LUIZ ALBERTO DE SANTANA CORDOLINO

CAMPOS DE YANG-MILLS COM MASSA NA FORMULAÇÃO DE KEMMER

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1984

À minha esposa Franca,

- aos sacrifícios que lhe impus,
- às decisões compartilhadas,
- à sua presença positiva,
- ao carinho e amor que a mim dirige.

Com infinito amor
dedico esta tese.

AGRADECIMENTOS

Por mais justos que queiramos ser, neste momento, enveredamos em direção da injustiça. Lembro-me de uma solenidade de formatura, IFCS-UFRJ, onde o orador ao final do seu discurso, disse "que todos se sintam homenageados", e enfatizou, " quem assim não se quiser sentir, não se sinta".

Dou-me o direito de transigir ao modo habitual, apesar das omissões que certamente cometerei, e estratificarei meus agradecimentos, por este trabalho, da seguinte forma:

- a Adel da Silveira, meu Orientador, pela sua constante e segura orientação, sem a qual não seria possível a realização deste trabalho;
- a J.J. Giambiagi, pelo permanente interesse com o meu desenvolvimento científico;
- a J. Thadeu pela ajuda no teste das matrizes β_μ por computador, tradução de textos, sugestões, e pela amizade que nos une;
- a Pedro Amaro, Laurentina, Pedro, Lucia , Vera, Marta, Antunes, Paulo, Ligia, Marcos – meus pais e irmãos;
- à Helena S. Ferreira, pela dedicação, sugestões e eficiência no trabalho de datilografia desta tese;
- aos colegas do DCP, DRP, que auxiliaram no decorrer dos cálculos e aos colegas dos outros departamentos pela manifesta preocupação e amizade,

enfim, indiscriminadamente, a todos com quem convivi neste período.

Resumo

A equação de Kemmer, que descreve o méson, é apresentada no formalismo da teoria de campos. Através da identidade de Noether, encontram-se grandezas que se conservam.

Este formalismo é empregado para os campos de Yang-Mills massivo e duas equações, similares à equação de Kemmer, são obtidas, embora de formatos diferentes, ambas contêm termos quadráticos. Em consequência definir-se-ão duas Lagrangianas, formalmente distintas, para os campos de Yang-Mills. Será calculado o Hamiltoniano tipo Schroedinger para a primeira equação de onda. Este Hamiltoniano apresenta um termo de interação do spin com o campo de Yang-Mills, ϕ_{jk}.

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO

As equações de Yang-Mills[1] resultaram do reconhecimento de que transformações de gauge de primeira espécie, com fase constante, se fossem associadas a um processo físico corresponderiam à propagação com velocidade infinita. Realmente, a função de onda é igualmente alterada, ao mesmo tempo, em todos os pontos. Yang-Mills são equações que tomam a forma das equações de Maxwell[2], ao se omitir os termos não lineares. O termo de massa, que seria o necessário complemento se se desejasse a analogia com as equações de Proca[3], é inconveniente porque não é gauge invariante. Além disso, é impossível formular uma teoria deste tipo renormalizável[4], na qual o termo de massa seja introduzido desde o início. O mecanismo de Higgs[5], com o aparecimento do termo de massa após a quebra de simetria, permite a formulação teórica em termos aceitáveis, embora se esteja em presença de mais uma solução artificial para resolver um problema em Física.

Em 1940 Pauli[6] considerou transformações dependentes da posição, no problema da formulação da equação de Dirac em espaço de Riemann. O tratamento de Pauli difere do de Yang-Mills[1] em um ponto essencial. É que estes últimos consideram o sistema constituído pelo próton e pelo neutron como aquele ao qual se aplicam as transformações. A invariância isotópica permite considerar o sistema final constituído das mesmas partículas iniciais, embora não estejam necessariamente na mesma ordem. Matematicamente, consegue-se realizar o processo empregando o grupo SU(2). Cál culos posteriores permitiram acrescentar à teoria outros grupos, SU(n), mas este acréscimo está fora das nossas cogitações.

É bem conhecida a utilidade da formulação Hamiltoniana na Mecânica Quântica de Heisemberg-Dirac. Os processos de cálculos encontram, no entanto, sua melhor expressão no formalismo Lagrangiano. O conhecimento da ação permite que se conheça o estado de um sistema como a superposição de estados anteriores em diferentes pontos. O processo de integração, realizado de forma relativisticamente invariante só é praticamente significativa , no entanto, quando feito em aproximações sucessivas. É um processo que não permite globalizar, mas permite calcular, usando o que Schwinger(7) chamou de Física da Subtração.

Alguns autores tentaram, sem muito sucesso, manter o termo de massa na Teoria de Yang-Mills(4). Por exemplo, procuraram encontrar as condições que tornariam possível a renormalização, se a equação possuísse este termo. Realmente é difícil escrever a Lagrangiana da teoria, calcular os momentos p_i e, a partir daí, obter a Hamiltoniana. São muitos termos que tornam o tratamento algébrico laborioso. Existe uma possível simplificação se pudermos empregar a equação de Kemmer(8-14). Esta equação é análoga à equação de Dirac, mas em lugar das matrizes de Dirac, γ_μ, são usadas as matrizes β_μ(8,15-18), que obedecem a regras de comutação mais complicadas. A partir destas regras de comutação é possível demonstrar que existem três representações irredutíveis(8,11,12,19,20), uma 10×10, a outra 5×5, e a última , trivial, é uma matriz 1 × 1 . A segunda, de dimensão 5, permite que a equação de onda descreva partícula de spin zero(21) e não interessa em nosso trabalho; a primeira, de dimensão 10, é a que será utilizada.

Este trabalho visa retomar o formalismo de Duffin-Kemmer e aplicá-lo ao campo de Yang-Mills massivo, como recentemente, fizeram Silveira[22] e Okubo-Tosa[23]. O primeiro encontra uma equação similar a Kemmer e determina o Hamiltoniano tipo Schroedinger; enquanto o segundo define uma Lagrangiana com um termo de interação cúbica, e conduz a generalizações tais como: interação com a matéria, supersimetria e gravitação.

Sem contestar o mérito do trabalho publicado por Silveira[22] nós levantamos o seguinte problema: a equação de onda encontrada por ele não permite definir uma Lagrangiana.

No presente trabalho iremos resolver esta questão da seguinte maneira: reescreveremos a equação, como fez Silveira, de tal forma que admita adjunta e, consequentemente, iremos definir a Lagrangiana. A seguir determinaremos o Hamiltoniano tipo Schroedinger, e procuraremos analisar seus termos em busca de um conteúdo físico.

Com o intuito de que se possa extrair, de imediato, a idéia central do presente trabalho, sem a necessidade de sua leitura integral, apresentaremos um resumo do conteúdo de cada capítulo.

No capítulo inicial, o artigo publicado por N. Kemmer[8] é tomado por base. Lá ele formaliza a teoria de partícula para o termo méson através da equação que leva seu nome. Enquanto que nós desenvolveremos a teoria de campo e a partir da densidade da Lagrangiana encontraremos o tensor densidade de energia e o momentum angular total (momentum orbital mais o termo de spin), via identidade de Noether[24]. Mostramos também a invariância relativística do formalismo com mais detalhes.

Silveira[22], em seu artigo, reescreve as equações de

Yang-Mills numa forma compacta, tipo equação de Kemmer, mas que constatamos não admitir a adjunta. No Capítulo II este procedimento será retomado detalhadamente de tal modo que a equação resultante admita a adjunta.

No capítulo seguinte encontraremos a adjunta e, consequentemente, a Lagrangiana.

O quarto capítulo se deve à idéia original de Okubo-Tosa[23] de escrever o Lagrangiano dos campos de Yang-Mills com um termo de interação cúbica envolvendo coeficientes lineares (Γ), de estrutura complicada. Redefiniremos estes coeficientes e encontraremos um termo de interação cúbica similar que difere de fatores visto que existem diferenças nas definições das equações de Yang-Mills e do campo Ψ que adotaremos daquelas que Okubo adota.

Os Capítulos V e VI foram motivados pela mudança concretizada no Capítulo II ao escrever as equações de Yang-Mills na forma de Kemmer, admitindo a adjunta. Obteremos a Hamiltoniana[8,10-22] tipo Schrodinger e analisaremos seus termos.

No Apêndice A chegaremos a Lagrangiana de Okubo-Tosa com a finalidade de ressaltarmos as diferenças existentes entre esta e a do Capítulo IV .

ASPECTOS DA TEORIA DE KEMMER

Este capítulo tem por finalidade comprovar, através do formalismo da teoria de campos, alguns resultados obtidos por N. Kemmer[8] ao definir a equação de onda para a partícula meson. Definimos a Lagrangiana e mostramos sua invariância em relação à mudança de fase, com parâmetro constante. Encontramos, via identidade de Noether, grandezas que se conservam. Mostramos, também, a invariância relativística do formalismo.

1.1 - EQUAÇÃO DE KEMMER

N. Kemmer[8] associou o termo meson a uma partícula de massa m e carga $\pm e$, que é descrita pela equação de onda

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \quad , \qquad (1.1.1)$$

onde os operadores β_μ satisfazem à seguinte relação de comutação:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\lambda} + \beta_\lambda \delta_{\nu\mu} \quad . \qquad (1.1.2)$$

Ψ é a função de onda da partícula e ∂_μ representa a derivada parcial $\partial/\partial x_\mu$, $\mu = 1,\ldots,4$ e $\partial/\partial x_4 = \partial/i\partial t$, ($\hbar$=c=1). De agora em diante vamos admitir que os índices gregos variam de 1 a 4.

A partir das matrizes β_μ, que obedecem à relação (1.1.2), do presente trabalho, como veremos nas páginas 55 e 56, poderemos formar uma álgebra de ordem 126. Existem três representações irredutíveis inequivalentes de β_μ de dimensões um, cinco e dez. Portanto, a função de onda da eq. (1.1.1) tem, em geral, 16 componentes. Neste trabalho, exceto neste capítulo e a menos que afirmemos o contrário, estaremos empregando matrizes 10×10 que correspondem às partículas de spin 1.

Se definirmos as quantidades η_μ por

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1 \quad , \tag{1.1.3}$$

podemos mostrar, por (1.1.2), que:

$$\beta_\mu^3 = \beta_\mu \quad , \quad \eta_\mu^2 = 1 \quad , \quad \eta_\mu\eta_\nu - \eta_\nu\eta_\mu = 0 \quad , \quad \eta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\eta_\mu = 0 \qquad (\mu \neq \nu). \tag{1.1.4}$$

A equação adjunta de (1.1.1) é

$$\partial_\mu \overline{\Psi}\beta_\mu - m\overline{\Psi} = 0 \quad , \tag{1.1.5}$$

onde

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \eta_4 \quad . \tag{1.1.6}$$

Em (1.1.6) $\Psi^\dagger$ é o hermitiano conjugado de Ψ.

Por (1.1.5) e (1.1.6) definimos a Lagrangiana pela igualdade

$$L = \frac{1}{2}\,[\overline{\Psi}(\beta_\mu\partial_\mu + m) - (\partial_\mu\overline{\Psi}\beta_\mu - m\overline{\Psi})]\Psi \quad . \tag{1.1.7}$$

Através da Lagrangiana (1.1.7) procuramos grandezas que se conservem. Como a Lagrangiana é função de Ψ, $\overline{\Psi}$, $\partial_\mu\Psi$ e $\partial_\mu\overline{\Psi}$, toda variação δL pode expressar-se na forma

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi}\right)\delta\Psi + \delta\overline{\Psi}\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{\Psi}}\right) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\,\delta(\partial_\mu\Psi) + \delta(\partial_\mu\overline{\Psi})\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\overline{\Psi})} \quad .$$

Contudo, se os campos satisfazem às equações de Lagrange dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\Psi}} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})}\right) \quad , \tag{1.1.8}$$

obtemos:

$$\delta L = \left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\right) \delta\Psi + \delta\overline{\Psi} \left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})}\right) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial_\mu(\delta\Psi) + \partial_\mu(\delta\overline{\Psi}) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} \quad ,$$

$$\delta L = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \delta\Psi + \delta\overline{\Psi} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})}\right] \quad . \tag{1.1.9}$$

1.2 - Invariância de Fase

A Lagrangiana é invariante em relação a uma mudança de fase

$$\Psi \rightarrow e^{i\xi}\Psi \quad ,$$

$$\overline{\Psi} \rightarrow \overline{\Psi}\, e^{-i\xi} \quad ,$$

se ξ for um parâmetro constante. Ao considerarmos ξ como um parâmetro infinitesimal, obteremos:

$$\delta\Psi = i\xi\Psi \quad ,$$

$$\delta\overline{\Psi} = -i\xi\overline{\Psi} \quad . \tag{1.2.1}$$

Como L é independente de fase, $\delta_\xi L = 0$. Substituindo (1.2.1) em (1.1.9), teremos

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \quad , \tag{1.2.2}$$

onde

$$j_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \Psi - \overline{\Psi} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} \quad . \tag{1.2.3}$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = \frac{1}{2} \overline{\Psi} \beta_\mu$$

e $\qquad$ (1.2.4)

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} = -\frac{1}{2} \beta_\mu \Psi \ ,$$

teremos

$$j_\mu = \overline{\Psi} \beta_\mu \Psi \ , \tag{1.2.5}$$

e j_μ pode ser interpretado como vetor densidade corrente.

O valor médio de um operador, A, representado por $\overline{A}$, seguirá a definição usual

$$\overline{A} = \frac{1}{i} \int \overline{\Psi} \beta_4 A \Psi dV \quad . \tag{1.2.6}$$

1.3 - TRANSLAÇÕES E TENSOR MOMENTUM ENERGIA

Consideraremos agora uma variação na Lagrangiana produzida por um deslocamento infinitesimal, definida por

$$x'_\mu = x_\mu + \xi_\mu \ ,$$

onde

$$\delta x_\mu = \xi_\mu$$

é infinitesimal.

Os campos, consequentemente, sofrem as variações

$$\delta\Psi = (\partial_\nu \Psi)\xi_\nu \ ,$$
$$\delta\overline{\Psi} = (\partial_\nu \overline{\Psi})\xi_\nu \ , \tag{1.3.1}$$

e, de modo análogo, a Lagrangiana tem a seguinte variação

$$\delta L = (\partial_\nu L)\xi_\nu \quad . \tag{1.3.2}$$

Substituiremos (1.3.1) e (1.3.2) em (1.1.9), obtemos

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\partial_\nu \Psi + (\partial_\nu \overline{\Psi})\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} - \delta_{\mu\nu} L\right] = 0 \quad . \tag{1.3.3}$$

Consideremos o tensor $T_{\mu\nu}$ definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\partial_\nu \Psi + (\partial_\nu \overline{\Psi})\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} - \delta_{\mu\nu} L\right] \quad , \tag{1.3.4}$$

logo, por (1.3.3)

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{1.3.5}$$

Substituiremos (1.2.4) em (1.3.4) e como os campos satisfazem às equações de onda, então, $L \equiv 0$ temos:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\left[\overline{\Psi}\beta_\mu \partial_\nu \Psi - (\partial_\nu \overline{\Psi})\beta_\mu \Psi\right] \quad . \tag{1.3.6}$$

$T_{\mu\nu}$ é denominado tensor densidade de energia canônica. Como este tensor não é simétrico há problemas na localização da energia. Em geral, define-se um outro tensor simétrico que conduz à mesma energia total e ao mesmo momentum total.

1.4 - INVARIÂNCIA RELATIVÍSTICA

Com o intuito de produzir variações por rotações infinitesimais no sistema definido pela Lagrangiana (1.1.7) e assim obtermos "novas" grandezas que se conservam, iremos mostrar a invariância relativística da equação (1.1.1), com a finalidade de obtermos a transformação que atua sobre as componentes de Ψ numa mudança de coordenadas.

