

"CÁLCULOS PERTURBATIVOS COM O LOOP DE WILSON"

Luiz Boanerges Peixoto Júnior

Tese de Doutorado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

1984

À Aleksandra

À Anna Carolina

Ao Aleksei

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar o meu agradecimento às seguintes pessoas:

Prof. Dr. Carlos Guido Bollini, pela competente orientação deste trabalho e pelo tratamento, sempre cordial, paciente e porque não dizer, fraterno, a mim dispensado.

Prof. Dr. J. J. Giambiagi pela efetiva coorientação do trabalho e pelo tratamento igualmente carinhoso, onde bom-humor, presença de espírito e competência, nunca faltaram.

Luiz Boanerges Peixoto, Francisca A. A. Peixoto, Vicente Finageiv e Belmira Finageiv, cujo apoio e incentivo foi fundamental.

César Augusto Linhares da Fonseca Júnior, cuja ajuda, proporcional ao tamanho do nome, nas horas críticas, foi muito importante.

Amigos e colegas do IEAv e do CBPF pelo apoio e estima e, de forma especial, à Eros e à Marilene pela paciência e dedicação no trabalho de datilografia do texto.

RESUMO

Apresentam-se, nesta tese, cálculos perturbativos com o loop de Wilson (LW). O método de regularização empregado foi o da regularização dimensional. Neste contexto, dedicamos especial atenção ao problema das divergências presentes na expansão perturbativa do LW em segunda e quarta ordens, em três e quatro dimensões. Mostramos como o resíduo no polo, em 4D, da soma das contribuições dos gráficos presentes na quarta ordem contribui para a renormalização da carga. Calculamos também, a expressão exata do LW, em segunda ordem, nas teorias de gauge 3D com massa topológica, bem como o comportamento assintótico do mesmo para pequenas e grandes distâncias.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO .....	1
II- A IMPORTÂNCIA DO FATOR DE FASE NÃO-INTEGRÁVEL	
2.1 - O formalismo integral para os campos de gauge .....	10
2.2 - Equações funcionais dos fatores de fase .....	16
2.3 - O potencial entre cargas estáticas .....	26
III-CÁLCULO PERTURBATIVO DO LOOP DE WILSON COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL	
3.1 - O método de regularização dimensional .....	32
3.2 - O cálculo perturbativo em $g^2$ .....	40
3.3 - O cálculo perturbativo em $g^4$ .....	53
IV- O LOOP DE WILSON NAS TEORIAS DE GAUGE EM TRÊS DIMENSÕES	
4.1 - Teorias de gauge em 3D .....	69
4.2 - Teorias de gauge 3D com massa topológica .....	74
V - DISCUSSÃO E CONCLUSÕES .....	
- BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS .....	87

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Por mais de um quarto de século, a teoria da interação entre elétrons e fótons, a Eletrodinâmica Quântica, tem sido o modelo para uma teoria consistente das partículas elementares. Recentemente, uma nova teoria, a eletrofraca de Salam-Weinberg<sup>[1]</sup>, parece atingir um grau de consistência próximo ao da Eletrodinâmica Quântica. Como se sabe, esta é a teoria unificada das interações fracas e eletromagnéticas, na qual campos vetoriais desempenham um papel fundamental. Em ambos os casos, temos uma teoria quântica de campos, relativista, na qual a probabilidade de ocorrência de quaisquer processos físicos supõe-se poder ser, baseada no princípio de mínima ação com um lagrangiano para os campos em interação o qual é construído por analogia com a teoria clássica. O método de cálculo é a teoria de perturbação, uma expansão em potências da constante de acoplamento.

Apesar de várias tentativas, não foi possível construir uma teoria para os hadrons com base no esquema acima descrito. A razão disto não reside no fato de que a constante de acoplamento que determina a intensidade da interação entre os hadrons seja grande, comparada as demais interações, fazendo com que a teoria de perturbação seja inaplicável, nem mesmo no fato de que as técnicas de renormalização e soma das séries perturbativas para constantes de acoplamento grandes sejam de validade duvidosa. A dificuldade principal tem origem no fato de que não é possível formular a estrutura teórica básica por analogia com o caso anterior e determinar os campos fundamentais e o seu lagrangiano de interação em termos locais. Em Eletrodinâmica, a matéria consiste de elétrons pontuais e campos fotônicos, sem massa, de longo alcance, e, portanto, capazes de ser estudados através de métodos macroscópicos. Estas características, que possibilitaram a construção das teorias clássica e quântica do eletromagnetismo, não ocorrem na física dos hadrons. Já há algum tempo as experiências demonstraram que os hadrons possuem estrutura interna<sup>[2]</sup> e portanto, não podem ser considerados como pontuais. Assim, dificilmente se poderia esperar encontrar um formalismo lagrangiano local neste caso.

No início dos anos 60, Gell-Mann, Ne'eman e Zweig<sup>[3]</sup> classificaram os hadrons com base no grupo de simetria interna SU(3), o que levou ao conceito de quarks. No final da mesma década, Salam e Weinberg lançaram os fundamentos da teoria unificada das interações fraca e eletromagnética. Esta, bem como a eletrodinâmica, fazem parte de um conjunto de teorias conhecidas como teorias de calibre. Logo a seguir, alguns teóricos lançaram a idéia de que eventualmente uma teoria das interações fortes poderia ser obtida misturando-se no mesmo caldeirão o modelo de quarks, as teorias de calibre (Yang-Mills) e a Eletrodinâmica Quântica<sup>[4]</sup>. Esta teoria foi batizada por Gell-Mann com o nome de Cromodinâmica Quântica (Quantum Chromodynamics-QCD).

Na QCD, os hadrons são vistos como objetos extensos consistindo de dois tipos de matéria: um pequeno número de partículas fundamentais, os quarks, os quais possuem números quânticos como carga, estranheza, sabor e cor e os glúons, campos vetoriais coloridos que permeiam as interações entre os quarks. De forma diferente da eletrodinâmica, em que o campo elétrico atua somente sobre a dinâmica da carga elétrica, sem alterar o seu sinal ou a sua magnitude, na QCD, o campo de cor atua, não só sobre a dinâmica dos quarks, como também no sentido de alterar a sua cor, já que ele próprio é colorido. Esta generalização a partir da Eletrodinâmica (teoria abeliana) foi formulada matematicamente por Yang e Mills<sup>[5]</sup> com a introdução dos campos de calibre não abelianos. A renormalizabilidade das teorias de Gauge (calibre) foi demonstrada por t'Hooft, Fadeev e Popov<sup>[6]</sup>. Embora até o presente momento nenhuma experiência tenha inferido taxativamente sobre a existência dos quarks livres, quanto aos glúons, a observação de eventos com três Jatos nas colisões  $\gamma$ -N parecem confirmar a existência dos mesmos. Um dos argumentos mais razoáveis para explicar o porquê da não observação de estados de quarks livres pode estar no fato de que, diferentemente dos fótons, os glúons interagem uns com os outros e, devido à interação, o campo gluônico não se dissipa pelo espaço, ao contrário do campo elétrico, podendo concentrar-se dentro de estreitos tubos que se ligam as fontes dos campos: os

quarks. Se isto acontece, é possível mostrar que a energia de ligação de um sistema de dois corpos cresce linearmente com a separação. Neste caso, nenhuma força externa, por maior que fosse, seria capaz de retirar um quark individual de dentro de um méson, por exemplo. Antes disto, haveria a criação de um ou mais pares de quark-antiquark, induzindo a formação de outros mésons. Tal como os quarks, os glúons possuem carga de cor e é de se esperar que, pelas mesmas razões, glúons livres não possam se irradiar no espaço. Ao mecanismo acima descrito foi dado o nome de confinamento [7].

Paralelamente ao surgimento do modelo de quarks, tentou-se abordar o problema dos hadrons (interações fortes) através do formalismo da matriz S. Considera-se, neste caso, que cada processo envolvendo interações entre partículas é descrito por alguma amplitude de probabilidade. Estas amplitudes estão relacionadas aos elementos de matriz da chamada Matriz de Espalhamento (S-Matriz), um operador unitário no espaço dos estados caracterizado por um conjunto de partículas livres possuindo momenta definidos. Cada amplitude é uma função de variáveis cinemáticas do processo, os momenta e spins das partículas em interação e das partículas produzidas como resultado da mesma. Mesmo quando não é possível construir uma teoria completa que possa ser usada para calcular as amplitudes, é possível, pelo menos, tentar encontrar algumas propriedades gerais das amplitudes, como elementos de uma matriz S geral. A abordagem da teoria dos hadrons pelo método da matriz S pode então ser resumida como sendo a formulação de leis gerais para a construção das amplitudes e a análise de suas aplicações aos processos específicos. Os princípios geralmente aceitos da teoria são os seguintes: homogeneidade e isotropia do espaço - tempo quadrimensional, conservação da probabilidade (ou unitariedade), causalidade e simetria cruzada.

Historicamente, a primeira abordagem ao problema dos hadrons data da época da descoberta da existência das interações fortes e faz uso da idéia de que os hadrons interagem através da troca de um quantum de um de

terminado campo. No domínio relativístico, a altas energias, a descrição original da interação entre hadrons através do mecanismo de troca de partículas ainda é mantida com a diferença de que agora as partículas trocadas correspondem a polos no plano do momento angular complexo, partículas estas que ficaram conhecidas como reggeons, em homenagem ao físico italiano Tullio Regge. Dentro desta abordagem dos polos de Regge, surgiu a classificação dos hadrons em termos dos gráficos de Chew-Frautschi, na qual bárions e mésons assentam-se sobre trajetórias bem definidas<sup>[8]</sup>. Por outro lado, ainda no domínio relativístico, uma segunda abordagem ao problema dos hadrons, a baixas e médias energias, também fornecia bons resultados. Esta abordagem partia do fato de que, nesta faixa de energia, a interação entre os hadrons tem uma grande probabilidade de induzir a formação de estados intermediários meta-estáveis, ou, como são mais conhecidos, ressonâncias

Os estudiosos do formalismo da matriz S, ao calcularem as amplitudes de interação, descobriram que os reggeons constituíam a continuação analítica das ressonâncias no canal cruzado. Esta descoberta sugeria que as duas abordagens anteriores, ao invés de serem complementares, como se pensava até então, na verdade possuíam um caráter dinâmico comum. Este fato levou à hipótese da dualidade reggeon - ressonância, ou seja, seria possível construir-se um modelo que fornecesse uma boa descrição em toda faixa de energia baseado no caráter dinâmico comum dos reggeons e das ressonâncias? Fosse qual fosse este modelo, ele deveria assentar-se sobre a idéia de que as amplitudes de interação possuem somente singularidades do tipo polo e satisfazer os princípios gerais do formalismo da matriz S. Esta condição, de partida, exige um número infinito de polos, ou, equivalentemente, o modelo requer um espectro infinito de ressonâncias. O modelo deveria ser construído de tal forma que, a altas energias, a superposição de um grande número de polos induzisse a troca de reggeons, ao passo que, a baixas energias, a soma da contribuição de alguns polos dessem origem ao comportamento ressonante da energia<sup>[9]</sup>. O primeiro modelo dual, para par

tículas escalares, foi apresentado em 1968 por Veneziano<sup>[10]</sup> e ficou conhecido pelo nome do autor. Este modelo satisfazia as condições gerais da matriz S com exceção da condição de unitariedade que só era satisfeita na aproximação em que os estados intermediários, exceto os de uma partícula, eram desprezados. O modelo predizia um espectro inteiro de ressonâncias, as quais foram satisfatoriamente confirmadas pela experiência. A partir do modelo de Veneziano, vários outros modelos foram apresentados com base na dualidade reggeon-ressonância. Apesar do relativo sucesso dos modelos duais, um fato permanecia obscuro na teoria: a existência de amplitudes de probabilidade negativas. Posteriormente, mostrou-se que a teoria só era autoconsistente (sem amplitudes de probabilidade negativas) quando o número de dimensões era, em alguns modelos, igual a 10 e, em outros, igual a 26. Este problema ficou conhecido como o problema da criticalidade dimensional dos modelos duais.

Após a formulação das expressões das amplitudes duais, esforços desenvolvidos no sentido de se estabelecer a descrição espaço-temporal das interações que possuíssem propriedades duais. Em 1968, Harari e Rosner<sup>[11]</sup> mostraram como a dualidade reggeon-ressonância, em certas interações, podia ser expressa de forma coerente na linguagem dos quarks e que somente a contribuição dos gráficos que não possuíssem "loops" de quarks virtuais nem interações de linhas de quarks deveria ser levada em consideração, ou seja, somente os gráficos planares. Esta característica planar dos diagramas duais reforçou a hipótese do confinamento, ou seja, o campo por intermédio do qual se dá a interação entre os quarks, por algum motivo, se concentra dentro de uma região estreita do espaço próxima a linha que une os quarks. Por outro lado, ao se estudar o espectro associado com os modelos duais, foi observada a existência de níveis de energia igualmente espaçados, o que sugere que o espectro é resultado da excitação de um grande número de osciladores harmônicos de múltiplas frequências. Um sistema clássico com estas características é a corda elástica. Assim, estes dois aspectos dos modelos duais pareciam sugerir que os hadrons fossem estados quânticos de um sistema unidimensional. O passo seguinte seria formu

lar a descrição clássica e quântica de uma estrutura relativística unidimensional: a corda (string).

O lagrangiano clássico da string, no contexto dos modelos duais, foi inicialmente formulado por Nambu<sup>[12]</sup> e o método de quantização proposto por Goddard, Goldstone, Rebbi e Thorn<sup>[13]</sup>. Uma teoria de strings com spin foi proposta por Iwasaki e Kikawa<sup>[14]</sup>. Vários autores têm contribuído para o aperfeiçoamento da teoria e o assunto vem sendo alvo de intenso interesse até os dias de hoje<sup>[9]</sup>,<sup>[15]</sup>

Em 1978, Gervais e Neveu, Polyakov, Nambu e Virasoro<sup>[16]</sup> ao analisarem o comportamento do operador

$$\omega(\Gamma) = \text{Tr} P \exp \oint_{\Gamma} A \cdot dx \quad (1.1)$$

sob variações no contorno fechado  $\Gamma$ , ou seja, ao considerarem as derivadas funcionais de  $\omega(\Gamma)$  com relação a curva  $\Gamma$  para um dado potencial vetor  $A$  fixo, obtiveram os seguintes resultados:

$$\frac{\delta \omega(\Gamma)}{\delta x_{\mu}(t)} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}_{\nu}(t) P \exp \oint_{\Gamma} A \cdot dx \right\} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \omega(\Gamma)}{\delta x_{\mu}(t)^2} &= \text{Tr} \left\{ D_{\beta} F_{\beta\nu}(x(t)) \dot{x}_{\nu}(t) P \exp \oint_{\Gamma} A \cdot dx \right\} \delta(0) \\ &+ \text{Tr} \left\{ [F_{\beta\nu}(x(t)) \dot{x}_{\nu}(t)]^2 P \exp \oint_{\Gamma} A \cdot dx \right\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde  $t$  é uma parametrização da curva,  $F_{\mu\nu}$  é o tensor das intensidades de campo e  $D_{\beta}$  é a derivada covariante usual:

$$\dot{x}_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{dt}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$$D_{\beta} = \partial_{\beta} - [A_{\beta}, \quad ] .$$

Se agora considerarmos que o funcional  $\omega(\Gamma)$  possa ser renormalizado de tal forma que a  $\delta(0)$  que aparece na eq. (1.3) possa ser eliminada e que o potencial  $A_{\mu}$  satisfaça a equação de Yang - Mills sem fontes,

$$D_{\beta} F_{\beta\nu} = 0 ,$$

teremos que, das equações (1.2) e (1.3), segue-se imediatamente

$$\frac{\delta\omega(\Gamma)}{\delta x_{\mu}(t)} \dot{x}_{\mu}(t) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\delta^2\omega(\Gamma)}{\delta x_{\mu}(t)^2} = \text{Tr} \left\{ [F_{\beta\nu}(x(t))\dot{x}_{\nu}(t)]^2 P \exp \int_{\Gamma} A \cdot dx \right\} . \quad (1.5)$$

Um fato interessante que chamou a atenção dos autores foi a semelhança das equações (1.4) e (1.5) com as equações da string quantizada. Se  $\rho(v)$  for um funcional que descreve a string quântica, é possível mostrar que as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\frac{\delta\rho(\sigma)}{\delta x_{\mu}(\sigma)} \dot{x}_{\mu}(\sigma) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\delta^2\rho(\sigma)}{\delta x_{\mu}(\sigma)^2} = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \dot{x}^2(\sigma) \rho(\sigma) , \quad (1.7)$$

onde  $\alpha$  é a chamada "inclinação (slope) de Regge".

Assim, dado um determinado campo  $A_{\mu}$  fixo, em uma teoria de Yang-Mills clássica, o funcional  $\omega(\Gamma)$  definido pela eq.(1) parece estar relacionado ao funcional de

onda  $\rho(\sigma)$  que descreve uma corda (string) quantizada em primeira ordem, ou seja, o estado de uma corda com vibrações quantizadas.

A relevância do operador  $\omega(\Gamma)$  definido pela eq. (1.1) já havia sido apontada anteriormente, em contextos diversos, por Yang e Wilson. Em 1974, Yang apresentou o formalismo integral dos campos de calibre<sup>[17]</sup> (gauge) no qual o operador  $\omega(\Gamma)$  desempenhava o papel fundamental. Posteriormente, Wu e Yang<sup>[18]</sup> chamaram a atenção para o fato de que este fator de fase já era conhecido dos matemáticos, no contexto da geometria dos espaços fibrados, pelo nome de operador de transporte paralelo e, a partir desta ligação, identificaram o potencial e o tensor de intensidade de campos das teorias de gauge com a conexão e o tensor de curvatura.

Ainda em 1974, quando da formulação das teorias de gauge sobre uma estrutura reticulada espaço-temporal, ressaltou-se a profunda conexão destas teorias com a mecânica estatística. Particularmente com relação ao problema dos hádrons na QCD, onde o grupo de simetria é não-abeliano, é possível mostrar que a mesma apresenta duas fases distintas: uma confinante e a outra não-confinante. Foi Wilson<sup>[19]</sup> quem mostrou que o parâmetro  $W(\Gamma)$  definido por,

$$W(\Gamma) = \langle \text{Tr } \hat{P} \exp \oint A \cdot dx \rangle \quad (1.8)$$

onde  $\Gamma$  é um contorno na rede, era capaz de discernir as fases da teoria. Na fase não-confinante  $W(\Gamma)$  deve ter um comportamento do tipo

$$W(\Gamma) \sim \exp(-c P), \quad (1.9)$$

onde  $P$  é o perímetro, ao passo que, na fase confinante, o loop de Wilson quântico, como também ficou conhecido o operador  $W(\Gamma)$ , deve comportar-se de acordo com a lei de área

$$W(\Gamma) \sim \exp(-c A), \quad (1.10)$$

sendo  $A$  a área envolvida pelo contorno  $\Gamma$ .

Em 1979, atraídos pela propriedade de invariância de gauge do loop de Wilson, Migdal e Makeenko<sup>[20]</sup> propuseram a chamada formulação das teorias de Gauge não-abelianas, no espaço dos contornos, cujo objetivo era eliminar quaisquer referências aos gauges, tais como, transformações de gauge, fixação do gauge, fantasmas, e lidar somente com funcionais escalares invariantes de gauge  $W_n(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  dos contornos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  e expressar as equações de movimento de Yang-Mills em termos de equações funcionais dos contornos. Posteriormente, baseados na indicação de t'Hooft de que a QCD, no limite em que o número de cores  $N$  é muito grande ( $N \rightarrow \infty$ ), porém mantendo-se  $g^2 N$  fixo, deve tender a um tipo de teoria dual com constante de acoplamento da ordem  $N^{-1}$  e onde somente os gráficos planares fornecem contribuições relevantes, Migdal e Makeenko<sup>[21]</sup> lançaram a idéia de que a QCD poderia ser inteiramente formulada em termos dos funcionais

$$W(\Gamma) = \left\langle \frac{\text{Tr}}{N} \int_{\Gamma} p \exp \left\{ \oint_{\Gamma} A \cdot dx \right\} \right\rangle, \quad (1.11)$$

onde  $N$  é o número de cores, utilizando-se o método de expansão em potências de  $N^{-1}$ . O programa de Migdal e Makeenko de formular a QCD em termos da dinâmica dos contornos esbarra em uma série de problemas<sup>[22]</sup>: os funcionais  $W(\Gamma)$  são divergentes e devem ser renormalizados, a derivada funcional de área nem sempre é bem definida, não se sabe como calcular integrais funcionais para observáveis e não se sabe como resolver as equações funcionais nos contornos em quatro dimensões. Apesar destas dificuldades, o assunto continua atual e alguns trabalhos tem sido recentemente publicados sobre o tema.

