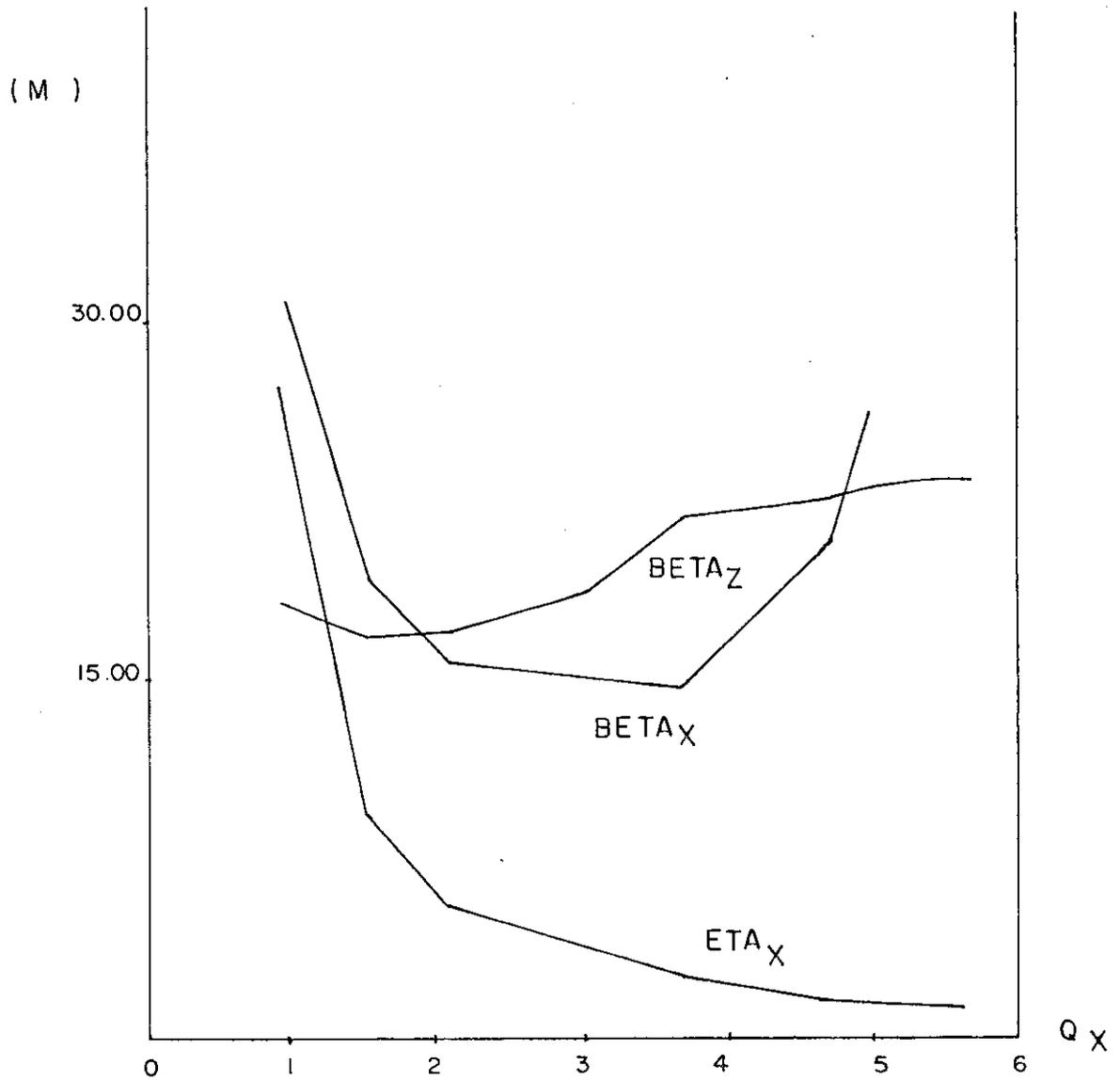


fig. 3.11



### 3.4 Conclusões e Sugestões

Como forma de verificar o desempenho das estruturas calculadas, escrevemos um pequeno programa BASIC para resolver, com o auxílio de um microcomputador, as eqs. 1.7.19 e 1.7.20, que fornecem uma estimativa da emitância radial. Usamos como dados de entrada os valores das funções tabeladas para cada configuração, correspondentes aos magnetos defletores. Foram os seguintes, os resultados obtidos:

- a) Arranjo para o critério I,  
 secção reta longa de 4m:  $\bar{U}_x = 0,2619127 \text{ mrad};$
- b) Arranjo para o critério I,  
 secção reta longa de 8m:  $\bar{U}_x = 0,3447150 \text{ mrad};$
- c) Arranjo para o critério II,  
 secção reta longa de 4m:  $\bar{U}_x = 2,224433 \text{ mrad},$

Com esses números, é possível estimarmos a emitância para qualquer energia de referência, mas o fizemos para o caso em que nosso anel, hipoteticamente, operaria com 1,2 GeV. Encontramos os valores:

