

CLÁUDIA POMBO

ANÁLISE DE GEOMETRIAS CONFORMALMENTE PLANAS
NO FORMALISMO DAS EQUAÇÕES QUASE-MAXWELLIANAS

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, RJ

-1984-

Se existe algum sentido em se dedicar uma tese de Mestrado a uma pessoa, eu a ofereço à que se chama Alexander W. Smith, com amor.

Me parece que uma tese de mestrado, como qualquer outro trabalho feito por um ser humano, não deveria levar uma assinatura.

Especificamente uma tese, que não tem começo e nem fim, não pode ser possuída por alguém e nem é feita individualmente. É um pequeno elo de uma corrente de idéias que só tem sentido se de alguma forma puder ser útil para todas as pessoas.

O que nos faz assiná-la, é a obtenção de um título, que na nossa sociedade representa um valor. Pode ser o direito de se falar sobre algum assunto, ou de se ganhar determinada quantia de dinheiro, ou de se exercer alguma atividade.

Isso tudo me faz pensar sobre o sentido de fazer agradecimentos, como é o costume.

O que devo dizer, é que no decorrer desse último ano em que me dediquei a esse trabalho, algumas pessoas tiveram sobre ele uma participação mais direta:

- José Martins Salim, meu Orientador;
- Prof. Mário Novello, sugeriu o tema da tese;
- Zilka, Audízio, Moema, Marcos e David, meus pais, irmãos e filho, me ajudaram, incentivaram e se esforçaram para que eu tivesse tempo de estudar;
- Marilene, secretária do DRP, que esteve sempre me dando forças com seu bom humor;
- Helena, além de datilografar essa tese com toda a boa vontade ainda ofereceu-me conselhos na sua organização;
- meus amigos Renato P. dos Santos, Nelson, Abílio, Nami, Djalma, Renato Portugal, Romero, Bartolomeu, Maurício, João, Caruso, D'Olival, Batista, Fernando, Alex, entre outros, além de participarem conferindo cálculos muito cansativos, discutindo detalhes teóricos, aconselhando a redação, me fizeram sentir uma espécie de conforto ao passar por uma época de muito desânimo e descrença na finalidade desse trabalho. Conforto esse, que com toda certeza faz com que meu nome esteja lá na primeira página.

S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTO	iii
RESUMO	iv
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - EQUAÇÕES QUASE-MAXWELLIANAS	3
1.1 - Formalismo Matemático	3
1.2 - Gravitação	17
<u>CAPÍTULO II</u> - GEOMETRIAS CONFORMALMENTE PLANAS	24
<u>CAPÍTULO III</u> - APLICAÇÃO DO FORMALISMO Q.M. NA COSMOLOGIA	32
<u>CONCLUSÃO</u>	49
<u>APÊNDICE A</u> - CÁLCULOS DOS TENSORES DE WEYL	50
<u>APÊNDICE B</u> - EQUIVALÊNCIA DO FORMALISMO QUASE-MAXWELLIANO COM A TEORIA DE EINSTEIN	56
BIBLIOGRAFIA	62

RESUMO

Mostra-se neste trabalho, que as equações quase-Maxwellianas da gravitação são completamente equivalentes às equações de Einstein, quando aplicadas a geometrias conformalmente planas, para observadores cujas linhas de Universo são ortogonais à hipersuperfície espacial dessas geometrias, em todo o espaço-tempo.

Com esse resultado, obtém-se uma solução para o sistema de equações $\pi_{\mu\nu} = 0$, no formalismo quase-Maxwelliano, e estuda-se alguns casos particulares dessa solução que possam representar modelos cosmológicos.

INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral de Einstein, usada neste trabalho como teoria da gravitação, é uma teoria geométrico-dinâmica que a partir da distribuição de matéria-energia em uma hipersuperfície espacialmente orientada determina as propriedades geométricas do espaço-tempo ou vice-versa.

No caso de geometrias conformalmente planas, temos o tensor de Weyl, $W_{\alpha\beta\gamma\rho}$, nulo e o formalismo das equações quase-Maxwellianas é indicado, devido ao número de equações ficar bastante reduzido, já que os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ definidos a partir de $W_{\alpha\beta\gamma\rho}$ são também nulos.

No primeiro capítulo desse trabalho, mostra-se como se obtém esse conjunto de equações a partir de uma congruência de curvas definida sobre a variedade.

No segundo, usa-se uma métrica conformalmente plana geral e mostra-se que com a escolha do campo de observadores ortogonais à hipersuperfície espacial $t = \text{cte}$, os tensores rotação e deformação se anulam e chega-se às equações quase-Maxwellianas para essa situação.

No terceiro capítulo obtém-se uma solução para o sistema de equações $\pi_{\mu\nu} = 0$, mostra-se que essas soluções têm como casos particulares alguns modelos cosmológicos conhecidos e estuda-se mais dois casos que podem representar modelos cosmológicos com fluxo de energia.

No Apêndice A, mostra-se que a métrica geral usada no Capítulo I é conformalmente plana, calculando-se para isso todas as componentes do tensor de Weyl. Os cálculos desse apêndice foram feitos usando-se computação algébrica através do programa REDUCE-2.

No Apêndice B mostra-se a equivalência entre as equações quase-Maxwellianas e as equações de Einstein para qualquer superfície $t = \text{cte}$.

CAPÍTULO I

EQUAÇÕES QUASE-MAXWELLIANAS

1.1 - FORMALISMO MATEMÁTICO

Seja uma variedade Riemanniana quadri-dimensional M_4 , com uma métrica de assinatura $(+---)$ e suponhamos a existência de uma congruência de curvas (1) nessa variedade (Fig. 1).

Definindo um sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ que possa descrevê-la numa dada região, as curvas serão descritas como $x^\alpha(s, t)$ onde s é um parâmetro que especifica a curva e t o parâmetro sobre a curva.

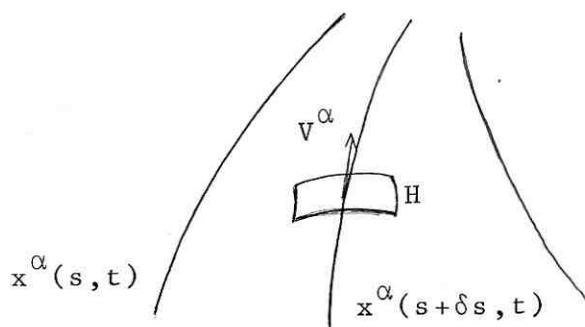


Figura 1

Sendo M_4 uma variedade diferenciável, temos um campo vetorial, definido como $V^\alpha = dx^\alpha/dt$ para cada ponto das curvas.

Impomos as seguintes condições sobre \vec{V} :

$$V^\alpha V_\alpha > 0 \tag{1.1.1}$$

e

$$V_{\alpha} V_{\beta} g^{\alpha\beta} = 1 \quad (1.1.2)$$

Seja $g_{\alpha\beta}$ a métrica definida sobre M_4 .

A partir de $g_{\alpha\beta}$ e V_{α} , podemos construir o tensor

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_{\alpha} V_{\beta} \quad (1.1.3)$$

$h_{\alpha\beta}$ tem as seguintes propriedades:

$$a) \quad h_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\nu} = h_{\alpha\nu}$$

$$b) \quad h_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0$$

$$c) \quad h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$$

como pode se verificar a partir de (1.1.3).

Esse objeto é chamado projetor sobre H , onde H é o tri-espaço dos vetores perpendiculares a \vec{V} , em cada ponto.

O efeito do projetor, é separar em cada ponto, o espaço, em duas partes: um tri-espaço H com uma métrica $h_{\alpha\beta}$ e uma direção definida por \vec{V} .

No caso em que o rotacional do campo de vetores V se anula ⁽²⁾, os sub-espaços H se mesclam formando uma hipersuperfície em M_4 , cuja métrica é $h_{\alpha\beta}$.

Podemos escrever um elemento de linha em M_4 , como

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} + (V_{\mu} dx^{\mu})^2$$

ou

$$dS^2 = dl^2 + dt^2$$

$$\text{Seja } V^{\alpha}{}_{//\beta} = V^{\alpha}{}_{/\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma}$$

onde // significa derivada covariante

e / significa derivada simples.

Vamos decompor o tensor $V_{\alpha//\beta}$ nas duas regiões definidas por H e \vec{V} .

$$V_{\alpha//\beta} = V_{\alpha\beta} + \dot{V}_{\alpha} V_{\beta} \quad (1.1.4)$$

onde

$$V_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} V_{\mu//\nu} \quad (1.1.5)$$

e

$$\dot{V}_{\alpha} V_{\beta} = V_{\alpha//\gamma} V^{\gamma} V_{\beta} = a_{\alpha} V_{\beta} \quad (1.1.6)$$

Vemos que $V_{\alpha\beta}$ é a parte de $V_{\alpha//\beta}$ projetado em H e $\dot{V}_{\alpha} V_{\beta}$ é a parte de $V_{\alpha//\beta}$ projetado paralelamente a V. Fez-se:

$$a_{\alpha} \equiv \dot{V}_{\alpha} = V_{\alpha//\beta} V^{\beta} \quad (1.1.6')$$

Vamos decompor o tensor $V_{\alpha\beta}$ em suas partes simétrica e anti-simétrica, a seguir:

$$V_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad (1.1.7)$$

onde

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\rho} h_{\beta}^{\gamma} (V_{\rho//\gamma} + V_{\gamma//\rho}) \quad (1.1.8)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\rho} h_{\beta}^{\gamma} (V_{\rho//\gamma} - V_{\gamma//\rho}) \quad (1.1.9)$$

O tensor simétrico $\theta_{\alpha\beta}$ pode ser decomposto em:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (1.1.10)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ é a parte simétrica sem traço, e θ é o traço de $\theta_{\alpha\beta}$.

De (1.1.7), temos

$$V_{\alpha}^{\alpha} = \theta_{\alpha}^{\alpha} = V_{//\alpha}^{\alpha} - \dot{V}^{\alpha} V_{\alpha} \quad (1.1.11)$$

Mostra-se que $\dot{V}^{\alpha} V_{\alpha} = 0$,

então $\theta = V_{//\alpha}^{\alpha}$.

Os objetos a_{α} , $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ definidos assim, pertencem a H, logo:

$$\sigma_{\alpha\beta} V^{\alpha} = \omega_{\alpha\beta} V^{\beta} = a_{\alpha} V^{\alpha} = 0 \quad (1.1.12)$$

Substituindo-se (1.1.10) em (1.1.7), temos

$$V_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (1.1.13)$$

e substituindo-se (1.1.13) em (1.1.4), obtêm-se

$$V_{\alpha//\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta + a_{\alpha} V_{\beta} \quad (1.1.13')$$

temos que

$$a_{\alpha} = V_{\alpha//\beta} V^{\beta} = \frac{DV_{\alpha}}{Dt} \quad (1.1.14)$$

onde $\frac{D}{Dt}$ representa o operador derivada covariante na direção de \vec{V} .

As quantidades a_{α} , $\sigma_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$ e θ , são chamadas ⁽³⁾ respectivamente de aceleração, deformação, rotação e expansão da geometria.

EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS CINEMÁTICOS

A partir dessas definições, vamos procurar equações de evolução para os parâmetros cinemáticos, ao longo das curvas.

Temos que:

$$V_{\alpha//\beta//\gamma} - V_{\alpha//\gamma//\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon \quad (1.1.15)$$

Projetando em V^γ

$$(V_{\alpha//\beta})_{//\gamma} V^\gamma - V_{\alpha//\gamma//\beta} V^\gamma = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon V^\gamma$$

Então,

$$(V_{\alpha//\beta})^\cdot - V_{\alpha//\gamma//\beta} V^\gamma = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon V^\gamma$$

Usando:

$$\begin{aligned} V_{\alpha//\gamma//\beta} V^\gamma &= (V_{\alpha//\gamma} V^\gamma)_{//\beta} - V_{\alpha//\gamma} V^\gamma_{//\beta} = \\ &= a_{\alpha//\beta} - V_{\alpha//\gamma} V^\gamma_{//\beta} \end{aligned}$$

reescrevemos

$$(V_{\alpha//\beta})^\cdot - a_{\alpha//\beta} + V_{\alpha//\gamma} V^\gamma_{//\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon V^\gamma$$

Projetando essa relação sobre H:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (V_{\mu//\nu})^\cdot - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu//\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu V_{\mu//\gamma} V^\gamma_{//\nu} &= \\ &= R_{\mu\epsilon\nu\gamma} V^\epsilon V^\gamma h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \end{aligned}$$

Usando (1.1.4) no lado esquerdo da expressão acima,

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\dot{V}_{\mu\nu} + (a_\mu V_\nu)^\cdot) - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu//\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu [(V_{\mu\gamma} + a_\mu V_\gamma) \\ (V^\gamma_\nu + a^\gamma V_\nu)] &= \\ &= h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{V}_{\mu\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{a}_\mu V_\nu + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_\mu \dot{V}_\nu - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu//\nu} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} [V_{\mu\gamma} V^{\gamma}_{\nu} + V_{\mu\gamma} a^{\gamma} V_{\nu} + a_{\mu} V_{\gamma} V^{\gamma}_{\nu} + a_{\mu} a^{\gamma} V_{\gamma} V_{\nu}] = \\
 & = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{V}_{\mu\nu} + a_{\alpha} a_{\beta} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu//\nu} + V_{\alpha\gamma} V^{\gamma}_{\beta} \quad .
 \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão, chegamos a:

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu\nu} + a_{\alpha} a_{\beta} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu//\nu} + V_{\alpha\gamma} V^{\gamma}_{\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^{\epsilon} V^{\gamma} \quad (1.1.16)$$

Dessa expressão, tiraremos as equações de evolução para os parâmetros cinemáticos.

