JOÃO BATISTA TEIXEIRA BOECHAT

UM ESTUDO SOBRE A DINÂMICA CLÁSSICA DE SISTEMAS COM VÍNCULOS

Tese de

Mestrado

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Abril de 1984

Dedico este trabalho a
Francisco e Enedina.

INDICE

Pág.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- ao grande mestre e amigo, Prof.C.A.P. Galvão, pelo qual sinto profundo respeito e admiração , pelo seu total apoio, estímulo e dedicação na orientação deste trabalho.

- a Helô, cuja presença transformou nosso local de trabalho num verdadeiro paraíso, pela sua ajuda na correção.

- a Carlos Lopes da Conceição pelo excelente trabalho de datilografia.

- a todos os amigos do CBPF.

RESUMO

Este trabalho trata de alguns aspectos da formulação hamiltoniana de Dirac para sistemas com vínculos. Nesta formulação as variáveis dinâmicas dependem de funções arbitrárias através das soluções das equações de Hamilton. Neste trabalho apresentamos: (i) uma análise profunda das condições de consistência dos vínculos na teoria de Dirac. (ii) um estudo bem profundo e detalhado das variáveis dinâmicas que são fisicamente significativas. Estas variáveis são definidas como aquelas que não dependem das funções arbitrárias; (iii) um método para calcular o gerador de transformação de gauge de um dado sistema; (iv) dois exemplos de sistemas mecânicos para ilustrar "teorias de gauge" em mecânica clássica. Para melhor compreender estes exemplos fazemos uma análise formal de alguns aspectos das teorias de gauge.

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de alguns aspectos da formulação hamiltoniana de Dirac[1,4] para sistemas em que a lagrangeana $L(q^i,\dot{q}^i)$ é singular. Nestes sistemas as velocidades $\dot{q}^i$ não podem ser expressas univocamente em termos das coordenadas canônicas q^i e dos momentos p_i. Isto se deve a existência de relações entre as coordenadas e momentos, denominadas de vínculos primários. Este tipo de sistema ocorre com bastante frequência na natureza. Como exemplos deles citamos o campo eletromagnético, o campo gravitacional e a partícula livre relativística.

Consideremos um sistema físico com um certo número de vínculos primários. Para consistência da teoria deve-se requerer a preservação destes vínculos, o que conduz a um sistema de equações lineares não-homogêneo onde as incognitas são os multiplicadores de Lagrange. Este sistema pode levar a três situações: pode-se reduzir a relações entre as coordenadas e momentos independentes dos multiplicadores, denominadas de vínculos secundários; ou impor restrições sobre estes multiplicadores de Lagrange; ou ainda se reduzir a identidades. A possibilidade do sistema de equações ser insolúvel é descartada, supõe-se sempre que tal situação não ocorra porque isto significaria que as equações de Euler-Lagrange seriam inconsistentes[1].

Suponhamos que o sistema de equações conduz a um certo número de vínculos secundários. Então sobre estes vínculos deve-se impor a condição de consistência e o processo deve ser repetido até que todos os vínculos secundários sejam obtidos. Admitindo que já foi encontrado todos os vínculos secundários do sistema, vamos requerer agora que todos os vínculos conjuntamente (primários e secundários) sejam preservados no tempo. Isto novamente nos conduz a um sistema de equações onde as incognitas são os multiplicadores de Lagrange. Este sistema é resolvido na região Γ, definida por todos os vínculos do sistema.Na sua solução geral aparecerá algumas funções arbitrárias do tempo. Este fato faz com que as variáveis canônicas, através das soluções das equações de Hamilton, dependam destas funções arbitrárias.

O que descrevemos nos dois últimos parágrafos é a análise das condições de consistência feita por Dirac[1,4]. Nós neste trabalho, com a finalidade de encontrar a solução do sistema de equações associado a preservação dos vínculos primários, conseguimos obter uma nova maneira de analisar as condições de consistência.

A distinção entre vínculos primários e secundários é de pouca importância na forma final do esquema hamiltoniano. Uma outra classificação de vínculos ou, mais geralmente, de funções definidas no espaço de fase, desempenha um papel mais importante. Tal classificação é a de funções de primeira e segunda classe. Uma função $F(q,p)$ é denominada de primeira classe se seus colchetes de Poisson com todos os vínculos se anulam sobre Γ e é de segunda classe se existe pelo menos um vínculo tal que seu colchete de Poisson com F não se anula nesta região.

O aparecimento de funções arbitrárias na teoria, implica na existência de mais de um conjunto de variáveis canônicas correspondendo a um mesmo estado físico do sistema num dado tempo t. Estes conjuntos de variáveis canônicas correspondendo a um mesmo estado físico estão relacionados por transformações de gauge. Dirac[1] provou que os vínculos primários de primeira classe são geradores destas transformações. Os vínculos secundários de primeira classe, Dirac conjecturou que eles são também geradores de transformações de gauge.

A definição de quantidades de primeira classe nos mostra que elas formam uma álgebra e levam pontos de Γ em Γ. A esta álgebra temos associado o grupo das transformações infinitesimais em Γ. Uma transformação infinitesimal em Γ é gerada por algum elemento infinitesimal desta álgebra. Requerendo que esta transformação seja de gauge, nos leva no capítulo II a obter os elementos da álgebra que geram estas transformações. Conseguimos então uma outra maneira de encontrar os geradores de transformações de gauge desta teoria.

Como já vimos anteriormente, as variáveis dinâmicas dependem de funções arbitrárias do tempo. As variáveis que são "fisicamente significativas" não devem depender destas funções. A estas variáveis está reservada uma subregião do espaço de fase mais restrita ainda que a região Γ . É esta a região onde ocorre o movimento do sistema sem nenhuma liberdade de gauge. Para determinar esta região é necessário introduzir na teoria condições suplementares denominadas de condições de gauge[1,4,9]. Neste trabalho por um procedimento completamente diferente ao que se conhece, fazemos um estudo bem detalhado destas variáveis.

Como exemplo de teoria de gauge em mecânica clássica, apresentamos no capítulo III dois sistemas físicos com propriedades análogas as que se conhece na teoria dos campos de gauge. Com a finalidade de melhor compreender o exemplo de fixação de gauge em mecânica clássica, apresentamos no capítulo VI um apanhado geral sobre o que se conhece da teoria dos campos de gauge nos gauges mais usuais.

CAPÍTULO I

VÍNCULOS SECUNDÁRIOS E RESTRIÇÕES NOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

I.1 - INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE DIRAC

Consideremos um sistema físico com N graus de liberdade cuja lagrangeana $L(q,\dot{q})$ não dependa explicitamente do tempo. Estamos denotando por q o conjunto das N coordenadas generalizadas e por $\dot{q} = dq/dt$, o conjunto das N velocidades generalizadas. Admitiremos sempre que a lagrangeana $L(q,\dot{q})$ é tal que as equações de Euler-Lagrange não envolvem inconsistências[1,2].

Usando a definição dos momentos canônicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{I-1.1}$$

vamos construir a matriz

$$W = \left|\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right|\right| = \left|\left| \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} \right|\right| \tag{I-1.2}$$

denominada de matriz Hessiana associada com o sistema.

Se o determinante de W é diferente de zero, todas as velocidades $\dot{q}^i$ podem ser obtidas em termos das coordenadas e momentos. Quando W é singular, isto é, tem determinante nulo, as velocidades $\dot{q}^i$ não podem ser expressas univocamente em termos das coordenadas e momentos. Portanto, devem existir relações entre as coordenadas e momentos

$$\phi_m(q,p) = 0 \quad , \quad m = 1 \dots. M < N \tag{I-1.3}$$

que são consequências apenas da definição dos momentos. As funções $\phi_m(q,p)$, que se supõe independentes entre si, são denominadas de vínculos primários.

A Hamiltoniana canônica definida por

$$H_c = p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) \tag{I-1.4}$$

tem a propriedade de depender somente das coordenadas e momentos. Isto pode ser visto por notar que a variação

$$\delta H_c = \dot{q}^i \ \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right) \delta q^i \tag{I-1.5}$$

envolve somente as variações δq^i e δp_i, as quais estão sujeitas as condições (I-1.3).

Utilizando-se a técnica de multiplicadores de Lagrange as equações de movimento podem ser obtidas impondo-se que a integral de ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i\dot{q}^i - H_c - u^m\phi_m)\,dt \tag{I-1.6}$$

seja estacionária, isto é, $\delta S = 0$. Em (I-1.6) as N coordenadas, os N momentos e os m multiplicadores de Lagrange u^m, são variados independentemente. Calculando-se $\delta S = 0$ com as condições

$$\delta q^i(t_1) = 0 \quad , \quad \delta q^i(t_2) = 0 \tag{I-1.7}$$

obtem-se as equações de movimento:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \tag{I-1.8a}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \tag{I-1.8b}$$

Fica claro de (I-1.6) que a substituição $H_c \to H_c + N^m(q,p)\, \phi_m$, onde $N^m(q,p)$ são funções arbitrárias, tem como resultado apenas uma redefinição dos multiplicadores de Lagrange e não afeta a teoria. Isto significa que a Hamiltoniana (I-1.4) não é univocamente determinada.

O colchete de Poisson para duas funções F e G que dependam somente das coordenadas e momentos é definido por

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{I-1.9}$$

e possui as seguintes propriedades

$$\{F,G\} = - \{G,F\} \tag{I-1.10a}$$

$$\{F + G,H\} = \{F,H\} + \{G,H\} \tag{I-1.10b}$$

$$\{FG,H\} = F\, \{G,H\} + \{F,H\}\, G \tag{I-1.10c}$$

$$\{F, \{G,H\}\} + \{G, \{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} = 0 \tag{I-1.10d}$$

Utilizando as equações (I-1.9), (I-1.8a) e (I-1.8b), podemos escrever a equação de movimento para qualquer variável dinâmica F(q,p) da seguinte forma

$$\dot{F} = \{F,H\}_C + u^m \{F, \phi_m\} \qquad \text{(I-1.11)}$$

Em virtude de u^m poder depender de velocidade generalizadas, o seu colchete de Poisson com qualquer função das coordenadas e momentos não é definido. Se introduzirmos o sinal de igualdade fraca nas equações de vínculos

$$\phi_m(q,p) \approx 0 \qquad \text{(I-1.12)}$$

para significar que estas só serão usadas depois de se calcular todos os colchetes de Poisson, podemos escrever a equação de movimento (I-1.11) sob a forma

$$\dot{F} \approx \{F,H_T\} \qquad \text{(I-1.13)}$$

onde

$$H_T = H_C + u^m \phi_m \qquad \text{(I-1.14)}$$

H_T é denominada Hamiltoniana total. Observe que devido a (I.1.12) as quantidades

$$\{F, u^m\} \phi_m \qquad \text{(I-1.15)}$$

que aparecem em (I-1.13) são fracamente nulas.

I.2 - ANÁLISE DAS CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA

Os vínculos primarios $\phi_i \approx 0$, $i = 1...M$, definem uma região Γ_1 no espaço de fase onde ocorre o movimento do sistema. Por consistência da teoria, devemos impor as condições $\dot{\phi}_i \approx 0$, que garantem que Γ_1 seja preservada durante a evolução dinâmica do sistema. As equações de movimento (I-1.11) ou (I-1.13) dão origem as M condições de consistência:

$$\{\phi_k, H_c\} + \{\phi_k, \phi_i\}u^i \approx 0 \qquad i, k=1...M \qquad \text{(I-2.1)}$$

Tratemos (I-2.1) como um sistema de equações lineares não-homogêneo, no qual as funções u^i são incógnitas.

Se a matriz $\Phi = ||\{\phi_k, \phi_i\}||$ for não singular sobre Γ_1, isto é, $\det \Phi \not\approx 0$, o sistema (I-2.1) possui solução e esta é única. Seja a matriz $C = ||C^{ik}||$ a inversa de Φ. Então

$$u^i \approx - C^{ik} \{\phi_k, H_c\} \qquad \text{(I-2.2)}$$

e a equação de movimento para uma variável dinâmica g é:

$$\dot{g} \approx \{g, H_c\} - \{g, \phi_i\} C^{ik} \{\phi_k, H_c\} \qquad \text{(I-2.3)}$$

Vamos agora analisar a situação em que Φ é singular, com posto $M_1' < M$ bem definido sobre Γ_1.

O sistema linear homogêneo associado com (I-2.1)

$$\{\phi_k, \phi_i\}\ u^i \approx 0 \qquad \text{(I-2.4)}$$

possui em Γ_1 $(M - M_1')$ soluções linearmente independentes que serão denotadas por $h^i(\ell)$, $i = 1 \ldots M$; $\ell = 1 \ldots M-M_1'$

O sistema linear homogêneo transposto associado com (I-2.1) definido por[3]

$$\{\phi_i,\ \phi_k\}\ u^i \approx 0 \qquad \text{(I-2.5)}$$

possui também em Γ_1 $(M-M_1')$ soluções linearmente indepen - dentes

$$H_{(\ell)}{}^k\ (q,p), \quad k = 1 \ldots M;\ \ell = 1 \ldots M-M_1'$$

A condição necessária e suficiente para que (I-2.1) seja compatível é[3]:

$$H_{(\ell)}{}^k(q,p)\ \{\phi_k, H_c\} \approx 0 \qquad \text{(I-2.6)}$$

Se (I-2.6) for identicamente satisfeita sobre Γ_1, a solução geral de (I-2.1) nesta região é:

$$u^i \approx V^i(q,p) + h^i_{(\ell)}(q,p)\ v^\ell(t) \qquad \text{(I-2.7)}$$

onde $V^i(q,p)$ é uma solução particular de (I-2.1) e $h^i_{(\ell)}(q,p)\ v^\ell(t)$ é a solução geral de (I-2.4). Nas soluções das equações de movimento aparecerão $(M-M_1')$ funções arbitrá rias $v^{\ell}(t)$.

Como o sistema (I-2.1) é consistente no caso em que existam equações em (I-2.6) que não sejam identicamente satisfeitas sobre Γ_1, só será possível encontrar soluções do sistema se estas equações se reduzirem a $L'(L' \leq M-M_1')$ equações de vínculos $\chi_{\ell'}(q,p) \approx 0$. Estes serão supostos independentes entre si e dos vínculos primários. Estes novos vínculos obtidos e todos os outros que eventualmente surgem do processo de consistência, serão denominados de vínculos secundários. Notemos que, para se obter os vínculos secundários, faz-se uso das equações de movimento, enquanto que os vínculos primários são consequências apenas da definição dos momentos (I-1.1). O movimento do sistema ocorrerá então, em uma região Γ_2 do espaço de fase mais restrita que Γ_1 definida pelos vínculos:

$$\phi_i(q,p) \approx 0 \quad , \quad i = 1...M \tag{I-2.8a}$$

$$\chi_{\ell'}(q,p) \approx 0 \ , \ \ell' = 1...L' \leq (M-M_1') \tag{I-2.8b}$$

Como a região Γ_2 tem dimensão menor do que Γ_1, pode acontecer do posto de Φ em Γ_2 ser menor do que em Γ_1. Neste caso, o número de soluções linearmente independentes de (I-2.5) e o número de equações em (I-2.6) é maior, possibilitando o surgimento de mais vínculos secundários que, junto aos dados por (I-2.8), passam a definir a região Γ_3, restringindo ainda mais a região do espaço de fase onde ocorre o movimento do sistema.

Devemos novamente recalcular o posto de Φ em Γ_3, e se este for menor do que em Γ_2, o número de equações em (I-2.6) será ainda maior, o que possibilitará o aparecimento de mais vínculos secundários. Este procedimento deve ser continuado e só teremos obtido todos os vínculos secundários do processo de consistência dos $\phi_i \approx 0$, quando a situação for a seguinte: na região Σ definida pelos vínculos

$$\phi_i(q,p) \approx 0 \quad , \; i = 1...M \qquad \text{(I-2.9a)}$$

$$\chi_\ell(q,p) \approx 0 \quad , \; \ell = 1...L \leq (M-M_1) \qquad \text{(I-2.9b)}$$

o posto M_1 de Φ deve ser tal que as $(M-M_1)$ equações

$$H_{(\ell)}{}^k(q,p) \; \{\phi_k, H_c\} \approx 0 \;\; , \; k=1...M \; ; \;\; \ell= 1...M-M_1 \qquad \text{(I-2.10)}$$

sejam identicamente satisfeitas.

Na região Σ, o sistema (I-2.1) tem como solução:

$$u^i \approx V^i(q,p)+h^i_{(m)}(q,p)v^m \;\; , \; i=1...M; \; m=1...M-M_1 \qquad \text{(I-2.11)}$$

onde $V^i(q,p)$ é uma solução particular de (I-2.1) e $h^i_{(m)}v^m$ é a solução geral de (I-2.4) nesta região. As funções v^m são arbitrárias e podem depender das velocidades generalizadas.

Devemos requerer que os L vínculos secundários $\chi_\ell(q,p) \approx 0$ sejam preservados no tempo, isto é, $\dot{\chi}_\ell(q,p) \approx 0$.

As equações de movimento (I-1.13) originam então, as L condições de consistência

$$\dot{\chi}_\ell \approx \{\chi_\ell, H_c + u^i\phi_i\} \approx 0 \qquad \text{(I-2.12)}$$

Usando a equação (I-2.11) estas condições podem ser escritas na forma:

$$\{\chi_\ell, H_c + V^i(q,p)\phi_i\} + \psi_{\ell m} v^m \approx 0 \qquad \text{(I-2.13)}$$

onde

$$\psi_{\ell m} = \{\chi_\ell, \phi_i\} h^i_{(m)} \quad ; \quad \ell=1\ldots L < M-M_1 \quad ; \ m=1\ldots M-M_1 ; \quad i=1\ldots M \qquad \text{(I-2.14)}$$

Como (I-2.11) é válida na região Σ, o sistema de equações lineares não-homogêneo (I-2.13), no qual as funções v^m são tratadas como incógnitas, deve ser resolvido nesta região.

A matriz $\psi = ||\psi_{\ell m}||$ é singular, como pode ser observado de (I-2.14). Suponhamos que o posto de ψ em Σ é $M_2' < M-M_1$. O sistema linear homogêneo associado com (I-2.13)

$$\psi_{\ell m} v^m \approx 0 \qquad \text{(I-2.15a)}$$

possui em Σ, $[M-(M_1+M_2')]$ soluções linearmente independentes, que denotaremos $g^m(n)(q,p)$, $m=1\ldots M-M_1$, $n=1\ldots[M-(M_1+M_2')]$, e o sistema linear homogêneo transposto

$$\psi_{\ell m} v^\ell \approx 0 \qquad \text{(I-2-15b)}$$

possui também em Σ $(L-M_2')$ soluções linearmente independentes que denotarmos $G^{\ell}_{(r)}$; $\ell = 1...L$; $r = 1...(L - M_2')$

A condição necessária e suficiente para que o sistema (I-2.13) seja compatível é:

$$G^{\ell}_{(r)}(q,p)\{\chi_{\ell}, H_c + V^i\phi_i\} \approx 0 \ . \qquad \text{(I-2.16)}$$

Se a equação acima for identicamente satisfeita sobre Σ, o procedimento para se obter vínculos secundários se encerra, e ficamos com o conjunto de vínculos dados por (I-2.9). A solução geral de (I-2.13) em Σ é

$$v^m = W^m(q,p) + g^m(n)(q,p)w^n(t) \qquad \text{(I-2.17)}$$

onde $W(q,p)$ é uma solução particular de (I-2.13) e $g^m{}_{(n)}w^n(t)$ é a solução geral de (I-2.15a). As funções $w^n(t)$ são $[M-(M_1+M_2')]$ funções arbitrárias do tempo.

Substituindo (I-2.17) em (I-2.11) obtem-se que na região Σ,

$$u^i \approx Y^i(q,p)+y^i_{(n)}(q,p)w^n(t), \quad i=1...M; \quad n=1... M-(M_1+M_2') \qquad \text{(I-2.18)}$$

onde

$$Y^i(q,p) = V^i(q,p) + h^i_{(m)}(q,p)W^m(q,p) \qquad \text{(I-2.19a)}$$

e

$$y^i_{(n)}(q,p) = h^i_{(m)}(q,p) \ g^m_{(n)}(q,p) \quad . \qquad \text{(I-2.19b)}$$

Se (I-2.16) não for identicamente satisfeita sobre Σ, existem novos vínculos secundários $\chi_s\ (q,p) \approx 0$, $s = 1 \ldots S \leq [(M-(M_1+M_2'))]$ que unidos com os vínculos dados por (I-2.9), passam a definir a região Σ_1, mais restrita que Σ. Devemos recalcular o posto de ψ na região Σ_1 e repetir o mesmo procedimento que fizemos para achar os vínculos secundários do processo de consistência dos ϕ_i.

Suponha que do processo de consistência dos $\chi_\ell(q,p) \approx 0$ tenhamos obtido K, $K < M-(M_1+M_2')$, vínculos secundários $\chi_k(q,p) \approx 0$. Então na região Δ, onde o posto de ψ é M_2, definida pelos vínculos

$$\phi_i(q,p) \approx 0 \quad , \quad i=1 \ldots M \tag{I-2.20a}$$

$$\chi_\ell(q,p) \approx 0 \quad , \quad \ell=1 \ldots L \tag{I-2.20b}$$

$$\chi_k(q,p) \approx 0 \quad , \quad k=1 \ldots K \tag{I-2.20c}$$

a condição (I-2.16) é identicamente satisfeita e a solução de (I-2.13) nesta região é:

$$v^m \approx W^m(q,p)+g^m{}_{(r)}(q,p)Z^r \; , \quad m=1 \ldots M-M_1 \quad , \quad r=1 \ldots M-(M_1+M_2) \tag{I-2.21}$$

onde $W^m(q,p)$ é uma solução particular de (I-2.13) e $g^m{}_{(r)}(q,p)Z^r$ é a solução geral de (I-2.15a) em Δ.

Substituindo (I-2.21) em (I-2.11), obtem-se que

$$u^i = Y'^i(q,p)+y'^i{}_{(r)}(q,p)Z^r \tag{I-2.22}$$

onde

$$Y'^{i}(q,p) = V^{i}(q,p) + h^{i}{}_{(m)}(q,p)W^{m}(q,p) \qquad \text{(I-2.23a)}$$

$$y'^{i}{}_{(r)}(q,p) = h^{i}{}_{(m)}(q,p)g^{m}{}_{(r)}(q,p) \qquad \text{(I-2.23b)}$$

Observemos que a expressão para u^i em (I-2.11) é válida tanto na região Σ como na região Δ. Como v^m em (I-2.21) é válida somente na região Δ, segue que (I-2.22) é valida nesta região.