Conforme tivemos oportunidade de ver, o loop de Wilson apresenta um papel importante em diversas áreas da física teórica atual. Assim, por esta razão, é nossa opinião que as pesquisas atuais sobre o loop de Wilson, são de justificada relevância e que, eventualmente, poderão vir a ser de utilidade em um futuro próximo.

CAPÍTULO II

A IMPORTÂNCIA DO FATOR DE FASE NÃO-INTEGRÁVEL

2.1 - O formalismo integral para os campos de gauge

Em 1974, C.N. Yang <sup>[17]</sup> mostrou como o formalismo diferencial das teorias de Gauge poderia ser reformulado em termos de um formalismo integral, conceitualmente superior, no qual o fator de fase não-integrável  $\psi(\Gamma)$  desempenhava um papel fundamental. Revisaremos agora, embora parcialmente, alguns dos resultados obtidos por Yang.

Considere uma forma (p.ex. o espaço - tempo quadridimensional) cujas coordenadas são dadas por  $x^\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots, n$ ) e considere também um grupo de Gauge  $G$  que seja um grupo de Lie com geradores  $G_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ). Define-se o fator de fase não-integrável (dependente do caminho)  $\psi(\Gamma)$  como sendo o elemento do grupo  $G$  associado com o caminho  $\Gamma$  entre os pontos  $a$  e  $b$  na forma

$$\psi(\Gamma) \equiv P \exp \int_{\Gamma} A_{\mu} \cdot dx^{\mu} \quad (2.1)$$

onde

$$A_{\mu} = g A_{\mu}^k G_k$$

e  $P$  representa a ordenação ao longo de  $\Gamma$ .

Esta associação possui a propriedade de grupos

$$\psi_{abc} = \psi_{ab} \psi_{bc}$$

onde os caminhos  $ab$  e  $bc$  são segmentos de  $abc$ . Além do mais para um caminho infinitesimal de  $a$  até  $a + dx$  o fator de fase aproxima-se da identidade  $I$  de  $G$

$$\psi_{a(a+dx)} = I + g A_{\mu}^k(x) G_k dx^{\mu} \quad (2.2)$$

onde a função  $\tilde{A}_\mu^k(x)$  definida sobre a forma  $\tilde{e}$  o potencial de gauge e  $g$  a constante de acoplamento.

Podemos nos perguntar o que acontece a  $\psi(\Gamma)$ , definido pela eq.(2.1), quando efetuarmos uma transformação de gauge no potencial

$$A_\mu(x) \rightarrow U^{-1}(x) A_\mu(x) U(x) + U^{-1}(x) \partial_\mu U(x) \quad (2.3)$$

A resposta é que no formalismo integral uma transformação de gauge é definida pela seguinte lei de transformação

$$\psi_{ab}(\Gamma) \rightarrow \psi'_{ab}(\Gamma) = U^{-1}(a) \psi_{ab}(\Gamma) U(b) \quad (2.4)$$

Demonstração. Dividindo o caminho  $\Gamma$  em  $N+1$  partes podemos escrever:

$$\psi_{ab}(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{ab}^N(\Gamma) \quad (2.5)$$

$$\psi_{ab}^N(\Gamma) = e^{A(a) \cdot (x_1 - a)} e^{A(x_1) \cdot (x_2 - x_1)} \dots e^{A(b) \cdot (b - x_N)} \quad (2.6)$$

Observemos que no limite  $N \rightarrow \infty$

$$\psi_{ab}^N(\Gamma) = (1 + A(a) \cdot (x_1 - a)) \cdot (1 + A(x_1) \cdot (x_2 - x_1)) \dots (1 + A(b) \cdot (b - x_N))$$

Efetuem agora a transformação de gauge dada pela eq. (2.3)

$$\psi_{ab}^N(\Gamma) = (1 + \{U^{-1}(a) A_\mu(a) U(a) + U^{-1}(a) \partial_\mu U(a)\} (x_1 - a)^\mu) \cdot$$

$$(1 + \{U^{-1}(x_1) A_\mu(x_1) U(x_1) + U^{-1}(x_1) \partial_\mu U(x_1)\} (x_2 - x_1)^\mu) \cdot$$


---

$$(1 + \{U^{-1}(b) A_\mu(b) U(b) + U^{-1}(b) \partial_\mu U(b)\} (b - x_N)^\mu)$$

$$\psi_{ab}^N(\Gamma) = U^{-1}(a) (1 + \{A_\mu(a) + \partial_\mu U(a) \cdot U^{-1}(a)\} \cdot (x_1 - a)^\mu) U(a) \cdot U^{-1}(x_1) \cdot$$

$$(1 + \{A_\mu(x_1) + \partial_\mu U(x_1) \cdot U^{-1}(x_1)\} \cdot (x_2 - x_1)^\mu) U(x_1) \cdot U^{-1}(x_2) \cdot$$


---

$$(1 + \{A_\mu(b) + \partial_\mu U(b) \cdot U^{-1}(b)\} \cdot (b - x_N)^\mu) U(b)$$

como

$$U(a) U^{-1}(x_1) = U(a) U^{-1}(a + \delta x_1) \quad ; \quad \delta x_1 = x_1 - a$$

$$U^{-1}(a + \delta x_1) = U^{-1}(a) + \partial_\mu U^{-1}(a) \delta x_1^\mu + \dots$$

$$U(a) U^{-1}(a + \delta x_1) = 1 + U(a) \partial_\mu U^{-1}(a) (x_1 - a)^\mu + \dots$$

e então

$$\begin{aligned} U(a) U^{-1}(x_1) &= \exp \{ U(a) \partial_\mu U^{-1}(a) (x_1 - a)^\mu \} \\ &= \exp \{ -\partial_\mu U(a) U^{-1}(a) (x_1 - a)^\mu \} \end{aligned}$$

além disto

$$1 + \{ A_\mu(a) + \partial_\mu U(a) U^{-1}(a) \} (x_1 - a)^\mu + \dots = \exp \{ (A_\mu(a) + \partial_\mu U(a) \cdot U^{-1}(a)) \cdot (x_1 - a)^\mu \}$$

e assim segue que

$$\begin{aligned} &(1 + \{ A_\mu(a) + \partial_\mu U(a) \cdot U^{-1}(a) \} (x_1 - a)^\mu) U(a) \cdot U^{-1}(x_1) = \\ &= \exp \{ (A_\mu(a) + \partial_\mu U(a) \cdot U^{-1}(a)) (x_1 - a)^\mu \} \cdot \exp \{ -\partial_\mu U(a) U^{-1}(a) (x_1 - a)^\mu \} \\ &= \exp \{ A_\mu(a) (x_1 - a)^\mu \} \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo processo N-1 vezes teremos

$$\psi_{ab}^{\prime N}(\Gamma) = U^{-1}(a) \psi_{ab}^N U(b)$$

que no limite do contínuo (eq. (2-5)) implica em

$$\psi_{ab}^{\prime}(\Gamma) = U^{-1}(a) \psi_{ab}(\Gamma) U(b) \quad (2.7)$$

o que completa a demonstração.

Consideremos agora uma variação funcional infinitesimal interior no caminho  $\Gamma$  do tipo mostrado na figura 1

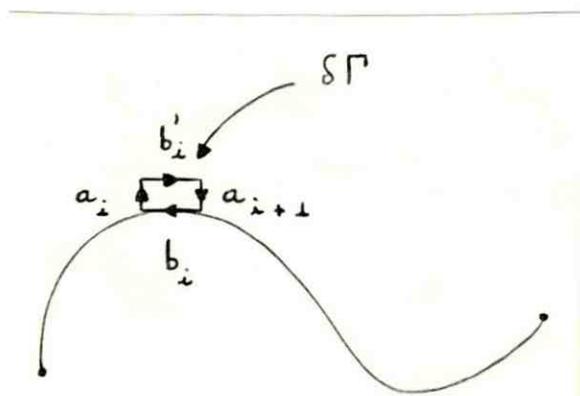


Fig. 1

Parametrizando a curva  $\Gamma$  por  $x(\sigma)$  onde

$$0 \leq \sigma \leq 1; x(0) = a; x(1) = b$$

e dividindo-a em  $N + 1$  segmentos de reta de modo que  $\delta\Gamma$  se apoie sobre o  $i$ -ésimo segmento de reta teremos que os fatores de fase infinitesimais correpondentes ao paralelogramo são:

$$a_i = 1 + A(x_i) \delta x(\sigma_i) + \dots$$

$$a_{i+1}^{-1} = 1 - A(x_{i+1}) \delta x(\sigma_{i+1}) + \dots$$

$$b_i^{-1} = 1 - A(x_i) (x_{i+1} - x_i) + \dots$$

$$b_i' = 1 + A(x_i + \delta x(\sigma_i)) (x_{i+1} + \delta x(\sigma_{i+1}) - x_i - \delta x(\sigma_i)) + \dots$$

é claro então que

$$\psi(\delta\Gamma) = a_i b_i' a_{i+1}^{-1} b_i^{-1} \quad (2.8)$$

Por convenção

$$\delta x(\sigma_i) \equiv \delta x_i$$

e como estamos levando em consideração só as variações interiores, ou seja, os pontos extremos são tomados fixos:

$$x_{i+1} - x_i \equiv dx_i$$

Da equação (2.8) teremos:

$$\psi(\delta\Gamma) = [1 + A(x_i)\delta x_i + \dots] \cdot [1 + A(x_i + \delta x_i)(x_{i+1} + \delta x_{i+1} - x_i - \delta x_i) + \dots]$$

$$[1 + A(x_{i+1})\delta x_{i+1} + \dots] \cdot [1 - A(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots]$$

$$\begin{aligned} \psi(\delta\Gamma) &= 1 + A_\mu(x_i)\delta x_i^\mu + A_\mu(x_i + \delta x_i)[x_{i+1} + \delta x_{i+1} - x_i - \delta x_i]^\mu - A_\mu(x_{i+1})\delta x_{i+1}^\mu \\ &- A_\mu(x_i)(x_{i+1} - x_i)^\mu + A_\mu(x_i)A_\nu(x_i + \delta x_i)\delta x_i^\mu [x_{i+1} + \delta x_{i+1} - x_i - \delta x_i]^\nu \\ &- A_\mu(x_i)A_\nu(x_{i+1})\delta x_i^\mu \delta x_{i+1}^\nu - A_\mu(x_i)A_\nu(x_i)\delta x_i^\mu (x_{i+1} - x_i)^\nu \\ &- A_\mu(x_i + \delta x_i)A_\nu(x_{i+1})[x_{i+1} + \delta x_{i+1} - x_i - \delta x_i]^\mu \delta x_{i+1}^\nu \\ &- A_\mu(x_i + \delta x_i)A_\nu(x_i)[x_{i+1} + \delta x_{i+1} - x_i - \delta x_i]^\mu (x_{i+1} - x_i)^\nu \\ &+ A_\mu(x_{i+1})A_\nu(x_i)\delta x_{i+1}^\mu (x_{i+1} - x_i)^\nu \\ &+ \text{termos de ordem superior.} \end{aligned}$$

Levando em consideração unicamente os termos de primeira ordem (tanto em  $\delta x$  como em  $dx$ ), bem como:

$$A_{\mu}(x_i + \delta x_i) = A_{\mu}(x_i) + \delta x_i^{\nu} \partial_{\nu} A_{\mu}(x_i) + \dots$$

$$A_{\mu}(x_{i+1}) = A_{\mu}(x_i) + dx_i^{\nu} \partial_{\nu} A_{\mu}(x_i) + \dots$$

chega-se ao seguinte resultado

$$\Gamma(\delta\Gamma) = 1 + \{ \partial_{\mu} A_{\nu}(x_i) - \partial_{\nu} A_{\mu}(x_i) + [A_{\mu}(x_i), A_{\nu}(x_i)] \} \delta x_i^{\mu} dx_i^{\nu} \quad (2.9)$$

onde  $\delta x^{\mu} dx^{\nu}$  é o elemento infinitesimal de área  $\delta\sigma^{\mu\nu}$ .

No caso geral, isto é, no caso de uma variação funcional infinitesimal interior qualquer

$$\delta\sigma^{\mu\nu} = \oint_{\delta\Gamma} x^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.10)$$

e, pelas mesmas razões, no geral

$$\psi(\delta\Gamma) = P \exp \left\{ \oint_{\delta\Gamma} A_{\mu} dx^{\mu} \right\} \quad (2.11)$$

Utilizando as expressões acima podemos dar um cunho geral a equação (2.9), ou seja:

$$P \exp \left\{ \oint_{\delta\Gamma} A_{\mu} dx^{\mu} \right\} = 1 + F_{\mu\nu} \delta\sigma^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor das intensidades de campo, definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]$$

Um resultado particularmente interessante pode ser obtido quando os caminhos  $\Gamma$ , considerados na equação (2.1), são fechados. Neste caso

$$\psi(\Gamma) = P \exp \oint_{\Gamma} A_{\mu} \cdot dx^{\mu} \quad (2.13)$$

e da equação (2.4) segue que

$$\psi(\Gamma) = U^{-1}(a) \psi(\Gamma) U(a) \quad (2.14)$$

Tomando-se agora o traço sobre índices das matrizes do grupo de simetria interno

$$\omega(\Gamma) = \text{Tr} \psi(\Gamma) \quad (2.15)$$

e da propriedade cíclica dos traços

$$\omega'(\Gamma) = \text{Tr}[U^{-1}(a) \psi(\Gamma) U(a)] = \text{Tr} \psi(\Gamma) = \omega(\Gamma)$$

ou seja, o operador definido pela equação (2.15) é invariante de gauge.

## 2.2 - Equações funcionais dos fatores de fase

No início dos anos 60, Mandelstam<sup>[23]</sup> demonstrou que o mecanismo de restauração da invariância de gauge através da introdução da derivada covariante em uma teoria lagrangiana como, por exemplo, a do campo escalar complexo era equivalente a se fazer uma transformação nos campos da lagrangiana da forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x, \Gamma) = \phi(x) \exp \left[ - \int_{-\infty}^x A_{\mu} dx^{\mu} \right]$$

$$\phi^*(x) \rightarrow \phi^*(x, \Gamma) = \phi^*(x) \exp \left[ \int_{-\infty}^x A_{\mu} dx^{\mu} \right]$$

onde a integração é feita sobre um caminho arbitrário do tipo espaço  $\Gamma$  mantendo-se o ponto  $x$  fixo. O campo transformado  $\phi(x, \Gamma)$  depende agora não só da posição como também de todo o caminho  $\Gamma$  e é invariante de gauge diante das transformações de gauge locais usuais. Ainda neste trabalho, o autor procurou definir o conceito de derivação funcional de caminho. Em um trabalho posterior, Mandelstam <sup>[24]</sup> estendeu suas idéias ao caso não-abeliano procurando, dentro do contexto dos funcionais de caminho, estabelecer a forma geral das equações de movimento.

Ainda por volta do início dos anos 60, Bohm e Aharonov <sup>[25]</sup> demonstraram que no caso do campo eletromagnético o tensor das intensidades de campo  $F_{\mu\nu}$ , por si só, em uma teoria quântica, não descreve completamente todos os efeitos da função de onda do elétron. A confirmação experimental foi feita por Chambers <sup>[26]</sup> que mostrou que numa região multiplamente conexa onde  $F_{\mu\nu}$  é nulo em todos os pontos a função de onda que representa o feixe de elétrons espalhado depende da integral de contorno

$$\oint_{\Gamma} A_{\mu} dx^{\mu}$$

em torno de um dado contorno  $\Gamma$  fixo. Tal fato suscita a seguinte questão: o que na verdade, constitui a descrição completa e intrínseca do eletromagnetismo?

Analisando o efeito Bohm-Aharonov, Wu e Yang <sup>[18]</sup> concluíram que, na realidade, só o fator de fase

$$\exp \left\{ \oint A_{\mu} dx^{\mu} \right\}$$

possuía significado físico. A idéia em torno da qual esta afirmação se baseia é de que a fase contém mais informação do que o fator de fase mas esta informação não é mensurável. Esta idéia levou ao conceito do fator de fase não integral (ou dependente do caminho) como sendo a base para a descrição do eletro

magnetismo.

Esta questão já havia sido levantada por Dirac e Peierls em 1948. Com base na formulação integral dos campos de gauge de Yang, Wu e Yang extenderam a idéia para o caso não-abeliano (SU(2) e SO(3)) onde o fator de fase não integrável passava a ter a seguinte forma

$$P \exp \left[ \oint A_{\mu}^k \cdot G_k dx^{\mu} \right]$$

onde  $G_k$  é um elemento de um grupo de Lie não-abeliano (vide eqs. (2.1) e (2.6)). Este fator de fase já era conhecido dos matemáticos na geometria dos espaços fibrados pelo nome de operador de transporte paralelo e a partir desta ligação a identificação do potencial de campo  $A_{\mu}$  e do tensor das intensidades de campo  $F_{\mu\nu}$  das teorias de gauge como conexão e tensor de curvatura no espaço fibrado foi imediata. A relação entre as teorias de gauge e os espaços fibrados já havia sido apontada anteriormente por Lubkin, Kerner e Trautman<sup>[27]</sup> mas somente após os trabalhos de Yang e Wu e Yang os físicos tiveram sua atenção voltada para este ponto.

Em 1978, Gervais e Neveu, Polyakov, Nambu e Virasoro atraídos pela propriedade de invariância de gauge do operador  $\omega(\Gamma)$  (eq.2.15)

$$\omega(\Gamma) = \text{Tr} P \exp \left\{ \oint A_{\mu} \cdot dx^{\mu} \right\}$$

e pelas idéias de Wu e Yang procuraram levar adiante as antigas idéias de Mandelstan ou seja, dentro do contexto dos funcionais de caminho, estabelecer a forma geral das equações de movimento, para o operador  $\omega(\Gamma)$ . Revisaremos agora, alguns dos principais resultados obtidos<sup>[28]</sup>.

Tomemos como ponto de referência um determinado ponto  $x$  sobre o contorno  $\Gamma$ . O produto ordenado  $\psi_x(\Gamma)$  pode ser considerado tanto como um funcional do contorno  $\Gamma$  e uma função do ponto de referência  $x$ . Consideremos um con

torno levemente distorcido, em relação a  $\psi_x(\Gamma)$ , o qual chamaremos  $\psi_{x+\delta x}(\Gamma+\delta\Gamma)$  (veja Fig. 2):

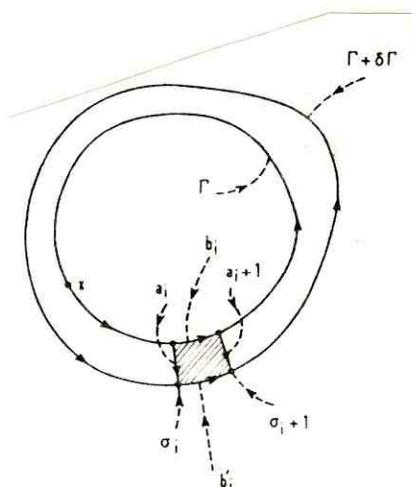


Fig. 2

a derivada funcional variacional de primeira ordem é definida da seguinte forma

$$\frac{\delta\psi_x(\Gamma)}{\delta x(\sigma)} \equiv \lim_{\delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{\psi_{x+\delta x}(\Gamma+\delta\Gamma) - \psi_x(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma)} \quad (2.16)$$

Deste ponto em diante, o espaço-tempo será considerado euclidiano. Das equações (2.8) e (2.9) temos que

$$b_i^! = a_i^{-1} (1 + F_{\mu\nu}(x_i) \delta x_{i\mu} dx_{i\nu}) b_i \quad (2.17)$$

e é claro que se o ponto de referência  $x$  não sofre nenhuma variação ( $\delta x = 0$ )

$$\psi_x(\Gamma+\delta\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N b_i^!$$

e da equação (2.17) segue que

$$\psi_x(\Gamma+\delta\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_1^{-1} \left[ \prod_{i=1}^N (1 - F_{\mu\nu}(x_i) \delta x_{i\mu} dx_{i\nu}) b_i \right] a_{N+1} \quad (2.18)$$

e como o ponto  $x$  não varia

$$a_1^{-1} = a_{N+1} = 1$$

Entretanto se agora o ponto de referência  $x$  sofre uma pequena variação  $x \rightarrow x + \delta x$

$$a^{-1} = a_{N+1}^{-1} = (1 - A(x) - \delta x(0))$$

$$a_{N+1} = (1 + A(x) \cdot x(0))$$

e assim, da eq. (2.18), é fácil ver que

$$\psi_{x+\delta x}(\Gamma + \delta\Gamma) = (1 - A(x) \cdot \delta x(0)) \left[ \prod_{i=1}^N b_i + \int_0^1 d\sigma \psi_{x:\dot{x}(\sigma)}(\Gamma) F_{\mu\nu}(\sigma) \frac{dx_\nu}{d\sigma} \psi_{x(\sigma):x}(\Gamma) \delta x_\mu(\sigma) \right] \cdot (1 + A(x) \cdot \delta x(0)) \quad (2.19)$$

onde a parametrização usual foi utilizada. Tomando a seguinte regra de derivação funcional

$$\frac{\delta x_\mu(\sigma_1)}{\delta x_\nu(\sigma_2)} = \delta_{\mu\nu} \delta(\sigma_1 - \sigma_2)$$

bem como o resultado obtido na equação (2.19) podemos agora calcular a derivação funcional variacional de primeira ordem definida pela equação (2.16)

$$\frac{\delta\psi(\Gamma)}{\delta \dot{x}_\mu(\sigma)} = \psi_{x:\dot{x}(\sigma)}(\Gamma) F_{\mu\nu}(\sigma) \dot{x}_\nu(\sigma) \psi_{x(\sigma):x}(\Gamma) - \delta(\sigma) [A_\mu, \psi_x(\Gamma)] \quad (2.20)$$

Para o operador invariante de gauge  $\omega(\Gamma)$ , a partir do resultado acima, teremos

que

$$\frac{\delta \omega(\Gamma)}{\delta x_{\mu}(\sigma)} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(\sigma) \dot{x}_{\nu}(\sigma) P \exp \left\{ \int_{\Gamma} A \cdot dx \right\} \right. \quad (2.21)$$

Define-se a derivada funcional de área como:

$$\frac{\delta \psi(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \lim_{\delta \Gamma \rightarrow 0} \frac{\psi_{\mathbf{x}}(\Gamma + \delta \Gamma) - \psi_{\mathbf{x}}(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} \quad (2.22)$$

onde  $\sigma_{\mu\nu}(\sigma)$  é o elemento infinitesimal de área no ponto  $\sigma$ .