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA A EXPANSÃO

Contraindo (1.1.16) nos índices α e β , chegamos a

$$h^{\mu\nu} \dot{V}_{\mu\nu} + a_{\alpha} a^{\alpha} - h^{\mu\nu} a_{\mu//\nu} + V_{\alpha\gamma} V^{\gamma\alpha} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \quad (1.1.17)$$

onde

$$h^{\mu\nu} \dot{V}_{\mu\nu} = (h^{\mu\nu} V_{\mu\nu})^{\cdot} - \dot{h}^{\mu\nu} V_{\mu\nu} = \dot{V}^{\mu}_{\mu} + (\dot{V}^{\mu} V^{\nu} + V^{\mu} \dot{V}^{\nu}) V_{\mu\nu} = \dot{V}^{\mu}_{\mu}$$

$$\dot{V}^{\mu}_{\mu} = \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\mu} V^{\mu\alpha} & = \left(\frac{\theta}{3} h_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu} \right) \left(\frac{\theta}{3} h^{\mu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} + \omega^{\mu\alpha} \right) = \\
 & = \frac{\theta^2}{3} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu\alpha} + \sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu\alpha} + \omega_{\alpha\mu} \sigma^{\mu\alpha} + \omega_{\alpha\mu} \omega^{\mu\alpha} = \\
 & = \frac{\theta^2}{3} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu\alpha} + \omega_{\alpha\mu} \omega^{\mu\alpha}
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad (1.1.18)$$

e

$$\omega^2 \equiv + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \quad (1.1.19)$$

reescrevemos

$$V_{\alpha\mu} V^{\alpha\mu} = \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 .$$

Calcula-se também:

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} a_{\mu//\nu} &= g^{\mu\nu} a_{\mu//\nu} - V^\mu V^\nu a_{\mu//\nu} = a^{\nu}_{//\nu} - \dot{a}_\mu V^\mu = \\ &= a^{\nu}_{//\nu} - (a_\mu V^\mu)^\cdot + a_\mu \dot{V}^\mu = a^{\nu}_{//\nu} + a_\mu a^\mu \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (1.1.17), obtemos a equação de evolução para θ .

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^\mu_{//\mu} = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu . \quad (1.1.20)$$

Essa equação é conhecida como equação de Raychaudhuri.

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA $\sigma_{\mu\nu}$

Simetrizando (1.1.16) e substituindo (1.1.13), temos:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{\dot{\theta}}{3} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu h_{\mu\nu} + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu//\nu} + a_{\nu//\mu}) + \\ + \frac{1}{2} V_{\alpha\mu} V^\mu_\beta + \frac{1}{2} V_{\beta\mu} V^\mu_\alpha = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^\epsilon V^\nu \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Temos que

$$V_{\alpha\mu} V^\mu_\beta + V_{\beta\mu} V^\mu_\alpha = \frac{2}{9} \theta^2 h_{\alpha\beta} + \frac{4}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu_\beta + 2\omega_{\alpha\mu} \omega^\mu_\beta .$$

Define-se

$$\begin{aligned}
& \cdot \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \\
& = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \\
& = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} + \\
& + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \\
& = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \\
& = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}
\end{aligned}$$

Calcule-se

(1.1.25)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$$

ou

(1.1.24)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$$

De (1.1.22) sai que:

$$\begin{aligned}
& \cdot \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \\
& = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} =
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$$

Calcule-se a expressão:

(1.1.23)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$$

onde

(1.1.22)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$$

Substituem-se esses resultados e a eq. (1.1.20) em (1.1.21) e chega-se à equação de evolução para $\sigma_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} (\omega^2 + \sigma^2) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma_{\beta}^{\mu} - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + \\ + a_{\alpha} a_{\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a_{\parallel\mu}^{\mu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu\parallel\nu} + a_{\nu\parallel\mu}) = \\ = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^{\epsilon} V^{\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} h_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA $\omega_{\mu\nu}$

Anti-simetrizando (1.1.16), obtêm-se

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu\parallel\nu} - a_{\nu\parallel\mu}) + \frac{1}{2} (V_{\alpha\gamma} V^{\gamma}_{\beta} - V_{\beta\gamma} V^{\gamma}_{\alpha}) = 0 \quad (1.1.27)$$

Calcula-se

$$V_{\alpha\mu} V^{\mu}_{\beta} - V_{\beta\mu} V^{\mu}_{\alpha} = \frac{4}{3} \omega_{\alpha\beta} \theta + 2\sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta} - 2\sigma_{\beta\mu} \omega^{\mu}_{\alpha} \quad .$$

Substituindo em (1.1.27), obtêm-se a equação de evolução para $\omega_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu\parallel\nu} - a_{\nu\parallel\mu}) + \frac{2}{3} \omega_{\alpha\beta} \theta + \\ + \sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta} - \sigma_{\beta\mu} \omega^{\mu}_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Temos também três equações de vínculo entre os parâmetros cinemáticos.

Primeira Equação de Vínculo:

A partir de

$$V^{\alpha}{}_{//\beta//\gamma} - V^{\alpha}{}_{//\gamma//\beta} = R^{\alpha}{}_{\varepsilon\beta\gamma} V^{\varepsilon}$$

contraí-se α e β

$$V^{\alpha}{}_{//\alpha//\gamma} - V^{\alpha}{}_{//\gamma//\alpha} = R_{\varepsilon\gamma} V^{\varepsilon}$$

Projetando sobre H:

$$h^{\gamma}{}_{\lambda} (V^{\alpha}{}_{//\alpha})_{//\gamma} - h^{\gamma}{}_{\lambda} V^{\alpha}{}_{//\gamma//\alpha} = R_{\varepsilon\gamma} V^{\varepsilon} h^{\gamma}{}_{\lambda}$$

Usando-se (1.1.13), tem-se

$$\frac{2}{3} h^{\gamma}{}_{\lambda} \theta_{/\gamma} - (\sigma^{\alpha}{}_{\gamma} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma})_{//\alpha} h^{\gamma}{}_{\lambda} - a^{\alpha} (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = R_{\mu\alpha} V^{\mu} h^{\alpha}{}_{\lambda} \quad (1.1.29)$$

Segunda Equação de Vínculo:

Somando as expressões:

$$V_{\alpha//\beta//\gamma} - V_{\alpha//\gamma//\beta} = R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu}$$

$$V_{\beta//\gamma//\alpha} - V_{\beta//\alpha//\gamma} = R_{\beta\mu\gamma\alpha} V^{\mu}$$

$$V_{\gamma//\alpha//\beta} - V_{\gamma//\beta//\alpha} = R_{\gamma\mu\alpha\beta} V^{\mu}$$

e usando a relação de ciclicidade do tensor de Riemann

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$$

obtemos

$$V_{\alpha//\beta//\gamma} - V_{\alpha//\gamma//\beta} + V_{\beta//\gamma//\alpha} - V_{\beta//\alpha//\gamma} + V_{\gamma//\alpha//\beta} - V_{\gamma//\beta//\alpha} = 0$$

Rearranjando os termos:

$$(V_{\alpha//\beta} - V_{\beta//\alpha})//\gamma + (V_{\beta//\gamma} - V_{\gamma//\beta})//\alpha + (V_{\gamma//\alpha} - V_{\alpha//\gamma})//\beta = 0$$

Usando (1.1.13'), chega-se a:

$$(a_{\alpha}V_{\beta} - a_{\beta}V_{\alpha} + 2\omega_{\alpha\beta})//\gamma + (a_{\beta}V_{\gamma} - a_{\gamma}V_{\beta} + 2\omega_{\gamma\beta})//\alpha + \\ + (a_{\gamma}V_{\alpha} - a_{\alpha}V_{\gamma} + 2\omega_{\alpha\gamma})//\beta = 0 \quad ,$$

ou

$$(a_{\alpha}V_{\beta} - a_{\beta}V_{\alpha} + 2\omega_{\alpha\beta})//\gamma \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0 \\ (\omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda})//\gamma + (a_{\alpha}V_{\beta})//\gamma \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$$

Projetando em V_{λ} .

$$V_{\lambda} (\omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda})//\gamma + a_{\alpha}V_{\beta//\gamma} V_{\lambda} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$$

Usando (1.1.13') e (1.1.22), chega-se a:

$$\omega_{//\alpha}^{\alpha} + 2\omega^{\alpha} a_{\alpha} = 0 \quad (1.1.30)$$

Terceira Equação de Vínculo:

$$V_{\alpha//\beta//\gamma} - V_{\alpha//\gamma//\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^{\epsilon} \\ V_{\alpha//\beta//\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} V_{\epsilon} = \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} V_{\epsilon} \quad . \quad (1.1.31)$$

Substitui-se (1.1.13) e chega-se a:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{//\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} V_{\epsilon} + \frac{1}{3} \theta_{/\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma} V_{\alpha\epsilon} - \frac{2}{3} \theta V_{\alpha} \omega_{\rho} + \\
 + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} = \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu} V_{\epsilon} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} .
 \end{aligned}$$

Projetando sobre H, nos índices α e ρ , e depois simetrizando, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{//\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} V_{\epsilon} h^{\rho} (\theta h^{\alpha}_{\phi}) + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} h^{\alpha} (\theta h^{\rho}_{\phi}) = \\
 = - \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu} V_{\epsilon} \eta^{\gamma\beta\epsilon}_{\rho} h^{\rho} (\theta h^{\alpha}_{\phi})
 \end{aligned}$$

Reescrevendo e trocando a ordem de γ e β :

$$\begin{aligned}
 2\eta_{\epsilon}^{\beta\gamma\nu} V_{\nu} (\sigma_{\alpha\beta//\gamma} + \omega_{\alpha\beta//\gamma}) h^{\epsilon} (\theta h^{\alpha}_{\phi}) - 4a_{\phi} \omega_{\theta} = \\
 = - h^{\epsilon} (\theta h^{\alpha}_{\phi}) V^{\mu} V_{\nu} \eta^{\beta\gamma\nu}_{\epsilon} R_{\alpha\mu\beta\gamma} \quad (1.1.32)
 \end{aligned}$$

Para termos uma descrição completa do comportamento das curvas na variedade, precisamos de equações que expressem a evolução da curvatura ao longo das mesmas. Às eqs. (1.1.20), (1.1.26), (1.1.28), (1.1.29), (1.1.30) e (1.1.32), devemos juntar as equações de evolução para a curvatura. Essas equações serão determinadas a partir das identidades de Bianchi, como veremos a seguir.