Consideremos a seguinte transformação de coordenadas

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad , \tag{1.4.1}$$

tal que

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \ . \tag{1.4.2}$$

Como a distância $x_\mu \, x_\mu$ deve ser conservada é possível mostrarmos que

$$\varepsilon_{\mu\nu} = - \varepsilon_{\nu\mu} \quad . \tag{1.4.3}$$

Levemos (1.4.2) a (1.4.1), obtemos

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \quad , \tag{1.4.4}$$

e por (1.4.1)

$$\partial'_\mu = a_{\mu\nu} \partial_\nu \ , \tag{1.4.5}$$

pois $\partial x_\nu / \partial x'_\mu = a_{\mu\nu}$.

Seja ainda a transformação

$$\Psi' = S\Psi \ , \tag{1.4.6}$$

da função de onda associada à transformação (1.4.1). Como vale (1.4.2), deve-se admitir que S seja uma transformação infinitesimal da seguinte forma

$$S = I + R \tag{1.4.6a}$$

e

$$R = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,s_{\mu\nu} \quad , \tag{1.4.6b}$$

onde

$$s_{\mu\nu} = -\,s_{\nu\mu} \quad . \tag{1.4.6c}$$

Portanto

$$S^{-1} = I - R \quad . \tag{1.4.7}$$

Consideremos a equação (1.1.1) no novo sistema de coordenadas

$$(\beta_\mu \partial'_\mu + m)\Psi' = 0 \quad , \tag{1.4.8}$$

devido a (1.4.5) e (1.4.6), obtemos:

$$\beta_\mu a_{\mu\nu}\partial_\nu S\Psi + mS\Psi = 0 \quad . \tag{1.4.8a}$$

Multipliquemos (1.4.8a) à esquerda por S^{-1}

$$S^{-1}\beta_\mu a_{\mu\nu} S\partial_\nu \Psi + mS'S\Psi = 0 \quad ,$$

portanto, obtemos a invariância relativística desejada

$$(\beta_\nu \partial_\nu + m)\Psi = 0 \quad ,$$

onde

$$\beta_\nu = a_{\mu\nu} S^{-1}\beta_\mu S \quad , \tag{1.4.9}$$

ou

$$S\beta_\nu S^{-1} = a_{\mu\nu}\beta_\mu \quad . \tag{1.4.9a}$$

Resta-nos portanto encontrar a transformação S .

Pelas equações (1.4.2), (1.4.6a),...,(1.4.7) a equação (1.4.9b) toma a seguinte forma

$$(I+R)\beta_\nu(I-R) = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\beta_\mu \quad , \qquad \varepsilon_{\mu\nu}\beta_\mu = R\beta_\nu - \beta_\nu R \quad ,$$

isto é,

$$\varepsilon_{\sigma\rho}\beta_\sigma = [R, \beta_\rho] \quad . \tag{1.4.10}$$

Calculemos o seguinte comutador

$$\varepsilon_{\nu\mu}[\beta_\rho, \beta_\nu\beta_\mu] \quad , \tag{1.4.10a}$$

$$\varepsilon_{\nu\mu}[\beta_\rho, \beta_\nu\beta_\mu] = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\nu\mu}[\beta_\rho(\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu) - (\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu)\beta_\rho \;] \quad . \tag{1.4.10b}$$

Como

$$\beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu + \beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho = \beta_\rho\delta_{\nu\mu} + \beta_\mu\delta_{\nu\rho} \quad , \tag{1.4.10c}$$

permutando ν por μ

$$\beta_\rho\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho = \beta_\rho\delta_{\mu\nu} + \beta_\nu\delta_{\mu\rho} \quad . \tag{1.4.10d}$$

Subtraimos (1.4.10c) de (1.4.10d) e obtemos

$$\beta_\rho(\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu) - (\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu)\beta_\rho = \beta_\mu\delta_{\nu\rho} - \beta_\nu\delta_{\mu\rho} \quad , \tag{1.4.10e}$$

Substituimos (1.4.10e) em (1.4.10b) e obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu\mu}[\beta_\rho, \beta_\nu\beta_\mu] &= \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\nu\mu}(\beta_\mu\delta_{\nu\rho} - \beta_\nu\delta_{\mu\rho}) \quad , \\ &= \varepsilon_{\rho\mu}\beta_\mu \quad . \end{aligned} \tag{1.4.10f}$$

Concluimos de (1.4.10) e (1.4.10f) que R tem a seguinte forma (a menos de matrizes comutando com β_μ e $\beta_\mu\beta_\sigma$):

$$R = + \,\varepsilon_{\nu\mu}\beta_\nu\beta_\mu \quad ,$$

$$R = +\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\nu\mu}(\beta_\nu\beta_\mu-\beta_\mu\beta_\nu) \quad . \qquad (1.4.11)$$

Como

$$S = I + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\nu\mu}s_{\nu\mu} \quad ,$$

então

$$s_{\nu\mu} = \beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu \quad . \qquad (1.4.12)$$

1.5 – Rotações e Momentum Angular

Iremos agora mostrar a conservação do momentum angular. Por (1.1.9) determinaremos δL, $\delta\Psi$ e $\delta\overline{\Psi}$ para o caso de rotações infinitesimais.

A variação da Lagrangiana (δL) devido à variação δx_μ nas coordenadas é

$$\delta L = (\delta_\mu L)\,\delta x_\mu \quad .$$

Pela transformação (1.4.4)

$$\begin{aligned}\delta L &= (\partial_\mu L)\,\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu \\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}[(\partial_\mu L)x_\nu - (\partial_\nu L)x_\mu] \quad . \qquad (1.5.1)\end{aligned}$$

A variação em Ψ, $\delta\Psi$, constará de duas partes

$$\delta\Psi = \delta_1\Psi + \delta_2\Psi \quad , \qquad (1.5.2)$$

a primeira $\delta_1\Psi$ é a variação produzida pela modificação do argumento e a segunda, $\delta_2\Psi$, é a variação na qual se leva em conta as componentes de Ψ .

Por outro lado, temos

$$\delta_1\Psi = (\partial_\mu\Psi)\delta x_\mu \quad ,$$

e por (1.4.4)

$$\delta_1\Psi = (\partial_\mu\Psi)\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}[(\partial_\mu\Psi)x_\nu - (\partial_\nu\Psi)x_\mu] \quad . \qquad (1.5.2a)$$

Em virtude de (1.4.6), (1.4.6a), (1.4.6b) e (1.4.12)

$$\Psi' = S\Psi = (I+R)\Psi \quad .$$

Aqui usamos a hipótese de transformação infinitesimal. Logo,

$$\delta_2\Psi = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}s_{\mu\nu}\Psi \quad . \qquad (1.5.2b)$$

Obtemos de (1.5.2b) e (1.5.2a) em (1.5.2)

$$\delta\Psi = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}[(\partial_\mu\Psi)x_\nu-(\partial_\nu\Psi)x_\mu+s_{\mu\nu}\Psi] \quad , \qquad (1.5.2c)$$

e evidentemente,

$$\delta\overline{\Psi} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}[(\partial_\mu\overline{\Psi})x_\nu-(\partial_\nu\overline{\Psi})x_\mu+\overline{\Psi}s_{\mu\nu}] \quad . \qquad (1.5.2d)$$

Substituindo em (1.1.9) os resultados encontrados em (1.5.1), (1.5.2c) e (1.5.2d), teremos

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}\Big[(\partial_\mu L)x_\nu-(\partial_\nu L)x_\mu\Big] = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\alpha\Bigg\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}\Big[(\partial_\mu\Psi)x_\nu -$$

$$- (\partial_\nu\Psi)x_\mu+s_{\mu\nu}\Psi\Big] + \Big[(\partial_\mu\overline{\Psi})x_\nu - (\partial_\nu\overline{\Psi})x_\mu - \overline{\Psi}s_{\mu\nu}\Big]\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\partial L}{\partial\,\partial_\alpha\overline{\Psi}}\Bigg\} \quad . \qquad (1.5.3)$$

O primeiro membro desta igualdade pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(\partial_\mu L)x_\nu - (\partial_\nu L)x_\mu = \partial_\alpha(\delta_{\alpha\mu}Lx_\nu - \delta_{\alpha\nu}Lx_\mu) \quad , \qquad (1.5.4)$$

portanto (1.5.3) toma a seguinte forma:

$$\varepsilon_{\mu\nu}\left[\delta_{\alpha\mu}Lx_\nu-\delta_{\alpha\nu}Lx_\mu\right] = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\alpha\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}\left[(\partial_\mu\Psi)x_\nu-(\partial_\nu\Psi)x_\mu + s_{\mu\nu}\Psi\right] + \left[(\partial_\mu\overline{\Psi})x_\nu-(\partial_\nu\overline{\Psi})x_\mu-\overline{\Psi}s_{\mu\nu}\right]\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\overline{\Psi})}\right\}$$

Esta igualdade é válida quaisquer que sejam os coefici_ entes $\varepsilon_{\mu\nu}$, logo podemos eliminá-los e obteremos

$$\partial_\alpha\left\{\delta_{\alpha\mu}Lx_\nu-\delta_{\alpha\nu}Lx_\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}\left[(\partial_\mu\Psi)x_\nu - (\partial_\nu\Psi)x_\mu\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[(\partial_\mu\overline{\Psi})x_\nu - (\partial_\nu\overline{\Psi})x_\mu - \overline{\Psi}s_{\mu\nu}\right]\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\overline{\Psi})}\right\} = 0 \quad .$$

Se colocarmos em evidência o fator x_μ e o fator x_ν teremos

$$\partial_\alpha\left\{x_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}(\partial_\nu\Psi) + (\partial_\nu\overline{\Psi})\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\overline{\Psi})} - \partial_{\alpha\nu}L\right] - x_\nu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}(\partial_\mu\Psi)\right.\right.$$

$$\left.\left. + (\partial_\mu\overline{\Psi})\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)} - \delta_{\alpha\mu}L\right] - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\Psi)}s_{\mu\nu}\Psi + \overline{\Psi}s_{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\overline{\Psi})}\right\} = 0 \quad .$$

A expressão entre colchetes é proporcional ao tensor momentum energia

$$\partial_\alpha \left\{ i \left[x_\mu T_{\alpha\nu} - x_\nu T_{\alpha\mu} \right] - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \Psi)} s_{\mu\nu} \Psi + \overline{\Psi} s_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \overline{\Psi})} \right\} = 0 \quad . \quad (1.5.5)$$

Ao definirmos os termos $m_{\mu\alpha\nu}$, $n_{\alpha\mu\nu}$ e $J_{\mu\alpha\nu}$ pelas relações

$$m_{\mu\alpha\nu} = i(x_\mu T_{\alpha\nu} - x_\nu T_{\alpha\mu}) \quad , \quad (1.5.5a)$$

$$n_{\alpha\mu\nu} = - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \Psi)} s_{\mu\nu} \Psi + \overline{\Psi} s_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \overline{\Psi})} \quad , \quad (1.5.5b)$$

$$J_{\mu\alpha\nu} = m_{\mu\alpha\nu} + n_{\alpha\mu\nu} \quad , \quad (1.5.5c)$$

podemos escrever (1.5.5) na seguinte forma

$$\partial_\alpha J_{\mu\alpha\nu} = 0 \quad ,$$

ou (1.5.6)

$$\partial_4 J_{\mu 4\nu} = - \partial_j J_{\mu j\nu} \quad .$$

Definiremos a grandeza $P_{\mu\nu}$ pela integral

$$P_{\mu\nu} = \int J_{\mu 4\nu} \, dV \quad , \quad (1.5.7)$$

e derivaremos em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{\mu\nu} &= \frac{d}{dt} \int J_{\mu 4\nu} \, dV \\ &= - \int i \, \partial_4 \, J_{\mu 4\nu} \, dV \\ &= + i \int \partial_j \, J_{\mu j\nu} \, dV \quad , \quad (1.5.7a) \end{aligned}$$

se for aplicado o teorema de gauss, teremos

$$\frac{d}{dt} P_{\mu\nu} = i \oint_{\rho} J_{\mu j \nu} \, d\sigma_j \quad . \tag{1.5.7b}$$

Quando o volume for estendido a todo espaço (e supõe-se que o campo tende a zero no infinito), a integral de superfície anula-se, mostrando a constância no tempo de $P_{\mu\nu}$.

Consideremos as componentes espaciais de $P_{\mu\nu}$, ou seja P_{ik}

$$P_{ik} = \int J_{i4k} \, dV$$

$$P_{ik} = \int m_{i4k} \, dV + \int n_{4ik} \, dV \quad . \tag{1.5.8}$$

Calculemos separadamente estes termos

$$\int m_{i4k} \, dV = i \int (x_i T_{4k} - x_k T_{4i}) dV \quad .$$

Como consequência de (1.3.4), teremos

$$\int m_{i4k} \, dV = \int \left\{ x_i \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \Psi)} \partial_k \Psi + (\partial_k \overline{\Psi}) \frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \overline{\Psi})} \right] - \right.$$

$$\left. - x_k \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \Psi)} \partial_i \Psi + (\partial_i \overline{\Psi}) \frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \overline{\Psi})} \right] \right\} dV \quad .$$

Devido a (1.2.4),

$$\int m_{i4k} \, dV = \frac{1}{2} \int \left\{ x_i \left[\overline{\Psi} \beta_4 \partial_k \Psi - (\partial_k \overline{\Psi}) \beta_4 \Psi \right] - \right.$$

$$\left. - x_k \left[\overline{\Psi} \beta_4 \partial_i \Psi - (\partial_i \overline{\Psi}) \beta_4 \Psi \right] \right\} dV \quad .$$

Como

$$(\partial_k\overline{\Psi})\beta_4\Psi = \partial_k(\overline{\Psi}\beta_4\Psi) - \overline{\Psi}\beta_4\partial_k\Psi \quad , \qquad (1.5.8b)$$

$$\int m_{i4k}\, dV = \frac{1}{2}\int \Big\{ x_i\ [\overline{\Psi}\beta_4\partial_k\Psi - \partial_k(\overline{\Psi}\beta_4\Psi) + \overline{\Psi}\beta_4\partial_k\Psi]$$

$$- x_k\ [\overline{\Psi}\beta_4\partial_i\Psi - \partial_i(\overline{\Psi}\beta_4\Psi) + \overline{\Psi}\beta_4\partial_k\Psi]\Big\}\, dV$$

$$= \int \overline{\Psi}\beta_4(x_i\partial_k - x_k\partial_i)\,\Psi\, dV - \frac{1}{2}\int [x_i\partial_k - x_k\partial_i](\overline{\Psi}\beta_4\Psi)dV \quad . \qquad (1.5.8c)$$

Calculemos agora o segundo termo do segundo membro de (1.5.8)

$$\int n_{4ik}\, dV = \int \left(- \frac{\partial L}{\partial(\partial_4\Psi)}\, s_{ik}\Psi - \overline{\Psi}\, s_{ik}\frac{\partial L}{\partial(\partial_4\overline{\Psi})}\right) dV \quad .$$

Por (1.2.4),

$$\int n_{4ik}\, dV = \frac{1}{2}\int (-\overline{\Psi}\beta_4 s_{ik}\Psi - \overline{\Psi}\, s_{ik}\beta_4\Psi)\, dV \quad ,$$

como

$$\beta_4\, s_{ik} = -\, s_{ik}\beta_4 \quad , \qquad (1.5.8d)$$

então,

$$\int n_{4ik}\, dV = -\int \overline{\Psi}\beta_4 s_{ik}\,\Psi\, dV$$

$$= \frac{1}{i}\int \overline{\Psi}\beta_4\,\frac{s_{ik}}{i}\,\Psi\, dV \quad , \qquad (1.5.8e)$$

Substituindo (1.5.8d) e (1.5.8e) em (1.5.8), teremos

$$P_{ik} = -\frac{1}{i}\int \overline{\Psi}\beta_4\,\frac{(x_i\partial_k - x_k\partial_i)}{i}\,\Psi\, dV + \frac{1}{i}\int \overline{\Psi}\beta_4\,\frac{s_{ik}}{i}\,\Psi\, dV$$

$$-\frac{1}{2}\int [x_i\partial_k - x_k\partial_i](\overline{\Psi}\beta_4\Psi)\, dV \quad , \qquad (1.5.9)$$

onde

$$s_{ik} = (\beta_i \beta_k - \beta_k \beta_i) \quad . \tag{1.5.9a}$$

O primeiro e o segundo termos do segundo membro de (1.5.9) podem ser interpretados, respectivamente, como o momentum angular orbital e o momentum angular de spin do campo Ψ. O terceiro termo deve se anular quando a superfície que envolve o volume tende ao infinito.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES DE YANG-MILLS NA FORMA DE KEMMER

Nós iremos considerar neste capítulo os campos de Yang-Mills sobre o espaço Euclidiano E_4, dado por

$$\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - im\phi_{\mu\nu} = [B_\mu, B_\nu] \quad . \tag{2.1}$$

Para o caso sem fonte a seguinte equação é válida

$$\partial_\nu \phi_{\mu\nu} - imB_\mu = [B_\nu, \phi_{\mu\nu}] \quad . \tag{2.2}$$

As grandezas B_μ e $\phi_{\mu\nu}$, que ocorrem nas equações (2.1) e (2.2), decorrem da teoria de Yang-Mills(1). B_μ são, no caso do grupo SU(2), a que nos limitaremos, matrizes (2×2) tais que B_μ são anti-hermitianas para $\mu = 1,2,3$ e hermitianas para $\mu = 4$. Tem-se que

$$\begin{aligned} B_4 &= -iB_4^i t^i \\ B_k &= B_k^i t^i \quad , \end{aligned} \tag{2.2a}$$

onde $2t^i$ são as matrizes de Pauli e satisfazem à seguinte re -

lação de comutação

$$[t^i,t^j] = i\varepsilon^{ijk}t^k \quad . \tag{2.2b}$$

O tensor intensidade do campo $\phi_{\mu\nu}$ é, da mesma forma, definido por

$$\phi_{ik} = -i\phi^i_{ik}t^i \quad ,$$
$$\phi_{i4} = \phi^i_{i4}t^i \quad . \tag{2.2c}$$

As componentes de $\phi_{\mu\nu}$ com $\mu,\nu = 1,2,3$ são anti-hermitianas e hermitianas para μ ou ν igual a 4.