- Caso a):  $\epsilon_x = 0,0149 \times 10^{-6} \text{ mrad};$
- Caso b):  $\epsilon_x = 0,0140 \times 10^{-6} \text{ mrad};$
- Caso c):  $\epsilon_x = 0,131 \times 10^{-6} \text{ mrad}.$

Todos esses resultados correspondem, pelo exame comparativo com números similares exibidos nas ref. 15, a emitâncias típicas de uma máquina síncrotron dedicada. Por exemplo, pa

ra a energia de referência de 1 GeV, o citado trabalho aponta uma emitância radial de  $0,023 \times 10^{-6}$  no ponto de operação principal para o modo de emitância variável, valor na mesma faixa de grandeza dos obtidos nos casos a) e b), para o mesmo tipo de configuração e modo de operação, numa energia de referência próxima.

Creemos ter assim, respondido afirmativamente à indagação sobre a possibilidade de aproveitamento dos componentes originais do DCI, numa máquina síncrotron com geometria radicalmente distinta. No entanto, é preciso salientar que por diversas vezes desejamos possuir liberdade de cálculo para ajustarmos livremente todos os parâmetros, inclusive os dos ímãs defletores; sob o ponto de vista do desenho de uma estrutura completa para um síncrotron, qualquer restrição prévia de parâmetros implicará sempre na impossibilidade de não estarmos operando com a melhor configuração possível. A título de ilustração, exibimos a seguir alguns resultados de cálculos referentes à outras máquinas dedicadas, para que possam ser comparados com nossos resultados para configurações correlatas.

Como sugestões para o Projeto, achamos aconselhável desenvolver software específico para tratar certos problemas de cálculo de modo mais flexível.

Em especial, arrolamos os seguintes, para os quais ou o AGS não oferece recursos ou não é muito cômodo:

- 1) Traçado de necktie diagrams com boa resolução;
- 2) Cálculo de parâmetros para oscilações síncrotron;
- 3) Estudo de inserções (hexapólos, wigglers, etc.)  
por meio de uma teoria não linear;
- 4) Estudo das características da radiação produzida.

Poderia se tentar ainda, com vistas a adquirir programas mais completos para cálculo de estruturas, desenvolver versões dos programas PETROS e PATRÍCIA que aceitassem ímãs de fletores curvilíneos.

Achamos que as necessidades teóricas envolvidas no problema de construir e operar um síncrotron de gradiente alternado fatalmente imporão como necessárias algumas dessas ações.

A P Ê N D I C E

A

T A B E L A S

Tabela A.2

FUNÇÕES BÉTATRON,  $\alpha_p$  e  $\alpha'_p$  PARA A CONFIGURAÇÃO COM DOZE CÉ-  
LULAS DE FOCALIZAÇÃO E DEFOCALIZAÇÃO SIMPLES, APROVEITANDO  
MAGNETOS DEFLETORES E QUADRUPÓLOS DO DCI.

S(m)	$\alpha_p$	$\alpha'_p$	$\beta_x$ (s)	$\beta_z$ (s)	$\alpha_x$ (s)	$\alpha_z$ (s)
0,0 (S1)	1,14971	-0,27665	6,61	7,830	2,41	-2,651
0,1 (S1)	1,12205	-0,27665	6,14	8,371	2,307	-2,754
0,2 (S1)	1,09438	-0,27665	5,69	8,932	2,004	-2,856
0,3 (S1)	1,06672	-0,27665	5,26	9,513	2,101	-2,959
0,4 (S1)	1,03905	-0,27665	4,85	10,115	1,998	-3,061
0,5 (S1)	1,01139	-0,27665	4,46	10,738	1,895	-3,164
0,6 (S1)	0,98372	-0,27665	4,09	11,381	1,792	-3,266
0,7 (S1)	0,95606	-0,27665	3,74	12,044	1,688	-3,369
0,8 (S1)	0,92839	-0,27665	3,41	12,728	1,586	-3,471
0,9 (S1)	0,90072	-0,27665	3,11	13,433	1,483	-3,574
1,0 (S1)	0,87306	-0,27665	2,82	14,158	1,380	-3,677
1,1 (S1)	0,84539	-0,27665	2,55	14,904	1,277	-3,779
1,2 (S1)	0,81773	-0,27665	2,31	15,670	1,174	-3,882
1,3 (S1)	0,79006	-0,27665	2,09	16,546	1,071	-3,984
1,4 (S1)	0,76240	-0,27665	1,88	17,263	0,968	-4,087
1,5 (S1)	0,7347	-0,27665	1,70	18,091	0,865	-4,189
1,6 (S1)	0,70707	-0,27665	1,54	18,939	0,762	-4,292
1,7 (S1)	0,67940	-0,27665	1,39	19,808	0,659	-4,394
1,8 (S1)	0,65174	-0,27665	1,27	20,697	0,556	-4,497
1,9 (S1)	0,62407	-0,27665	1,17	21,606	0,459	-4,599
2,0 (Q1)	0,59641	-0,27665	1,09	22,536	0,350	-4,702
2,050 (Q1)	0,58316	-0,25310	1,06	22,964	0,256	-3,835
2,100 (Q1)	0,57109	-0,23004	1,04	23,302	0,165	-2,938