O tensor de Riemann pode ser decomposto em suas partes irredutíveis, e utilizaremos essa decomposição para expressar as identidades de Bianchi em uma forma mais conveniente pa

ra os nossos propósitos.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} [R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] - \frac{1}{6} R[g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}] \quad (1.1.33)$$

onde $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Weyl com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} W_{\beta\alpha\nu}^{\alpha} &= 0 \\ W_{\alpha\beta\mu\nu} &= W_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

e

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\beta\alpha\mu\nu} = -W_{\alpha\beta\nu\mu} = W_{\beta\alpha\nu\mu} .$$

Devido a essas propriedades, podemos decompor o tensor de Weyl em dois tensores ao longo de uma curva, da seguinte forma:

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}V^{\mu}V^{\nu} \quad (1.1.35)$$

$$H_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}^{*}V^{\mu}V^{\nu} \quad (1.1.36)$$

onde

$$W_{\alpha\mu\beta\nu}^{*} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu}^{\rho\delta} W_{\rho\delta\beta\nu} .$$

Usando as propriedades do tensor de Weyl e as decomposições (1.1.3) e (1.1.3'), podemos obter as propriedades de $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= E_{\beta\alpha} & , & & H_{\alpha\beta} &= H_{\beta\alpha} \\ E_{\alpha\beta}V^{\beta} &= 0 & , & & H_{\alpha\beta}V^{\beta} &= 0 \\ E_{\alpha}^{\alpha} &= 0 & , & & H_{\alpha}^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

Podemos expressar o tensor de Weyl $\left(\frac{4}{-} \right)$ em termos de $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ pela relação:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\gamma\delta\lambda\rho} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\gamma\delta\lambda\rho})V^{\mu}V^{\lambda}E^{\nu\rho} + \\ + (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\gamma\delta\lambda\rho} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\gamma\delta\lambda\rho})V^{\mu}V^{\lambda}H^{\nu\rho}, \quad (1.1.38)$$

onde

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}.$$

As identidades de Bianchi para o tensor de Riemann são:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu//\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\mu//\nu} + R_{\alpha\beta\nu\gamma//\mu} = 0 \quad (1.1.39)$$

Com a expressão (1.1.33) podemos escrever (1.1.39) numa forma equivalente em termos do tensor de Weyl ⁽⁵⁾, que é a seguinte:

$$W^{\alpha\beta\gamma\delta} //_{\delta} = R^{\gamma[\alpha//\beta]} + \frac{1}{6} g^{\gamma[\beta} R^{\alpha]} \quad (1.1.40)$$

Podemos projetar a equação (1.1.40) de quatro formas diferentes:

- 1) $W_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} //_{\delta} V^{\beta}V^{\gamma}h^{\alpha\sigma}$
- 2) $W_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} //_{\delta} \eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}V_{\lambda}V^{\gamma}$
- 3) $W_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} //_{\delta} h^{\gamma(\sigma}h^{\rho)\lambda\alpha\beta}V_{\lambda}$
- 4) $W_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} //_{\delta} V^{\beta}h^{\gamma(\rho}h^{\sigma)\alpha}$.

Também podemos obter uma expressão para a divergência do tensor de Weyl a partir de (1.1.38) e fazer as mesmas projeções acima, obtendo então:

$$1) \quad W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} //_{\delta} V^{\beta} V^{\gamma} h^{\alpha\sigma} = h^{\alpha\sigma} h^{\delta\gamma} E_{\alpha\delta} //_{\gamma} + \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} H^{\nu\delta}{}_{\delta}{}^{\mu} + 3H^{\sigma\nu} \omega_{\nu}$$

$$2) \quad W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} //_{\delta} \eta^{\sigma\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} V^{\gamma} = 2 [h^{\alpha\sigma} h^{\delta\gamma} H_{\alpha\delta} //_{\gamma} - \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} E^{\nu\delta}{}_{\sigma}{}^{\mu}{}_{\delta} - 3E^{\sigma\nu} \omega_{\nu}]$$

$$3) \quad W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} //_{\delta} h^{\gamma(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} = 4a_{\alpha} E_{\beta}{}^{(\rho} \eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} - 4\theta H^{\rho\sigma} -$$

$$- 4h^{\rho}{}_{\mu} h^{\sigma}{}_{\nu} \dot{H}^{\mu\nu} - 2E_{\beta}{}^{\mu} //_{\alpha} h_{\mu}{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} + 2H_{\nu}{}^{(\rho} h^{\sigma)}{}_{\mu} V^{\mu} //_{\nu} +$$

$$+ 4\eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} H_{\delta\alpha}{}^{\theta}{}_{\beta\nu} .$$

$$4) \quad W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} //_{\delta} V^{\beta} h^{\gamma(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -4a_{\alpha} H_{\beta}{}^{(\rho} \eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} - 4\theta E^{\rho\sigma} -$$

$$- 4h_{\mu}{}^{\rho} h_{\nu}{}^{\sigma} \dot{E}^{\mu\nu} + 2H_{\beta}{}^{\mu} //_{\alpha} h_{\mu}{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} + 2E_{\nu}{}^{(\rho} h^{\sigma)}{}_{\mu} V^{\mu} //_{\nu} +$$

$$+ 4\eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} E_{\alpha\delta}{}^{\theta}{}_{\beta\nu} .$$

Essas quatro projeções serão igualadas às projeções obtidas a partir de (1.1.40), e juntamente com as equações (1.1.20), (1.1.26), (1.1.28), (1.1.29), (1.1.30), (1.1.32), nos darão uma descrição completa do comportamento das curvas da congruência.

As projeções feitas com relação ao lado direito de (1.1.39), serão discutidas na seção 2, a seguir.

1.2 - GRAVITAÇÃO

Todo o formalismo desenvolvido na seção anterior, tem por objetivo descrever como curvas numa dada variedade M_4 se comportariam, com relação à própria geometria de M_4 , e vamos ver então qual é o interesse de se desenvolvê-lo.

Numa teoria da Gravitação, em que o espaço-tempo é descrito por uma variedade Riemanniana M_4 , a dinâmica desse espaço-tempo é imposta pela relação:

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{//\nu} = J^{\alpha\beta\mu} \quad (1.2.1)$$

onde $J^{\alpha\beta\mu}$ é um tensor definido a partir do tensor momentum energia usual da matéria. A teoria física será descrita geometricamente.

Essa igualdade nos dá a possibilidade de interpretar fisicamente os objetos geométricos definidos na seção anterior, sendo dada uma interpretação para os pontos e curvas da variedade.

Nesse trabalho, usamos a Relatividade Geral de Einstein como teoria da Gravitação, e a relação

$$J_{\alpha\beta\mu} = T_{\mu\alpha//\beta} - T_{\mu\beta//\alpha} - \frac{1}{2} [g_{\mu\alpha} T_{/\beta} - g_{\mu\beta} T_{/\alpha}] \quad (1.2.2)$$

é uma condição necessária mas não suficiente para que o formalismo obtido por (1.2.1) seja equivalente à Gravitação de Einstein.

A relação (1.1.40), e as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (1.2.3)$$

nos permitirão obter as equações quase-Maxwellianas.

Esse conjunto de equações, será equivalente ao conjunto de equações de Einstein, ao fazermos a escolha (1.2.2) e impormos a validade dessas equações sobre uma hiper-superfície $t = \text{cte}$, como feito no chamado problema de Cauchy $(\frac{6}{})$, ou

propagação das equações de Einstein.

Antes de obtê-las, vamos voltar ao formalismo da seção anterior, e ver como aqueles objetos geométricos então definidos, ganharão um novo sentido à luz da relação (1.2.1).

Na Cosmologia, o Universo pode ser representado pela própria variedade M_4 , e a geometria desse espaço é especificada pelo seu conteúdo de matéria. Utilizando o modelo de fluido relativístico⁽²⁾ para representar a fonte, vamos associar a cada linha de fluxo do fluido um observador, e teremos então um campo de observadores, relativos aos quais será descrita a dinâmica local do modelo. Como de (1.1.1), \vec{V} é um vetor tipo tempo, podemos dizer que cada curva da congruência definida anteriormente será a trajetória de uma partícula, e V a sua velocidade, e em cada valor do parâmetro t , teríamos colado ao observador um tri-espaço H , chamado seu espaço de repouso local, onde ele mediria quantidades relativas ao tensor momentum-energia, que especificaria a matéria com sua distribuição ao seu redor.

Sendo assim, o observador V , com seu espaço e tempo definidos anteriormente por $h_{\mu\nu}$ e V_μ , pode decompor o tensor momentum energia do fluido, como:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + q_\mu V_\nu + q_\nu V_\mu + \pi_{\mu\nu} \quad , \quad (1.2.4)$$

onde ρ é a densidade total de energia,

p é a pressão escalar,

$\pi_{\alpha\beta}$ a pressão anisotrópica, e

q_μ o fluxo de energia,

e

$$\pi_{\alpha\beta} V^\beta = 0 \quad , \quad (1.2.4')$$

$$q_\mu V^\mu = 0 \quad .$$

Vamos então, obter agora as equações quase-Maxwellianas.

Usando um sistema de coordenadas em que $k=1$, podemos reescrever (1.2.3) na forma:

$$R_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - \Lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (1.2.5)$$

Substituindo (1.2.5), (1.2.4) e (1.2.4') em (1.1.20), chega-se a:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^\mu{}_{//\mu} = - \frac{1}{2}(\rho+3p)+\Lambda \quad (1.2.6)$$

Usando as expressões (1.1.33), (1.1.35), (1.2.5), (1.2.4) e (1.2.4') em (1.1.26), obtém-se

$$\begin{aligned} & h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} (\omega^2 + \sigma^2) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + \\ & + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^\mu{}_{//\mu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu//\nu} + a_{\nu//\mu}) = - E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

A equação de evolução para $\omega_{\mu\nu}$, não muda

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} + \sigma_{\alpha\rho} \omega^\rho{}_\beta + \omega_{\alpha\rho} \sigma^\rho{}_\beta - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu//\nu} - a_{\nu//\mu}) + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.2.8)$$

Substituindo (1.2.5), (1.2.4) e (1.2.4') em (1.1.29), chega-se a:

$$h_\lambda^\gamma (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{//\alpha} - \frac{2}{3} h_\lambda^\gamma \theta_{/\gamma} + a^\gamma (\sigma_{\lambda\gamma} + \omega_{\lambda\gamma}) = q_\lambda \quad (1.2.9)$$

A 2ª equação de vínculo também não muda.

$$\omega_{//\alpha}^{\alpha} + 2\omega^{\alpha} a_{\alpha} = 0 \quad . \quad (1.2.10)$$

Usando (1.1.33), (1.1.35), (1.1.36), (1.2.5), (1.2.4) e (1.2.4') em (1.1.32), podemos reescrevê-la como:

$$\eta_{\epsilon}^{\beta\gamma\nu} V_{\nu} (\sigma_{\alpha\beta//\gamma} + \omega_{\alpha\beta//\gamma}) h^{\epsilon} (\theta^{\alpha} \phi) - 2a_{(\phi^{\omega}\theta)} = - h^{\epsilon} (\theta^{\alpha} \phi) H_{\epsilon\alpha} \quad (1.2.11)$$

Em (1.1.40) podemos substituir (1.2.5) e obter a seguinte expressão, abaixando-se os índices:

$$W_{\alpha\beta\gamma} \delta_{//\delta} = - \frac{1}{2} T_{\gamma[\alpha//\beta]} + \frac{1}{6} g_{\gamma[\alpha T/\beta]} \quad (1.2.12)$$

Fazendo as projeções 1,2,3,4, chega-se a

$$\begin{aligned} 1) \quad W_{\alpha\beta\gamma} \delta_{//\delta} V^{\beta} V^{\gamma} h^{\alpha\sigma} &= \frac{1}{3} h^{\sigma\alpha} \rho/\alpha + \frac{\theta}{3} q^{\sigma} - \frac{1}{2} (\sigma^{\sigma}_{\nu} - 3\omega^{\sigma}_{\nu}) q^{\nu} + \\ &+ \frac{1}{2} \pi^{\sigma\mu} a_{\mu} + \frac{1}{2} h^{\sigma\alpha} \pi_{\alpha} //_{\nu} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad W_{\alpha\beta\gamma} \delta_{//\delta} \cdot \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} V^{\gamma} &= 4(\rho+p)\omega^{\sigma} - 2\eta^{\sigma\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha//\beta} + \\ &+ 2\eta^{\sigma\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi^{\mu}_{\alpha} V_{\lambda} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad W_{\alpha\beta\gamma} \delta_{//\delta} h^{\gamma} (\sigma_{\eta\rho})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} &= 3q^{(\sigma\omega\rho)} - 2h^{\rho\sigma} q^{\alpha} \omega_{\alpha} - \sigma^{\beta} (\sigma_{\eta\rho})^{\alpha\beta\lambda} \\ &V_{\lambda} q_{\alpha} - h^{\mu(\sigma\eta\rho)^{\alpha\beta\lambda}} \pi_{\mu\alpha//\beta} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{//\delta} V^{\beta} h^{\gamma(\rho} h^{\sigma)\alpha} &= 2(\rho+p)\sigma^{\rho\sigma} - 2q^{(\rho} a^{\sigma)} + \\
 &+ h^{\mu(\rho} h^{\sigma)\alpha} q_{\mu//\alpha} - 2h_{\alpha}{}^{(\rho} h_{\mu}{}^{\sigma)} \pi^{\alpha\mu} - \pi_{\beta}{}^{(\rho} \sigma^{\sigma)\beta} - \pi_{\beta}{}^{(\rho} \omega^{\sigma)\beta} \\
 &- \frac{2}{3} \theta \pi^{\rho\sigma} - \frac{2}{3} h^{\rho\sigma} (q^{\mu}{}_{//\mu} - q^{\mu} a_{\mu} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) \quad (1.2.16)
 \end{aligned}$$