Devemos requerer agora que os vínculos $\chi_k(q,p) \approx 0$ em (I-2.20c) sejam preservados no tempo, e se daí novos vínculos secundários forem obtidos, devemos requerer que estes sejam também preservados no tempo. Este processo de consistência deve ser continuado até que tenhamos obtido todos os vínculos do sistema. Podemos concluir, em vista das equações (I-2.7) e (I-2.8), que os multiplicadores de Lagrange u^i na sub-região do espaço de fase definida por todos os vínculos serão da forma

$$u^{i} \approx U^{i}(q,p) + C^{i}{}_{(k)}(q,p)v^{k}(t) \qquad \text{(I-2.24)}$$

onde os coeficientes $v^k(t)$ são funções arbitrárias do tempo.

A Hamiltoniana total do sistema, com (I-2.24), pode ser escrita como

$$H_T = H_C + U^i\phi_i + C^{i}{}_{(k)}\phi_i v^k(t) = H_o + \bar{\phi}_k v^k(t) \qquad \text{(I-2.25)}$$

onde

$$H_o = H_c + U^i \phi_i \qquad \text{(I-2.26)}$$

e

$$\bar{\phi}_k = C^i{}_{(k)} \phi_i \qquad \text{(I-2.27)}$$

CAPÍTULO II

GERADORES DE TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

II.1 - OBTENÇÃO DOS GERADORES

Em vista da distinção entre vínculos primários e secundários ser de pouca importância na forma final do esquema Hamiltoniano, denotaremos por $G_i \approx 0$, $i=1...m$, o conjunto de todos os vínculos do sistema e por Γ a subregião do espaço de fase definida por eles.

Uma outra classificação dos vínculos,ou mais geralmente, de funções definidas no espaço de fase, desempenha um papel mais importante. Tal classificação é a de funções de primeira e segunda classe. Uma função $F(q,p)$ é denominada de $1^{\underline{a}}$ classe se o seu colchete de Poisson com todos os vínculos se anulam sobre Γ, isto é;

$$\{F, G_i\} \approx 0 \quad , \quad i=1...m \qquad \text{(II-1.1)}$$

e $F(q,p)$ é de $2^{\underline{a}}$ classe se existe pelo menos um vínculo G_i tal que seu colchete de Poisson com F não se anula sobre Γ.

Uma propriedade importante desta classificação é que o colchete de Poisson de duas funções de $1^{\underline{a}}$ classe é uma função de $1^{\underline{a}}$ classe[1,4]. Para a demonstração desta propriedade deve ser levado em conta que uma função nula sobre Γ é fortemente igual a alguma combinação linear dos vínculos G_i.

Como uma primeira utilização destes conceitos, observemos que H_o e $\overline{\phi}_k$ definidos pelas equações (I-2.26) e (I-2.27), respectivamente, são funções de 1ª classe[1,4]. As funções $\overline{\phi}_k$ são obtidas através de combinações lineares dos vínculos primários ϕ_i de modo que são também vínculos primários.

Dado o conjunto inicial de variáveis canônicas (q_o, p_o) no instante t_o, o estado físico do sistema naquele instante fica definido. O que se espera é que as equações de movimento determinem o estado físico do sistema em instantes posteriores, mas o aparecimento de funções arbitrárias nas soluções das equações de movimento implica na existência de mais de um conjunto de variáveis canônicas correspondendo ao mesmo estado físico num dado tempo t.

Para cada escolha do conjunto das k funções arbitrárias, está associado em Γ uma curva extremal partindo do ponto (q_o, p_o). Suponhamos que é feita a escolha $u_1^k(t)$ para as funções arbitrárias $u^k(t)$. Se $F_o = F(q_o, p_o)$ é o valor de uma variavel dinâmica em $t = 0$, o valor de F num instante δt é obtido por uma transformação canônica infinitesimal gerada pela Hamiltoniana total

$$H_T = H_o + u_1^k(t)\ \overline{\phi}_k \qquad \text{(II-1.2)}$$

Então

$$F(\delta t) = F_o + \delta t\{F, H_T\} = F_o + \delta t\left[\{F, H_o\} + u_1^k(t)\{F, \overline{\phi}_k\}\right] \qquad \text{(II-1.3)}$$

Para uma outra escolha $u_2^k(t)$, o valor de F no instante δt é

$$F'(\delta t) = F_o + \delta t\left[\{F,H_o\} + u_2^k(t)\{F,\bar{\phi}_k\}\right] \qquad \text{(II-1.4)}$$

Subtraindo (II-1.3) de (II-1.4) tem-se que

$$\delta F(\delta t) = \delta t(u_1^k - u_2^k)\{F, \bar{\phi}_k\} = \varepsilon^k\{F,\bar{\phi}_k\} \qquad \text{(II-1.5)}$$

onde

$$\varepsilon^k = \delta t(u_1^k - u_2^k) \qquad \text{(II-1.6)}$$

Em particular para as variáveis canônicas, (II-1.5) reduz-se a

$$\delta q^i = \varepsilon^k\{q^i,\bar{\phi}_k\} \qquad \text{(II-1.7a)}$$

$$\delta p_i = \varepsilon^k\{p_i,\bar{\phi}_k\} \qquad \text{(II-1.7b)}$$

Estas equações nos mostram que os vínculos primários de 1ª classe $\bar{\phi}_k$ geram transformações que não alteram o estado físico do sistema. Na terminologia usada nas Teorias dos Campos de Gauge, diz-se que os vínculos primários de 1ª classe são geradores de transformações de gauge.

Pode-se mostrar[1,4] que $\{\bar{\phi}_k, \bar{\phi}_{k'}\}$ e $\{\bar{\phi}_k, H_o\}$ são também geradores de transformações de gauge. Como $\bar{\phi}_k$ são vínculos de 1ª classe e H_o é uma quantidade de 1ª classe, segue que $\{\bar{\phi}_k, \bar{\phi}_{k'}\}$ e $\{\bar{\phi}_k, H_o\}$ são quantidades nulas sobre Γ, de modo que podem ser expressas como combinações lineares dos vínculos G_i. Nestas combinações devem aparecer somente os vínculos G_i que são de 1ª classe, porque $\{\phi_k, \bar{\phi}_{k'}\}$ e $\{\bar{\phi}_k, H_o\}$, são quantidades de 1ª classe. No entanto, não há nenhuma razão para se esperar que tais combinações lineares contenham apenas os vínculos primários de 1ª classe. Destas considerações não parece ser possivel provar que qualquer vínculo secundário de 1ª classe é um gerador de transformações de gauge. Dirac[1] conjecturou que os vínculos secundários de 1ª classe são também geradores de transformações de gauge. Observemos no entanto que, em teorias invariantes por reparametrização $\zeta \to f(\zeta)$, os vínculos de 1ª classe associados com reparametrização não podem ser interpretados como geradores de transformações de gauge, mas sim como geradores de evolução dinâmica do sistema[4].

O movimento gerado pela Hamiltoniana total H_T admite apenas as transformações de gauge geradas pelos vínculos primários de 1ª classe. Para se obter o movimento mais geral fisicamente admissivel, devemos adicionar a H_T os vínculos secundários de 1ª classe $\bar{\phi}'_i$, multiplicados pelas funções arbitrárias $u'^i(t)$. A função de 1ª classe obtida desta maneira tem a forma

$$H_E = H_T + u'^i(t)\ \bar{\phi}'_i \qquad \text{(II-1.8)}$$

e é denominada Hamiltoniana estendida.

Consideremos os vínculos $G'_1, G'_2 \ldots G'_m$, obtidos do conjunto de vínculos G_1, $G_2 \ldots G_m$ por meio da transformação linear não singular

$$G'_i = A_{i\ell}\, G_\ell \quad , \quad i,\ell = 1 \ldots m \qquad \text{(II-1.9)}$$

Pode ser mostrado que se o posto da matriz $||\{G_i, G_j\}||$ em Γ é r, existirá em (II-1.9) m - r combinações lineares que são de 1ª classe. De fato, como o posto da matriz $||\{G_i, G_j\}||$ é r, ela tem r linhas que são linearmente independentes, e se estas são denotadas por m-r+1, m-r+2,...,m, as outras m-r linhas podem ser expressas na forma:

$$\{G_i, G_k\} \approx C_{i\ell}\{G_\ell, G_k\} \quad , \qquad \text{(II-1.10)}$$

$i=1 \ldots m-r; \quad k=1 \ldots m; \quad \ell=m-r+1; \quad m-r+2, \ldots, m$

Ao reescrevermos (II-1.10) na forma

$$\{G_i - C_{i\ell}G_\ell, G_k\} \approx 0 \qquad \text{(II-1.11)}$$

podemos notar que a quantidade

$$\overline{G}_i = G_i - C_{i\ell}\, G_\ell \qquad \text{(II-1.12)}$$

é de 1ª classe, e por ser nula sobre Γ , pode ser expressa como combinação linear dos vínculos $G_1, G_2 \ldots G_m$, ou melhor

$$\overline{G}_i = C'_{ik}\, G_k \qquad \text{(II-1.13)}$$

$i = 1 \ldots m-r; \quad k = 1 \ldots m$

Mostramos então, que em (II-1.9), as primeiras (m-r) combinações lineares são de 1ª classe se os coeficientes são es colhidos de acordo com (II-1.13). Os demais coeficientes em (II-1.9) podem ainda ser escolhidos de tal modo que fiquemos com o conjunto completo de vínculos independentes $\bar{G}_1, \bar{G}_2 \ldots \bar{G}_{m-r}, G_{m-r+1}, \ldots G_m$. Toda quantidade nula sobre Γ, será expressa como combinação linear destes vínculos. Se F é de 1ª classe e nula sobre Γ, pode-se verificar fácilmente que

$$F = a_i \bar{G}_i \quad , \qquad i=1 \ldots m-r \tag{II-1.14}$$

Como o colchete de Poisson de duas quantidades de 1ª classe é uma quantidade de 1ª classe, segue imediatamente que $\{\bar{G}_i, \bar{G}_j\}$ e $\{\bar{G}_i, H_o\}$ são de 1ª classe nulas sobre Γ e, de acordo com (II-1.14) podem ser expressas na forma

$$\{\bar{G}_i, \bar{G}_j\} = C^k_{ij}(q,p) \; \bar{G}_k \tag{II-1.15a}$$

$$\{\bar{G}_i, H_o\} = C^\ell_i(q,p) \; \bar{G}_\ell \tag{II-1.15b}$$

Estas equações, (II-1.15a) e (II-1.15b), nos garantem que o conjunto de todas as quantidades de 1ª classe, o qual será denotado por $\mathcal{G}$, é uma álgebra. Os vínculos de 1ª classe $G_1, \ldots G_{m-r}$ e H_o formam uma base para $\mathcal{G}$, de modo que uma quantidade não nula sobre Γ deve ser expressa como a soma de uma quantidade nula sobre Γ e a quantidade $\lambda(t) H_o$.

Os vínculos de 1ª classe (primários e secundários), como pode ser observado de sua definição, geram transformações infinitesimais que levam pontos de Γ em pontos de Γ. Como já sabemos que H_o gera este tipo de transformação, podemos dizer que os elementos de $\mathcal{G}$ são geradores de transformações infinitesimais que levam pontos de Γ em pontos de Γ. Quando os coeficientes $C^k_{ij}(q,p)$ e $C^\ell_i(q,p)$ nas equações (II-1.15) são constantes, $\mathcal{G}$ é uma álgebra de Lie, a qual está associado o grupo G das transformações infinitesimais de Γ em Γ.

Os elementos de $\mathcal{G}$ que gerarem uma mesma transformação serão considerados equivalentes. Vamos agora mostrar que a condição necessária e suficiente para que isto aconteça é que tais elementos e suas derivadas parciais em relação as variáveis canônicas sejam iguais sobre Γ. Suponhamos que f e g são dois elementos infinitesimais de $\mathcal{G}$. Então para uma variável dinâmica F(q,p) tem-se

$$\delta' F \approx \{F,f\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{II-1.16a}$$

$$\delta' F \approx \{F,g\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{II-1.16b}$$

Subtraindo (II-1.16a) de (II-1.16b) e requerendo que f e g gerem uma mesma transformação, nos leva a obter a seguinte equação

$$\{F,f-g\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) \approx 0 \tag{II-1.17}$$

donde conclui-se que

$$f \approx g \tag{II-1.18a}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial p^i} \approx \frac{\partial g}{\partial p^i} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial q^i} \approx \frac{\partial g}{\partial q^i} \qquad \text{(II-1.18b)}$$

Neste caso diz-se que f é fortemente igual a g. Admitindo que as equações acima são válidas, podemos ver imediatamente de (II-1.16a) e (II-1.16b) que f e g geram uma mesma transformação, isto é, $\delta' F = \delta'' F$.

Vamos denotar por

$$\eta(t, \eta_o, [u]) \equiv \begin{bmatrix} q^1 & (t) \\ \vdots & \\ q^N & (t) \\ p_1 & (t) \\ \vdots & \\ p_N & (t) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-1.19)}$$

o estado físico do sistema no tempo t, que evoluiu de um estado inicial

$$\eta_o \equiv \begin{bmatrix} q^1 & (t_o) \\ \vdots & \\ q^N & (t_o) \\ p_1 & (t_o) \\ \vdots & \\ p_N & (t_o) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-1.20)}$$

no tempo t_o. Introduzimos $[u]$ em $\eta(t, {}_o, [u])$ para indicar que o valor das coordenadas e momentos depende da escolha das funções arbitrárias.

Suponhamos que é feita uma certa escolha $[u]$ para o conjunto das funções arbitrárias em (I-2.24). Temos então que $\eta(t,\eta_o,[u])$ satisfaz a equação de movimento

$$\frac{d}{dt}\eta(t,\eta_o,[u]) = \{\eta,H_T[u]\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])} =$$

$$= \{\eta,H_o+ u^i\,\bar{\phi}_i\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])} \qquad \text{(II-1.21)}$$

onde assumimos que a evolução do sistema é gerada pela Hamiltoniana total definida em (I-2.25). A solução de (II-1.21) num certo tempo t pode ser obtida a partir de η_o por aplicação de sucessivas transformações canônicas infinitesimais geradas pela Hamiltoniana $H_T[u]$. Como $H_T[u]$ não tem dependência explícita no tempo, este conjunto de transformações constitui um subgrupo uni-paramétrico de G descrito por $\eta(t,\eta_o,[u])$. Consideremos agora a solução da equação de movimento para a escolha $[\bar{u}] = [u + \delta u]$ das funções arbitrárias

$$\frac{d}{dt}\eta(t,\eta_o,[u+\delta u]) = \{\eta,H_T[u+\delta u]\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u+\delta u])}$$

$$= \{\eta,H_T[u] + \delta u^i\,\bar{\phi}_i\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u+\delta u])} \qquad \text{(II-1.22)}$$

onde $\eta(t,\eta_o,[u+\delta u])$ descreve outro subgrupo uni-paramétrico de G. Para um mesmo valor de t, deve-se ter

$$\eta(t,\eta_o,[u+\delta u]) = \eta(t,\eta_o,[u]) + \{\eta,\Sigma_t\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])} \qquad \text{(II-1.23)}$$

onde $\quad \Sigma_t = \beta(t)H_o + \alpha_i(q,p,t)\overline{G}_i$ (II-1.24)

é um elemento infinitesimal da algebra definida por (II-1.15a) e (II-1.15b). O coeficiente β só deve depender do tempo, porque H_o é o gerador da evolução dinâmica do sistema.

Denotemos por C e C', respectivamente, as trajetórias no espaço de fase associadas com as soluções das equações de movimento (II-1.21) e (II-1.22), que partem do mesmo estado inicial. Nestas condições C e C' são fisicamente equivalentes e devem, portanto, se relacionar por uma transformação de gauge como em (II-1.23). Vamos procurar as condições que os coeficientes β e α_i devem satisfazer para que, num dado tempo t, Σ_t dado por (II-1.24) seja o gerador desta transformação. Observemos que as condições iniciais não devem ser afetadas pela transformação.

Devemos requerer então que

$$\overline{\eta} \equiv \eta(t,\eta_o,[u+\delta u]) = \eta(t,\eta_o,[u]) + \{\eta,\beta H_o+\alpha_i\overline{G}_i\}\Big|_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])} \quad \text{(II-1.25)}$$

sob as condições

$$\beta(t_o) = 0 \quad \text{(II-1.26a)}$$

$$\alpha_i(q,p,t_o) = 0 \quad \text{(II-1.26b)}$$

seja solução da equação (II-1.22). Calculando a derivada temporal total em ambos os lados da equação (II-1.25) obtem-se que

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \Big(\{\eta,H_T[u]\} - \{\{\beta H_o+\alpha_i\bar{G}_i\},H_T[u]\} -$$

$$-\{\{H_T[u],\ \eta\},\ \beta H_o+\alpha_i\bar{G}_i\} + \{\eta,\frac{d\beta}{dt}\ H_o+\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\ \bar{G}_i\}\Big)_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])}$$

(II-1.27)

Usando a identidade de Jacobi e as demais propriedades dos colchetes de Poisson dadas pelas equações (I-1.10a - I-1.10d), a (II-1.27) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \Big(\{\eta,H_T[u]\}+ \{\{\eta,H_T[u]\},\beta H_o+\alpha_i\bar{G}_i\}\Big)_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])}$$

$$+ \Big(\{\eta,\ \frac{d\beta}{dt}\ \ H_o+\ \{\beta H_o,H_T[u]\}+\frac{d\alpha_i}{dt}\ \bar{G}_i+\ \alpha_i\ \{\bar{G}_i,H_T[u]\}\Big)_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])}$$

(II-1.28)

Observando que o 1º termo entre parenteses na equação acima é o valor de $\{\eta,H_T[u]\}$ calculado sobre a trajetória cujo valor das funções arbitrárias é $[u + \delta u]$, e fazendo $\eta \to \bar{\eta}$ no segundo termo, com um erro infinitesimal de ordem superior, tem-se finalmente que

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \Big(\{\eta,H_T[u]\ +\frac{d\beta}{dt}\ H_o+\ \{\beta H_o,\ H_T[u]\}+\ \frac{d\alpha_i}{dt}\ \bar{G}_i+\alpha_i\{\bar{G}_i,H_T[u]\}\Big)_{\eta=\bar{\eta}}$$

(II-1.29)

De (II-1.29) obtemos que a condição para $\bar{\eta}$ em (II-1.25) ser solução da equação de movimento (II-1.22) é que

$$\frac{d\beta}{dt} H_o + \{\beta H_o, H_T[u]\} + \frac{d\alpha_i}{dt} \bar{G}_i + \alpha_i\{\bar{G}_i, H_T[u]\}$$

seja expresso como uma combinação linear dos $\bar{\phi}_i$, isto é:

$$\frac{d\beta}{dt} H_o + \{\beta H_o, H_T[u]\} + \frac{d\alpha_i}{dt} \bar{G}_i + \alpha_i\{\bar{G}_i, H_T[u]\} = \delta u^i \bar{\phi}_i \tag{II-1.30}$$

Observemos que em (II-1.30) $\bar{\phi}_i$ são vínculos primários de 1ª classe e $\bar{G}_i$ são vínculos de 1ª classe primários ou secundários.

Como H_o e os vínculos primários de 1ª classe $\bar{\phi}_i$ são quantidades linearmente independentes segue de (II-1.30) e (II-1.26a) que

$$\beta(t) = 0 \tag{II-1.31}$$

Então o gerador de transformação de gauge é da forma

$$\Sigma_t = \alpha_i \bar{G}_i \tag{II-1.32}$$

onde as funções α_i são tais que

$$\frac{d\alpha_i}{dt} \bar{G}_i + \alpha_i\{\bar{G}_i, H_T[u]\} = \delta u^i \bar{\phi}_i \tag{II-1.33}$$

Afim de facilitar os cálculos os vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, ... $\bar{G}_{m-r}$ definidos em (II-1.13) serão escolhidos de tal modo que alguns destes sejam os próprios $\bar{\phi}_i$. Neste caso podemos distinguir os primários dos secundários de $1^{\underline{a}}$ classe, os quais serão denotados por ψ_k. Com esta separação entre os vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe, o gerador de transformação de gauge, equação (II-1.32), se escreve:

$$\Sigma_t = \omega_k \psi_k + \varepsilon_i \bar{\phi}_i \qquad \text{(II-1.34)}$$

e de acordo com (II-1.33) os coeficientes ω_k e ε_i devem satisfazer a equação

$$\frac{d\omega_k}{dt} \psi_k + \frac{d_i}{dt} \bar{\phi}_i + \omega_k \{\psi_k, H_T[u]\} + \varepsilon_i \{\bar{\phi}_i, H_T[u]\} = \delta u^i \bar{\phi}_i$$

(II-1.35a)

Esta expressão pode ainda ser escrita como

$$\frac{d\omega_k}{dt} \psi_k + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \bar{\phi}_i + \omega_k \{\psi_k, H_o\} + \omega_k u^i \{\psi_k, \bar{\phi}_i\} + \varepsilon_i \{\bar{\phi}_i, H_o\}$$

$$+ \varepsilon_i u^k \{\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_k\} = \delta u^i \bar{\phi}_i$$

(II-1.35b)

As quantidades $\{\psi_k, H_o\}$ e $\{\bar{\phi}_i, H_o\}$, pelas condições de consistência, são vínculos secundários e portanto podem ser expressas como

$$\{\psi_k, H_o\} = A'_{k\ell} \psi_\ell \qquad \text{(II-1.36a)}$$

$$\{\bar{\phi}_i, H_o\} = B'_{i\ell} \psi_\ell \qquad \text{(II-1.36b)}$$

Usando as equações (II-1.36) e o fato que $\{\Phi_i,\Phi_i\}$ é escrito como uma combinação linear dos vínculos Φ_i, a equação (II-1.35b) pode ser colocada na forma

$$\frac{d\omega_k}{dt}\psi_k + \omega_k A'_{k\ell}\psi_\ell + \varepsilon_i B'_{i\ell}\psi_\ell + \omega_k u^i\{\psi_k,\Phi_i\} =$$

$$\text{(Combinação Linear dos } \Phi_i\text{)}.$$

$$\text{(II-1.37)}$$

Se na expressão acima o termo $\{\psi_k,\Phi_i\}$ contiver alguma combinação linear dos vínculos secundários ψ_k, ω_ℓ dependerá das funções arbitrárias u^k. Neste caso o gerador Σ_t não transforma todas as trajetórias admissíveis em trajetórias admissíveis ao sistema. Nós desprezaremos este termo, porque nos casos de interesse ele é fortemente nulo.

Agora como os vínculos ψ_ℓ são independentes dos vínculos Φ_i, ou melhor, como nenhuma combinação linear dos vínculos secundários pode resultar em um vínculo primário, segue da equação (II-1.37) que o gerador Σ_t é da forma

$$\Sigma_t = \omega_\ell\psi_\ell + \varepsilon_i\Phi_i \qquad \text{(II-1.34)}$$

onde ω_ℓ e ε_i satisfazem as equações

$$\frac{d\omega_\ell}{dt} + \omega_k A'_{k\ell} + \varepsilon_i B'_{i\ell} = 0$$

$$\text{(II-1.38)}$$

Observe que se tivéssemos assumido em (II-1.21) e (II-1.22) que a evolução dinâmica do sistema fosse gerada pela hamiltoniana estendida, não seria possível obter as equações da forma como dadas em (II-1.35).

