ROLAND DE AZEREDO CAMPOS

DINÂMICA CLÁSSICA E QUÂNTICA DE UMA TEORIA GRAVITACIONAL COM TELEPARALELISMO ABSOLUTO

TESE de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, Agosto de 1984

AGRADECIMENTOS

— Ao Prof. Colber Gonçalves de Oliveira, por sua orientação, apoio e interesse, essenciais à realização deste trabalho.

— Ao Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor, pelas sugestões, pela valiosa e frequente interlocução.

— À FAPESP, pela sustentação financeira ao projeto de tese em sua fase inicial.

RESUMO

Estuda-se a dinâmica de uma teoria alternativa da gravitação com teleparalelismo absoluto. São obtidas quatro equações de vínculo na análise de Cauchy, do mesmo modo que na relatividade geral, em razão da existência do grupo de transformações da variedade. Também são derivadas equações de propagação, através do emprego de métodos hamiltonianos desenvolvidos por Dirac. Examina-se, ademais, uma álgebra de geradores associados ao grupo de Lorentz global, e o princípio de correspondência objetivando uma versão quântica da teoria.

SUMMARY

The dynamics of an alternative theory of gravitation with absolute teleparallelism is studied. In the Cauchy problem of this theory four constraint relations are obtained, as in general relativity, because of the existence of the manifold mapping group. Propagation equations for the dynamical variables are also derived by applying Dirac's Hamiltonian methods. In addition, an algebra of generators related to the global Lorentz group and the correspondence principle leading to a quantum version of the theory are also discussed.

SUMÁRIO

Pág.

"... fragmento metódico de la historia total de un planeta desconocido, con sus arquitecturas y sus barajas, con el pavor de sus mitologías y el rumor de sus lenguas, (...), con su álgebra y su fuego, (...)."

Jorge Luis Borges

(Tlön, Uqbar, Orbis Tertius)

INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral de Einstein (RG), assentada na clareza e generalidade de seus princípios básicos e em sua esmerada concepção formal, e engendrando previsões concordantes com os dados de observação, medrou como a teoria melhor provida para tratar os fenômenos envolvendo a interação gravitacional em escala macroscópica. Manteve-se, no entanto, circunscrita a essa faixa de abrangência, parecendo mesmo carecer de plausibilidade uma extrapolação ao domínio da física de partículas, em razão, essencialmente, da dificuldade de ajustar os preceitos da teoria de Einstein àqueles que norteiam a física quântica.

Tal constatação sugere a busca de teorias de gravitação alternativas, aplicáveis em nível microscópico.

Dentro desse contexto surgiu a teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble[(8)] (TECSK), a partir da concepção de que massa e spin são noções elementares e irredutíveis associadas à matéria, expressas pelo tensor de momento-energia e tensor de momento angular intrínseco, respectivamente. No limite macroscópico o spin usualmente sofre cancelamento estatístico, deixando a cargo do tensor de momento-energia a caracterização da distribuição de matéria. Microscopicamente, entretanto, justifica-se a especulação de que o spin represente parte da fonte de campo gravitacional. De uma perspectiva empírica pode-se julgar mais conveniente esperar que novos resultados experimentais motivem uma eventual modificação na teoria de Einstein. Não obstante, a dificuldade de unificar a RG com as teorias de interação eletromagnética, forte e fraca, as quais apresentam versão quântica de campos satisfatória, sugere como um caminho válido de investigação novas formulações teóricas da gravitação.

Ainda nesta linha, outra proposta foi aventada por Hayashi e Nakano[1] em 1967. Imaginaram os autores uma teoria capaz de explorar a estrutura de interação gravitacional de partículas, postulando ao mesmo tempo a validade da RG no limite macroscópico clássico, o que implica na assunção da teoria de Einstein como "condição de contorno". Enquanto que a TECSK tem como base geométrica o espaço-tempo quadridimensional de Riemann-Cartan (U_4), com a torção desse espaço relacionada algebricamente ao spin, a teoria de Hayashi-Nakano se assenta em uma sub-variedade de U_4 com teleparalelismo absoluto: o espaço-tempo de Weitzenböck[10] (A_4). Nesta teoria o spin como fonte gravitacional, expresso através da torção, gera deformações na geometria, ou seja, propagação dinâmica fora da matéria.

No Capítulo I do presente trabalho apresentamos a formulação da TGTA, enfatizando seus aspectos geométricos e estabelecendo uma confrontação com a RG.

No contexto da proposta de Hayashi e Nakano delineou-se-nos preeminente uma compreensão mais clara e detalhada da dinâmica do modelo em questão, uma vez que somente a partir de tal entendimento se afigura viável um procedimento de quantização. E, evidentemente, nenhuma teoria com aplicação em escala microscópica pode deixar de relevar uma versão quântica.

Neste sentido, propomo-nos investigar inicialmente a dinâmica hamiltoniana da teoria — que aqui denominamos teoria gravi tacional com teleparalelismo absoluto (TGTA) para acentuar a estrutura geométrica em que se fundamenta.

Analisamos no Capítulo II o problema de Cauchy para as equações da TGTA. São obtidas relações de vínculo e de propagação, fato que se associa à existência do grupo de transformações arbitrárias de coordenadas (TAC) como grupo de invariância da teoria. Este, em decorrência do teorema de Noether, leva a identidades contraídas de Bianchi, que expressam relações de consistência. Em vista da covariância geral da TGTA o problema de Cauchy se resolve aqui de maneira similar ao caso da RG. Os campos básicos da TGTA refletem a covariância e são simultaneamente soluções das equações de campo. Torna-se então imprescindível representar adequadamente os dados de Cauchy com a escolha de superfícies tridimensionais convenientes.

As equações de propagação resultantes provêm de uma parcela das equações de campo "simétricas" (parte simétrica dos campos) e da totalidade das equações "anti-simétricas". Estas últimas incorporam o efeito gravitacional do tensor de spin, que gera deste modo propagação dos dados iniciais, efeito inexistente, na RG. A parte restante das equações de propagação, por outro lado, se assemelha estruturalmente às equações da teoria de Einstein.

No Capítulo III estabelecemos o formalismo hamiltoniano para a TGTA, seguindo os métodos desenvolvidos por Dirac para a RG. Nesta linguagem a teoria exibe, separadamente, as relações envolvendo quantidades não-dinâmicas e aquelas contendo variáveis dinâmicas, cuja propagação se torna assim manifesta. O programa hamiltoniano se cumpre a partir da identificação de variáveis dinâmicas características de superfícies tridimensionais tipo-espaço, e da apresentação da hamiltoniana em função destas quantidades. Assim, o estado físico é definido nas superfícies, e a dinâmica é gerada por transformações canônicas induzidas sobre as variáveis dinâmicas, transportando-as para superfícies vizinhas. Deformações de superfícies desse gênero descrevem, na realidade, a dinâmica de qualquer teoria covariante geral. Portanto, o mesmo procedimento se aplica tanto à RG quanto à TGTA. Esta última, no entanto, apresenta um grupo de invariância adicional, relacionado à invariância da lagrangeana da teoria sob transformações de Lorentz globais (aquelas em que a matriz de Lorentz é independente das coordenadas).

Então, levando em conta a existência do grupo de Lorentz global (GLG) como grupo de invariância da TGTA (e que inexiste no caso da RG), sugerimos a utilização de geradores de transformações no espaço interno com a finalidade de obter uma álgebra de comutação na tradução quântica da teoria. Os campos básicos da teoria revestem-se de caráter híbrido: possuem índices do espaço-tempo e do espaço tangente.

A álgebra clássica dos vínculos secundários da TGTA não parece possuir uma versão quântica que se mostre consistente. Na RG, igualmente, este impasse existe, e se deve à dificuldade de ordenação dos operadores que entram com dependência quadrática na expressão dos vínculos[(17)].

O uso do espaço interno, no entanto, para o caso da TGTA, revela a existência de variáveis às quais se pode associar operadores hermiteanos. Esta é a diferença estrutural marcante entre a TGTA e a RG, e que descortina a possibilidade de usar para a primeira métodos da teoria quântica de campos convencional os quais é difícil (ou impossível) utilizar no segundo caso. Assim, ao procedimento de quantização canônica centrada na obtenção de operadores a partir dos vínculos hamiltonianos, sobrepõe-se, para a TGTA, o método de buscar-se uma realização hermiteana da álgebra dos operadores do espaço interno. Tal programa é levado a efeito no Capítulo IV, complementando o propósito inicial de investigar a dinâmica da TGTA.

CAPÍTULO I

A TEORIA GRAVITACIONAL COM TELEPARALELISMO ABSOLUTO

1.1 - PROPÓSITO E FORMULAÇÃO INICIAL DA TEORIA

A teoria gravitacional com teleparalelismo absoluto, formulada por Hayashi e Nakano[1], e desenvolvida posteriormente por Hayashi[2-6], surgiu como uma tentativa de derivar a existência do campo gravitacional de um princípio de invariância de gauge, na esteira dos trabalhos fundamentais de Utiyama e Kibble[7,8]. Nesse sentido, Hayashi e Nakano propuseram a obtenção do campo gravitacional, dentro do formalismo lagrangeano clássico, a partir do grupo de transformações arbitrárias de coordenadas (TAC), associado, na teoria de gravitação de Einstein, à covariância geral.

Considerando: a densidade lagrangeana $L_0(q^A, \partial_k q^A, x_k)$, com $\partial_k q^A = \frac{\partial q^A}{\partial x^k}$ $(k = 0,\ldots,3)$ para os campos q^A $(A = 1,\ldots,N)$, a invariância da integral de ação $I = \int L_0\, d^4x$ tomada inicialmente para transformações $\delta x^k = \varepsilon^k$, sendo ε^k um parâmetro infinitesimal, resulta a identidade(*):

$$\delta L_0 + L_0 \partial_k(\delta x^k) \equiv 0 \quad . \qquad (1.1.1)$$

(*) Usa-se a convenção de soma para os índices.

Para requerer invariância da ação sob translações estendidas definimos a derivada covariante(*):

$$D_k q^A = (\delta_k{}^\mu + a_k{}^\mu(x))\partial_\mu q^A = b_k{}^\mu(x)\partial_\mu q^A \quad , \quad (\mu = 0,\ldots,3) \ ,$$

de tal modo que

$$\delta D_k q^A = 0 \quad . \qquad (1.1.2)$$

À esta condição se associa a nova lagrangeana $\mathbb{L} = b(x)L_0(q^A, D_k q^A)$, construída a partir da original, e cuja ação deve ser invariante por translações estendidas $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu(x)$ (transformações arbitrárias de coordenadas). Segue-se então que o novo campo b_k^μ deve satisfazer:

$$\delta b_k^\mu = b_k^\nu \, \partial_\nu \, \varepsilon^\mu(x) \quad . \qquad (1.1.3)$$

Tendo em vista uma identidade análoga a (1.1.1) para a densidade lagrangeana $\mathbb{L}$, a função $b(x)$ deve obedecer à transformação:

$$\delta b = -b\partial_\mu \varepsilon^\mu \quad . \qquad (1.1.4)$$

Tais propriedades se verificam(1) se escolhemos $b = \det(b_\mu^k)$, com o campo inverso b_μ^k obtido de:

(*) Por conveniência, os índices gregos são também utilizados.

$$b^k_\mu b^\mu_\ell = \delta^k_\ell$$
$$b^k_\mu b^\nu_k = \delta^\nu_\mu \quad . \qquad (1.1.5)$$

Assim torna-se manifesto que o "campo de gauge" b^μ_k pode ser associado a um quadrupleto de campos vetoriais com certas características, através dos quais se introduz a interação gravitacional. Essa é a idéia básica para a elaboração da teoria, e será detalhada mais adiante.

O fato de se estar lidando, ou não, com uma verdadeira teoria de gauge não será aprofundado aqui. Não se cogita de obter as equações de campo exibindo a chamada simetria dual nos casos sem fonte, para caracterizar equações tipo Yang-Mills.

Propõe-se uma teoria em que a gravitação é introduzida via b^k_μ. Assim, tomando a lagrangeana total na forma:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}' + \mathbb{L}_G \quad , \qquad (1.1.6)$$

com a parte de interação ($\mathbb{L}'$) e a parte gravitacional livre (L_G), importa investigar de que maneira b^k_μ compõe cada uma dessas parcelas.

No que diz respeito ao termo de interação, convém sugerir um exemplo. Imaginando-se o acoplamento de partículas de spin 1/2 com o campo gravitacional, pode-se tomar a lagrangeana de Dirac com a derivada comum substituída pela D_k apresentada em (1.1.2)

$$L_m = \frac{b}{2} \, (\bar{\psi}\gamma^k D_k\psi - D_k\bar{\psi}\gamma^k\psi) + m\bar{\psi}\psi \quad , \qquad (1.1.7)$$

onde: $\{\gamma^k,\gamma^j\} = 2\eta^{jk}$, com $\gamma^\mu = b^\mu_k\gamma^k$.

Além desse acoplamento (mínimo) é possível propor interações não-mínimas a partir dos campos fundamentais b^k_μ. A intensidade do campo de gauge(*) $C_{mk\ell} \equiv 2b^\mu_k b^\nu_\ell b_{n[\mu,\nu]}$, que desempenha aqui papel análogo ao de $F_{k\ell} = A_{\ell,k} - A_{k,\ell}$ no eletromagnetismo, admite a decomposição nas partes irredutíveis (5):

a) o vetor $V_k = C^m{}_{mk} = (bb^\mu_k)_{,\mu}$, (1.1.8)

b) o vetor axial $A_k = \frac{i}{6}\, \varepsilon_{k\ell mn}\, C^{\ell mn}$(**) ; (1.1.9)

c) o tensor de traço nulo ($T_{km}{}^{m} = 0 = T^m{}_{mk}$) :

$$T_{k\ell m} = \frac{1}{2}\,(C_{k\ell m} + C_{\ell km}) + \frac{1}{6}\,(\eta_{mk}V_\ell +$$

$$+ \eta_{m\ell}V_k) - \frac{1}{3}\,\eta_{k\ell}V_m \quad . \qquad (1.1.10)$$

Note-se que $T_{(k\ell)m} = T_{k\ell m}$, $T_{(k\ell m)} = 0$, de modo que $T_{k\ell m}$ tem 16 componentes independentes, que juntamente com as 8 de V_k e A_k formam as 24 componentes independentes de $C_{k\ell m}$.

Estas componentes irredutíveis, acopladas a formas bilineares do tipo $i\bar{\psi}\gamma^k\psi$, $\frac{i}{2}\,(\bar{\psi}D_k\psi - D_k\bar{\psi}.\psi)$, etc., dão origem a lagrangeanas de interação não-mínima, como por exemplo: $\mathbb{L}' \propto ibV_k\bar{\psi}\gamma^k\psi$. (Outras possibilidades são discutidas na ref. (5).)

(*) $b_{m[\mu,\nu]} = \frac{1}{2}\,(b_{m\mu,\nu} - b_{m\nu,\mu})$; e $_{,\mu} \equiv \partial_\mu$; o "tensor de curvatura" $C^\alpha_{\mu\nu}$ é a medida da não-comutatividade da derivação covariante D_k.

(**) $\varepsilon_{k\ell mn}$ é o tensor de Levi-Civita 4-dimensional.

Se definimos o tensor de momento-energia dinâmico por:

$$\mathbb{T}_{k\ell} = -b_{\ell\mu} \frac{\delta \mathbb{L}'}{\delta b^k_\mu} \quad , \qquad (1.1.11)$$

onde $\frac{\delta}{\delta b^k_\mu}$ indica aqui a derivada de Euler, observamos que em geral $\mathbb{T}_{k\ell}$ é assimétrico. Note-se que $\mathbb{T}_{k\ell} = \mathbb{T}_{(k\ell)}$, se a dependência de $\mathbb{L}'$ em b^k_μ é via $g_{\mu\nu} = e^k_\mu e^\ell_\nu \eta_{k\ell}$. Um tal tensor não-simétrico como fonte de gravitação, apresenta uma parte anti-simétrica $\mathbb{T}_{[k\ell]}$ não nula relacionada à divergência do tensor de spin . Ou seja, o spin "curva" o espaço-tempo nessa teoria do mesmo modo que a massa (associada à parte simétrica de $\mathbb{T}_{k\ell}$).

Em escala macroscópica espera-se o cancelemento estatístico do efeito do spin, prevalecendo então apenas o $\mathbb{T}_{(k\ell)}$ (simétrico) como representação fenomenológica da matéria (tensor de "stress" dos corpos macroscópicos). Mas no caso de interações gravitacionais de partículas, não se pode descartar "a priori" o efeito do tensor de spin sobre o continuum do espaço-tempo.

Tais observações indicam eventuais diferenças, ao menos em escala microscópica, entre a RG e modelos de interação gravitacional permitidos no contexto mencionado, e apontam para a formulação completa de uma teoria alternativa da gravitação.