Igualando as 4 projeções (1.1.13), (1.1.14), (1.1.15) e (1.1.16) às expressões obtidas, fazendo-se as mesmas projeções, da seção 1, chega-se a

$$\begin{aligned}
 h^{\varepsilon\alpha} h^{\delta\gamma} E_{\alpha\delta//\gamma} + \eta^{\varepsilon}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} H^{\nu\delta} \sigma^{\mu}{}_{\delta} + 3H^{\varepsilon\nu} \omega_{\nu} &= \\
 = \frac{1}{3} h^{\varepsilon\alpha}{}_{\rho/\alpha} + \frac{\theta}{3} q^{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\sigma^{\varepsilon}{}_{\nu} - 3\omega^{\varepsilon}{}_{\nu}) q^{\nu} + \frac{1}{2} \pi^{\varepsilon\mu} a_{\mu} + \\
 + \frac{1}{2} h^{\varepsilon\alpha} \pi_{\alpha}{}^{\nu}{}_{//\nu} \quad (1.2.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^{\varepsilon\alpha} h^{\delta\gamma} H_{\alpha\delta//\gamma} - \eta^{\varepsilon}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} E^{\nu\delta} \sigma^{\mu}{}_{\delta} - 3E^{\sigma\nu} \omega_{\nu} &= \\
 = 2(\rho+p)\omega^{\varepsilon} - \eta^{\varepsilon\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha//\beta} + \eta^{\varepsilon\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi^{\mu}{}_{\alpha} V_{\lambda} \quad (1.2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{\mu}{}^{\rho} h_{\nu}{}^{\sigma} \dot{H}^{\mu\nu} + \theta H^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} H_{\nu}{}^{(\rho} h^{\sigma)}{}_{\mu} V^{\mu//\nu} - \eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} H_{\alpha\delta} \theta_{\nu\beta} - \\
 - a_{\alpha} E_{\beta}{}^{(\rho} \eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} + \frac{1}{2} E_{\beta}{}^{\mu}{}_{//\alpha} h_{\mu}{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} = \quad (1.2.19) \\
 = -\frac{3}{4} q^{(\sigma} \omega^{\rho)} + \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} q^{\alpha} \omega_{\alpha} + \frac{1}{4} \sigma_{\beta}{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha} + \frac{1}{4} h^{\mu(\sigma} \eta^{\rho)\alpha\beta\lambda} \pi_{\mu\alpha//\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\sigma} \dot{E}^{\mu\nu} + \theta E^{\epsilon\sigma} - \frac{1}{2} E_{\nu} (\epsilon h^{\sigma})_{\mu} V^{\mu//\nu} - \eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\epsilon\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} E_{\alpha\delta} \theta_{\beta\nu} + \\
 & + a_{\alpha} H_{\beta}^{\epsilon} (\epsilon_{\eta}^{\sigma})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} - \frac{1}{2} H_{\beta}^{\mu} //_{\alpha} h_{\mu}^{\epsilon} (\sigma_{\eta}^{\epsilon})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} = \\
 & = \frac{1}{6} h^{\epsilon\sigma} (q^{\mu} //_{\mu} - q^{\mu} a_{\mu} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\rho+p) \sigma^{\epsilon\sigma} + \frac{1}{2} q (\epsilon a^{\sigma}) - \\
 & - \frac{1}{4} h^{\mu} (\epsilon h^{\sigma})_{\alpha} q_{\mu//\alpha} + \frac{1}{2} h_{\alpha} (\epsilon h^{\sigma})_{\mu} \pi^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} \pi_{\beta} (\epsilon_{\sigma}^{\sigma})^{\beta} + \frac{1}{4} \pi_{\beta} (\epsilon_{\omega}^{\sigma})^{\beta} + \\
 & + \frac{1}{6} \theta \pi^{\epsilon\sigma} \tag{1.2.20}
 \end{aligned}$$

As equações (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19) e (1.2.20), constituem o sistema de equações quase-Maxwellianas da Gravitação.

Esse conjunto de equações, é assim chamado, devido às eqs. (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19) e (1.2.20) terem grande semelhança com as equações de Maxwell do eletromagnetismo e $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ são chamados, respectivamente, de parte elétrica e magnética do tensor de Weyl.

CAPÍTULO II

GEOMETRIAS CONFORMALMENTE PLANAS

As geometrias conformalmente planas, são aquelas descritas por métricas que são obtidas a partir da métrica do espaço-plano, por meio de uma transformação conforme ^(7,8).

Seja $g_{\mu\nu}$, a métrica de uma variedade M_4 . A transformação

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$$

é chamada conforme, para $\Omega(x)$ uma função arbitrária diferenciável, e tem a característica de preservar ângulos entre vetores.

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu \delta x^\nu}{(\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta)^{1/2}} = \cos \alpha .$$

O tensor de Weyl é invariante sob esse tipo de transformação, e é nulo, no caso de geometrias conformalmente planas.

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 .$$

Podemos descrever essas geometrias, por meio de uma métrica, na forma

$$dS^2 = e^{2f} (dt^2 - dr^2 - g^2(r) d\theta^2 - g^2(r) \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

onde

$$f = f(t, r, \theta, \phi) \quad ,$$

e $g(r)$ pode ter as três expressões seguintes (ver Apêndice A)

$$\begin{aligned} g(r) &= r & ; & \quad 0 \leq r \\ g(r) &= \text{sen } r & ; & \quad 0 \leq r \leq \pi \\ g(r) &= \text{shr} & ; & \quad 0 \leq r \end{aligned} \quad (2.2)$$

Podemos ver pela forma da métrica, que para qualquer tempo $t = \text{cte}$, existe uma tri-superfície espacial, separando a variedade em duas partes, globalmente, ou seja, uma superfície de Cauchy global.

Se escolhermos um sistema de coordenadas, no qual cada partícula carrega suas coordenadas espaciais com ela, ou seja, coordenadas comoventes, então para cada tempo $t = \text{cte}$, os espaços de repouso local H de cada partícula, como descrito na seção anterior, se juntarão numa única tri-superfície, e esse tempo será o mesmo para cada ponto da tri-superfície, sendo chamado tempo cosmológico.

Dos resultados do Apêndice B, que mostram a equivalência completa das equações quase-Maxwellianas com as equações de Einstein para esse tipo de geometria, com a escolha de coordenadas comoventes, podemos então impor a validade dessas equações sobre H como feito no problema de Cauchy para as equações de Einstein e com isso nós temos um tensor momentum energia também definido sobre H .

Vamos então prosseguir, calculando os objetos geométricos

tricos e as equações quase-Maxwellianas correspondentes para a geometria (2.1).

O tensor métrico tem a forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2f}g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2f}g^2 \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2f}/g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2f}/g^2 \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Os índices 0, 1, 2, 3, estarão relacionados respectivamente às variáveis t, r, θ e ϕ .

Das condições (1.1.1) e (1.1.2), temos as expressões:

$$V^\mu = e^{-f} \delta^\mu_0 \quad (2.5)$$

e

$$V_\mu = e^f \delta^0_\mu \quad (2.6)$$

Usando os símbolos de Christoffel calculados a partir de (2.3) e (2.4), calculamos as derivadas covariantes de V^μ e V_μ .

$$V^\mu_{//\nu} = V^\mu_{/\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho = -f_{/\nu} e^{-f} \delta^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\nu 0} e^{-f} \quad (2.7)$$

$$V_{\mu//\nu} = V_{\mu/\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho = f_{/\nu} e^f \delta^0_\mu - \Gamma^0_{\mu\nu} e^f \quad (2.8)$$

Projetando sobre V:

$$V^\mu_{//\nu} V^\nu \equiv a^\mu = -e^{-2f} f_{/0} \delta^\mu_0 + e^{-2f} \Gamma_{00}^\mu \quad (2.9)$$

$$V_{\mu//\nu} V^\nu \equiv a_\mu = f_{/0} \delta_\mu^0 - \Gamma_{\mu 0}^0 \quad (2.10)$$

Temos então

$$\begin{aligned} a^0 &= 0 \\ a^i &= e^{-2f} f_{/i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_i &= -f_{/i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

De (1.1.3), (2.5) e (2.6), chega-se a:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - e^{2f} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \quad (2.13)$$

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - e^{-2f} \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \quad (2.14)$$

e

$$h_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^0 \delta_0^\beta \quad (2.15)$$

De (1.1.8) e (2.8), chega-se a

$$\theta_{\alpha\beta} = e^f [\Gamma_{\alpha 0}^0 \delta_\beta^0 + \Gamma_{\beta 0}^0 \delta_\alpha^0 - \Gamma_{\alpha\beta}^0 - \Gamma_{00}^0 \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0] \quad (2.16)$$

De (1.1.11), obtém-se

$$\theta = 3e^{-f} f_{/0} \quad (2.17)$$

De (1.1.9) e (2.8), chega-se a

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.18)$$

Usando (1.1.10), (2.16) e (2.17), obtém-se

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.19)$$

Calculando a expressão

$$\dot{\theta} = \theta_{/Y} V^Y \quad (2.20)$$

chega-se a

$$\dot{\theta} = 3e^{-2f} (f_{/0/0} - f_{/0}^2) \quad (2.21)$$

Como foi mostrado no Apêndice A, a métrica (2.1) tem tensor de Weyl nulo, o que implica então em $E_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = 0$. Com esse resultado e as expressões (2.19) e (2.20), vemos que o conjunto de equações (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19) e (1.2.20), se reduz consideravelmente.

Reescrevendo-as então, obtêm-se o novo conjunto a seguir.

Equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - a^\mu_{//\mu} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \quad (2.22)$$

Equação de Evolução para $\sigma_{\mu\nu}$:

$$a_\alpha a_\beta + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^\mu_{//\mu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu//\nu} + a_{\nu//\mu}) = -\frac{\pi_{\alpha\beta}}{2} \quad (2.23)$$

A equação de evolução para $\omega_{\mu\nu}$, nos dá:

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu//\nu} - a_{\nu//\mu}) = 0 \quad (2.24)$$

e da 1ª equação de vínculo, temos:

$$h^{\gamma}_{\lambda} \theta_{/\gamma} = - \frac{3}{2} q_{\lambda} \quad . \quad (2.25)$$

As outras equações são identidades.

Podemos reduzi-las ainda mais, substituindo (2.23) em (2.22) e obtendo

$$a_{\alpha} a_{\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^{\mu}_{//\mu} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu//\nu} = - \frac{\pi_{\alpha\beta}}{2} \quad . \quad (2.26)$$

O conjunto de equações quase-Maxwellianas para geometrias con formalmente planas, e observadores cujas linhas de Universo são ortogonais à hiper-superfície espacial, fica reduzido às equações (2.22), (2.25) e (2.26).

Podemos ainda, calcular as expressões de $a^{\mu}_{//\mu}$ e $a_{\mu//\nu}$ a partir de (1.1.6') e substituir as expressões (2.15), (2.17), (2.20) e (2.21) e obter o mesmo conjunto de equações (2.22), (2.25) e (2.26), na forma de equações para a função $f(t, r, \theta, \phi)$. Chegamos então ao seguinte resultado:

Equação de Raychaudhuri

$$\begin{aligned} e^{-2f} [3f_{/0/0} - f_{/1/1} - \frac{1}{g^2} f_{/2/2} - \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} f_{/3/3} - 2f_{/1}^2 - \\ - \frac{2}{g^2} f_{/2}^2 - \frac{2}{g^2 \text{sen}^2 \theta} f_{/3}^2 - 2f_{/1} \frac{g_{/1}}{g} - f_{/2} \frac{\text{cotg} \theta}{g}] = \\ = - \frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \end{aligned} \quad (2.27)$$

A equação (2.25), nos dá 3 expressões para as componentes espaciais do fluxo de calor.

$$q_1 = 2e^{-2f} [f_{/0} f_{/1} - f_{/0/1}] \quad (2.28)$$

$$q_2 = 2e^{-2f} [f_{/0} f_{/2} - f_{/0/2}] \quad (2.29)$$

e

$$q_3 = 2e^{-2f} [f_{/0} f_{/3} - f_{/0/3}] \quad (2.30)$$

Chega-se também a $q_0 = 0$, como seria de esperar de (1.2.4') .
A equação (2.26) nos dá o seguinte conjunto de expressões para a pressão anisotrópica:

$$\pi_{12} = -2 [f_{/1/2} - f_{/1} f_{/2} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/2}] \quad (2.31)$$

$$\pi_{13} = -2 [f_{/1/3} - f_{/1} f_{/3} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/3}] \quad (2.32)$$

$$\pi_{23} = -2 [f_{/2/3} - f_{/2} f_{/3} - \cotg \theta f_{/3}] \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} = & 2 \left[\frac{2}{3} f_{/1} \frac{g_{/1}}{g} + \frac{2}{3} f_{/1}^2 - \frac{2}{3} f_{/1/1} + \frac{1}{3} f_{/2/2} \frac{1}{g^2} - \right. \\ & - \frac{1}{3} f_{/2}^2 \frac{1}{g^2} + \frac{1}{3} f_{/2} \frac{\cotg \theta}{g} - \frac{1}{3} f_{/3}^2 \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} + \frac{1}{3} f_{/3/3} \cdot \\ & \left. \cdot \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} \right] \quad (2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{22} = & 2 \left[- \frac{1}{3} f_{/1} g_{/1} - \frac{1}{3} f_{/1}^2 g^2 + \frac{1}{3} f_{/1/1} g^2 - \frac{2}{3} f_{/2/2} + \right. \\ & + \frac{2}{3} f_{/2}^2 + \frac{1}{3} f_{/2} \cotg \theta - \frac{1}{3} f_{/3}^2 \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{1}{3} f_{/3/3} \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \left. \right] \quad (2.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{33} = & 2 \left[- \frac{1}{3} f_{/1} g_{/1} \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{3} f_{/1}^2 g^2 \text{sen}^2 \theta + \frac{1}{3} f_{/1/1} g^2 \cdot \right. \\ & \cdot \text{sen}^2 \theta + \frac{1}{3} f_{/2/2} \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{3} f_{/2}^2 \text{sen}^2 \theta - \frac{2}{3} f_{/2} \text{sen} \theta \cos \theta - \\ & \left. - \frac{2}{3} f_{/3/3} + \frac{2}{3} f_{/3}^2 \right] \quad (2.36) \end{aligned}$$

e também

$$\pi_{00} = 0 \tag{2.37}$$

$$\pi_{i0} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Temos então um conjunto de equações (2.27) a (2.36) para cada caso de $g(r)$, dados por (2.2).

