IOAV WAGA

INTRODUÇÃO DE UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO E UMA RADIAÇÃO ISOTRÓPICA NOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE SZEKERES

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1983-

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

- à Nazira Tomimura pela escolha do trabalho, pela orientação e por haver me iniciado na pesquisa científica;

- à Raquel pelo seu amor e carinho;

- a Davi, Pedro, Mateus e Isabel pela alegria desses dias;

- ao Ademir S. Lima, pelas excelentes idéias e seu companheirismo, tão raro hoje em dia;

- Ao "poeta" Marcelo Rebouças que, entre tantas coisas, mostrou-me a beleza na Relatividade Geral;

- ao amigo Alexandre Nader, pela revisão de grande parte dos manuscritos e por acreditar que não sou irrecuperável para a "última flor do mandacaru";

- aos amigos do Departamento de Física da UFPB, especialmente Victor Rivelles e Mário Assad, pelo apoio e pelas sugestões valiosas;

- ao Departamento de Física da UFPB onde encontrei condições propícias para realizar este trabalho;

- a CAPES e CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

Apresentamos uma nova classe de modelos cosmológicos inomogêneos, cuja fonte de curvatura é uma mistura de um fluido de poeira com uma radiação isotrópica que não interagem entre si e um campo eletromagnético que também não interage com os fluidos. Mostramos que esta classe evolui para homogeneidade e isotropia, no limite de grandes valores da coordenada temporal. Estudamos o comportamento assintótico, próximo à singularidade, de dois modelos da classe e exibimos que o campo magnético altera o tipo de singularidade, podendo diminuir a anisotropia na fase inicial. As equações de Killing são integradas e demonstramos que o espaço-tempo apresenta um grupo de isometrias de três parâmetros cujas órbitas são superfícies bidimensionais do tipo-espaço. Mostramos que os modelos são expansionistas, geodéticos, irrotacionais e do tipo D da classificação de Petrov com seções espaciais tridimensionais conformalmente planas.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Assinatura da métrica: (+,-,-,-)

Índices latinos e gregos, em geral, variam de 1 a 3 e 0 a 3, respectivamente.

Índices repetidos são somados, a menos que seja indicado o contrário.

Um ponto sobre qualquer quantidade denota derivada parcial em relação ao tempo.

Derivada parcial: $\phi_{,u} = \frac{\partial\phi}{\partial x^u}$

Derivada covariante: $A_{\mu\|\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_\lambda$

Simetrização de tensores: $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

Anti-simetrização de tensores: $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$

Tensor de Riemann:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\gamma}_{\sigma\nu}$$

Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\lambda\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad .$$

INTRODUÇÃO GERAL

To $\vec{B}$ or not to $\vec{B}$: that is the question...[110]

Em 1958, foi sugerido originalmente por Hoyle, a existência de um campo magnético primordial. Tal hipótese surgiu, historicamente, em virtude das dificuldades de se explicar satisfatoriamente a origem do campo magnético galáctico. Desde então, esta idéia foi objeto de uma série de publicações e em 1965, Zel'dovich[96] construiu os primeiros modelos cosmológicos relativísticos com matéria e campo magnético*. Ele admitiu que o campo magnético teria sido uniforme e permearia todo o universo durante uma fase hipotética, na qual a matéria também estaria distribuida uniformemente. Em uma fase subsequente, quando do processo de formação de galáxias, haveria uma modificação das linhas de campo pela matéria, que produziria a intensificação e o emaranhado do campo na galáxia[96]. Contudo, Zel'dovich limitou-se a discutir aspectos qualitativos dos modelos e foi Doroshkevich quem apresentou, pela primeira vez, as soluções exatas das equações de Einstein-Maxwell[49]. Esses modelos foram ainda reobtidos por Shikin[50] e independentemente por Thorne[51].