II-2 - APLICAÇÃO: CÁLCULO DO GERADOR DE TRANSFORMAÇÃO DE GAUGE PARA A INTERAÇÃO DO CAMPO ESCALAR COM O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Usaremos a seguinte convenção para a matriz associada ao tensor métrico do espaço-tempo

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(II-2.1)}$$

e denotaremos por $x = \{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, as coordenadas de pontos do espaço-tempo. Um ponto sobre qualquer quantidade denotará a derivada desta com relação a x^o.

A densidade lagrangeana associada com o sistema é:

$$L = [D^\mu\phi]^*[D_\mu\phi] - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{(II-2.2)}$$

onde

$$[D_\mu\phi]^* = \partial_\mu\phi^* - ieA_\mu\phi^* = \partial_\mu\phi^* + qA_\mu\phi^* \qquad \text{(II-2.3a)}$$

$$[D_\mu\phi] = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi = \partial_\mu\phi - qA_\mu\phi \tag{II-2.3b}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{II-2.3c}$$

Os momentos canonicamente conjugados as coordenadas A_μ , ϕ e ϕ^* são definidos por

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{o\mu} \tag{II-2.4a}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* + qA_o\phi^* \tag{II-2.4b}$$

$$\pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} - qA_o\phi \tag{II-2.4c}$$

Os colchetes de Poisson entre as variáveis canônicas são definidos por

$$\{A_\mu(x),\ \pi^\nu(x')\} = \delta_\mu^\nu\ \delta(x-x') \tag{II-2.5a}$$

$$\{\phi(x)\ ,\ \pi(x')\} = \delta(x-x') \tag{II-2.5b}$$

$$\{\phi^*(x),\ \pi^*(x')\} = \delta(x-x') \tag{II-2.5c}$$

A componente zero do momento canânico π_μ é nula como consequência apenas da definição dos momentos, de modo que é um vínculo primário e, por isto, deve ser escrita como uma equação fraca.

$$\phi_1 = \pi_o \approx 0 \tag{II-2.6}$$

A Hamiltoniana canônica do sistema se escreve

$$H_C = \int d^3x' (\pi_\mu \dot{A}^\mu + \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - L) =$$

$$L = \int d^3x' [\pi^*\pi + qA_0(\phi\pi - \phi^*\pi^*) - \partial_i\phi^* \partial^i\phi +$$

$$+ qA_i(\phi\partial^i\phi^* - \phi^*\partial^i\phi) + q^2A^iA_i\phi\phi^* +$$

$$+ m^2 \phi\phi^* + \frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} - A_0\partial_i\pi^i] \qquad \text{(II-2.7)}$$

observe que na expressão acima desprezamos a integral de superficie

$$\int ds_i (A_0\pi^i) \qquad \text{(II-2.8)}$$

A Hamiltoniana total do sistema tem a forma

$$H_T = H_C + \int u(x')\pi_0(x')d^3x' \qquad \text{(II-2.9)}$$

Condição de consistencia para o vínculo primário: $\dot{\phi} \approx 0$. Então

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1(x), H_T\} = q(\phi^*\pi^* - \phi\pi) + \partial_i\pi^i \approx 0 \qquad \text{(II-2.10)}$$

donde se obtém o vínculo secundário

$$\phi_2 = q(\phi^*\pi^* - \phi\pi) + \partial_i\pi^i \approx 0 \qquad \text{(II-2.11)}$$

Condição de consistência para o vínculo secundário

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\} = 0 \tag{II-2.12}$$

Desta expressão vemos que o processo de consistência se encerra. Os únicos vínculos do sistema ϕ_1 e ϕ_2, são de 1ª classe pois

$$\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \tag{II-2.13}$$

A Hamiltoniana estendida do sistema é

$$H_E = H_c + \int d^3x' \{u(x')\pi_o(x') + v(x') \left[q(\phi^*\pi^* - \phi\pi) + \partial_i \pi^i\right]\} \tag{II-2.14}$$

Vamos agora construir o gerador de transformação de gauge dado por (II-1.34). Para um sistema com somente um vínculo primário e um vínculo secundário de 1ª classe, tem-se pelas equações (II-1.34), (II-1.36a-b) e (II-1.38) que o gerador de transformação de gauge adaptado a teoria de campo deverá ter a forma

$$\Sigma_t = \int d^3x \ (w\psi + \varepsilon\overline{\phi}) \tag{II-2.15}$$

onde ε e w são tais que

$$\frac{\partial w}{\partial x^o} + wA' + \varepsilon B' = 0 \tag{II-2.16}$$

e os coeficientes A' e B' são obtidos das relações

$$\{\psi,\ H_o\} = A'\psi \qquad \text{(II-2.17a)}$$

$$\{\bar{\phi},\ H_o\} = B'\psi \qquad \text{(II-2.17b)}$$

Como os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são de 1ª classe, podemos escolher os coeficientes da transformação linear de tal modo que

$$\bar{\phi} \equiv \phi_1 = \pi_o \approx 0 \qquad \text{(II-2.18a)}$$

$$\psi \equiv \phi_2 = \partial_i\ \pi^i \approx 0 \qquad \text{(II-2.18b)}$$

Então tem-se que

$$\{\psi,\ H_o\} = \{q(\phi^*\pi^*-\phi\pi)+\partial_i\pi^i, H_o\} = 0 \qquad \text{(II-2.19a)}$$

$$\{\bar{\phi},\ H_o\} = \{\pi_o, H_o\} = q(\phi^*\pi^*-\phi\pi)+\partial_i\pi^i = \psi \qquad \text{(II-2.19b)}$$

Comparando as equações acima com as equações (II-2.17a-b), obtem-se que

$$A' = 0 \qquad \text{e} \qquad B' = 1 \qquad \text{(II-2.20)}$$

e com isso, a equação (II-2.16) se reduz a

$$\dot{w} = -\ \varepsilon \qquad \text{(II-2.21)}$$

Usando na expressão para Σ_t o resultado dado pela equação (II-2.21), encontra-se que

$$\Sigma_t = \int d^3x\{w[q(\phi^*\pi^* - \phi\pi) + \partial_i\pi^i] - \dot{w}\pi_o\} =$$

$$= \int d^3x[-\pi_\alpha\partial^\alpha w + qw(\phi^*\pi^* - \phi\pi)] + \int d^3x\ \partial_i(\pi^i w)$$

(II-2.22)

As transformações geradas por Σ_t são

$$\delta A^\mu(x) = -\partial^\mu w(x) \qquad \text{(II-2.23a)}$$

$$\delta\pi^\mu(x) = 0 \qquad \text{(II-2.23b)}$$

$$\delta\phi(x) = -qw(x)\phi(x) \qquad \text{(II-2.23c)}$$

$$\delta\phi^*(x) = qw(x)\phi^*(x) \qquad \text{(II-2.23d)}$$

$$\delta\pi(x) = qw(x)\pi(x) \qquad \text{(II-2.23e)}$$

$$\delta\pi^*(x) = -qw(x)\pi^*(x) \qquad \text{(II-2.23f)}$$

Como pode-se verificar, o último termo da equação (II-2.22) não contribui para gerar nenhuma transformação de gauge sob qualquer variável dinâmica. Em vista disto podemos tomar o gerador de transformação de gauge da teoria como sendo

$$\Sigma_t = \int d^3x[-\pi_\alpha\partial^\alpha w + qw(\phi^*\pi^* - \phi\pi)]$$

(II-2.24)

<u>UMA NOTA SOBRE A CONJECTURA DE DIRAC</u>:

Não parece ser possível provar que qualquer vínculo secundário de primeira classe é um gerador de transformação de gauge . Dirac conjecturou que estes vínculos são geradores de transformaçãoo de gauge. Existem várias razões para isto. Primeiro, a distinção entre vínculos primários e secundários sendo baseada na lagrangeana, não é natural do ponto de vista hamiltoniano. Por outro lado a classificação em primeira e segunda classe é baseada apenas na estrutura fundamental da teoria hamiltoniana, o colchete de Poisson. Segundo, o esquema é consistente no sentido de que: (i) as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe preservam todos os vínculos (de primeira e segunda classe) e portanto transformam um estado permitido do sistema em outro estado permitido e (ii) o colchete de Poisson de dois geradores de transformação de gauge é também um gerador de transformação de gauge.

Tratando-se todos os vínculos de primeira classe como geradores de transformação de gauge pode-se assegurar que o sistema em consideração tem um número par de coordenadas canônicas independentes, cada par conjugado (q^i, p_i) correspondendo a um grau de liberdade[4]. Existem na literatura alguns trabalhos que lançam dúvida sobre a conjectura de Dirac, como exemplos citamos os artigos dados nas referências 5 e 6.

Observemos que na construção do gerador de transformação de gauge Σ_t este foi efetivamente expresso como uma combinação linear de todos os vínculos de 1ª classe . No entanto ao longo dos desenvolvimentos verificamos que os coeficientes desta combinação são relacionados pela equação diferencial (II-1.38). Observemos também que o uso da hamiltoniana total para descrever a dinâmica do sistema não impõe nenhuma restrição sobre Σ_t.

CAPÍTULO III

TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE NA MECÂNICA CLÁSSICA

III-1 - OS COLCHETES DE DIRAC

Os vínculos de 2ª classe não podem ser interpretados como geradores de transformação de gauge ou, de modo geral, de nenhuma transformação com significado físico. A razão é que, por definição, a transformação gerada por um vínculo de 2ª classe χ não preserva os vínculos e,portanto,não define uma aplicação entre estados permitidos ao sistema.Os vínculos de 2ª classe devem então ser eliminados da teoria e isto é feito através dos colchetes de Dirac[1] definidos por:

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} + \{F,\chi_\alpha\}\ C^{\alpha\beta}\ \{G,\chi_\beta\} \qquad \text{(III-1.1)}$$

onde a matriz $||\ C^{\alpha\beta}||$ é a inversa da matriz formada pelos colchetes de Poisson dos vínculos de 2ª classe. O fato desta matriz ser não singular nos mostra que o número de vínculos de 2ª classe de uma teoria é sempre par.

Os colchetes de Dirac satisfazem as propriedades usuais dos colchetes de Poisson enumeradas nas equações (I-1.10a-d) e mais as seguintes:

$$\{\chi_\alpha, F\}^* = 0 \quad , \quad \chi_\alpha \text{ de } 2^{\underline{a}} \text{ classe}, \ F \text{ arbitrária} \qquad \text{(III-1.2a)}$$

$$\{F,G\}^* \approx \{F,G\} \quad , \quad G \text{ de } 1^{\underline{a}} \text{ classe}, \ F \text{ arbitrária} \qquad \text{(III-1.2b)}$$

Estas propriedades seguem diretamente da definição dos colchetes de Dirac e da definição de quantidades de $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ classe. A equação (III-1.2a) nos mostra que os vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe podem ser feitos iguais a zero antes ou depois de se calcular os colchetes de Dirac. Como a Hamiltoniana estendida H_E é de $1^{\underline{a}}$ classe, tem-se que

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}^* \qquad \text{(III-1.3)}$$

para qualquer F. Em particular, o efeito de uma transformação de gauge pode também ser calculado usando-se os colchetes de Dirac.

A situação geral neste estágio é a seguinte: o colchete de Poisson é abandonado depois de ter servido ao objetivo de distinguir entre vínculos de $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ classe. Todas as equações da teoria são formuladas em termos dos colchetes de Dirac, e os vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe se tornam meras identidades expressando algumas variáveis canônicas em termos das outras, isto é, se tornam equações fortes. Em casos simples os vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe podem ser usados para eliminar inteiramente algumas variáveis canônicas do formalismo. Quando isto é feito, o colchete de Dirac se reduz ao colchete de Poisson nas variáveis restantes. Em casos complicados a eliminação de graus de liberdade pode ser uma tarefa difícil. Nestes casos é conveniente trabalhar com todos os graus de liberdade e usar os colchetes de Dirac.

III.2 - FIXAÇÃO DO GAUGE

Como já vimos a presença dos vínculos de 1ª classe e a liberdade de gauge associada a eles indica que existe mais de um conjunto de variáveis canônicas correspondentes a um dado estado físico. Esta ambiguidade pode ser eliminada impondo-se condições suplementares sobre as variáveis canônicas, denominadas de condições de gauge. Estas condições devem estabelecer uma correspondência um-a-um entre os estados físicos e os conjunto de valores daquelas variáveis canônicas que ficam independentes. A introdução das condições de gauge é permitida porque elas apenas removem os elementos arbitrários não observáveis da teoria e não afetam as propriedades observáveis.

Um conjunto satisfatório de condições de gauge

$$C_a(q,p) \approx 0 \qquad \text{(III-2.1)}$$

deve satisfazer os seguintes critérios:

(a) As condições (III-2.1) devem remover a liberdade de gauge da teoria no sentido que, uma vez impostas condições sobre um dado conjunto de variáveis canônicas, nenhum outro conjunto de variáveis canônicas obtido deste por uma transformação de gauge deve obedecer a tal condição. Em outras palavras, não deve existir nenhuma transformação de gauge a não ser a transformação identidade. Isto significa que as equações

$$\delta u^a \{C_b, \overline{G}_a\} \approx 0 \qquad \text{(III-2.2)}$$

devem implicar em

$$\delta u^a = 0 \quad , \qquad \text{(III-2.3)}$$

mas isto é possível somente se

$$\det ||\{C_b, \overline{G}_a\}|| \not\approx 0 \qquad \text{(III-2.4)}$$

o que nos mostra que o número de condições de gauge é igual ao número de vínculos de 1ª classe $\overline{G}_a$.

(b) Feita a escolha do conjunto das condições de gauge (III-2.1) deve-se garantir que estas possam ser atingidas. Em outras palavras, supondo que um dado conjunto de variáveis canônicas não satisfaz às condições (III-2.1) deve existir uma transformação de gauge que leve para um outro conjunto de variáveis canônicas que as satisfaz.

(c) Uma outra condição a ser satisfeita por (III-2.1) é que ela seja mantida durante a evolução dinâmica do sistema. Dizemos que uma condição de gauge é mantida se, sendo válida no instante inicial, as equações de movimento e as condições iniciais garantem que ela é válida em todos os instantes subsequentes.

Consideremos agora o conjunto formado pelos vínculos de 1ª classe $\overline{G}_a$, pelos vínculos de 2ª classe χ_α, e pelas condições de gauge C_a. A matriz formada pelos colchetes de Poisson de tais quantidades tem determinante (em blocos)

$$\begin{vmatrix} \{\chi,\ \chi\} & \{\chi,\ \overline{G}\} & \{\chi,\ C\} \\ \{\overline{G},\ \chi\} & \{G,\ \overline{G}\} & \{\overline{G},\ C\} \\ \{C,\ \chi\} & \{C,\ \overline{G}\} & \{C,\ C\} \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} \{\chi\ \ \chi\} & 0 & \{\chi,\ C\} \\ 0 & 0 & \{\chi,\ C\} \\ \{C,\ \chi\} & \{C,\ \overline{G}\} & \{C,\ C\} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \|\{\chi,\ \chi\}\| . \quad (\det \|\{\overline{G},\ C\}\|)^2 \qquad \text{(III-2.5)}$$

que é fracamente diferente de zero. Isto nos mostra que o conjunto de vínculos χ_α, C_b, $\overline{G}_a$ é de 2ª classe.

É perfeitamente razoável que fiquemos apenas com vínculos de 2ª classe após introduzirmos um conjunto completo de condições de gauge, porque se algum vínculo de 1ª classe permanecesse na teoria, ainda teríamos uma liberdade de gauge associada com aquele vínculo. Depois de impostas as condições de gauge podemos usar os colchetes de Dirac e teremos então uma teoria efetivamente livre de vínculos, no sentido de que todos os vínculos podem ser tratados como identidades que expressam algumas variáveis dinâmicas em termos de outras.

III.3 - FIXAÇÃO INCOMPLETA DO GAUGE NA MECÂNICA CLÁSSICA

Consideremos um sistema físico com Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\,(\dot{x}y + x\dot{y})^2 - \frac{1}{2}\,x^2y^2 \tag{III-3.1}$$

Os momentos canônicos são:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}y + x\dot{y})y \tag{III-3.1a}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}y + x\dot{y})x \tag{III-3.1b}$$

A matriz hessiana

$$W = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \tag{III-3.2}$$

é singular. Olhando-se para (III-3.1) vê-se que a presença das coordenadas x e y é um tanto artificial. Na verdade o sistema possui um grau de liberdade e tem-se duas coordenadas. Fazendo-se $z = xy$ a Lagrangeana (III-3.1) se transforma em

$$L = \frac{1}{2}\,\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\,z^2 \tag{III-3.3}$$

Isto nos mostra que existem mais coordenadas que graus de liberdade.

As equações (III-3.1a) e (III-31b) quando escritas na forma

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-3.4)}$$

nos mostra que W é a matriz associada com a transformação $p = p(\dot{x},\dot{y})$.

Multiplicando (III-3.4) por

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-3.5)}$$

obtem-se

$$\begin{pmatrix} xp_x - yp_y \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-3.6)}$$

Não se consegue, como podemos ver pela equação a cima, eliminar $\dot{x}$ e $\dot{y}$ em termos das coordenadas e momentos. Portanto, para este sistema não é possivel escrever a hamiltoniana canônica,

$$H_c = \dot{x}p_x - \dot{y}p_y - L \qquad \text{(III-3.7)}$$

Observemos no entanto que este fato não nos impede de analisar a liberdade de gauge associada com os vínculos de primeira classe do sistema e os critérios para fixação do gauge. A quantidade

$$\Phi(q,p) = xp_x - yp_y \approx 0 \qquad \text{(III-3.8)}$$

é um vínculo, e por ser o único que o sistema pode ter, é de 1ª classe.

A transformação gauge infinitesimal gerada por ϕ sobre uma variável dinâmica $F(q,p)$ é

$$\delta F = \beta\{F, xp_x - yp_y\} \qquad \text{(III-3.9)}$$

Em particular para variáveis canônicas tem-se

$$x' = x + \beta\{x, xp_x - yp_y\} = x(1+\beta) \qquad \text{(III-3.10a)}$$
$$y' = y + \beta\{y, xp_x - yp_y\} = y(1-\beta) \qquad \text{(III-3.10b)}$$
$$p_x' = p_x + \beta\{p_x, xp_x - yp_y\} = p_x(1-\beta) \qquad \text{(III-3.10c)}$$
$$p_y' = p_y + \beta\{p_y, xp_x - yp_y\} = p_y(1+\beta) \qquad \text{(III-3.10d)}$$

que são as versões infinitesimais das transformações

$$x' = x\, e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.11a)}$$
$$y' = y\, e^{-\beta(t)} \qquad \text{(III-3.11b)}$$
$$p_x' = p_x\, e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.11c)}$$
$$p_y' = p_y\, e^{-\beta(t)} \qquad \text{(III-3.11d)}$$

Afim de remover a liberdade de gauge do sistema, a seguir apresentaremos vários exemplos de escolha de condição de gauge

a) $$\psi = |x| - 1 = 0 \qquad \text{(III-3.12)}$$

i) Esta condição remove toda a liberdade de gauge do sistema. De fato, se considerarmos um ponto do espaço de fase cuja coordenada x satisfaz (III-3.12), um ponto de coordenada x' obtido deste por uma transformação de gauge

$$x' = x\, e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.13)}$$

satisfará (III-3.12) se

$$|e^{\beta(t)} x| - 1 = 0 \qquad \text{(III-3.14)}$$

mas isto só é possível se $\beta(t) = 0$, o que corresponde a transformação identidade. Assim vemos que não existe nenhuma transformação de gauge para algum ponto com coordenada x' de tal modo que a condição de gauge seja satisfeita.

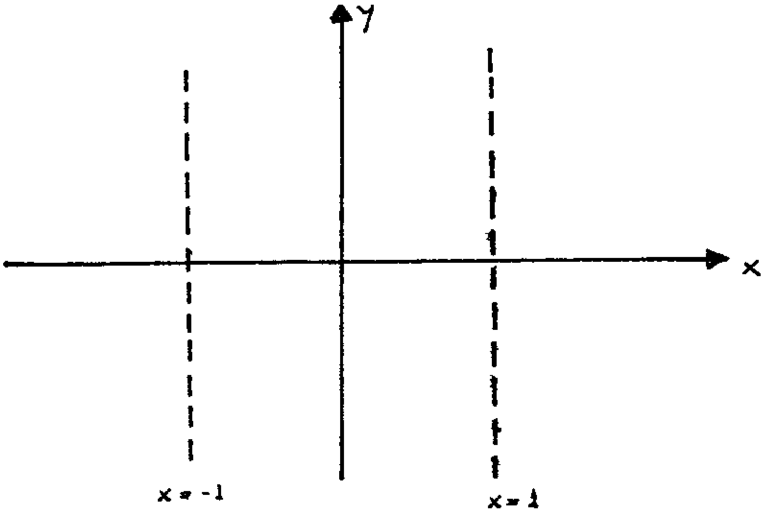
ii) Esta condição é atingível, porque dado x não satisfazendo (III-3.12), encontra-se por uma transformação de gauge um x' tal que

$$|x'| - 1 = 0 \qquad \text{(III-3.15)}$$

Para que isto aconteça, o parâmetro da transformação deve ser

$$\beta = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \qquad \text{(III-3.16)}$$

A condição (III-3.12) define no espaço de fase duas superficies: $x(t) = 1$ e $x(t) = -1$



Os pontos com $x \geqslant 0$ que não satisfazem (III-3.12) são transformados para $x(t) = 1$ e os pontos com $x < 0$ são transformados para $x(t) = -1$. O movimento do sistema com toda liberdade de gauge removida ocorrerá na subregião do espaço de fase definida por

$$\phi = xp_x - yp_y = 0 \qquad \text{(III-3.17a)}$$

$$\psi = |x| - 1 = 0 \qquad \text{(III-3.17b)}$$

Note que com a introdução da condição de gauge, o vínculo ϕ se tornou de 2ª classe.

b) $$\Psi = x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(III-3.18)}$$

i) Esta condição também remove toda a liberdade de gauge do sistema: se as coordenadas (x,y) de um ponto satisfazem (III-3.18) não é possível encontrar uma transformação de gauge

$$x' = x\, e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.19a)}$$

$$y' = y\, e^{-\beta(t)} \qquad \text{(III-3.19b)}$$

com parâmetro $\beta \neq 0$, de tal modo que

$$x'^2 - y'^2 = 0 \qquad \text{(III-3.20)}$$

seja satisfeita.