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO FORMALISMO Q.M. NA COSMOLOGIA

No capítulo anterior, chegou-se ao conjunto de equações quase-Maxwellianas para uma métrica geral conformalmente plana dada por (2.1), com a escolha de observadores ortogonais à hipersuperfície de simultaneidade $t = \text{cte}$.

Vimos que as equações gerais ficam bastante reduzidas, e o campo de observadores se movendo com a matéria não percebe rotação nem deformação da mesma.

O interesse de se estudar geometrias conformalmente planas para a Cosmologia, está na facilidade de se interpretar sinais de luz e de rádio, devido à existência de superfícies de simultaneidade.

Sabemos de dados observacionais em larga escala, que não há evidências de deformação ou rotação da matéria em torno de nós, apesar da distribuição irregular dos aglomerados galácticos, o que é uma outra razão de interesse nessas métricas.

Nesse Capítulo, obteve-se uma solução geral para modelos anisotrópicos e inomogêneos com pressão anisotrópica nula e mostra-se que essa solução tem como casos particulares alguns modelos cosmológicos conhecidos. Obtém-se também soluções particulares com fluxo de energia e viscosidade, o que

é de interesse na representação de épocas remotas do Universo $(\frac{9}{g})$, em que esses efeitos não podem ser desprezados.

Impondo então a condição $\pi_{\mu\nu} = 0$, no conjunto de equações (2.27), ..., (2.36), fica-se com o seguinte sistema de equações a resolver:

$$f_{/1/2} - f_{/1}f_{/2} - \frac{g/1}{g} f_{/2} = 0 \quad (3.1)$$

$$f_{/1/3} - f_{/1}f_{/3} - \frac{g/1}{g} f_{/3} = 0 \quad (3.2)$$

$$f_{/2/3} - f_{/2}f_{/3} - \cotg\theta f_{/3} = 0 \quad (3.3)$$

$$2f_{/1} \frac{g/1}{g} + 2f_{/1}^2 - 2f_{/1/1} + f_{/2/2} \frac{1}{g^2} - f_{/2}^2 \frac{1}{g^2} +$$

$$+ f_{/2} \frac{\cotg\theta}{g^2} - f_{/3}^2 \frac{1}{g^2 \text{sen}^2\theta} + f_{/3/3} \frac{1}{g^2 \text{sen}^2\theta} = 0 \quad (3.4)$$

$$f_{/1/1} - 2f_{/2/2} \frac{1}{g^2} + f_{/3/3} \frac{1}{g^2 \text{sen}^2\theta} - f_{/1}^2 - f_{/1} \frac{g/1}{g} + 2f_{/2}^2 \frac{1}{g^2} +$$

$$+ f_{/2} \frac{\cotg\theta}{g^2} - \frac{f_{/3}^2}{g^2 \text{sen}^2\theta} = 0 \quad (3.5)$$

$$f_{/1/1} + f_{/2/2} \frac{1}{g^2} - 2f_{/3/3} \frac{1}{g^2 \text{sen}^2\theta} - f_{/1}^2 - f_{/1} \frac{g/1}{g} - f_{/2}^2 \frac{1}{g^2} -$$

$$- 2f_{/2} \frac{\cotg\theta}{g^2} + \frac{2f_{/3}^2}{g^2 \text{sen}^2\theta} = 0 \quad (3.6)$$

Esse sistema de equações, tem solução para cada caso de $g(r)$, a seguir:

$g(r) = r$:

$$f_{(0)}(t, r, \theta, \phi) = -\ln\{\psi(t) + \phi(t)r^2 + \lambda(t)r \cos\theta + \eta(t)r \sin\theta \cos\psi + \xi(t)r \sin\theta \sin\psi\} \quad (3.7)$$

$g(r) = \text{sen } r$:

$$f_{(+)}(t, r, \theta, \phi) = -\ln\{\psi(t) + \phi(t)\cos r + \lambda(t)\text{sen } r \cos\theta + \eta(t)\text{sen } r \sin\theta \cos\psi + \xi(t)\text{sen } r \sin\theta \sin\psi\} \quad (3.8)$$

$g(r) = \text{shr}$:

$$f_{(-)}(t, r, \theta, \phi) = -\ln\{\psi(t) + \phi(t)\text{shr} + \lambda(t)\text{shr} \cos\theta + \eta(t)\text{shr} \sin\theta \cos\psi + \xi(t)\text{sen } r \sin\theta \sin\psi\} \quad (3.9)$$

As funções $\psi(t)$, $\phi(t)$, $\lambda(t)$, $\eta(t)$ e $\xi(t)$ são arbitrárias a serem determinadas por condições físicas adicionais.

Vamos estudar o caso em que $\eta(t) = \xi(t) = 0$.

As soluções podem ser escritas como

$$f(t, r, \theta) = -\ln H(t, r, \theta) \quad (3.10)$$

onde

$$H_{(0)} = \psi(t) + \phi(t)r^2 + \lambda(t)r \cos\theta \quad (3.11)$$

$$H_{(+)} = \psi(t) + \phi(t) \cos r + \lambda(t) \text{sen } r \cos\theta \quad (3.12)$$

e

$$H_{(-)} = \psi(t) + \phi(t) \operatorname{chr} + \lambda(t) \operatorname{shr} \cos \theta \quad (3.13)$$

Vamos substituir a solução $H_{(+)}$ nas equações restantes, (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30).

A equação de Raychaudhuri (2.27) fica na forma:

$$\begin{aligned} & \cos^2 r (3\dot{\phi}^2 - 3\ddot{\phi}\phi) + \operatorname{sen}^2 r \cos^2 \theta (3\dot{\lambda}^2 - 3\ddot{\lambda}\lambda) + \\ & + \operatorname{cosr} (-3\phi\psi + 6\dot{\phi}\dot{\psi} - 3\ddot{\phi}\psi - 3\phi\ddot{\psi}) + \operatorname{senr} \cos \theta (6\dot{\psi}\dot{\lambda} - 3\ddot{\psi}\lambda - \\ & - 3\psi\ddot{\lambda} - 3\psi\lambda) + \operatorname{senr} \operatorname{cosr} \cos \theta (6\dot{\phi}\dot{\lambda} - 3\ddot{\phi}\lambda - 3\dot{\lambda}\phi) + 3\dot{\psi}^2 - 3\ddot{\psi}\psi - \\ & - 3\phi^2 - 3\lambda^2 = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \end{aligned} \quad (3.14)$$

As expressões para q_1 , q_2 e q_3 , são:

$$q_1 = 2\dot{\lambda} \operatorname{cosr} \cos \theta - 2\dot{\phi} \operatorname{senr} \quad (3.15)$$

$$q_2 = -2\dot{\lambda} \operatorname{senr} \operatorname{sen} \theta \quad (3.16)$$

e

$$q_3 = 0 \quad .$$

Com os resultados do Apêndice B, podemos obter a expressão da densidade de energia ρ , a partir de G_{00} , pela expressão:

$$\rho = -H_{(+)}^2 G_{00} - \Lambda \quad . \quad (3.17)$$

Substituindo em G_{00} a solução $f_{(+)} = -\ln H_{(+)}$, onde $H_{(+)}$ é dado por (3.12), obtém-se a seguinte expressão:

$$\rho = \cos^2 r (3\dot{\phi}^2) + \operatorname{sen}^2 r \cos^2 \theta (3\dot{\lambda}^2) + \operatorname{cosr} r (6\dot{\phi}\dot{\psi}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \operatorname{senr} \cos\theta (\ddot{\phi}\ddot{\lambda}) + \operatorname{senr} \operatorname{cosr} \cos\theta (\ddot{\phi}\ddot{\lambda}) + 3\dot{\psi}^2 + \\
 & + 3\dot{\psi}^2 - 3\dot{\lambda}^2 - 3\dot{\phi}^2 - \Lambda \qquad (3.18)
 \end{aligned}$$

Usando essa expressão de ρ (3.18) na equação de Raychaudhuri (3.14), ficamos com a seguinte expressão para a pressão:

$$\begin{aligned}
 p = & 2\cos^2 r (\ddot{\phi}\ddot{\phi}) + 2\operatorname{sen}^2 r \cos^2 \theta (\ddot{\lambda}\ddot{\lambda}) + 2\operatorname{cosr} (\dot{\phi}\dot{\psi} + \ddot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}\ddot{\psi}) + \\
 & + 2\operatorname{senr} \cos\theta (\ddot{\psi}\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\dot{\psi} + \ddot{\lambda}\dot{\psi}) + 2\operatorname{senr} \operatorname{cosr} \cos\theta (\ddot{\phi}\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\ddot{\phi}) + 2\ddot{\psi}\dot{\psi} + 2\dot{\psi}^2 - \rho \qquad (3.19)
 \end{aligned}$$

Ficamos então, finalmente, reduzidos às expressões (3.15), (3.16), (3.18) e (3.19).

Para analisarmos soluções que possam representar modelos cosmológicos, precisamos de condições adicionais sobre as quantidades físicas que descrevem o fluido em questão, e essas condições são representadas por equações fenomenológicas.

Uma das equações necessárias, é a equação de estado que relaciona a pressão com a densidade de energia, e para consegui-la, faz-se uma comparação entre os componentes do tensor momentum-energia do fluido na Relatividade Geral e na Relatividade Especial, tendo-se assim uma interpretação termodinâmica para essas equações permitida pelo Princípio da Equivalência.

No caso de fluidos com viscosidade $\left(\frac{9}{2}\right)$, a equação de estado é obtida somando-se a pressão isotópica p , num termo proporcional ao parâmetro de expansão ("bulk viscosity"), ou introduzindo-se um tensor pressão anisotrópico $\pi_{\mu\nu}$ li

nearmente relacionado à deformação $\sigma_{\mu\nu}$.

Nos casos aqui estudados, temos soluções para $\pi_{\mu\nu} = 0$ e $\sigma_{\mu\nu} = 0$, então podemos generalizar a equação de estado da seguinte forma:

$$\tilde{p} = p + \sum_{k=1}^N a_k \theta^k, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

onde p é a pressão isotrópica, e a_k são os coeficientes da expansão, podendo ser funções das coordenadas.

Além das equações (3.15), (3.16), (3.18), (3.19), e da equação de estado (3.20), temos também as equações de conservação para $T_{\mu\nu}$.

$$T^{\mu\nu}{}_{//\nu} = 0 \quad (3.21)$$

Calcula-se a expressão:

$$(\rho V^\mu V^\nu - p h^{\mu\nu} + q^\mu V^\nu + q^\nu V^\mu + \pi^{\mu\nu})_{//\nu} = 0 \quad (3.22)$$

Substituindo a decomposição (1.1.13'), e projetando na direção de V e H , chegamos às expressões:

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta + \dot{q}^\mu V_\mu + q^\mu{}_{//\mu} = 0 \quad (3.23)$$

$$(\rho+p)a_\alpha - p/h_\mu h^\mu_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu_\alpha + \theta q_\alpha + q^\nu \theta_{\alpha\nu} = 0 \quad (3.24)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} = 0$.

A expressão (3.23) pode ser escrita como:

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta = \dot{S} \quad (3.25)$$

onde \dot{S} é uma medida da variação no tempo de entropia do modelo.

As equações (3.23) e (3.24) devem ser satisfeitas automaticamente não sendo necessárias como equações adicionais.