Se introduzirmos a função de onda Ψ definida por

$$\Psi = (\phi_{12},\phi_{13},\phi_{14},\phi_{23},\phi_{24},\phi_{34},B_1,B_2,B_3,B_4)^t \quad , \tag{2.3}$$

onde o índice t em (2.3) indica o transposto.

Procuraremos escrever as equações (2.1) e (2.2) de forma compacta, similar à equação de Kemmer (1.1.1) de modo que admita uma equação adjunta, fato que não ocorre no artigo publicado por Silveira[22]. Para tanto, desenvolveremos (2.1) e (2.2) levando em consideração (2.3).

$$i(\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) + m\phi_{12} = i[B_1, B_2] \quad ,$$

$$i(\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1) + m\phi_{13} = i[B_1, B_3] \quad ,$$

$$i(\partial_1 B_4 - \partial_4 B_1) + m\phi_{14} = i[B_1, B_4] \quad ,$$

$$i(\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) + m\phi_{23} = i[B_2, B_3] \quad ,$$

$$i(\partial_2 B_4 - \partial_4 B_2) + m\phi_{24} = i[B_2, B_4] \quad ,$$

$$i(\partial_3 B_4 - \partial_4 B_3) + m\phi_{34} = i[B_3, B_4] \quad , \qquad (2.4)$$

$$i(\partial_2 \phi_{12} + \partial_3 \phi_{13} + \partial_4 \phi_{14}) + mB_1 = i[B_\nu, \phi_{1\nu}] \quad ,$$

$$i(\partial_1 \phi_{21} + \partial_3 \phi_{23} + \partial_4 \phi_{24}) + mB_2 = i[B_\nu, \phi_{2\nu}] \quad ,$$

$$i(\partial_1 \phi_{31} + \partial_2 \phi_{32} + \partial_4 \phi_{34}) + mB_3 = i[B_\nu, \phi_{3\nu}] \quad ,$$

$$i(\partial_1 \phi_{41} + \partial_2 \phi_{42} + \partial_3 \phi_{43}) + mB_4 = i[B_\nu, \phi_{4\nu}] \quad .$$

Observa-se que quatro das equações diferenciais acima não envolvem a derivada temporal e também que, destas equações , quatro componentes da função de onda podem ser expressadas em função das outras seis e suas derivadas espaciais.

O segundo membro das equações (2.4) nos leva a defi - nir a função Ψ';

$$\Psi' = i([B_1,B_2];[B_1,B_3];[B_1,B_4];[B_2,B_3];[B_2,B_4];[B_3,B_4];$$
$$[B_\nu,\phi_{1\nu}];[B_\nu,\phi_{2\nu}];[B_\nu,\phi_{3\nu}];[B_\nu,\phi_{4\nu}])^t \quad . \qquad (2.5)$$

Podemos escrever (2.4) da seguinte forma

$$(\beta_\nu \partial_\nu + M)\Psi = \Psi' \quad , \qquad (2.6)$$

onde β_ν e M são as seguintes matrizes:

$$
\beta_1 = i \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
\hline
0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & -1 & 0 & & & & & & & \\
\hline
0 & 0 & -1 & & & & & & &
\end{array}\right] ,
$$

$$
\beta_2 = i \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & -1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & +1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & 0 & -1 & 0 & & & &
\end{array}\right] ,
\tag{2.7}
$$

$$
\beta_3 = i \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & -1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & -1 & & & &
\end{array}\right] ,
$$

$$
\beta_4 = i \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & -1 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & -1 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & -1 & \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & &
\end{array}\right] ,
$$

$$M = mI \quad ,$$

$$\eta_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
-1 & & & & & & & & & \\
 & -1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & & & -1
\end{array}\right] ,$$

e β_ν satisfaz à seguinte relação de comutação

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\lambda} + \beta_\lambda \delta_{\nu\mu} \quad , \qquad (2.7a)$$

$$\beta_\mu^\dagger = \beta_\mu \quad . \qquad (2.7b)$$

A fim de tornar (2.6) similar à equação de Kemmer, procuremos determinar Ψ' em função de Ψ, ou seja,

$$\Psi' = \Omega\Psi \quad ,$$

ou $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (2.8)

$$\Psi_i' = \Omega_{ij}\Psi_j \quad ,$$

onde Ω_{ij} deve ter a seguinte forma,

$$\Omega_{ij} = (\beta_\mu)_{ik}(C_\mu)_{kj} \quad ,$$

e i, k e j variam de 1 a 10.

Tomaremos cada componente de Ψ', Ψ_i', e analisaremos quais das componentes de Ψ, Ψ_j, têm fatores de Ψ_i'. Assim procedendo determinaremos Ω_{ij}.

A primeira componente de Ψ' é, por (2.5),

$$\Psi'_1 = i[B_1,B_2]$$

$$= i(B_1B_2 - B_2B_1) \quad ,$$

As únicas componentes de Ψ que têm fatores de Ψ'_1 são

$$\Psi_7 = B_1 \quad e \quad \Psi_8 = B_2 \quad ,$$

daí conluimos que a equação (2.8) é verdadeira para i=1, se

$$\Omega_{11} = \cdots = \Omega_{16} = \Omega_{19} = \Omega_{110} = 0 \ ,$$

$$\Omega_{17} = -iB_2 \quad , \quad \Omega_{18} = iB_1 \quad ,$$

de modo análogo obtemos

$$\Omega_{21} = \cdots = \Omega_{210} = 0 \quad e \quad \Omega_{27} = -iB_3, \ \Omega_{29} = iB_1 \ ,$$

$$\Omega_{31} = \cdots = \Omega_{36} = \Omega_{38} = \Omega_{39} = 0 \quad e \quad \Omega_{37} = -iB_4 \ , \ \Omega_{310} = iB_1,$$

$$\Omega_{41} = \cdots = \Omega_{47} = \Omega_{410} = 0 \quad e \quad \Omega_{48} = -iB_3, \ \Omega_{49} = iB_2 \ ,$$

$$\Omega_{51} = \cdots = \Omega_{57} = \Omega_{59} = 0 \quad e \quad \Omega_{58} = -iB_4, \ \Omega_{510} = iB_2 \ ,$$

$$\Omega_{61} = \cdots = \Omega_{68} = 0 \quad e \quad \Omega_{69} = -iB_4, \ \Omega_{610} = iB_3 \ .$$

Consideremos agora a sétima componente de Ψ',

$$\Psi'_7 = i(B_\nu\phi_{1\nu} - \phi_{1\nu}B_\nu)$$

$$= i[B_2\phi_{12}+B_3\phi_{13}+B_4\phi_{14}-(0+\phi_{12}B_2+\phi_{13}B_3+\phi_{14}B_4) \quad ,$$

e como Ψ'_7 envolve as seguintes componentes de Ψ

$$\Psi_8 = B_2 \quad , \quad \Psi_1 = \phi_{12} \; ,$$

$$\Psi_9 = B_3 \quad , \quad \Psi_2 = \phi_{13} \; ,$$

$$\Psi_{10} = B_4 \quad , \quad \Psi_3 = \phi_{14} \; ,$$

e desejamos que seja verdadeira a equação (2.8)

$$\Psi_7' = \Omega_{7j}\Psi_j \; ,$$

então Ω_{7j} deve assumir os seguintes valores:

$$\Omega_{74} = \ldots = \Omega_{77} = 0 \; ,$$

e

$$\Omega_{78} = -i\phi_{12} \quad \Omega_{71} = iB_2 \; ,$$

$$\Omega_{79} = -i\phi_{13} \quad \Omega_{72} = iB_3 \; ,$$

$$\Omega_{710} = -i\phi_{14} \quad \Omega_{73} = iB_4 \; .$$

De modo análogo encontramos os elementos Ω_{ij} (i = 8, 9, 10 e j = 1,...,10), ou seja

a) Ω_{8j} ,

$$\Omega_{82} = \Omega_{83} = \Omega_{86} = \Omega_{88} = 0 \; ,$$

$$\Omega_{81} = -\, iB_1 \qquad \Omega_{87} = -i\phi_{21} \; ,$$

$$\Omega_{84} = iB_3 \qquad \Omega_{89} = -i\phi_{23} \; ,$$

$$\Omega_{85} = iB_4 \qquad 810 = -i\phi_{24} \; .$$

b) $\Omega_{9\sigma}$

$$\Omega_{91} = \Omega_{93} = \Omega_{95} = \Omega_{99} = 0 \; ,$$

$$\Omega_{92} = -iB_1 \qquad \Omega_{97} = -i\phi_{31} \; ,$$

$$\Omega_{94} = -iB_2 \qquad \Omega_{98} = -i\phi_{32} \; ,$$

$$\Omega_{96} = iB_4 \qquad \Omega_{910} = -i\phi_{34} \; .$$

c) $\Omega_{10\sigma}$

$$\Omega_{101} = \Omega_{102} = \Omega_{104} = \Omega_{1010} = 0,$$

$$\Omega_{103} = -iB_1 \qquad \Omega_{107} = -i\phi_{41} \quad ,$$

$$\Omega_{105} = -iB_2 \qquad \Omega_{108} = -i\phi_{42} \quad ,$$

$$\Omega_{106} = -iB_3 \qquad \Omega_{109} = -i\phi_{43} \quad .$$

Portanto a matriz Ω tem a seguinte forma:

$$\Omega = i \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c}
 & & & & & & -B_2 & B_1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & -B_3 & 0 & B_1 & 0 \\
 & & & & & & -B_4 & 0 & 0 & B_1 \\
\hdashline
 & & & & & & 0 & -B_3 & B_2 & 0 \\
 & & & & & & 0 & -B_4 & 0 & B_2 \\
 & & & & & & 0 & 0 & -B_4 & B_3 \\
\hdashline
B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-B_1 & 0 & 0 & B_3 & B_4 & 0 & & & A & \\
0 & -B_1 & 0 & -B_2 & 0 & B_4 & & & & \\
\hdashline
0 & 0 & -B_1 & 0 & -B_2 & -B_3 & & & &
\end{array}\right] , \qquad (2.9)$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{12} & -\phi_{13} & -\phi_{14} \\ \phi_{12} & 0 & -\phi_{23} & -\phi_{24} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & 0 & -\phi_{34} \\ \phi_{14} & \phi_{24} & \phi_{34} & 0 \end{bmatrix} . \qquad (2.10)$$

Entretanto, podemos escrever Ω da seguinte forma:

$$\Omega = \mathbb{B}_\mu \beta_\mu - F \quad , \qquad (2.11)$$

onde $\mathbb{B}_\mu$ é uma matriz diagonal, 10×10, de elementos B_μ na diagonal e F é a matriz, 10×10 ,

$$F = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} . \qquad (2.12)$$

A equação (2.6) devido a (2.11) e (2.9)

$$(\beta_\nu \partial_\nu + M)\Psi = (\mathbb{B}_\nu \beta_\nu - F)\Psi \quad . \tag{2.13}$$

Se definirmos F, como

$$F = \beta_\nu F_\nu \quad ,$$

ou (2.13a)

$$(F)_{ij} = (\beta_\nu)_{ik}(F_\nu)_{kj} \quad ,$$

a equação (2.13) resultará similar à equação de Kemmer. Portanto resta-nos encontrar F_ν .

Por motivos que ficarão claros no Capítulo III, vamos impor as seguintes condições:

$$F_4^\dagger \eta_4 = -\eta_4 F_4 \quad ,$$

(2.13b)

$$F_k^\dagger \eta_4 = \eta_4 F_k \quad ,$$

onde

$$\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1 \quad , \quad \eta_4^2 = 1 \quad . \tag{2.13c}$$

Como

$$F\Psi = i(0,0,0,0,0,0,\phi_{1\mu}B_\mu,\phi_{2\mu}B_\mu,\phi_{3\mu}B_\mu,\phi_{4\mu}B_\mu) \quad , \tag{2.14}$$

e F_μ tem que satisfazer (2.13b), segue que as matrizes F_μ em (2.13a) são

$$F_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & \phi_{12} & 0 & 0 & \\
 & & & & & & \phi_{13} & 0 & 0 & \\
 & & & & & & \phi_{14} & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
\hline
\phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & &
\end{array}\right] ,$$

$$
F_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & 0 & \phi_{12} & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & \phi_{23} & 0 & \\
 & & & & & & 0 & \phi_{24} & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\phi_{12} & 0 & 0 & \phi_{23} & \phi_{24} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
\end{array}\right],
$$

$$
F_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & \phi_{13} & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & \phi_{23} & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & \phi_{34} & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & \phi_{13} & 0 & \phi_{23} & 0 & \phi_{34} & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
\end{array}\right], \qquad (2.15)
$$

$$
F_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & \phi_{14} \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & \phi_{24} \\
 & & & & & & & & & \phi_{34} \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
\hline
0 & 0 & \phi_{14} & 0 & \phi_{24} & \phi_{34} & & & & \\
\end{array}\right].
$$

Logo,

$$
F\Psi = \beta_\nu F_\nu \Psi \quad . \tag{2.16}
$$

As matrizes F_ν definidas por Silveira[22] não nos permitiam chegar à equação adjunta, objeto do próximo capítulo.

Substituindo (2.16) em (2.13) e sabendo que $[\mathbb{B}_\mu, \beta_\nu]=0$ a equação (2.13) toma a seguinte forma:

$$[\beta_\mu(\partial_\mu - C_\mu) + M]\Psi = 0 \quad , \tag{2.17}$$

onde

$$C_\mu = \mathbb{B}_\mu - F_\mu \quad . \tag{2.18}$$

CAPÍTULO III

LAGRANGIANA DE YANG-MILLS NA FORMA DE KEMMER

A partir da equação (2.17) obtida no capítulo anterior, iremos obter a equação adjunta e consequentemente a Lagrangiana que é o objetivo final deste capítulo.