Nas seções seguintes discutiremos o arcabouço geométrico e os critérios para a obtenção da lagrangeana gravitacional livre na TGTA.

Convém assinalar que a análise a ser efetuada nos Capítulos 2 a 4, colimando a clarificação da dinâmica e dos processos de quantização da teoria, refere-se ao campo gravitacional livre.

1.2 - Os Espaços de Weitzenböck e de Riemann

Dada uma variedade 4-dimensional em que se define um tensor métrico $g_{\mu\nu}$, suas propriedades geométricas são estabelecidas a partir de condições impostas sobre $g_{\mu\nu}$, relacionadas à operação de derivação covariante (;). Assim, é possível formular uma classe de teorias baseadas na condição:

$$g_{\mu\nu;\sigma} = g_{\sigma\alpha} K^{\alpha}_{\mu\nu} \quad , \tag{1.2.1}$$

onde $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ está associado à curvatura segmentar, caracterizando a variação de comprimento dos vetores de ponto para ponto na variedade[9]. Um exemplo é a teoria unitária de Weyl.

Outra opção, porém, é impor:

$$g_{\mu\nu;\sigma} = 0 \quad . \tag{1.2.2}$$

É a chamada condição de metricidade, que especifica o espaço-tempo 4-dimensional de Riemann-Cartan (U_4). De (1.2.2) deriva-se como solução a conexão:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + g^{\alpha\beta} \left(g_{\nu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{[\mu\beta]} + g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{[\nu\beta]} + \right.$$

$$\left. + g_{\beta\alpha} \Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} \right) \quad , \tag{1.2.3}$$

representando o 1º termo à direita o símbolo de Christoffel da segunda espécie. $Q^{\alpha}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ é o tensor de torção. Se admitimos

$Q^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ globalmente, obtemos o espaço de Riemann (R_4). Outro subespaço de U_4 é derivado da condição: $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma) = 0$, globalmente. Este é o espaço de Weitzenböck(10) (A_4), em que a conexão assume a forma:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = e^{\alpha}_{k} e^{k}_{\mu,\nu} \quad , \tag{1.2.4}$$

sendo os campos vetoriais e^{μ}_{k} e seus recíprocos e^{k}_{μ} ($k = 0,\ldots,3$; $e^{k}_{\mu} e^{\mu}_{\ell} = \delta^{k}_{\ell}$; $e^{k}_{\mu} e^{\nu}_{k} = \delta^{\nu}_{\mu}$) relacionados à métrica por(*):

$$g_{\mu\nu} = e^{k}_{\mu} e^{\ell}_{\nu} \eta_{k\ell} \quad . \tag{1.2.5}$$

Chega-se também a (1.2.4) assumindo, no espaço original U_4, a condição de paralelismo absoluto, ou seja, a existência de um quadrupleto de vetores linearmente independentes e^{μ}_{k} tais que:

$$e^{\mu}_{k;\nu} = e^{\mu}_{k,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} e^{\alpha}_{k} = 0 \quad . \tag{1.2.6}$$

A expressão do tensor de torção em A_4 é:

$$Q^{\alpha}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} = 2e^{\alpha}_{k} e^{k}_{[\mu,\nu]} \quad . \tag{1.2.7}$$

A variedade 4-dimensional de Weitzenböck foi utilizada por Einstein para fundamentar um de seus ensaios de unificação do eletromagnetismo e da gravitação(11). Ele mostrou ser possível

---

(*) $\eta_{k\ell}$ é a métrica de Minkowski = diag (+,-,-,-).

construir um sistema de equações de campo baseado nas 16 tetradas e^k_μ para incluir as equações de gravitação e de Maxwell, apesar das dificuldades formais e interpretativas presentes em tal teoria unitária. Referindo-se ao artigo de Einstein, Levi-Civita observou ser factível a obtenção de um sistema similar de equações numa variedade riemanniana, a partir dos coeficientes de rotação de Ricci(12).

Em outro contexto, buscando uma fundamentação geométrica para sua teoria gravitacional, Hayashi(6) planejou associar a seus "campos de gauge" b^k_μ, com propriedades definidas por (1.3.5), as "vierbeins" e^k_μ, através das quais se define a métrica (1.2.5). Admitiu também a conexão (1.2.4), com o que a teoria de gauge do grupo de translações estendidas para o campo gravitacional passa a ser interpretada como uma teoria de gravitação no espaço de Weitzenböck.

Pode-se objetar que, se a idéia primordial é a utilização de 16 componentes independentes de campo e^k_μ para englobar efeitos de spin e moldar uma teoria alternativa da gravitação einsteiniana usual, ao menos no domínio da física de partículas, então a escolha da conexão (1.2.4) é arbitrária, uma vez que é admissível eleger, alternativamente, outra forma a partir de (1.2.3), no espaço de Riemann-Cartan.

Ocorre que uma escolha diversa, embora exequível, introduziria "a fortiori" na teoria uma entidade adicional, a curvatura $R^\alpha{}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma)$, enquanto que a adoção do subespaço de Weitzenböck significa a imposição: $R^\alpha{}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma) = 0$. E em qualquer caso o número de "graus de liberdade" disponíveis é o mesmo, dezesseis. Desse modo, e lembrando a máxima de Ockham: "entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem", parece-nos natural e razoável a admis -

são de A_4 como alicerce geométrico da teoria, admissão esta que adotamos neste trabalho.

Sejam, pois, os campos de vetores paralelos $e^k_\mu \equiv b^k_\mu$. Os índices latinos, numerando os vetores, associam-se a um espaço interno tangente, do mesmo modo que na formulação de tetradas da RG(9). Apenas que aqui, ao invés de resultarem 10 componentes independentes em função das transformações de Lorentz locais de tetradas, são mantidas 16 componentes independentes: o grupo de transformações de tetradas consistente com a conexão (1.2.4) é o grupo de Lorentz global (GLG), que não permite a eliminação de 6 dos graus de liberdade, pois as transformações a ele relacionadas são:

$$e'^{\mu}_{k}(x) = \Lambda^j_k e^{\mu}_j(x) \quad , \tag{1.2.8}$$

com Λ^j_k independente das coordenadas.

Às transformações de Lorentz locais no espaço interno relaciona-se a conexão interna $\Omega^k_{\ell\alpha}$ definida através da derivada covariante total(13):

$$e^k_{\mu|\alpha} = e^k_{\mu;\alpha} + \Omega^k_{\ell\alpha} e^\ell_\mu \quad . \tag{1.2.9}$$

Em A_4 a condição $e^k_{\mu|\alpha} = 0$, juntamente com (1.2.6) e a independência linear das "vierbeins", leva a $\Omega^k_{\ell\alpha} = 0$. Então o espaço interno de A_4 é "flat" globalmente, o que está de acordo com (1.2.8).

Introduzindo em A_4 sistemas de referência não-holônomos, i.e., aqueles para os quais vale a condição:

$$e^k_{[\mu,\nu]} \neq 0 \quad , \tag{1.2.10}$$

podemos definir o objeto de não-holonomia através de:

$$\tau^\ell_{jk} = 2e^\nu_j e^\mu_k e^\ell_{[\mu,\nu]} \quad . \tag{1.2.11}$$

Comparando com (1.2.7) notamos que $\tau^\alpha_{\mu\nu} \equiv e^j_\mu e^k_\nu e^\alpha_\ell \tau^\ell_{jk} = Q^\alpha_{\mu\nu}$. Portanto, interpreta-se geometricamente a torção em A_4 como o objeto de não-holonomia nessa variedade. Ainda, a intensidade do campo de gauge $C_{mk\ell}$, referida em 1.1, é o tensor de torção de A_4 no sistema não-holônomo.

A tabela abaixo resume as diferenças entre os espaços de Riemann e de Weitzenböck.

A_4	R_4
invariância da conexão por transformações de Lorentz globais (t.L.g.).	invariância da conexão por transformações de Lorentz locais (t.L.l.).
apresenta torção não nula.	o tensor de torção é nulo.
o tensor de curvatura da conexão Γ é nulo.	apresenta tensor de curvatura não nulo. (Riemann-Christoffel).
as "vierbeins" são vetores globais para t.L.g. e têm 16 componentes independentes.	as "vierbeins" são vetores locais para t.L.l. e têm 10 componentes independentes.

1.3 - A Lagrangeana Gravitacional Livre na TGTA

Uma vez estabelecida a arena geométrica para caracterizar a teoria, é necessário escolher uma lagrangeana gravitacional livre $\mathbb{L}_G$ da qual sejam derivadas as equações de campo. Com esta finalidade, Hayashi aponta como critérios básicos(5):

a) - invariância por transformações arbitrárias de coordenadas;

b) - invariância por transformações de Lorentz globais;

c) - exclusão de derivadas superiores à primeira dos campos fundamentais $e_k^\mu(x)$;

d) - dependência nas formas bilineares $e_{j\mu,\nu}e_{k\alpha,\beta}$, em primeira ordem.

A forma mais geral daí decorrente é:

$$\mathbb{L}_G = e(\alpha T_{k\ell m}T^{k\ell m} + \beta V_k V^k + \gamma A_k A^k +$$

$$+ \delta + \eta V_k A^k) \quad ,^{(*)} \qquad (1.3.1)$$

com os parâmetros livres α, β, γ, δ, η, e com A_k, V_k e $T_{k\ell m}$ definidos por (1.1.8 - 10). Substituindo-se em (1.3.1) A_k, V_k e $T_{k\ell m}$ por suas expressões em termos das "vierbeins" ((1.1.8-10)) e reagrupando-se os termos de $\mathbb{L}_G$, chega-se à forma(5):

$$\mathbb{L}_G = \mathbb{L}_E + e\{(\alpha+\beta)V_k V^k - \frac{9}{4\lambda} A_k A^k + \eta V_k A^k\} - \frac{1}{K}(e\, e_m^\mu V^m)_{,\mu} \quad , \qquad (1.3.1')$$

sendo:

$$\mathbb{L}_E = e\left(R(\{\ \}) + \frac{2\delta}{3\alpha}\right) \quad ,^{(**)} \qquad (1.3.2)$$

(*) $e = \det(e_\mu^j) = \sqrt{-g}$, para $g^{\mu\nu} = e_k^\mu e^{k\nu}$.

(**) $R(\{\ \})$ é definido formalmente e não se associa à curvatura em A_4.

e $\{\ \}$ o símbolo de Christoffel da métrica de A_4.

O novo parâmetro λ e a constante gravitacional de Einstein K relacionam-se aos outros parâmetros através de:

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha - \frac{4}{9}\gamma \quad , \tag{1.3.3}$$

$$\frac{1}{K} = 3\alpha \quad . \tag{1.3.4}$$

Hayashi mostrou[5] que para obter soluções coerentes na aproximação linear e para evitar a violação do princípio de Huygens (soluções se propagando dentro do cone de luz), é preciso fazer as escolhas $\eta = 0$ e $\alpha+\beta = 0$. Com isto $\mathbb{L}_G$ se reduz a:

$$\mathbb{L}_G = \mathbb{L}_E - \frac{9e}{4\lambda} A_k A^k \quad . \qquad (1.3.1")$$

O termo de divergência em (1.3.1') foi suprimido em razão de não afetar as equações de campo.

Representando $\mathbb{L}_E$ a lagrangeana de Einstein expressa em A_4 (com um termo cosmológico), observamos que é basicamente o vetor axial A_k que diferencia a parte gravitacional livre na RG e na TGTA. Tal desvio torna-se mais evidente na expressão das equações de campo derivadas de (1.3.1"), que são (incluindo à direita os termos de fonte):

$$\mathbb{G}_{k\ell}(\{\ \}) - K\,\mathbb{B}_{(k\ell)} = -K\,\mathbb{T}_{(k\ell)} \quad , \tag{1.3.5}$$

$$\mathbb{B}_{[k\ell]} = \mathbb{T}_{[k\ell]} \quad , \tag{1.3.6}$$

onde:

$$\mathbb{G}_{k\ell}(\{\ \}) = e(R_{k\ell}(\{\ \}) - \frac{1}{2}\eta_{k\ell} R(\{\ \}) - \frac{\delta}{3\alpha}\eta_{k\ell}) \quad , \qquad (1.3.7)$$

$$\mathbb{B}_{k\ell} = -(e^{m\mu}\mathbb{F}_{k\ell m})_{,\mu} + \{\frac{1}{2} Q_{\ell}{}^{mn}_{\cdot\cdot}\mathbb{F}_{kmn} - Q^{mn}_{\cdot\cdot k}\mathbb{F}_{mn\ell}\} -$$

$$- \frac{9e}{4\lambda} A_j A^j \eta_{k\ell} \quad , \qquad (1.3.8)$$

$$\mathbb{F}_{k\ell m} = \frac{3i}{2}\frac{e}{\lambda}\varepsilon_{k\ell mn} A^n \quad , \qquad (1.3.9)$$

$$Q_{mk\ell} = 2e^{\mu}_{k} e^{\nu}_{\ell} e_{m[\mu,\nu]} \quad . \qquad (1.3.10)$$

Observemos que $\mathbb{G}_{k\ell}$, $\mathbb{B}_{k\ell}$ e $\mathbb{T}_{k\ell}$ representam densidades tensoriais de peso +1.

1.4 - COMENTÁRIOS

Na aproximação linear ($e^{\mu}_{k} = \delta^{\mu}_{k} + a^{\mu}_{k}$), as equações da parte simétrica (1.3.5) e da parte anti-simétrica (1.3.6) transformam-se respectivamente em:

$$\Box\, S_{ij} = -\sqrt{K}\, T_{(ij)} \quad , \qquad (1.4.1)$$

$$\Box\, A_{ij} = -\sqrt{\lambda}\, T_{[ij]} \quad . \qquad (1.4.2)$$

com $\Box \equiv \partial^m\partial_m$. S_{ij} e A_{ij} estão relacionadas a a^{μ}_{k}.

Classicamente o campo anti-simétrico A_{ij} é desconheci -

do, uma vez que estaria associado a uma fonte de tensor de momento-energia anti-simétrico, em escala macroscópica que implicaria na não conservação do momento angular local. Não há impecilho,contudo, ao fato de se cogitar um efeito significativo de A_{ij} em processos elementares. A constante de acoplamento $\underline{K}$ do campo simétrico $S_{k\ell}$ é irrelevante microscopicamente. Todavia, não há justificativa para se adiantar o mesmo a respeito de $\underline{\lambda}$, referente a A_{ij}.

Eventuais observações do efeito de A_{ij}, nesta escala,foram sugeridas por Miyamoto e Nakano[(14)]:

a) o campo A_{ij} gera uma correção nos níveis de energia da estrutura hiperfina do átomo de hidrogênio, que poderia, em princípio, ser detectada. Miyamoto e Nakano obtiveram o potencial de espalhamento elástico entre o próton e o elétron, gerado pelo campo A_{ij}. Em seguida verificaram que A_{ij} acarreta uma correção nos níveis de energia do átomo de hidrogênio para a estrutura hiperfina, de tal modo que dentro da precisão experimental conhecida, pode-se avaliar a magnitude de λ: $\lambda_{máx} = 6{,}3 \times 10^{-3}\ \hbar c/(\mathrm{GeV})^2$. Julga-se difícil, no entanto, detectar o efeito de A_{ij} através de experiências envolvendo o átomo de hidrogênio;

b) através do espalhamento elástico do neutrino por elétron (ou próton), prevê-se também um limite superior para a constante de acoplamento $\underline{\lambda}$: $\lambda < 10^{-4} \dfrac{\hbar c}{(\mathrm{GeV})^2}$ (*); assim, experimentos desse gênero com precisão suficiente poderiam revelar algo sobre o campo anti-simétrico.

(*) a constante $\underline{K}$ tem magnitude $\sim 10^{-38} \dfrac{\hbar c}{(\mathrm{GeV})^2}$.