Além de explicar a origem do campo magnético galáctico, as consequências da existência de tal campo primordial seriam[98]:

---

*Anteriormente já haviam sido considerados modelos com um campo magnético puro[53,61].

1) Dependendo de sua intensidade, poderia produzir uma anisotropia na distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo; embora, seja difícil distinguir este efeito daquele decorrente do nosso movimento em relação ao referencial onde a radiação seria isotrópica.

2) Ele poderia ter influenciado a nucleosíntese nos instantes iniciais do universo, através de uma expansão anisotrópica e/ou alterando a taxa de decaimento de neutrons(108).

3) Ele poderia desempenhar um papel importante na formação de galáxias(97), na evolução de fontes de rádio e quasares, bem como, explicar a anisotropia observada na orientação de galáxias espirais(109).

Além disso, segundo Reinhardt e Thiel(98), admitindo-se que ocorreram pequenas turbulências na explosão inicial e no plasma intergaláctico, é provável que o campo primordial, em média, tenha permanecido uniforme até hoje. Considerando essa possibilidade Giznburg e Syrovatskii sugeriram um método de detecção desse campo através do efeito Faraday(99).

O efeito Faraday foi o primeiro efeito magnético-óptico descoberto e consiste, basicamente, na rotação do plano de polarização de uma onda eletromagnética ao atravessar um meio material submetido a um campo magnético intenso. A intensidade do campo magnético em um meio intergaláctico, pode ser estimada através das chamadas medidas de rotação de Faraday. Estas medidas dependem essencialmente da componente do campo na direção da linha de visada, da densidade média de elétrons e do comprimento do percurso da onda no meio (uma de finição precisa pode ser encontrada na ref.(122)).

Admitindo-se uma quantidade, não desprezível, de matéria ionizada no meio intergaláctico, se existe um campo intergaláctico, deve-se observar alguma medida de rotação de Faraday para fontes extragalácticas de ondas polarizadas. Há dificuldades nessas medidas. É difícil separar as contribuições da nossa galáxia e da própria fonte. Contudo, se atribuimos esse efeito inteiramente à nossa galáxia, não deve haver nenhuma diferença sistemática em medidas de objetos extragalácticos com diferentes "red shifts". Caso contrário, tais diferenças constituem um forte argumento a favor da existência do campo extragaláctico. Pode-se ainda argumentar que as diferenças decorrem de uma dependência intrínseca dessas medidas com a época cósmica. No entanto, se for observada uma dependência diferente com o "red shift" para diferentes regiões no espaço, este resultado nos garantiria uma contribuição intergaláctica anisotrópica às medidas de rotação[(98,100)].

Diversos trabalhos sobre interpretação de medidas de rotação de Faraday para fontes extragalácticas, têm sido publicados nos últimos anos[(98-106)]. Dentre esses destacamos o artigo de Sofue, Fujimoto e Kawabata[(105)] que estudaram 157 fontes com medidas de rotação e "red shift" conhecidos. Eles concluiram que efetivamente há a dependência anisotrópica mencionada acima e que esta não pode ser explicada pelo campo galáctico nem pela evolução das fontes. A anisotropia é interpretada como sendo devida a um campo magnético intergaláctico uniforme até $z \cong 2$ e que estaria apontando na direção $\ell \cong 100^{o}$ e $b \cong 15^{o}$. A fim de produzir os efeitos observados, considerando a densidade do universo igual à densidade crítica, eles estimaram a intensidade do campo em $2,7 \times 10^{-9}$ G.

Alguns autores, contudo, colocam em dúvida a existência desse campo intergaláctico[(104)]. Outros acreditam que, como a direção do campo é muito próxima ao campo galáctico local, é provável que Sofue e colaboradores mediram um efeito que tem origem na nossa galáxia[(106)].