2,150 (Q1)	0,56015	-0,20745	1,03	23,550	0,074	-2,017
2,200 (Q1)	0,55034	-0,18527	1,02	23,705	-0,015	-1,080
2,250 (Q1)	0,54612	-0,16346	1,03	23,766	-0,105	-0,135
2,300 (Q1)	0,53398	-0,14198	1,05	23,732	-0,196	0,812
2,350 (Q1)	0,52742	-0,12078	1,07	23,604	-0,288	1,752
2,400 (Q1)	0,52190	-0,09983	1,10	23,382	-0,383	2,678
2,450 (Q1)	0,51743	-0,07907	1,15	23,069	-0,481	3,583
2,500 (S2)	0,51399	-0,05847	1,20	22,667	-0,582	4,459
2,530 (S2)	0,51248	-0,05847	1,24	22,400	-0,616	4,431
2,560 (S2)	0,51048	-0,05847	1,27	22,135	-0,649	4,404
2,590 (S2)	0,508703	-0,05847	1,31	21,872	-0,683	4,376
2,620 (S2)	0,50698	-0,05847	1,35	21,610	-0,718	4,348
2,650 (S2)	0,50522	-0,05847	1,40	21,350	-0,750	4,321
2,665 (S2)	0,50435	-0,05847	1,42	21,220	-0,767	4,307
2,695 (S2)	0,50259	-0,05847	1,47	20,963	-0,800	4,279
2,725 (S2)	0,50084	-0,05847	1,52	20,707	-0,834	4,252
2,755 (S2)	0,49908	-0,05847	1,57	20,452	-0,867	4,224
2,8 (B)	0,49645	-0,05847	1,65	20,074	-0,917	4,183
2,9 (B)	0,49174	-0,03568	1,84	19,247	-1,016	4,081
3,0 (B)	0,48932	-0,01286	2,06	18,438	-1,113	3,998
3,1 (B)	0,48917	0,00997	2,19	17,648	-1,206	3,906
3,2 (B)	0,49131	0,03279	2,54	16,875	-1,296	3,814
3,3 (B)	0,49573	0,05559	2,81	16,122	-1,382	3,722
3,4 (B)	0,50243	0,07835	3,09	15,387	-1,465	3,630
3,5 (B)	0,51140	0,10106	3,39	14,670	-1,543	3,538

3,6 (B)	0,52264	0,12370	3,71	13,472	-1,618	3,446
3,7 (B)	0,53614	0,14625	4,04	13,292	-1,688	3,353
3,8 (B)	0,55188	0,16870	4,38	12,630	-1,753	3,261
3,9 (B)	0,56987	0,19104	4,74	11,987	-1,813	3,169
4,0 (B)	0,59009	0,21325	5,11	11,363	-1,869	3,077
4,1 (B)	0,61252	0,23531	5,49	10,756	-1,919	2,985
4,2 (B)	0,63714	0,25720	5,87	10,169	-1,964	2,893
4,3 (B)	0,63395	0,27893	6,27	9,599	-2,004	2,801
4,4 (B)	0,69292	0,30046	6,68	9,048	-2,038	2,709
4,5 (B)	0,72404	0,32178	7,09	8,506	-2,067	2,616
4,6 (B)	0,75727	0,34289	7,50	8,002	-2,090	2,524
4,7 (B)	0,79261	0,36376	7,92	7,506	-2,107	2,432
4,8 (S3)	0,83001	0,38438	8,34	7,029	-2,119	2,340
5,02 (S3)	0,91458	0,38438	9,31	6,044	-2,264	2,137
5,24 (S3)	0,99914	0,38438	10,34	5,148	-2,408	1,935
5,46 (S3)	1,08370	0,38438	11,43	4,341	-2,553	1,732
5,68 (S3)	1,16827	0,38438	12,58	3,624	-2,698	1,529
5,90 (S3)	1,25283	0,38438	13,80	2,996	-2,842	1,327
6,12 (S3)	1,33739	0,38438	15,08	2,456	-2,987	1,124
6,34 (S3)	1,42196	0,38438	16,40	2,007	-3,132	0,921
6,56 (S3)	1,50652	0,38438	17,84	1,646	-3,277	0,719
6,78 (S3)	1,59108	0,38438	19,31	1,374	-3,421	0,516
7,00 (Q2)	1,67565	0,38438	20,85	1,192	-3,566	0,313
7,050 (Q2)	1,69325	0,31952	21,17	1,165	-2,783	0,222
7,100 (Q2)	1,70759	0,25404	21,41	1,147	-1,979	0,153