Se tomarmos o hermitiano conjugado de (2.17) e usarmos (2.3a), (2.7b) e (2.11), teremos:

$$\{[\beta_\mu(\partial_\mu - C_\mu) + M]\Psi\}^\dagger = 0 \quad .$$

Portanto o hermitiano conjugado (2.17) vale

$$\Psi^\dagger\{[\overleftarrow{\partial}_4 - (+\,\mathbb{B}_4 - F_4^\dagger)]\beta_4 + [\overleftarrow{\partial}_k - (\,\mathbb{B}_k - F_k^\dagger)]\beta_k + M\} = 0 \quad .$$

onde a seta indica o sentido de aplicação do operador derivada, ∂_μ, ou seja,

$$\overline{\Psi}\overleftarrow{\partial}_\mu\Psi = (\partial_\mu\overline{\Psi})\Psi \quad ,$$

$$\overline{\Psi}\overrightarrow{\partial}_\mu\Psi = \overline{\Psi}(\partial_\mu\Psi) \quad .$$

Se multiplicarmos à direita por $\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1$, teremos

$$\Psi^{\dagger}[(-\partial_4+\mathbb{B}_4+F_4^{\dagger})\beta_4\eta_4+(+\partial_k-\mathbb{B}_k-F_k^{\dagger})\beta_k\eta_4+\eta_4 M] = 0 \quad . \qquad (3.1)$$

Como

$$\eta_4\beta_4 = \beta_4\eta_4 \quad ,$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3.1a)

$$\eta_4\beta_k = -\beta_k\eta_4 \quad .$$

A equação (3.1) fica:

$$\Psi^{\dagger}[(\overleftarrow{\partial}_4-\mathbb{B}_4-F_4^{\dagger})\eta_4\beta_4+(\overleftarrow{\partial}_k-\mathbb{B}_k+F_k^{\dagger})\eta_4\beta_k-\eta_4 M] = 0 \quad .$$

No Capítulo II impuzemos as condições

$$F_4^{\dagger}\eta_4 = -\eta_4 F_4 \quad ,$$

$$F_k^{\dagger}\eta_4 = \eta_4 F_k \quad ,$$

logo,

$$\Psi^{\dagger}\eta_4[(\overleftarrow{\partial}_4-\mathbb{B}_4+F_4)\beta_4 + (\overleftarrow{\partial}_4-\mathbb{B}_k+F_k)\beta_k-M] = 0 \quad ,$$

$$\Psi^{\dagger}\eta_4\{[\overleftarrow{\partial}_4-(\mathbb{B}_4-F_4)]\beta_4 + [\overleftarrow{\partial}_k-(\mathbb{B}_k-F_k)]\beta_k-M\} = 0 \quad ,$$

$$\Psi^{\dagger}\eta_4[(\overleftarrow{\partial}_\mu-C_\mu)\beta_\mu-M] = 0 \quad .$$

Por (1.1.6), $\overline{\Psi} = \Psi^{\dagger}\eta_4$, chegamos à equação adjunta

$$\overline{\Psi}[\beta_\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu-C_\mu)-M] = 0 \quad , \qquad (3.2)$$

onde se usou $\beta_\mu C_\mu = C_\mu\beta_\mu$ (com soma em μ!).

Com as equações (2.17) e (3.2) podemos definir a Lagrangiana, levando em conta que $\overline{\Psi} = \Psi$,

$$L = 2\mathrm{Tr}[\tfrac{1}{4}\,\Psi\,(\overrightarrow{\partial}_\mu-\overleftarrow{\partial}_\mu)\Psi - \tfrac{1}{3}\,\Psi C_\mu\beta_\mu\Psi + \tfrac{1}{2}\,\Psi\Psi] \quad , \qquad (3.3)$$

onde Tr indica o traço dos operadores em SU(2), lembrando que $Tr(t_i) = 0$ e que $Tr(t_i^2) = \frac{1}{2}$.

Verifica-se que pela variação $\Psi \rightarrow \Psi+\delta\Psi$ na Lagrangiana (3.3) obtém-se a equação (2.17).

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO LAGRANGIANA SIMILAR A OKUBO-TOSA

No artigo publicado por Okubo-Tosa (23) encontra-se a Lagrangiana dos campos de Yang-Mills com um termo de interação cúbica. Mostramos, neste capítulo, uma Lagrangiana similar onde no termo de interação cúbica aparece o fator $\overline{\Psi}$ que favorece en - contrarmos diretamente a equação de onda através da equação de Lagrange.

Reescrevendo as equações de Yang-Mills do Capítulo II

$$\partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\mu - \varepsilon^{ijk} B^j_\mu B^k_\nu = im\phi^i_{\mu\nu} \quad ,$$

e

$$\partial_\nu \phi^i_{\mu\nu} - \varepsilon^{ijk} B^j_\nu \phi^k_{\mu\nu} = imB^i_\mu \quad ,$$

onde o grupo de simetria interna é o SU(2) e logicamente os índices i, j, k variam de 1 a 3, ε^{ijk} são os coeficientes de estrutura antissimétricos nos três índices.

As equações acima, de modo análogo ao que foi feito no capítulo II, tomam a seguinte forma:

$$(\beta_\nu \partial_\nu + M)\Psi^i = \Psi'^i \quad , \tag{4.1}$$

onde

$$\Psi^i = (\phi^i_{12}, \phi^i_{13}, \phi^i_{14}, \phi^i_{23}, \phi^i_{24}, \phi^i_{34}, B^i_1, B^i_2, B^i_3, B^i_4)^t \quad , \tag{4.1a}$$

$$\Psi'^{i} = i\varepsilon^{ijk}\,(B^j_1B^k_2, B^j_1B^k_3, B^j_1B^k_4, B^j_2B^k_3, B^j_2B^k_4, B^j_3B^k_4,$$

$$B^j_\nu\phi^k_{1\nu}, B^j\phi^k_{2\nu}, B^j_\nu\phi^k_{3\nu}, B^j_\nu\phi^k_{4\nu})^t \quad . \qquad (4.1b)$$

As matrizes β_ν e M são dadas em (2.7).

No artigo de Okubo-Tosa, já citado, fica implícito que podemos determinar Ψ'^{i} em função de Ψ^i da seguinte maneira:

$$\Psi'^{i}_{\ell} = \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,C_{\ell a}\,\Psi^j_b\,\Psi^k_c \quad , \qquad (4.2)$$

onde a, b, ℓ, c variam de 1 a 10 e Γ_{abc} são coeficientes de estrutura totalmente antissimétricos nos três índices.

Por (4.2) resta-nos, portanto, determinar os coeficientes Γ_{abc} e $C_{\ell a}$. Procederemos do seguinte modo:

Para cada $\underline{\ell}$ de (4.2) iremos determinar quais das componentes de (4.1a) estão envolvidas na componente $\underline{\ell}$ de (4.1b), assim fixaremos $\underline{b}$ e $\underline{c}$. Os valores de $\underline{a}$, Γ_{abc} e $C_{\ell a}$ serão determinados a partir da identidade entre (4.2) e a respectiva componente de (4.1b).

Se $\ell = 1$ teremos por (4.2)

$$\Psi'^{i}_{1} = \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,C_{1a}\,\Psi^j_b\,\Psi^k_c \qquad (4.3)$$

Mas por (4.1b)

$$\Psi'^{i}_{1} = i\varepsilon^{ijk}\,B^j_1B^k_2 \quad , \qquad (4.3a)$$

entretanto as componentes 7 e 8 de (4.1a), que são

$$\Psi^j_7 = B^j_1 \quad ,$$
$$\Psi^k_8 = B^k_2 \quad ,$$

estão envolvidas em (4.3a). Portanto b e c em (4.3) valem respectivamente 7 e 8.

Para que a identidade entre (4.3) e (4.3a), ou seja,

$$i\varepsilon^{ijk}B_1^jB_2^k = i\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{a78}\,C_{1a}\Psi_7^j\Psi_8^k \quad ,$$

se verifique é necessário que:

$$a = 1$$

e

$$\Gamma_{178}C_{11} = 1 \quad .$$

Podemos ter então

$$\Gamma_{178} = C_{11} = 1 \quad , \tag{4.4}$$

ou

$$\Gamma_{178} = C_{11} = -1 \ . \tag{4.4a}$$

No caso $\ell = 2$, fica

$$i\varepsilon^{ijk}B_1^jB_3^k = i\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,C_{2a}\,\Psi_b^j\,\Psi_c^k \quad ,$$

e para que esta se verifique é necessário que

$$a = 2 \quad , \quad b = 7 \quad , \quad c = 9$$

e

$$\Gamma_{279}C_{22} = 1 \quad .$$

Temos então,

$$\Gamma_{279} = C_{22} = 1 \ , \tag{4.5}$$

ou

$$\Gamma_{279} = C_{22} = -1 \quad . \tag{4.5a}$$

No caso $\ell = 3$, obtemos

$$a = 3 \quad , \quad b = 7 \quad , \quad c = 10$$

e

$$\Gamma_{3710}\, C_{33} = 1 \; .$$

Portanto,

$$\Gamma_{3710} = C_{33} = 1 \tag{4.6}$$

ou

$$\Gamma_{3710} = C_{33} = -1 \; . \tag{4.6a}$$

No caso $\ell = 4$, obtemos

$$a = 4 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = 9$$

e

$$\Gamma_{489}\, C_{44} = 1 \; .$$

Portanto,

$$\Gamma_{489} = C_{44} = 1 \tag{4.7}$$

ou

$$\Gamma_{489} = C_{44} = -1 \; . \tag{4.7a}$$

No caso $\ell = 5$, obtemos

$$a = 5 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = 10$$

e

$$\Gamma_{5810}\, C_{55} = 1 \; .$$

Portanto,

$$\Gamma_{5810} = C_{55} = 1 \tag{4.8}$$

ou

$$\Gamma_{5810} = C_{55} = -1 \; . \tag{4.8a}$$

No caso $\ell = 6$, obtemos

$$a = 6 \quad , \quad b = 9 \quad , \quad c = 10$$

e

$$\Gamma_{6910}\, C_{66} = 1 .$$

Portanto

$$\Gamma_{6910} = C_{66} = 1 \quad , \tag{4.9}$$

ou

$$\Gamma_{6910} = C_{66} = -1 \quad . \tag{4.9a}$$

No caso $\ell = 7$, fica

$$\begin{aligned} \Psi'^{i}_{7} &= i\varepsilon^{ijk} B^{j}_{\nu} \phi^{k}_{1\nu} \\ &= i\varepsilon^{ijk} (B^{j}_{2}\phi^{k}_{12} + B^{j}_{3}\phi^{k}_{13} + B^{j}_{4}\phi^{k}_{14}) \quad . \end{aligned}$$

Mas por (4.2) e (4.1a)

$$\begin{aligned} \Psi'^{i}_{7} &= \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk}\, \Gamma_{abc}\, C_{7a}\, \Psi^{j}_{b} \Psi^{k}_{c} \\ &= i\varepsilon^{ijk} C_{7a} (\Gamma_{a81} \Psi^{j}_{8} \Psi^{k}_{1} + \Gamma_{a92} \Psi^{j}_{9} \Psi^{k}_{2} + \Gamma_{a103}\, \Psi^{j}_{10} \Psi^{k}_{3}) \\ &= i\varepsilon^{ijk} C_{7a} (\Gamma_{a81} B^{j}_{2} \phi^{k}_{12} + \Gamma_{a92} B^{j}_{3} \phi^{k}_{13} + \Gamma_{a103} B^{j}_{4} \phi^{k}_{14}) \quad , \end{aligned}$$

logo <u>a</u> só pode assumir o valor 7 e

$$\Gamma_{781} C_{77} = \Gamma_{792} C_{77} = \Gamma_{7103} C_{77} = 1 \quad .$$

Por Γ_{abc} ser antissimétrico nos índices então Γ_{781}, Γ_{792} e Γ_{7103} já foram estabelecidos, ou seja,

$$\Gamma_{781} = \Gamma_{178} \;\; ; \;\; \Gamma_{792} = \Gamma_{279} \quad \text{e} \quad \Gamma_{7103} = \Gamma_{3710} \quad .$$

Logo,

$$C_{77} = 1 \quad \text{para} \quad \Gamma_{781} = \Gamma_{792} = \Gamma_{7103} = 1 \quad , \tag{4.10}$$

ou

$$C_{77} = -1 \quad \text{para} \quad \Gamma_{781} = \Gamma_{792} = \Gamma_{7103} = -1 \quad . \tag{4.10a}$$

No caso $\ell = 8$, temos

$$\begin{aligned}\Psi'^{i}_{8} &= i\varepsilon^{ijk}B^{j}_{\nu}\phi^{k}_{2\nu} \\ &= i\varepsilon^{ijk}(B^{j}_{1}\phi^{k}_{21} + B^{j}_{3}\phi^{k}_{23} + B^{j}_{4}\phi^{k}_{24}) \\ &= i\varepsilon^{ijk}(-B^{j}_{1}\phi^{k}_{12} + B^{j}_{3}\phi^{k}_{23} + B^{j}_{4}\phi^{k}_{24}) \quad .\end{aligned}$$

Mas por (4.2) e (4.1a)

$$\begin{aligned}\Psi'^{i}_{8} &= \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{8a}\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \\ &= i\varepsilon^{ijk}C_{8a}(\Gamma_{a71}\Psi^{j}_{7}\Psi^{k}_{1} + \Gamma_{a94}\Psi^{j}_{9}\Psi^{k}_{4} + \Gamma_{a105}\Psi^{j}_{10}\Psi^{k}_{5}) \\ &= i\varepsilon^{ijk}C_{8a}(\Gamma_{a71}B^{j}_{1}\phi^{k}_{12} + \Gamma_{a94}B^{j}_{3}\phi^{k}_{23} + \Gamma_{a105}B^{j}_{4}\phi^{k}_{24}) \quad ,\end{aligned}$$

portanto a só pode assumir o valor 8 e

$$-\Gamma_{871}C_{88} = \Gamma_{894}C_{88} = \Gamma_{8105}C_{88} = 1 \quad . \tag{4.11}$$

Como

$$\Gamma_{871} = -\Gamma_{178} \quad ; \quad \Gamma_{894} = \Gamma_{489} \quad \text{e} \quad \Gamma_{8105} = \Gamma_{5810} \; ,$$

então o único valor para C_{88} que satisfaça (4.11) é $C_{88} = 1$. Neste caso $\Gamma_{178} = \Gamma_{489} = \Gamma_{5810} = 1$. Por isso as possibilidades (4.4a), (4.7a), (4.8a) e (4.10a) são excluidas.

No caso $\ell = 9$, fica

$$\Psi'^{i}_{9} = i\varepsilon^{ijk}B^{j}_{\nu}\phi^{k}_{3\nu} =$$

$$= i\varepsilon^{ijk}(B_1^j\phi_{31}^k + B_2^j\phi_{32}^k + B_4^j\phi_{34}^k)$$

$$= i\varepsilon^{ijk}(-B_1^j\phi_{13}^k - B_2^j\phi_{23}^k + B_4^j\phi_{34}^k) \quad .$$

Como por (4.2) e (4.1a)

$$\Psi_9'^{\,i} = \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{9a}\Psi_b^j\Psi_c^k$$

$$= i\varepsilon^{ijk}C_{9a}(\Gamma_{a72}\Psi_7^j\Psi_2^k + \Gamma_{a84}\Psi_8^j\Psi_4^k + \Gamma_{a106}\Psi_{10}^j\Psi_6^k)$$

$$= i\varepsilon^{ijk}C_{9a}(\Gamma_{a72}B_1^j\phi_{13}^k + \Gamma_{a84}B_2^j\phi_{23}^k + \Gamma_{a106}B_4^j\phi_{34}^k) \quad ,$$

portanto a só pode assumir o valor 9 e

$$\Gamma_{972}C_{99} = \Gamma_{984}C_{99} = -\Gamma_{9106}C_{99} = -1 \quad . \qquad (4.12)$$

Sabemos que

$$\Gamma_{972} = -\Gamma_{279} \quad ; \quad \Gamma_{984} = -\Gamma_{489} \quad ; \quad \Gamma_{9106} = \Gamma_{6910} \quad ,$$

então o único valor para C_{99} que satisfaça (4.12) é $C_{99} = 1$ e

$$\Gamma_{279} = \Gamma_{489} = \Gamma_{6910} = 1 \quad . \qquad (4.12a)$$

Por causa destas igualdades, as possibilidades (4.5a) e (4.9a) são excluidas.