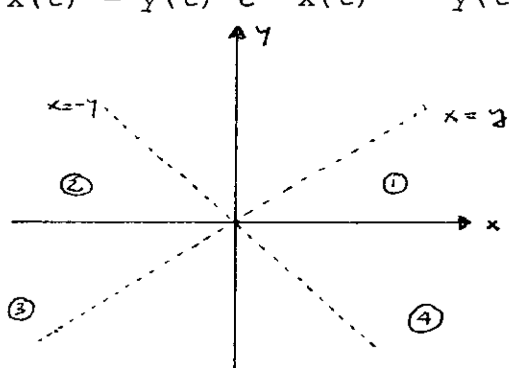
ii) Esta condição é atingível: dado um ponto com (x,y) que não satisfaz (III-3.18), é possível encontrar (x', y') obtido por uma transformação de gauge, tal que

$$x'^2 - y'^2 = 0 \qquad \text{(III-3.21)}$$

O parâmetro para esta transformação é

$$\beta(t) = \frac{1}{4}\, \ell n\, \frac{y^2}{x^2} \qquad \text{(III-3.22)}$$

A condição (III-3.18) define no espaço de fase as superficies: x(t) = y(t) e x(t) = -y(t)



Os pontos com coordenadas (x,y) que não satisfazem (III-3.18) situados na região 1 e 3 são transformados por uma transformação de gauge para a superfície $x(t) = y(t)$, e os pontos com (x,y) situados nas regiões 2 e 4 são transformados para $x(t) = - y(t)$.

O movimento do sistema sem nenhuma liberdade de gauge ocorrerá na subregião do espaço da fase definida pelas superfícies

$$xp_x - yp_y = 0 \tag{III-3.23a}$$

e

$$x(t) - y(t) = 0 \tag{III-3.23b}$$

se $xy > 0$ e na subregião definida por

$$xp_x - yp_y = 0 \tag{III-3.23c}$$

e

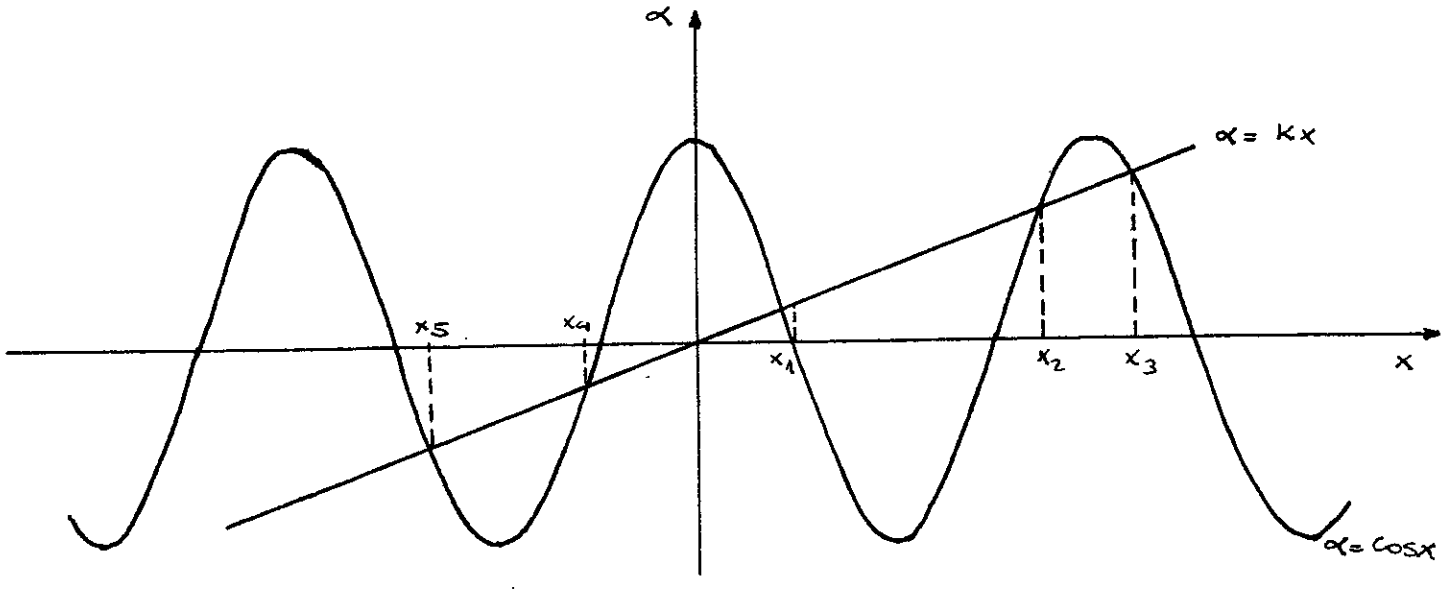
$$x(t) + y(t) = 0 \tag{III-3.23d}$$

se $xy < 0$.

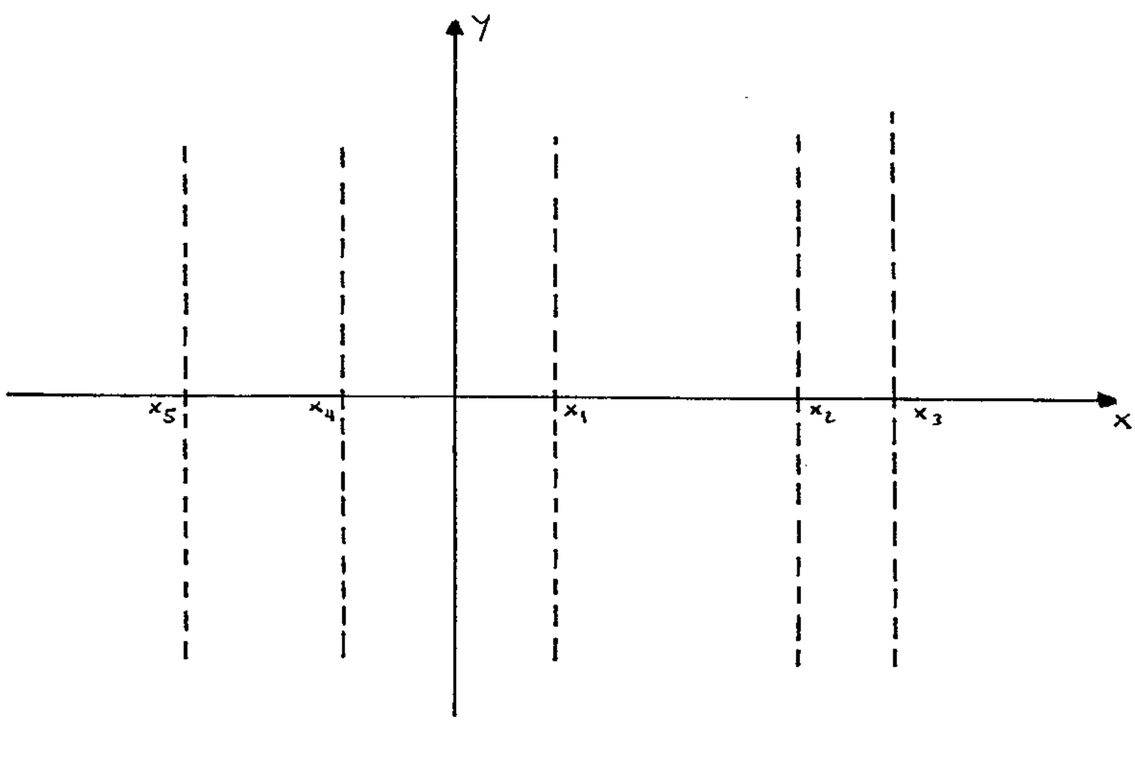
Observe que estamos considerando diferentes condições de gauge, para o mesmo sistema físico. Portanto as subregiões do espaço de fase definidas por (III-3.17) e (III-3.23) devem estar relacionadas por uma transformação canônica.[8] Neste caso está transformação corresponde a uma rotação e uma translação do sistema.

c) $$\Psi = \cos x - Kx = 0 \qquad \text{(III-3.24)}$$

Nesta condição de gauge o valor de K é escolhido de tal modo que a curva $\alpha = \cos x$ intercepta a curva $\alpha = Kx$ nos pontos $x = x_i$, $i = 1,\ldots 5$.



Esta condição de gauge define as superfícies $x(t) = x_i$, $i = 1\ldots5$.



i) Esta condição não remove toda a liberdade de gauge do sistema. Os pontos com coordenadas $x(t) = x_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots 3$, ou os pontos com coordenadas $x(t) = x_i < 0$, $i = 4,5$, os quais satisfazem a condição acima, podem por uma transformação de gauge, ser transformados entre si. Para ver isto, consideremos um ponto em que a coordenada x satisfaz (III-3.24), por exemplo $x = x_1$. Uma transformação com parâmetro

$$\beta = \ell n \left(\frac{x_i}{x_1}\right) \quad , \quad i = 2,3 \qquad \text{(III-3.25)}$$

nos leva a um ponto com

$$x'_i = e^{\beta(t)} x_1 = e^{\ell n (\frac{x_i}{x_1})} x_1 = x_i , \; i = 2,3 \qquad \text{(III-3.26)}$$

que também satisfaz a condição em questão. Note que neste exemplo de escolha de condição ainda permanece uma liberdade de gauge. Na terminologia usada na teoria dos campos de gauge diz-se que as coordenadas x_2 e x_3 são cópias de gauge da coordenadas x_1. Observemos que parâmetro β na transformação acima depende da coordenada x_1. Como veremos no Capítulo VI este fato caracteriza o fenômeno das cópias.

ii) Esta condição de gauge é atingível, porque, se supusermos que um certo ponto com coordenada x não satisfaz tal condição, é possível encontrar x' pela transformação

$$x' = x\ e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.27)}$$

satisfazendo a

$$\cos x' - Kx' = 0 \qquad \text{(III-3.28)}$$

Isto acontece se os parâmetro são

$$\beta = \ell n \left(\frac{x_i}{x}\right) \qquad \text{(III-3.29)}$$

Portanto os pontos de coordenada $x \geqslant 0$ que não satisfazem (III-3.24) podem ser transformados para qualquer das 3 superfícies $x = x_i$, $i = 1,2,3$. Os pontos com $x < 0$ podem ser transformados para as superficies $x = x_i$, $i = 4,5$. Este é um exemplo de escolha de condição em que o número de cópias de gauge é finito.

d) $\psi = \text{sen}\ x = 0$ (III-3.30)

i) Esta condição também não remove toda a liberdade de gauge do sistema. Isto pode ser visto se considerarmos uma transformação de gauge num ponto de coordenada x

$$x' = x\ e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.31)}$$

onde x satisfaz (III-3.30). Pode-se encontrar infinitos pontos com coordenadas x' que também satisfazem a

$$\text{sen } x' = 0 \qquad \text{(III-3.32)}$$

Para isto basta que tomemos para parâmetro da transformação

$$\beta = \ell n \left(\pm \frac{n\pi}{x}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(III-3.33)}$$

A condição de gauge (III-3.30) define no espaço de fase as superfícies $x = \pm\, n\pi$. Os pontos de coordenada $x \geqslant 0$ situados sobre qualquer superfície $x = n\pi$ podem ser transformados entre si; o mesmo acontece para pontos com $x < 0$ situados sobre as superfícies $x = -n\pi$. Portanto impondo a condição de gauge ainda permanece uma liberdade de gauge. Este é um exemplo de escolha de condiçao com um número infinito de cópias de gauge, porque, dado um ponto com coordenada x que satisfaz (III-3.30), situado sobre uma dada superfície $x = n'\pi$, pode-se encontrar infinitas transformações de gauge para outros pontos da coordenadas $x' = n\pi$, $n \neq n'$, que também satisfazem (III-3.30). As coordenadas $x = n\pi$ são cópias de gauge de $x = n'\pi$.

ii) Esta condição de gauge é atingível: suponhamos que um ponto de coordenada x não satisfaz (III-3.30) então por uma transformação de gauge, pode-se encontrar

$$x' = x\, e^{\beta(t)} \qquad \text{(III-3.34)}$$

o nde

$$\beta = \ell n\ (\pm \frac{n\pi}{x}) \quad , \quad n = 0,\ 1,\ 2,\dots \qquad \text{(III-3.35)}$$

tal que

$$\text{sen } x' = 0 \qquad \text{(III-3.36)}$$

Os pontos com $x \geqslant 0$ que não satisfazem (III-3.30) podem ser transformados para qualquer uma das superfícies $x = n\pi$, $n = 0,1,2,\dots$ e os pontos com $x < 0$ para as superfícies $x = -n\pi$, $n = 1,2,\dots$

III.4 - CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA INVARIANTE DE GAUGE NA MECÂNICA CLÁSSICA

Consideremos a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\ (x^2 + y^2) \qquad \text{(III-4.1)}$$

correspondente ao movimento oscilatório de uma particula ao longo de uma reta que passa pela origem. Por construção L é invariante por rotações no plano (x,y) de um ângulo θ constante. No caso infinitesimal estas transformações se escrevem

$$x \to x + \varepsilon y \qquad \text{(III-4.2a)}$$

$$y \to y - \varepsilon x \qquad \text{(III-4.2b)}$$

Esta é uma invariância global no sentido que ε não depende do tempo.

Pode-se perguntar se é possível generalizar as transformações acima para o caso local, isto é, $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Temos então que

$$x \rightarrow x + \varepsilon(t)y \qquad \text{(III-4.3a)}$$

$$y \rightarrow y - \varepsilon(t)x \qquad \text{(III-4.3b)}$$

A Lagrangeana L não é invariante pelas transformações acima pois:

$$L \rightarrow L + \dot{\varepsilon}(\dot{y}x-\dot{x}y) + \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\varepsilon y)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\varepsilon x)\right]^2 \qquad \text{(III-4.4)}$$

Por um procedimento análogo ao que se faz na teoria dos campos de gauge, vamos tentar recobrar a invariância desta teoria, introduzindo uma nova coordenada z que se transforme perante as transformações acima de maneira a garantir a invariancia local. Observemos que as quantidades tais como energia do sistema, o momento canônico p_z e a componente L_z do momento angular, devem ficar inalteradas com a introdução deste novo grau de liberdade.

Analisando a expressão (III-4.4), podemos ver que se a coordenada z for introduzida sob a forma

$$L' = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}\,z^2(x^2+y^2) -$$

$$- z(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}\,(x^2+y^2) \qquad \text{(III-4.5)}$$

obedecendo a lei de transformação

$$z \rightarrow z - \dot{\varepsilon} \qquad \text{(III-4.6)}$$

obtém-se a invariância da teoria sob as transformações locais.

Passemos agora à formulação canônica deste sistema. Os momentos canônicos obtidos de L' são

$$p_x = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + zy \qquad \text{(III-4.7a)}$$

$$p_y = \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - zx \qquad \text{(III-4.7b)}$$

$$p_z = 0 \qquad \text{(III-4.7c)}$$

A Hamiltoniana canônica do sistema é:

$$H_c = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L' =$$

$$= \frac{1}{2}\,p_x^2 + \frac{1}{2}\,p_y^2 + z(xp_y - yp_x) + \frac{1}{2}\,(x^2+y^2) \qquad \text{(III-4.8)}$$

A equação (III-4.7c) é um vínculo primário

$$\phi_1 = p_z \approx 0 \qquad \text{(III-4.9)}$$

Portanto a Hamiltoniana total do sistema se escreve

$$H_T = H_c + u_1 \, p_z \tag{III-4.10}$$

Condição de consistência do vínculo primário: $\dot{\phi}_1 \approx 0$. Então

$$\dot{p}_z = \{p_z, H_T\} = (yp_x - xp_y) \approx 0 \tag{III-4.11}$$

donde se obtém o vínculo secundário

$$\phi_2 = L_z = (yp_x - xp_y) \approx 0 \tag{III-4.12}$$

como era de se esperar.

Condição de consistência do vínculo secundário:

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\} = 0 \tag{III-4.13}$$

A equação acima nos mostra que o processo de consistência se encerrou e os únicos vínculos do sistema ϕ_1 e ϕ_2, são de 1ª classe

$$\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \tag{III-4.14}$$

A Hamiltoniana estendida do sistema é então

$$H_E = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + z(xp_y - yp_x) + \frac{1}{2}(x^2+y^2) +$$

$$+u_1 p_z + u_2 (yp_x - xp_y) =$$

$$= \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + \frac{1}{2} (x^2+y^2) + u_1 p_z + (u_2 - z)(yp_x - xp_y).$$

(III-4.15)

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são função arbitrárias.

As equações de movimento para as variáveis canônicas são:

$$\dot{x} = \{x, H_E\} = p_x + (u_2 - z)y \qquad \text{(III-4.16a)}$$

$$\dot{y} = \{y, H_E\} = p_y - (u_2 - z)x \qquad \text{(III-4.16b)}$$

$$\dot{z} = \{z, H_E\} = u_1 \qquad \text{(III-4.16c)}$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H_E\} = (u_2 - z)p_y \qquad \text{(III-4.16d)}$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_E\} = -(u_2 - z)p_x \qquad \text{(III-4.16e)}$$

$$\dot{p}_z = 0 \qquad \text{(III-4-16f)}$$

Comparando as equações (III-4.16a) e (III-4.16b) com as equações (III-4.7a) e (III-4.7b) encontra-se que $u_2 = 0$. Usando este resultado e o fato que $\dot{z} = u_1$, pode-se escrever a Hamiltoniana estendida da seguinte forma

$$H_E = \frac{1}{2}\, p_x^2 + \frac{1}{2}\, p_y^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - z(yp_x - xp_y) + \dot{z}p_z =$$

$$= \frac{1}{2}\, p_x^2 + \frac{1}{2}\, p_y^2 + \dot{z}\phi_1 - z\phi_2 \qquad \text{(III-4.17)}$$

o que faz com que as equações de movimento se reduzem a

$$\dot{x} = p_x - zy \qquad \text{(III-4.18a)}$$

$$\dot{y} = p_y - zx \qquad \text{(III-4.18b)}$$

$$\dot{z} = u_1 \qquad \text{(III-4.18c)}$$

$$\dot{p}_x = -\, z\, p_y \qquad \text{(III-4.18d)}$$

$$\dot{p}_y = z\, p_x \qquad \text{(III-4.18e)}$$

$$\dot{p}_z = 0 \qquad \text{(III-4.18f)}$$

Da equação (III-4.18c) vemos que a variação temporal de z é arbitrária, de modo que z é efetivamente uma função arbitrária, no sentido que não é fisicamente importante. As equações acima estão em acordo com as equações de Euler-Lagrange do sistema:

$$\ddot{x} + \dot{z}y + z\dot{y} = z^2x - z\dot{y} - x \qquad \text{(III-4.19a)}$$

$$\ddot{y} - \dot{z}x - z\dot{x} = z^2y + z\dot{x} - y \qquad \text{(III-4.19b)}$$

$$z(x^2 + y^2) - (x\dot{y} - y\dot{x}) = 0 \qquad \text{(III-4.19c)}$$

Vamos agora obter o gerador de transformação de gauge

$$\Sigma_t = \varepsilon\psi + \alpha\bar{\phi} \qquad \text{(III-4.20)}$$

construido no Capítulo II. Os parâmetros ε e α satisfazem a equação

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon A' + B'\alpha = 0 \qquad \text{(III-4.21)}$$

e A' e B' são obtidos das equações

$$\{\Psi , H_o\} = A'\psi \qquad \text{(III-4.22a)}$$

$$\{\bar{\Phi} , H_o\} = B'\psi \qquad \text{(III-4.22b)}$$

Como os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são de 1ª classe, podemos escolher os coeficientes da transformação linear de tal modo que

$$\bar{\phi} \equiv \phi_1 = p_z \overset{\sim}{\sim} 0 \qquad \text{(III-4.23a)}$$

$$\Psi \equiv \phi_2 = (yp_x - xp_y) \overset{\sim}{\sim} 0 \qquad \text{(III-4.23b)}$$

Então

$$\{\phi_1, H_o\} \equiv \{\bar{\phi}, H_o\} = \psi \qquad \text{(III-4-24a)}$$

$$\{\phi_2, H_o\} \equiv \{\psi, H_o\} = 0 \qquad \text{(III-4.24b)}$$

Comparando as equações acima com as equações (III-4.22a) e (III-4.22b) encontra-se que

$$A' = 0 \text{ e } B' = 1 \qquad \text{(III-4.25)}$$

Com este resultado, a equação entre os parâmetros ε e α se reduz

$$\dot{\varepsilon}(t) = - \alpha(t) \tag{III-4.26}$$

e o gerador de transformação de gauge se escreve

$$\Sigma_t = \varepsilon\phi_2 - \dot{\varepsilon}\phi_1 = \varepsilon(yp_x - xp_y) - \dot{\varepsilon}p_z \tag{III-4.27}$$

As transformações geradas por Σ_t são:

$$\delta x = \varepsilon y \tag{III-4.28a}$$

$$\delta y = -\varepsilon x \tag{III-4.28b}$$

$$\delta z = -\dot{\varepsilon} \tag{III-4.28c}$$

$$\delta p_x = \varepsilon p_y \tag{III-4.28d}$$

$$\delta p_y = - \varepsilon p_x \tag{III-4.28e}$$

$$\delta p_z = 0 \tag{III-4.28f}$$

Como pode ser visto pelas equações (III-4.16), o movimento do sistema ocorre em um plano perpendicular ao eixo z. Em vista das funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ serem arbitrárias, fazendo nas equações acima $u_1 = u_2 = 0$, obtem-se a informação que o movimento do sistema é oscilatório e é ao longo de uma reta no plano z = 0 passando pela origem. Qualquer reta perpendicular ao eixo z é uma trajetória possível ao sistema e corresponde a uma certa escolha das funções u_1 e u_2. Esta é a liberdade de gauge associada ao sistema. As trajetorias infinitesimalmente proximas estão relacionadas pelas transformações de gauge dadas nas equações acima.

Como esta teoria tem dois vínculos de 1ª classe, para poder fixar o gauge, devemos, impor duas condições de gauge de modo a tornar os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 de 2ª classe. Estas condições, como veremos mais adiante, quebram a invariância da teoria pelas transformações acima. Para este sistema há varias escolhas do conjunto de condições de gauge. Quatro delas são:

a) $x \approx 0$ (III-4.29a)

$z \approx 0$ (III-4.29a)

b) $y \approx 0$ (III-4.30a)

$p_z \approx 0$ (III-4.30b)

c) $z \approx 0$ (III-4.31a)

$p_x \approx 0$ (III-4.31b)

d) $z \approx 0$ (III-4.32a)

$p_y \approx 0$ (III-4.32b)

Como pode ser verificado fácilmente estas condições satisfazem os critérios para escolha de um gauge especificados na seção (III-2). Nós aqui analizaremos o sistema somente no gauge especificado pelas condições:

$$\phi_3 = x \approx 0 \qquad \text{(III-4.33a)}$$

$$\phi_4 = z \approx 0 \qquad \text{(III-4.33b)}$$

Estas condições podem ser atingidas. De fato, suponhamos que x não satisfaz a condição (III-4.33a). Pela transformação de gauge.

$$x' = x + \varepsilon y \qquad \text{(III-4.34)}$$

podemos encontrar x' que satisfará a tal condição se o parâ metro ε for dado por

$$\varepsilon = - \frac{x}{y} \qquad \text{(III-4.35)}$$

Do mesmo modo suponhamos que z não satisfaz a condição (III-4.33b). Pela transformação

$$z' = z - \dot{\varepsilon} \qquad \text{(III-4.36)}$$

podemos encontrar z' que satisfará a tal condição.