Modelos cosmológicos espacialmente homogêneos com campo magnético, têm sido exaustivamente investigados.Entre vários trabalhos, além dos já mencionados, apontamos os artigos de Jacobs[(56)], Stewart-Ellis[(74)] e Vajk-Eltrgroth[(52)]. No entanto, não conhecemos na literatura nenhum trabalho de modelos com campo magnético espacialmente inomogêneos; uma exceção seria talvez o trabalho de Stewart-Ellis, porém neste caso os autores estão mais interessados na classificação de modelos.

Os modelos de Szekeres constituem o conjunto mais geral de soluções das equações de Einstein com matéria. Em particular, suas métricas da classe II têm tido um enorme interesse em Cosmologia. Algumas generalizações desses modelos podem ser encontradas na literatura (veja capítulo 2). Dentre essas destacamos o trabalho de Caderni e Pollock[(39)] que introduziram uma radiação cósmica de fundo isotrópica nas soluções de Szekeres.

A radiação cósmica de fundo (RCF), descoberta por Penzias e Wilson[(113)], é considerada uma das contribuições mais importantes, em cosmologia observacional, para a compreensão do universo em larga escala. Esta descoberta, bem como as indicações observacionais de que a radiação tem um espectro térmico, é interpretada como uma confirmação da hipótese de Gamov[112] de que o universo teve um passado extremamente denso e quente.

Segundo Partridge[111] a RCF é importante por duas razões: em primeiro lugar porque seus parâmetros essenciais (temperatura e isotropia) podem ser medidos com alta precisão . Em segundo, ela pode nos fornecer dados de uma época do universo que até agora nenhuma outra observação oferece.

Desde sua descoberta há um enorme interesse em detectar anisotropias nessa radiação. Tais anisotropias forneceriam, em princípio, informações valiosas sobre a origem e o crescimento de perturbações primordiais na matéria, que poderiam ter gerado as galáxias e os aglomerados de galáxias hoje observados.

Medidas na RCF indicam que ela é altamente isotrópica (1 parte em 10^3)[116], mas anisotropias de dipolo e quadrupolo foram detectadas[114]. A existência do termo de dipolo , já é bem estabelecida observacionalmente[119]. Uma questão , ainda em aberto, é se esta anisotropia seria ou não uma propriedade intrínseca do Universo. Alguns resultados recentes, se bem que não definitivos, indicam que ela é, em sua quase totalidade, devida ao nosso movimento em relação à radiação[118]. Contudo , o termo de quadrupolo não pode ser atribuido a uma anisotropia induzida (este termo não depende da velocidade relativa[115]), e se constituiria em uma prova de que o universo foi e possivelmente será inomogêneo[117]. Os últimos resultados observacionais na RCF não confirmam, no entanto, a existência desse termo[119,120].

Cabe observar que, segundo Partridge(111), o alto grau de isotropia da RCF não constitui-se em uma prova de que o universo é do tipo Friedman-Robertson-Walker; este resultado eliminaria apenas alguns modelos cosmológicos compatíveis tanto com a Relatividade Geral quanto com outras observações astronômicas.

Neste trabalho introduzimos aos modelos de Szekeres (classe II), uma radiação de fundo isotrópica e um campo magnético que teria uma origem primordial. Situamos nossa tese como uma extensão ao trabalho de Caderni e Pollock na linha iniciada por Zel'dovich.

No capítulo 1, descrevemos, em linhas gerais, os princípios fundamentais da Relatividade Geral e apresentamos as equações de campo da teoria. Definimos o objetivo da Cosmologia Relativística e discutimos as hipóteses usualmente utilizadas na construção de modelos cosmológicos. Em seguida desenvolvemos o formalismo matemático para o estabelecimento de isometrias e exibimos um critério para existência de homogeneidade espacial. Apresentamos a classificação das variedades homogêneas tridimensionais e discutimos algumas proprieades das métricas de Bianchi . Examinamos ainda os modelos de Friedman-Robertson-Walker e três classes de modelos espacialmente homogêneos e anisotrópicos, que guardam grande semelhança geométrica com nossas soluções.