7,150 (Q2)	1,71864	0,18807	21,56	1,138	-1,160	0,045
7,200 (Q2)	1,72639	0,12175	21,65	1,138	-0,332	-0,043
7,250 (Q2)	1,73081	0,05519	21,63	1,147	0,499	-0,131
7,300 (Q2)	1,73191	-0,01148	21,54	1,165	1,326	-0,220
7,350 (Q2)	1,72967	-0,07813	21,37	1,191	2,143	-0,311
7,400 (Q2)	1,72410	-0,14462	21,11	1,227	2,943	-0,404
7,450 (Q2)	1,71521	-0,21084	20,78	1,272	3,720	-0,500
7,500 (S4)	1,70302	-0,27665	20,37	1,327	4,469	-0,600
7,6 (S4)	1,67535	-0,27665	19,49	1,457	4,366	-0,703
7,7 (S4)	1,64769	-0,27665	18,62	1,608	4,263	-0,806
7,8 (S4)	1,62002	-0,27665	17,78	1,780	4,160	-0,908
7,9 (S4)	1,59236	-0,27665	16,96	1,971	4,057	-1,011
8,0 (S4)	1,56469	-0,27665	16,16	2,184	3,954	-1,113
8,1 (S4)	1,53709	-0,27665	15,38	2,417	3,851	-1,216
8,2 (S4)	1,50936	-0,27665	14,62	2,670	3,748	-1,318
8,3 (S4)	1,48170	-0,27665	13,88	2,944	3,645	-1,420
8,4 (S4)	1,45403	-0,27665	13,16	3,238	3,543	-1,523
8,5 (S4)	1,42637	-0,27665	12,46	3,553	3,440	-1,626
8,6 (S4)	1,39870	-0,27665	11,78	3,889	3,337	-1,728
8,7 (S4)	1,37104	-0,27665	11,13	4,245	3,234	-1,831
8,8 (S4)	1,34337	-0,27665	10,49	4,621	3,131	-1,933
8,9 (S4)	1,31570	-0,27665	9,870	5,018	3,028	-2,036
9,0 (S4)	1,28804	-0,27665	9,28	5,435	2,925	-2,139
9,1 (S4)	1,26037	-0,27665	8,70	5,873	2,822	-2,241

9,2 (S4)	1,23271	-0,27665	8,15	6,332	2,719	-2,344
9,3 (S4)	1,20504	-0,27665	7,62	6,811	2,616	-2,446
9,4 (S4)	1,17738	-0,27665	7,10	7,310	2,513	-2,549

Tabela A.3

FUNÇÕES BÉTATRON,  $\alpha_p$  e  $\alpha'_p$  PARA A CONFIGURAÇÃO COM DOZE CÉLULAS COMPOSTAS DE DOIS DOUBLET, APROVEITANDO OS MAGNETOS DEFLETORES DO DCI

S (m)	$\alpha_p$	$\alpha'_p$	$\beta_x$ (s)	$\beta_z$ (s)	$\alpha_x$ (s)	$\alpha_z$ (s)
0,0	1,07366	0,00	9,860	1,017	-0,0	0,0
0,1	1,07366	0,00	9,86	1,027	-0,010	-0,098
0,2	1,07366	0,00	9,86	1,056	-0,020	-0,197
0,3	1,07366	0,00	9,87	1,105	-0,030	-0,295
0,4	1,07366	0,00	9,88	1,174	-0,041	-0,393
0,5	1,07366	0,00	9,88	1,263	-0,051	-0,492
0,6	1,07366	0,00	9,90	1,371	-0,061	-0,590
0,7	1,07366	0,00	9,91	1,499	-0,071	-0,689
0,8	1,07366	0,00	9,92	1,646	-0,081	-0,787
0,9	1,07366	0,00	9,94	1,813	-0,091	-0,885
1,0	1,07366	0,00	9,96	2,000	-0,101	-0,984
1,1	1,07366	0,00	9,98	2,207	-0,112	-1,082
1,2	1,07366	0,00	10,01	2,433	-0,122	-1,100
1,3	1,07366	0,00	10,03	2,679	-0,132	-1,279
1,4	1,07366	0,00	10,06	2,945	-0,142	-1,377
1,5	1,07366	0,00	10,09	3,230	-0,152	-1,475
1,6	1,07366	0,00	10,12	3,535	-0,162	-1,574
1,7	1,07366	0,00	10,15	3,859	-0,172	-1,672
1,8	1,07366	0,00	10,19	4,204	-0,183	-1,770
1,9	1,07366	0,00	10,23	4,567	-0,193	-1,863
2,0	(01) 1,07366	0,000	10,26	4,951	-0,203	-1,967
2,0175	(01) 1,07331	-0,03945	10,27	5,023	0,173	-2,169
2,0525	(01) 1,07055	-0,11826	10,23	5,190	0,972	-2,590