Finalmente, para $\ell = 10$ teremos

$$\Psi_{10}' = i\varepsilon^{ijk}B_\nu^j\phi_{4\nu}^k$$

$$= i\varepsilon^{ijk}(B_1^j\phi_{41}^k + B_2^j\phi_{42}^k + B_3^j\phi_{43}^k) =$$

$$= i\varepsilon^{ijk}(-B_1^j\phi_{14}^k - B_2^j\phi_{24}^k - B_3^j\phi_{34}^k) \quad .$$

Em virtude de (4.2) e (4.1a)

$$\Psi'_{10} = \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{10a}\Psi_b^j\Psi_c^k$$

$$= i\varepsilon^{ijk}C_{10a}(\Gamma_{a73}\Psi_7^j\Psi_3^k + \Gamma_{a85}\Psi_8^j\Psi_5^k + \Gamma_{a96}\Psi_9^j\Psi_6^k)$$

$$= i\varepsilon^{ijk}C_{10a}(\Gamma_{a73}B_1^j\phi_{14}^k + \Gamma_{a85}B_2^j\phi_{24}^k + \Gamma_{a96}B_3^j\phi_{34}^k) \quad .$$

Concluímos que a só pode assumir o valor 10 e

$$\Gamma_{1073}C_{1010} = \Gamma_{1085}C_{1010} = \Gamma_{1096}C_{1010} = -1 \quad . \tag{4.13}$$

Sabemos que

$$\Gamma_{1073} = -\Gamma_{3710} \ ; \ \Gamma_{1085} = -\Gamma_{5810} \ \text{ e } \ \Gamma_{1096} = -\Gamma_{6910} \ ,$$

então o único valor que C_{1010} pode assumir que satisfaça a (4.13) é $C_{1010} = 1$.

Portanto,

$$\Gamma_{3710} = \Gamma_{5810} = \Gamma_{6910} = 1 \quad . \tag{4.13a}$$

Devido a isto, a possibilidade (4.6a) é excluida.

Em resumo, concluímos a exclusão das possibilidades (4.4a), (4.5a), (4.6a), (4.7a), (4.8a), (4.9a), (4.10a) determinamos o valor +1 para Γ_{abc} ao tomarmos permutações pares de (a,b, c) = 1,7,8), (2,79), (3,7,10), (4,8,9), (5,8,10), (6,9,10) e -1 nas ímpares e zero para outras permutações. Também mostramos que

$$C_{\ell a} = \delta_{\ell a} \quad . \tag{4.14}$$

A relação (4.2) toma a seguinte forma:

$$\Psi'^{\,i}_{\ell} = i\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,\delta_{\ell a}\,\Psi^{j}_{\ell}\Psi^{k}_{c} \quad ,$$

ou

$$\Psi'^{\,i}_{a} = i\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \quad , \tag{4.15}$$

e a equação (4.1)

$$[(\beta_\nu)_{a\ell}\partial_\nu + (M)_{a\ell}]\Psi^{i}_{\ell} = \Psi'^{\,i}_{a} \quad ,$$

assume a forma

$$[(\beta_\nu)_{a\ell}\partial_\nu + (M)_{a\ell}]\Psi^{i}_{\ell} - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} = 0 \quad . \tag{4.16}$$

Multiplicando o primeiro membro de (4.16) por Ψ^{i}_{a} , podemos definir a seguinte Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\,\{\Psi^{i}_{a}[(\beta_\nu)_{a\ell}\partial_\nu + (M)_{a\ell}]\Psi^{i}_{\ell}\} - \frac{1}{3!}\,i\varepsilon^{ijk}\,\Gamma_{abc}\,\Psi^{i}_{a}\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \quad , \tag{4.17}$$

que é similar à Lagrangiana definida por Okubo-Tosa. De fato , esta Lagrangiana reproduz a equação (4.16) ao aplicarmos a equação de Euler-Lagrange para o campo Ψ .

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO HAMILTONIANA TIPO SCHRODINGER

Já apresentamos na Introdução deste trabalho a razão do estudo da equação de Kemmer, o que foi feito até agora. Conhecida a equação de onda podemos obter a Hamiltoniana; é o que pretendemos no presente capítulo, visto que a equação (2.17) difere, pelos F_μ, da equação obtida por Silveira. Iremos proceder de modo análogo sem, entretanto, introduzir o acoplamento mínimo eletromagnético. Reescrevendo a equação (2.17),

$$[\beta_\mu(\partial_\mu - C_\mu) + M]\Psi = 0 \quad , \tag{5.1}$$

e se definirmos

$$D_\mu = \partial_\mu - C_\mu \quad , \tag{5.1a}$$

a equação (5.1) toma a seguinte forma:

$$(\beta_\mu D_\mu + M)\Psi = 0 \quad . \tag{5.2}$$

Obtemos também a equação adjunta

$$\overline{\Psi}(D_\mu \beta_\mu - M) = 0 \quad , \tag{5.3}$$

e valem as seguintes relações de comutação:

$$[D_\mu \, , \, D_\nu] = -T_{\mu\nu} \quad , \tag{5.4}$$

$$[D_\mu \, , \, \beta_\nu] = -[C_\mu \, ; \beta_\nu] \quad , \tag{5.4a}$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu - [C_\mu ; C_\nu] \tag{5.4b}$$

A partir da equação (5.2) vamos procurar obter uma equação tipo Schrodinger de modo similar ao que foi feito por Kemmer e outros.

Multipliquemos a equação (5.2), pela esquerda, por $\beta_\nu \beta_\lambda D_\nu$. Teremos

$$(\beta_\nu \beta_\lambda D_\nu \beta_\mu D_\mu + \beta_\nu \beta_\lambda D_\nu M)\Psi = 0 \quad . \tag{5.5}$$

Por conveniência, adotaremos a seguir $M \equiv m$. Se somarmos e subtrairmos $\beta_\mu D_\nu$ em (5.5), teremos

$$[\beta_\nu \beta_\lambda (D_\nu \beta_\mu - \beta_\mu D_\nu + \beta_\mu D_\nu) D_\mu + \beta_\nu \beta_\lambda D_\nu m]\Psi = 0 \quad .$$

Se levarmos em conta (5.4), teremos

$$\{\beta_\nu \beta_\lambda (-[C_\nu , \beta_\nu] + \beta_\mu D_\nu) D_\mu + \beta_\nu \beta_\lambda D_\nu m\}\Psi = 0 \quad , \tag{5.5a}$$

como

$$\beta_\rho \beta_\lambda \beta_\sigma D_\rho D_\sigma = \beta_\rho \beta_\lambda \beta_\sigma D_\sigma D_\rho + \beta_\rho \beta_\lambda \beta_\sigma [D_\rho ; D_\sigma] \quad ,$$

obtemos, por (5.5a),

$$\{\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu D_\nu D_\mu+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]-\beta_\nu\beta_\lambda[C_\nu,\beta_\mu]D_\mu+\beta_\nu\beta_\lambda D_\nu m\}\Psi = 0 \quad . \qquad (5.5b)$$

Se somarmos (5.5a) com (5.5b), teremos

$$\{(\beta_\nu\beta_\lambda\beta_\mu+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu)D_\nu D_\mu+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]-2\beta_\nu\beta_\lambda[C_\nu,\beta_\mu]D_\mu+2\beta_\nu\beta_\lambda D_\nu m\}\Psi = 0,$$

por (2.7a) e depois fazendo $\mu = \nu$ no 1º termo, fica

$$\{\beta_\mu D_\mu D_\lambda+\beta_\mu D_\lambda D_\mu+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]-2\beta_\nu\beta_\lambda[C_\nu,\beta_\mu]D_\mu+2m\beta_\nu\beta_\lambda D_\nu\}\Psi = 0 \quad ,$$

ou

$$\{\beta_\mu[D_\mu;D_\lambda]+2\beta_\mu D_\lambda D_\mu+2\beta_\mu D_\lambda D_\mu-2\beta_\nu\beta_\lambda([C_\nu,\beta_\mu]D_\mu-mD_\nu)$$

$$-mD_\nu)+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]\}\Psi = 0 \quad . \qquad (5.5c)$$

Como

$$\beta_\mu D_\lambda D_\mu\Psi = ([\beta_\mu,D_\lambda]+D_\lambda\beta_\mu)D_\mu\Psi \quad .$$

Por outro lado

$$\beta_\mu D_\mu\Psi = -m\Psi \quad ,$$

logo,

$$\beta_\mu D_\lambda D_\mu\Psi = ([\beta_\mu,D_\lambda]D_\mu-mD_\lambda)\Psi$$

$$= ([C_\lambda,\beta_\mu]D_\mu-mD_\lambda)\Psi \quad .$$

Substituindo este resultado no segundo termo de (5.5c)

$$\{\beta_\mu(D_\mu,D_\lambda]+2[C_\lambda,\beta_\mu]D_\mu-2mD_\lambda-2\beta_\nu\beta_\lambda([C_\nu,\beta_\mu]D_\mu-mD_\nu)+$$

$$+\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]\}\Psi = 0 \quad ,$$

fazendo $\lambda = 4$

$$\{-2mD_4+2[C_4,\beta_\mu]D_\mu+\beta_\mu[D_\mu,D_4]-2\beta_\nu\beta_4([C_\nu,\beta_\mu]D_\mu-mD_\nu)+$$

$$+\beta_\mu\beta_4\beta_\nu[D_\mu,D_\nu]\}\Psi = 0 \quad . \tag{5.6}$$

Consideremos cada termo de (5.6) separadamente. Se desenvolvermos, teremos

$$-2mD_4 = -2mD_4 \quad ,$$

$$2[C_4,\beta_\mu]D_\mu = 2C_4\beta_4\ {}_4-2\beta_4C_4D_4+2C_4\beta_kD_k-2\beta_kC_4D_k \quad ,$$

$$\beta_\mu[D_\mu,D_4] = -\beta_k\ T_{k4} \quad ,$$

$$-2\beta_\mu\beta_4([C_\mu,\beta_\nu]D_\nu-mD_\mu) = -2\beta_4^2C_4\beta_4D_4-2\beta_4C_4D_4$$

$$-2\beta_4^2C_4\beta_kD_k+2\beta_4^2\beta_kC_4D_k+2\beta_4^2mD_4-2\beta_k\beta_4C_k\beta_4D_4$$

$$+2(-\beta_4^2+1)\beta_kC_kD_4-2\beta_k\beta_4C_k\beta_eD_e+2\beta_k\beta_4\beta_eC_kD_e+2m\beta_k\beta_4D_k \quad ,$$

$$\beta_\mu\beta_4\beta_\nu[D_\mu,D_\nu] = -(-2\beta_4^2-1)\beta_k\ T_{k4}-\beta_k\beta_4\beta_eT_{ke}$$

Convenientemente reagruparemos estes termos obtendo assim os seguintes:

$$-2m(1-\beta_4^2)D_4 \quad ,$$

$$2(1-\beta_4^2)[\beta_k C_k D_4] \quad ,$$

$$-2(1-\beta_4^2)[\beta_k C_4 D_k] \quad ,$$

$$2(1-\beta_4^2)[C_4(\beta_4 D_4+\beta_k D_k)] \quad ,$$

$$-2(1-\beta_4^2)[\beta_k \ T_{k4}] \quad ,$$

$$-\beta_k\beta_4[2C_k(\beta_4 D_4+\beta_e D_e)] \quad ,$$

$$\beta_k\beta_4[-\beta_e \ T_{ke}] \quad ,$$

$$\beta_k\beta_4[2\beta_e C_k D_e] \quad ,$$

$$\beta_k\beta_4[2mD_k] \quad .$$

A equação (5.6) toma a seguinte forma:

$$\{-2m(1-\beta_4^2)D_4+2(1-\beta_4^2)[\beta_k C_k D_4-\beta_k C_4 D_k+C_4(\beta_4 D_4+\beta_k D_k)$$

$$-\beta_k T_{k4}]+\beta_k\beta_4[-2C_k(\beta_4 D_4+\beta_e D_e)$$

$$-\beta_e T_{ke}+2\beta_e C_k D_e+2mD_k]\}\Psi \quad = \quad 0 \quad .$$

Ao multiplicarmos a equação (5.2) por $-2m\beta_4$, obteremos

$$(-2m\beta_4^2 D_4-2m\beta_4\beta_k D_k-2m^2\beta_4)\Psi = 0 \quad . \qquad (5.6b)$$

Somando (5.6b) a (5.6a) e levando em conta que

$$(\beta_4 D_4+\beta_k D_k)\Psi \quad = \quad -m\Psi \quad ,$$

obteremos, para $m \neq 0$,

$$\{-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 + F_4 + (1-\beta_4^2)\ [C_4 - \frac{1}{m}\beta_k C_k D_4 + \frac{1}{m}\beta_k C_4 D_k +$$

$$+ \frac{1}{m}\beta_k T_{k4}] + \beta_k\beta_4[-D_k - C_k - \frac{1}{m}\beta_e C_k D_e +$$

$$+ \frac{\beta_e}{2m} T_{ke}] + \beta_4\beta_k D_k\}\Psi = 0 \quad . \tag{5.7}$$

Se considerarmos as seguintes identidades

$$R = -i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 + F_4 \quad , \tag{5.7a}$$

$$M = C_4 - \frac{1}{m}\beta_k C_k D_4 + \frac{1}{m}\beta_k C_4 D_k + \frac{1}{m}\beta_k T_{k4} \quad , \tag{5.7b}$$

$$N = -D_k - C_k - \frac{1}{m}\beta_e C_k D_e + \frac{\beta_e}{2m} T_{ke} \quad , \tag{5.7c}$$

então a equação (5.7) toma a seguinte forma:

$$\{R + (1-\beta_4^2)M + \beta_k\beta_4 N + \beta_4\beta_k D_k\}\Psi = 0 \quad , \tag{5.8}$$

ou

$$H\Psi = 0 \quad , \tag{5.8a}$$

com

$$H = R + (1-\beta_4^2)M + \beta_k\beta_4 N + \beta_4\beta_k D_k \quad . \tag{5.8b}$$

Devido à impossibilidade de explicitarmos $\partial_t\Psi$ na equação (5.7), visto que aparece no sétimo termo o fator D_4, iremos utilizar o método Sakata-Taketani [9,10]. Segundo este método um operador H pode ser escrito da seguinte maneira:

$$H = H_1 + H_2 \quad , \tag{5.9}$$

onde

$$H_1 = \Gamma H\Gamma + \Gamma H(1-\Gamma) \quad , \tag{5.9a}$$

$$H_2 = (1-\Gamma)H\Gamma + (1-\Gamma)H(1-\Gamma) \quad . \tag{5.9b}$$

Em (5.9 a e b) empregamos Γ que significa

$$\Gamma = \beta_4^2 \quad . \tag{5.9c}$$

Daí, mostramos facilmente que

$$(1-\Gamma)\Gamma = \Gamma(1-\Gamma) = 0 \quad , \tag{5.9d}$$

$$\beta_k \Gamma = (1-\Gamma)\beta_k \quad \text{ou} \quad \Gamma\beta_k = \beta_k(1-\Gamma) \quad , \tag{5.9e}$$

$$(1-\Gamma)(1-\Gamma) = (1-\Gamma) \quad . \tag{5.9f}$$

Ao multiplicarmos a equação (5.8a) por $1-\Gamma$ e Γ obteremos, respectivamente, os seguintes resultados:

$$(1-\Gamma)H\Psi = H_2\Psi = 0 \quad , \tag{5.10}$$

$$\Gamma H\Psi = H_1\Psi = 0 \quad . \tag{5.10a}$$

Por (5.8) e (5.10a), obtemos

$$\Gamma\{R+(1-\beta_4^2)M+\beta_k\beta_4 N+\beta_4\beta_k D_k\}\Gamma\Psi + \Gamma\{(1-\beta_4^2)M+R+\beta_k\beta_4 N+\beta_4\beta_k D_k\}(1-\Gamma)\Psi = 0. \tag{5.11}$$

Em virtude de

$$\Gamma(1-\beta_4^2) = \Gamma(1-\Gamma) = 0 \quad ,$$

a soma do terceiro e sétimo termos de (5.11) é consequentemente nula, pois

$$\Gamma[\beta_k\beta_4 N\Gamma\Psi+\beta_k\beta_4 N(1-\Gamma)\Psi] = \beta_k(1-\Gamma)\beta_4 N\Psi = 0 \quad ,$$

e o sexto termo toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Gamma R(1-\Gamma)\Psi &= \Gamma(-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4+F_4)(1-\Gamma)\Psi \\ &= \Gamma F_4(1-\Gamma)\Psi \quad ,\end{aligned}$$

pois Γ comuta com ∂_t, $\mathbb{B}_4$ e β_4.