No capítulo 2, apresentamos uma motivação para o estudo de cosmologias espacialmente inomogêneas. Estudamos, em seguida, algumas propriedades dos modelos espacialmente inomogêneos com simetria esférica e, com detalhes, os modelos de Szekeres.

Uma nova classe de modelos cosmológicos inomogêneos, tendo como fonte de curvatura um fluido perfeito constituido de uma mistura de poeira com uma radiação isotrópica, que não interagem entre si, e um campo eletromagnético, que também não interage com os fluidos, é apresentada no capítulo 3. Esta classe inclui uma generalização simples de um dos modelos encontrados por Doroshkevich[49] e também um caso particular dos modelos de Caderni-Pollock[39]. Mostramos que a classe evolui, no limite de grandes valores da coordenada temporal, para homogeneidade e isotropia. Estudamos o comportamento assintótico, próximo à singularidade, de dois modelos dessa classe e concluimos que o campo magnético altera o tipo de singularidade e, no caso estudado, diminui a anisotropia na fase inicial. As equações de Killing são integradas e demonstramos que o espaço-tempo apresenta um grupo de isometrias de três parâmetros cujas órbitas são superfícies bidimensionais do tipo-espaço. Mostramos que os modelos são expansionistas, geodéticos, irrotacionais, do tipo D da classificação de Petrov e com seções espaciais tridimensionais conformalmente planas.

CAPÍTULO 1

Modelos Cosmológicos Homogêneos

1.1) Cosmologia Relativística

O objetivo da Cosmologia pode ser definido como sendo o de determinar e investigar a estrutura do universo em larga escala. Por larga escala entendemos as distâncias dos super-aglomerados de galáxias, isto é, distâncias da ordem de 10^8 anos luz.

Neste trabalho não adotaremos nenhum tipo de "Princípio Cosmológico"(11). Partiremos apenas de uma hipótese de trabalho básica, adotada em Cosmologia desde Newton: as leis físicas válidas na Terra, que explicam satisfatoriamente os fenômenos observados no sistema solar podem ser extrapoladas para regiões mais distantes. A hipótese formulada é apenas um aspecto do chamado "Princípio Cosmológico", que é mais restritivo e, como discutiremos adiante, é a base dos modelos cosmológicos espacialmente homogêneos. Uma segunda hipótese que adotaremos é de que a astronomia "local" do universo é razoavelmente bem conhecida. Isto é, vamos supor que a matéria no universo está organizada em estrelas, grupos de estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias etc., e que esta estrutura é essencialmente a mesma em larga escala(83).

Das quatro interações fundamentais da natureza a gravitacional é a dominante em larga escala. Isto se deve ao fato de que as forças fracas e fortes são de curto alcance e os grandes agregados de matéria são eletricamente neutros. Portanto, devemos usar uma teoria de gravitação em Cosmologia e adotaremos a Relatividade Geral que parece ser a mais simples dentre as teorias de gravitações adequadas à descrição dos fenômenos físicos na escala do sistema solar.

A Relatividade Geral é uma teoria não euclidiana da gravitação que tem sua origem histórica a partir de dois princípios fundamentais: por um lado o "Princípio da Relatividade Generalizada" e por outro o "Princípio de Equivalência".

Einstein formulou o "Princípio da Relatividade Generalizada", estabelecendo que as leis físicas devem ter uma estrutura tal, que sejam válidas em sistemas de referências animados de qualquer movimento[82].

Sabemos que tanto a teoria da Relatividade Restrita quanto a Mecânica Clássica assentam suas bases na equivalência, para descrição das leis físicas, de todos os referenciais animados de movimento retilíneo e uniforme. Assim, se adotamos o "Princípio da Relatividade Generalizada", ou seja, se desejamos estender esta equivalência a observadores acelerados, necessitamos de uma nova descrição, tal que nela movimentos acelerados também possam ser considerados "livres".