2,0875 (Q1)	1,06504	-0,19676	10,14	5,387	1,661	-3,037
2,1225 (Q1)	1,05679	-0,27475	9,99	5,616	2,383	-3,516
2,1575 (Q1)	1,04582	-0,35204	9,80	5,880	3,081	-4,031
2,1925 (Q1)	1,03215	-0,42842	9,56	6,181	3,747	-4,588
2,2275 (Q1)	1,01584	-0,53070	9,28	6,523	4,375	-5,191
2,2625 (Q1)	0,99691	-0,99691	8,95	6,909	4,957	-5,849
2,2975 (Q1)	0,97542	-0,65018	8,59	7,343	5,489	-6,566
2,3325 (Q1)	0,95142	-0,72101	8,19	7,830	5,864	-7,351
2,35 (S2)	0,93850	-0,75574	7,97	8,095	6,179	-7,772
2,36 (S2)	0,93094	-0,75574	7,85	8,251	6,130	-7,847
2,38 (S2)	0,91582	-0,75574	7,61	8,568	6,031	-7,999
2,40 (S2)	0,90071	-0,75574	7,37	8,891	5,833	-8,151
2,42 (S2)	0,88559	-0,75574	7,13	9,220	5,835	-8,302
2,44 (S2)	0,87048	-0,75574	6,90	9,555	5,737	-9,454
2,46 (S2)	0,85636	-0,75574	6,67	9,896	5,638	-8,606
2,48 (S2)	0,84025	-0,75574	6,45	10,243	5,540	-8,758
2,50 (S2)	0,82513	-0,75574	6,23	10,597	5,442	-8,909
2,52 (S2)	0,81002	-0,75574	6,01	10,956	5,344	-9,061
2,54 (S2)	0,79490	-0,75574	5,80	11,322	5,245	-9,213
2,55 (Q2)	0,78735	-0,75574	5,70	11,507	5,196	-9,289
2,5675 (Q2)	0,77438	-0,72652	5,52	11,826	4,904	-8,979
2,6025 (Q2)	0,74995	-0,66950	5,20	12,431	4,856	-8,289
2,6375 (Q2)	0,72749	-0,61424	4,81	12,985	3,855	-7,513
2,6725 (Q2)	0,70694	-0,56058	4,66	13,481	3,394	-6,659
2,7075 (Q2)	0,68824	-0,50839	4,43	13,915	2,968	-5,734

2,7425 (Q2)	0,67134	-0,45753	4,24	14,283	2,574	-4,750
2,7775 (Q2)	0,65619	-0,40787	4,07	14,579	2,206	-3,716
2,8125 (Q2)	0,64277	-0,35928	3,93	14,802	1,862	-2,643
2,8475 (Q2)	0,63103	-0,31163	3,81	14,949	1,537	-1,542
2,8825 (Q2)	0,62095	-0,26490	3,72	15,017	1,229	-0,425
2,90 (S3)	0,61652	-0,24165	3,68	15,023	1,079	0,136
2,95 (S3)	0,60443	-0,24165	3,57	15,009	1,050	0,132
3,05 (S3)	0,58027	-0,24165	3,36	14,983	0,991	0,125
3,15 (S3)	0,55610	-0,24165	3,17	14,959	0,932	0,119
3,25 (S3)	0,53194	-0,24165	2,99	14,936	0,873	0,112
3,35 (S3)	0,50777	-0,24165	2,82	14,914	0,814	0,105
3,45 (S3)	0,48361	-0,24165	2,67	14,894	0,755	0,098
3,55 (S3)	0,45941	-0,24165	2,52	14,875	0,696	0,092
3,65 (S3)	0,43528	-0,24165	2,39	14,857	0,638	0,085
3,75 (S3)	0,41111	-0,24165	2,27	14,841	0,579	0,078
3,85 (S3)	0,38695	-0,24165	2,16	14,826	0,520	0,071
3,90 (B)	0,37486	-0,24165	2,11	14,819	0,490	0,068
4,00 (B)	0,35188	-0,21796	2,01	14,806	0,445	0,061
4,10 (B)	0,33128	-0,19412	1,93	14,795	0,399	0,054
4,20 (B)	0,31306	-0,17015	1,85	14,785	0,351	0,047
4,30 (B)	0,29725	-0,14606	1,74	14,776	0,303	0,041
4,40 (B)	0,28385	-0,12887	1,73	14,768	0,254	0,034
4,50 (B)	0,27289	-0,09760	1,69	14,762	0,204	0,027
4,60 (B)	0,26434	-0,07326	1,65	14,757	0,153	0,020
4,70 (B)	0,25828	-0,04886	1,62	14,754	0,102	0,014