As condições acima fixam o gauge completamente , isto porque, dado um x ou z que as satisfazem não existe nenhum outro x' ou z' obtido por uma transformação de gauge que também as satisfarão.

Com as condições de gauge impostas, ficamos com o seguinte conjunto de vínculos de 2ª classe:

$$\phi_1 = p_z \approx 0 \qquad \text{(III-4.37a)}$$

$$\phi_2 = (yp_x - xp_y)\ \mathrm{x}\ 0 \qquad \text{(III-4.37b)}$$

$$\phi_3 = z \approx 0 \qquad \text{(III-4.37c)}$$

$$\phi_4 = x \approx 0 \qquad \text{(III-4.37d)}$$

A matriz formada pelos colchetes de Poisson des - tes vínculos é:

$$C = \begin{pmatrix} \{\phi_1,\phi_1\} & \{\phi_1,\phi_2\} & \{\phi_1,\phi_3\} & \{\phi_1,\phi_4\} \\ \{\phi_2,\phi_1\} & \{\phi_2,\phi_2\} & \{\phi_2,\phi_3\} & \{\phi_2,\phi_4\} \\ \{\phi_3,\phi_1\} & \{\phi_3,\phi_2\} & \{\phi_3,\phi_3\} & \{\phi_3,\phi_4\} \\ \{\phi_4,\phi_1\} & \{\phi_4,\phi_2\} & \{\phi_4,\phi_3\} & \{\phi_4,\phi_4\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(III-4.38)

e possui inversa:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/y \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/y & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-4.39)}$$

Os colchetes de Dirac entre duas quantidades F e G definido pela equação (III-1.1)

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} + \{F,\phi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta}\{G,\phi_\beta\} \qquad \text{(III-4.40)}$$

Para as variaveis canônicas tem-se que

$$\{x,p_x\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.41a)}$$

$$\{y,p_y\}^* = 1 \qquad \text{(III-4.41b)}$$

$$\{z,p_z\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.41c)}$$

Os colchetes de Dirac entre as demais variáveis canônicas são nulos.

As equações de movimento neste gauge são:

$$\dot{x} = \{x, H_e\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.42a)}$$

$$\dot{y} = \{y, H_e\}^* = \{y, H_e\} = p_y \qquad \text{(III-4.42b)}$$

$$\dot{z} = \{z, H_e\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.42c)}$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H_e\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.42d)}$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_e\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.42e)}$$

$$\dot{p}_z = \{p_z, H_e\}^* = 0 \qquad \text{(III-4.42f)}$$

onde

$$H_e = \frac{1}{2} p_y^2 \qquad \text{(III-4.43)}$$

é obtida de H_E fazendo uso das equações de vínculos em (III-4.37). Observemos que os vínculos de 2ª classe foram usados para eliminar as variáveis x, p_x, z e p_z da teoria e que o colchete de Dirac na equação (III-4.42b) se reduziu ao colchete de Poisson nas variaveis restante.

Neste gauge que estamos analisando a Lagrangeana do sistema se reduz a

$$L = \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{1}{2} y^2 \qquad \text{(III-4.44)}$$

e conduz a equação de Euler-Lagrange consistente com a equação de movimento (III-4.42). A equação acima mostra que o movimento do sistema é oscilatório e é ao longo do eixo y. A região onde ocorre o movimento do sistema em qualquer outro conjunto de condições de gauge pode ser obtida por uma transformação canônica da região especificada pelas equações (III-4.37) [8]. No caso em estudo, esta transformação canônica corresponde a uma rotação de um certo ângulo.

OBSERVAÇÃO:

Depois de resolvido o problema de encontrar a lagrangeana invariante de gauge no exemplo da mecânica clássica, constatamos que a lagrangeana que encontramos é a mesma lagrangeana invariante de gauge(em coordenadas polares) encontrada por T.D. Lee [9].

T.D. Lee considera inicialmente a lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}} - \vec{\zeta} \times \vec{r})^2 - V(r) \qquad \text{(III.1)}$$

associada a uma particula carregada não-relativistica que se move no espaço tri-dimensional sob a influência de um potencial central V(r) e de um campo magnético externo. A lagrangeana acima não é invariante pelas transformações

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad \text{(III.2a)}$$

$$\vec{\zeta} \to \vec{\zeta} + \vec{\alpha} \times \vec{\zeta} + \dot{\vec{\alpha}} \qquad \text{(III.2b)}$$

onde α é uma função arbitrária do tempo. Se for imposta a condição que o vetor $\vec{r}$ resida no plano (x,y) e que $\vec{\zeta} = \hat{e}\zeta$, onde $\hat{e}$ é um vetor unitário na direção z, encontra-se que L se reduz a

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (x\dot{y} - y\dot{x})\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 r^2 - V(r) \qquad \text{(III.3)}$$

Esta lagrangeana em coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \zeta)^2] - V(r) \qquad \text{(III.4)}$$

é invariante pelas transformações

$$\theta \rightarrow \theta + \alpha(t) \qquad \text{(III.5a)}$$

$$\zeta \rightarrow \zeta + \dot{\alpha}(t) \qquad \text{(III.5b)}$$

Observe que a lagrangeana dada pela equação (III.3) é a mesma que encontramos neste capítulo, com ζ desempenhando o papel da coordenada z.

CAPÍTULO IV

VARIÁVEIS DINÂMICAS FISICAMENTE SIGNIFICATIVAS

Consideremos um sistema físico caracterizado pelo conjunto de vínculos independentes

$$\bar{\phi}_i \approx 0, \text{ (primários de } 1^{\underline{a}} \text{ classe)} \tag{IV-1a}$$

$$\psi_k \approx 0, \text{ (secundários de } 1^{\underline{a}} \text{ classe)} \tag{IV-1b}$$

$$G_\ell \approx 0, \text{ (de } 2^{\underline{a}} \text{ classe)} \tag{IV-1c}$$

Observe que este conjunto de vínculos é obtido do conjunto $G_1 \ldots G_m$ que define Γ por meio de uma transformação linear não singular.

Como já sabemos, as variáveis dinâmicas em Γ apresentam uma dependência nas funções arbitrárias u^i. Para que uma variável dinâmica seja fisicamente significativa os valores que ela assume sobre Γ devem ser independentes das funções u^i em todos os instantes. Procuremos as condições que uma variável dinâmica f deve satisfazer para ser fisicamente significativa.

Uma variável dinâmica arbitrária será denotada por

$$f\left[\eta(t,\eta_0,[u])\right] \tag{IV-2}$$

onde $\eta(t,\eta_o,[u])$, definido em (II-1.19), é solução da equação

$$\frac{d}{dt}\eta\,(t,\eta_o,[u]) = \left\{\eta, H_T\right\}_{\eta=\,\eta(t,\eta_o,[u])} =$$

$$= \left\{\eta, H_o + u^i\bar{\phi}_i\right\}_{\eta=\,\eta(t,\eta_o,[u])} \qquad \text{(IV-3)}$$

Note-se que assumimos que o movimento do sistema é gerado pela Hamiltoniana total.

Uma função

$$\tilde{f}(t,\eta_o,[0]) \equiv f\left[\eta(t,\eta_o,[0])\right] \qquad \text{(IV-4)}$$

representa o valor que $f\left[\eta(t,\eta_o,[u])\right]$ assume no instante t, para a escolha particular $[u] = 0$, sobre a trajetória que parte de η_o em $t = 0$.

A equação de movimento que $f(t,\eta_o,[0])$ deve obedecer é

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{f}(t,\eta_o,[0]) = \left\{\tilde{f}(\eta,t), H_o(\eta)\right\}_{\eta\,=\,\eta_o} =$$

$$= \left\{f(\eta),\ H_o\ (\eta)\right\}_{\eta\,=\,\eta(t,\eta_o,[0])} \qquad \text{(IV-5)}$$

Para $[u]$ arbitrário, denotaremos o valor que a va riável dinâmica f assume no instante t por

$$\bar{f}(t,\eta_o,[u]) \equiv f[\eta(t,\eta_o,[u])] \qquad \text{(IV.6)}$$

A equação de movimento que $\bar{f}(t,\eta_o,[u])$ deve obedecer é:

$$\frac{d}{dt}\bar{f}(t,\eta_o,[u]) = \left\{\bar{f}(\eta,t),\ H_o+u^i\ \bar{\phi}_i\right\}_{\eta=\eta_o} =$$

$$= \left\{\bar{f}(\eta,t);H_o\right\}_{\eta=\eta_o} + \left\{\bar{f}(\eta,t),\bar{\phi}_i\right\}_{\eta=\eta_o} u^i =$$

$$= \left\{f(\eta),H_T(\eta)\right\}_{\eta=\eta(t,\eta_o,[u])} \qquad \text{(IV.7)}$$

Devido as equações (IV.4) e (IV.6) a condição para f(η) ser uma variável dinâmica fisicamente significativa pode ser escrita

$$\tilde{f}(t,\eta_o) \equiv \tilde{f}(t,\eta_o,[0]) = \bar{f}(t,\eta_o,[u]) \qquad \text{(IV.8)}$$

donde segue, comparando-se as equações (IV.5) e (IV.7), que

$$u^i\left\{\tilde{f}(\eta,t),\ \bar{\phi}_i(\eta)\right\}_{\eta=\eta_o} = 0 \qquad \text{(IV.9)}$$

Mas, como u^i é arbitrário,

$$\left\{\tilde{f}(\eta,t),\ \bar{\phi}_i(\eta)\right\}_{\eta=\eta_o} = 0 \qquad \text{(IV.10)}$$

Em (IV.10) deve ser observado que os colchetes de Poisson são calculados em relação ao conjunto de variáveis canônicas correspondente ao ponto η_o , de modo que estas equações podem ser escritas na forma

$$\left\{ f\ [\eta(t,\eta_o,[0])]\ ,\ \overline{\phi}_i(\eta_o) \right\}_{\eta=\eta_o} = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

As coordenadas de um ponto $\eta = \eta(t,\eta_o,[0])$ no tempo t, sobre a trajetória em Γ que parte do ponto em $t=t_o$, para a escolha particular zero das funções arbitrárias, podem ser obtidas através de uma transformação canônica finita gerada pela Hamiltoniana total. Se $\overline{\phi}_i(\eta_o)$ é o valor de $\overline{\phi}_i$ em η_o, o valor de $\overline{\phi}_i$ em $\eta = \eta(t,\eta_o,[0])$ pode também ser obtido por uma transformação canônica gerada por H_T e é dado por [7, 11]:

$$\overline{\phi}_i[\eta(t,\eta_o,[0])] = \overline{\phi}_i(\eta_o) + t\left\{\overline{\phi}_i(\eta_o),H_T(\eta_o)\right\}_{\eta=\eta_o} +$$

$$+\ \frac{t^2}{2!}\left\{\left\{\overline{\phi}_i(\eta_o),H_T(\eta_o)\right\}\ ,\ H_T(\eta_o)\right\}_{\eta=\eta_o} + \ldots \qquad \text{(IV.12)}$$

Agora, se é dado o valor de $\overline{\phi}_i$ no tempo t e queremos saber o valor de $\overline{\phi}_i$ no tempo $t = t_o$, basta aplicar uma transformação canônica inversa àquela definida pela equação (IV-12). Então o valor de $\overline{\phi}_i$ no tempo $t = t_o$ é

$$\overline{\phi}_i(\eta_o) = \overline{\phi}_i(\eta) - t\,\{\overline{\phi}_i(\eta),\, H_T(\eta)\} \; +$$

$$+ \frac{t^2}{2!}\,\{\{\overline{\phi}_i(\eta),\, H_T(\eta)\}\,,\, H_T(\eta)\} \; -$$

$$- \frac{t^3}{3!}\,\{\{\{\overline{\phi}_i(\eta),\, H_T(\eta)\}\,,\, H_T(\eta)\}\,,\, H_T(\eta)\} + \ldots \qquad \text{(IV-13)}$$

onde nesta equação η é o ponto $\eta=\eta(t,\eta_o,[0])$. Note-se que a existência da transformação canônica inversa está ligada ao fato da Hamiltoniana H_T não possuir dependência explícita no tempo.

Usando (IV.13) em (IV.11) resulta

$$\left\{ f(\eta), \overline{\phi}_i(\eta) \right\}_{\eta=\eta(t,\eta_o,[0])} - t\left\{ f(\eta), \left\{ \overline{\phi}_i(\eta), H_T(\eta)\right\}\right\}_{\eta=\eta(t,\eta_o,[0])}$$

$$+ \frac{t^2}{2!}\left\{ f(\eta), \left\{\left\{ \overline{\phi}_i(\eta), H_T(\eta)\right\}, H_T\right\}\right\}_{\eta=\eta(t,\eta_o,[0])}$$

$$- \frac{t^3}{3!}\left\{ f(\eta), \left\{\left\{\left\{ \overline{\phi}_i(\eta), H_T(\eta)\right\}, H_T(\eta)\right\}, H_T(\eta)\right\}\right\} + \ldots = 0 \qquad \eta=\eta(t,\eta_o,[0])$$

$$\text{(IV.14)}$$

Como esta equação é válida para qualquer tempo t, e para qualquer escolha do valor das funções arbitrárias $[u]$, segue que sobre Γ

$$\{f,\ \bar{\phi}_i\} = 0 \tag{IV-15a}$$

$$\{f,\ \{\bar{\phi}_i, H_T\}\} = 0 \tag{IV-15b}$$

$$\{f,\ \{\{\bar{\phi}_i, H_T\}, H_T\}\} = 0 \tag{IV-15c}$$

$$\{f,\ \{\{\{\bar{\phi}_i, H_T\}, H_T\}, H_T\}\} = 0 \tag{IV-15d}$$

$$\vdots$$

Devido ao fato do colchete de Poisson de duas funções de 1ª classe ser uma função de 1ª classe e devido às condições de consistência, podemos garantir que as quantidades

$$\bar{\phi}_i, \{\bar{\phi}_i, H_T\},\quad \{\{\bar{\phi}_i, H_T\}, H_T\}, \ldots \tag{IV-16}$$

que aparecem nas equações (IV-15), formam um conjunto maximal de vínculos de 1ª classe independentes sobre Γ. Se tais elementos são denotados por $\bar{G}_i, \ldots, \bar{G}_{m'}$, podemos escrever que

$$\{f,\ \bar{G}_i\} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m' \tag{IV-17}$$

é a condição que uma variável dinâmica f deve satisfazer para ser fisicamente significativa. Deve ser observado que esta condição foi obtida fazendo-se uso da Hamiltoniana total. Se tivéssemos usado a Hamiltoniana estendida, o resultado obtido seria o mesmo[8].

Vamos agora procurar encontrar o número de variáveis dinâmicas fisicamente significativas funcionalmente independentes que existem sobre Γ.

Quando falamos em independência funcional de um conjunto de funções $g_1 \ldots g_K$, estamos simplesmente querendo dizer que não existem relações funcionais entre elas válidas sobre Γ. Requerer que a matriz $||\{g_i, g_m\}||$ seja não singular é equivalente a requerer que o conjunto de funções seja funcionalmente independente. Isto pode ser visto se supusermos que $||\{g_i, g_m\}||$ é não singular e que g_1, por exemplo, pode ser expresso na forma

$$g_1 = f(g_2 \ldots . g_K) \qquad \text{(IV.18)}$$

Esta equação implica que a $1^{\underline{a}}$ linha da matriz $||\{g_i, g_m\}||$ é expressa em termos das demais.

$$\{g_1, g_m\} = \frac{\partial f}{\partial g_k} \{g_k , g_m\} \quad , \quad k = 2 \ldots K \qquad \text{(IV.19)}$$

mas como todas as linhas de $||\{g_k, g_m\}||$ são linearmente independentes, segue que uma relação do tipo (IV.18) não pode existir.

Suponhamos que a dimensão de Γ é m e que a dimensão do espaço de fase é 2n. Como o número de vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe é m', existem $2\ell = (2n-m-m')$ vínculos independentes de $2^{\underline{a}}$ classe

$$G_1, \ldots, G_{2n-m-m'} \qquad \text{(IV.20)}$$

de modo que a região Γ fica definida pelo conjunto de vínculos

$$\bar{G}_1, \ldots \bar{G}_{m'} \quad ; \quad G_1, \ldots G_{2n-m-m'} \qquad \text{(IV.21)}$$

Pode-se encontrar outras m funções $w_1, \ldots, w_m$ tais que o sistema

$$\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{m'} \quad ; \quad G_1, \ldots, G_{2n-m-m'} \quad ; \quad w_1, \ldots, w_n \qquad \text{(IV.22)}$$

seja um sistema de 2n funções independentes sobre o espaço de fase. Devemos requerer então que a matriz A formada pelos colchetes de Poisson das variáveis em (IV.22) seja não singular. Se a matriz A é não singular sobre Γ, pode-se assegurar que ela é não singular sobre todo o espaço de fase[7]

$$A = \begin{pmatrix} \{\bar{G},\bar{G}\} & \{\bar{G},G\} & \{\bar{G},w\} \\ \{G,\bar{G}\} & \{G,G\} & \{G,w\} \\ \{w,\bar{G}\} & \{w,G\} & \{w,w\} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & \{\bar{G},w\} \\ 0 & \{G,G\} & \{G,w\} \\ \{w,\bar{G}\} & \{w,G\} & \{w,w\} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.23)}$$

A condição para que a matriz A seja não singular deve ser obtida a partir de considerações sobre a submatriz

$$||\{\bar{G},w\}|| = \begin{pmatrix} \{\bar{G}_1,w\} & \{\bar{G}_1,w_2\} & \ldots & \{\bar{G}_1,w_m\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \{\bar{G}_{m'},w_1\} & \{\bar{G}_{m'},w_2\} & \ldots & \{\bar{G}_{m'},w_m\} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-24)}$$

e esta condição é que $||\{\bar{G},w\}||$ tenha posto m'.

Seja f uma variável dinâmica definida sobre o espaço de fase. Então f pode ser expressa em termos do sistema de variáveis $(\bar{G}, G, w)$, e se f é uma variável dinâmica fisicamente significativa tem-se da equação (IV.17) que, sobre Γ,

$$\{f,\bar{G}_k\} = \frac{\partial f}{\partial \bar{G}_i}\{\bar{G}_i,\bar{G}_k\} + \frac{\partial f}{\partial G_i}\{G_i,\bar{G}_k\} + \frac{\partial f}{\partial w_i}\{w_i,\bar{G}_k\}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial w_i}\{w_i,\bar{G}_k\} = 0 \qquad \text{(IV.25)}$$

Denotando na equação acima

$$\{w_i, G_k\} = \lambda_{ik}(w) \qquad \text{(IV.26)}$$

tem-se que

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_i}\lambda_{ik}(w) = 0 \quad , \quad i=1\ldots m \; ; \; k=1\ldots m' \qquad \text{(IV.27)}$$

é um sistema de m' equações linear e homogêneo a derivadas parciais de 1ª ordem. Um sistema deste tipo possui (m-m') soluções funcionalmente independentes[10]. Temos então que o número de variáveis dinâmicas fisicamente significativas existente sobre Γ é m-m'. Um conjunto de soluções funcionalmente independentes de (IV.27) sobre Γ,

$$(f_1,\ldots,f_{m-m'}) \qquad \text{(IV.28)}$$

depende somente dos w_i; as soluções para fora de Γ são obtidas acrescentando-se uma combinação linear dos vínculos.

Como o conjunto de funções f_a em (IV.28) tem, sobre Γ, m-m' elementos funcionalmente independentes, vamos adicionar a este m' funções $\chi_c(w)$, que se supõe independentes entre si e dos f_a, de tal modo que

$$(f_1, \dots, f_{m-m'}, \chi_1, \dots \chi_{m'}) \tag{IV.29}$$

seja um sistema de m variáveis funcionalmente independentes sobre Γ.

Procuremos as condições que as funções χ_c, $c = 1, \dots, m'$, devem satisfazer para que sejam independentes dos f_a, $a = 1, \dots, m-m'$. As funções w_i, $i = 1, \dots, m$, sobre Γ, podem ser expressas em função dos f_a e dos χ_c. Então,

$$\{w_i, \bar{G}_k\} = \frac{\partial w_i}{\partial \chi_c} \{\chi_c, \bar{G}_k\} + \frac{\partial w_i}{\partial f_a} \{f_a, \bar{G}_k\} \tag{IV.30}$$

Como f_a é uma variável dinâmica fisicamente significativa, segue que sobre Γ,

$$\{w_i, \bar{G}_k\} = \frac{\partial w_i}{\partial \chi_c} \{\chi_c, \bar{G}_k\} \tag{IV.31}$$

$$i = 1, \dots, m \quad ; \quad k = 1, \dots, m' \quad ; \quad c = 1, \dots, m'$$

Como já vimos anteriormente, a matriz $||\{w_i, \bar{G}_k\}||$ deve ter posto m', mas para que isto aconteça é necessário que na equação acima

$$\det ||\{\chi_c, \bar{G}_k\}|| \not\approx 0 \tag{IV.32}$$

Esta é a condição que as funções χ_c devem satisfazer para serem independentes dos f_a. Se os χ_c dependem dos f_a,

$$\{\chi_c, \bar{G}_k\} = \frac{\partial \chi_c}{\partial f_a} \{f_a, \bar{G}_k\} = 0 \qquad \text{(IV.33)}$$

de modo que a condição (IV.32) não seria satisfeita.

Consideremos o sistema de equações

$$\chi_c = 0 \quad , \quad c=1,\ldots,m' \quad .$$

Este sistema caracteriza uma subregião de Γ que denotaremos por $\Delta(0)$, com m-m' dimensões. Notemos que a dimensão de $\Delta(0)$ é igual ao número de variáveis dinâmicas fisicamente significativas e este fato nos leva a concluir que esta subregião está associada ao conjunto de tais variáveis dinâmicas. O movimento do sistema sem nenhuma liberdade de gauge ocorre em $\Delta(0)$. Nesta subregião qualquer variável dinâmica é fisicamente significativa.