Logo, a equação (5.11) torna-se

$$\Gamma(R+\beta_4\beta_k D_k)\Gamma\Psi + \Gamma(F_4+\beta_4\beta_k D_k)(1-\Gamma)\Psi = 0 \quad . \tag{5.11a}$$

Os elementos não nulos de Γ e $(1-\Gamma)$ são os seguintes:

$$\begin{aligned}(\Gamma)_{33} &= (\Gamma)_{55} = \dots = (\Gamma)_{99} = 1 \quad , \\ (1-\Gamma)_{11} &= (1-\Gamma)_{22} = (1-\Gamma)_{44} = (1-\Gamma)_{1010} = 1 \quad .\end{aligned} \tag{5.11b}$$

Portanto,

$$\Gamma\Psi = (0,0,\phi_{14},0,\phi_{24},\phi_{34},B_1,B_2,B_3,0)^t \quad ,$$

e

$$(1-\Gamma)\Psi = (\phi_{12},\phi_{13},0,\phi_{23},0,0,0,0,0,B_4)^t \quad . \tag{5.11c}$$

Como observamos, nas equações (2.4), as equações diferenciais que envolvem as componentes de $(1-\Gamma)\Psi$ não contêm a derivada com relação ao tempo. Também existe uma relação entre

$(1-\Gamma)\Psi$ e $\Gamma\Psi$. Portanto, o desenvolvimento temporal de $(1-\Gamma)\Psi$ é dado através do desenvolvimento temporal de $\Gamma\Psi$ e desprezaremos (5.10).

Utilizemos a equação (5.2) para eliminarmos $(1-\Gamma)\Psi$ de (5.11a). Teremos

$$(1-\Gamma)\Psi = -\frac{1}{m}(1-\Gamma)\beta_4 D_4 - \frac{1}{m}(1-\Gamma)\beta_k D_k \Psi$$

$$= -\frac{1}{m}(1-\Gamma)\beta_k D_k \Psi$$

$$= -\frac{1}{m}\beta_k \Gamma D_k \Psi \quad . \tag{5.11d}$$

Se definirmos Q_k por

$$Q_k = \partial_k - \mathbb{B}_k \quad , \tag{5.12}$$

teremos

$$D_k = Q_k + F_k \quad . \tag{5.12a}$$

Portanto, em virtude de (5.12a) a identidade (5.11d), fica

$$(1-\Gamma)\Psi = -\frac{1}{m}\beta_k Q_k \Gamma\Psi - \frac{1}{m}(1-\Gamma)\beta_k F_k \Psi \quad , \tag{5.12b}$$

pois

$$\Gamma Q_k = Q_k \Gamma \; .$$

Procuremos uma expressão para $(1-\Gamma)\beta_k F_k \Psi$ na qual apareça o fator $\Gamma\Psi$.

Os elementos não nulos de $\beta_k F_k$ são:

$$(\beta_1F_1)_{87} = -i\phi_{12} \qquad (\beta_2F_2)_{78} = i\phi_{12} \qquad (\beta_3F_3)_{79} = i\phi_{13} \quad ,$$

$$(\beta_1F_1)_{97} = -i\phi_{13} \qquad (\beta_2F_2)_{98} = -i\phi_{23} \qquad (\beta_3F_3)_{89} = i\phi_{23} \quad , \tag{5.13}$$

$$(\beta_1F_1)_{107} = -i\phi_{14} \qquad (\beta_2F_2)_{108} = -i\phi_{24} \qquad (\beta_3F_3)_{109} = -i\phi_{34} \quad ,$$

e os elementos não nulos de $(1-\Gamma)\beta_kF_k$ são

$$\begin{aligned} [(1-\Gamma)\beta_kF_k]_{107} &= -i\phi_{14} \quad , \\ [(1-\Gamma)\beta_kF_k]_{108} &= -i\phi_{24} \quad , \\ [(1-\Gamma)\beta_kF_k]_{109} &= -i\phi_{34} \quad . \end{aligned} \tag{5.13a}$$

Consideremos θ a matriz definida por

$$\theta = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{14} & \phi_{24} & \phi_{34} & 0 \end{array}\right] \quad , \tag{5.13b}$$

e por (5.11b) o segundo termo do segundo membro de (5.12b), fica

$$-\frac{1}{m}\,(1-\Gamma)\beta_kF_k\Psi = \frac{i}{m}\,\theta\Gamma\Psi \quad . \tag{5.13c}$$

Substituindo (5.13c) em (5.12b), obtemos:

$$(1-\Gamma)\Psi = -\frac{1}{m}\,\beta_kQ_k\Gamma\Psi + \frac{i}{m}\,\theta\Gamma\Psi \quad , \tag{5.13d}$$

e a equação (5.11a) toma a seguinte forma

$$\Gamma\{R + \beta_4\beta_k D_k + (F_4+\beta_4\beta_k D_k)(-\frac{1}{m}\beta_k Q_k + \frac{i}{m}\theta)]\Gamma\Psi = 0 \quad . \tag{5.14}$$

Os elementos não nulos de ΓF_4 são

$$\begin{aligned} (\Gamma F_4)_{310} &= \phi_{14} \quad , \\ (\Gamma F_4)_{510} &= \phi_{24} \quad , \\ (\Gamma F_4)_{610} &= \phi_{34} \quad , \end{aligned} \tag{5.14a}$$

logo ΓF_4 pode ser definido pela matriz Θ_4, ou seja:

$$\Theta_4 = \Gamma F_4 = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \phi_{14} \\ \hdashline & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \phi_{24} \\ & & & & & & & & & \phi_{34} \\ \hdashline & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ \hdashline & & & & & & & & & 0 \end{array}\right] . \tag{5.14b}$$

No artigo de Silveira ΓF_4 é igual a F_4, no entanto, Θ_4 aqui definida, corresponde à matriz F_4 definida por ele.

Desenvolveremos os termos de (5.14):

a) $$\Gamma[R+\beta_4\beta_k D_k]\Gamma\Psi = \Gamma[-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 + \beta_4\beta_k D_k]\Gamma\Psi$$

$$= [-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 + \Theta_4 + \beta_4\beta_k D_k]\Gamma\Psi \quad ,$$

b) $$\Gamma\{(F_4+\beta_4\beta_k D_k)(-\frac{1}{m}\beta_e Q_e + \frac{i}{m}\theta)\}\Gamma\Psi = \Gamma[-\frac{1}{m}F_4\beta_k Q_k + \frac{i}{m}F_4\theta -$$

$$- \frac{1}{m} \beta_4\beta_k(Q_k+F_k)\beta_e Q_e + \frac{i}{m} \beta_4\beta_k(Q_k+F_k)]\Gamma\Psi$$

$$= [- \frac{1}{m} \Theta_4\beta_k Q_k + \frac{i}{m} \Theta_4 \theta$$

$$- \frac{1}{m} \beta_4\beta_k Q_k\beta_e Q_e - \frac{1}{m} \beta_4\beta_k F_k\beta_e Q_e + \frac{i}{m} \beta_4\beta_k Q_k\theta + \frac{i}{m}\beta_4\beta_k F_k\theta]\Gamma\Psi.$$

Estes resultados nos permitem reescrever (5.14) do seguinte modo:

$$[-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 + \Theta_4 + \beta_4\beta_k D_k - \frac{1}{m} \Theta_4\beta_k Q_k + \frac{i}{m} \Theta_4 \theta$$

$$- \frac{1}{m} \beta_4\beta_k Q_k\beta_e Q_e - \frac{1}{m} \beta_4\beta_k F_k\beta_e Q_e + \frac{i}{m} \beta_4\beta_k Q_k\theta$$

$$+ \frac{i}{m} \beta_4\beta_k F_k\theta]\Gamma\Psi = 0 \quad . \tag{5.15}$$

Por (5.11c) e (5.14b) podemos mostrar que

$$\Theta_4\Gamma\Psi = 0 \ , \tag{5.15a}$$

que coincide com o resultado obtido por Silveira.

O décimo termo de (5.15) é nulo pois

$$F_k(1-\Gamma) = 0 \quad , \tag{5.15b}$$

ou seja,

$$- \frac{1}{m} \beta_4\beta_k F_k\beta_e Q_e \Gamma\Psi = - \frac{1}{m} \beta_4\beta_k F_k(1-\Gamma)\beta_e Q_e\Psi = 0 \quad .$$

O sexto termo de (5.15) fica:

$$\beta_4\beta_k D_k\Gamma\Psi = \beta_4\beta_k Q_k\Gamma\Psi + \beta_4\beta_k F_k\Gamma\Psi =$$

$$= \beta_4(1-\Gamma)\beta_k Q_k \Psi + \beta_4\beta_k F_k \Gamma\Psi$$

$$= \beta_4\beta_k F_k \Gamma\Psi \quad . \tag{5.15c}$$

E, finalmente, o último termo é nulo, pois

$$\beta_k F_k \theta = 0 \quad . \tag{5.15d}$$

Logo, a equação (5.15) após substituirmos estes resultados, temos

$$[-i\partial_t - \mathbb{B}_4 + m\beta_4 - \frac{1}{m}\beta_4\beta_k(\partial_k - \mathbb{B}_k)\beta_e(\partial_e - \mathbb{B}_e) -$$

$$- \frac{1}{m}\Theta_4\beta_k(\partial_k - \mathbb{B}_k) + \frac{i}{m}\Theta_4\theta + \beta_4\beta_k F_k$$

$$+ \frac{i}{m}\beta_4\beta_k(\partial_k - \mathbb{B}_k)\theta]\Gamma\Psi = 0 \quad . \tag{5.16}$$

Obtemos assim uma equação tipo Schrodinger onde a função de onda é $\Gamma\Psi$.

Fazendo, no trabalho de Silveira (22), $A_\mu = 0$ e, identificando F_4 com Θ_4, estaremos estabelecendo a igualdade entre o Hamiltoniano (5.16) e o Hamiltoniano (30) da ref. (22) apesar do 8º termo de (5.16) apresentar o fator F_k, mas o produto $\beta_k F_k$ mantém-se o mesmo ao tomarmos F_k como foi definido por Silveira.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DA HAMILTONIANA

De posse da Hamiltoniana, (5.16), obtida no capítulo anterior, cabe-nos analisar seus termos. Portanto, iremos desenvolver alguns termos em busca de conteúdo físico.

6.1 - RELAÇÕES ENVOLVENDO O SPIN

De acordo com a definição de valor médio de um operador, dada em (1.2.6), a quantidade $\frac{s_{ik}}{i}$ em (1.5.9), reescrita como:

$$iS_j = \varepsilon_{jke}\beta_k\beta_e \quad , \tag{6.1.1}$$

é denominada operador de spin [8,25].

Se empregarmos a definição (6.1.1) podemos verificar a igualdade

$$S_j^3 = S_j \quad , \tag{6.1.1a}$$

a partir da qual concluimos que os autovalores do operador de spin são $\pm$ 1 e 0. As relações (1.1.2) a (1.1.4) que são obedecidas pelos operadores β_μ mostram que a álgebra construida a par -

tir dos β_μ tem 126 elementos independentes(8,11,26). Estes elementos são:

Elemento	Nº de elementos deste tipo	Elemento	Nº de elementos deste tipo	
I	1	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\eta_\sigma$	1	
β_μ	4	$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho$	12	
$\beta_\mu\beta_\nu$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho$	4	
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	12	$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	24	(6.1.1b)
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	6	$\eta_\mu\beta_\nu$	12	
$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12	$\eta_\mu\eta_\nu$	16	
$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12	η_μ	4	
$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\beta_\sigma$	4	Número total	126	

É possível mostrar que três elementos da álgebra comutam com todos os outros. Desde que certas condições de regularidade sejam satisfeitas, o que aliás ocorre no presente caso, o número dos elementos que comutam com todos os outros fornece o número de representações irredutíveis inequivalentes. Já o número total de elementos da base é igual à soma dos quadrados das dimensões das representações. No caso que estamos considerando três são as representações irredutíveis inequivalentes. Se n_1, n_2 e n_3 representam as dimensões destas representações, podemos escrever

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 126 \quad , \tag{6.1.1c}$$

e as dimensões valem 1, 5 e 10. A primeira dimensão 1 é trivial. Somente a segunda e terceira dimensões nos interessa(27). A que estamos usando no presente trabalho está associada ao spin 1 e é constituida por matrizes 10×10.

Vamos provar que

$$-\eta(S_i S_e + S_e S_i) = \beta_i\beta_e + \beta_e\beta_i \qquad (i\neq e) \quad , \qquad (6.1.2)$$

onde

$$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \quad . \qquad (6.1.3)$$

Realmente, consideremos

$$S_i S_e + S_e S_i = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{emn}(\beta_j\beta_k\beta_m\beta_n + \beta_m\beta_n\beta_j\beta_k) \quad ; \quad i\neq e$$

$$= -(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ke} + \delta_{in}\delta_{je}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ke} -$$

$$-\delta_{im}\delta_{je}\delta_{kn})(\beta_j\beta_k\beta_m\beta_n + \beta_m\beta_n\beta_j\beta_k) =$$

$$= -\beta_j(-\beta_j\beta_i\beta_e + \beta_e\delta_{ij} + \beta_j\delta_{ie}) - (\beta_j^2\beta_i + \beta_i\delta_{ij} + \beta_j\delta_{ij})\beta_e$$

$$-(-\beta_m^2\beta_e + \beta_e\delta_{mm} + \beta_m\delta_{me})\beta_i - \beta_m(-\beta_m\beta_e\beta_i +$$

$$+\beta_i\delta_{em} + \beta_m\delta_{ei}) + \beta_j\beta_e\beta_j\beta_i + \beta_j\beta_i\beta_j\beta_e +$$

$$+\beta_e\beta_k\beta_i\beta_k + \beta_i\beta_k\beta_e\beta_k$$

$$= 2\beta_j^2(\beta_i\beta_e + \beta_e\beta_i) - 3(\beta_i\beta_e + \beta_e\beta_i) + \beta_j(\beta_e\delta_{ji} + \beta_i\delta_{je})$$

$$+(\beta_e\delta_{ki}+\beta_i\delta_{ke})\beta_k$$

$$= \quad (2\beta_j^2-1)(\beta_i\beta_e+\beta_e\beta_i) \quad .$$

Em virtude de (1.1.3), ou seja $\eta_j = 2\beta_j^2-1$, chegamos a

$$S_iS_e+S_eS_i = \eta_j(\beta_i\beta_e+\beta_e\beta_i) \quad . \tag{6.1.4}$$

Ao multiplicarmos à esquerda por $-\eta$, teremos:

$$-\eta(S_iS_e+S_eS_i) = -\eta\eta_j(\beta_i\beta_e+\beta_e\beta_i) \quad . \tag{6.1.4a}$$

Por (1.1.4) mostra-se facilmente que

$$\eta\eta_j = \eta_i\eta_e \quad . \tag{6.1.4b}$$

Levando este resultado a (6.1.4a), finalmente, teremos

$$-\eta(S_iS_e+S_eS_i) = -\eta_i\eta_e(\beta_i\beta_e+\beta_e\beta_i)$$

$$= -\eta_i\beta_i\beta_e-\eta_i\beta_e\beta_i$$

$$= \beta_i\beta_e+\beta_e\beta_i \quad .$$

É possível mostrar que

$$S_j^2 = \frac{1}{2}\,(1-\eta\eta_j) = \frac{1}{2}\,(1-\eta_i\eta_e) \quad , \tag{6.1.5}$$

$$\eta_j = \eta(1-2S_j^2) \quad , \tag{6.1.5a}$$

$$\beta_e^2 = \frac{1+\eta}{2} - \eta S_e^2 \quad , \tag{6.1.5b}$$

$$S_iS_j = \beta_k^2(\beta_i\beta_j+\beta_j\beta_i) - \beta_j\beta_i \quad . \tag{6.1.5c}$$