Podemos então usar (3.15), (3.16), (3.18), (3.19) e (3.20) para analisarmos algumas soluções cosmológicas.

Vamos impor a condição de que $T_{\mu\nu}$ representa um fluido perfeito.

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} \quad (3.26)$$

Então:

$$q_i = 0 \quad (3.27)$$

Das expressões (3.15) e (3.16) vemos que:

$$\dot{\lambda} = \dot{\phi} = 0$$

Essa solução é obtida por Bondarenko e Kobushkin ($\frac{10}{}$), sendo uma generalização do elemento de linha de Robertson-Walker para fluido perfeito, caso fechado.

$$H_{(+)} = K \cos r + \psi(t) + C_0 \operatorname{sen} r \cos \theta \quad g(r) = \operatorname{sen} r \quad (3.28)$$

Os outros casos de $g(r)$, são dados por:

$$H_0 = K r^2 + \psi(t) + C_0 r \cos \theta, \quad g(r) = r \quad (3.29)$$

e

$$H_{(-)} = K \operatorname{ch} r + \psi(t) + C_0 \operatorname{sh} r \cos \theta, \quad g(r) = \operatorname{sh} r \quad (3.30)$$

Vamos então examinar agora, os casos de fluido per -

feito.

Vamos voltar às equações quase-Maxwellianas na forma integral do Capítulo I, equações (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8) , (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19) , (1.2.20), e sem especificar o campo de observadores, vamos impor apenas as seguintes condições:

a) Geometrias conformalmente planas $W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$
então

$$E_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.31)$$

b) Fonte de fluido perfeito

$$q_\lambda = \pi_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.32)$$

Com essas condições, a partir de (1.2.17), obtemos que:

$$\rho = \rho(t) \quad . \quad (3.33)$$

De (1.2.18), sai que

$$\omega = 0 \quad (3.34)$$

De (1.2.20), obtemos

$$\sigma = 0 \quad (3.35)$$

Substituindo esses resultados em (1.2.6), (1.2.7) e (1.2.9), temos a equação de Raychaudhuri

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - a^\mu_{\parallel\mu} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \quad , \quad (3.36)$$

a equação de evolução para $\sigma_{\alpha\beta}$, acaba se tornando

$$a_{\alpha} a_{\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^{\mu}{}_{;\mu} - h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} a_{\mu;\nu} = 0 \quad , \quad (3.37)$$

e de (1.2.9), obtemos

$$\theta = \theta(t) \quad (3.38)$$

Podemos usar ao invés de (3.37) as equações (3.22) e (3.23) obtidas da conservação de $T_{\mu\nu}$ e das condições (3.32).

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta = 0 \quad (3.39)$$

e

$$(\rho+p)a_{\alpha} = h^{\mu}{}_{\alpha} p_{;\mu} \quad (3.40)$$

A equação de estado para esse caso, é dada por

$$p = \gamma\rho \quad , \quad \text{onde } \gamma \text{ é um número, e } 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.41)$$

Além dessas equações, podemos também usar a fórmula de Gauss-Codazzi que relaciona a tri-curvatura do espaço-tempo com as quantidades físicas e geométricas ⁽⁴⁾

$${}^{(3)}R = -\frac{2}{3} \theta^2 + 2\rho + 2\Lambda \quad . \quad (3.42)$$

Vimos então, que a partir da composição de fluido perfeito para geometrias conformalmente planas, o conjunto de equações quase-Maxwellianas fica reduzido à apenas duas equações, (3.36) e (3.37), e mais a condição (3.38). As equações (3.39) e (3.40), como foi dito anteriormente, devem ser satisfeitas automaticamente; a condição (3.41) é imposta como condição adicional e a fórmula de Gauss-Codazzi (3.42), pode ser vista como mais uma condição de vínculo.

Vamos reescrever então as equações (3.36), (3.39),

(3.40), (3.41) e (3.42) novamente, e usá-las convenientemente.

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - a^\mu_{\parallel\mu} = -\frac{1}{2} (\rho+3p)+\Lambda \quad , \text{ equação de Raychaudhuri} \quad (3.43)$$

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta = 0 \quad (3.44)$$

$$a_\alpha = \frac{1}{(\rho+p)} h^\mu_{\alpha} p_{/\mu} \quad (3.45)$$

$$p = \gamma_\rho \quad (3.46)$$

$${}^{(3)}R = -\frac{2}{3} \theta^2 + 2\rho + 2\Lambda \quad (3.47)$$

Vemos que os parâmetros cinemáticos envolvidos, são θ e a_μ , e os parâmetros físicos são ρ e p , e a partir de imposições sobre essas quantidades, encontramos os modelos correspondentes.

Como exemplo, vamos obter o Universo de Einstein, impondo as condições:

$$\theta = a \equiv p = 0$$

$$\gamma = 0$$

A equação (3.43) se torna:

$$\rho = 2\Lambda$$

As equações (3.44), (3.45) e (3.46) são identidades.

A equação (3.47) nos dá:

$${}^{(3)}R = 2\rho + 2\Lambda \quad .$$

A tri-curvatura para a métrica de Einstein⁽¹¹⁾ é dada por:

$${}^{(3)}R = -\frac{6\varepsilon}{A^2} \quad , \quad \text{onde} \quad \varepsilon = -1 \quad .$$

A métrica do Universo de Einstein pode ser escrita na forma

$$dS^2 = A^2 (dt^2 - dr^2 - \text{sen}^2 r d\theta^2 - \text{sen}^2 r \text{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

$$2(\rho + \Lambda) = \frac{6}{A^2}$$

ou

$$6\Lambda = \frac{6}{A^2}$$

Finalmente, $A^2 = \Lambda^{-1}$, como era de se esperar e a solução $H_{(+)}$ para esse caso, fica reduzida apenas a $\psi(t) = \text{cte}$.

Outro exemplo, pode ser o caso de Friedmann fechado.

Impondo a condição $a_{\mu} = 0$ e $\Lambda = 0$, reescrevemos as equações (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) e (3.47) da seguinte forma:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0$$

$$h^{\mu} p_{/\mu} = 0$$

$$p = \gamma\rho$$

$$(3)_{\text{R}} = -\frac{2}{3}\theta^2 + 2\rho$$

Impondo agora uma equação de estado em que $\gamma = 0$, temos o caso de poeira.

Reescrevendo novamente para esse caso, ficamos apenas com as equações:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}\rho$$

$$\dot{\rho} + \rho\theta = 0$$

e

$$(3) R = -\frac{2}{3} \theta^2 + 2\rho \quad .$$

As duas primeiras equações, nos dão como resultado, as expressões:

$$\theta = \frac{3 \operatorname{sen} t}{A(1-\operatorname{cost})^2}$$

e

$$\rho = \frac{6}{A^2(1-\operatorname{cost})^3} \quad ,$$

onde A é uma constante.

Para a métrica geral na forma (2.1), com a solução $f = -\ln\psi(t)$ podemos escrever:

$$dS^2 = \psi(t)^{-2} (dt^2 - dr^2 - \operatorname{sen}^2 r d\theta^2 - \operatorname{sen}^2 r \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

Como $\theta = -3\dot{\psi}$, chegamos a:

$$\psi(t) = \frac{1}{A(1-\operatorname{cost})} \quad ,$$

e a métrica de Friedmann para o caso fechado de poeira, pode ser escrito na forma:

$$dS^2 = A^2(1-\operatorname{cost})^2 (dt^2 - dr^2 - \operatorname{sen}^2 r d\theta^2 - \operatorname{sen}^2 r \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

Os outros casos de Friedmann, Lemaitre, podem ser obtidos da mesma forma.

Vamos agora, voltar à solução $H_{(+)}$ da expressão (3.12).

$$H_{(+)} = \psi(t) + \phi(t) \operatorname{cos} r + \lambda(t) \operatorname{sen} r \operatorname{cos} \theta \quad (3.48)$$

e analisar dois casos separadamente.

A) - 1ª Solução

Fazendo $\lambda(t) = 0$ com $\Lambda = 0$, ficamos com a expressão:

$$H_{(+)} = \psi(t) + \phi(t) \cos r \quad (3.49)$$

As expressões de ρ e p , a partir de (3.18) e (3.19) são as seguintes:

$$\rho = 3\cos^2 r (\dot{\phi}^2) + 6\cos r (\dot{\phi}\dot{\psi}) + 3\dot{\psi}^2 + 3\psi^2 - 3\phi^2 \quad (3.50)$$

$$p = 2\cos^2 r (\ddot{\phi}\phi) + 2\cos r (\phi\ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\psi} + \phi\ddot{\psi}) + 2\ddot{\psi}\psi + 2\psi^2 - \rho \quad (3.51)$$

Escolhendo o caso em que $\phi(t) = \psi(t)$, a expressão de $H_{(+)}$ é dada por

$$H_{(+)} = \phi(t)(1 + \cos r) \quad (3.52)$$

O parâmetro de expansão é dado pela expressão:

$$\theta = -3\dot{\phi}(1 + \cos r) \quad (3.53)$$

Vamos impor sobre essas expressões uma equação de estado do tipo $p = \gamma\rho$, onde $0 \leq \gamma \leq 1$. Obtemos então que $\phi = 0$, e temos então o caso de fluido perfeito.

Impondo uma equação de estado na forma (3.20), para $k = 1, 2$, temos

$$p = \gamma\rho + \alpha\theta + \beta\theta^2 \quad (3.54)$$

onde α e β são constantes.

As expressões de ρ e p , podem ser escritas na forma:

$$\rho = \frac{1}{3} \theta^2 \quad (3.55)$$

$$p = \frac{2}{9} \frac{\ddot{\phi}\phi}{\dot{\phi}^2} \theta^2 - \frac{2}{3} \frac{\phi^2}{\dot{\phi}} \theta - \frac{1}{3} \theta^2 \quad (3.56)$$

Comparando a expressão (3.56) com a expressão (3.52) para $\beta = 0$, ficamos com as seguintes equações a resolver:

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = -\frac{2}{3\alpha} \quad (3.57)$$

e

$$\frac{\ddot{\phi}\phi}{\dot{\phi}^2} = \frac{3}{2} (\gamma+1) \quad (3.58)$$

Essas equações têm solução:

$$\phi(t) = \left[\frac{8}{9\alpha(\gamma+1)} t + c \right]^{-1} \quad (3.59)$$

onde c é uma constante.

Fazendo

$$\frac{8}{9\alpha(\gamma+1)} = a \quad , \quad (3.60)$$

pode-se reescrever (3.59) na forma:

$$\phi(t) = [at + c]^{-1} \quad (3.61)$$

O modelo é então descrito pela métrica:

$$ds^2 = \frac{(at+c)^2}{(\cos r+1)^2} (dt^2 - dr^2 - \text{sen}^2 r d\theta^2 - \text{sen}^2 r \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (3.62)$$

A partir da métrica, calcula-se as expressões das quantidades físicas e geométricas a , θ , q , ρ e p , obtendo-se os seguintes

resultados:

$$\theta = \frac{(1+\cos r)}{(at+c)^2} 3a \quad (3.63)$$

$$a_r = - \frac{\text{senr}}{(\cos r+1)} \quad (3.64)$$

$$q_r = 2a \frac{\text{senr}}{(at+c)^2} \quad (3.65)$$

$$\rho = 3a^2 \frac{(1+\cos r)^2}{(at+c)^4} \quad (3.66)$$

$$p = 3a\alpha \frac{(1+\cos r)}{(at+c)^2} + 3a^2 \gamma \frac{(1+\cos r)^2}{(at+c)^4} \quad (3.67)$$

Pode-se calcular também para esse modelo:

Constante de Hubble ⁽²⁾

$$H = \frac{a(1+\cos r)}{(at+c)^2}$$

Desvio para o vermelho ⁽²⁾

$$(1+z) = \frac{t_0}{t_e} \frac{(\cos t_e+1)}{(\cos t_0+1)} \quad .$$

Volume ⁽¹²⁾

$$V \rightarrow \infty$$

B) - 2ª Solução

Fazendo $\phi(t) = 0$, com $\Lambda = 0$, ficamos com a expressão

$$H_{(+)} = \psi(t) + \lambda(t) \operatorname{senr} \cos\theta \quad (3.65)$$

Com o mesmo procedimento do item anterior, fazendo

$$\lambda(t) = \psi(t) \quad ,$$

chegamos à solução

$$\psi(t) = \left[\frac{8}{9\alpha(\gamma + \frac{1}{3})} + c \right]^{-1} \quad , \quad (3.66)$$

ou

$$\psi(t) = (at+c)^{-1} \quad (3.67)$$

A métrica nesse caso tem a forma:

$$ds^2 = \frac{(at+c)^2}{(\operatorname{senr}\cos\theta+1)^2} [dt^2 - dr^2 - \operatorname{sen}^2 r d\theta^2 - \operatorname{sen}^2 r \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2] \quad (3.68)$$