Observemos que o número de funções $\chi_c = 0$, $c=1\ldots m'$, é igual ao número de vínculos de 1ª classe e são tais que

$$\det \ ||\{\chi_c, \bar{G}_k\}|| \not\approx 0 \qquad \text{(IV.32)}$$

Comparando com o capítulo anterior na seção III-2 de fixação de gauge, podemos notar que as funções χ_c com a propriedade de acima, são exatamente as condições de gauge impostas na teoria de modo a tornar todos os vínculos do sistema de 2ª classe e o movimento do sistema sem nenhuma liberdade de gauge ocorreria na subregião definida por $(G,\bar{G},\chi)$, que é exatamente a subregião $\Delta(0)$. Note que o nosso caminho para chegar a região $\Delta(0)$ foi bem mais construtivo: nós partimos com o objetivo de caracterizar as variáveis dinâmicas fisicamente significativas; mostramos que o número máximo delas é m-m' e a conclusão a que chegamos é que o movimento do sistema sem liberdade de gauge ocorre em $\Delta(0)$.

Devido a condição (IV.32), podemos garantir que

$$\dot{\chi}_c = \{\chi_c, H_T\} \approx \{\chi_c, H_T\}^* \equiv 0 \qquad \text{(IV-34)}$$

que são as condições de consistência para as funções χ_c. Os colchetes de Dirac podem ser calculados em relação ao conjunto de vínculos $(G, \bar{G}, \chi)$.

As funções f_a, $a = 1, \ldots, m-m'$ e as funções $\chi_c = 0$, $c = 1, \ldots, m'$ podem ser escolhidas de tal modo que sobre Γ:

$$\{f''_a \, , \, G_k\} = 0 \qquad \text{(IV-35a)}$$

$$\{\chi'' \, , \, G_k\} = 0 \qquad \text{(IV-35b)}$$

$$\{\chi'' \, , \, f''_a\} = 0 \qquad \text{(IV-35c)}$$

$$\{\chi'' \, , \, \chi''\} = 0 \qquad \text{(IV-35d)}$$

Para isto basta fazer

$$f''_a = f'_a - \{\chi'_\ell \, , \, f'_a\} \{\chi'_k, \bar{G}_\ell\}^{-1} \bar{G}_k \qquad \text{(IV-36a)}$$

$$\chi''_c = \chi'_c - \frac{1}{2} \{\chi'_c, \chi'_b\} \{\bar{G}_b, \chi'_k\}^{-1} \bar{G}_k \qquad \text{(IV-36b)}$$

onde

$$f'_a = f_a - \{f_a, G_k\}\{G_k, G_\ell\}^{-1}G_\ell \qquad \text{(IV-37a)}$$

$$\chi'_c = \chi_c - \{\chi_c, G_k\}\{G_k, G_\ell\}^{-1}G_\ell \qquad \text{(IV-37b)}$$

As quantidades

$$f''_1, \ldots, f''_{m-m'} \quad ; \bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_m \quad ; G_1, \ldots G_{2n-m-m'} \quad ; \chi''_1, \ldots, \chi''_m \qquad \text{(IV-38)}$$

constituem sobre o espaço de fase, um sistema de 2n variáveis funcionalmente independentes. Então:

$$\begin{vmatrix} \{G,G\} & \{G,\bar{G}\} & \{G,f''\} & \{G,\chi''\} \\ \{\bar{G},G\} & \{\bar{G},\bar{G}\} & \{\bar{G},f''\} & \{\bar{G},\chi''\} \\ \{f'',G\} & \{f'',\bar{G}\} & \{f'',f''\} & \{f'',\chi''\} \\ \{\chi'',G\} & \{\chi'',\bar{G}\} & \{\chi'',f''\} & \{\chi'',\chi''\} \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} \{G,G\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\bar{G},\chi''\} \\ 0 & 0 & \{f'',f''\} & 0 \\ 0 & \{\chi'',\bar{G}\} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \det \|\{G,G\}\| . (\det\|\{\bar{G},\chi''\}\|)^2 . \det\|\{f''.f''\}\| \not\approx 0 \qquad \text{(IV-39)}$$

donde podemos ver que a matriz $\|\{f''_a, f''_b\}\|$ é não singular.

No sentido forte, demonstra-se que qualquer grandeza de 1ª classe pode ser expressa como uma função dos f_a, $a = 1,\ldots,m-m'$ mais uma combinação linear dos vínculos $\bar{G}_i$, $i = 1,\ldots,m'$. De fato, seja g uma grandeza de 1ª classe ; ela é fisicamente significativa porque $\{g,\bar{G}_k\} = 0$ sobre Γ. Então sobre Γ, g pode ser expressa como uma função dos f_a : $g = F(f)$. Assim, $g - F(f)$ é de 1ª classe nula sobre Γ e portanto pode-se encontrar coeficientes C_i tais que

$$g \equiv F(f) + C_i\bar{G}_i \qquad \text{(IV-40)}$$

Em particular, como $\{f_a,f_b\}$ é de $1^{\underline{a}}$ classe, segue que

$$\{f_a,f_b\} \equiv \Delta_{ik}(f) + C^j_{ik}\,\overline{G}_j \qquad \text{(IV-41)}$$

onde $\Delta = ||\Delta_{ik}||$ é uma matriz, função dos f_a, não singular.

A relação acima sobre Γ

$$\{f_a,f_b\} = \Delta_{ik}(f) \qquad \text{(IV-42)}$$

garante que o conjunto $f_1,\ldots,f_{m-m'}$ de variáveis fisicamente significativas constitui uma álgebra.

As funções f_a, como pode ser visto da equação (IV-42), não tem colchete de Poisson canônicos sobre Γ, mas pode-se encontrar m-m' funções destas variáveis, as quais denotaremos por $\overline{q}^i(f)$ e $\overline{p}_i(f)$ tais que:[12]

$$\{\overline{q}^i,\overline{q}_k\} = 0 \; ; \; \{\overline{p}^i,\overline{p}_k\} = 0 \; ; \; \{\overline{q}^i,\overline{p}_k\} = \delta^i_k \qquad \text{(IV-43)}$$

Agora, é sempre possível encontrar as transformações lineares não singulares[7] .

$$G'_i = A_{ik}\,G_k \qquad \text{(IV-44a)}$$

$$\overline{G}_i = B_{ik}\,\overline{G}_k \qquad \text{(IV-44b)}$$

$$\chi'_i = C_{ik}\,\chi_k \qquad \text{(IV-44c)}$$

de modo que sobre Γ

$$||\{G'_i, G'_k\}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{IV-45}$$

e

$$\{\overline{G}_a, \chi'_b\} = \delta_{ab} \tag{IV-46}$$

Com os f_a e os χ_c sendo tais como em (IV-36), o conjunto de 2n variáveis

$$\overline{q},\ \overline{p},\ \overline{G}',\ G' \quad e \quad \chi$$

sobre Γ, é canônico.

Expressando-se todas as variáveis em termos deste novo conjunto, os colchetes de Dirac de duas funções F e G se reduzem a

$$\{F(\overline{q}, \overline{p}, G', \overline{G}', \chi),\ G(\overline{q}, \overline{p}, G', \overline{G}', \chi')\}^* =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \overline{q}^i}\frac{\partial G}{\partial \overline{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \overline{p}_i}\frac{\partial G}{\partial \overline{q}^i} \tag{IV-47}$$

Observe que $\overline{q}^i$ e $\overline{p}_i$ são as coordenadas canônicas sobre $\Delta(0)$.

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO CANÔNICA DOS CAMPOS DE GAUGE

Afim de introduzir a notações e convenções que usaremos, será dado um breve resumo da teoria dos campos de gauge livres.[13,15]

Denotemos por G um grupo de Lie n-paramétrico, com parâmetros $\{w^a\}$, $a = 1 \cdots n$, que suporemos semi-simples e compacto. $\mathcal{G}$ é a álgebra de Lie associada com G e $\{T_a\}$ é uma base em $\mathcal{G}$ que obedece a lei de camposição

$$[T_a, T_b] = i\, C^c_{ab} \quad T_c \tag{V-1}$$

onde C^c_{ab} são as constantes de estrutura que satisfazem a

$$C^c_{ab} = - C^c_{ba} \tag{V-2}$$

Usando a identidade de Jacobi

$$[T_a, [T_b,T_c]] + [T_b,[T_c,T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0 \tag{V-3}$$

obtém-se que as constantes de estrutura satisfazem a relação:

$$C^e_{ab} \quad C^d_{ec} + C^e_{bc} \quad C^d{}_{ea} + C^e_{ca} \cdot C^d_{ed} = 0 \tag{V-4}$$

Suponhamos que é feita a seguinte mudança de parâmetros

$$w^a = A^a_b \ \tilde{w}^b \tag{V-5}$$

Então

$$w^a \ T_a = A^a_b \ \tilde{w}^b \ T_a \equiv \tilde{w}^b \ \tilde{T}_b \tag{V-6}$$

onde $$\tilde{T}_b = A^a_b \ T_a \tag{V-7}$$

Agora, da lei de composição

$$[\tilde{T}_a , \tilde{T}_b] = i \ \tilde{C}^c_{ab} \ \tilde{T}_c \tag{V-8}$$

encontra-se que

$$\tilde{C}^c_{ab} \ A^f_c = A^f_a \ A^d_b \ C^f_{ed} \tag{V-9}$$

Isto nos mostra que sob mudança de parâmetros, as constan - tes de estrutura se comportam como tensores.

Na representação adjunta de G, os geradores são matrizes n x n e definidos por

$$(T_a)_b{}^c = - i \ C_{ab}{}^c \tag{V-10}$$

Um grupo de Lie G é semi-simples se e somente se[14]

$$\det \| g_{ab} \| \neq 0 \tag{V-11}$$

onde o tensor g_{ab} é a métrica de Cartan de G definida por

$$g_{ab} = C_{an}{}^m \ C_{bm}{}^n \tag{V-12}$$

Usando as equações (V-2), (V-4) e (V-12) pode-se mostrar que $C_{\ell mn}$ definido por

$$C_{\ell mn} = C_{\ell m}{}^{j} \; g_{jn} \tag{V-13}$$

é totalmente antissimétrico. Por uma mudança de parâmetros, pode-se obter $g_{ab} = \delta_{ab}$. Neste caso em (V-13) é irrelevante de usarmos $C_{\ell mn}$ ou $C_{\ell m}{}^{n}$.

Os campos de gauge serão denotados por $\{A_\mu^a\}$, e o tensor de intensidade dos campos, $F_{\mu\nu}^a$, é definido através da relação

$$[D_\mu, D_\nu] = i\, g\, \vec{F}_{\mu\nu} \equiv i\, g\, F_{\mu\nu}^a\, T_a \tag{V-14}$$

onde D_μ é o operador de derivação covariante definido por

$$D_\mu = \partial_\mu + i\, g\, \vec{A}_\mu \equiv \partial_\mu + i\, g\, A_\mu^a\, T_a \tag{V-15}$$

Então da equação acima e da equação (V-14) segue que

$$F_{\mu\nu}^{a} = \partial_\mu\, A_\nu^a - \partial_\nu\, A_\mu^a - g\, C_{bc}^{a}\, A_\mu^b\, A_\nu^c \tag{V-16}$$

Qualquer $U \in G$ pode ser escrita na forma

$$U = e^{-iw^a\, T_a} \tag{V-17}$$

As leis de transformação de $\vec{A}_\mu$ e $\vec{F}_{\mu\nu}$ por $U \in G$, se escrevem

$$\vec{A}_\mu \rightarrow U\,\vec{A}_\mu\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,U\,\partial_\mu\,U^{-1} \qquad \text{(V-18)}$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} \rightarrow U\,\vec{F}_{\mu\nu}\,U^{-1} \qquad \text{(V-19)}$$

Com U em sua forma infinitesimal

$$U = 1 - i\,w^a\,T_a \qquad \text{(V-20)}$$

obtem-se de (V-18) e (V-19), as leis de transformações infinitesimais de A^a_μ e $F^a_{\mu\nu}$:

$$A^a_\mu \rightarrow A^a_\mu + \frac{1}{g}\,\partial_\mu\,w^a + C^a_{bc}\,w^b\,A^c_\mu \qquad \text{(V-21)}$$

$$F^a_{\mu\nu} \rightarrow F^a_{\mu\nu} + C^a_{bc}\,w^b\,F^c_{\mu\nu} \qquad \text{(V-22)}$$

Esta equação nos mostra que $F^a_{\mu\nu}$ se transforma segundo a representação adjunta de G.

A Lagrangeana associada com os campos de gauge é:

$$L = -\frac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}_a = -\frac{1}{2}\,\mathrm{TR}\,(\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\,\vec{F}^{\mu\nu}) \qquad \text{(V-23)}$$

donde se obtém as equações de movimento

$$D_\nu^{\;ab}\,F^{\mu\nu}_b \equiv \partial_\nu\,F^{\mu\nu}_b + g\,C_{abc}\,A^c_\nu\,F^{\mu\nu}_b = 0 \qquad \text{(V-24)}$$

Passemos a formulação canônica da teoria. Os momentos canônicos associados com os campos A^a_μ são definidos por

$$\pi^{\mu}_{a} = \frac{\partial L}{\partial (\dot{A}^{a}_{\mu})} = F^{o\mu}_{a} \tag{V-25}$$

donde resulta que

$$\pi^{o}_{a} = 0 \tag{V-26a}$$

$$\pi^{k}_{a} = F^{ok}_{a} \tag{V-26b}$$

As equações (V-26a) são os vínculos primários do sistema, e devem por isto ser representadas como igualdades fracas

$$\phi^{a}_{1} = \pi^{a}_{o} \approx 0 \tag{V-27}$$

A Hamiltoniana canônica do sistema definida por (I-1-4) é:

$$H_c = \int d^3x \, (\pi^{a}_{k} \, \dot{A}^{k}_{a} - L) =$$

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \, \pi^{a}_{k} \, \pi^{k}_{a} + \frac{1}{4} \, F^{ij}_{a} \, F^{a}_{ij} - \right.$$

$$\left. - A_{oa}(\partial_k \pi^{k}_{a} - g \, C_{ab}^{\;\;c} \, A^{b}_{k} \, \pi^{k}_{c})\right] + \int d\vec{s} \, . \, \vec{\pi}^{a} \, A_{oa} \tag{V-28}$$

Desprezando a integral de superfície na equação acima [16], obtem-se que

$$H_c = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \, \pi^{a}_{k} \, \pi^{k}_{a} + \frac{1}{4} \, F^{a}_{ij} \, F^{ij}_{a} - A_{oa} \, D^{ab}_{k} \, \pi^{k}_{b}\right] \tag{V-29}$$

onde

$$D^{ab}_{k} \, \pi^{k}_{b} \equiv \partial_k \, \pi^{k}_{a} - g \, C_{ab}^{\;\;c} \, A^{b}_{k} \, \pi^{k}_{c} \tag{V-30}$$

A Hamiltoniana total do sistema definida por (I-1.14) é

$$H_T = H_c + \int d^3x \quad v^a(x) \; \pi^o_a(x) \tag{V-31}$$

Os colchetes de Poisson entre as variáveis canônicas são definidos por

$$\{\pi^\mu_a \; (t,\vec{x}) \, , \; A^b_\nu \; (t,\vec{x}\,')\} = -\delta^\mu_\nu \; \delta^b_a \; \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \tag{V-32}$$

Condições de consistência para os vínculos primários: $\dot{\phi}_1 \approx 0$. Então

$$\dot{\phi}^a_1 = \{\phi^a_1(x), H_T\} = \partial_k \pi^k_a - g \; C_{ab}{}^c \; A^b_k \; \pi^k_c \equiv D^{ab}_k \; \pi^k_b \approx 0 \tag{V-33}$$

donde se obtém os vínculos secundários

$$\phi^a_2 = D^{ab}_k \quad \pi^k_b \quad \approx 0 \tag{V-34}$$

Condições de consistencia para os vínculos secundários:

$$\dot{\phi}^a_2 = \{\phi^a_2(x), H_T\} = - \; g \; C^a_{bc} \quad A^b_o \quad \phi^c_2(x) \approx 0 \tag{V-35}$$

Desta equação vemos que o processo de consistência se encerra, porque, $\phi^c_2(x) \approx 0$. Os únicos vínculos do sistema ϕ^a_1 e ϕ^a_2 , são de 1ª classe, pois

$$\{\phi_1^a (x),\ \phi_1^b (z)\} \approx 0 \qquad \text{(V-36a)}$$

$$\{\phi_1^a (x),\ \phi_2^b (z)\} \approx 0 \qquad \text{(V-36b)}$$

$$\{\phi_2^a (x),\ \phi_2^b (z)\} = -g\ C_c^{ab}\ \phi_2^c (z)\ \delta(\vec{x}-\vec{z}) \approx 0 \qquad \text{(V-36c)}$$

A Hamiltoniana estendida definida por (II-1.8) é:

$$H_E = \int d^3x \ (\frac{1}{2}\ \pi_a^k\ \pi_k^a + \frac{1}{4}\ F_a^{ij}\ F_{ij}^a - A_{oa}\ D_k^{ab}\ \pi_b^k +$$

$$+ v_a(x)\ \pi_o^a + u_a\ (x)\ D_k^{ab}\ \pi_b^k) =$$

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\ \pi_a^k\ \pi_k^a + \frac{1}{4}\ F_a^{ik}\ F_{ik}^a + \right.$$

$$\left. + v_a(x)\ \pi_o^a + (u_a(x) - A_{oa}(x))\ D_k^{ab}\ \pi_b^k\right] \qquad \text{(V-37)}$$

A equação de movimento para uma variável dinâmica $F = F(t,\overline{x})$ é

$$\dot{F} = \{F,\ H_E\} \qquad \text{(V-38)}$$

Então,

$$\dot{A}_o^a(x) = v^a\ (x) \qquad \text{(V-39a)}$$

$$\dot{A}_j^a\ (x) = \pi_j^a + D_j^{ab}\ A_{ob} - D_j^{ab}\ u^b \qquad \text{(V-39b)}$$

A equação (V-39a) nos diz que a variação temporal de A_o é arbitrária, o que significa que A_o não é uma variável impor tante para a teoria. Comparando (V-39b) com (V-26b), encontra-se que $D_j^{ab}\, u_b = 0$, de modo que podemos tomar $u_b=0$. Com estes resultados a Hamiltoniana estendida se escreve

$$H_E = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\, \pi_k^a\, \pi_a^k + \frac{1}{4}\, F_a^{ik}\, F_{ik}^a + \dot{A}_{oa}\, \pi_o^a - A_{oa}\, D_k^{ab}\, \pi_b^k\right) \tag{V-40}$$

Os dois últimos termos da hamiltoniana estendida, o qual denotaremos por

$$\bar{\Sigma}_t = \int d^3x\left(-A_{oa}\, D_k^{ab}\, \pi_b^k + \dot{A}_{oa}\, \pi_o^a\right) \tag{V-41}$$

formam o gerador de transformações de gauge da teoria[1,4,16]. Tem-se que

$$\delta A_\mu^a\,(z) = \{A_\mu^a\,(z)\,,\ \bar{\Sigma}_t\} = D_\mu^{ab}\, A_{ob} \tag{V-42}$$

são as transformações de gauge admissíveis na teoria cujos parâmetros são A_{ob} .

Vamos agora obter o gerador de transformação de gauge que construimos no Capítulo II. Adaptado à teoria dos campos, este deverá ter a forma

$$\Sigma_t = \int d^3z\left(\alpha^b\, \psi^b + \varepsilon^a\, \bar{\phi}^a\right) \tag{V-43}$$

onde os parâmetros infinitesimais α^b e ε^a satisfazem a equação diferencial

$$\frac{\partial \alpha^b}{\partial x^o} + \alpha^a\, A'^{ab} + B'^{cb}\, \varepsilon^c = 0 \tag{V-44}$$

Os coeficientes A'^{ab} e B'^{cb} são obtidos das relações:

$$\{\psi^a, H_o\} = A'^{ab}\psi^b \qquad \text{(V-45)}$$

$$\{\bar{\phi}^c, H_o\} = B'^{cb}\psi^b \qquad \text{(V-46)}$$

Recordemos o significado das quantidades ψ^b e $\bar{\phi}^a$ na equação (V-43). Suponhamos que um sistema físico tenha o seguinte conjunto de vínculos $\{G_1, \ldots G_m\}$. Consideremos agora o conjunto de vínculos de 1ª classe $\{\bar{G}_1, \ldots \bar{G}_{m'}\}$ obtido do conjunto anterior por meio de uma transformação linear não singular. Como este conjunto $\{\bar{G}_1, \ldots \bar{G}_{m'}\}$ é composto de vínculos primários e secundários, podemos escolher os coeficientes da matriz da transformação linear de tal modo que os vínculos primários deste conjunto sejam os próprios $\bar{\phi}^a$ que aparecem na Hamiltoniana total, equação (II-1.14). Os demais vínculos do conjunto $\{\bar{G}_1, \ldots \bar{G}_{m'}\}$ são os secundários e são denotados por ψ^b.

Olhando para a expressão da Hamiltoniana total dos campos de gauge, equação (V-31), em vista do que foi dito acima, podemos identificar

$$\bar{\phi}^a \equiv \phi_1^a = \pi_o^a \qquad \text{(V-47)}$$

Os vínculos secundários de 1ª classe ψ^b, por uma escolha conveniente dos coeficientes da matriz da transformação linear, podem ser os próprios ϕ_2^b , isto é,

$$\psi^b \equiv \phi_2^b = D_k^{ab} \; \pi_b^k \tag{V-48}$$

Então das equações (V-33) e (V-35) tem-se que

$$\{\bar{\phi}^c , H_o\} \equiv \{\phi_1^c , H_o\} = \psi^c = \delta^{cb} \; \psi^b \tag{V-49}$$

$$\{\psi^a , H_o\} \equiv \{\phi_2^a , H_o\} = -g \; C^{aeb} \; A_o^e \; \psi^b \tag{V-50}$$

Comparando as equações acima com as equações (V-45) e (V-46) obtém-se que

$$A'^{ab} = -g \; C^{aeb} \; A_o^e \tag{V-51}$$

$$B'^{cb} = \delta^{cb} \tag{V-52}$$

Com estes resultados a equação (V-44) se escreve

$$\frac{\partial \alpha^a}{\partial x^o} - g \; C^{bea} \; A_o^e \quad \alpha^b + \varepsilon^a = 0 \tag{V-53}$$

donde obtém-se que

$$\varepsilon^a = - \; D_o^{ab} \quad \alpha_b \tag{V-54}$$

Usando a equação (V-54) em (V-43) e denotando $\alpha_b = - \frac{1}{g} \, w_b$ encontra-se que

$$\Sigma_t = - \frac{1}{g} \int d^3z \, (w_a \; D_k^{ab} \; \pi_b^k - \pi_a^o \; D_o^{ab} \; w_b) =$$

$$= - \frac{1}{g} \left[\int d^3z \, (- \; \pi_a^o \; D_o^{ab} \quad w_b - \pi_a^k \; D_k^{ab} \; \pi_b^k) + \int d^3z \;\; \partial_k \, (\pi_a^k w^a) \right]$$

$$= \frac{1}{g} \int d^3z \, (\pi_a^\mu \; D_\mu^{ab} \; w_b) - \frac{1}{g} \int d^3z \;\; \partial_k \, (\pi_a^k \; w^a) \tag{V-55}$$

As transformações geradas por Σ_t em (V-55)

$$\delta A^c_\mu(z) = \frac{1}{g} D^{cb}_\mu w_b \tag{V-56}$$

são de fato as transformações de gauge (V-21). Como pode-se verificar, o último termo em (V-55) não contribui para gerar nenhuma transformação de gauge sob qualquer variável dinâmica. Em vista disto, podemos tomar o gerador de transformação de gauge como sendo

$$\Sigma_t = \frac{1}{g} \int d^3x \; (\pi^\mu_a \; D^{ab}_\mu \; w_b) \tag{V-57}$$

Pode-se notar de (V-42) e (V-56) que as transformações de gauge geradas por Σ_t são muito mais gerais do que as geradas por $\bar{\Sigma}_t$. Nas transformações geradas por $\bar{\Sigma}_t$ os parâmetros são as componentes "o" dos campos de gauge, enquanto que nas transformações geradas por Σ_t, os parâmetros são quaisquer conjuntos de funções arbitrárias. Então podemos dizer que as transformações geradas por $\bar{\Sigma}_t$ é um caso particular das transformações geradas por Σ_t: as duas transformações coincidem somente no caso em que $w_b = - g \; A_{ob}$. Observe que o gerador que obtivemos em (V-57) não é fracamente nulo, enquanto que o gerador $\bar{\Sigma}_t$ que se obtém no esquema de Dirac é fracamente nulo.