6.2 - ANÁLISE DOS TERMOS DE H

O quinto termo da equação (5.16) vale

$$- \frac{1}{m} \beta_4 \beta_k Q_k \beta_e Q_e = - \frac{1}{m} \beta_4 \beta_k \beta_e (\partial_k - \mathbb{B}_k)(\partial_e - \mathbb{B}_e)$$

$$= - \frac{1}{m} [\beta_j \beta_i (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) + \beta_e^2 (\partial_e - \mathbb{B}_e)^2] \quad , \ i \neq j$$

$$= - \frac{1}{m} \beta_4 [(\beta_i \beta_j + \beta_j \beta_i)(\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) - \beta_i \beta_j (\partial_j - \mathbb{B}_j) .$$

$$. (\partial_i - \mathbb{B}_i) + \beta_e^2 (\partial_e - \mathbb{B}_e)^2] \quad . \tag{6.2.1}$$

Se utilizamos (6.1.2) e (6.1.5b) em (6.2.1), obtemos:

$$- \frac{1}{m} \beta_4 \beta_k Q_k \beta_e Q_e = - \frac{1}{m} \beta_4 [-\eta (S_j S_i + S_i S_j)(\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) -$$

$$- \beta_i \beta_j (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) + (\frac{1+\eta}{2} - S_e^2)(\partial_e - \mathbb{B}_e)^2] \ . \tag{6.2.1a}$$

Observemos que

$$[S_e(\partial_e - \mathbb{B}_e)]^2 = S_e^2 (\partial_e - \mathbb{B}_e)^2 + S_j S_i (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) \quad ,$$

ou melhor,

$$S_e^2 (\partial_e - \mathbb{B}_e)^2 = [S_e (\partial_e - \mathbb{B}_e)]^2 - S_j S_i (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) \ . \tag{6.2.1b}$$

Substituindo (6.2.1b) em (6.2.1a), teremos:

$$- \frac{1}{m} \beta_4 \beta_k Q_k \beta_e Q_e = - \frac{1}{m} \beta_4 \{-\eta S_i S_j (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) - \beta_i \beta_j (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i)$$

$$+ \left(\frac{1+\eta}{2}\right)(\partial_e - \mathbb{B}_e)^2 - \eta[S_e(\partial_e - \mathbb{B}_e)]^2 \}$$

$$= -\frac{1}{m}\beta_4[-\eta S_i S_j - \beta_i\beta_j](\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i) + \frac{1}{m}\beta_4\{\eta[S_e(\partial_e - \mathbb{B}_e)]^2$$

$$- \frac{(1+\eta)}{2}(\partial_e - \mathbb{B}_e)^2 \} \quad . \qquad (6.2.2)$$

Vamos mostrar que o fator $-\eta S_i S_j - \beta_i\beta_j$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$-\eta S_i S_j - \beta_i\beta_j = -\frac{1}{2}(1+\eta)(\beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i) \quad . \qquad (6.2.2a)$$

Por (6.1.5c), temos

$$S_i S_j = \beta_k^2(\beta_i\beta_j + \beta_j\beta_i) - \beta_j\beta_i \quad ,$$

e substituindo (6.1.5b), ficamos com

$$S_i S_j = \left[\left(\frac{1+\eta}{2}\right) - \eta S_k^2\right](\beta_i\beta_j + \beta_j\beta_i) - \beta_j\beta_i$$

em virtude de

$$\eta S_k^2 = \frac{1}{2}(\eta - \eta_k) \quad , \qquad (6.2.2b)$$

obtemos

$$S_i S_j = \left[\frac{1+\eta_k}{2}\right](\beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i) - \beta_j\beta_i \quad . \qquad (6.2.2c)$$

Multiplicando (6.2.2c) por $-\eta$, depois somando e subtraindo $\beta_i\beta_j$, teremos:

$$-\eta S_i S_j - \beta_i\beta_j = -\left[\frac{\eta+\eta\eta_k}{2}\right](\beta_i\beta_j + \beta_j\beta_i) + \eta\beta_j\beta_i - \beta_i\beta_j \quad .$$

Como

$$\eta\eta_k = n_i n_j \quad ,$$

iremos, finalmente, chegar à identidade (6.2.2a), ou seja,

$$-\eta S_i S_j - \beta_i \beta_j = -\left[\frac{\eta+\eta_i\eta_j}{2}\right](\beta_i\beta_j+\beta_j\beta_i)+\eta\beta_j\beta_i-\beta_i\beta_j$$

$$= -\frac{\eta}{2}(\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i)+\frac{1}{2}(\beta_i\beta_j+\beta_j\beta_i)-\beta_i\beta_j$$

$$= -\frac{1}{2}(1+\eta)(\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i) \quad .$$

Se substituirmos (6.2.2a) em (6.2.2)

$$-\frac{1}{m}\beta_4\beta_k\beta_e(\partial_k-\mathbb{B}_k)(\partial_e-\mathbb{B}_e) = -\frac{1}{m}\beta_4\left[-\frac{1}{2}(1+\eta)(\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i)\right].$$

$$.(\partial_j-\mathbb{B}_j)(\partial_i-\mathbb{B}_i) + \frac{1}{m}\beta_4\{\eta[S_e(\partial_e-\mathbb{B}_e)]^2$$

$$-\frac{(1+\eta)}{2}(\partial_e-\mathbb{B}_e)^2\} \tag{6.2.3}$$

$$= \frac{1}{2m}\beta_4(1+\eta)(\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i)(\partial_j-\mathbb{B}_j)(\partial_i-\mathbb{B}_i) + \frac{1}{m}\beta_4\eta[S_e(\partial_e-\mathbb{B}_e)]^2$$

$$-\frac{1}{2m}\beta_4(1+\eta)(\partial_e-\mathbb{B}_e)^2 \tag{6.2.3a}$$

$$= \frac{i}{2m}\beta_4(1+\eta)\varepsilon_{kij}S_k(\partial_j-\mathbb{B}_j)(\partial_i-\mathbb{B}_i) + \frac{1}{m}\beta_4\eta[S_e(\partial_e-\mathbb{B}_e)]^2$$

$$-\frac{1}{2m}\beta_4(1+\eta)(\partial_e-\mathbb{B}_e)^2 \tag{6.2.3b}$$

$$= -\frac{1}{m}\left[\beta_4\frac{(1+\eta)}{2}(\partial_e-\mathbb{B}_e)(\partial_e-\mathbb{B}_e)\right]$$

$$- \frac{i}{4m} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k [(\partial_i - \mathbb{B}_i)(\partial_j - \mathbb{B}_j) - (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i)]$$

$$+ \frac{1}{m} \beta_4 \eta [S_e(\partial_e - \mathbb{B}_e)]^2 \quad . \tag{6.2.3c}$$

Tomemos, separadamente, o segundo termo do segundo membro de (6.2.3c) e procuremos dar-lhe uma nova forma, ou seja:

$$- \frac{i}{4m} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k [(\partial_i - \mathbb{B}_i)(\partial_j - \mathbb{B}_j) - (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i)] =$$

$$= - \frac{i}{4m} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k \{(\partial_j \mathbb{B}_j - \partial_i \mathbb{B}_j) + [\mathbb{B}_i ; \mathbb{B}_j]\} \quad . \tag{6.2.4}$$

Por (2.1) temos que

$$-im\phi_{ij} = +(\partial_j \mathbb{B}_i - \partial_i \mathbb{B}_j) + [\mathbb{B}_i ; \mathbb{B}_j] \quad ,$$

logo, a identidade (6.2.4) fica:

$$- \frac{i}{m} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k [(\partial_i - \mathbb{B}_i)(\partial_j - \mathbb{B}_j) - (\partial_j - \mathbb{B}_j)(\partial_i - \mathbb{B}_i)] =$$

$$= - \frac{i}{m} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k (-im\phi_{ij})$$

$$= - \frac{1}{4} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k \phi_{ij} \quad . \tag{6.2.4a}$$

Assim, encontramos o termo

$$- \frac{1}{4} \beta_4 (1+\eta) \varepsilon_{kij} S_k \phi_{ij} \quad , \tag{6.2.5}$$

que é uma interação do spin S_k com o campo de Yang-Mills ϕ_{ij}, sem campo eletromagnético. É importante observar que o termo de interação não depende da massa.

Os outros termos da Hamiltoniana (5.16) seguem, também, a interpretação dada por Silveira, ou seja: os últimos quatro termos são de origem não linear e dependem de ϕ_{j4}, ϕ_k , $\mathbb{B}_k$ e $\mathbb{B}_4$.

APÊNDICE A

LAGRANGIANO DE OKUBO-TOSA

É nosso objetivo chegar à Lagrangiana de Okubo-Tosa[23] para os campos de Yang-Mills e evidenciar as diferenças que nos levaram a encontrar o Lagrangiano (4.17). Com esta finalidade apresentaremos, detalhadamente, a parte II do artigo de Okubo-Tosa. Para melhor comparação nos restringiremos ao grupo SU(2); utilizaremos os mesmos índices e letras dos campos do capítulo quatro.

A.1 - YANG-MILLS X KEMMER

A Lagrangiana de Yang-Mills com massa é dada por

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{4}\, \phi^{i}_{\mu\nu}\phi^{i\mu\nu} + \frac{1}{2}\, m^2 B^{i}_{\mu} B^{i\mu} \\ &- \frac{1}{2}\, \phi^{i}_{\mu\nu}\, [\partial^{\mu}B^{i\nu} - \partial^{\nu}B^{i\mu} + g\varepsilon^{ijk}B^{j\mu}B^{k\nu}] \ , \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

onde a métrica de Lorentz é tomada como

$$\begin{aligned} &\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1 \ , \\ &\eta_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu \neq \nu) \ . \end{aligned} \tag{A.1.2}$$

Os índices latinos em (A.1.1) referem-se à simetria interna com a álgebra de Lie

$$[t^i,t^j] = i\varepsilon^{ijk}t^k \quad , \tag{A.1.3}$$

para i,j,k = 1,2,3, onde ε^{ijk} é o coeficiente de estrutura totalmente antissimétrico. Ao tomarmos $\phi^i_{\mu\nu}$ e B^i_μ como variáveis independentes, a Lagrangiana (A.1.1) reproduz as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\mu B^i_\nu-\partial_\nu B^i_\mu-\phi^i_{\mu\nu} = -g\varepsilon^{ijk}B^j_\mu B^k_\nu \quad , \tag{A.1.4}$$

$$\partial^\nu\phi^i_{\mu\nu}-m^2B^i_\mu = g\varepsilon^{ijk}\phi^j_{\mu\nu}B^{k\nu} \quad . \tag{A.1.4a}$$

Okubo e Tosa definiram o vetor

$$\Psi^i = (\phi^i_{23},\phi^i_{31},\phi^i_{12},\phi^i_{01},\phi^i_{02},\phi^i_{03},B^i_1,B^i_2,B^i_3,B^i_0)^t \quad , \tag{A.1.5}$$

para chegar à Lagrangiana com termo cúbico (o índice superior t representa o transposto).

Comparando as equações (2.1), (2.2) com (A.1.4), (A.1.4a) vemos que elas apresentam características diferentes visto que o fator m^2 em (A.1.4a) muda a dimensão do campo B_μ. Além disso o vetor Ψ em (A.1.5) difere de (2.3), contudo podemos obter uma matriz constante tal que o produto por (A.1.5) tenha como resultado (2.3). Apesar disso, não conseguimos transformar o termo de interação cúbica da Lagrangiana (4.17) no termo similar encontrado por Okubo.

Procuremos escrever as equações (A.1.4) e (A.1.4a) na forma

$$(\beta_\mu\partial^\mu-M)\Psi^a = \Psi'^a \quad , \tag{A.1.6}$$

com Ψ^a dado por (A.1.5) e Ψ'^a a definir.

Como no Capítulo 2, desenvolveremos (A.1.4) e (A.1.4a), levando em conta (A.1.5) e obtemos

$$
\begin{aligned}
&\partial_2 B_3^i - \partial_3 B_2^i + g\varepsilon^{ijk} B_2^j B_3^k = \phi_{23}^i \quad , \\
&\partial_3 B_1^i - \partial_1 B_3^i + g\varepsilon^{ijk} B_3^j B_1^k = \phi_{31}^i \quad , \\
&\partial_1 B_2^i - \partial_2 B_1^i + g\varepsilon^{ijk} B_1^j B_2^k = \phi_{12}^i \quad , \\
&\partial_0 B_1^i - \partial_1 B_0^i + g\varepsilon^{ijk} B_0^j B_1^k = \phi_{01}^i \quad , \\
&\partial_0 B_2^i - \partial_2 B_0^i + g\varepsilon^{ijk} B_0^j B_2^k = \phi_{02}^i \quad , \\
&\partial_0 B_3^i - \partial_3 B_0^i + g\varepsilon^{ijk} B_0^j B_3^k = \phi_{03}^i \quad , \\
&\partial^0 \phi_{10}^i + \partial^3 \phi_{12}^i + \partial^3 \phi_{13}^i - g\varepsilon^{ijk} \phi_{1\nu}^j B^{k\nu} = m^2 B_1^i \quad , \\
&\partial^0 \phi_{20}^i + \partial^1 \phi_{21}^i + \partial^3 \phi_{23}^i - g\varepsilon^{ijk} \phi_{2\nu}^j B^{k\nu} = m^2 B_2^i \quad , \\
&\partial^0 \phi_{30}^i + \partial^1 \phi_{31}^i + \partial^2 \phi_{32}^i - g\varepsilon^{ijk} \phi_{3\nu}^j B^{k\nu} = m^2 B_3^i \quad , \\
&\partial^1 \phi_{01}^i + \partial^2 \phi_{02}^i + \partial^3 \phi_{03}^i - g\varepsilon^{ijk} \phi_{0\nu}^j B^{k\nu} = m^2 B_0^i \quad .
\end{aligned}
\qquad (A.1.7)
$$

Observemos que:

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c}
 & & & & & & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & \\
\hdashline
 & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hdashline
 & & & 0 & 1 & 0 & & & &
\end{array}\right] \partial^2 \Psi^i = \beta_2 \partial^2 \Psi^i \quad , \qquad (A.1.8)
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} & & & & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right] \partial^3\psi^i = \beta_3\partial^3\psi^i \quad , \tag{A.1.9}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & -1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \end{array}\right] \partial^0\psi^i = \beta_0\partial^0\psi^i \quad , \tag{A.1.10}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 & \\ \hline & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right] \partial^1\psi^i = \beta_1\partial^1\psi^i \quad , \tag{A.1.11}$$

onde as matrizes β_μ satisfazem à seguinte relação:

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda+\beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = -\eta_{\mu\nu}\beta_\lambda - \eta_{\lambda\nu}\beta_\mu \quad . \tag{A.1.12}$$

Se levarmos em conta (A.1.7), podemos definir Ψ^i como:

$$\psi'^i = g\varepsilon^{ijk}(-B_2^jB_3^k,\ -B_3^jB_1^k,\ -B_1^jB_2^k,\ B_0^jB_1^k,\ -\ B_0^jB_2^k,\ -B_0^jB_3^k \quad ,$$

$$\phi^j_{1\nu}B^{k\nu},\phi^j_{2\nu}B^{k\nu},\ \phi^j_{3\nu}B^{k\nu},\phi^j_{0\nu}B^{k\nu})^t \quad , \tag{A.1.13}$$

bem como a matriz

$$M = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ \hdashline & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hdashline & & & & & & m^2 & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & m^2 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & m^2 & \\ \hdashline & & & & & & & & & m^2 \end{array}\right] . \tag{A.1.14}$$

Desta maneira chegaremos à expressão (7.1.6), isto é,

$$(\beta_\mu \partial^\mu - M)\Psi^i = \Psi'^i \quad ,$$

ou (A.1.15)

$$[(\beta_\mu)_{es}\partial^\mu - (M)_{es}]\Psi^i_s = \Psi'^i_e \quad .$$

A.2 - DETERMINAÇÃO DOS Γ_{abc}

A fim de chegarmos à Lagrangiana do artigo de Okubo , definiremos Ψ'^i_e pela seguinte relação:

$$\Psi'^i_e = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{ea}\Psi^j_b\Psi^k_c \quad . \tag{A.2.1}$$

A matriz C é definida por

$$C = -1 - 2\beta_0^2 \quad , \tag{A.2.2}$$

e obedece às relações

$$C = C^t = C^{-1} \qquad (A.2.3)$$

$$(C)_{se}\,(C)_{ei} = \delta_{si} \quad , \quad C^2 = 1 \quad . \qquad (A.2.4)$$

Γ_{abc} também é totalmente antissimétrica nos índices , com a, b, c, e variando de 1 a 10.