Da equação (2.18) segue que

$$\psi_{\mathbf{x}}(\Gamma + \delta \Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \prod_{i=1}^N (1 - F_{\alpha\beta}(x_i) \delta x_{i\alpha} dx_{i\beta}) b_i \right]$$

ou seja

$$\delta \psi_{\mathbf{x}}(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N F_{\alpha\beta}(x_i) \delta x_{i\alpha} dx_{i\beta} b_i$$

que no limite do contínuo nos leva ao seguinte resultado:

$$\delta \psi_{\mathbf{x}}(\Gamma) = \int_0^1 d\sigma' \psi_{\mathbf{x}:\mathbf{x}}(\Gamma)(\sigma') F_{\alpha\beta}(\sigma') \delta x_{\alpha}(\sigma') \frac{dx_{\beta}}{d\sigma'} \psi_{\mathbf{x}(\sigma'):\mathbf{x}}$$

e tomando as seguintes definições

$$\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma) d\sigma = \delta x_{\mu}(\sigma) dx_{\nu}(\sigma)$$

$$\frac{\delta \sigma_{\alpha\beta}(\sigma')}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \delta(\sigma - \sigma')$$

teremos que

$$\frac{\delta \psi_{\mathbf{x}}(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) F_{\mu\nu}(\sigma) \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) \quad (2.23)$$

Para o operador  $\omega(\Gamma)$  resulta então que

$$\frac{\delta \omega(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(\sigma) \text{P exp} \int A \cdot dx \right\} \quad (2.24)$$

fórmula esta que é conhecida como a fórmula de Mandelstam <sup>[24]</sup>.

Um outro resultado interessante pode ser obtido se observarmos que da equação (2.6) segue que

$$\partial_{\mu} \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) = [A_{\mu}, \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma)] \quad (2.25)$$

e assim da equação (2.24) teremos que

$$\partial_{\mu} \frac{\delta \omega(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \text{Tr} \left\{ \partial_{\mu} F_{\mu\nu}(\sigma) \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) + F_{\mu\nu}(\sigma) \partial_{\mu} \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) \right\}$$

e finalmente da equação (2.25) segue

$$\partial_{\mu} \frac{\delta \omega(\Gamma)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(\sigma)} = \text{Tr} \left\{ D_{\mu} F_{\mu\nu}(\sigma) \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) \right\} \quad (2.26)$$

onde  $D_{\mu}$  é a derivada covariante

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + [A_{\mu}, \cdot]$$

Passemos agora ao cálculo da derivada funcional variacional de se gunda ordem. Derivando mais uma vez o resultado obtido na equação (2.21)

$$\frac{\delta^2 \omega(\Gamma)}{\delta \mathbf{x}_\mu(\sigma_1) \delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_\alpha)} = \text{Tr} \left\{ \frac{\delta F_{\mu\beta}(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_\alpha)} \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} + \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \frac{\delta \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} \\ + \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1) \frac{\delta \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} \right\} \quad (2.27)$$

onde

$$\frac{\delta F_{\mu\beta}(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} = \frac{\delta \mathbf{x}_\alpha(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} \partial_\alpha F_{\mu\beta}(\sigma_1) = \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \partial_\nu F_{\mu\beta}(\sigma_1)$$

$$\frac{\delta \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} \left\{ \frac{d\mathbf{x}_\beta(\sigma_1)}{d\sigma_1} \right\} = \frac{d}{d\sigma_1} \left\{ \frac{\delta \mathbf{x}_\beta(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_\alpha)} \right\} \\ = \delta_{\beta\nu} \frac{d}{d\sigma_1} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) = - \delta_{\beta\nu} \frac{d}{d\sigma_2} \delta(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\frac{\delta \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} = - \delta_{\beta\nu} \delta'(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Por outro lado, fazendo uso da equação (2.20), teremos que

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1) \frac{\delta \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma)}{\delta \mathbf{x}_\nu(\sigma_2)} \right\} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) : \mathbf{x}(\sigma_2) F_{\nu\rho}(\sigma_2) \dot{\mathbf{x}}_\rho(\sigma_2) \right. \\ \left. \psi_{\mathbf{x}(\sigma_2)}(\Gamma) : \mathbf{x}(\sigma_1) \right\} \\ - \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{\mathbf{x}}_\beta(\sigma_1) [A_\nu(\sigma_1), \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma)] \right\}$$

e alem disto

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\beta} [A_\nu, \psi(\Gamma)] \} = - \text{Tr} \{ [A_\nu, F_{\mu\beta}] \psi(\Gamma) \}$$

Assim ao substituirmos os resultados acima obtidos na equação (2.27) vamos obter que

$$\frac{\delta^2 \omega(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma_1) \delta x_\nu(\sigma_2)} = -\delta'(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} + \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ D_\nu F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{x}_\beta(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} \\ - \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{x}_\beta(\sigma_1) [A_\nu(\sigma_1), \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma)] \right\}$$

e além disto

$$\text{Tr} F_{\mu\beta} [A_\nu, \psi(\Gamma)] = - \text{Tr} [A_\nu, F_{\mu\beta}] \psi(\Gamma)$$

Assim ao substituirmos os resultados acima obtidos na equação (2.23) vamos obter que

$$\frac{\delta^2 \omega(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma_1) \delta x_\nu(\sigma_2)} = -\delta'(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} + \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Tr} \left\{ D_\nu F_{\mu\rho}(\sigma_1) \dot{x}_\rho(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) \right\} \\ + \text{Tr} \left\{ F_{\mu\beta}(\sigma_1) \dot{x}_\beta(\sigma_1) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_1)}(\Gamma) : \mathbf{x}(\sigma_2) F_{\nu\rho}(\sigma_2) \dot{x}_\rho(\sigma_2) \psi_{\mathbf{x}(\sigma_2)}(\Gamma) : \mathbf{x}(\sigma_1) \right\} \quad (2.28)$$

Como foi mostrado por Corrigan e Hasslacher esta última equação não é simétrica ante as operações de troca  $\mu \rightarrow \nu$ ,  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ . Fazendo-se uso da identidade de Bianchi

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (2.29)$$

a parte anti-simétrica da equação (2.28) pode ser calculada

$$P_A = \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \dot{x}_\rho \partial_\rho \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(\sigma) \psi_{\mathbf{x}(\sigma)}(\Gamma) \right\} \quad (2.30)$$

e dela é possível extrair-se vínculos integrais para  $\delta^2\omega(\Gamma)/\delta x_\nu(\sigma_2)\delta x_\mu(\sigma_1)$ . Entretanto, a interpretação desta propriedade inesperada não é conhecida.

Ao tomarmos  $\mu = \nu$  na equação (2.28) o primeiro termo se anula por razão de simetria e se, além disto, fizermos  $\sigma_1 = \sigma_2$  segue que

$$\frac{\delta^2\omega(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma)^2} = \delta(0) \text{Tr} \left\{ D_\mu F_{\nu\beta}(\sigma) \dot{x}_\beta(\sigma) \bar{P} \exp \int_\Gamma A \cdot dx \right\} + \text{Tr} \left\{ (F_{\mu\nu}(\sigma) \dot{x}_\nu(\sigma))^2 \bar{P} \exp \int_\Gamma A \cdot dx \right\} \quad (2.31)$$

cuja semelhança, juntamente com a equação (2.21), com as equações da string quantizada já foi apontada no capítulo anterior. Como já foi mencionado anteriormente, se considerarmos que o potencial  $A_\mu$  satisfaça a equação de Yang-Mills sem fontes

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0$$

e que por argumentos de renormalização a  $\delta(0)$  possa ser eliminada então

$$\frac{\delta^2\omega(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma)^2} = \text{Tr} \left\{ (F_{\mu\nu}(\sigma) \dot{x}_\nu(\sigma))^2 \bar{P} \exp \int_\Gamma A \cdot dx \right\}$$

Observe-se que se definirmos o tensor  $\theta_{\mu\nu}$  como

$$\theta_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} (F)^2$$

cujos traço sobre os índices internos do grupo é o tensor energia-momentum, então é possível escrever

$$\frac{\delta^2\omega(\Gamma)}{\delta x_\mu(\sigma)^2} = \frac{1}{4} (\dot{x}_\mu)^2 \text{Tr} [ F^2 \psi(\Gamma) ]_{x(\sigma)} + \text{Tr} [ \theta_{\mu\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \psi(\Gamma) ]_{x(\sigma)}$$

Se, além do mais, os campos considerados são auto-duais ou anti-auto-duais é sempre verdade que  $\theta_{\mu\nu} = 0$ , neste caso o termo  $\text{Tr}(F^2\psi(\Gamma))$  desempenha o papel de parâmetro de inclinação dos modelos duais.

### 2.3 - O potencial entre cargas estáticas

Mostraremos agora, como o operador de Wilson  $W(\Gamma)$  pode ser associado ao potencial entre cargas estáticas nas teorias de gauge através da escolha de um contorno  $\Gamma$  adequado [19], [29].

Para obter este potencial em uma teoria de gauge não abeliana consideremos uma experiência hipotética onde, inicialmente, um par de cargas  $Q\bar{Q}$  é separada adiabaticamente a uma distância relativa  $X$ . Suponhamos que esta configuração é válida para um tempo  $T \rightarrow \infty$ . A seguir fazemos as cargas aproximarem-se uma da outra e por fim aniquilarem-se. A linha de universo destas cargas pode ser algo do tipo mostrado na figura abaixo

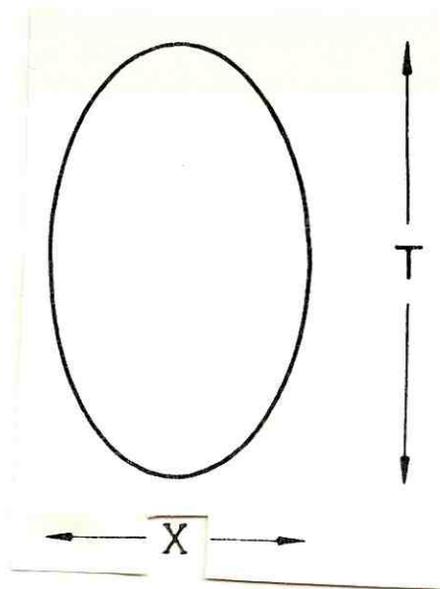


Fig. 3

A amplitude, no espaço euclidiano, para o processo acima é o elemento de matriz do operador de evolução  $\exp(-HT)$  entre os estados final e inicial

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle$$

onde  $| i \rangle$  e  $| f \rangle$  representam o par de cargas  $Q\bar{Q}$  separados por uma distância

$X$  e  $H$  é o hamiltoniano da teoria cujo grupo de gauge é não abeliano (p.ex.  $SU(N_c)$ ).

O operador de evolução, com o passar do tempo, decai ao invés de oscilar devido a formulação do problema no espaço euclidiano. O elemento de matriz pode ser expresso na linguagem das integrais de caminho através da seguinte fórmula

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \int DA D\bar{C} DC \exp \left\{ -S + g \int A_\mu^a J_\mu^a d^4x \right\} / \int DAD\bar{C} DC e^{-S} \quad (2.34)$$

onde  $S$  é a ação da teoria de gauge  $SU(N_c)$ ,  $J_\mu^a$  é a corrente externa que descreve as linhas de universo das cargas e a integral funcional representa a soma das contribuições de todas as configurações de campo, tanto dos campos de gauge  $A_\mu^a$  como dos campos fantasmas de Fadeev-Popov  $C^a$ . O índice (a) refere-se a grupo de simetria interno. Para a configuração de caminho dada pela fig. 3

$$J_\nu = \int dy_\nu \delta(x-y) \quad (2.35)$$

é a corrente clássica conservada de uma partícula pontual com a linha de universo correspondente.

Substituindo a eq.(2.35) na eq.(2.34) esta se simplifica tomando a seguinte forma

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \int DA D\bar{C} DC e^{-S} \text{Tr P exp} \left\{ g \int A_\mu dx_\mu \right\} / N'$$

onde

$$N' = \int DA D\bar{C} DC e^{-S} \quad (2.36)$$

e  $N'$  é conhecido pelo nome de constante de normalização.

Da eq.(2.36) podemos observar que

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \left\langle \text{Tr P exp} \left\{ g \oint_{\Gamma} A_{\mu} dx_{\mu} \right\} \right\rangle = \langle \omega(\Gamma) \rangle \quad (2.37)$$

onde  $\omega(\Gamma)$  é o operador invariante de gauge definido pela eq.(2.15) e  $\Gamma$  o contorno tipo elíptico da fig.3.

O operador

$$W(\Gamma) = \left\langle \text{Tr P exp} \left\{ g \oint_{\Gamma} A_{\mu} dx_{\mu} \right\} \right\rangle \quad (2.38)$$

foi introduzido na literatura por K.Wilson<sup>[19]</sup> e ficou conhecido pelo nome de loop de Wilson quântico. O operador  $\omega(\Gamma)$  definido por (2.15) tomou o mesmo nome a nível clássico. Como  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  são idênticos, já que o processo é estático, resulta então da eq. (2.37) que

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = e^{-V(X)T} \langle i | f \rangle \quad (2.39)$$

e  $V(X)$  é o potencial entre as cargas estáticas  $Q\bar{Q}$  separadas por uma distância  $X$ . Tomando o logaritmo da equação acima teremos

$$V(X) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left\langle \text{Tr P exp} \left\{ g \oint_{\Gamma} A_{\mu} dx_{\mu} \right\} \right\rangle \cdot \langle \text{Tr } 1 \rangle^{-1} \quad (2.40)$$

onde  $\langle \text{Tr } 1 \rangle$  tem origem na normalização dos estados final e inicial na eq. (2.39). Se a teoria tem um número de cores  $N_c$  então, fatores  $1/\sqrt{N_c}$  são necessários para normalizar os estados final e inicial.

Na rede<sup>[29]</sup>,<sup>[30]</sup> os campos de gauge definidos sobre os links podem ser vistos como análogos aos fatores de fase não locais da teoria no contínuo

$$U_{ij} = P \exp \left\{ g \int_{ij} A_{\mu} dx_{\mu} \right\} \quad (2.41)$$

e o loop de Wilson quântico pode ser escrito como

$$\langle \prod_{\mu} U_{\mu}(n) \rangle = \int \prod_{\mu} [dU_{\mu}(n)] U_{\mu}(n) e^{-S} \left[ \int \prod_{\mu} [dU_{\mu}(n)] e^{-S} \right]^{-1}$$

onde  $n$  é um ponto da rede,  $\mu$  é um versor genérico, e

$$e^{-S} = \prod_p e^{-\beta \text{Tr} UUUU} \quad (2.43)$$

onde  $\prod_p$  representa o produto tomado sobre as plaquetas.

Como se sabe, as teorias de campo quando formuladas na rede podem a apresentar fases diferentes. Estas podem ser facilmente caracterizadas caso exista uma observável (um parâmetro de ordem ou desordem) com um comportamento diferente em cada uma delas. Por exemplo, a magnetização espontânea  $\sigma$  no modelo de Ising é um parâmetro deste tipo; ela se anula acima da temperatura de Curie, mas toma um valor finito abaixo desta temperatura. Este parâmetro de ordem é local. Entretanto, outros parâmetros como os gaps de massa, que estão relacionados ao comportamento assintótico das funções de correlação, são não-locais e as vezes podem ser usados para distinguir as fases. Nas teorias de gauge na rede entretanto, não existem parâmetros de ordem locais. Wegner <sup>[31]</sup> demonstrou que apesar deste fato, é possível construir, nestas teorias sem quaisquer parâmetros de ordem locais, ações invariantes de gauge como a do tipo da eq. (2.43). Em particular, nestas teorias, o análogo a magnetização espontânea, algo do tipo  $\langle U \rangle$ , não é um parâmetro de ordem. Foi demonstrado por Elitzur <sup>[32]</sup> que o valor médio de qualquer quantidade local que não seja invariante de gauge é nulo, independentemente do acoplamento. O loop de Wilson é um parâmetro de ordem não-local que discrimina, em sistemas de puro gauge, as diferentes fases da teoria e tem uma interessante interpretação em termos das propriedades do confinamento. Consideremos o comportamento assintótico

de um loop retangular  $R \times T$ . Das eqs. (2.37) e (2.39) já vimos que

$$W(\Gamma) \sim \exp - TV(X) \quad (2.44)$$

Se o potencial  $V(X)$  é do tipo

$$V(X) \sim K X$$

o qual evita que as cargas teste sejam separadas, o que implica em confinamento, então

$$W(\Gamma) \sim \exp \left\{ - K A \right\} \quad (2.45)$$

onde  $A$  é a área do contorno na região de acoplamento forte. O resultado acima é conhecido como sendo a lei área do loop de Wilson. Por outro lado, na região de acoplamento fraco, uma lei de perímetro é esperada

$$W(\Gamma) \sim \exp \left\{ - \mu P \right\} \quad (2.46)$$

Neste caso  $V(X)$  é constante, para grandes distâncias  $X$ .

O loop de Wilson é atualmente o parâmetro de ordem mais popular nas teorias de gauge na rede. Usando argumentos de dualidade, é possível construir o parâmetro de desordem dual para os grupos de gauge abelianos. A quantidade correspondente pode ser generalizada para todos os grupos com um centro não trivial e é conhecida como sendo o loop de t'Hooft<sup>[33]</sup>.

Queremos agora, assinalar que existem duas limitações importantes no uso do loop de Wilson como critério de confinamento. Primeiro, campos de matéria não podem estar presentes, pois neste caso, pares dinâmicos  $Q\bar{Q}$  seriam criados quando tentássemos separar as cargas estáticas e assim embora ainda possamos traçar o contorno elíptico  $\Gamma$ , da fig. 3, o loop de Wilson  $W(\Gamma)$  não pode agora ser associado ao potencial entre cargas estáticas. Em segundo lugar, o

centro do grupo de gauge não pode ser trivial, pois assim, seria sempre possível blindar as cargas estáticas com glúons (campos de gauge) de modo a formar um objeto invariante de gauge.