O gerador no esquema de Dirac, equação (V-41), pode ser escrito na forma:

$$\bar{\Sigma}_t = \int d^3x(-A_{oa} \; D^{ab}_k \; \pi^k_b + \dot{A}_{oa} \; \pi^a_o) =$$

$$= \int d^3x \left[-(\pi^\mu_a \; D^{ab}_\mu \; A_{ob})\right] + \int d^3x \left[\partial_k (\pi^k_a \; A^a_o)\right] \tag{V-58}$$

Pode-se verificar também que o último termo em (V-58) não contribui para gerar nenhuma transformação de gauge sob qualquer variável dinâmica. No entanto, aqui não podemos proceder como antes tomando o gerador como sendo somente o primeiro termo da equação (V-58), porque senão este objeto não seria fracamente nulo. Devemos relembrar que o gerador de transformação de gauge no esquema de Dirac é fracamente nulo.

Os geradores Σ_t em (V-57) obedecem a álgebra

$$\{\Sigma_t[w],\Sigma_t[\Delta]\} = \frac{1}{g^2}\int d^3x\, d^3z\{\ \pi^\mu_a(x) D^{ab}_\mu\, w_b(x)\,,\ \pi^\nu_c(z)\ D^{cd}_\nu\ \Delta_d(z)\}$$

$$= \frac{1}{g}\int d^3z\ \pi^\mu_d\ D^{ad}_\mu\ (C_{acm}\ w^c\ \Delta^m)$$

$$= \Sigma_t\ [C_{acm}\ w^c\ \Delta^m] \qquad (V-59)$$

Consideremos em (V-57), o caso particular em que os parâmetros são

$$w^a = \delta^a{}_b \qquad (V-60)$$

Então

$$\Sigma_b = \int d^3z\ \pi^\mu_a\ C^a_{bc}\ A^c_\mu \qquad (V-61)$$

As transformações geradas por (V-61) sob os campos de gauge são

$$\{\Sigma_a, A_b^\mu(x)\} = \int d^3z \, \dot{C}_{aec} \, A_\nu^e(z) \, \{\pi_c^\nu(z), A_b^\mu(x)\} = C_{abc} \, A_c^\mu(x) \qquad \text{(V-62)}$$

Isto nos mostra que sob Σ_a os campos de gauge se transfor - mam segundo a representação adjunta do grupo.

Os geradores Σ_a obedecem a álgebra

$$\{\Sigma_a, \Sigma_b\} = \int d^3z \int d^3x \, C_{aec} \, C_{bdf} \{ A_\mu^e(z) \, \pi_c^\mu(z), A_\nu^d(x) \, \pi_f^\nu(x)\}$$

$$= C_{abc} \int d^3z \, C_{cdf} \, A_\nu^d \, \pi_f^\nu =$$

$$= C_{abc} \, \Sigma_c \qquad \text{(V-63)}$$

donde vemos que a álgebra gerada pelos Σ_a é isomorfa a álge bra de Lie do grupo de gauge.

CAPÍTULO VI

CRITÉRIOS PARA A ESCOLHA DE UM CONJUNTO DE CONDIÇÕES DE GAUGE

Como já vimos no capítulo III, um conjunto satisfatório de condições de gauge $\Omega^a[A] = 0$, deve satisfazer a três critérios: 1) as condições devem remover a liberdade de gauge da teoria: 2) as condições devem ser atingíveis; 3) as condições devem ser preservadas no tempo. Estes três critérios serão examinados a seguir para os campos eletromagnético e Yang-Mills nos gauges de Lorentz, Coulomb e Axial.

VI.1. A REMOÇÃO INCOMPLETA DA LIBERDADE DE GAUGE: liberdade de gauge intrínseca remanescente e cópias de gauge.

O gauge de Coulomb no eletromagnetismo, como será visto na seção VI-4, é o único exemplo em que a liberdade de gauge é completamente removida. Nos demais casos após se impor as condições, ainda permanece uma liberdade de gauge denominada de liberdade de gauge intrínseca remanescente ou surge o fenômeno de cópias de gauge. Estas situações ficam melhor esclarecidas através de exemplos

Consideremos o campo eletromagnético no gauge axial

$$\Omega[A] = \eta_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(VI.1.1)}$$

onde $\eta = \{\eta_\mu\}$ é um vetor constante. Escolhendo $\eta = (0,0,0,1)$ tem-se que

$$\Omega[A] = A^3 = 0 \qquad \text{(VI.1.2)}$$

Esta condição não fixa o gauge completamente, porque, podemos por uma transformação de gauge

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Delta \qquad \text{(VI.1.3)}$$

com parâmetro Δ independente de x^3, obter um novo potencial A'^{μ} que também satisfaz a tal condição. O ponto a ser salientado é que Δ não depende do potencial original A^{μ}. Este fato caracteriza o que se entende por uma liberdade de gauge intrínseca remanescente.

Consideremos agora a teoria de Yang-Mills no gauge de Coulomb

$$\Omega^a[A] = \partial^i A_i^a = 0 \qquad \text{(VI.1.4)}$$

Esta condição também não fixa o gauge completamente. Podemos por uma transformação de gauge infinitesimal

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g} D^{ab}_\mu w_b \qquad \text{(VI.1.5)}$$

encontrar A'^a_μ que também satisfará a condição de Coulomb. Para isto basta que as equações

$$\partial^i (D^{ab}{}_i w_b) = 0 \qquad \text{(VI.1.6)}$$

admitam soluções não triviais. Como o operador de derivação covariante D^{ab}_μ envolve os campos originais A^a_μ, as soluções da equação acima dependerão destes campos. Os campos A'^a_μ são denominados de cópias de gauge dos campos A^a_μ.

Os dois exemplos apresentados exibem diferenças características entre as duas situações que podem ocorrer quando a condição de gauge imposta não remove completamente a liberdade de gauge da teoria. No caso da liberdade de gauge intrínseca remanescente, os parâmetros das transformações de gauge não dependem dos campos originais, enquanto que no fenômeno de cópias de gauge dependem.

A existência das cópias de gauge foi demonstrada pela primeira vez por Gribov para a a teoria de Yang-Mills no gauge de Coulomb [17]. Por este motivo as cópias de gauge são também denominadas de ambiguidade de Gribov. Usando a forma finita da lei de transformação dos potenciais $\vec{A}^\mu$

$$\vec{A}'_\mu = U\vec{A}U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (VI.1.7)$$

encontra-se que

$$\partial_i \vec{A}'^i = \frac{i}{g} D_i\left[(\partial_i U)U^{-1}\right] \qquad (VI.1.8)$$

A ambiguidade de Gribov ocorre sempre que

$$D_i\left[(\partial^i U)U^{-1}\right] = 0 \qquad VI.1.9)$$

Quando isto acontece existem campos $\vec{A}'^k$ relacionados com $\vec{A}^k$ por uma transformação de gauge e que são também transversais. Observemos que a equação (VI.1.6) é a versão infinitesimal da equação acima.

Gribov [17] mostrou que a equação (VI.1.9) pode ser obtida a partir da integral de ação

$$S = \int d^3z \; TR\left[\partial_i U^{-1}\partial^i U - \frac{2i}{g}(\partial_i U)U^{-1}\vec{A}^i + \lambda(UU^{-1} - 1)\right] \qquad (VI.1.10)$$

De fato , de $\delta S = 0$, onde

$$\delta S = \int d^3z \; TR\{\left[\lambda U^{-1} - \partial_i(\partial_i U^{-1} - \frac{2i}{g}U^{-1}\vec{A}^i)\right]\delta U - $$
$$- \left[\lambda U + \frac{2i}{g}\vec{A}^i\partial_i U + \partial_i\partial^i U\right]\delta U^{-1}\} +$$
$$+ (\text{ termos de fronteira}) \qquad (VI.1.11)$$

seguem as equações

$$\lambda U - \partial^i \partial_i U - \frac{2i}{g} \vec{A}_i \partial^i U = 0 \qquad \text{(VI.1.12a)}$$

e

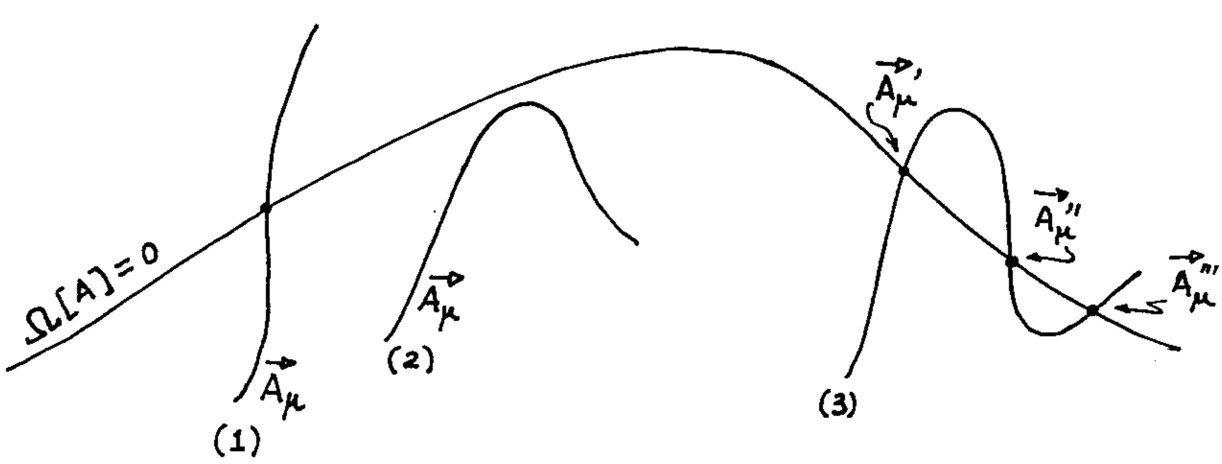
$$\lambda U^{-1} - \partial_i \partial^i U^{-1} + \frac{2i}{g} \partial_i U^{-1} \vec{A}^i = 0 \qquad \text{(VI.1.12b)}$$

Estas equações e a equação de vínculo $UU^{-1} = 1$ permitem en - contrar o multiplicador de lagrange

$$\lambda = - \partial^i U^{-1} \partial_i U + \frac{i}{g} U^{-1} \vec{A}^i \partial_i U - \frac{i}{g} \partial_i U^{-1} \vec{A}_i U \qquad \text{(VI.1.13)}$$

Com este resultado e qualquer uma das equações em (VI.1.12), obtém-se a equação (VI.1.9).

As condições de gauge $\Omega^a[A] = 0$, definem uma hipersuperfície no espaço das funções $A^a_\mu(x)$. Introduzindo - se a noção de órbita do campo A^a_μ, pode-se fazer uma imagem geométrica das situações em que as condições fixam ou não completamente o gauge e a situação em que o gauge não pode ser atingido. Define-se a órbita do campo A^a_μ, denotada por $\mathcal{O}(A)$, como o conjunto de todos os campos A'^a_μ obtidos de A^a_μ por meio de uma transformação de gauge. No espaço das funções A^a_μ, a órbita pode ser representada por uma linha. Consideremos então a figura abaixo,



Na situação (1) a órbita intercepta a hipersuperfície em um só ponto. Neste caso o gauge pode ser atingido e toda liberdade de gauge é removida. Na situação (2) a condição não pode ser atingida, $\Omega^a[A] = 0$ não é um bom conjunto de condições de gauge. Na situação (3) as condições $\Omega^a[A] = 0$, não fixam o gauge completamente, isto é, existe um certo número de configurações do campo A_μ^a, relacionados por transformações de gauge que também satisfazem a tais condições de gauge.

VI.2. PRESERVAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE GAUGE

Numa formulação lagrangeana de uma teoria ao se impor um conjunto de condições de gauge $\Omega^a[A] = 0$, a lagrangeana L do sistema é alterada da seguinte forma [13,18]

$$L \to L' = L + \frac{1}{2\alpha}(\Omega^a[A])^2 \qquad \text{(VI.2.1)}$$

onde α é um multiplicador de lagrange.

Vamos nesta formulação examinar a preservação das condições de gauge de Lorentz, Axial e de Coulomb no eletromagnetismo e na teoria de Yang-Mills. Consideremos inicialmente o eletromagnetismo no gauge de Lorentz

$$\Omega[A] = \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(VI.2.2)}$$

A lagrangeana do sistema com esta condição de gauge se escreve

$$L' = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \qquad \text{(VI.2.3)}$$

donde se obtém a equação de movimento

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}\partial^\mu \Omega[A] = 0 \qquad \text{(VI.2.4)}$$

Usando na equação acima o fato que $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, obtém-se que

$$\Box \Omega = 0 \qquad \text{(VI.2.5)}$$

A solução desta equação pode ser expressa como:

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(P,r)} \frac{t}{4\pi r^2} dS\, \Omega_1(x_1 + n_1 r,\ x_2 + n_2 r,\ x_3 + n_3 r) +$$

$$+ \frac{t}{4\pi r^2} \int_{S(P,r)} dS\, \Omega_2(x_1 + n_1 r,\ x_2 + n_2 r,\ x_3 + n_3 r) \qquad \text{(VI.2.6)}$$

onde

$$\Omega_1 = \Omega(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t=0) \equiv \Omega(\vec{x},\ t=0) \qquad \text{(VI.2.7a)}$$

$$\Omega_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial t}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t=0) \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial t}(\vec{x}, t=0) \qquad \text{(VI.2.7b)}$$

P é o ponto de coordenadas (x_1, x_2, x_3), S é a superfície esférica de raio r centrada em P e n_i são os cossenos diretores.

A expressão (VI.2.6) sugere a escolha das condições iniciais

$$\Omega_1(\vec{x}\ , t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.8a)}$$

$$\Omega_2(\vec{x}\ , t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.8b)}$$

o que garante a preservação da condição de gauge de Lorentz em todos os instantes.

Se a condição de gauge é a condição de Coulomb

$$\Omega[A] = \partial_i A^i = 0 \qquad \text{(VI.2.9)}$$

a verificação da preservação desta condição de gauge é trivial. De fato, repetindo o mesmo procedimento que fizemos no gauge de Lorentz, das equações de movimento encontra- se que

$$\nabla^2 \Omega(\vec{x}, t) = 0 \qquad \text{(VI.2.10)}$$

Impondo-se a condição inicial

$$\Omega(\vec{x}, t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.11)}$$

vemos que a condição de gauge de Coulomb será preservada.

Consideremos agora o eletromagnetismo no gauge axial, definido pela condição

$$\Omega[A] = \eta_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(VI.2.12)}$$

Da lagrangeana

$$L' = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\eta_\mu A^\mu)^2 \qquad \text{(VI.2.13)}$$

obtém-se a equação de movimento

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}\eta^\beta \Omega = \frac{1}{\alpha}\eta^\beta \eta_\mu A^\mu \qquad \text{(VI.2.14)}$$

Usando na equação acima que $\partial_\alpha \partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0$, e escolhendo $\eta = (0, 0, 0, 1)$ encontra-se que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{(VI-2-15)}$$

Isto significa que $\Omega = A^3$ não depende da coordenada x^3. Então a componente $\beta = 3$ da equação de movimento do campo A_μ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{D}\,\Omega(t, x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_3}(\partial^\alpha A_\alpha) \equiv f(t, x_1, x_2) \qquad \text{(VI.2.16)}$$

onde

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \qquad \text{(VI-2.17)}$$

Vamos obter formalmente a solução da equação

$$\mathcal{D}\,\Omega(t, x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) \qquad \text{(VI.2.18)}$$

A solução geral da equação homogenea que lhe é associada

$$\mathcal{D}\,\Omega = 0 \qquad \text{(VI.2.19)}$$

pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\Omega} = \int d^4k\left[\, a(k)e^{i(k_o t - k_1x_1 - k_2x_2)} + b(k)e^{-i(k_o t - k_1x_1 - k_2x_2)}\right] \qquad \text{(VI.2.20)}$$

com

$$k_o^2 - \left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{a}\right) = 0 \qquad \text{(VI.2.21)}$$

A solução formal da equação não-homogenea (VI.2.18) é:

$$\bar{\bar{\Omega}} = \int dt'\,dx_1'\,dx_2'\; G(t - t';\, x_1 - x_1';\, x_2 - x_2')\,f(t', x_1', x_2') \qquad \text{(VI.2.22)}$$

onde $G(t - t';\, x_1 - x_1';\, x_2 - x_2')$ é a função de Green do operador $\mathcal{D}$ e é definida por

$$\mathcal{D}\,G = \delta(t - t')\,\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2') \qquad \text{(VI.2.23)}$$

A solução geral da equação (VI.2.18) é então

$$\Omega = \bar{\Omega} + \int dt'dx_1'dx_2' \; G(t-t'; \; x_1 - x_1'; \; x_2 - x_2') \; f(t',x_1',x_2') \qquad \text{(VI.2.24)}$$

Usando na equação acima as condições iniciais

$$\Omega(x_1, \; x_2, \; t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.25a)}$$

e

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}(x_1, \; x_2, \; t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.25b)}$$

encontra-se que os coeficientes a(k) e b(k) são nulos e com isto pode-se garantir a preservação do gauge axial em todos os instantes.

Vamos agora verificar a preservação das condições de gauge já mencionadas na teoria de Yang-Mills. Consideremos esta teoria no gauge de Lorentz

$$\Omega^a = \partial^\mu A_\mu^a = 0 \qquad \text{(VI.2.26)}$$

A lagrangeana do sistema neste gauge é:

$$L' = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \qquad \text{(VI.2.27)}$$

donde obtém-se as equações de movimento

$$\partial_\nu F_c^{\mu\nu} + C_{cdb} F_d^{\mu\nu} A_\nu^b + \frac{1}{\alpha^a}\partial^\mu \Omega^a = 0 \qquad \text{(VI.2.28)}$$

Em termos dos Ω^a definidos pela equação (VI.2.26), os campos A_μ^a podem ser escritos como

$$A_\mu^a(z) = \int_{-\infty}^{z_\mu} \Omega^a(z_\perp, z_\mu') \, d'z_\mu \qquad \text{(VI.2.29)}$$

onde a curva foi escolhida como paralela ao eixo da variável de integração e $z_\perp$ foi mantido fixo. Substituindo a equação a cima na equação de movimento do campo A^a_μ e usando o fato que $D_\mu D_\nu \vec{F}^{\mu\nu} = 0$, encontra-se que Ω^a deve satisfazer a equação

$$\Box\Omega^a + gC^a_{bc}\left[\int_{-\infty}^{z_\mu}\Omega^c(z_\perp, z'_\mu)\, dz'_\mu\right]\partial^\mu\Omega^b = 0 \qquad \text{(VI.2.30)}$$

Não vemos como resolver esta equação e escolher condições iniciais apropriadas de modo a garantir a preservação do gauge

Para o campo de Yang-Mills no gauge de Coulomb

$$\Omega^a = \partial^i A^a_i = 0 \qquad \text{(VI.2.31)}$$

encontra-se que Ω^a deve satisfazer a equação

$$\nabla^2\Omega^a + gC^a_{bc}\left[\int_{-\infty}^{z_j}\Omega^c(z_\perp, z'^j)\, dz'^j\right](\partial_j\Omega^b) = 0 \qquad \text{(VI.2.32)}$$

Desta equação vemos que se impusermos a condição inicial

$$\Omega^a(\vec{x}, t=0) = 0 \qquad \text{(VI.2.33)}$$

o gauge de Coulomb será preservado no tempo.

Consideremos finalmente a teoria de Yang-Mills no gauge axial

$$\Omega^a = \eta^\mu A^a_\mu = 0 \qquad \text{(VI.2.34)}$$

Repetindo o mesmo procedimento que fizemos para o eletromagnetismo neste gauge, obtém-se que $\vec{\Omega} = \Omega^a T_a$ não depende da coordenada x^3 e deve satisfazer a seguinte equação

$$\left(D_0^2 - D_1^2 - D_2^2 - \frac{1}{a}\right)\vec{\Omega}(x_0, x_1, x_2) = D_0(\partial^3\vec{A}^0) + $$

$$+ D_1(\partial^3\vec{A}^1) + D_2(\partial^3\vec{A}^2) \qquad \text{(VI.2.35)}$$

Aqui também não vemos como resolver esta equação e escolher condições iniciais que garantam a preservação do gauge.

VI.3. A POSSIBILIDADE DE ATINGIR O GAUGE.

Nesta seção nós vamos considerar o campo eletromagnético e o campo de Yang-Mills nos gauges de Lorentz, axial e de Coulomb e analisar a possibilidade de atingir estes gauges. Consideremos primeiramente o campo eletromagnético.