Convém mencionar ainda que as equações (1.3.5) têm solução de Schwarzschild[1] (negligencia-se o efeito macroscópico de (1.3.6); então a teoria de A_4 passa pelos testes clássicos da RG e se cumpre, aparentemente, o objetivo de apresentar a teoria de Einstein como "condição de contorno" para a TGTA. Observemos, ademais, que para métricas diagonais tipo Dingle[15] as componentes de $\mathbb{B}_{k\ell}$ se anulam, reduzindo então as equações de campo da TGTA, formalmente, a equações tipo Einstein. Já para a métrica de Gödel[16], por exemplo, são diferentes de zero as componentes $\mathbb{B}_{kk}$, $(k = 0,\ldots,3)$, e $\mathbb{B}_{02}$, anulando-se as demais.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE CONDIÇÕES INICIAIS PARA A TGTA

No que respeita ao continuum do espaço-tempo, a simetria fundamental da teoria de Hayashi e Nakano, assim como a da RG, é a covariância geral. Em vista disso não podemos obter, dado um hiperplano de simultaneidade tipo espaço, uma congruência de planos paralelos sem impor condições envolvendo a métrica, sendo esta relacionada à dinâmica. Na física newtoniana e na relatividade especial tal construção nos é assegurada pelas invariâncias de Galileu e de Poincaré, respectivamente, que envolvem grupos de dimensão finita. A covariância geral é expressa pelo grupo de transformações arbitrárias de coordenadas (TAC), de dimensão infinita, constituindo um tipo de simetria similar neste aspecto ao das simetrias de gauge[17]. Como os campos fundamentais da TGTA devem refletir esta invariância e ao mesmo tempo representar soluções das equações de campo, é preciso especificar apropriadamente os dados de Cauchy na TGTA. A obtenção da representação de Cauchy adequada se traduz pela escolha de uma superfície com uma coordenatização tridimensional. Estudaremos este problema em seguida, restringindo-nos ao caso exterior (equações sem segundo membro).

2.1 - DADOS DE CAUCHY

Os campos básicos e^j_μ definem uma métrica $g_{\mu\nu}$ e, consequentemente, determinam o comprimento de arco das curvas dentro ou fora da superfície de Cauchy. Consideremos então superfícies tipo-espaço x^0 = const., cuja coordenatização não se altera sob transformações quadri-dimensionais. Nesse caso também permanece inalterada a expressão do comprimento de arco de uma curva contida na hipersuperfície, que envolve apenas as componentes espaciais e^j_A $(A = 1,2,3)$. Ainda, as derivadas na direção x^0 deixam de depender da 3-coordenatização.

Assim, a escolha apropriada dos dados iniciais é feita através de $\dot{e}^j_A\ (x^B, x^0)$ e de suas derivadas na direção x^0, $e^j_A(x^B, x^0)$, sobre a hipersuperfície. Tais variáveis estão ainda sujeitas a restrições (equações que estabelecem relações entre as mesmas). Estas representam condições de consistência e são parte das equações de campo, como veremos posteriormente. O que ocorre, na verdade, é que nem todas as equações de campo propagam os dados iniciais, fato que está ligado à covariância geral(*) da teoria em questão. Na linguagem do formalismo hamiltoniano, que será abordado mais adiante, temos um sistema com vínculos.

Em vista do que foi comentado, não se espera obter a propagação de todas as componentes dos campos básicos, ou seja, todas as e^j_μ num instante $\bar{x}^0 > x^0$ a partir dos dados iniciais (sobre a superfície x^0 = const.). Veremos como se obtém as quantidades que se propagam de fato, e qual a forma das relações de consistência.

(*)Esta gera identidades de Bianchi na teoria; o mesmo acontece para a RG. Ver refs. (18), (20).

2.2 - EQUAÇÕES DE VÍNCULO

No que tange ao problema de Cauchy para as equações de RG, um método particularmente interessante foi desenvolvido por Lichnerowicz(18). Através dele se alcança uma expressão clara para as relações de vínculo. É possível utilizar um procedimento análogo para a TGTA. Tomamos inicialmente a parte simétrica das equações de campo, i.e., a expressão (1.3.5), que no caso vazio fica:

$$\mathbb{G}_{k\ell}(\{\ \}) - K\,\mathbb{B}_{(k\ell)} = 0 \quad . \tag{2.2.1}$$

Observemos que (2.2.1) corresponde a equações de Einstein com uma "fonte" $\mathbb{B}_{(k\ell)}$. De (1.1.9) e (1.3.8-10) verificamos que $\mathbb{B}_{(k\ell)}$ não contém $\ddot{e}^{j}_{\mu}$. Podemos então desmembrar (2.2.1) em:

$$\mathbb{R}_{AB}(\{\ \}) = K\,\mathbb{B}_{(AB)} - \frac{K}{2}\, g_{AB}\, \mathbb{B} \ , \tag{2.2.2}$$

$$\mathbb{G}_{0\rho} = K\,\mathbb{B}_{(0\rho)} \qquad , \tag{2.2.3}$$

onde:

$$\mathbb{B} = g^{\mu\nu}\, e^{k}_{\mu} e^{\ell}_{\nu} \mathbb{B}_{(k\ell)} = g^{\mu\nu}\, \mathbb{B}_{(\mu\nu)} \qquad , \tag{2.2.4}$$

$$(A,B = 1,2,3 \ ; \ \rho = 0,\ldots,3) \qquad .$$

Colocamos então (2.2.3) na forma (cf. Apêndice A e ref. (19)):

$$g^{0B}\, \mathbb{M}_{AB} + g^{00}\, \mathbb{M}_{0A} - K\,\mathbb{B}_{(\lambda A)} g^{0\lambda} = 0 \quad , \tag{2.2.5}$$

$$\frac{1}{2}\,(g^{00}\,\mathbb{M}_{00} - g^{AB}\,\mathbb{M}_{AB}) - K\,\mathbb{B}_{(0\lambda)}g^{0\lambda} = 0 \quad , \qquad (2.2.6)$$

sendo $\mathbb{M}_{\alpha\beta} = \mathbb{M}_{\alpha\beta}\,(e_{j\mu},\ e_{j\mu,\nu},\ e_{j\mu,A\nu})$.

Nas equações acima não aparecem portanto as componentes $\ddot{e}_{j\mu}$. São relações de vínculo, cuja forma explícita pode ser obtida diretamente. Correspondem aos vínculos secundários na formulação hamiltoniana da teoria, que será apresentada no próximo capítulo.

2.3 - Equações de Propagação

A forma normal de (2.2.2) é:

$$\mathbb{R}_{AB}(\{\ \}) = -\frac{e}{2}\,g^{00}\ddot{g}_{AB} + \mathbb{N}_{AB} \quad , \qquad (2.3.1)$$

onde

$$\mathbb{N}_{AB} = \mathbb{N}_{AB}(e_{j\mu},e_{j\mu,\nu},\ e_{j\mu,A\nu});\ \ddot{g}_{AB} = \eta_{jk}\partial_0\partial_0(e^j_A e^k_B). \qquad (2.3.2)$$

Combinando (2.3.1) e (2.3.2) obtemos:

$$-\frac{e}{g^{00}}\,(K\,\mathbb{B}_{(AB)} - \frac{1}{2}\,K\,g_{AB}\,\mathbb{B} - \mathbb{N}_{AB}) = \eta_{jk}\left\{\ddot{e}^{(j}_{A}\,e^{k)}_{B} + \dot{e}^j_A\dot{e}^k_B\right\} \quad . \, (2.3.3)$$

Tomemos, por outro lado, a parte anti-simétrica das equações de campo no vazio:

$$\mathbb{B}_{[k\ell]} = 0 \quad . \qquad (2.3.4)$$

Separando as derivadas temporais das "vierbeins" em

(2.3.4), onde $\mathbb{B}_{[k\ell]}$ é obtido de (1.3.8-10), chegamos através de cálculo direto à forma:

$$\ddot{e}^j_A \, \mathbb{N}^A_{k\ell j} + \mathbb{Q}_{k\ell} = 0 \quad , \tag{2.3.5}$$

$$(A = 1,2,3; \; k,\ell,j = 0,\ldots,3)$$

em que:

$$\mathbb{Q}_{k\ell} = \$_{k\ell} + e\eta^{nm}\eta_{js} \, \delta^{jpq}_{k\ell m}(e^\alpha_n e^\mu_{[p} \, e^A_{q]} \, e_{\mu,\alpha A} + $$

$$+ e^A_n e^\mu_{[p} \, e^\nu_{q]} \, e^s_{\mu,\nu A}) \quad , \tag{2.3.6}$$

$$\$_{k\ell} = \eta^{nm}\eta_{js}\delta^{jpq}_{k\ell m} \, (ee^\alpha_n e^\mu_p e^\nu_q)_{,\alpha} \, e^s_{[\mu,\nu]} \quad , \tag{2.3.7}$$

$$\mathbb{N}^A_{k\ell j} = 2e(\eta_{kj}e^0_s e^{[A}_\ell e^{0]s} + e^0_j e^{[A}_k \, e^{0]}_\ell + $$

$$+ \eta_{\ell j}e^0_s \, e^{[0}_k \, e^{A]s} \,) \quad , \tag{2.3.8}$$

com:

$$\delta^{jpq}_{k\ell m} = \begin{vmatrix} \delta^j_k & \delta^p_k & \delta^q_k \\ \delta^j_\ell & \delta^p_\ell & \delta^q_\ell \\ \delta^j_m & \delta^p_m & \delta^q_m \end{vmatrix} \tag{2.3.9}$$

Em (2.3.5) podemos reparar que tanto $\mathbb{N}^A_{k\ell j}$ como $\mathbb{Q}_{k\ell}$ não contêm $\ddot{e}^\mu_j$, e que $\mathbb{N}^A_{k\ell j}$ aparece como coeficiente de $\ddot{e}^j_A$. Assim, (2.3.5) corresponde a 6 equações para as 12 variáveis propagadas e^j_A .

Em (2.3.3) observamos que as variáveis propagadas também podem ser isoladas, gerando outro conjunto de 6 equações de propagação. Os dois grupos de 6 equações cada, oriundos respectivamente das equações de campo simétricas e anti-simétricas, formam então um sistema de 12 equações não-redundantes que possibilita expressar as derivadas temporais segundas das "vierbeins" (excluindo as e^j_0) em termos dos valores iniciais e de suas derivadas espaciais. As 12 variáveis de propagação, como se verifica de (2.3.3) e (2.3.5), são as e^j_A. As demais (e^j_0) permanecem indeterminadas e, por conseguinte, $e^j_0(x^A,\bar{x}^0)$ não pode ser obtida dos dados iniciais. Voltaremos a esse ponto após a discussão do formalismo hamiltoniano para a TGTA.

2.4 - Comentários

a) Dada uma superfície de Cauchy e uma hipersuperfície vizinha, podemos conceber o mapeamento ponto-a-ponto da superfície original sobre a outra através de dois estágios: considera-se primeiro o deslocamento de cada ponto ao longo da geodésica tipo-tempo perpendicular à superfície de Cauchy até a segunda superfície; depois se mapeia a segunda superfície de Cauchy sobre si própria, transformando os dados originais em novos dados de Cauchy.

b) A TGTA, assim como a RG, pode ser vista como uma teoria substantivamente causal[(17)], isto é, uma teoria que pressupõe a propagação das soluções de maneira única em substância, embora não em forma. Isto ocorre porque a existência de TAC (covarian cia geral) faz com que a forma das soluções possa ser alterada por um mapeamento em qualquer região do continuum quadridimensional. Todavia, se considerarmos um mapeamento que transforme umas nas outras as soluções compatíveis com um determinado conjunto de dados de Cauchy, temos então uma propagação substantivamente única. Tal fato fica melhor elucidado através da versão hamiltoniana da teoria.

c) Os aspectos comuns do problema de condições iniciais na teoria de Einstein e na TGTA podem ser aclarados através do seguinte: a parte simétrica das equações de campo da TGTA corresponde a equações de Einstein com um termo de "fonte". Embora geométrica ao invés de fenomenológica, esta "fonte" não contém variáveis de propagação, o que torna a estrutura dinâmica das equações "simétricas" similar à das equações de RG. As equações "anti-simétricas", por outro lado, representam a parcela geométrica da teoria que incorpora o efeito de fontes gravitacionais de spin. Estas, conforme foi visto, são equações que propagam dados iniciais. As relações de vínculo são então quatro, parte das equações simétricas. Neste sentido a teoria de Hayashi e Nakano manifesta uma semelhança estrutural com a teoria de Einstein da gravitação.

Notemos que a TGTA difere da teoria de Einstein - Cartan quanto ao papel desempenhado pela torção. De fato, nesta última uma parte das equações corresponde a relações algébricas para o tensor de torção, ao passo que na TGTA a torção se propaga, como se vê através das equações de campo.

CAPÍTULO III

A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA TGTA

O formalismo hamiltoniano se situa como um primeiro estágio objetivando a quantização canônica de uma teoria. No tocante à RG, tentativas de obtenção de uma forma hamiltoniana remotam a 1930[(21)], não obstante a forma completa só tenha sido obtida no final da década de 50 por Dirac[(22-24)].

Seguiremos esssencialmente os métodos de Dirac para alcançar a representação hamiltoniana da TGTA. Cumpre inicialmente estabelecer superfícies tipo-espaço e separar as componentes dinâmicas, de modo a apresentar a hamiltoniana em função destas quantidades e chegar às equações de campo na forma hamiltoniana.

3.1 - ESPECIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO

Assim como ocorre na RG, o estado físico num determinado instante na TGTA é interpretado como o estado em uma hiper-superfície tridimensional tipo-espaço no espaço-tempo. Tal especificação afigura-se-nos à primeira vista problemática, uma vez que requereria a determinação da geometria, e portanto da dinâmica , associada às soluções das equações de campo. Evidentemente não conhecemos de antemão as soluções, o que pareceria acarretar a im -

possibilidade de obter as superfícies almejadas. Há porém uma saída, que consiste em realizar a escolha com o auxílio dos objetos não dinâmicos e_0^j, aos quais se relacionam as componentes $g_{0\mu}$ do tensor métrico:

$$g_{0\mu} = e_0^j e_\mu^k \eta_{jk} \quad . \tag{3.1.1}$$

Estas fixam o sistema de coordenadas.

Consideremos então um campo de vetores tipo tempo $\tau^\mu(x)$, $\tau^\mu\tau_\mu > 0$ sobre a variedade A_4. Tomemos em A_4 a decomposição do deslocamento:

$$dx^\mu = \tau^\mu \, d\alpha + d\beta^\mu \quad , \tag{3.1.2}$$

com os termos à direita representando, respectivamente, os deslocamentos paralelo e perpendicular a τ_μ. Deste modo:

$$d\alpha = \frac{\tau_\mu dx^\mu}{\tau^2} \quad , \tag{3.1.3}$$

$$d\beta^\mu = P^\mu_\nu dx^\nu \quad , \tag{3.1.4}$$

com o operador de projeção P^μ_ν dado por:

$$P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{\tau^\mu\tau_\nu}{\tau^2} \quad . \tag{3.1.5}$$

Sobre a hipersuperfície o comprimento é:

$$d\ell^2 = d\beta_\mu d\beta^\mu = \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad , \tag{3.1.6}$$

sendo

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\tau_\alpha \tau_\beta}{\tau^2} \quad . \qquad (3.1.7)$$

A escolha $\tau^\mu = g^{0\mu} = e^0_j e^\mu_k \eta^{jk}$ nos leva a:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\delta^0_\alpha \delta^0_\beta}{g^{00}} \quad ; \quad \tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{g^{0\alpha} g^{0\beta}}{g^{00}} \quad . \qquad (3.1.8)$$

De (3.1.8) notamos que a métrica projetada na hipersu - perfície tem componentes:

$$\tilde{g}_{AB} = g_{AB} \quad ; \quad \tilde{g}^{AB} = g^{AB} - \frac{g^{0A} g^{0B}}{g^{00}} \quad , \qquad (3.1.8')$$

com

$$\tilde{g}^{AB} g_{Ac} = \delta^B_c \quad . \qquad (3.1.9)$$

Portanto, através de $g_{0\mu}$ fixamos as coordenadas e definimos a métrica projetada descrita por g_{AB} e $\tilde{g}^{AB}$.

3.2 - SEPARAÇÃO DAS COMPONENTES DINÂMICAS

Dado o estado inicial, a dinâmica do sistema deve ser descrita por quantidades associadas à hipersuperfície, as quais permitem a correspondência entre diferentes 3-geometrias em hiperplanos diferentes, na direção crescente do eixo temporal. Como os movimentos são gerados pela hamiltoniana, a separação das compo - nentes dinâmicas deve ser feita neste nível. Escrevemos então,pri meiramente, a lagrangeana gravitacional livre $\mathbb{L}_G$ da TGTA como função das variáveis canônicas e suas derivadas.

As variáveis canônicas conjugadas a $e_{k\alpha}$ são definidas por:

$$\mathbb{P}^{k\alpha} = \frac{\partial \mathbb{L}_G}{\partial \dot{e}_{k\alpha}} \quad , \qquad (3.2.1)$$

onde $\mathbb{L}_G$ é a densidade lagrangeana introduzida em 1.3, e portanto $\mathbb{P}^{k\alpha}$ é também uma densidade.