CAPÍTULO III

CÁLCULO PERTURBATIVO DO LOOPS DE WILSON COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

3.1 - O método de regularização dimensional <sup>[34]</sup>

Um dos problemas mais frequentes em teoria quântica de campos é o do tratamento das integrais divergentes que aparecem, tanto em eletrodinâmica quântica como nas teorias de gauge não-abelianas, quando se tenta, por exemplo, calcular as correções radiativas de um determinado processo. Sem dúvida, a manipulação de quantidades divergentes está sujeita a indeterminação e se faz desejável, ou mesmo preferível, utilizar algum método que nos permita trabalhar com integrais finitas. Um destes métodos consiste em "cortar" a integração sobre os momenta permitindo somente valores menores que um certo limite  $\Lambda$  chamado de "corte" ou "cut-off". Aqui utilizaremos um método conhecido como regularização dimensional. Neste método supõe-se que o número de dimensões do espaço  $\eta$  é arbitrário, ou seja, constrói-se uma teoria quântica de campos em um espaço euclidiano de dimensão  $\eta$  qualquer. As regras para calcular as integrais são relativamente simples. Supõe-se, em primeiro lugar, que estamos trabalhando em um espaço tempo de dimensão  $\eta$  em que uma das dimensões é temporal e o restante puramente espacial. As integrações são efetuadas sobre todas as variáveis

$$\int d^4k \rightarrow \int d^\eta k$$

Todos os denominadores podem ser combinados em um único de uma forma completamente independente do número de dimensões, por meio de

$$\frac{1}{D_1 D_2 \dots D_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \left[ D_1 x_{n-1} + D_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \dots + D_n (1 - x_1) \right]^{-n}$$

e como caso particular do resultado acima

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\alpha+\beta}} \quad (3.1)$$

A seguir faz-se uma rotação de Wick de modo que o espaço de integração possa ser considerado euclídiano

$$\int d^\eta k \rightarrow i \int d^\eta k_E \quad ; \quad k^2 \rightarrow k_E^2$$

Assim, por argumentos de simetria, é fácil mostrar que

$$\int d^\eta k k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_{2n+1}} f(k^2) = 0; \quad n \text{ inteiro} \quad (3.2)$$

Por outro lado quando o número de fatores  $k_\alpha$  é par ( $2n$ ), estes podem ser substituídos por uma potência de  $k^2$  ( $k^{2n}$ ) e combinações de tensores métricos. Por exemplo no caso de

$$\int d^\eta k \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+a)^n}$$

se  $\alpha \neq \beta$  o resultado deve ser nulo pelas mesmas razões do caso anterior. Entretanto se  $\alpha = \beta$  por razões de simetria segue que

$$\int d^\eta k \frac{k_0^2}{(k^2+a)^n} = \int d^\eta k \frac{k_1^2}{(k^2+a)^n} = \dots = \int d^\eta k \frac{k_{n-1}^2}{(k^2+a)^n} = \frac{1}{n} \int d^\eta k \frac{k^2}{(k^2+a)^n}$$

e assim

$$\int d^\eta k \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+a)^n} = \frac{1}{n} g_{\alpha\beta} \int d^\eta k \frac{k^2}{(k^2+a)^n}$$

resultado este que pode ser obtido fazendo-se a substituição

$$k_\alpha k_\beta \rightarrow \frac{1}{n} g_{\alpha\beta} k^2$$

na integral original.

De modo idêntico pode-se mostrar também a seguinte equivalência em  $\eta$  dimensões.

$$k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \rightarrow \frac{1}{n(n+2)} (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha})$$

Após estas operações, o integrando é só função de  $k^2$ , de modo que se torna possível efetuar a integração sobre os ângulos

$$d^\eta k = \int_0^\infty dk k^{\eta-1} d\Omega(\eta) = \frac{2\pi^{\eta/2}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} \int_0^\infty dk k^{\eta-1} \quad (3.4)$$

onde foi utilizada a fórmula para integração angular em dimensão  $\eta$ . Um resultado frequentemente usado e que aparece da teoria das distribuições e que também é conhecido como conjectura de t'Hooft-Veltman é

para quaisquer valores de  $\alpha$ . 
$$\int k^\alpha d^\eta k = 0 \quad (3.5)$$

Finalmente, quando o denominador é tratado pela equação (3.1) podemos utilizar a fórmula

$$\int d^\eta k \frac{(k^2)^j}{(k^2+a)^m} = \frac{\pi^{\eta/2}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2}+j) \Gamma(m-j-\frac{\eta}{2})}{\Gamma(m) a^{m-j-\eta/2}} \quad (3.6)$$

As integrais podem então ser calculadas e aparecem como funções analíticas do parâmetro  $\eta$ . As divergências ordinárias aparecem agora como polos destas funções analíticas quando se faz  $\eta = 4$ .

Obteremos agora alguns resultados de interesse futuro utilizando o método de regularização dimensional acima descrito:

$$\int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{[(r-p)^2]^\mu [r^2]^\nu} = I = \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} r_\alpha r_\beta \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx}{[x(r-p)^2 (1-x)r^2]^{\mu+\nu}}$$

$$I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int d^\eta r \frac{r_\alpha r_\beta}{[(r-px)^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

troca de variáveis:  $r_\alpha \rightarrow (r+px)_\alpha$

$$I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int d^\eta r \frac{r_\alpha r_\beta + x^2 p_\alpha p_\beta}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

$$I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \frac{g_{\alpha\beta}}{\eta} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int d^\eta r \frac{r^2}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

$$+ \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} p_\alpha p_\beta \int_0^1 x^{\mu+1} (1-x)^{\nu-1} dx \int d^\eta r \frac{1}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

$$I = \frac{2\Gamma(\mu+\nu)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{\eta}{2})} \frac{g_{\alpha\beta}}{\eta} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int_0^\infty dr \frac{r^{\eta+1}}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

$$+ \frac{2\Gamma(\mu+\nu)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{\eta}{2})} p_\alpha p_\beta \int_0^1 x^{\mu+1} (1-x)^{\nu-1} dx \int_0^\infty dr \frac{r^{\eta-1}}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

da tabela de integrais G.R. (pgs: 292 e 294)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{(p + qx^\nu)^{\eta+1}} = \frac{1}{\nu p^{\eta-1}} (p/q)^{\mu/\nu} \frac{\Gamma(\mu/\nu)\Gamma(1+\eta-\frac{\mu}{\nu})}{\Gamma(1+\eta)} \quad (3.7)$$

$$\int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^\lambda dx = \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu/\lambda)}{\Gamma(\nu+\frac{\mu}{\lambda})} = \frac{B(\frac{\mu}{\lambda}, \nu)}{\lambda} \quad (3.8)$$

$$I = \frac{\Gamma(\frac{\eta+2}{2})\Gamma(\frac{2(\mu+\nu-1)-\eta}{2})}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{\eta}{2})} \frac{g_{\alpha\beta}}{\eta} (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu-1)}{2}} \int_0^1 x^{\frac{\eta-2\nu}{2}} (1-x)^{\frac{\eta-2\mu}{2}} dx$$

$$+ \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})\Gamma(\frac{2(\mu+\nu)-\eta}{2})}{(4\pi)^{\eta/2}\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\eta/2)} P_{\alpha} P_{\beta} (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu)}{2}} \int_0^1 x^{\frac{\eta+2(1-\nu)}{2}} (1-x)^{\frac{\eta-2(1+\mu)}{2}} dx$$

e finalmente

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{[(\mathbf{r}-\mathbf{p})^2]^\mu [r^2]^\nu} = \frac{1}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \Gamma(\eta+2-\mu-\nu)}$$

$$\left[ \frac{g_{\alpha\beta}}{2} (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(\mu+\nu-1)-\eta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+2(1-\nu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+2(1-\mu)}{2}\right) \right. \\ \left. + P_{\alpha} P_{\beta} (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(\mu+\nu)-\eta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+2(2-\nu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta-2\mu}{2}\right) \right]$$

(3.9)

exemplo:

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{p^4 r^4 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2} = \frac{P_{\alpha} P_{\beta}}{p^4} \int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^4 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2}$$

e fazendo uso do resultado anterior e da conhecida propriedade das funções gama

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

é fácil mostrar que

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{p^4 r^4 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2} = \frac{(5-\eta)}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.10)$$

No desenvolvimento que culminou com o resultado dado pela equação (3.9) detalhamos todas as passagens intermediárias nos resultados que se seguirão a metodologia é a mesma, de modo que só indicaremos as passagens mais importantes e os resultados finais.

$$\int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha}{[(r-p)^2]^\mu [r^2]^\nu} = I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx$$

$$\int d^n r \frac{r_\alpha}{[(r-px)^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

troca de variáveis:  $r_\alpha \rightarrow (r+px)_\alpha$

$$I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int d^n r \frac{r_\alpha + xp_\alpha}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

devido a equação (3.2) a parte em  $r_\alpha$  não contribui e procedendo de forma usual chegaremos ao seguinte resultado

$$\int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha}{[(r-p)^2]^\mu [r^2]^\nu} = \frac{p_\alpha (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu)}{2}}}{(4\pi)^{\eta/2}} \frac{\Gamma(\frac{2(\mu+\nu)-\eta}{2}) \Gamma(\frac{\eta+2(1-\nu)}{2}) \Gamma(\frac{\eta-2\mu}{2})}{\Gamma(\eta+1-\mu-\nu)} \quad (3.11)$$

exemplo:

$$\int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{(p \cdot r)}{p^4 r^2 (r-p)^2} = \frac{p_\alpha}{p^4} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha}{r^2 (r-p)^2}$$

e de (3.11)

$$\int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{(p \cdot r)}{p^4 r^2 (r-p)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.12)$$

seja

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{[(\mathbf{r}-\mathbf{p})^2]^\mu [\mathbf{r}^2]^\nu} = I = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{(2\pi)^\eta \Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx \int \frac{d^n \mathbf{r}}{[(\mathbf{r}-\mathbf{p}x)^2 + p^2 x(1-x)]^{\mu+\nu}}$$

e agora efetuando a troca de variáveis  $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow (\mathbf{r}+\mathbf{p}x)_\alpha$  e procedendo como nos casos anteriores

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{[(\mathbf{r}-\mathbf{p})^2]^\mu [\mathbf{r}^2]^\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{2(\mu+\nu)-\eta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta-2\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta-2\mu}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \Gamma(\eta-\mu-\nu)} (p^2)^{\frac{\eta-2(\mu+\nu)}{2}} \quad (3.13)$$

exemplo:

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{p^2 r^2 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.14)$$

Outros resultados:

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{p^4 r^2 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2} = \frac{g_{\alpha\beta}}{4(1-\eta)} \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.15)$$

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{p^2 r^2 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^4} = \frac{g_{\alpha\beta}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.16)$$

$$\int \frac{d^n \mathbf{r}}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{r^2 (\mathbf{r}-\mathbf{p})^4} = (3-\eta) \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} (p^2)^{\frac{\eta-6}{2}} \quad (3.17)$$

caso especial

$$\int \frac{d^n r}{(2\pi)^2} \frac{r_\mu r_\nu r_\alpha}{r^4 (r-p)^2} = I = \frac{2}{(2\pi)^\eta} \int_0^1 (1-x) dx \int d^n r \frac{r_\mu r_\nu r_\alpha}{[(r-xp)^2 + p^2 x(1-x)]^3}$$

troca de variáveis:  $r_\alpha \rightarrow (r+px)_\alpha$

$$I = \frac{2}{(2\pi)^\eta} \int_0^1 (1-x) dx \int d^n r \frac{(r+xp)_\mu (r+xp)_\nu (r+xp)_\alpha}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (3.18)$$

Entretanto se o que nos interessa calcular é algo do tipo

$$\iiint dx_\mu dy_\nu e^{ip(x-y)} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\mu r_\nu r_\alpha}{r^4 (r-p)^2} = I'$$

da equação (3.18) é claro que os termos em  $p_\mu$  e  $p_\nu$  não contribuem e assim podemos mostrar que

$$I' = \iiint dx_\mu dy_\nu e^{ip(x-y)} \frac{2}{(2\pi)^\eta} \int_0^1 x(1-x) dx \int d^n r \frac{r_\mu r_\nu p_\alpha}{[r^2 + p^2 x(1-x)]^3}$$

e agora procedendo da maneira usual segue que

$$\begin{aligned} & \iiint dx_\mu dy_\nu e^{ip(x-y)} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\mu r_\nu r_\alpha}{r^4 (r-p)^2} = \\ & = \iiint dx_\mu dy_\nu e^{ip(x-y)} \frac{g_{\mu\nu} (\eta-2)}{8(\eta-1)} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{(4\pi)^{\eta/2} \Gamma(\eta-2)} p_\alpha (p^2)^{\frac{\eta-4}{2}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.2 - O cálculo perturbativo em $g^2$

Como tivemos a oportunidade de ver no capítulo anterior o loop de Wilson, no contínuo, está relacionado ao potencial entre cargas estáticas em uma teoria de Yang-Mills,

$$V(X) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle \text{Tr P exp} \int_{\Gamma} A_{\mu} dx_{\mu} \rangle \quad (3.20)$$

e nas teorias de gauge na rede funciona, por analogia com a mecânica estatística como um índice crítico que discerne as fases da teoria.

Consideremos agora o cálculo perturbativo de  $W(\Gamma)$  <sup>[35]</sup>, <sup>[36]</sup> na linguagem das integrais funcionais em um espaço euclidiano de  $\eta$  dimensões. Seja o grupo de

$$\begin{aligned}
 W(\Gamma) = \frac{1}{N'} \int_{\text{SU}(N_c)} DA \bar{C} C \exp \left\{ - \frac{1}{4} \int d^{\eta}x (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a - g t^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c)^2 \right. \\
 \left. - \frac{1}{2\alpha} \int d^{\eta}x (\partial_{\mu} A_{\mu}^a)^2 - \int d^{\eta}x \partial_{\mu} \bar{C}^a (\partial_{\mu} C^a \right. \\
 \left. - g t^{abc} A_{\mu}^b C^c) \right\} \text{Tr P exp} \left\{ g \lambda^a \int_{\Gamma} A_{\mu}^a dx_{\mu} \right\} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

onde a primeira exponencial consiste na ação efetiva da teoria de Yang-Mills no gauge  $\alpha$ ;  $\bar{C}^a$  e  $C^a$  são os campos fantasmas,  $t^{abc}$  são as constantes de estrutura do grupo de gauge,  $\lambda^a$  os geradores do grupo e  $N'$  uma constante de normalização. Por conveniência utilizaremos a representação adjunta para  $\lambda^a$  com a seguinte condição de normalização

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = -2 \delta^{ab} \quad (3.22)$$

e com a relação de comutação

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2 t^{abc} \lambda^c \quad (3.23)$$

A expansão de  $W(\Gamma)$  em potências de  $g^2$  tem a forma

$$W(\Gamma) = N + g^2 W_1(\Gamma) + g^4 W_2(\Gamma) + \dots \quad (3.24)$$

onde  $W_1(\Gamma)$  é dado pelo diagrama da fig. 4

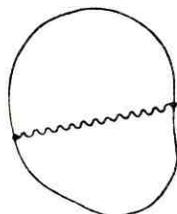


fig. 4

e  $W_2(\Gamma)$  é dado pela soma das contribuições dos diagramas da fig. 5 e  $N$  é a dimensão do grupo de gauge ( $N = N_c^2 - 1$ )

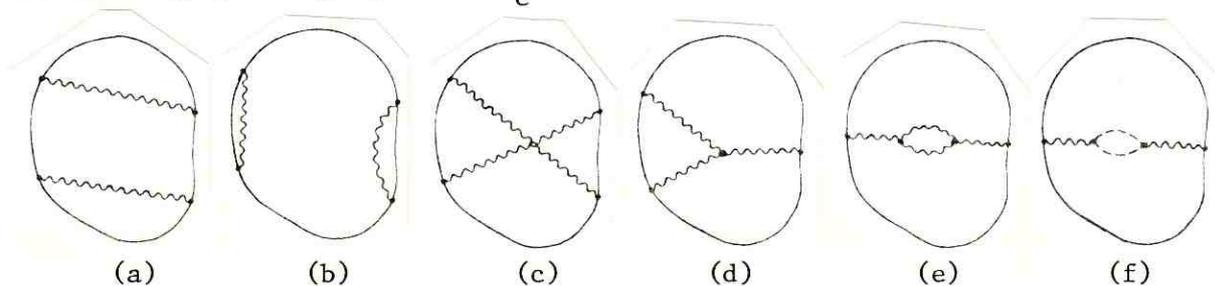


fig. 5

O propagador do glúon é dado por

$$\text{~~~~~} = D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \left( g_{\mu\nu} - A \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (3.25)$$

e o do campo fantasma por

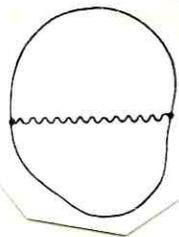
$$\text{-----} = G^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \quad (3.26)$$

onde

$$A = 1 - \alpha$$

e as regras para os vértices são as usuais.

Das equações (3.21), (3.22) e (3.25) é fácil ver que



$$= W_1(\Gamma) = \frac{\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b)}{2!} \delta^{ab} \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}(x-y) \quad (3.27)$$

$$W_1(\Gamma) = -N \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{p^2} - A \frac{p_\alpha p_\beta}{p^4} \right\} e^{ip(x-y)}$$

Definindo o funcional linear sobre  $\Gamma$   $f_\Gamma^{(\alpha)}(p)$  como [37]

$$f_\Gamma^{(\alpha)}(p) = \int_\Gamma e^{ip \cdot x} dx_\alpha \quad (3.28)$$

$W_1(\Gamma)$  pode ser escrito como

$$W_1(\Gamma) = -N \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{p^2} - A \frac{p_\alpha p_\beta}{p^4} \right\} f_\Gamma^{(\alpha)}(p) f_\Gamma^{(\beta)*}(p) \quad (3.29)$$

Consideremos agora que a curva  $\Gamma$  é fechada e que está imersa em um subespaço de  $\zeta$  dimensões. Assim

$$p_\mu = \bar{p}_\mu + \hat{p}_\mu$$

onde  $\hat{p}_\mu$  é a projeção de  $p_\mu$  em  $\Gamma$  e  $\bar{p}_\mu$  é a componente ortogonal a  $\hat{p}_\mu$ . Desta forma

$$p^2 = \hat{p}^2 + \bar{p}^2$$

$$d^n p = d^{\eta-\zeta} \bar{p} d^\zeta \hat{p}$$

e por outro lado, devido a própria definição de  $f_{\Gamma}^{(\alpha)}(p)$

$$p_{\alpha} f_{\Gamma}^{(\alpha)}(p) = -i \int_b^a dx_{\alpha} \partial_{\alpha} e^{ip \cdot x} = i (e^{ip \cdot b} - e^{ip \cdot a})$$

e como a curva  $\Gamma$  é fechada ( $b=a$ )

$$p \cdot f_{\Gamma}(p) = 0 \quad (3.30)$$

Por estas razões

$$W_1(\Gamma) = -\frac{Ng_{\alpha\beta}}{(2\pi)^{\eta}} \int \frac{d^{\eta-\zeta} \bar{p} d^{\zeta} \hat{p}}{p^2} f_{\Gamma}^{(\alpha)}(\hat{p}) f_{\Gamma}^{(\beta)*}(\bar{p})$$

$$W_1(\Gamma) = -\frac{Ng_{\alpha\beta}}{(2\pi)^{\eta}} \int d^{\eta} \hat{p} f_{\Gamma}^{(\alpha)}(\hat{p}) f_{\Gamma}^{(\beta)*}(\hat{p}) \int_0^{\infty} \frac{d\bar{p} [\bar{p}^2]^{\frac{\eta-\zeta-1}{2}} \Omega(\eta-\zeta)}{(\bar{p}^2 + \hat{p}^2)}$$

e da tabela de integrais

$$\int_0^{\infty} \frac{d\bar{p} [\bar{p}^2]^{\frac{\eta-\zeta-1}{2}} \Omega(\eta-\zeta)}{(p^2 + \bar{p}^2)} = \pi^{(\eta-\zeta)/2} [\hat{p}^2]^{\frac{\eta-\zeta-2}{2}} \Gamma(1 - \frac{\eta-\zeta}{2})$$

e assim

$$W_1(\Gamma) = \frac{N\Gamma(\frac{2+\zeta-\eta}{2})}{2^{\eta+2} \pi^{(\eta+\zeta)/2}} g_{\alpha\beta} \int d^{\zeta} \hat{p} [\hat{p}^2]^{\frac{\eta-\zeta-2}{2}} f_{\Gamma}^{(\alpha)}(\hat{p}) f_{\Gamma}^{(\beta)*}(\hat{p}) \quad (3.31)$$

Para curvas fechadas planares ( $\zeta=2$ ) a equação (3.30) é válida o que significa que  $f_{\Gamma}^{(\alpha)}(p)$  será da forma

$$f_{\Gamma}^{(\alpha)}(p) = \epsilon_{\alpha\beta} p_{\beta} f_{\Gamma} \quad (3.32)$$

onde  $f$  é dado por

$$f = i \iint_{\Sigma} d\sigma e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.33)$$

onde  $\Sigma$  é a superfície englobada pelo contorno  $\Gamma$ . Deste modo, no caso de curvas fechadas planares, teremos das equações (3.31) e (3.32) que

$$W_1(\Gamma) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)}{2^{\eta-3} \pi^{\frac{\eta-4}{2}}} \int d^2 p (p^2)^{\frac{\eta-4}{2}} \left| f_{\Gamma}(p) \right|^2 \quad (3.34)$$

Consideremos agora o caso em que o contorno  $\Gamma$  é um círculo. Neste caso

$$f_{\text{cir}} = i \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\mathbf{p}r\cos\phi} = i \frac{2\pi R}{p} J_1(pR) \quad (3.35)$$

onde  $J_1$  é a função de Bessel de primeira ordem

$$\left| f_{\text{cir}}(p) \right|^2 = 4\pi^2 R^2 J_1^2(pR)$$

e  $R$  é o raio do círculo. Com isto teremos que

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)R^2}{2^{\eta-3} \pi^{\frac{\eta-4}{2}}} \int_0^{\infty} dp (p^2)^{\frac{\eta-3}{2}} J_1^2(pR) \quad (3.36)$$

Do Gradshteyn-Ryzhik <sup>[38]</sup> (pg-692)

$$\int_0^{\infty} dt t^{-(3-\eta)} J_1^2(tR) = \frac{R^{2-\eta} \Gamma(3-\eta) \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{2^{(3-\eta)} \Gamma^2\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{6-\eta}{2}\right)}$$

e com o uso das conhecidas identidades para as funções  $\Gamma$

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\pi^{1/2}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(x-1) = x\Gamma(x)$$

chegamos ao seguinte resultado

$$W(\Gamma_{\text{cir}}) = -NR^{4-\eta} \frac{\Gamma(\frac{3-\eta}{2})\Gamma(\frac{\eta}{2})}{2^{\eta-2} \pi \frac{\eta-3}{2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \quad (3.37)$$

Portanto, para  $\eta = 2$

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = -N\pi R^2 \quad (3.38)$$

que é a lei de área em duas dimensões. Mas adiante mostraremos como este resultado está associado ao potencial confinante em 2D. Para  $\eta = 3$ .