As quantidades físicas e geométricas dessa solução são dadas pelas expressões:

$$\theta = \frac{3a(1+\operatorname{senr}\cos\theta)}{(at+c)^2} \quad (3.69)$$

$$a_r = \frac{-\operatorname{cosr}\cos\theta}{(\operatorname{senr}\cos\theta+1)} \quad (3.70)$$

$$a_\theta = \frac{-\operatorname{senr}\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{senr}\cos\theta+1} \quad (3.71)$$

$$q_r = \frac{2a(\operatorname{senr}-\operatorname{cosr}\cos\theta)}{(at+c)^2} \quad (3.72)$$

$$q_{\theta} = 2a \frac{\text{senr sen}\theta}{(at+c)^2} \quad (3.73)$$

$$\rho = 3a^2 \frac{(1+\text{senr cos}\theta)^2}{(at+c)^2} \quad (3.74)$$

$$p = 3a\alpha \frac{(1+\text{senr cos}\theta)}{(at+c)^2} + 3a^2 \gamma \frac{(1+\text{senr cos}\theta)^2}{(at+c)^4} \quad (3.75)$$

Constante de Hubble

$$H = \frac{a(1+\text{senr cos}\theta)}{(at+c)^2}$$

Desvio para o vermelho

$$(1+z) = \frac{t_0 (1+\text{sen}t_e \text{cos}\theta)}{t_e (1+\text{sen}t_0 \text{cos}\theta)} \quad \cdot$$

Volume

$$V \rightarrow \infty$$

CONCLUSÃO

As soluções encontradas no Capítulo III para o sistema de equações $\pi_{\mu\nu} = 0$ podem gerar um grande número de soluções representativas de modelos cosmológicos ao analisarmos possíveis equações de estado para o fluido. Com isso, pode-se obter expressões explícitas para as funções $\phi(t)$, $\lambda(t)$, $\psi(t)$ e $\eta(t)$.

As soluções encontradas como casos particulares têm como fonte um fluido viscoso e sua natureza deverá ser analisada estudando-se possíveis valores para os parâmetros envolvidos.

Nesses dois casos, podemos ver pelas expressões das quantidades físicas e geométricas que existe uma singularidade física para $t = -\frac{c}{a}$. A análise dessas soluções será feita futuramente.

APÊNDICE A

CÁLCULO DOS TENSORES DE WEYL

Como vimos no Capítulo II, geometrias conformalmente planas têm tensor de Weyl nulo.

Vamos mostrar nesse Apêndice, que uma métrica conformalmente plana geral escrita na forma

$$ds^2 = e^{2f} [dt^2 - dr^2 - g^2(r)d\theta^2 - g^2(r)\text{sen}^2\theta d\phi^2] ,$$

onde $f = f(r, \theta, \phi, t)$ é qualquer função das coordenadas, tem tensor de Weyl nulo, se a função $g(r)$ tem as seguintes expressões:

$$g(r) = r , \quad \text{sen } r \quad \text{ou} \quad \text{snh } r .$$

Símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{00}^0 = f_{/0}$$

$$\Gamma_{01}^0 = f_{/1}$$

$$\Gamma_{02}^0 = f_{/2}$$

$$\Gamma_{03}^0 = f_{/3}$$

$$\Gamma_{11}^0 = f_{/0}$$

$$\Gamma_{12}^0 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = f_{/2}$$

$$\Gamma_{13}^1 = f_{/3}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -g^2 f_{/1} - gg_{/1}$$

$$\Gamma_{23}^1 = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = -g^2 \text{sen}^2\theta f_{/1} - gg_{/1} \text{sen}^2\theta$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{f_{/2}}{g}$$

$$\Gamma_{13}^0 = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = f_{/0} g^2$$

$$\Gamma_{23}^0 = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = f_{/0} g^2 \text{sen}^2 \theta$$

$$\Gamma'_{00} = f_{/1}$$

$$\Gamma'_{01} = f_{/0}$$

$$\Gamma'_{02} = 0$$

$$\Gamma'_{03} = 0$$

$$\Gamma'_{11} = f_{/1}$$

$$\Gamma_{01}^2 = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = f_{/0}$$

$$\Gamma_{03}^2 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{f_{/2}}{g^2}$$

$$\Gamma_{12}^2 = f_{/1} + \frac{g_{/1}}{g}$$

$$\Gamma_{13}^2 = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = f_{/2}$$

$$\Gamma_{23}^2 = f_{/3}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -(\text{sen} \theta f_{/2} + \text{sen} \theta \cos \theta)$$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{f_{/3}}{g^2 \text{sen}^2 \theta}$$

$$\Gamma_{01}^3 = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = f_{/0}$$

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{f_{/3}}{g^2 \text{sen}^2 \theta}$$

$$\Gamma_{12}^3 = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = f_{/1} + \frac{g_{/1}}{g}$$

$$\Gamma_{22}^3 = -\frac{f_{/3}}{\text{sen}^2 \theta}$$

$$\Gamma_{23}^3 = f_{/2} + \text{cotg} \theta$$

$$\Gamma_{33}^3 = f_{/3}$$

Tensor de Riemann:

$$R_{1010} = e^{2f} \left[-f_{/0/0} + f_{/1/1} + \frac{f_{/2}^2}{g^2} + \frac{f_{/3}^2}{g^2 \text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$R_{1021} = e^{2f} [f_{/0/2} - f_{/0} f_{/2}]$$

$$R_{1031} = e^{2f} [f_{/0/3} - f_{/0} f_{/3}]$$

$$R_{2010} = e^{2f} \left[f_{/1/2} - f_{/1} f_{/2} - f_{/2} \frac{g_{/1}}{g} \right]$$

$$R_{2020} = e^{2f} \left[-g^2 f_{/0/0} + g^2 f_{/1}^2 + gg_{/1} f_{/1} + f_{/2/2} + \frac{f_{/3}^2}{\text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$R_{2021} = e^{2f} g^2 [f_{/0} f_{/1} - f_{/0} f_{/1}]$$

$$R_{2032} = e^{2f} g^2 [f_{/0/3} - f_{/0} f_{/3}]$$

$$R_{3010} = e^{2f} [f_{/1/3} - f_{/1} f_{/3} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/3}]$$

$$R_{3020} = e^{2f} [f_{/2/3} - f_{/2} f_{/3} - f_{/3} \cot g \theta]$$

$$R_{3030} = e^{2f} \left[-g^2 f_{/0/0} \text{sen}^2 \theta + g^2 f_{/1}^2 \text{sen}^2 \theta + gg_{/1} f_{/1} \text{sen}^2 \theta + \right. \\ \left. + f_{/2} \text{sen} \theta \cos \theta + f_{/2}^2 \text{sen}^2 \theta + f_{/3/3} \right]$$

$$R_{3031} = e^{2f} g^2 \text{sen}^2 \theta [f_{/0} f_{/1} - f_{/0/1}]$$

$$R_{3032} = e^{2f} g^2 \text{sen}^2 \theta [f_{/0} f_{/2} - f_{/0/2}]$$

$$R_{2121} = e^{2f} \left[-g^2 f_{/1/1} + g^2 f_{/0}^2 - gg_{/1/1} - gg_{/1} f_{/1} - f_{/2/2} - \frac{f_{/3}^2}{\text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$R_{2132} = e^{2f} g [gf_{/1/3} - gf_{/1} f_{/3} - g_{/1} f_{/3}]$$

$$R_{3121} = e^{2f} [f_{/2} f_{/3} - f_{/2/3} + f_{/3} \cot g \theta]$$

$$R_{3131} = e^{2f} \left[g^2 \text{sen}^2 \theta f_{/0}^2 - g^2 \text{sen}^2 \theta f_{/1/1} - gg_{/1/1} \text{sen}^2 \theta - \right. \\ \left. - gg_{/1} f_{/1} \text{sen}^2 \theta - f_{/2} \text{sen} \theta \cos \theta - f_{/2}^2 \text{sen}^2 \theta - f_{/3/3} \right]$$

$$R_{3132} = e^{2f} g^2 \text{sen}^2 \theta [g_{/1} f_{/2} - g f_{/1/2} + g f_{/1} f_{/2}]$$

$$R_{3232} = e^{2f} g^2 [g_{/0}^2 \text{sen}^2 \theta - g_{/1}^2 \text{sen}^2 \theta - 2g g_{/1} f_{/1} \text{sen}^2 \theta - \\ - f_{/2} \text{sen} \theta \cos \theta - f_{/2/2} \text{sen}^2 \theta - g_{/1} \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta - f_{/3/3}]$$

Tensor de Ricci:

$$R_{00} = 3f_{/0/0} - f_{/1/1} - 2f_{/1}^2 - \frac{2g_{/1}}{g} f_{/1} - \frac{1}{g} f_{/2} \cotg \theta - \\ - \frac{2}{g} f_{/2}^2 - \frac{1}{g} f_{/2/2} - \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} f_{/3/3} - \frac{2}{g^2 \text{sen}^2 \theta} f_{/3}^2$$

$$R_{10} = 2[f_{/0/1} - f_{/0} f_{/1}]$$

$$R_{20} = 2[f_{/0/2} - f_{/0} f_{/2}]$$

$$R_{30} = 2[f_{/0/3} - f_{/0} f_{/3}]$$

$$R_{11} = -f_{/0/0} - 2f_{/0}^2 + 3f_{/1/1} + \frac{2}{g} g_{/1/1} + 2 \frac{g_{/1}}{g} f_{/1} + \\ + \frac{1}{g} f_{/2} \cotg \theta + \frac{2}{g} f_{/2}^2 + \frac{1}{g} f_{/2/2} + \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} f_{/3/3} + \\ + \frac{2f_{/3}^2}{g^2 \text{sen}^2 \theta}$$

$$R_{12} = 2[f_{/1/2} - f_{/1} f_{/2} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/2}]$$

$$R_{13} = 2[f_{/1/3} - f_{/1}f_{/3} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/3}]$$

$$R_{22} = -g^2 f_{/0/0} + g_{/1/1} + 2g^2 f_{/1}^2 - 2g^2 f_{/0}^2 + gg_{/1/1} +$$

$$+ 4gg_{/1} f_{/1} + f_{/2} \cotg\theta + 3f_{/2/2} + g_{/1}^2 - 1 + \frac{f_{/3/3}}{\text{sen}^2\theta} +$$

$$+ \frac{2 \cdot f_{/3}^2}{\text{sen}^2\theta}$$

$$R_{23} = 2[f_{/2/3} - f_{/2}f_{/3} - f_{/3} \cotg\theta]$$

$$R_{33} = -g^2 \text{sen}^2\theta f_{/0/0} + g^2 \text{sen}^2\theta f_{/1/1} + 2g^2 \text{sen}^2\theta f_{/1}^2 -$$

$$- 2g^2 \text{sen}^2\theta f_{/0}^2 + gg_{/1/1} \text{sen}^2\theta + 4gg_{/1} f_{/1} \text{sen}^2\theta +$$

$$+ 3f_{/2} \text{sen}\theta \cos\theta + 2f_{/2}^2 \text{sen}^2\theta + f_{/2/2} \text{sen}^2\theta + g_{/1}^2 \text{sen}^2\theta -$$

$$- \text{sen}^2\theta + 3f_{/3/3}$$

Escalar de Curvatura:

$$R = e^{-2f} [6f_{/0/0} - 6f_{/1/1} - 6f_{/1}^2 + 6f_{/0}^2 - 4 \frac{g_{/1/1}}{g} - 12 \frac{g_{/1}f_{/1}}{g} -$$

$$- \frac{6}{g^2} f_{/2} \cotg\theta - \frac{6}{g^2} f_{/1}^2 - \frac{6}{g^2} f_{/2/2} - \frac{2}{g^2} g_{/1}^2 + \frac{2}{g^2} -$$

$$- \frac{3}{g^2 \text{sen}^2\theta} f_{/3/3} - \frac{3}{g^2 \text{sen}^2\theta} f_{/3}^2]$$

Com esses resultados, calcula-se as componentes do tensor de Weyl, usando-se a expressão

$$W_{\alpha\beta\nu\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} [R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] + \\ + \frac{1}{6} R[g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}]$$

Todas as componentes são zero, com excessão das seguintes:

$$W_{1010} = \frac{e^{2f}}{3g} [-g g_{/1/1} + g_{/1}^2 - 1]$$

$$W_{2020} = \frac{e^{2f}}{6} [g g_{/1/1} - g_{/1}^2 + 1]$$

$$W_{3030} = \frac{e^{2f}}{6} \text{sen}^2\theta [g g_{/1/1} - g_{/1}^2 + 1]$$

$$W_{2121} = \frac{e^{2f}}{6} [-g g_{/1/1} + g_{/1}^2 - 1]$$

$$W_{3232} = \frac{e^{2f}}{3} g^2 \text{sen}^2\theta [g g_{/1/1} - g_{/1}^2 + 1]$$

$$W_{3131} = \frac{e^{2f}}{6} \text{sen}^2\theta [(g_{/1})^2 - g g_{/1/1} - 1]$$

Essas componentes são zero para a equação:

$$g g_{/1/1} - g_{/1}^2 + 1 = 0$$

que tem como soluções

$$g(r) = r \quad , \quad g(r) = \text{sen}r \quad , \quad g(r) = \text{shr} \quad .$$

APÊNDICE B

EQUIVALÊNCIA DO FORMALISMO QUASE-MAXWELLIANO COM A TEORIA DE EISNTEIN

A equivalência do formalismo Quase-Maxwelliano com as Equações de Einstein da Gravitação é feita com a escolha de $J^{\alpha\beta\mu}$, como visto na seção 2 do Capítulo I, e com a imposição da validade das equações Quase-Maxwellianas sobre uma superfície de Cauchy, $t = \text{cte}$, como feito para as equações de Einstein.