Seguindo o procedimento de Dirac, colocamos $\mathbb{L}_G$ na forma:

$$\mathbb{L}_G = \mathbb{L}(0) + \mathbb{L}(1) + \mathbb{L}(2) \quad , \qquad (3.2.2)$$

denotando $\mathbb{L}(0)$ a parte que não contém derivadas temporais de e_k , $\mathbb{L}(1)$ a parte linear nessas derivadas, e $\mathbb{L}(2)$ a parte quadrática, a saber:

$$\mathbb{L}(0) = \frac{e}{2K} \{ e^{[\mu}_{\ell}\, e^{A]}_{m}\; e^{\ell[\alpha} e^{\beta]m}\; e_{k\mu,A} e^{k}_{\alpha,\beta} -$$

$$- 2\, e^{[\mu}_{\ell} e^{A]}_{m}\; e^{k[\alpha} e^{\beta]\ell}\; e_{k\mu,A} e^{m}_{\alpha,\beta} - 4 e^{[\mu}_{m} e^{A]}_{\ell}\; e^{n[\alpha} e^{B]\ell} e^{m}_{\mu,A} e_{m\alpha,\beta} \} +$$

$$+ \frac{e}{2\lambda}\, e^{m[\mu} e^{A]n}\; e^{\ell}_{\mu,A} (e^{[\alpha}_{m} e^{B]}_{n}\; e_{\ell\alpha,\beta} + e^{[\alpha}_{n} e^{B]}_{\ell}\; e_{m\alpha,B} + e^{[\alpha}_{\ell} e^{B]}_{m}\; e_{n\alpha,B})$$

$$+ e\delta \quad , \qquad (3.2.3)$$

$$\mathbb{L}(1) = \frac{e}{2K} \{ e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m}\; e^{\ell[\alpha} e^{A]m}\; \dot{e}_{k\mu} e^{k}_{\alpha,A} + e^{[\mu}_{\ell} e^{A]}_{m}\; e^{\ell[\alpha} e^{0]m}\; e_{k\mu,A}\; \dot{e}^{k}_{\alpha} -$$

$$- 2\, e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m}\, e^{k[\alpha} e^{A]\ell} \dot{e}_{k\mu} e^{m}_{\alpha,A} - 2e^{[\mu}_{\ell} e^{A]}_{m}\, e^{k[\alpha} e^{0]\ell} e_{k\mu,A} \dot{e}^{m}_{\alpha} -$$

$$- 4\, e^{[\mu}_{m} e^{0]}_{\ell}\, e^{n[\alpha} e^{A]\ell}\, \dot{e}^{m}_{\mu} e_{\mu\alpha,A} - 4e^{[\mu}_{m} e^{A]}_{\ell}\, e^{n[\alpha} e^{0]\ell} e^{m}_{\mu,A} \dot{e}_{n} \} +$$

$$+ \frac{e}{2\lambda}\, e^{m[\mu} e^{0]n}\, \dot{e}^{\ell}_{\mu} (e^{[\alpha}_{m} e^{A]}_{n}\, e_{\ell\alpha,A} + e^{[\alpha}_{n} e^{A]}_{\ell}\, e_{m\alpha,A} +$$

$$+ e^{[\alpha}_{\ell} e^{A]}_{m}\, e_{n\alpha,A}) + \frac{e}{2\lambda}\, e^{m[\mu} e^{A]n}\, e^{\ell}_{\mu,A}\, (e^{[\alpha}_{m} e^{0]}_{n}\, \dot{e}_{\ell\alpha} +$$

$$+ e^{[\alpha}_{n} e^{0]}_{\ell}\, \dot{e}_{m\alpha} + e^{[\alpha}_{\ell} e^{0]}_{m}\, \dot{e}_{n\alpha}) \quad , \qquad (3.2.4)$$

$$\mathbb{L}(2) = \frac{e}{2K} \{ e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m}\, e^{\ell[\alpha} e^{0]m}\, \dot{e}_{k\mu} \dot{e}^{k}_{\alpha} - 2e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m}\, e^{k[\alpha} e^{0]\ell}\, \dot{e}_{k\mu} \dot{e}^{m}_{\alpha} -$$

$$- 4e^{[\mu}_{m} e^{0]}_{\ell}\, e^{n[\alpha} e^{0]\ell}\, \dot{e}^{m}_{\mu} \dot{e}_{n\alpha} \} +$$

$$+ \frac{e}{2\lambda}\, e^{m[\mu} e^{0]}\, \dot{e}^{\ell}_{\mu} (e^{[\alpha}_{m} e^{0]}_{n}\, \dot{e}_{\ell\alpha} + e^{[\alpha}_{n} e^{0]}_{\ell}\, \dot{e}_{m} + e^{[\alpha}_{\ell} e^{0]}_{m}\, \dot{e}_{n\alpha}) \quad . \qquad (3.2.5)$$

De (3.2.1-5) obtemos:

$$\mathbb{P}^{k0} = \frac{\partial \mathbb{L}_G}{\partial \dot{e}_{k0}} = 0 \quad , \qquad (3.2.6)$$

$$\mathbb{P}^{kA} = e(\frac{1}{K} + \frac{1}{\lambda})\, e^{[A}_{\ell} e^{0]}_{m}\, e^{\ell[\alpha} e^{\beta]m}\, e^{k}_{\alpha,\beta} - 2e(\frac{1}{K} - \frac{1}{\lambda})\, e^{[A}_{\ell} e^{0]}_{m} e^{k[\alpha} e^{\beta]\ell} e^{m}_{\alpha,\beta} -$$

$$- \frac{4e}{K}\, e^{k[A} e^{0]\ell}\, e^{[\alpha}_{m} e^{\beta]}_{\ell}\, e^{m}_{\alpha,\beta} \quad . \qquad (3.2.7)$$

As relações (3.2.6) correspondem aos chamados vínculos primários, pois as equações de movimento não são usadas para determiná-los. Indicam também que nem todas as "velocidades" $\dot{e}_k$ podem ser apresentadas como funções das variáveis canônicas. Isso está ligado à não-maximalidade do posto da hessiana de $\mathbb{L}_G = \left(\frac{\partial^2 \mathbb{L}_G}{\partial \dot{e}_{k\alpha} \partial \dot{e}_{\ell\beta}}\right)$. Em tal caso a lagrangeana é dita singular(25).

Na linguagem da geometria simplética os vínculos primários são aqueles que definem a subvariedade em que a forma simplética definida sobre o espaço de fase (fibrado cotangente) se degenera, caracterizando o caso denominado pré-simplético(26-27).

Observemos que através de (3.2.2-5) e de:

$$\mathbb{H} = \mathbb{p}^{kA} \dot{e}_{kA} - \mathbb{L}_G \quad , \tag{3.2.8}$$

que é a expressão da hamiltoniana ($\mathbb{p}^{k0} = 0$), chegamos a (cf.Apêndice B e ref. (19)):

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} = & -e\delta + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda}\right) e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m} \; e^{\ell[\alpha} e^{\beta]m} \; e^{k}_{\alpha,\beta} \dot{e}_{k\mu} - \\
& - e\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\lambda}\right) e^{[\mu}_{\ell} e^{0]}_{m} \; e^{k[\alpha} e^{\beta]\ell} \; e^{m}_{\alpha,\beta} \dot{e}_{k\mu} - \frac{2e}{K} e^{k[\mu} e^{0]\ell} e^{[\alpha}_{m} e^{\beta]}_{\ell} e^{m}_{\alpha,\beta} \dot{e}_{k\mu} - \\
& - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\lambda}\right) e^{[\mu}_{\ell} e^{k]}_{m} \; e^{\ell[\alpha} e^{\beta]m} \; e^{k}_{\alpha,\beta} e_{k\mu,A} + \\
& + e\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\lambda}\right) e^{[\mu}_{\ell} e^{A]}_{m} \; e^{k[\alpha} e^{\beta]\ell} \; e^{m}_{\alpha,\beta} e_{k\mu,A} + \\
& + \frac{2e}{K} e^{k[\mu} e^{A]\ell} \; e^{[\alpha}_{m} e^{\beta]}_{\ell} \; e^{m}_{\alpha,\beta} e_{k\mu,A} \quad .
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Aparecem em (3.2.9) as variáveis dinâmicas e^{j}_{A}, mas também quantidades não-dinâmicas, indeterminadas, revelando que permanece certa arbitrariedade na propagação da geometria dos hiperplanos.

A próxima tarefa consiste em identificar quantidades inteiramente associadas às hipersuperfícies. Estas são as D-invariantes, ou invariantes segundo Dirac.

3.3 - QUANTIDADES D-INVARIANTES

Matematicamente, são grandezas cuja variação sob transformações de coordenadas não contêm o gradiente do descritor ao longo da normal, isto é, para: $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, as D-invariantes não contêm $\dot{\xi}^\mu$.

Assim, por exemplo, para as componentes $g_{\mu\nu}(x)$ do tensor métrico temos:

$$\bar{\delta} g_{\mu\nu} = - \xi^\rho_{,\nu} g_{\mu\rho} - \xi^\rho_{,\mu} g_{\rho\nu} - \xi^\rho g_{\mu\nu,\rho} \quad , \qquad (3.3.1)$$

e portanto g_{MN} $(M,N = 1,2,3)$ são D-invariantes, ao passo que $g_{0\mu}$ são D-variantes. Aliás, as componentes espaciais de qualquer tensor covariante formam um D-invariante[(28)], o mesmo não ocorrendo para as componentes de um tensor contravariante.

As componentes da métrica g_{MN} e $\tilde{g}^{MN}$ na 3-geometria são D-invariantes. E, também por verificação direta, concluímos que as e^j_A são D-invariantes, enquanto que as e^j_0 não são, pois:

$$\bar{\delta} e^j_\alpha = - \xi^\sigma_{,\alpha} e^j_\sigma - \xi^\sigma e^j_{\alpha,\sigma} \quad . \qquad (3.3.2)$$

As e^{α}_{j} são D-variantes, mas se definimos:

$$\tilde{e}^{\alpha}_{.j} = P^{\alpha}_{\lambda} e^{\lambda}_{j} \quad , \tag{3.3.3}$$

onde P^{α}_{λ} é dado por (3.1.5), com $\tau^{\mu} = g^{0\mu}$, obtemos então:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\tilde{e}^{A}_{.j} = & - \xi^{\rho}\tilde{e}^{A}_{.j,\rho} + \xi^{A}_{\ ,B}e^{B}_{j} - \frac{g^{0A}}{g^{00}}\xi^{0}_{\ ,B}e^{B}_{j} + \\ & + 2\frac{g^{0A}g^{0B}}{(g^{00})^{2}}e^{0}_{j}\xi^{0}_{\ ,B} - \frac{g^{0B}}{g^{00}}\xi^{A}_{\ ,B}e^{0}_{j} + \\ & - \frac{g^{AB}}{g^{00}}\xi^{0}_{\ ,B}e^{0}_{j} \quad , \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

o que implica que as novas quantidades $\tilde{e}^{A}_{.j}$ são D-invariantes; $\tilde{e}^{0}_{.j} = 0$.

Notemos que:

$$\tilde{\tilde{g}}^{\alpha\beta} \equiv \tilde{e}^{\alpha}_{.j}e^{\beta}_{k}\eta^{jk} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \quad . \tag{3.3.5}$$

As componentes de "vierbeins" D-invariantes são, em resumo: e^{j}_{A}, relacionadas à métrica $g_{AB} = e^{j}_{A}e^{k}_{B}\eta_{jk}$, e $\tilde{e}^{A}_{.j}$, associadas a $\tilde{g}^{AB} = \tilde{\tilde{g}}^{AB} = \tilde{e}^{A}_{.j}\tilde{e}^{B}_{.k}\eta^{jk}$, na tri-geometria.

Na fórmula (3.2.7) de $\mathbb{p}^{kA}$, observamos que $e = \sqrt{-g}$ é D-variante, pois:

$$\bar{\delta}e = -\xi^{\alpha}e_{,\alpha} - e\xi^{\alpha}_{\ ,\alpha} \quad , \tag{3.3.6}$$

em primeira ordem. Utilizando ainda as expressões de δe^{m}_{α}, $\bar{\delta}e^{m}_{\alpha}$ e $\delta e^{m}_{[\alpha,\beta]}$, constatamos por cálculo direto que há um cancelamento dos termos em $\dot{\xi}^{\rho}$, o que prova a D-invariância de $\mathbb{p}^{kA}$, apesar da D-variância de $\underline{e}$. Temos deste modo os importantes D-invariantes e_{jA} e $\mathbb{p}^{jA}$, que devem comparecer como variáveis dinâmicas em $\mathbb{H}(e_{jA}, \mathbb{p}^{jA})$. Tal forma será apresentada a seguir.

3.4 - HAMILTONIANA NA FORMA GERAL E VÍNCULOS SECUNDÁRIOS

Os vínculos primários restringem o domínio do espaço de fase a uma região denominada hipersuperfície de vínculos, subvariedade cuja definição é dada, no caso em questão, precisamente por (3.2.6), e que contém o movimento do sistema. Se várias funções determinam tal subvariedade, diz-se que são fracamente iguais ($\approx$). Nessa terminologia (devida a Dirac) escreve-se mesmo nas relações primárias de vinculação o sinal $\approx$, indicando tal fato.

A imposição de que o sistema físico não se desenvolva para fora da hipersuperfície de vínculos leva a um outro tipo de relações de vinculação, chamadas relações secundárias. No quadro da mecânica pré-simplética, enquanto que os vínculos primários definem a região na qual se degenera a forma simplética, os secundários são os que permitem a determinação das soluções das equações de Hamilton(26).

As relações secundárias são obtidas de:

$$\dot{\mathbb{p}}^{k0} = [\, \mathbb{p}^{k0}, \mathbb{H}] \approx 0 \quad (*) \quad , \qquad (3.4.1)$$

(*) Para dois funcionais $\underline{f}$ e $\underline{g}$ o parêntesis de Poisson (PP) é:
$\int d^3x'[f(x),g(x')] = \int_{x'0}\int_{x''0} d^3x'd^3x'' \{\frac{\delta f}{\delta e''_{j\mu}} \frac{\delta g'}{\delta \mathbb{p}''^{j\mu}} - \frac{\delta g'}{\delta e''_{j\mu}} \frac{\delta f}{\delta \mathbb{p}''^{j\mu}}\}$. Assim, por exemplo: $[e_{kA}, \mathbb{p}'^{jB}] = \delta^j_k \delta^B_A \delta(\vec{x}-\vec{x}')$, sendo $\mathbb{p}'^{jB} \equiv \mathbb{p}^{jB}(x')$.

sendo a hamiltoniana $\mathbb{H}$ determinada na forma $\mathbb{H}(e_{k\alpha}, \mathbb{p}^{k\alpha})$ a partir de (3.2.7) e (3.2.8):

$$\mathbb{H}(e_{k\alpha}, \mathbb{p}^{k\alpha}) = - e\delta - \frac{K}{8e} \eta^{ka}\eta^{\ell b} e_{k0}\, \mathbb{p}_j^A\, \mathbb{p}^{jB}(e_{ab}e_{\ell 0}e_{bA} + e_{a0}e_{\ell A}e_{bB}) -$$

$$- \frac{K}{32e} e_{k0}e_{\ell B}\, \mathbb{p}^{mc}\, \mathbb{p}_j{}^B \eta^{ja}\eta^{kb}\eta^{\ell d}\, e_{b[A}e_{c]}\{2e_{m0}e_a^A +$$

$$+ (1 - \frac{K}{\lambda})\, e_{a0}e_m^A\} \quad . \qquad (3.4.2)$$

O cálculo direto do parêntesis de Poisson em (3.4.1) com o emprego de (3.4.2) gera as 4 equações de consistência. Em (3.4.1) temos:

$$[\, \mathbb{p}^{a0}, \mathbb{H}'] \approx -\delta_j^a\delta_\mu^0 \int_{x'0}\int_{x''0} d^3x'' d^3x'\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\ \frac{\delta \mathbb{H}'}{\delta e''_{j\mu}} \qquad (3.4.3)$$

em que a derivada de $\mathbb{H}'$ é a derivada funcional definida por(*):

$$\frac{\delta F(f)}{\delta f(z)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[f(x) + \varepsilon\delta(x-z)] - F[f(x)]}{\varepsilon} \quad , \qquad (3.4.4)$$

para um funcional F.

Devemos lembrar ainda a relação:

$$\frac{\delta e'}{\delta e''_{j\mu}} = \frac{1}{6}\, \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon^{jbdf}\, e'_{b\nu}e'_{d\sigma}e'_{f\tau}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'') \quad , \qquad (3.4.5)$$

(*) Ver ref. (29), pág. 220.

onde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o tensor de Levi-Civita(*).