Einstein resolveu esse problema introduzindo uma estrutura não euclidiana para o espaço-tempo, de tal forma que os movimentos acelerados no espaço-tempo euclidiano passam a ser considerados como movimentos livres descrevendo geodésicas nesse espaço-tempo curvo. Isto se mostra possível devido a propriedade de que as forças de inércia, associadas aos referenciais acelerados, imprimem às partículas-teste acelerações que independem da massa destas partículas, permitindo então a absorção dessas acelerações por uma estrutura não euclidiana para o espaço-tempo (71) (72).

É conhecido desde Galileu que a aceleração sofrida por um corpo em um campo gravitacional independe de sua natureza. Esta propriedade decorre da igualdade comprovada experimentalmente com grande precisão por Eötvös e Dicke, entre a massa inercial e a massa gravitacional. A teoria da Relatividade Geral, como teoria do campo gravitacional, fundamenta-se essencialmente sobre esta correspondência numérica (81).

Tendo as forças gravitacionais essa propriedade comum às forças de inércia, de provocarem acelerações que independem da massa da partícula-teste, podemos compensar uma força pela outra. No entanto, devido a convergência das linhas de força do campo gravitacional esta compensação só pode ser local.

Esta equivalência permitiu a Einstein formular o "Princípio de Equivalência" estabelecendo que dentro de uma região suficientemente pequena do espaço, um campo gravitacional é equivalente a um campo de forças criado por um movimento acelerado.

O "Princípio de Equivalência" nos assegura a existência, em todos os pontos do espaço-tempo de sistemas localmente inerciais, onde os efeitos de um campo de gravitação são eliminados utilizando-se um sistema de referências apropriado (sistema em queda livre). Temos então uma nova definição de sistemas de inércia na teoria da Relatividade Geral, que tem uma correspondência na teoria de superfícies de Gauss e Riemann na qual podemos sempre identificar uma pequena região de uma variedade não euclidiana com o espaço euclidiano tangente em um ponto daquela região [72].

Combinando-se o "Princípio da Relatividade Generalizada" e o "Princípio de Equivalência" podemos concluir que, da mesma forma que as forças de inércia, as forças gravitacionais podem ser absorvidas por uma estrutura não euclidiana para o universo. Isto nos permite pensar que o efeito de uma massa, nessa nova teoria da gravitação, não é mais o de criar uma força em um espaço euclidiano mas o de modificar a estrutura do espaço-tempo, encurvando-o.

Como as variedades riemannianas são as de estrutura mais simples depois do espaço euclidiano, Einstein supos que o espaço-tempo da física tem estrutura de uma variedade riemanniana quadridimensional [71]. O passo seguinte foi obter as equações de campo da teoria, isto é, substituir a lei newtoniana por dez condições a que devem satisfazer o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e suas derivadas de primeira e segunda ordem.

A fim de garantir que as equações de campo sejam invariantes sob qualquer transformação contínua de coordena das elas devem ser escritas sob a forma tensorial ,

$$L_{\mu\nu} = - k\, T_{\mu\nu} \qquad (1.1.1)$$

onde $L_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ são dois tensores simétricos de segunda ordem e k uma constante de proporcionalidade, igual a $8\pi G/c^4$, escolhida de tal forma a obtermos a lei newtoniana da gravitação como uma aproximação de campo fraco. $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia e representa o conteúdo energético do universo, não incluindo no entanto a energia gravitacional. Ele está relacionado às ações que não têm uma origem geométrica sendo o responsável pela curvatura do universo, a qual está ligado o tensor $L_{\mu\nu}$ (2) .

A expressão para $L_{\mu\nu}$ é construída com o tensor métrico e suas derivadas até segunda ordem. Esta última imposição é feita para manter uma analogia qualitativa com a mecânica newtoniana e parece bastante razoável, já que a maioria das equações diferenciais na física clássica são de segunda ordem (2)(13). A fim de garantir matematicamente que, para certas condições de contorno, tenhamos solução única, imporemos às equações de campo que elas sejam lineares nas derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$.