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = -\frac{NR}{2} \Gamma(0) \quad (3.39)$$

onde a divergência, presente no resultado acima, surge do polo físico que representa a auto-indutância de um anel infinitesimalmente fino em 3D. Como é sabido, se tomarmos um anel cujo raio externo seja  $b$  e cujo raio interno da seção transversal seja  $a$ , que seja percorrido por uma corrente estacionária  $I$ , a auto-indutância  $L$  do anel é proporcional a energia do circuito e assim é possível mostrar que <sup>[39]</sup>

$$L = \mu\pi b + 4\pi b (\ln(8b/a) - 2)$$

e portanto se  $a \rightarrow 0$  temos o surgimento de uma divergência. Assim, como se trata de um polo físico é possível tratá-lo considerando que somente a parte finita possui significado físico. Como se sabe <sup>[40]</sup>, se  $f(\eta)$  é uma distribuição com um polo de primeira ordem em  $\eta=3$  tal que

$$F(\eta) = A(\eta) + \frac{B}{(\eta-3)}$$

onde  $A(\eta)$  é a parte finita de  $f(\eta)$  e  $B$  o resíduo no polo então

$$A(\eta-3) = \frac{d}{d\eta} \{(\eta-3) f(\eta)\}_{\eta=3} \quad (3.40)$$

$$B = \{(\eta-3) f(\eta)\}_{\eta=3} \quad (3.41)$$

Para  $\eta = 4$  a equação (3.36) nos dá que

$$W(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{N}{2} \quad (3.42)$$

e posteriormente mostraremos como este resultado está associado a lei de Coulomb usual.

Mostramos no Capítulo anterior como o loop de Wilson infinitamente alongado está associado ao potencial entre cargas estáticas na teoria de Yang-Mills. Com o intuito de explorar este fato fazemos uma deformação no contorno de modo que

$$\Gamma_{\text{cir}} \rightarrow \Gamma_{\text{elipse}}$$

Tal deformação pode ser implementada através de uma troca adequada de variáveis na equação (3.28)

$$a x'_1 = x_1 \quad ; \quad b x'_2 = x_2$$

e assim

$$f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(\alpha)}(p) = \int_{\Gamma_{\text{cir}}} e^{i p \cdot x} dx_{\alpha} \rightarrow f_{\Gamma_{\text{elipse}}(p_1, p_2)}^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_{\text{cir}}} e^{i (a p_1 + b p_2) \cdot x'_1} dx_{\alpha}$$

e logo

$$f_{\Gamma_{\text{elipse}}}^{(1)}(p_1, p_2) = a \int_{\Gamma_{\text{cir}}} e^{i (a p_1 + b p_2) x'_1} dx'_1 = a f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(1)}(a p_1, b p_2)$$

$$f_{\Gamma_{\text{elipse}}}^{(2)}(p_1, p_2) = b f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(2)}(a p_1, b p_2)$$

e agora substituindo os resultados acima obtidos na equação (3.34)

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N \Gamma(\frac{4-n}{2})}{2^n \pi^{\frac{n+2}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_2 (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{n-4}{2}} \cdot \{ a^2 | f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(1)}(a p_1, b p_2) |^2 + b^2 | f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(2)}(a p_1, b p_2) |^2 \}$$

Como resultado da equação (3.32)

$$\left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(1)}(ap_1, bp_2) \right|^2 = b^2 p_2^2 \left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}(ap_1, bp_2) \right|^2$$

$$\left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}^{(2)}(ap_1, bp_2) \right|^2 = a^2 p_1^2 \left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}(ap_1, bp_2) \right|^2$$

e logo então

$$f_{\Gamma_{\text{elipse}}}^{(\alpha)} \cdot f_{\Gamma_{\text{elipse}}}^{(\alpha)*} = a^2 b^2 (p_1^2 + p_2^2) \left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}(ap_1, bp_2) \right|^2$$

de onde se segue que

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)}{2^\eta \pi^{\frac{(\eta+2)/2}} a^2 b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_2 (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{\eta-2}{2}} \left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}(ap_1, bp_2) \right|^2$$

Efetuada agora, uma outra troca de variáveis

$$p_1 \rightarrow \frac{p_1}{a} ; \quad p_2 \rightarrow \frac{p_2}{b}$$

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)}{2^\eta \pi^{\frac{\eta+2}{2}}} a b \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \left( \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} \right)^{\frac{\eta-2}{2}} \left| f_{\Gamma_{\text{cir}}}(p_1, p_2) \right|^2$$

Agora vamos considerar

$$dp_1 dp_2 = p dp d\theta$$

$$p_1 = p \cos\theta ; \quad p_2 = p \sin\theta$$

e fazendo uso do resultado (3.35)

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)R^2 ab}{2^{\eta-2}\pi^{(\eta-2)/2}} \int_0^\infty dp (p^2)^{\frac{\eta-3}{2}} J^2(pR) \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{\frac{\eta-2}{2}}$$

e comparando com a equação (3.36) podemos por

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = W_1(\Gamma_{\text{cir}}) I(a,b) \quad (3.43)$$

onde

$$I(a,b) = \frac{ab}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{\frac{\eta-2}{2}} d\theta$$

Para calcular  $I(a,b)$  fazemos

$$\cos^2 \theta = \frac{1+\cos \psi}{2}$$

onde  $2\theta = \psi$ . Desta maneira é possível mostrar que

$$I(a,b) = \frac{(ab)^{\frac{4-\eta}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \left[ \left( \frac{a^2+b^2}{2ab} \right) + \left( \frac{b^2-a^2}{2ab} \right) \cos \psi \right]^{\frac{\eta-2}{2}} d\psi$$

Efetuada agora, a seguinte substituição

$$z = \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

é fácil mostrar que

$$\sqrt{z^2 - 1} = \frac{(b^2 - a^2)}{2ab}$$

onde escolhemos, sem perda de generalidade,  $b^2 > a^2$  e assim

$$I(a,b) = \frac{(ab)}{\pi} \frac{4-\eta}{2} \int_0^\pi [z + \sqrt{z^2-1} \cos\psi] \frac{\eta-2}{2} d\psi$$

de G.R. (pg: 384)

$$\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos\psi)^t d\psi = \pi P_t(z)$$

onde  $P_t$  é a função de Legendre. Voltando a equação (3.43) vamos obter que

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = W_1(\Gamma_{\text{cir}}) (ab) \frac{4-\eta}{2} P_{\frac{\eta-2}{2}} \left( \frac{a^2+b^2}{2ab} \right) \quad (3.44)$$

Consideremos nos casos que se seguem o raio do círculo unitário. Par  $\eta = 2$ , como  $P_0(x) = 1$ , teremos

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = -N\pi ab \text{ (lei de área)}$$

e em  $\eta = 4$ , dado que  $P_1(x) = x$ , segue que

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = N \frac{(a^2+b^2)}{4ab}$$

Tomemos agora

$$b = \frac{X}{2}; \quad a = \frac{T}{2}; \quad T \gg X$$

onde  $X$  é a distância entre as duas cargas estáticas tal como na fig. do segundo capítulo.

$$W(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N \Gamma(\frac{3-\eta}{2}) \Gamma(\frac{\eta}{2})}{2^{\eta-2} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} 2^{\eta-4} (XT)^{\frac{4-\eta}{2}} P_{\frac{\eta-2}{2}}(T/2X) \quad (3.45)$$

e como  $T/2X \gg 1$  é possível mostrar que o termo dominante do polinômio de Legendre (G.R. pags: 938 e 1025)  $P_{\ell}(x)$  é

$$\frac{(2\ell)! x^{\ell}}{2^{\ell} (\ell!)^2} = \frac{\Gamma(2\ell+1)}{2^{\ell} \Gamma^2(\ell+1)} x^{\ell}$$

e com isto é fácil mostrar que o termo dominante na equação (3.45) é dada por

$$W_1(\text{elipse}) = - \frac{N \Gamma(\frac{3-\eta}{2}) \Gamma(\eta-1)}{2^{\eta} \pi^{\frac{\eta-3}{2}} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \frac{T}{X^{\eta-3}} \quad (3.46)$$

Para  $\eta = 2$

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = - \frac{N\pi}{4} TX$$

e para  $\eta=4$

$$W_1(\Gamma_{\text{elipse}}) = \frac{NT}{4X}$$

Suponhamos agora que o nosso grupo de gauge é um grupo abeliano, por exemplo, o  $U(1)$ . Devido a comutatividade dos elementos deste grupo só os três primeiros gráficos da fig. 5 sobrevivem formando o quadrado da contribuição da ordem anterior (o que poderá ser averiguado na próxima secção)

$$W_2(\Gamma) = \frac{1}{2} W_1^2(\Gamma)$$

e assim da equação (3.24) podemos mostrar que, no caso abeliano

$$W(\Gamma) = N \exp\{g^2 W_1(\Gamma)/m\} = N e^{-g^2 \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y)} \quad (3.47)$$

onde  $D_{\alpha\beta}^0$  é a parte do propagador que não depende de A.

Feito isto, podemos agora calcular o potencial entre cargas estáticas do eletromagnetismo (grupo de gauge U(1)) por intermédio da equação (3.20). Para  $\eta$  qualquer, da equação (3.46) segue que

$$V_\eta(X) = g^2 \frac{\Gamma(\frac{3-\eta}{2})\Gamma(\eta-1)}{2^\eta \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} X^{3-\eta} \quad (3.48)$$

e portanto para  $\eta = 2$

$$V_2(X) = g^2 \frac{\pi X}{4}$$

o que demonstra o conhecido fato de que o eletromagnetismo confina em duas dimensões. Para  $\eta=4$

$$V_4(X) = -\frac{g^2}{4X}$$

que é a lei de Coulomb do eletromagnetismo.

Para  $\eta = 3$  a eq. (3.48) parece, a primeira vista, estar em desacordo com resultados já estabelecidos. Primeiro, pelo aparecimento da  $\Gamma(0)$ . Segundo pela aparente independência de X do potencial em três dimensões, pois como é sabido neste caso  $V \sim \ln X$ . Esta aparente contradição pode ser eliminada se observarmos, como já foi mencionado anteriormente, que como se trata de um polo físico é possível tratá-lo considerando que somente a parte finita possui significado físico. Assim da eq. (3.40) nos diz que para  $\eta = 3$

$$V_{\eta}(X) = -g^2 \left\{ \frac{d}{d\eta} \frac{(3-\eta)\Gamma(\frac{3-\eta}{2})\Gamma(\eta-1) X^{3-\eta}}{2^{\eta} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \right\}$$

$$V_{\eta}(X) = -g^2 \left\{ \frac{(\frac{5-\eta}{2})\Gamma(\eta-1)}{2^{\eta-1} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \frac{d}{d\eta} X^{3-\eta} \right\}$$

$$-g^2 X^{3-\eta} \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{5-\eta}{2})\Gamma(\eta-1)}{2^{\eta-1} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \right\}$$

$$V_{\eta}(X) = g^2 \frac{\Gamma(\frac{5-\eta}{2})\Gamma(\eta-1)}{2^{\eta-1} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} X^{3-\eta} \ln X + g^2 X^{3-\eta} f(\eta)$$

ou seja

$$V_3(X) = g^2 \frac{\ln X}{2\sqrt{\pi}} + C$$

como era de se esperar.

Quando o grupo de gauge é não-abeliano como, por exemplo o  $SU(N_c)$ , a primeira contribuição para a série dada pela equação (3.24),  $W_1(\Gamma)$ , é essencialmente "tipo abeliana" o que pode ser visto pela própria natureza do gráfico correspondente. Entretanto na quarta ordem pode-se mostrar que

$$W_2(\Gamma) = \frac{1}{2} W^2(\Gamma) + W_2^1(\Gamma)$$

onde  $W'(\Gamma)$  é exclusivamente uma contribuição não-abeliana facilmente identificável pela constante de Casimir  $C_2$ . Deste modo, é possível separar termo a termo a contribuição da parte "tipo abeliana" e reescrever a equação (3.24) em uma forma diferente

$$W(\Gamma) = N + g^2 W_1(\Gamma) + \frac{g^4}{2} W_1^2 + \frac{g^6}{6} W^3 + g^4 W' + g^6 W'_3 + \dots \quad (3.50)$$

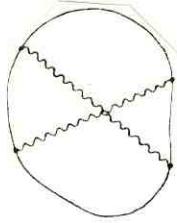
Na seção que se segue, mostraremos como este programa pode ser executado, bem como, o esquema de renormalização da carga pode ser implantado e extendido a todas as ordens.

### 3.3 - O cálculo perturbativo em $g^4$

Vamos agora proceder ao cálculo de  $W_2(\Gamma)$  gráfico por gráfico (vide fig. 4). Para calcular a contribuição da soma dos três primeiros gráficos basta efetuar o cálculo de um deles e multiplicar o resultado por um fator 3. Para o gráfico dado pela fig. 5(c)

$$\begin{aligned} & \text{Diagrama} = \text{Diagrama} = \text{Diagrama} \\ & = \text{Diagrama} \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a \lambda^b \lambda^a \lambda^b}{4!} \right) D_{\mu\nu}(t-s) D_{\alpha\beta}(x-y) dt_\mu ds_\nu dx_\alpha dy_\beta \\ & = \frac{1}{4!} \text{Diagrama} \left\{ \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^a \lambda^b) \int_x^y \int_y^x D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu \right. \\ & \quad + \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^a \lambda^b) \int_y^x \int_x^y D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu \\ & \quad \left. + \text{Tr}(\lambda^a \lambda^a \lambda^b \lambda^b) \int_x^y \int_x^y D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu + \text{Tr}(\lambda^a \lambda^a \lambda^b \lambda^b) \int_y^x \int_y^x D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu \right\} \\ & = \frac{1}{4!} \text{Diagrama} \left\{ \text{Tr}(\lambda^a [\lambda^b, \lambda^a] \lambda^b) \left[ \int_x^y \int_y^x + \int_y^x \int_x^y \right] D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu \right. \end{aligned}$$

$$+ \text{Tr}(\lambda^a \lambda^a \lambda^b \lambda^b) \left[ \int \int \int \int + \int \int \int \int + \int \int \int \int + \int \int \int \int \right] D_{\mu\nu}(t-x) dt_\mu ds_\nu$$



$$= \frac{\text{Tr}(\lambda^a \lambda^a \lambda^b \lambda^b)}{4!} \left[ \int \int \int \int \bigcirc D_{\alpha\beta}(x-y) dx_\alpha dy_\beta \right]^2$$

$$+ \frac{\text{Tr}(\lambda^a [\lambda^b, \lambda^a] \lambda^b)}{4!} \int \int \int \int \bigcirc D_{\alpha\beta}(x-y) dx_\alpha dy_\beta \left[ \int \int \int \int + \int \int \int \int \right] D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu$$

como

$$\text{Tr}(\lambda^a [\lambda^b, \lambda^a] \lambda^b) = t^{bac} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^c \lambda^b) = \frac{1}{2} t^{abc} \text{Tr}([\lambda^a, \lambda^b] \lambda^c)$$

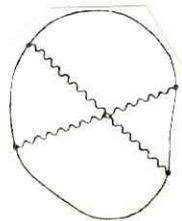
$$= t^{abc} t^{abd} \text{Tr}(\lambda^d \lambda^c)$$

$$t^{abc} t^{abd} = C_2 \delta^{cd}$$

vamos obter que

$$\text{Tr}(\lambda^a [\lambda^b, \lambda^a] \lambda^b) = -2NC_2$$

e portanto



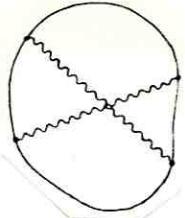
$$= \frac{N}{2} \left[ \int \int \int \int \bigcirc D_{\alpha\beta}(x-y) dx_\alpha dy_\beta \right]^2$$

$$- \frac{NC}{2} \int \int \int \int \bigcirc D_{\alpha\beta}(x-y) dx_\alpha dy_\beta \int \int \int \int D_{\mu\nu}(t-x) dt_\mu ds_\nu \quad (3.51)$$

O primeiro termo do resultado acima é a contribuição da parte "tipo abeliana", que pode ser reparada em uma exponencial, pois

$$W_2(\Gamma) = \frac{1}{2} W_1^2(\Gamma) + W_2'(\Gamma)$$

O segundo termo é a contribuição da parte não-abeliana do diagrama e, de agora em diante, ao nos referirmos ao gráfico (c) da fig.5 estaremos, na verdade, falando desta parte, ou seja, deste ponto em diante



$$= -\frac{NC_2}{2} \oint D_{\alpha\beta}(x-y) dx_\alpha dy_\beta \int_x^y \int_y^x D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu \quad (3.52)$$

Tomando a expressão do propagador no espaço de configuração para um número arbitrário de dimensões  $\eta$ , definido pela transformada de Fourier do propagador no espaço dos impulsos [37]

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{\Gamma(\frac{\eta-2}{2})}{4\pi^{\eta/2}} \left\{ g_{\alpha\beta} |x-y|^{2-\eta} - \frac{A}{2(\eta-4)} \partial_\alpha^x \partial_\beta^y |x-y|^{4-\eta} \right\} \quad (3.53)$$

podemos então agora escrever, usando o resultado acima

$$I = \int_x^y \int_y^x D_{\mu\nu}(t-s) dt_\mu ds_\nu = \frac{\Gamma(\frac{\eta-2}{2})}{4\pi^{\eta/2}} (I_1 + I_2) \quad (3.54)$$

onde

$$I_1 = \int_x^y \int_y^x dt_\mu ds_\nu |t-s|^{2-\eta}$$

$$I_2 = \frac{A}{2(4-\eta)} \int_x^y \int_y^x dt_\mu ds_\nu \partial_\mu^t \partial_\nu^s |t-s|^{4-\eta}$$

A parte divergente da integral I, na qual estamos interessados, pode ser calculada efetuando uma substituição local do contorno por uma linha reta. Desta maneira é possível mostrar que

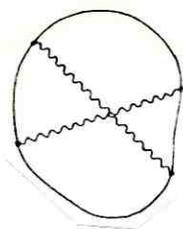
$$I_1 = \frac{2|x-y|^{4-\eta}}{(\eta-3)(4-\eta)}$$

$$I_2 = \frac{A|x-y|^{4-\eta}}{(4-\eta)}$$

e assim de (3.54)