Observemos que neste caso os coeficientes $(C)_{ea}$ estão fixados, a priori, pois ao efetuarmos o produto

$$\overline{\Psi}^i_e \Psi'^i_e \quad , \qquad (A.2.5)$$

onde $\overline{\Psi}$ é definido como

$$\overline{\Psi}^i_e = \Psi^i_s (C)_{se} \quad , \qquad (A.2.6)$$

obteremos, devido a (A.2.4), o termo cúbico que procuramos a menos do fator $(3!)^{-1}$.

A matriz C é dada por (A.2.2) ou, detalhadamente:

$$C = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c}
-1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & -1 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & -1 & & & & & & & \\
\hdashline
 & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\
\hdashline
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\
\hdashline
 & & & & & & & & & -1
\end{array}\right] \quad . \qquad (A.2.7)$$

Resta-nos, portanto, determinar Γ_{abc}. O procedimento é similar ao que foi feito no capítulo quatro com uma simplicidade a mais, pois os coeficientes $(C)_{se}$ são conhecidos. Em virtude disto, evitaremos pormenores para $e > 1$.

Se fizermos e = 1 em (A.2.1), teremos

$$\Psi'^{i}_{1} = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{1a}\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \quad ,$$

mas por (A.1.13), sabemos que

$$\Psi'^{i}_{1} = -g\varepsilon^{ijk}B^{j}_{2}B^{k}_{3} \quad .$$

Devemos ter

$$-g\varepsilon^{ijk}B^{j}_{2}B^{k}_{3} = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{1a}\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \quad . \tag{A.2.8}$$

Em virtude da definição dada para Ψ^{i} em (A.1.5), sabemos que;

$$\Psi^{j}_{8} = B^{j}_{2} \quad ,$$

$$\Psi^{k}_{9} = B^{k}_{3} \quad ,$$

e por (A.2.7), C_{1a} é diferente de zero para a = 1, com $C_{11}=-1$.

Portanto, a identidade (A.2.8) é verificada se:

$$b = 8 \quad , \quad c = 9$$

e (A.2.9)

$$\Gamma_{189} = 1 \quad .$$

De agora em diante vamos apenas indicar os valores numéricos.

Se e = 2 então a passa a ser igual a 2. Existe apenas C_{22} diferente de zero e seu valor é -1.

$$-g\varepsilon^{ijk}B^{j}_{3}B^{k}_{i} = -g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{2bc}\Psi^{j}_{b}\Psi^{k}_{c} \quad .$$

Concluimos que

$$b = 9 \quad , \quad c = 7$$

e $\qquad$ (A.2.10)

$$\Gamma_{297} = 1 \; .$$

Se $e = 3 \Longrightarrow a = 3$ e $c_{33} = -1$

$$-g\varepsilon^{ijk}B_1^jB_2^k = -g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{3bc}\Psi_b^j\Psi_c^k$$

Obtemos:

$$b = 7 \quad , \quad c = 8$$

e $\qquad$ (A.2.11)

$$\Gamma_{378} = 1 \; .$$

Se $e = 4 \Longrightarrow a = 4$ e $C_{44} = 1$

$$-g\varepsilon^{ijk}B_0^jB_1^k = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}\Psi_b^j\Psi_c^k \; .$$

Logo,

$$b = 10 \quad , \quad c = 7$$

e $\qquad$ (A.2.12)

$$\Gamma_{4107} = -1 \; .$$

Se $e = 5 \Longrightarrow a = 5$ e $c_{55} = 1$

$$-g\varepsilon^{ijk}B_0^jB_3^k = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{5bc}\Psi_b^j\Psi_c^k \; .$$

Portanto;

$$b = 10 \quad , \quad c = 8$$

e $\qquad$ (A.2.13)

$$\Gamma_{5108} = -1 \; .$$

Se $e = 6 \Rightarrow a = 6$ e $c_{66} = 1$

$$-g\varepsilon^{ijk}B_0^jB_3^k = g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{6jk}\Psi_b^j\Psi_c^k$$

teremos,

$$b = 10 \quad , \quad c = 9$$

e $$\Gamma_{6109} = -1 \quad . \tag{A.2.14}$$

No caso de e = 7, teremos a = 7 e $c_{77} = 1$; consequentemente,

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{7bc}\Psi_b^j\Psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(\Gamma_{7410}\Psi_4^j\Psi_{10}^k+\Gamma_{729}\Psi_2^j\Psi_9^k+\Gamma_{783}\Psi_8^j\Psi_9^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}(\Gamma_{7410}\phi_{01}^j B_0^k+\Gamma_{729}\phi_{31}^j B_3^k + \Gamma_{783}B_2^j\phi_{12}^k) \quad .$$

Devido a (A.2.9 a 11) e pela antissimetricidade de Γ_{abc}, teremos,

$$\Gamma_{7410} = -\Gamma_{297} = -\Gamma_{783} = -1 \quad . \tag{A.2.15}$$

Logo

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{7bc}\Psi_b^j\Psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(-\phi_{01}^j B_0^k + \phi_{31}^j B_3^k + B_2^j\phi_{12}^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}(\phi_{10}^j B_0^k - \phi_{13}^j B_3^k - \phi_{12}^j B_2^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}\phi_{1\nu}^j B^{k\nu} \quad . \quad \text{c.q.d.}$$

Se e = 8, teremos i = 8 e $c_{88} = 1$, consequentemente,

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{8bc}\Psi_b^j\Psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(\Gamma_{891}\Psi_9^j\Psi_1^k+\Gamma_{837}\Psi_3^j\Psi_7^k+\Gamma_{8510}\Psi_5^j\Psi_{10}^k)$$

temos que

$$\Gamma_{891} = \Gamma_{837} = -\Gamma_{8510} = 1 \quad . \tag{A.2.16}$$

Portanto,

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{8bc}\psi_b^j\psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(B_3^j\phi_{23}^k+\phi_{12}^jB_1^k-\phi_{02}^jB_0^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}(-\phi_{23}^jB_3^k-\phi_{21}^jB_1^k+\phi_{20}^jB_0^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}\phi_{2\nu}^jB^{k\nu} \qquad \text{c.q.d.}$$

Para e = 9, teremos a = 9 e c_{99} = 1, consequentemente,

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{9bc}\psi_b^j\psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(\Gamma_{918}\psi_1^i\psi_8^k+\Gamma_{972}\psi_7^j\psi_2^k+\Gamma_{9610}\psi_6^j\psi_{10}^k) \ .$$

Temos que

$$\Gamma_{918} = \Gamma_{972} = -\Gamma_{9610} = 1 \ . \qquad (A.2.17)$$

Logo,

$$g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{9bc}\psi^j\psi_c^k = g\varepsilon^{ijk}(\phi_{23}^jB_2^k + B_1^j\phi_{31}^k - \phi_{03}^jB_0^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}(-\phi_{32}^jB_2^k - \phi_{31}^jB_1^k + \phi_{30}^jB_0^k)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}\phi_{3\nu}^jB^{k\nu} \qquad \text{c.q.d.}$$

Finalmente, se e for igual a 10, teremos,

$$e = 10 \Longrightarrow a = 10 \text{ e } c_{1010} = -1 \ ,$$

$$-g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{10bc}\psi_b^j\psi_c^k = -g\varepsilon^{ijk}(\Gamma_{1074}\psi_7^j\psi_4^k+\Gamma_{1085}\psi_8^j\psi_5^k+\Gamma_{1096}\psi_9^j\psi_6^k) \ .$$

Temos que,

$$\Gamma_{1074} = \Gamma_{1085} = \Gamma_{1096} = -1 \ . \qquad (A.2.18)$$

Portanto,

$$-g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{10bc}\Psi^j_b\Psi^k_c = -g\varepsilon^{ijk}(-B^j_1\phi^k_{01}-B^j_2\phi^k_{02}-B^j_3\phi^k_{03})$$

$$= -g\varepsilon^{ijk}(\phi^j_{01}B^k_1+\phi^j_{02}B^k_2+\phi^j_{03}B^k_3)$$

$$= g\varepsilon^{ijk}\phi^j_{0\nu}B^{k\nu} \qquad \text{c.q.d.}$$

Os coeficientes Γ_{abc} assumem somente o valor +1 para as permutações pares de (a,b,c) = (1,8,3); (2,9,7); (3,7,8) ; (4,7,10), (5,8,10); (6,9,10), e o valor -1 para permutações ímpares e valor zero para repetições.

A.3 - LAGRANGIANA

No parágrafo anterior determinamos Γ_{abc}, logo podemos escrever a equação (A.1.15) com a ajuda de (A.2.1) na seguinte forma

$$[(\beta_\mu)_{es}\partial^\mu-(M)_{es}]\Psi^i_s-\frac{g}{2}\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}C_{ea}\Psi^j_b\Psi^k_c = 0 . \qquad (A.3.1)$$

Podemos então definir a seguinte Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}^i_e[(\beta_\mu)_{es}\partial^\mu-(M)_{es}]\Psi^i_s - \frac{1}{3!}\,g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}\overline{\Psi}^i_e C_{ea}\Psi^j_b\Psi^k_c .$$

Devido a (A.2.6),

$$L = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}^i_e[(\beta_\mu)_{es}\partial^\mu-(M)_{es}]\Psi^i_s - \frac{1}{3!}\,g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}\Psi^i_q C_{qe}C_{ea}\Psi^j_e\Psi^k_c .$$

Finalmente, em virtude de (7.2.4), teremos

$$L = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}^i_e[(\beta_\mu)_{es}\partial^\mu-(M)_{es}]\Psi^i_s - \frac{1}{3!}\,g\varepsilon^{ijk}\Gamma_{abc}\Psi^i_a\Psi^j_b\Psi^k_c , \qquad (A.3.2)$$

que é a Lagrangiana de Okubo-Tosa para os campos de Yang-Mills no SU(2).

BIBLIOGRAFIA

(1) - Yang, C.N. and Mills, R.L. - Conservation of Isotopic Gauge Invariance, Phys. Rev. 96, 1(1954)191.

(2) - Maciejko, R. - Yang-Mills Equations in Maxwell Form, J. Math. Phys. 19,12(1978)2491.

(3) - Proca, A. - Sur la Theorie Ondulatoire des Électrons Positifs et Negatifs , J. Phys. et le rad. 7(1936)347.

(4) - Dirac, P.A.M. - Does Renormalization Make Sense ?, AIP Conf. Proc. (USA), 74(1981)129.

- Komar, A. and Salam, Abdus - Renormalization Problem for Vector Meson Theories: Higher Groups, Phys. Rev. 4, 6(1971) 1918.

- Ktorides, C.N. - Renormalizability Aspects of Massive Yang-Mills Fields Models, Phys. Rev. D13,10(1976)2811.

- Fukuda, T., Matsuda, H., Seki, Y. and Yokoyama, K. - Renormalizability of Massive Yang-Mills Theory, Gauge Theory and Gravitation. Proc. Int. Sy. (Naroe Japan), (1982), 79.

(5) - Higghs, P.W. - Spontaneous Symmetry Breakdown Without Massless Bosons, Phys. Rev., 145(1966)1156.

- Bardeen, W.A. and Shizuya, Ken-ichi-Structure and Renormalizability of Massive Yang-Mills Fields Theories, Phys.Rev. D18, 6(1978)1969.

- Butera, P., Enriotti, M. and Ferrari, R. - Gauge Invariance Without Photons and Higgs Bosons, Lett. Nu. Cimento 34, 5(1982)129.

- Lee, Benjamin, W. - Renormalizable Vector-Meson Theory Perturbation Theory of the Higgs Phenomena, Phys. Rev. D5, 4 (1972)823.

(6) - Pauli, W. - Invariance of the Dirac Wave Equation with Respect to Similarity Transformations on the Line Elements in the Case of Very Small Stationary Masses, Hllv. Phys. Acta. 13,3(1940)204.

(7) - Schwinger, J. - Quantum Eletrodynamics.I. A Covariant Formulation, Phys. Rev. 74,10(1948)1439.

(8) - Kemmer, N., The Particle Aspect of Meson Theory, Roy. Soc. A173(1939)91.

(9) - Taketani, M. and Sakata, S. - On the Wave Equation of Meson, Prog. Theor. Phys. Suppl.22,1(1940)84.

(10) - Heitler, W. - On the Particle Equation of the Meson, Proc. Roy. Soc. 49, sect. A, (1943) 1.

(11) - Bhabha, H.J. - Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles, Rev. Mod. Phys. 17,2-3(1945)200.

(12) - Tokuoka, Z. and Tanaka, M. - On the Equivalence of the Particle Formalism and the Wave Formalism of Meson,Prog.Theor. Phys. 8,26(1952)599.

(13) - Fischbach, E., Nieto, M.M. and Scott, C.K. - The Association of the Sakata-Taketani (Feshbach-Villars) Field with the Kemmer Field, Under Symmetry Breaking, Prog. Theor.Phys. 48,2(1972)574.

(14) - Kraycik, R.A. and Nieto, M.M., Bhabha First-Order Wave Equations. I. C, P, and T., Phys. Rev. D10,12(1974)4049.

(15) - Duffin, R.J. - On the Characteristic Matrices of Covariant Systems, Phys. Rev. 54,15(1938)1114.

(16) - Kemmer, N. - The Algebra of Meson Matrices, Proc.Camb.Phil. Soc., 39(1943)189.

(17) - Schrodinger, E., Systematics of Meson-Matrices, Proc. R.I. A., 49, Sect. A (1943)29.

(18) - Schrodinger, E. - Pentads, Tetrads, and Triads of Meson - -Matrices, Proc. R.I.A. 48, Sect. A(1943)135.

(19) - Shimpuku, T., Duffin-Kemmer Algebra as a Ring and its Representations, J. Math. Anal. Applications,27(1969)181.

(20) - Feschbach, E., Nieto, M.M. and Scott, C.K. - Duffinkemmer -Petiau Subalgebras: Representations and Applications , Math. Phys. 14, 12(1973)1760.

(21) - Deshpaude, N.G. and Mc Namee, P.C., Spin-Zero Intermediate Boson for Weak Interactions, Phys.Rev. D5,5(1972)1389.

(22) - Silveira, A., Hamiltonian of the Massive Yang-Mills Theory, Phys. Rev. D22,6(1980)1390.

(23) - Okubo, S. and Tosa, Y., Duffin-Kemmer Formulation of Gauge Theories, Phys. Rev. D20,2(1979)462.

(24) - Bollini, C.G., Introdução à Teoria Quântica de Campos. Notas de Aula do Curso de Teoria Quântica de Campos,CBPF(1982).

(25) - Sankaranarayanan, A., Spin Operators in the Kemmer Theory Phys. Rev. 136,3B(1964)B719.

(26) - Louck, J.D. and Nieto, M.M., The Lie Algebra so (N) and the Duffin-Kemmer-Petiau Ring, J. Math. Phys. 15,1(1974) 60.

(27) - Klein A. - The Coupling of a Dirac Field to a Kemmer Field, Phys. Rev. 82,5(1951)639.

"Campos de Yang-Mills com massa na formulação de Kemmer"

Luiz Alberto de Santana Cordolino

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Adel da Silveira – Presidente/CBPF

Carlos Marcio do Amaral – UFRJ

Jaime Tiomno – CBPF