Em Relatividade Restrita, quando utilizamos sistemas inerciais, o tensor momento-energia obedece a lei de conservação.

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \qquad (1.1.2)$$

Assim, em um sistema de coordenadas arbitrário a lei de conservação deve assumir sua forma covariante,isto é

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0, \qquad (1.1.3)$$

onde || designa derivada covariante.

A eq. (1.1.1)impõe que devemos ter também

$$L^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \ . \qquad (1.1.4)$$

E. Cartan(80) demonstrou que o tensor simétrico de segunda ordem que satisfaz as condições acima (é função de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas até segunda ordem, é linear nas derivadas de segunda ordem e tem divergência nula) é único e pode ser expresso na sua forma mais geral como:

$$L_{\mu\nu} = \alpha \ (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \ (R + 2\lambda)). \qquad (1.1.5)$$

Na eq.(1.1.5) α é uma constante que tomaremos igual a 1 (já que pode ser embutida na constante k da eq.(1.1.1), $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura e λ é denominada constante cosmológica.

A constante cosmológica é muito pequena experimentalmente e só poderia se manifestar para fenômenos em larga escala. Ela foi introduzida pela primeira vez nas equações de campo por Einstein, que procurava equilibrar as forças de atração gravitacional e assim compatibilizar as equações na construção de seu modelo cosmológico estático.Posteriormente sua utilização foi considerada desnecessária pelo próprio Einstein(17). De qualquer forma, sua importância em Cosmologia é ainda bastante discutida. Neste trabalho consideraremos a constante cosmológica igual a zero. Assim, a eq. (1.1.1)é reescrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - 8\pi T_{\mu\nu}, \qquad (1.1.6)$$

onde utilizamos unidades, tais que $G = c = 1$.

As eqs. (1.1.6) são as equações de Einstein, e constituem um conjunto de dez equações diferenciais parciais acopladas, não lineares e de segunda ordem na métrica. Elas servirão para determinar os dez coeficientes métricos, $g_{\mu\nu}$, desconhecidos, produzidos por uma dada distribuição de energia, $T_{\mu\nu}$. No entanto, temos ainda mais quatro relações suplementares provenientes do fato da divergência covariante de ambos os lados da eq.(1.1.6) ser identicamente nula. Estas identidades valem independentemente das equações de campo e reduzem a seis o número de equações diferenciais independentes para a métrica. Este é o número correto de equações necessárias para determinar o espaço-tempo já que a quatro, das dez componentes do tensor métrico, podemos dar valores arbitrários usando os quatro graus de liberdade que temos para fazer transformações de coordenadas (8).

Até aqui, descrevemos em linhas gerais os princípios fundamentais da Relatividade Geral e apresentamos as equações de campo da teoria. No que se segue procuraremos formular o objetivo da Cosmologia nesse novo contexto e em seguida discutir as hipóteses usualmente utilizadas na construção de modelos cosmológicos.

No âmbito da Relatividade Geral, o problema cosmológico consiste em encontrar uma estrutura riemanniana compatível com o conteúdo material do universo como um todo e com os fenômenos físicos que aí ocorrem. Posto desta forma, o obje tivo da Cosmologia é determinar um modelo cosmológico que esteja de acordo com os resultados das observações astronômicas de natureza global. Fenômenos, tais como formação de galáxias, evolução de estrelas etc., são considerados de pequena escala e estão, pelo menos em "primeira aproximação", fora do problema cosmológico.

Na construção de modelos cosmológicos relativísticos algumas hipóteses simplificadoras devem ser estabelecidas.