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta-2}{2}\right)}{4\pi^{\eta/2}} \left\{ \frac{2}{(\eta-3)} + A \right\} \frac{|x-y|^{4-\eta}}{(4-\eta)}$$

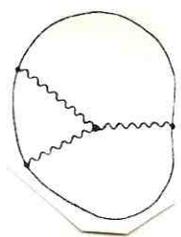
e substituindo o resultado acima obtido na eq. (3.52) chegamos finalmente a



$$= -\frac{NC_2}{2^4\pi^{\eta/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\eta-2}{2}\right)\Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2)\Gamma\left(\frac{6-\eta}{2}\right)} \left\{ 2+A(\eta-3) \right\} \left( \text{diagram} \right) D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{4-\eta} dx_\alpha dy_\beta$$

(3.55)

Vamos agora calcular o gráfico dado pela fig. 5(d)



$$= i \frac{(2\pi)^\eta \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) t^{abc}}{3!} \left( \text{diagram} \right) dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} e^{ip \cdot x}$$

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} e^{ir \cdot t} \delta(p-q+r) D_{\alpha\mu}(p) D_{\beta\rho}(q) D_{\nu\gamma}(r).$$

$$[g_{\mu\rho}(p+q)_\gamma + g_{\mu\gamma}(r-p)_\rho - g_{\gamma\rho}(q+r)_\mu]$$

(3.56)

e onde

$$D_{\alpha\mu}(p) D_{\beta\rho}(q) D_{\nu\gamma}(r) [g_{\mu\rho}(p+q)_\gamma + g_{\mu\gamma}(r-p)_\rho - g_{\gamma\rho}(q+r)_\mu] =$$

$$= \frac{1}{p^2 q^2 r^2} \left\{ g_{\alpha\beta}(p+q)_\nu + g_{\alpha\nu}(r-p)_\beta - g_{\beta\nu}(q+r)_\alpha + A p_\beta \frac{r_\nu r_\alpha}{r^2} + A q_\alpha \frac{r_\nu r_\beta}{r^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + A r_\alpha \frac{q_\beta q_\nu}{q^2} - A p_\nu \frac{q_\beta q_\alpha}{q^2} - A q_\nu \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - A r_\beta \frac{p_\alpha p_\nu}{p^2} \\
& - A g_{\alpha\beta} (p+q)_\gamma \frac{r_\gamma r_\nu}{r^2} - A g_{\alpha\nu} (r-p)_\rho \frac{q_\rho q_\beta}{q^2} + A g_{\beta\nu} (q+r)_\mu \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \\
& + A^2 (p.r) \frac{r_\nu q_\beta q_\alpha}{q^2 r^2} - A^2 (p.q) \frac{q_\beta r_\nu r_\alpha}{q^2 r^2} - A^2 (p.q) \frac{p_\alpha r_\beta r_\nu}{p^2 r^2} \\
& + A^2 (q.r) \frac{r_\nu p_\alpha p_\beta}{p^2 r^2} + A^2 (r.q) \frac{q_\beta p_\alpha p_\nu}{p^2 q^2} - A^2 (p.r) \frac{p_\alpha q_\beta q_\nu}{p^2 q^2} \left. \right\} \quad (3.57)
\end{aligned}$$

É fácil mostrar que os três primeiros termos de (3.57) não contribuem para o resultado final

$$\begin{aligned}
& \left( \int \int \int dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot t} \delta(p-q+r) g_{\alpha\nu} (r-p)_\beta = \right. \\
& \left( \int \int \int dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot t} \delta(p-q+r) g_{\alpha\nu} r_\beta \right. \\
& - \left( \int \int \int dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot t} \delta(p-q+r) g_{\alpha\nu} r_\beta \right. \\
& = \left[ \left( \int \int \int dx_\alpha dy_\beta dt_\nu - \left( \int \int \int dx_\nu dy_\beta dt_\alpha \right) g_{\alpha\nu} \right] \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot t} \right. \\
& \left. \delta(p-q+r) r_\beta = 0 \right.
\end{aligned}$$

Seja  $k_1$  definido pela seguinte expressão

$$k_1 = \left( \int \int \int dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot t} \delta(p-q+r) A p_\beta \frac{r_\nu r_\alpha}{r^2} \right)$$

e assim portanto

$$k_1 = A \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{p^2} e^{ipx} \int \frac{d^\eta q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^\eta r}{r^2} \left[ \int_y^x dt_\nu r_\nu e^{ir \cdot t} \right] \delta(p-q+r) \frac{p_\beta r_\alpha}{r^2}$$

$$k_1 = -iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{p^2} \int \frac{d^\eta q}{q^2} \int \frac{d^\eta r}{r^2} \left\{ e^{i(p+r)x - iq \cdot y} e^{-ipx} e^{i(r-q) \cdot y} \right\} \cdot \delta(p-q+r) \frac{r_\alpha p_\beta}{r^2}$$

$$k_1 = iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{p^2} \int \frac{d^\eta q}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2} \left\{ e^{iq(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} \frac{(p-q)_\alpha p_\beta}{(p-q)^2}$$

$$k_1 = iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta q}{q^2} e^{iq(x-y)} \int d^\eta p \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2 (p-q)^4}$$

$$k_1 = iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int d^\eta q e^{iq(x-y)} \int d^\eta p \frac{p_\alpha p_\beta}{q^2 p^2 (p-q)^4}$$

Utilizando o resultado já obtido em (3.16) bem como a fórmula da transformada de Fourier para um número arbitrário de dimensões  $^{[40]}$  de  $|p|^\lambda$

$$\int d^\eta p |p|^\lambda e^{ip \cdot x} = \frac{2^{\lambda+\eta} \pi^{\eta/2} \Gamma(\frac{\lambda+\eta}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} |x|^{-\lambda-\eta} \quad (3.58)$$

podemos mostrar que

$$k_1 = iA \pi^\eta 2^{(2\eta-8)} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma(\eta-3) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{\Gamma(\eta-2) \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \iiint dx_\alpha dy_\beta g_{\alpha\beta} |x-y|^{2(3-\eta)} \quad (3.59)$$

Definamos  $J_1$  como

$$J_1 = -A \iiint dx_\alpha dy_\beta dt_\nu \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} e^{ir \cdot t} \delta(p-q+r) \cdot g_{\alpha\beta}^{(p+q)} \frac{r_\gamma r_\nu}{r^2}$$

logo

$$J_1 = -A \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{p^2} e^{ipx} \int \frac{d^n q}{q^2} e^{-iq \cdot y} \int \frac{d^n r}{r^2} \left[ \int_y^x dt_\nu r_\nu e^{irt} \right] \delta(p-q+r) g_{\alpha\beta} \cdot \frac{(p+q)_\gamma r_\gamma}{r^2}$$

$$J_1 = iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{p^2} \int \frac{d^n q}{q^2} \int \frac{d^n r}{r^2} \left\{ e^{i(p+r)x} e^{-iq \cdot y} - e^{ip \cdot x} e^{i(r-q) \cdot y} \right\} \delta(p-q+r) g_{\alpha\beta} \frac{(p+q)_\gamma \cdot r_\gamma}{r^2}$$

$$J_1 = -iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{p^2} \int \frac{d^n q}{q^2} \left\{ e^{iq(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} g_{\alpha\beta} \frac{p^2 - q^2}{(p-q)^4}$$

$$J_1 = -2iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n q}{q^2} e^{iq(x-y)} \int d^n p \frac{p^2 - q^2}{p^2 (p-q)^4}$$

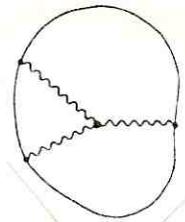
da eq. (3.5) segue então

$$J_1 = 2iA \iiint dx_\alpha dy_\beta \int d^n q e^{iq(x-y)} \int d^n p \frac{1}{p^2 (p-q)^4}$$

e usando o resultado obtido em (3.17) e a fórmula (3.58) podemos mostrar que

$$J = -i (\eta-3) A 2^{2\eta-5} \pi^\eta \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2})\Gamma(\eta-3)\Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \cdot \iint dx_\alpha dy_\beta g_{\alpha\beta} |x-y|^{2(3-\eta)} \quad (3.60)$$

Se observarmos as equações (3.56) e (3.57) veremos que, por argumentos de simetria, é possível escrever

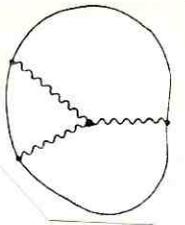


$$= i (2\pi)^{-2\eta} \frac{\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c)}{3!} t^{abc} \left\{ 6k_1 + 3J_1 \right\} + A^2 F(\eta)$$

e já que

$$t^{abc} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) = -2NC_2$$

então das eqs. (3.59) e (2.60)



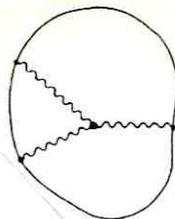
$$= \frac{NC_2 A}{2^7 \pi^\eta} (4\eta-13) \Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right) \frac{\Gamma(\eta-3)\Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2})}$$

$$\iint dx_\alpha dy_\beta g_{\alpha\beta} |x-y|^{2(3-\eta)} \quad (3.61)$$

$$+ A^2 F(\eta)$$

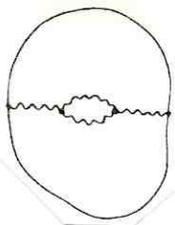
onde  $F(\eta)$  é a contribuição dos seis últimos termos da equação (3.57). A forma da equação (3.61) pode ainda ser modificada, para melhor atender aos nossos interesses.

É claro que no limite em que  $\eta \rightarrow 4$



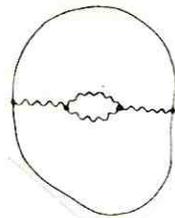
$$= \frac{NC_2 A}{2^5 \pi^{\eta/2}} (4\eta-13) \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2})\Gamma(\frac{\eta-2}{2})\Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \int D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{4-\eta} dx_\alpha dy_\beta + A^2 F(\eta) \quad (3.62)$$

Para o gráfico dado pela fig. 5(e)



$$= \frac{\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b)}{2^2} t^{acd} t^{bdc} \int dx_\alpha dt_\beta \int \frac{d^\eta p}{(2\pi)^\eta} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^\eta q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y} \int d^\eta r \int d^\eta s \delta(r-s-p) \delta(q+s-r) D_{\alpha\nu}(p) D_{\beta\sigma}(q) D_{\mu\zeta}(r) D_{\gamma\rho}(s) V_{\nu,\mu,\gamma}(p,r,s) V_{\sigma,\xi,\rho}(q,r,s)$$

onde  $V$  é a expressão do vértice. Desta forma

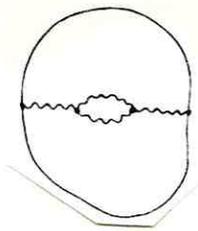


$$= \frac{NC_2}{2} \int dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{(2\pi)^\eta} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^\eta q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y} \int d^\eta r \int d^\eta s$$

$$\cdot \delta(r-s-p) \delta(q+s-r) D_{\mu\zeta}(r) D_{\gamma\rho}(s) V_{\alpha,\mu,\gamma}(p,r,s) V_{\beta,\zeta,\rho}(q,r,s)$$

$$= \frac{NC_2}{2} \left[ \text{diagram} \right] dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y} \int d^n r \frac{\delta(p-q)}{p^2 q^2}$$

$$\cdot D_{\mu\zeta}(r) D_{\gamma\rho}(r-p) V_{\alpha,\mu,\gamma}(p,r,r-p) V_{\beta,\zeta,\rho}(q,r,r-p)$$



$$= \frac{NC_2}{2} \left[ \text{diagram} \right] dx_\alpha dy_p \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{p^4} D_{\mu\zeta}(r) D_{\gamma\rho}(r-p)$$

$$V_{\alpha,\mu,\gamma}(p,r,r-p) V_{\beta,\zeta,\rho}(p,r,r-p)$$

onde

$$V_{\alpha,\mu,\gamma}(p,r,r-p) = \text{diagram} = -i[g_{\alpha\gamma}(2p-r)_\mu + g_{\gamma\mu}(2r-p)_\alpha - g_{\mu\alpha}(r+p)_\gamma]$$

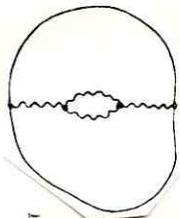
$$V_{\beta,\zeta,\rho}(p,r,r-p) = \text{diagram} = -i[g_{\beta\rho}(2p-r)_\zeta + g_{\zeta\rho}(2r-p)_\beta - g_{\beta\zeta}(r+p)_\rho]$$

Substituindo as expressões correspondentes aos vértices e aos propagadores, é possível mostrar após várias manipulações algébricas, que

$$\text{diagram} = -\frac{NC_2}{2} \left[ \text{diagram} \right] dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} \left[ g_{\alpha\beta} \frac{5}{p^2} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{r^2 (r-p)^2} - g_{\alpha\beta} \frac{2p_\mu}{p^4} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\mu}{r^2 (r-p)^2} + \frac{2(2\eta-3)}{p^4} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2 (r-p)^2} \right]$$

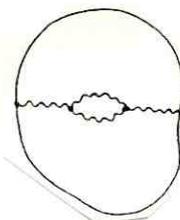
$$\begin{aligned}
 & - \frac{2A}{p^2} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2 (r-p)^4} - g_{\alpha\beta} A \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{1}{r^2 (r-p)^4} \\
 & - g_{\alpha\beta} A \frac{4 p_\alpha p_\beta}{p^4} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^4 (r-p)^2} + g_{\alpha\beta} A \frac{4 p_\mu}{p^4} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\mu}{r^2 (r-p)^2} \\
 & - \frac{A}{p^2} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^4 (r-p)^2} - \frac{2A p_\mu}{p^4} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta r_\mu}{r^4 (r-p)^2} \\
 & + \frac{A}{p^4} \int \frac{d^\eta r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2 (r-p)^2} \Big] + A^2 G(\eta)
 \end{aligned}$$

e utilizando os resultados obtidos na seção 3.1 podemos mostrar que



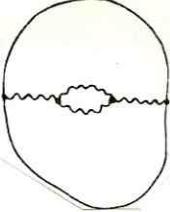
$$\begin{aligned}
 & = - \frac{NC_2}{2} g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2})}{(4\pi)^\eta / \alpha \Gamma(\eta-2)} \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{(2\pi)^\eta} e^{ip(x-y)} \frac{1}{(p^2)^{\frac{\eta-6}{2}}} \\
 & \left[ 5 - 1 + \frac{2\eta-3}{2(1-\eta)} - \frac{A}{2} + A(\eta-3) + A(\eta-5) + 2A - \frac{A}{4} + \frac{A(\eta-2)}{4(1-\eta)} + \frac{A}{4(1-\eta)} \right] + A^2 G(\eta)
 \end{aligned}$$

e de (3.58) teremos finalmente que



$$\begin{aligned}
 & = - \frac{NC_2}{2^8 \pi^\eta} \left[ (6\eta-5) + A (4\eta^2 - 18\eta + 14) \right] \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2}) \Gamma(\eta-3)}{(\eta-1) \Gamma(\eta-2) \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \cdot \\
 & \cdot \iint dx_\alpha dy_\beta |x-y|^{6-2\eta} + A^2 G(\eta)
 \end{aligned}$$

ou equivalentemente, como já foi visto.

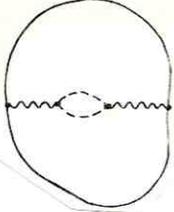


$$= - \frac{NC_2}{2^6 \pi^{\eta/2} (\eta-1)} [(6\eta-5)+A(4\eta^2-18\eta+14)] \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2})\Gamma(\frac{\eta-2}{2})\Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2})}$$

$$\cdot \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{4-\eta}$$

$$+ A^2 G(\eta) \quad (3.63)$$

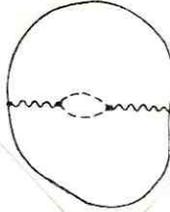
Para o último gráfico (5(f))



$$= - (i)^2 \frac{\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b)}{2} t^{acd} t^{bdc} \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{(2\pi)^\eta} e^{ip \cdot x} \int \frac{d^\eta q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y}$$

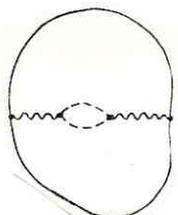
$$\int d^\eta r \int d^\eta s \delta(r-p-s) \delta(q+s-r) D_{\alpha\nu}(p) D_{\beta\mu}(q) G(r)G(s) r_\nu s_\mu$$

ou seja

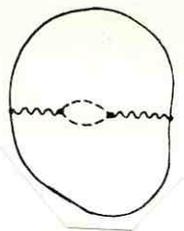


$$= NC_2 \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^\eta p}{(2\pi)^\eta} e^{ipx} \int \frac{d^\eta q}{(2\pi)^\eta} e^{-iq \cdot y} \int d^\eta r \delta(q-p) \cdot$$

$$D_{\alpha\nu}(p) D_{\beta\mu}(q) G(r) G(r-p) r_\nu(r-p)_\mu$$

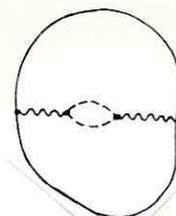


$$= NC_2 \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} e^{ip(x-y)} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} D_{\alpha\nu}(p) D_{\beta\mu}(\bar{p}) G(r) G(r-p) \cdot (r_\nu r_\mu - r_\nu p_\mu)$$



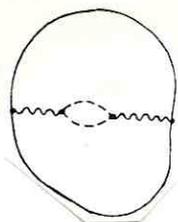
$$= NC_2 \iint dx_\alpha dy_\beta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^\eta} e^{ip(x-y)} \int \frac{d^n r}{(2\pi)^\eta} \frac{r_\alpha r_\beta}{p^4 r^2 (r-p)^2}$$

e agora utilizando as eqs. (3.9) e (3.58) podemos mostrar que



$$= \frac{NC_2}{2^8 \pi^\eta} \frac{1}{(1-\eta)} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma^2(\frac{\eta-2}{2}) \Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2) \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \iint dx_\alpha dy_\beta g_{\alpha\beta} |x-y|^{\eta-6}$$

que pode ser posta na forma



$$= \frac{C_2}{2^6 \pi^{\eta/2}} \frac{1}{(1-\eta)} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma(\frac{\eta-2}{2}) \Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2) \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{\eta-4} \quad (3.64)$$

Como o loop de Wilson é invariante de gauge, a soma das contribuições não-abelianas tem que ser independente do termo que fixa o gauge. Por esta razão, das eqs. (3.62) e (3.63), é possível mostrar que

$$F(\eta) + G(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = 4$$

e das equações (3.55), (3.62), (3.63) e (3.64)

$$= S(\eta) = - \frac{NC_2}{2^6 \pi^{\eta/2}} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2}) \Gamma(\frac{\eta-2}{2}) \Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2) \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} \cdot \left[ 8 + 4A(\eta-3) - 2A(4\eta-13) + \frac{(6\eta-5)}{(\eta-1)} + 2A(2\eta-7) + \frac{1}{(\eta-1)} \right] \cdot \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{\eta-4}$$

$$S(\eta) = \frac{-NC_2}{2^{5\pi} \eta/2} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2})\Gamma(\frac{\eta-2}{2})\Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2})(\eta-1)} (7\eta-6) \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y) |x-y|^{4-\eta} \quad (3.65)$$

Através do cálculo perturbativo do loops de Wilson na quarta ordem da constante de acoplamento mostramos como o método de regularização dimensional pode ser uma ferramenta preciosa no tratamento das teorias de gauge não-abelianas: o método mantém a invariância de gauge, exclui automaticamente as divergências lineares, apresenta as divergências logarítmicas usuais do espaço euclidiano quadridimensional como polos das funções  $\Gamma$  de Euler. Com o método de regularização dimensional as divergências logarítmicas

$$\ln(\Lambda/\mu) = \ln(a_\mu/a_\Lambda)$$

onde  $\Lambda$  é o parâmetro de corte no ultravioleta e  $\mu$  o ponto de normalização no espaço do momento e que corresponde a escala de normalização  $a_\mu$  no espaço de configuração, podem ser recuperadas fazendo-se

$$\ln(\Lambda/\mu) = 1/\epsilon \quad (3.66)$$

onde  $\epsilon$  é o defeito no número de dimensões.

$$\eta = 4 - \epsilon$$

Assim da eq. (3.65)

$$S = - \frac{NC_2}{2^3 \cdot 3 \cdot \pi^2} \frac{11}{\epsilon} \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}^0(x-y)$$

e agora procedendo da maneira usual fazendo com que as divergências dos diagramas de ordem superior sejam absorvidas pela renormalização da carga dos diagramas de ordem inferior teremos do resultado acima obtido das eqs. (3.27) e (3.66) que, pelo menos até a quarta ordem,

$$W(\Gamma) = \exp \left\{ - N g^2(a_\mu) \iint dx_\alpha dy_\beta D_{\alpha\beta}(x-y) \right\} \quad (3.67)$$

onde

$$g^2(a_\mu) = g^2 \left( 1 + g^2 C_2 \frac{11}{24\pi^2} \ln(a_\mu/a_\Lambda) \right) \quad (3.68)$$

é a carga renormalizada<sup>[36]</sup>.