(a) gauge de Lorentz,

$$\Omega[A] = \partial^\mu A_\mu = 0 \qquad \text{(VI.3.1)}$$

Esta condição de gauge pode sempre ser atingida. De fato, suponhamos que A_μ não satisfaz a tal condição. Então, se o gauge pode ser atingido, deve existir uma transformação

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Delta \qquad \text{(VI.3.2)}$$

tal que $\partial^\mu A'_\mu = 0$. Para que isto aconteça Δ deve satisfazer a equação diferencial

$$\Box \Delta = - \partial_\mu A^\mu \qquad \text{(VI.3.3)}$$

A solução formal desta equação é:

$$\Delta(x) = -\int d^4 z \, \frac{\delta(x_o \mp [z_o - |\vec{x} - \vec{z}|]\partial_\mu A^\mu(z)}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} \qquad \text{(VI.3.4)}$$

(b) gauge axial

$$\Omega[A] = A^3 = 0 \qquad \text{(VI.3.5)}$$

Suponhamos que A_μ não satisfaz a esta condição. Como no caso anterior, se esta condição pode ser atingida, deve existir uma transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Delta \qquad (VI.3.6)$$

tal que $A'^3 = 0$. Então, para que a condição de gauge possa ser atingida, $\Delta(x)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\partial_3 \Delta = - A_3 \qquad (VI.3.7)$$

A solução formal desta equação é:

$$\Delta(x) = -\int dx'_3 \; G(x_3 - x'_3) \; A_3(x_o, x_1, x_2, x'_3) \qquad (VI.3.8)$$

onde $G(x_3 - x'_3)$ é a função de Green do operador ∂_3

(c) gauge de Coulomb

$$\Omega[A] = \partial_i A^i = 0 \qquad (VI.3.9)$$

Esta condição de gauge pode também ser atingida. Se A^i não a satisfaz podemos encontrar A'^i por uma transformação de gauge

$$A'^i = A^i + \partial^i \Delta \qquad (VI.3.10)$$

que satisfara a tal condição. Para isto basta o parâmetro Δ ser dado por

$$\Delta = -\int d^3z \; \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} \partial^i A_i(z) \qquad (VI.3.11)$$

o que nos mostra que o gauge de Coulomb pode ser atingido.

Daqui em diante consideraremos a possibilidade de atingir estes gauges na teoria de Yang-Mills.

(d) gauge de Lorentz,

$$\Omega^a[A] = \partial^\mu A_\mu^a = 0 \tag{VI.3.12}$$

Se A_μ^a não satisfaz a esta condição, A'^a_μ obtido por uma transformação de gauge

$$A'^a_\mu = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ab} w_b \tag{VI.3.13}$$

satisfará a tal condição se existir solução para a equação

$$\partial^\mu D_\mu^{ab} w_b = - g \partial^\mu A_\mu^a \tag{VI.3.14}$$

A solução formal desta equação é dada por

$$w_a(x;\vec{A}) = -g \int d^4z \; G_{ab}(x, z, \vec{A}) \; \partial^\mu A_\mu^b(z) \tag{VI.3.15}$$

onde G_{ab} é a função de Green do operador $\partial^\mu D_\mu^{ab}$.

(e) gauge axial

$$\Omega^a[A] = A_3^a = 0 \tag{VI.3.16}$$

Suponhamos que A_μ^a não satisfaz a esta condição. Se este gauge pode ser atingido deve existir uma transformação

$$A'^a_\mu = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ab} w_b \tag{VI.3.17}$$

com parâmetro w_b satisfazendo a equação

$$D_3 w^b = -g A_3^b \tag{VI.3.18}$$

A solução formal desta equação é:

$$w^a(x,\vec{A}) = -g \int dx'_3 \; G(x_3 - x'_3;\vec{A}) \; A_3^a(x_1, x_2, x'_3, t) \tag{VI.3.19}$$

onde $G(x_3 - x'_3, \vec{A})$ é a função de Green do operador D_3.

(c) gauge de Coulomb,

$$\Omega^a[A] = \partial^i A^a_i = 0 \qquad \text{(VI.3.20)}$$

Suponhamos que A^a_μ não satisfaz a esta condição. Se este gauge pode ser atingido deve existir uma transformação

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g} D^{ab}_\mu w_b \qquad \text{(VI.3.21)}$$

com parâmetro w_b satisfazendo a equação

$$\partial^i (D^{ab}_i w_b) = - g\, \partial^i A^a_i \qquad \text{(VI.3.22)}$$

Formalmente a solução desta equação é:

$$w_a = - g \int d^3 z\, G_{ab}(x, z, \vec{A})\, \partial^i A^b_i(z) \qquad \text{(VI.3.23)}$$

onde G_{ab} é a função de Green do operador $\partial^i D^{ab}_i$.

VI.4. A ELETRODINÂMICA NUMA FORMULAÇÃO INDEPENDEMTE DE GAUGE.

A lagrangeana do campo eletromagnético é

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad \text{(VI.4.1)}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \text{(VI.4.2)}$$

As equações de movimento do campo A_μ são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(VI.4.3)}$$

Observemos que tanto o tensor de intensidade do campo como as equações de movimento acima são invariantes pelas transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Delta \qquad \text{(VI.4.4)}$$

Observemos também que as componentes espaciais dos momentos canônicos π^μ são transversais

$$\partial_i \pi^i = 0 \qquad \text{(VI.4.5)}$$

Vamos usar as equações de movimento (VI.4.3) para obter as variáveis independentes de gauge. Da componente "o" obtém-se uma expressão formal para a variável A^o,

$$A^o = -\frac{1}{\nabla^2}\,\partial^o(\partial_k A^k) \qquad \text{(VI.4.6)}$$

As componentes espaciais das equações de movimento se escrevem

$$\partial_o \partial^o A^i - \partial_o \partial^i A^o - \nabla^2 A^i - \partial_k \partial^i A^k = 0$$

$$\text{(VI.4.7)}$$

Usando a equação (VI.4.6) na equação acima, obtém-se que

$$\partial_o \partial^o A^i - \nabla^2 A^i - \partial_k \partial^i A^k + \partial^i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j (\partial_o \partial^o A^j) = 0$$

$$\text{(VI.4.8)}$$

Esta equação pode ainda ser escrita na forma

$$g_{ij} \partial_o \partial^o (g^{kj} + \partial^j \frac{1}{\nabla^2} \partial^k) A_k - (g_{ij} \nabla^2 + \partial_i \partial_j)(g^{jk} + \partial^j \frac{1}{\nabla^2} \partial^k) A_k = 0$$

$$\text{(VI.4.9)}$$

Usando a identidade

$$(g_{ij}\nabla^2 + \partial_i\partial_j)(g^{jk} + \partial^j\frac{1}{\nabla^2}\partial^k) \equiv g_{ij}(g^{jk}\nabla^2 + \partial^j\partial^k) \tag{VI.4.10}$$

na equação (VI.4.9), segue que

$$(g_{ij}\Box - \partial_i\partial_j)(g^{kj} + \partial^j\frac{1}{\nabla^2}\partial^k)A_k = 0 \tag{VI.4.11}$$

Definindo as variáveis

$$B^j = (g^{kj} + \partial^j\frac{1}{\nabla^2}\partial^k)A_k \tag{VI.4.12}$$

as componentes espaciais das equações de movimento se escrevem

$$\Box B^i = 0 \tag{VI.4.13}$$

Pode-se verificar facilmente que as variáveis B_j são transversais

$$\partial_j B^j = 0 \tag{VI.4.14}$$

e são invariantes por transformações de gauge. Na verdade este fato já era de se esperar, isto porque (VI.4.13) segue de uma equação invariante de gauge.

É importante salientar que a expressão(VI.4.12) não pode ser invertida de modo a expressar A_j em termos de B_j, porque o operador

$$(g^{kj} + \partial^j\frac{1}{\nabla^2}\partial^k) \tag{VI.4.15}$$

é singular. No entanto, a lagrangeana do campo eletromagnético pode ser expressa apenas em termos das variáveis B_j:

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_o B_i)(\partial^o B^i) \quad -\frac{1}{4}(\partial_i B_j - \partial_j B_i)(\partial^i B^j - \partial^j B^i)$$

(VI.4.16)

Agora, da expressão (VI.4.12), vê-se que o campo B_i é obtido formalmente do campo A_i por uma transformação de gauge para o gauge de Coulomb com parâmetro

$$\Delta = \frac{1}{\nabla^2}\,\partial_k A^k \tag{VI.4.17}$$

Como a definição da variável B_j é sugerida pela própria equação de movimento após a remoção da variável dependente A^o, pode-se então pensar que o gauge de Coulomb , no qual toda a liberdade de gauge é removida,é sugerido pelas equações de movimento.

Consideremos a interação do campo eletromagnético com o campo de Dirac. A lagrangeana total deste sistema se escreve:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{VI.4.18}$$

As transformações de gauge do campo de Dirac são:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\Delta(x)}\psi \tag{VI-4-19a}$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-ie\Delta(x)}\bar{\psi} \tag{VI.4.19b}$$

Procedendo como no caso anterior, da componente "o" da equação de movimento

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{VI.4.20}$$

encontra-se que

$$A^o = -\frac{1}{\nabla^2}\left[\partial^o\partial_k A^k - e\psi^+\psi\right] \qquad \text{(VI.4.21)}$$

Usando as equações (VI.4.21) e (VI.4.12) pode-se escrever a lagramgeana do sistema na forma:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2}(\partial_o B_i - e\partial_i \frac{1}{\nabla^2}\psi^+\psi)^2 - \frac{1}{4}(\partial_i B_j - \partial_j B_i)^2 + \\ & + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\psi^+\left[\frac{1}{\nabla^2}(-e\psi^+\psi + \partial_o\partial_k A^k)\right]\psi - \\ & - e\bar{\psi}\gamma^k(B_k - \partial_k \frac{1}{\nabla^2}\partial_i A^i)\psi \end{aligned} \qquad \text{(VI.4.22)}$$

Definamos os campos invariantes por transformações de gauge

$$\Phi(x) = e^{-ie\frac{1}{\nabla^2}\partial_k A^k}\psi(x) \qquad \text{(VI.4.23a)}$$

$$\bar{\Phi}(x) = e^{ie\frac{1}{\nabla^2}\partial_k A^k}\bar{\psi}(x) \qquad \text{(VI.4.23b)}$$

Em termos destes campos e dos campos B_i a lagrangeana do sistema se escreve

$$\begin{aligned} L = & \left[-\frac{1}{2}(\partial_o B_i - e\partial_i \frac{1}{\nabla^2}\Phi^+\Phi)^2 - \frac{1}{4}(\partial_i B_j - \partial_j B_i)^2 + \right. \\ & \left. + \bar{\Phi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Phi - e^2\Phi^+(\frac{1}{\nabla^2}\Phi^+\Phi)\Phi - e\bar{\Phi}\gamma^k B_k\Phi\right] \end{aligned} \qquad \text{(VI.4.24)}$$

Esta lagrangeana está expressa inteiramente em termos das variáveis independentes de gauge. Certamente isto reflete o fato que a imposição da condição de Coulomb remove toda a liberdade de gauge da eletrodinâmica.

Vamos agora, guiado pela eletrodinâmica, tentar colocar a teoria de Yang-Mills numa formulação independente de gauge. A lagrangeana deste sistema é:

$$L = -\frac{1}{2} \mathrm{TR}(\vec{F}^{\mu\nu} . \vec{F}_{\mu\nu}) \qquad \text{(VI.4.25)}$$

As transformações de gauge são

$$\vec{A}_\mu \rightarrow \vec{A}'_\mu = U\vec{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad \text{(VI.4.26)}$$

No caso da eletrodinâmica, as equações de movimento foram usadas para a obtenção das variáveis independentes de gauge e isto foi de muita importância naquela construção porque estas equações de movimento são invariantes de gauge. No entanto,na teoria de Yang-Mills não podemos usar as equações de movimento

$$D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(VI.4.27)}$$

para obter as variáveis independentes de gauge porque estas equações não são invariantes de gauge.

Observemos que as componentes espaciais dos momentos π^a_μ satisfazem as equações de vínculos

$$D^{ab}_i \pi^i_b = 0 \qquad \text{(VI.4.}$$

Estas equações envolvem os campos A^a_μ e portanto os momentos canônicos não são transversos como no eletromagnetismo.

Em vista da forma da lagrangeana (VI.4.16) , o que ainda pode ser tentado, é definir os momentos transversais por

$$\pi'^{a}_{i} = (g^{ab}g_{ij} - gC^{abc}\partial_i \frac{1}{\nabla^2} A^c_{\ j})\pi^j_b \qquad \text{(VI.4.29)}$$

e procurar as variáveis canônicas transversais $B^a_{\ i}$ definindo

$$\pi'^{a}_{i} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_o B^i_a)} = -\partial_o B^a_i \qquad \text{(VI.4.30)}$$

Isto não nos levaria a nada,pois, as variáveis B^a_i que obteríamos não seriam invariantes de gauge como pode ser visto da equação (VI.4.28).

Até este ponto tudo o que fizemos foi tentar seguir o mesmo procedimento que usamos na eletrodinâmica. Na eletrodinâmica relacionamos o "sucesso" do método ao fato do gauge de Coulomb remover toda a liberdade de gauge da teoria. O "fracasso" do método na teoria de Yang-Mills pode ser relacionado com a não-remoção total da liberdade de gauge no gauge de Coulomb, onde como se sabe, ocorre a ambiguidade de Gribov.

VI.5. A ESCOLHA DAS CONDIÇÕES DE GAUGE E A INVARIÂNCIA DE POINCARÉ DA TEORIA.

As condições de gauge usualmente impostas não são invariantes por transformações de Poincaré e isto destrói a covariância da teoria. No entanto, como demonstraremos a seguir, a invariância da teoria pode sempre ser reobtida por uma transformação de gauge.

Consideremos a lagrangeana L associada com o campo eletromagnético ou o campo de Yang-Mills. Por uma transformação de Poincaré definida por

$$\delta x^{\mu} = x'^{\mu} - x^{\mu} = W^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + \varepsilon^{\mu} \qquad \text{(VI.5.1)}$$

tem-se que

$$\delta L = \partial_{\mu}(L\delta x^{\mu}) \qquad \text{(VI.5.2)}$$

de modo que a variação na integral de ação fica dada por

$$\delta S = \int d^4x \ \partial_{\mu}(L\delta x^{\mu}) \qquad \text{(VI.5.3)}$$

Usando o teorema de Gauss, a integral acima pode ser convertida numa integral sobre a superfície de contorno da região de integração. Nós podemos imaginar esta região como sendo definida por duas superfícies tipo espaço em $t= \pm \infty$, que denotaremos por Ω_+ e Ω_-, e uma superfície S tipo tempo no infinito espacial. Então:

$$\delta S = \int_{\Omega_+} d^3x \ L(\vec{x}, \ t=+\infty)\,\delta x^0 \ - \int_{\Omega_-} d^3x \ L(\vec{x}, \ t=-\infty)\,\delta x^0 \ + \ + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_i \int_S d\omega\,[\vec{x}]^2 L([\vec{x}]\to\infty, t)\,\delta x^i \qquad \text{(VI.5.4)}$$

As duas primeiras integrais na expressão acima se anularão se impusermos que os campos satisfazem a condição $A^a_{\mu}(x,t=\infty) = A^a_{\mu}(x, \ t=-\infty)$. É claro então que a invariância de S ficará determinada pelo comportamento dos campos no infinito espacial e este comportamento deve ser tal que anule o último termo da equação (VI.5.4). Para que isto ocorra L deve tender a zero mais rapidamente que $|x|^{-3}$.

Na discussão que se segue, vamos supor que o comportamento dos campos satisfazem os critérios mencionados no parágrafo anterior. Feita a escolha das condições de gauge $\Omega^a[A] = 0$, estamos basicamente usando a lagrangeana

$$\bar{L} = L + \frac{1}{2\alpha}(\Omega^a[A])^2 \tag{VI.5.5}$$

Para verificar a invariância de Poincaré da teoria com a condição de gauge imposta, deveremos mostrar que $\delta\bar{L}$ pode sempre ser escrita como uma divergência.

Para a lagrangeana $\bar{L}$ tem-se

$$\delta\bar{L} = \partial_\mu(\bar{L}\delta x^\mu) + \frac{1}{\alpha}\Omega^a[A]\,\delta_P\Omega^a[A] \tag{VI.5.6}$$

onde $\delta_P\Omega^a[A]$ indica a variação em Ω^a decorrente da variação $\delta A^\mu_a = w^\mu{}_\nu A^\nu_a + \varepsilon^\mu$ nos campos. O segundo termo da expressão acima é que, com excessão do gauge de Lorentz, destroi a invariância de Poincaré da teoria. A ideia é fazer uma transformação de gauge

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Delta \tag{VI.5.7}$$

no caso do eletromagnetismo ou

$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}D^{ab}_\mu w_b \tag{VI.5.8}$$

no caso do campo de Yang-Mills de modo a recobrar a invariância de Poincaré.

Como consequência das duas transformações, a variação da lagrangena $\bar{L}$ se escreve

$$\delta'\bar{L} = \partial_\mu(\bar{L}\delta x^\mu) + \frac{1}{\alpha}\Omega^a[A]\underset{P}{\delta}\Omega^a[A] + \frac{1}{\alpha}\Omega^a[A]\underset{G}{\delta}\Omega^a[A] \tag{VI.5. 9}$$

onde $\underset{G}{\delta}\Omega^a[A]$ é a variação em Ω^a decorrente das transformações de gauge. Os parâmetros das transformações de gauge devem ser escolhidos de tal forma que os dois últimos termos da equação acima se cancelem. Como veremos, para cada caso particular isto pode ser feito por simples inspeção, resultando em parâmetros de gauge que são funções dos parâmetros das transformações de Poincaré. Vamos examinar os casos dos gauges de Lorentz, Coulomb e axial no eletromagnetismo. Para a teoria de Yang-Mills o procedimento é similar e só apresentaremos os resultados.

(a) gauge de Lorentz,

$$\Omega[A] = \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{VI.5.10}$$

Como esta condição de gauge é invariante por transformações de Poincaré, a sua inclusão em $\bar{L}$ não destroi a cavariância da teoria.

(b) gauge de Coulomb

$$\Omega[A] = \partial_i A^i = 0 \tag{VI.5.11}$$

Esta condição de gauge não é invariante por transformações de Poincaré, Tem-se que

$$\underset{P}{\delta}\Omega[A] = \partial^k(W_{k\alpha}A^\alpha) \tag{VI.5.12}$$

Como

$$\underset{G}{\delta}\Omega[A] = -\nabla^2\Delta \qquad \text{(VI.5.13)}$$

podemos ver da equação (VI.5.9) que a invariância da teoria será reobtida se o parâmetro da transformação de gauge for dado por

$$\Delta = \frac{1}{\nabla^2}\partial^k(W_{k\alpha}A^\alpha) \qquad \text{(VI.5.14)}$$

(c) gauge axial

$$\Omega[A] = \eta_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(VI.5.15)}$$

Neste caso

$$\underset{P}{\delta}\Omega[A] = \eta_\mu W^\mu{}_\alpha A^\alpha + \eta_\mu \varepsilon^\mu \qquad \text{(VI.5.16)}$$

e

$$\underset{G}{\delta}\Omega[A] = \eta_\mu \partial^\mu \Delta \qquad \text{(VI.5.17)}$$

Com o parâmetro da transformação de gauge definido por

$$\partial^\mu\Delta = -W^\mu{}_\alpha A^\alpha \qquad \text{(VI.5.18)}$$

reobtém-se a invariância da teoria.

Os resultados acima podem ser facilmente generalizados para o caso do campo de Yang-Mills

GAUGE	CONDIÇÃO DE GAUGE $\Omega^a\|A\| = 0$	$\delta\Omega^a\|A\|$	PARÂMETRO DA TRANSFORMAÇÃO DE GAUGE
Lorentz	$\partial_\mu A^\mu_a = 0$	0	--
Coulomb	$\partial_i A^i_a = 0$	$\partial_i(W^i{}_\alpha A^\alpha_a)$	$\partial^i D^{ab}_i w_b = -g\partial^k(W_{k\alpha}A^\alpha_a)$
Axial	$\eta_\mu A^\mu_a = 0$	$\eta_\mu W^\mu{}_\alpha A^\alpha_a + \eta_\mu \varepsilon^\mu$	$D^{ab}w_b = -gW^\alpha{}_\mu A^a_\alpha$

com a condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3' \; A_\mu(x_1 , x_2 , x_3', t) \qquad = 0 \text{ para } \mu = o, 1, 2. \tag{VI.4}$$

Notenos das equações (VI.2) e (VI.4) para que o gauge possa ser atingido e a invariância da teoria sob o grupo de Poincarê ser reobtida deve-se ter que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3' \; A_\mu(x_1 , x_2 , x_3', t) = 0 \text{ para } \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{VI.5}$$

mostra um fenômeno análogo ao das "cópias de gauge" e também o fenômeno de "liberdade de gauge remanescente". O segundo exemplo mostra como a implementação de uma simetria local requer a introdução de uma nova coordenada. O formalismo neste exemplo é num certo sentido, análogo ao dos campos de gauge, e a lagrangeana resultante é singular.

Finalmente fizemos uma análise formal de alguns aspectos da teoria de gauge. Para algumas condições de gauge mais usuais mostramos como ou se o gauge pode ser atingido, se as condições fixam o gauge completamente e se o gauge é preservado durante a evolução do sistema. Certamente a maior parte deste assunto já é conhecida, mas acreditamos que os detalhes que apresentamos são de valor.

REFERENCIAS

1 . P.A.M. Dirac - Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University - N.Y. (1964)

2 . P.A.M. Dirac - Can. J. Math. Vol. 2 - 129 - (1950)

3 . A. Lichnerowics - Algèbre et analyse Lineaires Masson et Cie, 1956

4 . C.A.P. Galvão - Dinâmica Hamiltoniana de Sistemas com Vínculos - Notas de Curso - CBPF - (1982).

5 . R. Cawley - Phys. Rev. Letters , 42(1979), 413

6 . A. Frenkel - Phys. Rev. D, 21(1980), 2986.

7 . E.C.G. Sudarshan e N.Mukunda - Classical Dynamics: a moderns perspective, John Wiley and Sons, N.Y. (1974)

8 . L.D. Faddeev - Theor. and Math. Phys., 1(1970), 1

9 . T.D. Lee - Particle Physics and Introduction of Field Theory - Harwood Academic Publishers. - N.Y.(1981)

10. L.P. Eisenhart - Continuous Groups of Transformations , Dover Publications Inc., N.Y. (1961)

11. Herbert Goldstein - Classical Mechanics - 2a. edição Addison - Wesley Publishing Company - (1980)

12. J.A. Schouten - W. Van der Kulk - Pfaff's Problems and its generalizations Oxford Univ. Press, London (1949)

13. J.L.Lopes - Gauge Field Theories: an Introduction Oxford Pergamon Press, (1981)

14. Giulio Racah - Group Theory and Spectroscopy CERN 61-8/1961

15. Kerson Huang - Quarks, Leptons and Gauge Field World Scientific - 1982)

"UM ESTUDO SOBRE A DINÂMICA CLÁSSICA DE SISTEMAS COM VÍNCULOS"

JOÃO BAPTISTA TEIXEIRA BOECHAT

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Carlos Augusto Pinto Galvão/CBPF

Carlos Márcio do Amaral/UFRJ

Ívano Damião Soares/CBPF

Rio de Janeiro, 14 de junho de 1984