Usando (3.4.4-5) derivamos de (3.4.3):

$$\mathbb{H}_{\perp} \equiv e\delta + \frac{K}{e} e_0^{\ell} e_0^{j} \mathbb{H}_{\ell j} \approx 0 \quad , \tag{3.4.6}$$

$$\mathbb{H}_F \equiv e_0^{\ell} \mathbb{H}_{\ell F} \approx 0 \quad , \quad (F = 1,2,3) \quad , \tag{3.4.7}$$

nas quais:

$$\bar{\mathbb{H}}_{\ell j} = \frac{1}{8} (e_{\ell A} e_{jc} + \eta_{j\ell} g_{Ac}) \mathbb{P}_k{}^A . \mathbb{P}^{kc} -$$

$$- \frac{1}{32} (1 - \frac{K}{\lambda}) e_{\ell[c} g_{A]D} \delta_j^k e_m^A \mathbb{P}^{mc} \mathbb{P}_k^D + \frac{1}{16} e_{\ell[A} g_{c]D} e^{kA} \mathbb{P}_j^c \mathbb{P}_k{}^D \quad , \tag{3.4.8}$$

$$\mathbb{H}_{\ell F} = \frac{1}{2} e_{\ell(A} g_{F)c} \mathbb{P}_j{}^A \mathbb{P}^{jc} - \frac{1}{32} (1 - \frac{K}{\lambda}) (e_F^k e_{\ell[c} g_{A]D} -$$

$$- \delta_\ell^k g_{F[c} g_{A]D}) e_m^A \mathbb{P}^{mc} \mathbb{P}_k{}^D + \frac{1}{16} (\eta_{\ell m} g_{A[F} g_{D]c} +$$

$$+ e_{mF} e_{\ell[A} g_{c]D}) e^{kA} \mathbb{P}^{mc} \mathbb{P}_k{}^D \quad . \tag{3.4.9}$$

A hamiltoniana pode ser expressa como uma combinação linear de (3.4.6) e (3.4.7), do mesmo modo que na RG, conforme foi mostrado por Dirac. Assim, cada vínculo tem parêntesis de Poisson (PP) nulo (fracamente), com todos os vínculos secundários. Diz-se então que formam um conjunto de vínculos de primeira classe. Quan-

(*) Ver ref. (30), pág. 25.

do isso não ocorre o conjunto é considerado de segunda classe. Para estes vínculos vale, no caso geral:

$$\left[\Phi_{\bar{\alpha}}\ ,\ \psi'_{\bar{\beta}}\right] = K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x)\delta(\vec{x}-\vec{x}') \neq 0 \quad , \qquad (3.4.10)$$

com $\bar{\alpha},\bar{\beta} = 1,\ldots,N$.

Prova-se que as transformações nas variáveis canônicas induzidas por vínculos de segunda classe mapeiam pontos da superfície de vínculos para fora desta região, ou seja, para a região não-física do espaço de fase(28). Devido a isto é preciso eliminar os vínculos de segunda classe que apareçam na teoria. Com tal intuito foram ideados dois processos alternativos, por Dirac, e por Bergman e Komar, consistindo respectivamente, em :

a) substituição do PP pelo parêntesis (de Dirac) definido por:

$$[f,g]^{*} = [f,g] - [f,\phi_{\bar{\alpha}}]\ c^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\ [\phi_{\bar{\beta}},g] \quad , \qquad (3.4.11)$$

sendo $c^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ a matriz inversa de $[\phi_{\bar{\alpha}},\phi_{\bar{\beta}}]$. Assim, $[\phi_{\bar{\alpha}},\phi_{\bar{\beta}}]^{*} = 0$ e os $\phi_{\bar{\alpha}}$ passam a ser de primeira classe relativamente ao parêntesis de Dirac.

b) Definição de variáveis estrela(31):

$$f^{*} = f + \phi_{\bar{\alpha}}\ c^{\bar{\beta}\bar{\alpha}}[\phi_{\bar{\beta}},f] \quad , \qquad (3.4.12)$$

tais que: $[f^{*},\phi_{\bar{\alpha}}] \approx 0$.

São métodos equivalentes, já que:

$$[f,g]^{*} = [f^{*},g] \quad . \qquad (3.4.13)$$

Tanto para a TGTA como para a RG, se outros vínculos são introduzidos junto com os 4 vínculos secundários (através de condições de coordenadas, por exemplo), então, para o conjunto de segunda classe formado é necessária a aplicação de um dos artifícios acima mencionados a fim de se obter uma álgebra do grupo canônico em termos de vínculos de primeira classe apenas.

3.5 - EQUAÇÕES DA TGTA NA FORMA HAMILTONIANA

As equações de campo na forma hamiltoniana se escrevem:

$$\dot{\mathbb{p}}^{kA} = [\mathbb{p}^{kA}, \mathbb{H}] \quad , \tag{3.5.1}$$

$$\dot{e}_{kA} = [e_{kA}, \mathbb{H}] \quad , \tag{3.5.2}$$

$$\dot{\mathbb{p}}^{k0} = [\mathbb{p}^{k0}, \mathbb{H}] \approx 0 \quad . \tag{3.5.3}$$

As (3.5.3) são as 4 equações de vínculo já examinadas. As $\dot{e}_{k0}$ não aparecem na expressão de $\mathbb{H}$, sendo portanto as e_{k0} indeterminadas, conforme já se comentou, de outra perspectiva, na análise do problema de Cauchy.

As (3.5.1) e (3.5.2) correspondem, cada uma, a 12 equações de propagação, cuja forma explícita é obtida de:

$$\dot{\mathbb{p}}^{aF} = [\mathbb{p}^{aF}, \mathbb{H}] = -\delta^a_j \delta^F_\mu \int_{x'^0} \int_{x''^0} d^3x' d^3x'' \, \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \, \frac{\delta \mathbb{H}'}{\delta e''_{j\mu}} \quad , \tag{3.5.4}$$

$$\dot{e}_{aF} = [e_{aF}, \mathbb{H}] = \delta^j_a \delta^\mu_F \int_{x'^0} \int_{x''^0} d^3x' d^3x'' \, \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \, \frac{\delta \mathbb{H}'}{\delta p''^{j\mu}} \quad . \tag{3.5.5}$$

O cálculo direto das derivadas funcionais de $\mathbb{H}$ (dado por (3.4.2)) fornece:

$$e_{ap}\,\dot{\mathbb{P}}^{af} = e\delta^F_\rho\delta + \frac{K}{4e}\,\mathbb{J}^F_\rho - \frac{K}{32e}\left(1-\frac{K}{\lambda}\right)\mathbb{K}^F_\rho + \frac{K}{16e}\,\mathbb{L}^F_\rho \quad , \qquad (3.5.6)$$

$$\dot{e}_{aF} = -\frac{K}{2e}\,g_{0(0}g_{c)F}\,\mathbb{P}_a{}^c + \frac{K}{32e}\left(1-\frac{K}{\lambda}\right)(e^A_m e_{a0}\,\mathbb{P}^{mc}\,g_{0[c}g_{A]F} +$$

$$+ e^A_a e_{m0}\,P^{mc}\,g_{0[F}g_{A]c}) -$$

$$- \frac{K}{16e}\,(e^A_a e_{m0}\,\mathbb{P}^{mc}g_{0[A}g_{c]F} + e^A_m e_{a0}\,\mathbb{P}^{mc}\,g_{0[A}g_{F]c}) \quad , \qquad (3.5.7)$$

com:

$$\mathbb{J}^F_\rho = (g_0\ g_{0(A}\delta_{c)} + g_{00}g_{\rho(A}\delta^F{}_{c)} - \delta^F_\rho\,g_{0(0}g_{A)c})\,\mathbb{P}_J{}^A\,\mathbb{P}^{jc} \quad , \quad (3.5.8)$$

$$\mathbb{K}^F_\rho = \{e_0{}^k e^A{}_m(g_0\ g_{D[A}\delta^F_{c]} + g_D\ g_{0[c}\delta^F_{A]} + e_0{}^k(g_{0c}e_m\ +$$

$$+ g_{0[c}g_{A]\rho}\,e^A{}_m)\}\ \mathbb{P}^{mc}\,\mathbb{P}_k{}^F - g_{0[c}g_{A]D}\,e_0{}^k e^A{}_m\,\delta^F_\rho\,\mathbb{P}^{mc}\,\mathbb{P}_k{}^D \quad ,$$

$$(3.5.9)$$

$$\mathbb{L}^F_\rho = (e^{kF}g_{0[\rho}g_{c]D} + e^{kB}g_{0[\rho}g_{B]D}\,\delta^F_c + g_{0[B}g_{c]\rho}\,e^{kB} -$$

$$- \frac{1}{2}\,e^k_\rho g_{0c})e_{m0}\,\mathbb{P}^{mc}\,\mathbb{P}_k{}^F - e^{kB}e_{m0}g_{0[B}g_{c]D}\,\delta^F_\rho\,\mathbb{P}^{mc}\,\mathbb{P}_k{}^D \ .$$

$$(3.5.10)$$

Estas equações contêm funções não-dinâmicas que expressam o fato de que podemos escolher livremente qualquer transformação de coordenadas (gauge) que modifique uma forma especificada para e_{kA} e $\mathbb{P}^{kA}$ em um hiperplano $x^0 = t$, propagado de $x^0 = 0$. Isso está ligado ao fato de $\mathbb{H}$ ser D-invariante. Com efeito, embora possamos identificar na expressão da hamiltoniana variáveis pertencentes à 3-geometria, não somos capazes de eliminar a indeterminação oriünda de e_0^j ou, em outras palavras, a arbitrariedade das transformações de coordenadas. A fixação do sistema de coordenadas (que corresponde a uma fixação de gauge) contraria a idéia da covariância geral que norteia a TGTA (e a RG, evidentemente), apesar de se constituir em um método familar às teorias gauge-invariantes.

Observamos ainda que as equações (2.2.3), derivadas no capítulo anterior, são no fundo as (3.4.1), (ou (3.5.3)), que na forma canônica assumem a estrutura de vínculos. As demais,(3.5.6-7), (ou (3.5.1-2)), são equações de movimento para e_{kA} e $\mathbb{P}^{kA}$.

3.6 - COMENTÁRIOS

a) A aproximação linear da TGTA é estruturalmente análoga à da RG[1], acrescendo-se na primeira teoria o eventual efeito de um campo anti-simétrico (desconhecido classicamente) ausente na segunda. Espera-se então para uma aplicação do formalismo hamiltoniana da TGTA no limite de campos fracos resultados semelhantes aos obtidos para a RG excluidos os campos anti-simétricos. Nesta aproximação, por sinal, faz-se a seleção de gauge (sistema de coordenadas), acompanhada da redefinição dos PP (via parêntesis de Dirac (PD) ou variáveis de Bergmann-Komar), requerida para levar à álgebra de comutação de primeira classe. Na versão assim alcançada os vínculos são todos c-números com relação à álgebra dos PD, e podemos, em princípio, construir observáveis correspondentes quanticamente a operadores.

b) Embora não se tenha até aqui explorado a existência do grupo de Lorentz global como grupo de invariância da TGTA, com a expectativa de tratar a teoria de uma forma mais próxima à de uma teoria de geuge tipo Yang-Mills, cumpre notar que a lagrangeana gravitacional $\mathbb{L}_G$ da TGTA não é a la Yang-Mills "stricto sensu". De fato, (1.3.1") pode ser reescrita como:

$$\mathbb{L}_G = e\,\{\frac{1}{8}\,(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{K})\,Q^{k\ell m}Q_{k\ell m} +$$

$$+ \frac{1}{4}\,(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{K})\,Q^{k\ell m}Q_{\ell m k} - \frac{1}{2K}\,Q^{j}{}_{.j}{}^{\ell}Q^{k}{}_{.k\ell}\} + (\text{termo de div.}) + e\delta\,, \tag{3.6.1}$$

ou ainda como:

$$\mathbb{L}_G = e\,\frac{1}{3K}\,(T^{k\ell m}T_{k\ell m} - V^{k}V_{k}) +$$

$$+ \frac{9}{4}\,(\frac{1}{3K} - \frac{1}{\lambda})\,A_{k}A^{k} + (\text{termo de div.}) + e\delta\,, \tag{3.6.2}$$

com A_k, V_k e $T_{k\ell m}$ definidos por (1.1.8-10).

Podemos ainda colocar (3.6.2) na forma:

$$\mathbb{L}_G = e\,f^{k\ell m}f_{k\ell m} + (\text{t. div.}) + e\delta\,, \tag{3.6.3}$$

sendo

$$f^{k\ell m} = \frac{1}{\sqrt{3K}} T^{k\ell m} + \frac{i}{8\sqrt{3K}} V^{k}{}_{\eta}{}^{\ell m} - \frac{1}{2\sqrt{3K}} V^{\ell}{}_{\eta}{}^{km} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{3K} - \frac{1}{\lambda}}\; A^{k}{}_{\eta}{}^{\ell m} \quad . \tag{3.6.4}$$

Embora (3.6.3) se aproxime formalmente da lagrangeana livre de Yang-Mills, expressa por[(32)]:

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} f^{\ell}_{\mu\nu} f^{\mu\nu}_{\ell} \quad , \tag{3.6.5}$$

as $f^{k\ell m}$ definidas por (3.6.4) não representam a curvatura, papel este que na TGTA cabe às $Q^{k\ell m}$, conforme já foi comentado. Sendo assim, não podemos colocar as equações de Hayashi e Nakano na forma dual, introduzida através do operador $*$ de Hodge, ao contrário do eletromagnetismo e da teoria de Yang-Mills, em que a forma-curvatura F satisfaz (caso sem fonte)[(33)]:

$$dF + [A,F] = 0 \quad , \quad \text{(identidades de Bianchi)} \quad , \tag{3.6.6}$$

$$d{*F} + [A,{*F}] = 0 \quad , \quad \text{(equações dinâmicas)} \quad , \tag{3.6.7}$$

para a conexão A.

c) As equações da TGTA na forma hamiltoniana derivadas em 3.5 seriam formalmente únicas se a hamiltoniana estivesse inteiramente fixada. Não obstante, os 4 coeficientes arbitrários correspondentes às quantidades não-dinâmicas que comparecem em $\mathbb{H}$ abaixam o "grau de causalidade"(*) da teoria, tornando-a substantiva-

(*)Expressão cunhada por Bergmann e Komar. Ver ref. (17).

mente única, isto é, não se restringe à liberdade de escolha de coordenadas fora da superfície de Cauchy a partir da qual se considera a propagação. Então as soluções podem ser alteradas formalmente, mas reduzidas umas às outras por difeomorfismos. Este modo de propagação é dito substantivamente único.

d) Sendo o número de vínculos e o seu papel idênticos na RG e na TGTA, pode-se aplicar propriamente à esta última teoria a abordagem alternativa baseada nas condições de imersão, extraindo-se daí as equações de campo, na linha de idéias sugerida por J. Wheeler[(34)]. Tais condições, que traduzem a independência de caminho entre duas superfícies inicial e final[(*)], implicam que os vínculos hamiltonianos devem se anular sempre que a métrica da 3-geometria for variável dinâmica[(35)].

e) No formalismo hamiltoniano de uma teoria em que a dinâmica se associa a deformações de superfícies curvas, é conveniente recorrer à versão projetada dos vínculos hamiltonianos[(25)]. Nessa perspectiva, a hamiltoniana é expressa na forma:

$$\mathbb{H} = \int d^3x \; (N^{\perp} \mathbb{H}_{\perp} + N^A \mathbb{H}_A) \quad , \quad (A = 1,2,3) \; , \qquad (3.6.8)$$

em que se supõe um espaço-tempo quadridimensional com superfícies tridimensionais especificadas, representando A = 1,2,3 os índices de coordenadas das superfícies, e $N^{\perp}$ ("lapso") e N^A ("deslocamento") funções arbitrárias.

(*) Imagina-se famílias de observadores que inicialmente se bifurcam, seguindo caminhos diferentes associados a famílias monoparamétricas de superfícies, e depois se reencontram, preenchendo o "sandwich" entre as superfícies.

A hamiltoniana da TGTA, em particular, pode ser assim interpretada. A partir de (3.4.1) identificamos as quantidades $\mathbb{H}_\perp$ e $\mathbb{H}_A$ em (3.6.8) com os vínculos dados por (3.4.7). Em vista disso, os vínculos podem ser vistos como geradores de transformações canônicas, do mesmo modo que na RG.

Verificamos, por outro lado, que as variáveis e_{kA} e $\mathbb{p}^{kA}$, definidas em uma hipersuperfície tipo-espaço, são D-invariantes. Isto significa que variações induzidas sobre e_{kA} e $\mathbb{p}^{kA}$ por transformações de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ não dependem de derivada temporal do descritor ξ^μ, e portanto mantêm tais variáveis sobre a superfície. Assim, estes mapeamentos de coordenadas estão ligados às transformações canônicas associadas à componente de "deslocamento" da hamiltoniana, cujos geradores são os vínculos $\mathbb{H}_A$, responsáveis por mapeamentos dentro da superfície. Como $\mathbb{H}$ contém também a componente normal $\mathbb{H}_\perp$, que gera transformações para fora da superfície, a variação produzida por $\mathbb{H}$ sobre e_{kA} e $\mathbb{p}^{kA}$, expressa por (3.5.1-2), leva estas quantidades para fora da superfície. Ou seja, enquanto que os mapeamentos de coordenadas mantêm as variáveis de campo e momentos conjugados na 3-geometria, o efeito de $\mathbb{H}$ é levar tais variáveis de uma superfície inicial $x^0 = t_1$ para uma superfície contígua $x^0 = t_2$. Em outras palavras, as equações (3.5.1-2), que realizam tais variações, propagam as componentes dinâmicas e_{kA} e $\mathbb{p}^{kA}$.