4,80	(B)	0,25456	-0,02444	1,61	14,752	0,051	0,007
4,90	(B)	0,25334	-0,000	1,60	14,751	0,000	-0,00
5,00	(B)	0,25456	0,02444	1,61	14,752	-0,051	-0,007
5,10	(B)	0,25823	0,04886	1,62	14,754	-0,102	-0,014
5,20	(B)	0,26434	0,07326	1,65	14,757	-0,153	-0,020
5,30	(B)	0,27289	0,09760	1,69	14,762	-0,204	-0,027
5,40	(B)	0,28385	0,12887	1,73	14,769	-0,254	-0,034
5,50	(B)	0,29725	0,14606	1,79	14,776	-0,303	-0,041
5,60	(B)	0,31306	0,17015	1,85	14,785	-0,351	-0,047
5,70	(B)	0,53128	0,19412	1,93	14,795	-0,399	-0,054
5,80	(B)	0,351888	0,21796	2,01	14,806	-0,415	-0,051
5,90	(S4)	0,37586	0,24165	2,11	14,919	-0,990	-0,068
5,96	(S4)	0,39695	0,24165	2,16	14,826	-0,520	-0,071
6,05	(S4)	0,41111	0,24165	2,27	14,841	-0,579	-0,078
6,15	(S4)	0,43528	0,24165	2,39	14,857	-0,638	-0,085
6,25	(S4)	0,45944	0,24165	2,52	14,875	-0,696	-0,091
6,35	(S4)	0,48361	0,24165	2,67	14,894	-0,755	-0,048
6,45	(S4)	0,50777	0,24165	2,82	14,914	-0,814	-0,105
6,55	(S4)	0,53194	0,24165	2,99	14,936	-0,873	-0,112
6,65	(S4)	0,55610	0,24165	3,17	14,909	-0,932	-0,119
6,75	(S4)	0,58027	0,24165	3,36	14,983	-0,991	-0,125
6,85	(S4)	0,60443	0,24165	3,57	15,009	-1,050	-0,132
6,90	(Q3)	0,61652	0,24165	3,68	15,023	-1,079	-0,136
6,9175	(Q3)	0,62095	0,26490	3,72	15,017	-1,229	+0,425
6,9525	(Q3)	0,63103	0,31163	3,81	14,949	-1,537	+1,542

6,9875 (Q3)	0,64227	0,35928	3,93	14,802	-1,862	2,643
7,0225 (Q3)	0,65619	0,40787	4,07	14,579	-2,206	3,716
7,0575 (Q3)	0,67134	0,45753	4,24	14,283	-2,574	4,750
7,0925 (Q3)	0,68824	0,50839	4,43	13,915	-2,968	5,734
7,1275 (Q3)	0,70694	0,56058	4,66	13,481	-3,394	6,659
7,1625 (Q3)	0,72749	0,61424	4,81	12,985	-3,855	7,513
7,1975 (Q3)	0,74995	0,66950	5,20	12,431	-4,856	8,289
7,2325 (Q3)	0,77438	0,72652	5,52	11,826	-4,904	8,979
7,25 (S5)	0,78735	0,75574	5,70	11,507	-5,196	9,289
7,26 (S5)	0,79490	0,75574	5,80	11,322	-5,245	9,213
7,28 (S5)	0,81002	0,75574	6,01	10,956	-5,344	9,061
7,30 (S5)	0,82513	0,75574	6,23	10,597	-5,442	8,909
7,32 (S5)	0,84025	0,75574	6,45	10,243	-5,540	8,758
7,34 (S5)	0,85536	0,75574	6,67	9,896	-5,638	8,606
7,36 (S5)	0,87048	0,75574	6,90	9,555	-5,737	8,454
7,38 (S5)	0,88559	0,75574	7,13	9,220	-5,835	8,302
7,40 (S5)	0,90071	0,75574	7,37	8,891	-5,833	8,151
7,42 (S5)	0,91582	0,75574	7,61	8,568	-6,031	7,999
7,44 (S5)	0,93094	0,75574	7,85	8,251	-6,130	7,847
7,45 (Q4)	0,93850	0,75574	7,97	8,095	-6,179	7,772
7,4675 (Q4)	0,95142	0,72101	8,19	7,830	-5,864	7,351
7,5025 (Q4)	0,97542	0,65018	8,59	7,343	-5,489	6,566
7,5375 (Q4)	0,99691	0,57768	8,95	6,909	-4,957	5,849
7,5725 (Q4)	1,01584	0,53070	9,28	6,523	-4,375	5,191
7,6075 (Q4)	1,03215	0,42842	9,56	6,181	-3,747	4,588