Em primeiro lugar, vamos considerar que o universo real constituído de estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, pode ser representado por um fluído de partículas de massa não nula, o qual será descrito por sua densidade, pressão, pressão anisotrópica, e outras grandezas termodinâmicas que caracterizam um fluido.*

Introduzimos então os observadores fundamentais do modelo, como aqueles que movem-se com um elemento infinitesimal de volume do fluido e em relação aos quais são medidas localmente as grandezas termodinâmicas já mencionadas. Estes observadores são chamados de co-moventes e têm suas linhas de universo determinadas pelo campo de velocidades $u^{\mu}(x^{\nu})$ das partículas que constituem o fluido cosmológico.

---

*No caso em que o fluido é constituído de partículas de massa nula, supomos a existência de um substrato material que serve como suporte para os observadores fundamentais mas não contribui para a curvatura (79).

Faremos ainda a hipótese de que o movimento da matéria no universo se dá ao longo de uma congruência de linhas de universo tipo-tempo que não se interceptam. Esta hipótese foi introduzida pela primeira vez por Weyl e significa que o fluido cosmológico é um fluido hidrodinâmico, isto é, ele não admite interseção de linhas de corrente (salvo em eventuais pontos singulares)(7,71).

Como consequência da hipótese de Weyl, podemos sempre escolher um sistema de coordenadas no qual a quadrivelocidade das partículas do fluido tenha componentes,

$$u^{\mu} = F(x^{\nu})\delta^{\mu}{}_{o} \quad . \tag{1.1.7}$$

Tal sistema de coordenadas é denominado co-movente porque os diversos elementos de volume do fluido estão em repouso relativamente a um observador ligado à essa rede de coordenadas. Nesse sistema de coordenadas

$$u_{\mu} = F(x^{\nu})g_{\mu o} \tag{1.1.8}$$

e da condição de normalização ($u^{\nu}u_{\nu} = 1$) teremos

$$g_{oo} = \frac{1}{F^2(x^{\nu})} \quad . \tag{1.1.9}$$

No esquema de fluido perfeito, como conseqüência da hipótese de homogeneidade espacial, devemos ter $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$. Assim, não há gradiente de pressão e o movimento das partículas do fluido é geodético. Neste caso, é possível mostrar(71) que teremos nas eqs. (1.1.7)–(1.1.9),

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0 \qquad , \qquad i = 1,2,3 \quad . \tag{1.1.10}$$

Assim, podemos redefinir a coordenada temporal tal que

$$F = 1 \quad . \tag{1.1.11}$$

A escolha de um sistema de coordenadas co-moventes, com $g_{oo} = 1$, é sempre possível também em modelos espacialmente não homogêneos, desde que não haja gradiente de pressão. Este será sempre o caso dos modelos que apresentaremos nos capítulo 2 e 3.

Um outro sistema de coordenadas usualmente utilizado em Cosmologia é o sistema síncrono(1):

$$g_{oi} = 0 \quad \text{e} \quad g_{oo} = 1. \tag{1.1.12}$$

A condição $g_{oi} = 0$ permite a sincronização dos relógios em todos os pontos do espaço e a condição $g_{oo} = 1$ é equivalente a escolhermos a coordenada temporal igual ao tempo próprio em cada ponto do espaço ($d\tau = \sqrt{g_{oo}}\, dt$).

Pode-se mostrar ainda que, em um sistema de coordenadas co-movente, $u^{\nu} = \delta^{\nu}_{o}$, a condição de que o movimento do fluido seja irrotacional implica em $g_{oi} = o$(7). Neste caso, o sistema de coordenadas é síncrono e co-movente. Como neste trabalho trataremos apenas de modelos cosmológicos em que o fluxo de matéria é geodético e irrotacional, este sistema de coordenadas é o mais adequado e, portanto, o adotaremos na discussão de todos os modelos cosmológicos que apresentaremos.