A forma explícita de $N^\perp$ e N^A pode ser obtida para a TGTA, bem como as relações de PP entre $\mathbb{H}_\perp$ e $\mathbb{H}_A$, a partir de cálculo direto. É importante, no entanto, assinalar que o tratamento de projeção sobre superfícies se aplica a qualquer teoria com covariância geral, ou invariante sob "reparametrizações"[(25)]. Isto dispensa o cálculo direto para obter os PP dos vínculos , para a TGTA, garantindo a forma universal(25,35):

$$[\mathbb{H}_\perp, \mathbb{H}'_\perp] = (\mathbb{H}^A + \mathbb{H}'^A)\delta_{,A}(x,x')$$

$$[\mathbb{H}_A . \mathbb{H}_\perp] = \mathbb{H}_\perp \ \delta_{,A}(x,x')$$

$$[\mathbb{H}_A, \mathbb{H}_B] = \mathbb{H}'_A \ \delta_{,B}(x,x') + \mathbb{H}_A \ \delta_{,A}(x,x') \quad ,$$

e confirmando o fato de que nesse aspecto (relacionado ao grupo de TAC) há uma similaridade formal entre a RG e a TGTA na apre - sentação hamiltoniana, apesar da diferença entre as bases geomé - tricas dessas teorias. A variedade de Weitzenböck (assim como a de Riemann), permitindo a especificação de superfícies tipo-espa- ço, acolhe o método mencionado acima.

f) Através dos objetos $g_{0\mu}$ ($\mu = 0,\ldots,3$) se especifica a orientação temporal do vetor normal τ^μ. Se escolhemos,por exem- plo, $g_{0A} = 0$, $A = 1,2,3$, fazemos a direção temporal coincidir com a normal à superfície. Nesse caso, a hamiltoniana H é descrita in teiramente por $\mathbb{H}_\perp$.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS CANÔNICOS DE QUANTIZAÇÃO PARA A TGTA

Uma vez encontrados os vínculos $\mathbb{H}_A(x)$ e $\mathbb{H}_\perp(x)$, que na verdade são funcionais das variáveis canônicas e_{pA} e $\mathbb{p}^{kA}$, o método canônico de quantização que se supõe mais conveniente, em princípio, é o de realizar as relações básicas de comutação referentes às variáveis canônicas e aos vínculos secundários através de operadores hermitianos, preservando a forma da hamiltoniana como funcional das variáveis básicas e as relações de PP dos vínculos, as quais se tornam, dessa maneira, relações correspondentes de comutação.

No que tange às e_{kA}, $\mathbb{p}^{kA}$ podemos, naturalmente, fazer a escolha:

$$[\hat{e}_{k\mu}(\vec{x}) \ , \ \hat{e}_{\ell\nu}(\vec{x})] = 0 \quad ; \quad [\ \hat{\mathbb{p}}^{k\mu}(\vec{x}) \ , \ \mathbb{p}^{\ell\nu}(\vec{x}')] = 0 \quad ;$$

$$[\hat{e}_{kA}(\vec{x}) \ , \ \hat{\mathbb{p}}^{\ell B}(\vec{x}')] = i\hbar \ \delta^{\ell}_{k}\delta^{B}_{A}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad .$$

A tentativa de alcançar relações do gênero para os vínculos, no entanto, esbarra na dificuldade de se obter uma realização hermitiana, o que provém essencialmente da não linearidade em $\mathbb{p}^{jA}$ nas expressões de $\mathbb{H}_A$ e $\mathbb{H}_\perp$. Isso causa problemas para a or denação fatorial e tratamento dos operadores e de sua álgebra de comutação. Chega-se, assim, na TGTA, ao mesmo tipo de impasse manifesto na RG(17,36) e que levou, neste caso, à proposta do abandono da hermiticidade como requerimento básico para a obtenção do modelo quântico(37,38).

No caso da TGTA, mais interessante do que seguir qualquer sugestão nesse sentido parece ser explorar a existência do grupo de Lorentz global (GLG), que aparece na teoria como grupo de invariância.

Este grupo se vincula a transformações no espaço interno, que é "flat". Então é justificável ter-se a expectativa de uma álgebra de PP, construída a partir do GLG, mais simples e tratável quando da aplicação do princípio de correspondência.

É o que será investigado na seqüência

4.1 - Teorema de Noether e Grupo de Lorentz Global na TGTA

Conforme foi visto anteriormente, as "vierbeins" obedecem a transformações globais $e'^{k}_{\mu}(x) = \Lambda^{k}_{\ell} e^{\ell}_{\mu}(x)$, ou:

$$\delta e_{k\mu} = \varepsilon_{[k\ell]} e^{\ell}_{\mu} \quad , \qquad (4.1.1)$$

sendo os $\varepsilon_{[k\ell]}$ parâmetros infinitesimais de rotação.

Considerando a invariância da lagrangeana gravitacional livre $\mathbb{L}_G(e^{k}_{\mu}, e^{k}_{\mu,\nu})$ sob (4.1.1), derivamos do teorema de Noether(39) a seguinte relação de conservação:

$$\partial_\nu \mathbb{J}^{\nu}_{[k\ell]} = 0 \quad , \tag{4.1.2}$$

onde

$$\mathbb{J}^{\nu}_{[k\ell]} \equiv 2\; e_{\mu[\ell} \frac{\partial \mathbb{L}_G}{\partial e^{k]}_{\mu,\nu}} \quad . \tag{4.1.3}$$

Logo:

$$\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]} = 2\; e_{\mu[\ell} \frac{\partial \mathbb{L}_G}{\partial \dot{e}^{k]}_{\mu}} \tag{4.1.4}$$

$$= 2\; e_{\mu[\ell} p^{\mu}_{k]} \tag{4.1.4'}$$

$$\mathbb{J}^{A}_{[k\ell]} = 2\; e_{\mu[\ell} \frac{\partial \mathbb{L}_G}{\partial e^{k]}_{\mu,A}} \quad . \tag{4.1.5}$$

Devido ao fato de $\mathbb{J}^{\mu}_{[k\ell]}$ ser densidade, a eq. (4.1.2) é covariante.

A partir da expressão de $\mathbb{L}_G\ (e^k_\mu, e^k_{\mu,\nu})$ a forma explícita de (4.1.5) é:

$$\mathbb{J}^{A}_{[k\ell]} = 4\; e \{ \frac{1}{\lambda}\; g^{A\beta}\; e^{\alpha}_{[\ell} e_{k][\alpha,\beta]} -$$

$$- \frac{1}{2}\; (\frac{1}{K} - \frac{1}{\lambda})\; e^{\alpha}_{k} e^{\beta}_{\ell} e^{A}_{m}\; e^{m}_{[\alpha,\beta]} + \frac{1}{K}\; e^{A}_{[k} e^{\beta}_{\ell]}\; e^{m\alpha} e_{m[\alpha,\beta]} \} \,. \tag{4.1.5'}$$

Lembremos que:

$$\mathbb{P}^{k\sigma} = \{ e(\frac{1}{K} + \frac{1}{\lambda})\; g^{\alpha[\sigma} g^{0]\beta}\; \eta^{km} -$$

$$- 2e(\frac{1}{K} - \frac{1}{\lambda}) g^{\beta[\sigma} e^{0]m}\; e^{k\alpha} - \frac{4e}{K}\; e^{k[\sigma} g^{0]\beta}\; e^{m\alpha} \} \, e_{m[\alpha,\beta]} \quad .$$

Chamemos de $A^{k\sigma[\alpha\beta]}$ o termo entre colchetes acima. Note-se que $A_m^{k0[\alpha\beta]} = 0$. A relação inversa tem a forma:

$$e^m_{[\alpha,\beta]} = B^m{}_{[\alpha,\beta]B}\, \mathbb{P}^{\ell B} \quad . \tag{4.1.6}$$

Então:

$$A^j{}_m{}^{A[\alpha\beta]} B^m_{\ell[\alpha\beta]B} = \delta^j_\ell \delta^A_B \quad , \tag{4.1.7}$$

correspondendo ao produto de uma matriz 12x24 por uma matriz 24x12, ou:

$$B^m_{\ell[\alpha\beta]B}\, A^\ell{}_n{}^{B[\mu\nu]} = \delta^m_n\, \delta^{[\mu}_\alpha \delta^{\nu]}_\beta \quad , \tag{4.1.8}$$

representando o produto de uma matriz 24x12 por outra 12x24. Es - quematicamente:

$$A_{(12x24)} \times B_{(24x12)} = I_{(12x12)} \quad ,$$

$$B_{(24x12)} \times A_{(12x24)} = I_{(24x24)} \quad .$$

Mostra-se que a inversa B A^{-1} existe e pode ser es - crita como:

$$B_{m\ell[\alpha\beta]B} = \frac{1}{e} \frac{K(1-\frac{K}{\lambda})}{1-\frac{3K}{\lambda}} (g_{B[\alpha}e_{\beta]\ell}\, e_{m0} + \delta^\tau_B\, e_{\ell[\alpha}g_{\beta]0}e_{m\tau}) -$$
$$- \frac{K}{2e} (\delta^\tau_B\, e_{m[\alpha}g_{\beta]0}\, e_{\ell\tau} + e_{\ell 0}\, g_{B[\alpha}e_{\beta]m}) - \frac{\frac{2K^2}{\lambda}}{1-\frac{3K}{\lambda}} \eta_{\ell m} g_{B[\alpha}g_{\beta]0} , \tag{4.1.9}$$

e assim, (4.1.6) fica:

$$e\, e_{m[\alpha,\beta]} = \frac{K(1-\frac{K}{\lambda})}{1-\frac{3K}{\lambda}} \left(\mathbb{P}^{\ell}{}_{[\alpha} e_{\beta]}\, e_{m0} + \mathbb{P}^{\ell\tau} e_{\ell[\alpha} g_{\beta]0}\, e_m \right) -$$

$$- \frac{K}{2} \left(\mathbb{P}^{\ell\tau}\, e_{m[\alpha} g_{\beta]}\, e_{\ell\tau} + \right.$$

$$\left. + e_{\ell 0}\, \mathbb{P}^{\ell}_{[\alpha} e_{\beta]m} \right) - \frac{\frac{2K^2}{\lambda}}{1-\frac{3K}{\lambda}}\, \mathbb{P}_{m[\alpha} g_{\beta]0} \quad . \qquad (4.1.6')$$

Observemos que, para contagem de componentes, deve-se interpretar A e B respectivamente como: $A = (A^{jA|m[\alpha\beta]}$ e $B = B_{m[\alpha\beta]|\ell B})$, com a barra indicando a separação entre índices de linhas e de colunas das matrizes. Verifica-se facilmente que A e B satisfazem (4.1.7) e (4.1.8).

Notemos ainda que todos os termos à direita em (4.1.6') correspondem a densidades tensoriais de 2ª ordem de peso +1 para transformações de coordenadas da 3-geometria. Isto deveria ocorrer, com efeito, já que na mesma equação, à esquerda , temos uma densidade tensorial de peso +1 ($e = \sqrt{-g}$, e: $e_{m[\alpha,\beta]}$ é um tensor de ordem 2).

A (4.1.6') será utilizada na secção seguinte com a finalidade de relacionar $\mathbb{J}_{[k\ell]}$ às variáveis dinâmicas da teoria.

Retornando a (4.1.2), é importante reparar que do ponto de vista do espaço interno os objetos $\mathbb{J}_{[k\ell]}$ correspondem a 6 geradores do grupo de Lorentz, com o índice do espaço-tempo de 0 a 3, para cada gerador. Tal fato será melhor aclarado pela posterior análise de sua álgebra clássica. Observa-se de imediato, no entanto, que as $\mathbb{J}^0_{[k\ell]}$ seriam as componentes de um "tensor de spin" no espaço tangente, e as $\mathbb{J}^A_{[k\ell]}$ componentes espaciais de uma "densidade corrente" que se conserva no espaço-tempo(*). A componente $\mathbb{J}^0_{[k\ell]}$ se associa a "carga" $Q_{[k\ell]} = \int d^3x \; \mathbb{J}^0_{[k\ell]}$.

A interpretação acima e as relações derivadas nesta secção motivam-nos a buscar uma álgebra de Lie dos geradores no espaço interno, como um primeiro passo para o entendimento das possibilidades de quantização canônica abertas pela simetria associada ao grupo de Lorentz global.

4.2 - RELAÇÕES ENTRE GERADORES DO ESPAÇO INTERNO E VARIÁVEIS DINÂMICAS

Utilizando as fórmulas obtidas na secção anterior, podemos relacionar as $\mathbb{J}_{[k\ell]}$ diretamente às variáveis dinâmicas fundamentais e_{kA} e $\mathbb{p}^{kA}$. Para iniciar, tomemos (4.1.6'). Esta importante equação, substituída em (4.1.5'), fornece:

$$\mathbb{J}^A_{[k\ell]} = 2\, \mathbb{p}_{[\ell}{}^{A} e_{k]0} \; . \tag{4.2.1}$$

A similaridade formal entre (4.1.4') e (4.2.1) permite-nos englobá-las em uma só expressão, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^\mu_{[k\ell]} &= 2\,(\delta^\mu_A \, \mathbb{p}_{[\ell}{}^{A}\, e_{k]0} - \delta^\mu_0 \, \mathbb{p}_{[\ell}{}^{A} e_{k]A}) = \\ &= q\, \mathbb{p}_{[\ell}{}^{A} e_{k][0}\delta^\mu_{A]} \; . \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

(*) Pode-se comparar com grandezas análogas definidas, por exemplo, na ref. (41), para espaço-tempo tipo Minkowski.

Em função de (4.2.4) a lei de conservação (4.1.2), oriunda do teorema de Noether, adquire a forma:

$$\mathbb{J}_{[k\ell],\mu} = 2\,\{(\,\mathbb{P}_{[k}{}^{A} e_{\ell]A})_{,0} - (\,\mathbb{P}_{[k}{}^{A} e_{\ell]0})_{,A}\} = 0 \;, \quad (4.2.3)$$

corroborando a interpretação exposta em 4.1, referente à "carga" e "corrente".

É relevante, ainda, inverter (4.2.2), ou seja, encontrar $D_{\mu}^{jk\ell A}$ tal que:

$$\mathbb{P}^{jA} = D_{\mu}^{jk\ell A}\, \mathbb{J}^{\mu}_{[k\ell]} \quad . \qquad (4.2.4)$$

Verifica-se que (4.2.2) e (4.2.4) são consistentes se:

$$D_{\mu}^{jk\ell A} = -e^{\ell 0}\eta^{jk}\delta_{\mu}^{A} + \delta_{\mu}^{0} e_{0}^{j} e^{k0} e^{\ell A} \quad . \qquad (4.2.5)$$

Portanto, temos:

$$\mathbb{P}^{jA} = -\eta^{jk} e^{\ell 0}\, \mathbb{J}^{A}_{[k\ell]} + e_{0}^{j} e^{k0} e^{\ell A}\, \mathbb{J}^{0}_{[k\ell]} \quad . \; (4.2.4')$$

As (4.2.2) e (4.2.4') nos fornecem os dados necessários para calcular relações de parêntesis de Poisson envolvendo $e_{k\mu}$, $\mathbb{P}^{k\mu}$ e $\mathbb{J}^{\alpha}_{[ij]}$. Para as "vierbeins" e_{kA} e os momenta conjugados $\mathbb{P}^{kA}$ vale, como já foi visto:

$$[e_{kA}(\vec{x}) \;,\; \mathbb{P}^{\ell B}(\vec{x}\,')] = \delta_{k}^{\ell}\delta_{A}^{B}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \quad ,$$

$$[e_{k\mu}, e'_{\ell\nu}] = 0 \quad ; \quad [\mathbb{p}^{k\mu}, \mathbb{p}'^{\ell\nu}] = 0 \quad ,$$

com: $e'_{\ell\nu} = e_{\ell\nu}(x')$; $\mathbb{p}'^{\ell\nu} = \mathbb{p}^{\ell\nu}(x')$.

Na seção seguinte apresentaremos os cálculos de PP referentes a $\mathbb{J}^{\alpha}_{[ij]}$.