7,6425	(Q4)	1,04582	0,35204	9,80	5,880	-3,801	4,031
7,6775	(Q4)	1,05679	0,27425	9,99	5,616	-2,383	3,516
7,7125	(Q4)	1,06504	0,19676	10,14	5,387	-1,661	3,037
7,7475	(Q4)	1,07055	0,11826	10,23	5,190	-0,972	2,590
7,7825	(Q4)	1,07331	0,03945	10,27	5,023	-0,173	2,169
7,80	(S6)	1,07366	0,000	10,26	4,951	0,203	1,967
7,90	(S6)	1,07366	0,000	10,23	4,567	0,193	1,863
8,00	(S6)	1,07366	0,000	10,19	4,204	0,183	1,770
8,10	(S6)	1,07366	0,000	10,15	3,959	0,172	1,672
8,20	(S6)	1,07366	0,000	10,12	3,535	0,162	1,574
8,30	(S6)	1,07366	0,000	10,09	3,230	0,152	1,475
8,40	(S6)	1,07366	0,000	10,06	2,945	0,192	1,377
8,50	(S6)	1,07366	0,000	10,03	2,679	0,132	1,279
8,60	(S6)	1,07366	0,000	10,01	2,433	0,122	1,100
8,70	(S6)	1,07366	0,000	9,98	2,207	0,112	1,082
8,80	(S6)	1,07366	0,000	9,96	2,000	0,101	0,984
8,90	(S6)	1,07366	0,000	9,94	1,813	0,091	0,885
9,00	(S6)	1,07366	0,000	9,92	1,646	0,081	0,787
9,10	(S6)	1,07366	0,000	9,91	1,499	0,071	0,689
9,2	(S6)	1,07366	0,000	9,90	1,371	0,061	0,590
9,3	(S6)	1,07366	0,000	9,88	1,263	0,051	0,492
9,4	(S6)	1,07366	0,000	9,88	1,174	0,041	0,393
9,5	(S6)	1,07366	0,000	9,87	1,105	0,030	0,295
9,6	(S6)	1,07366	0,000	9,86	1,056	0,020	0,197
9,7	(S6)	1,07366	0,000	9,86	1,027	0,010	0,098

Tabela A.4

FUNÇÕES BÉTATRON,  $\alpha_p$  e  $\alpha'_p$  PARA A CONFIGURAÇÃO DA TABELA A.3, MODIFICADA PELO AUMENTO DA EXTENSÃO DAS SECCÕES RETAS LONGAS

s (m)	$\alpha_p$	$\alpha'_p$	$\beta_x$ (s)	$\beta_z$ (s)	$\alpha_x$ (s)	$\alpha_z$ (s)
0,0	(S1) 1,47997	0,00	5,63	1,760	0,00	0,00
0,2	(S1) 1,47997	0,00	5,64	1,783	-0,036	-0,114
0,4	(S1) 1,47997	0,00	5,66	1,850	-0,071	-0,227
0,6	(S1) 1,47997	0,00	5,69	1,965	-0,107	-0,341
0,8	(S1) 1,47997	0,00	5,79	2,124	-0,142	-0,454
1,0	(S1) 1,47997	0,00	5,81	2,328	-0,178	-0,568
1,2	(S1) 1,47997	0,00	5,88	2,578	-0,213	-0,682
1,4	(S1) 1,47997	0,00	6,01	2,874	-0,269	-0,795
1,6	(S1) 1,47997	0,00	6,08	3,215	-0,284	-0,909
1,8	(S1) 1,47997	0,00	6,20	3,601	-0,320	-1,023
2,0	(S1) 1,47997	0,00	6,34	4,033	-0,355	-1,136
2,2	(S1) 1,47997	0,00	6,49	4,510	-0,391	-1,250
2,4	(S1) 1,47997	0,00	6,65	5,032	-0,426	-1,363
2,6	(S1) 1,47997	0,00	6,83	5,601	-0,462	-1,477
2,8	(S1) 1,47997	0,00	7,02	6,214	-0,497	-1,591
3,0	(S1) 1,47997	0,00	7,23	6,873	-0,533	-1,704
3,2	(S1) 1,47997	0,00	7,93	9,123	-0,690	-2,045
5,90	(B) 0,77312	-0,21372	4,81	24,088	-0,130	+0,042
6,00	(B) 0,75280	-0,19276	4,83	24,080	-0,118	+0,037
6,10	(B) 0,73457	-0,17168	4,86	24,073	-0,106	0,033
6,20	(B) 0,71847	-0,15048	4,88	24,067	-0,093	0,029
6,30	(B) 0,70448	-0,12917	4,89	24,062	-0,081	0,025
6,40	(B) 0,69263	-0,10778	4,91	24,057	-0,067	0,021
6,50	(B) 0,68293	-0,08631	4,92	24,053	-0,054	0,017

6,60	(B)	0,67153	-0,04930	4,97	24,050	-0,039	0,012
6,70	(B)	0,66997	-0,04322	4,94	24,048	-0,027	0,008
6,80	(B)	0,66673	-0,02162	4,94	24,047	-0,014	0,004
6,90	(B)	0,66565	-0,000	4,94	24,047	-0,000	0,000
7,00	(B)	0,66673	0,02162	4,94	24,047	-0,000	0,000
7,10	(B)	0,66997	0,04322	4,94	24,048	0,027	-0,008
7,20	(B)	0,67537	0,06479	4,93	24,050	0,041	-0,012
7,30	(B)	0,68293	0,08631	4,92	24,053	0,054	-0,017
7,40	(B)	0,69263	0,10778	4,91	24,057	0,067	-0,021
7,50	(B)	0,70448	0,12917	4,89	24,062	0,081	-0,025
7,60	(B)	0,73457	0,17168	4,86	24,073	0,106	-0,032
7,70	(B)	0,75280	0,19276	4,83	24,080	0,118	-0,037