Da eq. (3.48) segue agora então que para o potencial entre quarks estáticos

$$V = - \frac{g^2(a_\mu)}{4X}$$

Da teoria do grupo de renormalização<sup>[41]</sup>, podemos extrair a seguinte equação:

$$a_\mu \frac{\partial}{\partial a_\mu} g(a_\mu) = \frac{\partial g(a_\mu)}{\partial \ln a_\mu} = - \beta [g(a_\mu)]. \quad (3.69)$$

onde  $\beta(g(a_\mu))$  é a função de Callan-Symanzik<sup>[42]</sup>. Aplicando (3.69) no resultado obtido em (3.68)

$$\frac{\partial g(a_\mu)}{\partial a_\mu} = \frac{1}{2g(a_\mu)} \frac{\partial}{\partial a_\mu} g^2(a_\mu)$$

$$\beta[g] = - g^3 \frac{11C_2}{48\pi^2} + \dots \quad (3.70)$$

Na representação adjunta,  $C_2 = N_c$ . Do resultado acima, podemos obter  $\beta(g)$  para qualquer grupo  $SU(N_c)$ <sup>[43]</sup>:

$$\beta_{\text{SU}(2)}^{(g)} = - \frac{11}{24\pi^2} g^3$$

$$\beta_{\text{SU}(3)}^{(g)} = - \frac{11}{16\pi^2} g^3 .$$

Ainda da eq. (3.70), temos que

$$\frac{\partial g}{\partial \ln a} = \frac{11C_2}{48\pi^2} g^3 + \dots, \quad (3.71)$$

a qual pode ser integrada, desprezando  $O(g^4)$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{g^2(a_\mu)} - \frac{1}{g^2} = \frac{11C_2}{48\pi^2} \ln(a_\mu/a_\Lambda)$$

e então,

$$g^2(a_\mu) = \frac{g^2}{1 - \frac{11C_2}{24\pi^2} \ln(a_\mu/a_\Lambda)} \quad (3.72)$$

No caso do potencial entre quarks estáticos, o ponto de escala de normalização  $a_\mu$  é a própria distância que os separa. Assim,

$$V(X) = - \frac{1}{4X} \frac{g^2}{1 - \frac{11C_2}{24\pi^2} \ln(X/a_\Lambda)} \quad (3.73)$$

e, no limite em que  $X/a_\Lambda \rightarrow 0$ ,

$$V(X) \sim \frac{1}{4X} \cdot \frac{24\pi^2/11C_2}{\ln(X/a_\Lambda)},$$

tendendo a zero mais rapidamente que a lei de Coulomb. Este efeito é conhecido pelo nome de liberdade assintótica das teorias de gauge não-abelianas [44].

CAPÍTULO IV

O LOOP DE WILSON NAS TEORIAS DE GAUGE EM TRÊS DIMENSÕES

4.1 - Teorias de Gauge em 3D

O estudo das teorias de gauge em três dimensões é motivado por duas razões distintas. Primeiramente, estas teorias são exemplos de teorias quânticas de campo não triviais, o que por si só já é interessante. Além disto estas teorias podem ser úteis como "modelos de brinquedo" para se estudar o confinamento em 2+1 dimensões<sup>[45]</sup>. Em segundo lugar, o estudo das teorias de gauge em três dimensões é motivado pela sua conexão com o comportamento, a alta temperatura, das teorias em quatro dimensões<sup>[46]</sup>,<sup>[47]</sup>. Como se sabe, o regime de alta temperatura de uma teoria de campo é obtido através da formulação da teoria em temperatura finita fazendo-se a seguir  $T \rightarrow \infty$ .

A formulação de uma teoria de campo em temperatura finita pode ser efetuada, por exemplo, através da prescrição de Martin-Schwinger<sup>[48]</sup> as amplitudes de interesse podem ser computadas utilizando-se as mesmas regras no espaço dos momenta da teoria em temperatura zero, com a diferença de que agora a energia é discreta ao invés de contínua. Especificamente o propagador do bóson é dado por

$$D(p) = \frac{i}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2} \quad ; \quad p_0 = 2 i \pi n T$$

enquanto que para o fêrmion

$$S(p) = \frac{i}{\gamma_0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m} \quad ; \quad p_0 = 2 i \pi (n + 1/2) T$$

e  $n$  é um inteiro e  $T$  é proporcional a temperatura.

Além disto, a integração sobre os quadri-momenta se transforma em uma soma sobre inteiros  $n$  e numa integração sobre os tri-momenta espaciais.

$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

Assim, a contribuição do propagador bosônico a um diagrama qualquer se rá do tipo

$$iT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} g \frac{i}{-4n^2 \pi^2 T^2 - \vec{p}^2 - m^2} g \dots$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento que governa os vértices conectados pelo propagador. No limite de alta temperatura, todos os modos com  $n \neq 0$  decaem devido a dependência da temperatura no denominador. Somente o modo  $n = 0$  sobrevive e no limite  $T \rightarrow \infty$  a contribuição do propagador bosônico toma a seguinte forma

$$\int d^3 \vec{p} g \sqrt{T} \frac{1}{\vec{p}^2 + m^2} g \sqrt{T} \dots$$

Por outro lado, a contribuição dos propagadores fermiônicos é sempre subdominante a alta temperatura, pois a dependência em  $T$  no denominador não pode ser eliminada.

Do exemplo acima, podemos concluir que a série gráfica perturbativa para uma teoria simples, do tipo que envolve campos de spin 1/2 e campos de spin zero auto-interativos, coincide, no regime de alta temperatura, com a série gráfica de uma teoria que tem a mesma estrutura da interação bosônica, sem férmions, cujos cálculos são efetuados em um espaço euclidiano com uma dimensão a menos. Como uma teoria renormalizável em quatro dimensões, no regime de alta temperatura, se transforma em uma teoria super-renormalizável em três dimensões, devido ao fato de que a constante de acoplamento efetiva adquire dimensões de potência positiva de massa, então nossa teoria de campos efetiva possui um grau de divergência menor do que o da teoria completa, em temperatura finita. Isto reflete o co

nhecido fato de que a renormalização em temperatura zero é suficiente para remover as divergências no ultravioleta de uma teoria em temperatura finita.

Entretanto, quando os campos são sem massa, expansões perturbativas na constante de acoplamento super-renormalizável levam ao aparecimento de divergências infravermelhas. Efetivamente, foi mostrado por Jackiw e Templeton [49] que teorias de gauge super-renormalizáveis em 3D dão origem a amplitudes que não são analíticas na constante de acoplamento: elas não podem ser expandidas em potências de  $g$  e quando uma expansão é forçada, divergências aparecem. O tratamento das divergências IV nas teorias de gauge 3D tem sido objeto de pesquisa e recentemente alguns trabalhos tem sido publicados sobre o assunto [50], [51].

Dentro deste panorama, pode ser de interesse, devido a sua propriedade de invariância de gauge, o estudo do loop de Wilson em três dimensões. Na verdade, algum esforço nesta direção já foi feito por Appelquist e Pisarski [47]

Mostraremos, fazendo uso de alguns resultados obtidos no capítulo anterior, que a expansão perturbativa do loop de Wilson até a quarta ordem na constante de acoplamento, num espaço euclidiano 3D, é livre de divergências IV. O método de regularização dimensional é empregado e as divergências que aparecem são de natureza ultravioleta, cujo tratamento é feito.

Como já vimos no capítulo anterior, para o contorno de um círculo em uma teoria abeliana

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = - \frac{-N R^{4-\eta} \Gamma(\frac{3-\eta}{2}) \Gamma(\frac{\eta}{2})}{2^{\eta-2} \pi^{(\eta-3)/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})}$$

e quando  $\eta = 3$

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = - N \frac{F(0)}{2} R$$

e a divergência UV representada pela  $\Gamma(0)$  tem origem na auto-indutância de um anel infinitesimalmente fino do eletromagnetismo clássico em 3D. Quando o círculo é distorcido e transformado em uma elipse, o loop de Wilson associado ao novo contorno, devido a propriedade de exponenciação das teorias abelianas e da eq.(3,48), nos fornece a forma do potencial estático entre as cargas

$$V \sim \frac{\Gamma(\frac{3-\eta}{2})\Gamma(\eta-1)}{2^\eta (\eta-3)^{1/2} \Gamma(\frac{6-\eta}{2})} X^{3-\eta}$$

onde  $X$  é a separação entre elas. O problema da divergência em  $\eta = 3$  pode ser resolvido considerando-se que só a parte finita possui significado físico. Neste caso

$$V(X) \sim \frac{\ln X}{2\sqrt{\pi}} + C$$

Quando a teoria é não-abeliana, a parte "tipo abeliana" se comporta de forma análoga ao caso acima discutido e a soma das contribuições não-abelianas, como já vimos, é dada por

$$S(\eta) = - \frac{C_2}{2^6 \pi^{\eta/2}} \frac{\Gamma(\frac{4-\eta}{2})\Gamma(\frac{\eta-2}{2})\Gamma(\eta-3)}{\Gamma(\eta-2)\Gamma(\frac{6-\eta}{2}) (\eta-1)} \quad (7\eta-6) .$$

$$\left\{ \int dx_\alpha dy_\beta g_{\alpha\beta} |x-y|^{6-2\eta} \right\}$$

$S(4)$  nos dá a divergência logarítmica da constante de acoplamento renormalizada em quatro dimensões. Se  $\eta = 3$ ,  $S(3)$  não apresenta divergências pois

$$I(\eta) = \Gamma(\eta-3) \left\{ \int dx_\alpha dy_\alpha |x-y|^{6-2\eta} \right\} = \Gamma(\eta-3) (\eta-3) F(\eta)$$

onde  $F(\eta)$  tem um valor finito em  $\eta=3$  e depende da forma do contorno. No caso do círculo isto pode ser mostrado explicitamente:

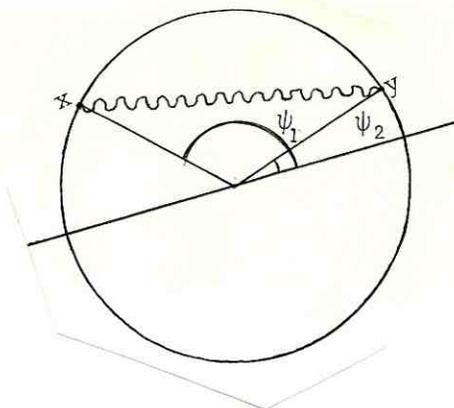


Fig. 6

$$dx_{\alpha} dy_{\alpha} = |dx| |dy| \cos(\psi_1 - \psi_2) = R^2 \cos(\psi_1 - \psi_2) d\psi_1 d\psi_2$$

$$|x-y|^2 = 2R^2 [1 - \cos(\psi_1 - \psi_2)] = 4R^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right)$$

$$I(\eta) = \Gamma(\eta-3) R^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \left[ 4R^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{3-\eta}$$

$$I(\eta) = \Gamma(\eta-3) 2^{3-\eta} R^{5-\eta} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{3-\eta}$$

$$\cos(\psi_1 - \psi_2) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right)$$

$$I(\eta) = 2^{3-\eta} R^{5-\eta} \Gamma(\eta-3) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_2 \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{3-\eta} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_2 \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{4-\eta} \right\}$$

efetuamos a seguinte troca de variáveis

$$\psi_1 \rightarrow 2\psi + \psi_2 \quad ; \quad d\psi_1 = 2d\psi$$

$$I(\eta) = 2^{4-\eta} R^{5-\eta} \Gamma(\eta-3) \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_2 \int_{-\frac{\pi+\psi_2}{2}}^{\frac{\pi+\psi_2}{2}} d\psi \{ (\text{sen}^2 \psi)^{3-\eta} - 2(\text{sen}^2 \psi)^{4-\eta} \}$$

$$I(\eta) = 2^{6-\eta} R^{5-\eta} \pi \Gamma(\eta-3) \int_0^{\pi/2} d\psi \{ (\text{sen}^2 \psi)^{3-\eta} - 2(\text{sen}^2 \psi)^{4-\eta} \}$$

da tabela G R (pg 369)

$$\int_0^{\pi/2} d\psi (\text{sen } \psi)^v = \frac{2^{1+v} \Gamma^2\left(\frac{1+v}{2}\right)}{\Gamma(1+v)}$$

teremos finalmente que

$$I(\eta) = \Gamma(\eta-3)(\eta-3) \frac{2^{7-\eta} R^{5-\eta} \pi^{3/2} \Gamma\left(\frac{7-2\eta}{2}\right)}{\Gamma(5-\eta)}$$

como queríamos demonstrar.

#### 4.2 - Teorias de gauge 3D com massa topológica.

Além da sua conexão com o comportamento a alta temperatura dos modelos em quatro dimensões, as teorias de gauge em três dimensões possuem certas características especiais, oriundas da topologia dos espaços de dimensão ímpar, que as tornam particularmente interessantes. Recentemente, Deser, Jackiw e Templeton<sup>[52]</sup> mostraram que é possível introduzir-se um termo topológico na lagrangiana da teoria sem quebrar a invariância de gauge. A introdução de tal termo leva ao aparecimento de campos vetoriais com massa, e se o grupo de simetria interna é o SU(2) ou algum grupo que o tenha como subgrupo, a estrutura topológica da teoria é similar a da teoria de Yang-Mills em quatro dimensões. Quando a condição de invariância de gauge é imposta, a massa topológica é automaticamente quantizada.

O lagrangiano dos campos de gauge é dado por

$$L = \frac{1}{8} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m}{8} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \text{Tr} (F^{\mu\nu} A^\alpha - \frac{2}{3} A^\mu A^\nu A^\alpha) \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa topológica e as equações de campo gauge covariante são

$$D_\beta F^{\beta\nu} + \frac{m}{2} {}^*F^\nu = 0 \quad (4.2)$$

onde  ${}^*F$  é o dual do tensor das intensidades de campo

$${}^*F^\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad ; \quad F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\nu} {}^*F_\nu \quad (4.3)$$

que satisfaz a identidade de Bianchi

$$D_\nu {}^*F^\nu = 0$$

Tomando o dual da eq (4.2) e fazendo uso da identidade de Ricci

$$[D_\alpha, D_\beta] = F_{\alpha\beta} \quad (4.4)$$

é possível mostrar que

$$(D_\nu D^\nu + m^2) {}^*F^\beta = \epsilon^{\beta\alpha\nu} [{}^*F_\alpha, {}^*F_\nu] \quad (4.5)$$

de onde o caráter massivo dos campos já é visível.

Consideremos a transformação de gauge usual

$$A_\mu(x) \rightarrow U^{-1}(x) A_\mu(x) U(x) + U^{-1}(x) \partial_\mu U(x)$$

a resposta da ação a esta transformação é

$$\int d^3x L \rightarrow \int d^3x L + \frac{m}{g^2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\nu} \partial_\alpha \text{Tr} [\partial_\beta U U^{-1} A_\nu] + \frac{m}{3g^2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\nu} \text{Tr} (\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\nu U U^{-1}) \quad (4.6)$$

Considerando que a nossa transformação de gauge tende a identidade no infinito

$$U(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \pm I$$

o que reflete o fato de que o espaço em que estamos trabalhando é assintoticamente uniforme (e evita problemas de convergência na eq.4,6). O segundo termo da eq. (4.6) pode ser encarado como uma integral de superfície A dependente cuja contribuição é nula. Se o grupo de gauge é o SU(2), ou algum outro que o contenha podemos fazer uso da parametrização exponencial

$$\begin{aligned} U(x) &= \exp (\theta^a(x) G^a) \\ G^a &= \sigma^a / 2i \\ \theta^a &= \hat{\theta}^a \theta \end{aligned} \quad (4.7)$$

e converter o último termo da eq.(4.6) também em uma integral de superfície, e assim portanto

$$\int d^3 x L \rightarrow \int d^3 x L + m \frac{g\pi^2}{g^2} W(U) \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} W(U) &= \frac{1}{24\pi^2} \int d^3 x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left[ \partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1} \right] \\ &= - \frac{1}{16\pi^2} \int d^3 x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{abc} \partial_\alpha \left[ \hat{\theta}^a \partial_\beta \hat{\theta}^b \partial_\gamma \hat{\theta}^c \right] \\ &\quad (\theta - \text{sen } \theta) \end{aligned} \quad (4.9)$$

e W(U) é o número topológico da transformação de gauge U (winding number) e que assume valores inteiros os quais definem a classe equivalente de homotopia a qual U pertence. Assim, concluímos que a ação não é invariante de gauge e na verdade sofre uma variação dada por

$$m \frac{8\pi^2}{g} W(U) = m \frac{8\pi^2}{g^2} n \quad (4.10)$$

onde  $n$  é um inteiro. Entretanto, em uma teoria quântica, a exponencial da ação

$$\exp \left\{ i \int d^3 x L \right\}$$

é quem tem que ser invariante de gauge. Logo se a quantidade definida pela eq. (4.10) for um múltiplo inteiro de  $2\pi$  esta variação é tolerada e, desta forma, a imposição da invariância de gauge leva a seguinte condição de quantização

$$m = g^2 4\pi n \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Quantidades topológicas, em espaços de dimensão ímpar como no caso acima, estão associadas a classe característica secundária de Chern-Simons.

A estrutura topológica da teoria de Yang-Mills 3D com massa topológica nos permite levantar a hipótese de que esta teoria, na verdade, poderia governar o limite de alta temperatura de uma teoria de gauge não-abeliana. A favor desta hipótese consta o fato de que ambas possuem os mesmos números quânticos. Além desta conjectura, a introdução do termo topológico dá origem a outros fatos interessantes: a condição de quantização é totalmente devida ao grupo de simetria interno e é de algum modo análoga a condição de quantização do monopolo de Dirac; ao nível quântico, o termo de massa funciona como um corte (cut off) no IV para as teorias com campos vetoriais superrenormalizáveis; o aparecimento de campos vetoriais com massa surge de um mecanismo topológico, tal como no modelo de Schwinger em duas dimensões, e não do mecanismo de Higgs ou de um condensado fermiônico.

Pode ser de interesse, com relação as teorias de gauge em 3D com massa topológica, o estudo do loop de Wilson devido a sua propriedade de invariância de gauge.