4.3 - Álgebra de Lie dos Geradores de Transformações no Espaço Interno

Consideremos inicialmente o cálculo de $e_{j\sigma}(\vec{x}), \mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}(\vec{x}')$. Através de (4.1.4) somos levados a(*):

$$\left[e_{j0}, \mathbb{J}'^{0}_{[k\ell]}\right] = 0 \quad , \qquad (4.3.1)$$

$$\left[e_{jA}, \mathbb{J}'^{0}_{[k\ell]}\right] = 2\, \eta_{j[k} e'_{\ell]A}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad . \qquad (4.3.2)$$

De (4.2.1) resulta a expressão de $[e_{j\sigma}, \mathbb{J}'^{A}_{[k\ell]}]$, que é:

$$\left[e_{j\sigma}, \mathbb{J}'^{A}_{[k\ell]}\right] = -2\, \delta^{A}_{\sigma} \eta_{j[k} e'_{\ell]0}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad . \qquad (4.3.3)$$

Ou, reunindo as fórmulas:

$$\left[e_{j\sigma}, \mathbb{J}'^{\mu}_{[k\ell]}\right] = 4\, \eta_{j[k} e'_{\ell][\sigma} \delta^{\mu}_{0]}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad . \qquad (4.3.4)$$

(*) Nos cálculos a seguir indicaremos por f' o funcional $f(\vec{x}')$, sendo que f representará $f(\vec{x})$.

No que diz respeito aos PP de $\mathbb{P}^{jA}$ e $\mathbb{J}^{\mu}_{[k\ell]}$ obtemos por cálculo direto:

$$\left[\mathbb{P}_{j\sigma}, \mathbb{J}'^{A}_{[k\ell]}\right] = 0 \quad , \tag{4.3.5}$$

$$\left[\mathbb{P}^{jA}, \mathbb{J}'^{\mu}_{[k\ell]}\right] = 2\, \mathbb{P}'^{A}_{[\ell}\, \delta^{j}_{k]}\; \delta^{\mu}_{0}\delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad .$$

Para $\left[\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}, \mathbb{J}'^{0}_{[rs]}\right]$, com o emprego de (4.1.4) e depois de (4.2.4') chegamos a:

$$\left[\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}, \mathbb{J}'^{0}_{[rs]}\right] = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\{\eta_{ks}(e'_{rA}\, \mathbb{P}_{\ell}{}^{A} - e_{\ell A}\, \mathbb{P}'_{r}{}^{A}) +$$

$$+ \eta_{\ell r}(e'_{sA}\, \mathbb{P}_{k}{}^{A} - e_{kA}\, \mathbb{P}'_{s}{}^{A}) +$$

$$+ \eta_{\ell s}(e_{kA}\, \mathbb{P}'^{A}_{r} - \mathbb{P}_{k}{}^{A} e'_{rA}) + \eta_{kr}(e_{\ell A}\, \mathbb{P}'^{A}_{s} - \mathbb{P}_{\ell}{}^{A} e'_{sA})\} \quad , \tag{4.3.7}$$

$$\int d^{3}x' \left[\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}, \mathbb{J}'^{0}_{[rs]}\right] = \eta_{\ell s}\, \mathbb{J}^{0}_{[rk]} + \eta_{\ell r}\, \mathbb{J}^{0}_{[ks]} + \eta_{kr}\, \mathbb{J}^{0}_{[s\ell]} +$$

$$+ \eta_{ks}\, \mathbb{J}^{0}_{[\ell r]} = C^{ab}_{\ell s r k}\, \mathbb{J}^{0}_{[ab]} \quad , \tag{4.3.7'}$$

onde

$$C^{ab}_{\ell s r k} \equiv \eta_{\ell s}\, \delta^{a}_{r}\delta^{b}_{k} + \eta_{\ell r}\, \delta^{a}_{k}\delta^{b}_{s} + \eta_{\ell r}\, \delta^{a}_{s}\delta^{b} + \eta_{ks}\, \delta^{a}_{\ell}\delta^{b}_{r} \quad .$$

Esta última relação caracteriza uma álgebra de Lorentz.

Encontramos ainda:

$$\left[\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}\ ,\ \mathbb{J}'^{A}_{[rs]}\right] = -\ 4\ \mathbb{P}_{[k}{}^{A}\eta_{\ell][r}e'_{s]0}\ \delta(x-x')\ , \qquad (4.3.8)$$

$$\left[\mathbb{J}^{A}_{[k\ell]}\ ,\ \mathbb{J}'^{B}_{[rs]}\right] = 0\ . \qquad (4.3.9)$$

Observemos que os $\mathbb{P}^{k\mu}$ têm PP nulos entre si, originando, do ponto de vista do espaço interno, 4 geradores de translação $\mathbb{P}^{(0)\mu},\ldots,\mathbb{P}^{(3)\mu}$, com 12 componentes não nulos ($\mathbb{P}^{kA}$; A=1,2,3). As $\mathbb{P}^{kA}$ e as $\mathbb{J}^{B}_{[ij]}$ também têm PP nulos entre si, o que sugere a redefinição:

$$q^{\underline{k}A} = \mathbb{P}^{kA}\ , \quad k = 0,\ldots,3\ , \qquad (4.3.10)$$

$$q^{\underline{k}A} = \mathbb{J}^{Ak}\ , \quad \bar{k} = 4,\ldots,9\ . \qquad (4.3.11)$$

Em (4.3.11) os índices $\underline{k}$ correspondem aos 6 índices [ij] presentes em $\mathbb{J}^{A[ij]}$.

Deste modo:

$$[q^{\underline{k}A}\ ,\ q'^{\underline{\ell}B}] = 0\ . \qquad (4.3.12)$$

Já as $\mathbb{J}^{0}_{[ij]}$, conforme foi assinalado, satisfazem a uma álgebra de rotação.

É importante notar também que as $\mathbb{J}^{A[ij]}$ e as $\mathbb{P}^{\ell A}$ não se constituem em geradores independentes. De fato, recordando (4.2.1) obtemos:

$$\mathbb{J}^{A[ij]} = \mathbb{P}^{jA}\, e^{i}_{0} - \mathbb{P}^{iA}\, e^{j}_{0} = f^{ij}_{\ell}\ \mathbb{P}^{\ell A} \qquad (4.3.13)$$

para $f_{\ell}^{ij} = \delta_{\ell}^{j} e_0^i - \delta_{\ell}^{i} e_0^j$, sendo os e_0^j c-números. Consequentemente, os $\mathbb{J}^{A[ij]}$ são combinações dos $\mathbb{P}^{\ell A}$.

A conclusão é que os geradores independentes são, na realidade:

a) $\mathbb{P}^{jA}$, com 4 componentes no espaço interno, j = 0,...,3, associado a translações.

b) $\mathbb{J}^{0}_{[k\ell]}$, com 6 componentes no espaço interno, relacionado a rotações.

Agrupando agora (4.3.8) e (4.3.9), escrevemos:

$$\int d^3x' \left[\mathbb{J}_{[k\ell]}, \mathbb{J}'^{\nu}_{[rs]} \right] = C^{ab}_{\ell srk} \mathbb{J}^{0}_{[ab]} \delta^{\mu}_{0} \delta^{\nu}_{0} + $$

$$+ 4\delta^{\mu}_{A}\delta^{\nu}_{0} \mathbb{P}^{A}_{[r}{}^{n}{}_{s][k}{}^{e}{}_{\ell]0} - 4\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{A} \mathbb{P}^{A}_{[k}{}^{n}{}_{\ell][r}{}^{e}{}_{s]0} \quad . \tag{4.3.14}$$

Com o intuito de fazer aparecer $\mathbb{J}^{\alpha}_{[ab]}$ no 2º membro da equação acima, há mister lançar mão de (4.2.4'). O resultado é:

$$\int d^3x' \left[\mathbb{J}_{[k\ell]}, \mathbb{J}'^{\nu}_{[rs]} \right] = C^{\mu\nu}_{\alpha[k\ell][rs]} \mathbb{J}^{\alpha}_{[ab]} \quad , \tag{4.3.15}$$

com:

$$C^{\mu\nu ab}_{\alpha[k\ell][rs]} = (\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0} C^{ab}_{\ell srk} + 8\delta^{\mu}_{[A}\delta^{\nu}_{0]} e^{a0} e^{bA} e_{0[r}{}^{n}{}_{s][k}{}^{e}{}_{\ell]})\delta^{0}_{\alpha} +$$

$$+ 4e^{a0}\delta^{A}_{\alpha}(\delta^{\mu}_{A}\delta^{\nu}_{0}\delta^{b}_{[r}{}^{n}{}_{s][k}{}^{e}{}_{\ell]0} - \delta^{\mu}_{0}\delta^{\mu}_{A}\delta^{b}_{[\ell}{}^{n}{}_{k][s}{}^{e}{}_{r]0}) \quad . \tag{4.3.16}$$

A fórmula (4.3.15) exibe uma álgebra relacionando 24 componentes de geradores não todos independentes. (4.3.13) nos informa que as 18 $\mathbb{J}^{A[ij]}$ são combinações das 12 $\mathbb{p}^{\ell A}$. Então as componentes independentes são(*) $\mathbb{p}^{\ell A}$ e $\mathbb{J}^{0}_{[ab]}$, num total de 18. Na apresentação alternativa da álgebra expressa por (4.3.15) deve haver, por conseguinte, 6 relações definindo 6 componentes em função das demais.

Uma vez determinada a álgebra clássica importa traduzí-la em linguagem quântica, isto é, definir uma álgebra correspondente de comutadores de operadores. E para afiançar significado físico nesse domínio às grandezas correlatas é essencial lograr uma realização hermiteana da álgebra. Este é o assunto da próxima seção.

4.4 - REALIZAÇÃO HERMITEANA DA ALGEBRA DOS $\mathbb{J}^{\alpha}_{|K\ell|}$ E QUANTIZAÇÃO

A fim de definir os operadores básicos podemos intentar a realização $p^{jA} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial e_{jA}}$. Temos assim $\hat{e}_{kA}$ e $\hat{p}^{ka}$, $\equiv - i\hbar \frac{\partial}{\partial e_{kA}}$ atuando sobre um espaço funcional de variáveis e_{jA}, de tal forma que:

$$\hat{e}^{\dagger}_{kA} = \hat{e}_{kA} \quad ; \quad \hat{\mathbb{p}}_{k}{}^{A\dagger} = \hat{\mathbb{p}}_{k}{}^{A} \quad . \tag{4.4.1}$$

Reencontramos então a relação fundamental:

(*) As $\mathbb{J}^{0}_{[ab]}$ não são combinações de $\mathbb{p}^{\ell A}$ que envolvem apenas constantes e c-números ($e_{\ell A}$ não são c-números; ver (4.1.4)).

$$\left[\hat{e}_{kA}, \hat{\mathbb{p}}'^{jB}\right]\psi(e_{\ell c}) = i\hbar\ \delta^j_k\delta^B_A\delta(\vec{x}-\vec{x}')\psi(e_{\ell c}) \ . \qquad (4.4.2)$$

Para se chegar ao operador correspondente às $\mathbb{J}^0_{[k\ell]}$, a partir de (4.1.4), não basta a substituição imediata $e_{k\mu} \to \hat{e}_{k\mu}$, $\mathbb{p}^{k\mu} \to \hat{\mathbb{p}}^{k\mu}$, pois nesse caso não se garante a hermiticidade. Contudo, a linearidade em $\mathbb{p}^{k\mu}$ na equação (4.1.4) favorece à consecução do intento. Propomos:

$$\hat{\mathbb{J}}^0_{[k\ell]} = \hat{e}_{A[\ell}\hat{\mathbb{p}}_{k]}{}^A + \hat{\mathbb{p}}_{[k}{}^A\hat{e}_{\ell]A} \ . \qquad (4.4.2)$$

De (4.4.2) e (4.4.1) segue que:

$$(\hat{\mathbb{J}}^0_{[k\ell]})^\dagger = \hat{\mathbb{J}}^0_{[k\ell]} \ . \qquad (4.4.3)$$

Analogamente, introduzimos:

$$\hat{\mathbb{J}}^A_{[k\ell]} = \hat{e}_{0[k}\,\hat{\mathbb{p}}_{\ell]}{}^A + \hat{\mathbb{p}}_{[\ell}{}^A\hat{e}_{k]0} \ , \qquad (4.4.4)$$

de modo a obter:

$$(\hat{\mathbb{J}}^A_{[k\ell]})^\dagger = \hat{\mathbb{J}}^A_{[k\ell]} \ . \qquad (4.4.5)$$

Falta agora reproduzir, a menos do fator $i\hbar$, a álgebra de PP das componentes $\mathbb{J}^\alpha_{[k\ell]}$, transformada em álgebra de comutadores de $\hat{\mathbb{J}}^\alpha_{[k\ell]}$. Um cálculo direto dos comutadores de $\hat{e}_{j\mu}$, $\hat{\mathbb{p}}^{j\mu}$, $\hat{\mathbb{J}}^\alpha_{[k\ell]}$ conduz a:

$$\left[\tilde{e}_{j\mu}, \hat{\mathbb{J}}'^{0}_{[k\ell]}\right] = 2\, i\hbar\, \eta_{j[k}\hat{e}'_{\ell]A}\, \delta^{A}_{\mu}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad ; \qquad (4.4.6)$$

$$\left[\hat{e}_{j\mu}, \hat{\mathbb{J}}'^{A}_{[k\ell]}\right] = 2\, i\hbar\, \eta_{j[\ell}\hat{e}_{k]0}\, \delta^{A}_{\mu}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad ; \qquad (4.4.7)$$

$$\left[\hat{\mathbb{p}}^{jA}, \hat{\mathbb{J}}'^{0}_{[k\ell]}\right] = 2\hbar^2\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, \delta^{j}_{[k} \frac{\partial}{\partial e'^{\ell]}{}_{A}} \quad ; \qquad (4.4.8)$$

$$\left[\hat{\mathbb{p}}^{jA}, \hat{\mathbb{J}}'^{B}_{[k\ell]}\right] = 0 \quad ; \qquad (4.4.9)$$

$$\int d^3x' \left[\hat{\mathbb{J}}^{0}_{[k\ell]}, \hat{\mathbb{J}}'^{B}_{[rs]}\right] = 4\hbar^2\, \hat{e}_{0[r}\eta_{s][\ell} \frac{\partial}{\partial e^{k]}{}_{B}} \quad ; \qquad (4.4.10)$$

$$\int d^3x' \left[\hat{\mathbb{J}}^{\mu}_{[k\ell]}, \hat{\mathbb{J}}'^{\nu}_{[rs]}\right] = i\hbar\, C^{\mu\nu ab}_{\alpha[k\ell][rs]}\, \mathbb{J}^{\alpha}_{[ab]} \quad . \qquad (4.4.11)$$

Patenteia-se deste modo a existência de uma álgebra quântica de operadores hermitianos em correspondência com a álgebra clássica de geradores associados ao grupo de Lorentz global (GLG), que é grupo de invariância da TGTA. Seu outro grupo de invariância, o grupo de TAC, partilhado com a RG, não origina uma álgebra consistente na versão quântica por causa das dificuldades de ordenação fatorial nas equações de vínculos, o que de resto também ocorre na RG, conforme já foi mencionado.

4.5 - COMENTÁRIOS

a) Apontamos já que $\mathbb{J}^{0}_{[ij]}$ tem a estrutura formal de um "momento angular intrínseco" do campo, em vista de sua lei de conservação e de sua álgebra de PP. Outras relações confirmam tal interpretação, como por exemplo, $[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}^0{}_{[k\ell]}] = 0$, para $\mathbb{J}^2 \equiv$ $\equiv \mathbb{J}^0{}_{[ij]}\, \mathbb{J}^{0[ij]}$. Podemos ainda definir operadores que comutam com $\hat{\mathbb{p}}^{jA}$ e $\hat{\mathbb{J}}^0_{[k\ell]}$, como o operador de segunda ordem $\hat{m}^{AB} = \hat{\mathbb{p}}^{jA}\, \hat{\mathbb{p}}_j{}^B$; A,B = 1,2,3.

b) Nas relações (4.4.8) e (4.4.10) os termos à direita são operadores anti-hermitianos, como se pode verificar. Isto, evidentemente, deveria ocorrer, já que $\hat{\mathbb{p}}^{jA}$ e $\hat{\mathbb{J}}^{\mu}_{[k\ell]}$ são hermitianos.

Comentários Finais

Investigamos a dinâmica da teoria gravitacional formulada por Hayashi e Nakano com vistas à aplicação de procedimentos canônicos de quantização. Como motivação para tal análise considerou-se, especialmente, a aplicabilidade da teoria em escala microscópica. E, no aspecto formal, a existência do GLG como grupo de invariância da TGTA.