Vai-se mostrar então, que para qualquer superfície $t = \text{cte}$, as equações de Einstein são idênticas ao conjunto de equações Quase-Maxwellianas para o caso de geometrias conformalmente planas com a escolha de observadores definidos pela relação (2.5).

Com os resultados do Apêndice A, calcula-se as componentes do tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} G_{00} = & \frac{1}{g^2 \text{sen}^2 \theta} [g^2 f_{/1}^2 \text{sen}^2 \theta + 2f_{/2} \text{sen} \theta \cos \theta + 2g^2 f_{/1/1} \text{sen}^2 \theta - \\ & - 3g^2 f_{/0}^2 + 2g g_{/1/1} \text{sen}^2 \theta + 4g g_{/1} f_{/1} \text{sen}^2 \theta + \\ & + 2f_{/3/3} + f_{/3}^2 + f_{/2} \text{sen}^2 \theta + g^2_{/1} \text{sen}^2 \theta + 2f_{/2/2} \text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta] \end{aligned}$$

$$G_{01} = 2[f_{/0/1} - f_{/0}f_{/1}]$$

$$G_{02} = 2[f_{/0/2} - f_{/0}f_{/2}]$$

$$G_{03} = 2[f_{/0/3} - f_{/0}f_{/3}]$$

$$G_{11} = 2f_{/0/0} + f_{/0}^2 - \frac{4g_{/1}}{g} f_{/1} - \frac{2}{g^2} f_{/2} \cdot \cotg\theta - 3f_{/3}^2 - \\ - \frac{2}{g^2} f_{/2/2} - \frac{2f_{/3/3}}{g^2 \text{sen}^2\theta} - \frac{f_{/3}}{g^2 \text{sen}^2\theta} - \frac{-g_{/1}^2}{g^2} + \frac{1}{g^2}$$

$$G_{12} = f_{/1/2} - f_{/1}f_{/2} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/2}$$

$$G_{13} = f_{/1/3} - f_{/1}f_{/3} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/3}$$

$$G_{22} = 2g^2 f_{/0/0} + g^2 f_{/0}^2 - 2g^2 f_{/1/1} - g^2 f_{/1}^2 - 2gg_{/1} f_{/1} - \\ - 3f_{/2}^2 - 2f_{/2} \cotg\theta - \frac{2f_{/3/3}}{\text{sen}^2\theta} - \frac{f_{/3}^2}{\text{sen}^2\theta} - gg_{/1/1}$$

$$G_{23} = 2f_{/2/3} - 2f_{/2}f_{/3} - 2f_{/3} \cotg\theta$$

$$G_{33} = 2g^2 f_{/0/0} \text{sen}^2\theta + g^2 f_{/0}^2 \text{sen}^2\theta - g^2 f_{/1}^2 \text{sen}^2\theta - \\ - 2g^2 f_{/1/1} \text{sen}^2\theta - 2g g_{/1} f_{/1} \text{sen}^2\theta - f_{/2}^2 \text{sen}^2\theta - \\ - 2f_{/2/2} \text{sen}^2\theta - 3f_{/3}^2$$

A expressão de $T_{\mu\nu}$ geral, é dada por:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu} + q_{\mu} V_{\nu} + q_{\nu} V_{\mu} + \pi_{\mu\nu}$$

Das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

e de (B.1), chega-se a

$$T_{\mu\nu} = -G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

Usando (2.12), (3.2) e as relações

$$\pi_{\mu\nu} V^\mu = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$q_0 = 0 \quad (\text{B.5})$$

tem-se:

$$T_{00} = e^{2f} \rho$$

$$T_{01} = e^f q_1$$

$$T_{02} = e^f q_2$$

$$T_{03} = e^f q_3$$

$$T_{11} = e^{2f} p + \pi_{11}$$

$$T_{12} = \pi_{12}$$

$$T_{13} = \pi_{13}$$

$$T_{22} = p e^{2f} + \pi_{22}$$

$$T_{23} = \pi_{23}$$

$$T_{33} = p e^{2f} + \pi_{33}$$

De (B.3), chega-se a

$$T_{00} = -G_{00} - e^{2f} \Lambda$$

$$T_{01} = -G_{01}$$

$$T_{02} = -G_{02}$$

$$T_{03} = -G_{03}$$

$$T_{11} = -G_{11} + e^{2f} \Lambda$$

$$T_{12} = -G_{12}$$

$$T_{13} = -G_{13}$$

$$T_{23} = -G_{23}$$

$$T_{22} = -G_{22} + e^{2f} g^2 \Lambda$$

$$T_{33} = -G_{33} + e^{2f} g^2 \text{sen}^2 \theta \Lambda$$

Igualando as expressões de T_{01} , T_{02} , T_{03} , e substituindo-se as expressões de G_{01} , G_{02} , G_{03} calculadas a partir da métrica geral, chega-se a

$$q_1 = 2e^{-f} (f_{/0} f_{/1} - f_{/0/1}) \quad (\text{B.6})$$

$$q_2 = 2e^{-f} (f_{/0} f_{/2} - f_{/0/2}) \quad (\text{B.7})$$

$$q_3 = 2e^{-f} (f_{/0} f_{/3} - f_{/0/3}) \quad (\text{B.8})$$

Fazendo o mesmo com T_{12} , T_{13} , T_{23} , tem-se

$$\pi_{12} = -2 [f_{/1/2} - f_{/1} f_{/2} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/2}] \quad (\text{B.9})$$

$$\pi_{13} = -2 [f_{/1/3} - f_{/1} f_{/3} - \frac{g_{/1}}{g} f_{/3}] \quad (\text{B.10})$$

$$\pi_{23} = -2 [f_{/2/3} - f_{/2} f_{/3} - f_{/3} \text{cotg} \theta] \quad (\text{B.11})$$

Calculando o traço da equação (B.3), chega-se a

$$G = -T - 4\Lambda \quad , \quad (\text{B.12})$$

onde

$$G = G^0_0 + G^1_1 + G^2_2 + G^3_3 \quad . \quad (B.13)$$

Substituindo as expressões de $g^{\mu\nu}$, tem-se

$$G = e^{-2f}G_{00} - e^{-2f}G_{11} - \frac{e^{-2f}}{g^2} G_{22} - \frac{e^{-2f}}{g^2 \text{sen}^2\theta} G_{33} \quad . \quad (B.14)$$

Calculando o traço da expressão para $T_{\mu\nu}$, chega-se a:

$$T = \rho - 3p \quad . \quad (B.15)$$

Igualando as expressões de T_{00} , temos

$$\rho = -e^{-2f}G_{00} - \Lambda \quad . \quad (B.16)$$

De (B.12) e (B.15), tem-se

$$p = \frac{1}{3} [G + 4\Lambda + \rho]$$

Substituindo (B.16), chega-se a

$$p = \frac{1}{3} [G + 4\Lambda - e^{-2f}G_{00} - \Lambda] \quad (B.17)$$

A partir de (B.16) e (B.17), e substituindo-se (B.14) com as expressões de G_{00} , G_{11} , G_{22} e G_{33} , calcula-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\rho + 3p) + &= e^{-2f} [3f_{/0/0} - f_{/1/1} - \frac{1}{g^2} f_{/2/2} - \frac{1}{g^2 \text{sen}^2\theta} f_{/3/3} \\ &- 2f_{/1}^2 - \frac{2}{g^2} f_{/2}^2 - \frac{2}{g^2 \text{sen}^2\theta} f_{/3}^2 - \frac{2f_{/1}g_{/1}}{g} - \frac{f_{/2} \text{cotg}\theta}{g^2}] \quad (B.18) \end{aligned}$$

Podemos obter as expressões de π_{11} , π_{22} , e π_{33} , igualando as

expressões para T_{11} , T_{22} , T_{33} e substituindo-se nessas igualdades a expressão (B.17) de p.

Chegamos então a:

$$\begin{aligned} \pi_{11} = & 2 \left[\frac{2}{3} \frac{g/1}{g} f_{/1} + \frac{2}{3} f_{/1}^2 - \frac{2}{3} f_{/1/1} + \frac{1}{3g^2} f_{/2/2} - \frac{1}{3g^2} f_{/2}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3g^2} f_{/2} \cot g\theta - \frac{1}{3g^2} \frac{f_{/3}^2}{\text{sen}^2\theta} + \frac{1}{3g^2} \frac{f_{/3/3}}{\text{sen}^2\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \pi_{22} = & 2 \left[\frac{1}{3} g^2 f_{/1/1} - \frac{1}{3} g^2 f_{/1}^2 - \frac{1}{3} g g_{/1} f_{/1} - \frac{2}{3} f_{/2/2} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} f_{/2}^2 + \frac{1}{3} f_{/2} \cot g\theta - \frac{1}{3} \frac{f_{/3}^2}{\text{sen}^2\theta} + \frac{1}{3} \frac{f_{/3/3}}{\text{sen}^2\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \pi_{33} = & 2 \left[\frac{1}{3} g^2 \text{sen}^2\theta f_{/1/1} - \frac{1}{3} g^2 \text{sen}^2\theta f_{/1}^2 - \frac{1}{3} g_{/1} f_{/1} \text{sen}^2\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} f_{/2/2} \text{sen}^2\theta - \frac{1}{3} f_{/2}^2 \text{sen}^2\theta - \frac{2}{3} f_{/2} \text{sen}\theta \cos\theta - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} f_{/3/3} + \frac{2}{3} f_{/3}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Pode-se notar, que as equações (B.5), (B.6), (B.7), (B.8), (B.9), (B.10), (B.11), (B.18), (B.19), (B.20), (B.21), obtidas a partir das equações de Einstein, são idênticas ao conjunto de equações quase-Maxwellianas (2.27), (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36) para a métrica geral.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Novello M., Soares, I.D., Salim, J.M., "On Jacobi Fluids", GRG, Vol. 8, nº 2, pg. 95-102, (1977).
- (2) - Ellis, GFR, "Relativistic Cosmology", in R. Scachs (editor); General Relativity and Cosmology - Curso XLVIII de Int. School of Physics Enrico Fermi de Varena - Academic Press - New York (1971).
- (3) - Soares, I.D., Notas de Aula, "Curso de Cosmologia", CBPF (1983).
- (4) - Salim, J.M., "Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann", Tese de Doutorado, CBPF (1982).
- (5) - Salim, J.M., "Monopolos Gravitacionais", Tese de Mestrado, CBPF (1976).
- (6) - Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M., "Introduction to General Relativity", 2ª edição, McGraw-Hill, Inc.(1975).
- (7) - Fulton, T., Rohrlich, F., Witten, L., "Conformal Invariance in Physics", Review of Modern Physics, vol. 34, nº 3, (1962).
- (8) - Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., Herlt, E., "Exact Solutions of Einstein's Fields Equations", 1ª edição, VEB Deustscher Verlarg der Wissenschaftler (1980).
- (9) - Novello, M., Araújo, R.A., "Qualitative Analysis of Homogeneous Universes", Physical Review D, V. 22, nº 2, pg. 260 (1980).
- (10) - Bondarenko, N.P., Kobushkin, P.K., "Some Conformally Flat Aximetric Cosmological Models", Soviet Physics-Doklady, Vol. 17, nº 1 (1972).

- (11) - Novello, M., "Cosmologia Relativista", II Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Rio de Janeiro (1980).
- (12) - Landau, L.D., Lifshitz, E., "Teoria do Campo, Ed. MIR, Moscow (1980).

“Análise de geometrias conformalmente planas
no formalismo
das equações quase-Maxwellianas”

Claudia Pombo Costa

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

José Martins Salim – Presidente/CBPF

Murari Mohan Son – UFRJ

Carlos Augusto Pinto Galvão – CBPF

Jaime Tiomno – CBPF