O propagador do glúon, de acordo com lagrangiano dado pela eq. (4.1), é dado por

$$D_{\eta\beta}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \left\{ g_{\eta\beta} + \frac{p_\eta p_\beta}{p^2} + im\epsilon_{\eta\beta\xi} \frac{p_\xi}{p^2} \right\} - (A+1) \frac{p_\eta p_\beta}{p^4} \quad (4.11)$$

onde  $m$  é a massa topológica e  $A$  o termo que fixa o gauge. Usando a definição de  $f_\Gamma^{(\alpha)}(p)$  dada pela eq. (3.28) junto com a eq. (3.27) teremos que

$$W_1(\Gamma) = -N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{p^2 + m^2} \left[ g_{\eta\beta} + \frac{p_\eta p_\beta}{p^2} + im\epsilon_{\eta\beta\xi} \frac{p_\xi}{p^2} \right] - (A+1) \frac{p_\eta p_\beta}{p^4} \right\} f_{\Gamma\eta}(p) f_{\Gamma\beta}^*(p) \quad (4.12)$$

onde  $N$  é a dimensão do grupo de gauge. Como já vimos anteriormente, quando o contorno  $\Gamma$  é planar é possível decompor o vetor  $p$  em

$$p_\beta = \bar{p}_\beta + \hat{p}_\beta$$

onde  $\hat{p}_\beta$  é a projeção de  $p_\beta$  sobre o plano do contorno, e além disto, da eq. (3.30)

$$\hat{p} \cdot f_\Gamma(\hat{p}) = 0$$

se  $\Gamma$  é um contorno fechado e sem cúspides. Por outro lado, no presente caso

$$\epsilon_{\eta\beta\xi} \hat{p}_\xi f_{\Gamma\eta}(\hat{p}) f_{\Gamma\beta}^*(\hat{p}) = 0 \quad (4.13)$$

Desenvolvendo a eq. (4.12) segue que

$$W_1(\Gamma) = -\frac{Ng_{\eta\beta}}{(2\pi)^3} \int d^2\hat{p} f_{\Gamma\eta}(\hat{p}) f_{\Gamma\beta}^*(\hat{p}) \int \frac{d\bar{p}}{\bar{p}^2 + \hat{p}^2 + m^2} +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{N}{(2\pi)^3} \int d^2\bar{p} \hat{p}_\eta \hat{p}_\beta f_{\Gamma^\eta}(\bar{p}) f_{\Gamma^\beta}^*(\bar{p}) \int \frac{d\bar{p}}{(\bar{p}^2 + \hat{p}^2)(\bar{p}^2 + \hat{p}^2 + m^2)} \\
& - \frac{i\pi N}{(2\pi)^3} \int d^2 p \epsilon_{\eta\beta\xi} \hat{p}_\xi f_{\Gamma^\eta}(\bar{p}) f_{\Gamma^\beta}^*(\bar{p}) \int \frac{d\bar{p}}{(\bar{p}^2 + \hat{p}^2)(\bar{p}^2 + \hat{p}^2 + m^2)} \\
& - \frac{i\pi N}{(2\pi)^3} \int d^2\bar{p} \epsilon_{\eta\beta\xi} f_{\Gamma^\eta}(\bar{p}) f_{\Gamma^\beta}^*(\bar{p}) \int \frac{d\bar{p} \bar{p}_\xi}{(\bar{p}^2 + \hat{p}^2)(\bar{p}^2 + \hat{p}^2 + m^2)} \\
& + \frac{N(A+1)}{(2\pi)^3} \int d^2\bar{p} \hat{p}_\eta \hat{p}_\beta f_{\Gamma^\eta}(\bar{p}) f_{\Gamma^\beta}^*(\bar{p}) \int \frac{d\bar{p}}{(\bar{p}^2 + \hat{p}^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Analisando a eq. (4.14) veremos que os quatro últimos termos não contribuem. O segundo e o quinto termos são identicamente nulos devido a eq. (3.30). O terceiro termo é igual a zero devido a eq. (4.13) e o quarto termo é nulo devido argumentos de simetria.

Para calcular o único termo contribuinte vamos utilizar o método de regularização dimensional. Assim

$$W_1(\Gamma) = - \frac{N}{(2\pi)^\eta} \int d^2\bar{p} |f(\bar{p})|^2 \int \frac{d^{\eta-2}\bar{p}}{\bar{p}^2 + \hat{p}^2 + m^2} \tag{4.15}$$

e efetuando a integração em  $\bar{p}$

$$W_1(\Gamma) = - \frac{N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)}{2^\eta \pi^{(\eta+2)/2}} \int d^2\bar{p} (\bar{p}^2 + m^2)^{\frac{\eta-4}{2}} |f(\bar{p})|^2 \tag{4.16}$$

Queremos aqui ressaltar que poderíamos ter utilizado o método de regularização dimensional desde a eq. (4.12). Neste caso, como o termo de massa é introduzido com a ajuda do tensor  $\epsilon_{\eta\beta\xi}$ , uma generalização do mesmo teria que ser feita para um espaço de dimensão arbitrária. Esta generalização já se en

contra na literatura [53] e no limite em que o número de dimensões é tomado igual a três, o resultado obtido tem que ser compatível com a eq. (4.13). Embora menos elegante o método escolhido é mais simples.

Para o contorno de um círculo, como já foi visto

$$\left| f_{\text{cir}}(p) \right|^2 = 4\pi^2 R^2 J_1^2(pR)$$

onde  $R$  é o raio do círculo. Substituindo este resultado na eq. (4.16) e efetuando a integração angular

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{-N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)R^2}{2^{\eta-3}\pi^{(\eta-4)/2}} \int_0^\infty dp p (p^2+m^2)^{\frac{\eta-4}{2}} J_1^2(pR) \quad (4.17)$$

Passando das funções de Bessel para as funções de Meijer (Bateman: pg. 220, f.56) [54]

$$J_\nu^2(x) = \pi^{-1/2} G_{13}^{11}(x^2 \mid \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, 0, \nu \end{matrix}) \quad (4.18)$$

a eq. (4.17) toma a seguinte forma

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{-N\Gamma\left(\frac{4-\eta}{2}\right)R^2}{2^{\eta-2}\pi^{(\eta-3)/2}} \int_0^\infty dx (x+m^2)^{(\eta-4)/2} G_{13}^{11}(R^2 x \mid \begin{matrix} 1/2 \\ 1, 0, -1 \end{matrix})$$

e da tabela de integrais G.R. (pg. 898 f.5)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\xi-1} (x+\beta)^{-\sigma} G_{p\ q}^{m\ n}(\alpha x \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}) dx = \\ & = \frac{\beta^{\xi-\sigma}}{\Gamma(\sigma)} G_{p+1\ q+1}^{m+1\ n+1} \left( \alpha\beta \mid \begin{matrix} 1-\xi, a_1, \dots, a_p \\ \sigma-\xi, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

de onde segue-se que

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{-N m^{\eta-2} R^2}{2^{\eta-2} \pi^{(\eta-3)/2}} G_{2 \quad 2}^{2 \quad 2} \left( m^2 R^2 \mid \begin{matrix} 0, 1/2 \\ (2-\eta)/2, 1, 0, -1 \end{matrix} \right)$$

e da fórmula de redução das funções de Meijer (Bateman: pg. 209)

$$G_{2 \quad 2}^{2 \quad 2} \left( m^2 R^2 \mid \begin{matrix} 0, 1/2 \\ (2-\eta)/2, 1, 0, -1 \end{matrix} \right) = G_{1 \quad 3}^{2 \quad 1} \left( m^2 R^2 \mid \begin{matrix} 1/2 \\ (2-\eta)/2, 1, -1 \end{matrix} \right) \quad (4.21)$$

e da seguinte propriedade

$$x^\sigma G_{p \quad q}^m \left( x \mid \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix} \right) = G_{p \quad q}^m \left( x \mid \begin{matrix} a_r + \sigma \\ b_s + \sigma \end{matrix} \right)$$

teremos finalmente que

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{-Nm^{\eta-4}}{2^{\eta/2} \pi^{(\eta-3)/2}} G_{1 \quad 3}^{2 \quad 1} \left( m^2 R^2 \mid \begin{matrix} 3/2 \\ (4-\eta)/2, 2, 0 \end{matrix} \right) \quad (4.23)$$

Para  $\eta=3$

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = -\frac{N}{2m} G_{1 \quad 3}^{2 \quad 1} \left( m^2 R^2 \mid \begin{matrix} 3/2 \\ 1/2, 2, 0 \end{matrix} \right) \quad (4.24)$$

É de nosso interesse, agora, calcular o comportamento assintótico do loop de Wilson nas teorias com massa topológica, em três dimensões. Se quisermos fazê-lo via eq. (4.24) teremos que por a função de Meijer  $G_{13}^{21} (m^2 R^2 \mid_{3/2} \mid_{1/2, 2, 0})$  na sua representação integral (Bateman: pg. 207) e então veremos que uma divergência aparece no numerador do integrando dificultando o tratamento matemático. Esta divergência está associada ao coeficiente 1/2, termo este que aparece quando fazemos  $\eta=3$  na eq. (4.23). Desta forma, o tratamento alternativo consiste em calcular o limite assintótico de

$$G_{13}^{21} (m^2 R^2 \mid_{3/2} \mid_{(4-\eta)/2, 2, 0})$$

e depois tomar  $\eta = 3$ . Para  $|x| < 1$

$$G_{pq}^{mn} \left( x \middle| \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix} \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} x^{b_h} \cdot$$

$$\left[ \begin{matrix} {}_p F_{q-1} \left[ 1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p ; 1 + b_h - b_1, \dots, *, \dots, 1 + b_h - b_q ; (-1)^{p-m-n} x \right] \end{matrix} \right] \quad (4.25)$$

Assim, é possível mostrar que para  $m^2 R^2 < 1$  em  $\eta = 3$

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{N\Gamma(o)R}{2} + \frac{N2m^2R^3}{3} - \frac{N\pi m^3 R^4}{6} + \dots \quad (4.26)$$

No limite em que  $|x| \rightarrow \infty$  e  $|\arg x| < (m+n-p/2 - q/2)\pi$  [55]

$$G_{pq}^{m\eta}(x) = \sum_{t=1}^n e^{i(m+n-q-1)\pi a_t} \Delta_q^{m,n}(t) E_{p,q}(x e^{-i(m+n-q-1)\pi} \mid \mid a_t) \quad (4.27)$$

onde

$$\Delta_q^{m,n}(t) = (-1)^{m+n-q-1} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(a_t - a_j) \Gamma(1 + a_j - a_t)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(a_t - b_j) \Gamma(1 + b_j - a_t)} \quad (4.28)$$

$$E_{p,q}(x \mid \mid a_t) = x^{(a_t-1)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-x)^{-h} \prod_{j=1}^q \Gamma(1 + b_j - a_t + h)}{h! \prod_{j=1}^p \Gamma(1 + a_j - a_t - h)} \quad (4.29)$$

Substituindo os coeficientes adequados na eq. (4.27) pode-se mostrar que quando  $m^2 R^2 \rightarrow \infty$  e  $\eta=3$  então

$$W_1(\Gamma_{\text{cir}}) = \frac{-N\Gamma(0)R}{2} - N\frac{3}{8m^2 R} + N\frac{15}{32m^4 R^3} + \dots \quad (4.30)$$

Das eqs. (4.26) e (4.30) é possível ver que, em ambos os casos ao tomarmos a parte finita, a contribuição oriunda da teoria sem massa é dominante com relação às contribuições resultantes da adição do termo de massa topológica ao lagrangiano original não massivo.

## CAPÍTULO V

### Discussão e Conclusões

No primeiro capítulo uma breve introdução ao loop de Wilson (LW) foi apresentada. No segundo capítulo foram derivados alguns dos resultados, já consagrados, relativos ao LW no contínuo.

Nos capítulos terceiro e quatro os resultados originais obtidos são os seguintes:

i) mostramos que a divergência, de natureza ultravioleta, presente na expansão perturbativa, em segunda ordem, do LW em 3D pode ser tratada considerando que a parte finita possui significado físico e que o polo tem sua origem na auto-indutância de um anel infinitesimalmente fino do eletromagnetismo. Como exemplo, aplicamos a receita no caso do potencial entre cargas estáticas do eletromagnetismo 3D, e mostramos a coerência dos resultados obtidos.

ii) efetuamos o cálculo perturbativos do LW, em quarta ordem, gráfico por gráfico, e extraímos o resíduo no polo ( $\eta = 4$ ). Foi utilizado o método de regularização dimensional em que o número de dimensões do espaço é considerada contínuo: o método mantém a invariância de gauge, exclui automaticamente as divergências lineares e apresenta as divergências logarítmicas usuais do espaço euclidiano 4D como polos das funções  $\Gamma$  de Euler. É mostrado como o resíduo no polo, em 4D, da soma das contribuições dos gráficos presentes na quarta ordem contribui para a renormalização da carga. A carga renormalizada é calculada, nesta ordem, e o resultado obtido coincide com o obtido por Politzer pelo método do cut-off em teoria de perturbação usual. Devi

do a ausência de pernas externas o LW facilita, em muito, o cálculo da renormalização da carga pois, neste caso, as divergências infravermelhas não são presentes. Fica claro também que, fora de  $\eta = 4$ , os diagramas não podem ser interpretados como renormalização de carga.

iii) Mostramos que, em 3D, a expansão perturbativa do LW em quarta ordem é livre de quaisquer divergências. Nesta ponto, queremos ressaltar que as contribuições dos gráficos 5(d,e,f) tal como foram calculadas são válidas em 3D. No entanto, a contribuição da parte não-abeliana do gráfico 5(c) tal como foi calculada para 4D não é válida em 3D. Neste caso, a substituição do contorno por um segmento de reta, com a finalidade de extrair a parte divergente do diagrama, não é possível, pois ao contrário do que acontece em 4D, o resíduo no polo em 3D depende da curvatura do contorno <sup>[56]</sup>. Mesmo assim, independente deste fato, a estrutura aparentemente divergente tem a seguinte forma

$$I(\eta) = \Gamma(\eta - 3) \oint dx_\alpha dy_\alpha |x-y|^{6-2\eta}$$

para a qual foi mostrado, no caso particular de um círculo, o mecanismo que elimina o polo em  $\eta-3$ , o qual pode ser generalizado para um contorno arbitrário qualquer. O fato de que o LW em 3D, até a quarta ordem, não apresenta divergências infravermelhas foi mostrado por Appelquist e Pisarski já em 1980 usando a técnica de expansão em produto de operadores (OPE). Mostramos agora, que a divergência ultravioleta, presente na segunda ordem, não aparece em quarta ordem.

iiii) Calculamos a expressão exata do LW, em segunda ordem, nas teorias de gauge 3D com massa topológica, bem como o comportamento assintótico do mesmo para pequenas e grandes distâncias. Mostramos que, em ambos os casos, a

expressão do LW das teorias de gauge 3D usuais (sem massa topológica) é o termo dominante da série que governa o comportamento assintótico.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- 1 - S. L. Glashow: Nucl. Phys. 22(1961)579  
 S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 19(1967)264  
 A. Salam: Elementary Particle Physics, ed. N. Svartholm(Stockholm-1967),  
 367
  
- 2 - Maurice Jacob, Peter Landshoff: The Inner Structure of the Proton,  
 Scientif Americam (1979)66  
 L. Van Hove, M. Jacob: Phys. Rep. 62(1980)
  
- 3 - M. Gell-Mann: Phys. Lett. 8(1964)214  
 G. Zweig: CERN Reports TH 410, TH 412 (1964)  
 M. Gell-Mann, Y. Nee'mann: The Eightfold way (W. A. Benjamim, Inc.  
 Publishers, New York, (1964))
  
- 4 - H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler: Phys. Lett. 47 B(1973)365  
 S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 31(1973)494  
 S. Weinberg: Phys. Rev. D 8 (1973)4482  
 D. J. Gross, F. Wilczek: Phys. Rev. D 8 (1973) 3633
  
- 5 - C. N. Yang, R. L. Mills: Phys. Rev. 96 (1954) 191  
 Um excelente livro sobre o tema é: Gauge Fields Theories: An Introduction  
 J. Leite Lopes (Pergamon Press) 1981
  
- 6 - G. 't Hooft : Nucl. Phys. B 33 (1971) 173  
 L. S. Fadeev, U. N. Popov: Phys. Lett. 25 B (1967) 29
  
- 7 - W. Marciano, H. Pagels: Phys. Rep. 36 (1978) 137

- 8 - R. Omnès: Introduction to Particle Physics (London: Wiley-Interscience, 1971)
- 9 - M. S. Marinov: Sov. Phys. Usp. 20 (1977) 179
- 10 - G. Veneziano: N. Cimento A 57 (1968) 190  
G. Veneziano: Phys. Rep. C 9 (1974) 201
- 11 - H. Harari: Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 562  
J. Rosner: Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 689
- 12 - Y. Nambu: Lecture at the Copenhagen Symposium, 1970
- 13 - P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn: Nucl. Phys. B 56 (1973) 109
- 14 - Y. Iwasaki, K. Kikkawa: Phys. Rev. D 8 (1973) 440
- 15 - B. Durhuus: Nordita Preprint 82/36  
A. M. Polyakov: Phys. Lett. 103 B (1981) 207  
A. M. Polyakov: Phys. Lett. 103 B (1981) 211
- 16 - J. L. Gervais, A. Neveu: Phys. Lett. 80 B (1979) 255  
Y. Nambu: Phys. Lett. 80 B (1979) 372  
A. M. Polyakov: Phys. Lett. 82 B (1979) 247  
M. A. Virasoro: Phys. Lett. 82 B (1979) 436
- 17 - C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 445
- 18 - T. T. Wu, C. N. Yang: Phys. Rev. D 12 (1975) 3845
- 19 - K. Wilson: Phys. Rev. D 10 (1974) 2445
- 20 - Y. M. Makeenko, A. A. Migdal : Phys. Lett. 88 B (1979) 135

- A. A. Migdal : Ann Phys. 126 (1980) 279
- 21 - Y. M. Makeenko, A. A. Migdal : Nucl. Phys. B 188 (1981) 269
- 22 - R. A. Brandt, F. Neri, M. Sato: Phys. Rev. D 24 (1981) 879  
R. A. Brandt, F. Neri, M. Sato: Phys. Rev. D 26 (1982) 3611
- 23 - S. Mandelstam: Ann. Phys. 19 (1962) 1
- 24 - S. Mandelstam: Phys. Rev. 175 (1968) 1580
- 25 - D. Bohm, Y. Aharonov: Phys. Rev. 115 (1959) 485
- 26 - R. G. Chambers: Phys. Rev. Lett. 5 (1960) 3
- 27 - R. Kerner: Ann: Inst. H. Poincaré A 9 (1968) 143  
R. Kerner: C. R. Acad. Sci. Paris t 270  
A. Trautmann: Rep. Math. Phys. 1 (1970) 29  
E. Lubkin - Ann. Phys. 23 (1963) 233
- 28 - E. Corrigan, B. Hasslacher: Phys. Lett. 81 B (1979) 181
- 29 - J. B. Kogut: Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 775
- 30 - J. B. Kogut: Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659
- 31 - F. Wegner: J. Math. Phys. 12 (1971) 2259
- 32 - S. Elitzur: Phys. Rev. D 12 (1975) 3978
- 33 - G. 't Hooft: Nucl. Phys. B 138 (1978) 1
- 34 - C. G. Bollini, J. J. Giambiagi: N. Cimento 12 B (1972) 20  
C. G. Bollini, J. J. Giambiagi: Phys. Lett. 40 B (1972) 566  
G. M. Cicuta, E. Montaldi: Lett. N. Cimento 4 (1972) 392  
G. 't Hooft, M. Veltman : Nucl. Phys. B 44 (1972) 189

- 35 - A. M. Polyakov: Nucl. Phys. B 164 (1980) 171
- 36 - V. S. Dotsenko, S. N. Vergeles: Nucl. Phys. B 169 (1980) 527
- 37 - M. Abud, C. G. Bollini, J. J. Giambiagi: Nucl. Phys. B 204 (1982) 109
- 38 - I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Table of Integrals (Academic Press, 1965)
- 39 - L. Landau, E. Lifchitz: Electrodynamique des Milieux Continus (MIR), Moscow, 1969
- 40 - I. M. Guelfand, G. E. Shilov: Les Distributions (Dunod), Paris, 1962
- 41 - K. G. Wilson, J. B. Kogut: Phys. Rep. 14 C (1974) 129
- 42 - C. Callan: Phys. Rev. D 2 (1970) 1541  
K. Symanzik: Comm. Math. Phys. 18 (1970) 227
- 43 - H. B. Nielsen, J. Randrup, J. von Boehm: Nordita Lectures Notes 79/5
- 44 - D. Gross, F. Wilczek: Phys. Rev. D 9 (1974) 980  
H. D. Politzer: Phys. Rev. D 9 (1974) 2174  
H. D. Politzer: Phys. Rep. 14 C (1974) 129
- 45 - R. P. Feynman: Nucl. Phys. B 188 (1981) 479
- 46 - D. Gross, R. Pisarski, L. Yaffe: Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 43
- 47 - T. Appelquist, R. Pisarski: Phys. Rev. D 23(1981) 2291
- 48 - L. Dolan, R. Jackiw: Phys. Rev. D 9 (1974) 3320
- 49 - R. Jackiw, S. Templeton: Phys. Rev. D 23 (1981) 2291
- 50 - E. I. Guendelman, Z. M. Radulovic: Phys. Rev. D 27 (1983) 357

- 51 - E. I. Guendelman, Z. M. Radulovic: MIT Preprint CTP # 1124-1983
- 52 - S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton: Ann Phys. 140 (1982) 372
- 53 - M. A. Rego Monteiro: Preprint CBPF NF-042/83
- 54 - Bateman Project vol. I (McGraw-Hill) 1953
- 55 - C. S. Meijer: Proc. Roy. Acad. Nederl. 44 (1946) 233
- 56 - C. G. Bollini, J. J. Giambiagi: Comunicação Pessoal

# “Cálculos perturbativos com loop de Wilson”

Luiz Boanerges Peixoto Junior

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Carlos Guido Bollini – Presidente/CBPF

Ivan Ventura – IFT/USP

Rajat Chanda – UFRJ

José Leite Lopes – CBPF

Takeshi Kodama – CBPF

Suplente: Jaime Tiomno – CBPF