Do problema de Cauchy e versão hamiltoniana da TGTA constatamos haver uma similaridade estrutural entre esta teoria e a RG no que se refere ao papel dos vínculos secundários e variáveis dinâmicas fundamentais. Em decorrência disso, as mesmas dificuldades de ordenação de fatores nas expressões dos vínculos manifestas na RG aparecem também na TGTA, quando se tenta chegar por esta via a uma versão quântica. Ao invés de persistir nesta linha, propusemo-nos então a explorar o GLG, o que nos levou à obtenção de uma álgebra de geradores no espaço interno. O fato de termos encontrado uma álgebra de comutação para os operadores $\mathbb{J}^{\alpha}_{[k\ell]}$ revela uma diferença marcante entre a RG e a TGTA, já que na RG não é possível construir um conjunto semelhante de operadores hermitianos(17). O grupo de invariância da RG é o grupo de transformações arbitrárias de coordenadas (GTAC), ao qual estão associados os vínculos secundários que geram transformações canônicas. Estes vínculos, contudo, não formam uma álgebra consistente de operadores hermitianos. Na TGTA também temos o GTAC como grupo de invariância, ao lado do GLG. E, assim como ocorre na RG, há problemas na seqüência de fatores que não comutam na álgebra dos vínculos hamiltonianos $\mathbb{H}_{\perp}$ e $\mathbb{H}_{A}$ da TGTA. No entanto, convém observar que estes vínculos podem ser expressos em termos de $\mathbb{J}^{\alpha}_{[k\ell]}$ e de e^{j}_{μ}. Então, em vista da álgebra consistente derivada para $\mathbb{J}^{\alpha}_{[k\ell]}$, é possível se ter a expectativa de um tratamento mais adequado para a questão da determinação de relações de comutação entre $\mathbb{H}_{\perp}$, $\mathbb{H}_{A}$ e $\mathbb{J}^{\alpha}_{[k\ell]}$. Com isto se completaria a descrição dinâmica formal, em versão quântica, da TGTA. Este aspecto fica ainda para ser investigado detalhadamente.

APÊNDICE A

É interessante analisar a relação entre a conexão de Weitzenböck $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, dada por (1.2.4), e a condição(*):

$$R_{\mu\nu\sigma.}{}^{\alpha}(\Gamma) = 0 \quad . \tag{A.1}$$

A escolha $\Gamma = \overset{0}{\Gamma}$ acarreta $R_{\mu\nu\sigma.}{}^{\alpha}(\Gamma) \equiv 0$. Podemos, no entanto, supor uma conexão do tipo:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} + S_{\beta\gamma.}{}^{\alpha} \quad , \tag{A.2}$$

sendo $S_{\beta\gamma.}{}^{\alpha}$ um tensor. Verifica-se que o tensor de curvatura para esta nova conexão se anula quando $S_{\beta\gamma.}{}^{\alpha}$ satisfaz à relação:

$$\nabla_{\gamma}S_{\alpha\beta.}{}^{\mu} - \nabla_{\alpha}S_{.\gamma\beta.}{}^{\mu} - S_{\alpha\beta.}{}^{\rho}S_{\gamma\rho.}{}^{\mu} + S_{\gamma\beta.}{}^{\rho}S_{\alpha\rho.}{}^{\mu} +$$

$$+ 2S_{\rho\beta.}{}^{\mu}(e_{k}^{\rho}\,\partial_{[\gamma}e^{k}{}_{\alpha]} + S_{[\gamma\alpha].}{}^{\rho}) = 0 \quad . \tag{A.3}$$

Consideremos a condição de teleparalelismo absoluto:

$$\nabla_{\beta}e_{k\alpha} = 0 \quad . \tag{A.4}$$

(*) Usamos aqui a notação de J.A. Schouten, Ricci-Calculus (Springer-Verlag, Berlin, 1954).

A conexão (A.2), ao contrário de $\overset{0}{\Gamma}$, não obedece à condição (A.4), levando antes à relação:

$$\nabla_\beta e_{k\alpha} = - e_{k\sigma} S_{\beta\alpha.}{}^{\sigma} \quad . \tag{A.5}$$

Se impomos adicionalmente a metricidade: $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, resulta:

$$S_{\lambda(\mu\nu)} = 0 \quad . \tag{A.6}$$

Um espaço-tempo provido de uma conexão do tipo (A.2) e satisfazendo (A.3) e (A.6) apresenta um tensor de curvatura globalmente nulo. Tomando, por exemplo, $S_{\alpha\beta\lambda} = \nabla_\alpha F_{\beta\lambda}$, que verifica (A.6) para um tensor anti-simétrico $F_{\beta\lambda}$, obtemos de (A.3) a equação:

$$(\nabla_\alpha F_{\beta\rho})(\nabla_\gamma F^{\rho\mu}) - (\nabla_\gamma F_{\beta\rho})(\nabla_\alpha F^{\rho\mu})$$

$$- 2(\nabla_\rho F_{\beta.}{}^{\mu})(e_k{}^{\rho}\, \partial_{[\gamma} e_{\alpha]}{}^{k} + \nabla_{[\gamma} F_{\alpha]}{}^{\rho}) = 0 \quad . \tag{A.7}$$

Esta permite, em princípio, a obtenção de $F_{[\beta\lambda]}$ como função das variáveis $e_\alpha{}^k$ e, a partir daí, a obtenção do tensor $S_{\alpha\beta\lambda}$ e da conexão $\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ dada por (A.2)

Uma outra forma de expressar (A.1) para um espaço-tempo obedecendo à condição de metricidade é através da co-torção $K_{\alpha\beta}{}^{\mu} \equiv \Gamma_{[\alpha\beta].}{}^{\mu} + g^{\sigma\mu}(g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{[\sigma\beta]} + g_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{[\sigma\alpha]})$, já que a solução mais geral de $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ é:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} + K_{\alpha\beta.}{}^{\mu} \quad . \qquad (A.8)$$

Lembrando que $g_{\alpha\beta} = e^{k}_{\alpha} e^{j}_{\beta} \eta_{kj}$, podemos escrever $\{^{\mu}_{\alpha\beta}\}$ em função de e^{k}_{α} e $e^{k}_{\alpha,\beta}$, e então $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ da forma (A.8) será dada através dos objetos $e_{k\alpha}$ e $K_{\alpha\beta.}{}^{\mu}$. A substituição de (A.8) em (A.1) nos leva a:

$$R_{\gamma\alpha\beta.}{}^{\mu}(\{\ \}) + \overset{\{\ \}}{\nabla}_{\gamma} K_{\alpha\beta.}{}^{\mu} - \overset{\{\ \}}{\nabla}_{\alpha} K_{\gamma\beta.}{}^{\mu} +$$

$$+ K_{\gamma\rho.}{}^{\mu} K_{\alpha\beta\rho.} - K_{\alpha\rho.}{}^{\mu} K_{\gamma\beta.}{}^{\rho} = 0 \quad , \qquad (A.9)$$

onde $\overset{\{\ \}}{\nabla}_{\alpha}$ é a derivada covariante relativa ao símbolo de Christoffel $\{^{\mu}_{\alpha\beta}\}$, e $R_{\gamma\alpha\beta.}{}^{\mu}(\{\ \})$ pode ser escrito em termos de $e_{k\alpha}$ e derivadas até segunda ordem. No caso particular em que $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ de (A.8) é identificada com a conexão de Weitzenböck $\overset{0}{\Gamma}$, a co-torção fica definida em termos de $e_{j\alpha}$ e o primeiro membro de (A.9) se anula identicamente, como é fácil verificar.

Torna-se então manifesto que $\overset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} = e^{\mu}_{j} \partial_{\alpha} e^{j}_{\beta}$ é uma solução particular de (A.3) (ou de (A.9)).

APÊNDICE B

Apresentamos aqui as expressões dos 4 vínculos hamiltonianos da TGTA, $\mathbb{H}_{\perp}$ e $\mathbb{H}_{A}$, A = 1,2,3, em termos das variáveis conservadas $J_{[k\ell]}$ e de e^{j}_{α}. Utilizando a relação (4.2.4') obtemos:

$$\mathbb{P}_{k}{}^{A}.\mathbb{P}^{kC} \equiv \mathbb{S}^{AC} = \eta^{\ell r}\, e^{m0}\, e^{s0}\, \mathbb{J}^{A}_{[\ell m]}\, \mathbb{J}^{C}_{[rs]}$$

$$- 2\, e_{0}{}^{\ell} e^{m0} e^{r0} e^{s(C}\mathbb{J}^{A)}_{[\ell m]}\, \mathbb{J}^{0}_{[rs]} + g_{00} e^{\ell 0} e^{r0} e^{mA} e^{s\ C}\, \mathbb{J}^{0}_{[\ell m]}\, \mathbb{J}^{0}_{[rs]} \quad , \tag{B.1}$$

$$\mathbb{P}_{j.}{}^{C}\, \mathbb{P}_{k.}{}^{D} \equiv \mathbb{S}^{CD}_{jk} = e^{s0} e^{m0}\, \mathbb{J}^{C}_{[js]}\, \mathbb{J}^{D}_{[km]}$$

$$- e^{m0} e^{r0} (e^{0}_{j} e^{sC}\, \mathbb{J}^{D}_{[km]} + e_{k0} e^{sd}\, \mathbb{J}^{C}_{[jm]})\, \mathbb{J}^{0}_{[rs]}$$

$$+ e_{j0} e_{k0} e^{\ell 0} e^{r0} e^{sC} e^{mD}\, \mathbb{J}^{0}_{[rs]}\, \mathbb{J}^{0}_{[\ell m]} \quad . \tag{B.2}$$

A substituição de (B.1) e (B.2) em (3.4.6-7) nos leva então a:

$$\mathbb{H}_{\perp} = e\delta + \frac{K}{e}\Bigg\{\frac{1}{4}\, g_{0(A} g_{0)C}\ \mathbb{S}^{AC}$$

$$- \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1 - \frac{K}{\lambda}) g_{0[C} g_{A]D} e^{jA} e^{k}_{0} - g_{0[A} g_{C]D} e^{j}_{0} e^{kA}\right] \mathbb{S}^{CD}_{jk}\Bigg\} \tag{B.3}$$

$$\mathbb{H}_F = \frac{1}{2}\, g_{0(A}g_{F)C}\ \$^{AC} - \frac{1}{16}\left[(1-\frac{K}{\lambda})\, e^k{}_{[F}g_{0][C}g_{A]D}\, e^{jA}\right.$$

$$\left. - (e^j{}_0 g_{A[F}g_{D]C} + e^j{}_F g_{0[A}g_{C]D})\, e^{kA}\right] \$^{CD}_{jk} \quad . \qquad (B.4)$$

Observamos ainda que a variável de segunda ordem $\$^{AC}$ tem PP nulo com $\mathbb{P}_k{}^A$ e $\mathbb{J}^0{}_{[k\ell]}$, assim como, na versão quântica, o operador $\hat{m}^{AB} \equiv \hat{\mathbb{P}}^{jA}\,\hat{\mathbb{P}}_j{}^B$ comuta com $\hat{\mathbb{P}}_k{}^A$ e $\mathbb{J}^0{}_{[k\ell]}$.

A obtenção de relações envolvendo operadores hermitianos $\mathbb{H}_\perp$ e $\mathbb{H}_F$ associados a (B.3-4) é complicada devido à dificuldade de ordenação dos operadores $\hat{e}_j$ e $\hat{\mathbb{J}}^\mu{}_{[k\ell]}$, presentes como variáveis em $\$^{AC}$ e $\$^{AC}_{j\ell}$, com dependência quadrática. Note-se ainda que $\hat{e}_{j0}$ comuta com $\hat{\mathbb{J}}^0{}_{[k\ell]}$ e com $\hat{\mathbb{J}}^A{}_{[k\ell]}$, o que é conveniente, mas o mesmo não ocorre para $\hat{e}_{jA}$, conforme indicam (4.4.6) e (4.4.7), e isto torna problemática a formulação dinâmica quântica da TGTA a partir das variáveis $\mathbb{J}^\mu{}_{[j\ell]}$, devendo-se enfrentar, aparentemente , questões de ordenação semelhantes às que ocorrem na RG. Apesar disso, como as variáveis $\mathbb{J}^\mu{}_{[k\ell]}$ mostraram-se convincentes como quantidades cinemáticas na tradução quântica da TGTA, contrastando com a situação que se apresenta na RG, parece digna de investigação posterior a construção de possíveis operadores com significado dinâmico relacionados às $\mathbb{J}^\mu{}_{[k\ell]}$.

REFERÊNCIAS

(1) - K. Hayashi e T. Nakano - Prog. Theor. Phys., 38, 491(1967).

(2) - K. Hayashi - Lett. Nuovo Cimento, 5, 739(1972).

(3) - K. Hayashi - Lett. Nuovo Cimento, 5, 529 (1972).

(4) - K. Hayashi - Lett. Nuovo Cimento, 5, 883 (1972).

(5) - K. Hayashi - Nuovo Cimento A, 16, 639 (1973).

(6) - K. Hayashi - Phys. Lett. B, 69, 441 (1977).

(7) - R. Utiyama - Phys. Rev. 101, 1597 (1956).

(8) - T.W.B. Kibble - J. Math. Phys. 2, 212 (1961).

(9) - M.A. Tonnelat - "Les Théories Unitaires de l'Electromagnétisme et de la Gravitation" - Gauthier-Villars, Paris (1965).

(10) - R. Weitzenböck - Invariantentheorie (Noordhoff,Groningen , (1923).

(11) - A. Einstein - Berl. Ber. 217, 224 (1928).

(12) - T. Levi-Civita - Sitz. der phys. - math. 137 (1929).

(13) - C.G. Oliveira - "Distant paralelism and the Riemannian geometry" - preprint, Universidade de Brasília.

(14) - S. Miyamoto e T. Nakano - Prog. Theor. Phys. 45, 295(1971).

(15) - H. Dingle - Proc. N.A.S. 19, 559 (1933).

(16) - K. Gödel - Rev. Mod. Phys. 21, 447 (1949).

(17) - P.G. Bergmann e A. Komar - "The phase space formulation of GR", em "General Relativity and Gravitation", vol. 1, ed. A. Held; Plenum Press, New York (1980).

(18) - A. Lichnerowicz - "Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme" - Masson et Cie, Paris (1955).

(19) - R. de Azeredo Campos e C.G.Oliveira - Nuovo Cimento, 74B,83 (1983).

(20) - C.G. Oliveira - "Teoria da Gravitação", em "II Escola de Cosmologia e Gravitação", vol. II, ed. M. Novello, Rio de Janeiro (1980).

(21) - L. Rosenfeld - Ann. Phys., Leipzig, 5, 113 (1930).

(22) - P.A.M. Dirac - Can. J. Math. 2, 129 (1950); 3, 1 (1951).

(23) - P.A.M. Dirac - Proc. R. Soc. London 246, 333 (1958).

(24) - P.A.M. Dirac - Phys. Rev. 114, 924 (1959).

(25) - A. Hanson, R. Regge e C. Teitelboim - "Constrained Hamiltonian Systems" - Acc. Naz. dei Lincei, Roma (1976).

(26) - P.R. Rodrigues - "Geometria diferencial pré-simplética", em "II Esc. de Cosm. e Grav.", vol. III, ed. M. Novello, Rio de Janeiro (1980).

(27) - V. Arnold - "Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique", MIR (1976).

(28) - C.G. Oliveira - "Lectures Notes in Canonical Formalisms", Monografia, CBPF (1972).

(29) - P. Roman - "Introduction to quantum field theory", John Wiley and Sons Inc., New York (1969).

(30) - J.L. Anderson - "Principles of Relativity Physics", Acad. Press, New York (1967).

(31) - P.G. Bergmann e A. Komar - Phys. Rev. Lett. 4, 432 (1960).

(32) - C.N. Yang e R.I. Mills - Phys. Rev. 96, 191 (1954).

(33) - R. Aldrovandi - "Teorias Clássicas de Gauge e Gravitação", na mesma publicação da ref. (26).

(34) - J.A. Wheeler - "Superspace and the nature of quantum geometrodynamics, em "Battelle Bencontres 1967", eds. C.M. De Witt e J.A. Wheeler, Benjamin, N. York (1968).

(35) - C. Teitelboim - "The Hamiltonian structure of space-time", na mesma publicação da ref. (17).

(36) - J.L. Anderson - Phys. Rev. 144, 1182 (1959).

(37) - A. Komar - Phys. Rev. D, 19, 2908 (1979).

(38) - A. Komar - Phys. Rev. D, 20, 830 (1979).

(39) - E. Noether - Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 235 (1918).

(40) - N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov - "Introduction to the theory of quantized fields" - J. Wiley & Sons, Inc. N. York, (1980), (3ª ed.).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Patricio Anibal Letelier Sotomayor
Presidente

Francisco Antonio de Moraes Accioli Doria

XXXXXXXX

Carlos Augusto Pinto Galvão

Mario Novello

Juan Alberto Mignaco

Rio de Janeiro, 28 de setembro de 1984