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) H. Bruck, *Accélérateurs Circulaires de Particules*, Bibliothèque des Sciences et Techniques Nucléaires, Paris, (1966).
- (2) E. Courant and H. Snyder, *Alternating Gradient Synchrotron*, *Annals of Physics*, 3, 1 (1958).
- (3) K. L. Brown, *A First and Second Order Matrix Theory for the Design of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers*, SLAC Report nº 75, Rev. 4, Stanford Linear Accelerator Center, California (1982).
- (4) M. Sands, *The Physics of Electron Storage Rings - An Introduction*, CBPF - PRS 009/84, Rio de Janeiro, (1984).
- (5) M. H. Blewett, K. Johnsen, A. Zichichi, *Theoretical Aspects of the Behaviour of Beam in Accelerators and Storage Rings*, Proceedings of the First Course of the International School of Particle Accelerators of the Ettore Majorana Centre for Scientific Culture, CERN 77 - 13, Geneva, (1977).
- (6) K. G. Steffen, *Selected Topics of Beam Optics Relevant to Storage Ring Design*, CBPF - PRS 010/84, Rio de Janeiro, (1984).
- (7) E. Keil and P. Strolin, *AGS - The ISR Computer System for Synchrotron Design and Orbit Analysis*, CERN 69 - 5, Geneva, (1969).

- (8) K. L. Brown, P. Bounin, R. Belbeoch, First and Second Order Magnetic Optics Matrix Equations for the Midplane of Uniform Field Wedge Magnets, The Review of Scientific Instruments Vol. 35, N° 4, pg. 481 (1964).
- (9) S. Penner, Calculations of Properties of Magnetic Deflection Systems, The Review of Scientific Instruments, Vol. 32, N° 2, pg. 150, (1961).
- (10) J. Le Duff, The European X-Ray Facility (ESRF) and The VUV Project at Orsay (Super-ACO), Anais do Encontro Técnicas e Aplicações da Radiação Síncrotron, CBPF - PRS 008/83, Rio de Janeiro, (1983).
- (11) E. Keil, Computer Programs in Accelerator Physics, CERN 84-01, Geneva, (1984).
- (12) E.J.N. Wilson, Proton Synchrotron Accelerator Theory, CERN 77 - 07, Geneva, (1977).
- (13) H. Wiedemann, Chromaticity Correction in Large Storage Rings, PEP Note N° 220, Stanford California, (1976).
- (14) W. H. Backer, Some Aspects of the Orbits in an Electron Storage Ring used as a Synchrotron Radiation Source, Tese de Doutorado, Eindhoven University of Technology, Holanda, (1979).
- (15) G. Isoyama, Ioshikazu Miyahara, Seiji Asaoka, Akira Mikuni, Hiroshi Nishimura, Kazuo Soda, Proposal of a New Magnet Lattice of an Electron Storage Ring for the High Brightness Synchrotron Radiation Source, ISSP

- Technical Report Ser. A Nº 1324, Tóquio (1983).
- (16) I. Miyahara, Seiji Asaoka, Goro Isoyama, Akira Mikuni, Hiroshi Nishimura, Masami Seki, Kazuo Soda, Shigemasa Suga, Masaki Tamiguchi, Design Study of an Intense Synchrotron Radiation Light Source Super SOR, ISSP Technical Report Ser. A Nº 1365, Tóquio (1983).
- (17) J. Le Duff, Conceptual Design of a 1.2 GeV Storage Ring Extending in the Hard X-Ray Region, CBPF - PRS 006/83, Rio de Janeiro, (1983).
- (18) Roberto Lobo, Ramiro P.A. Muniz, Aldo Craievitch, Jacques Danon, Proposta preliminar do estudo de viabilidade para a implantação de um Laboratório Nacional de Radiação de Síncrotron, CBPF - PRS 001/83, Rio de Janeiro, (1983).
- (19) Ramiro P.A. Muniz, Encontro das Sociedades Científicas sobre a Proposta Preliminar do Estudo de Viabilidade para a Implantação de um Laboratório Nacional de Radiação Síncrotron, CBPE - PRS 003/83, Rio de Janeiro, (1983).
- (20) Y. Petroff, Cours sur Le Rayonnement Synchrotron, CBPF - PRS 007/83, Rio de Janeiro, (1983).
- (21) A. A. Sokolov, I. M. Ternov, Synchrotron Radiation, Pergamon Press, Berlim, (1968).
- (22) R. Lobo, A. Craievich, Anais do Encontro "Técnicas e Aplicações da Radiação Síncrotron", CBPF - PRS 008/83, Rio de Janeiro, (1983).

**“APLICAÇÕES DE UMA TEORIA MATRICIAL DE 1ª ORDEM NO  
CÁLCULO DE UM ANEL DE ESTOCAGEM DESTINADO A  
PRODUÇÃO DE RADIAÇÃO SÍNCRONTON”**

**JOSÉ MÁRCIO MACHADO**

Tese de mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Jader Benuzzi Martins/CBPF

Augusto Brandão de Oliveira/Fac. Eng de Guaratinguá

Nelson Velho de Castro Faria/PUC-RJ

Rio de Janeiro, 01 de dezembro 1984