1.2) Isometrias

Como vimos, as equações de campo da Relatividade Geral formam um conjunto complexo de equações diferenciais não lineares acopladas. Em Cosmologia, uma forma de simplificarmos estas equações é através da imposição de simetrias sobre as soluções(9). Assim, como estamos tratando com variedades espaço-tempo riemannianas, devemos procurar transformações que preservem toda ou pelo menos parte da estrutura riemanniana. Nesta seção vamos dirigir nossa atenção à isometrias.

Chamamos de isometria a uma transformação que deixa invariante a métrica g, ou seja,

$$L_\zeta \, g = 0 \quad . \tag{1.2.1}$$

Isometrias infinitesimais são descritas pelos vetores ζ, chamados de vetores de Killing, que são os seus geradores.

Se usamos a equação de definição da derivada de Lie de um campo tensorial T em relação a um campo vetorial X,(78) a eq.(1.2.1)é equivalente a

$$\zeta\,[g(X,Y)] - g(L_\zeta \, X, Y) - g\,(X, L_\zeta Y) = 0 \,. \tag{1.2.2}$$

Admitiremos que nossa variedade é sem torção, portanto

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = L_X Y \iff (L_X Y)^i = Y^i{}_{||j} \, X^j - X^i{}_{||j} \, Y^j . \tag{1.2.3}$$

Assim a eq. (1.2.2) é reescrita como

$$\zeta[g\,(X, Y)] - g\,(\nabla_\zeta X, Y) + g\,(\nabla_X \,\zeta, Y) - g(X, \nabla_\zeta Y) +$$
$$+ \, g(X, \nabla_Y \zeta) = 0 \quad . \tag{1.2.4}$$

Se impomos a preservação do produto escalar sob um transporte paralelo, isto é, se usamos uma conexão métri ca,

$$(\nabla_X \, g)\,(Y, Z) = 0, \tag{1.2.5}$$

para todo X, Y, Z ∈ Z^1_0 (M), onde Z^1_0 é o fibrado tensorial de tensores do tipo (0,1), a equação de definição da derivada covariante de um campo tensorial[78] nos permite escrever que a condição expressa pela eq. (1.2.5) é equivalente a

$$X[g(Y,Z)] - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X ,Z) = 0 \quad . \tag{1.2.6}$$

Assim, a eq. (1.2.4) é reescrita como

$$g(\nabla_X \zeta,Y) + g(X,\nabla_Y \zeta) = 0 \quad . \tag{1.2.7}$$

A eq. (1.2.7), que é equivalente à eq. (1.2.1), é denominada equação de Killing e as suas soluções, os campos vetoriais de Killing.

Numa base de coordenadas a eq. (1.2.7) pode ser escrita como

$$\zeta_{i||j} + \zeta_{j||i} = 0 \quad , \tag{1.2.8}$$

que é a forma mais conhecida da equação de Killing.

Cabe observar que se ζ_1 e ζ_2 são dois vetores de Killing então uma combinação linear $a\zeta_1 + b\zeta_2$, a e b reais, também é um vetor de Killing. Pode-se mostrar também[12] que se ζ_1 e ζ_2 são vetores de Killing então o comutador $[\zeta_1,\zeta_2]$ também é um vetor de Killing. Portanto o conjunto das soluções das equações de Killing formam um espaço vetorial e tem estrutura de álgebra com a operação de produto definida pelo comutador.

Sejam $\{\eta_i, i = 1,\ldots,m\}$, elementos de uma base de uma álgebra de Lie. A estrutura algébrica de um grupo abstrato de Lie G pode ser descrita em termos desta base, formando-se todos os comutadores de η_i. Desde que uma álgebra de Lie é por definição, fechada devemos ter:

$$[\eta_i,\eta_j] = C^k_{ij}\ \eta_k \quad . \tag{1.2.9}$$

onde C^k_{ij} são constantes, conhecidos como constantes de estrutura de álgebra de Lie. Devido às propriedades (anticomutatividade e identidade de Jacobi) do comutador, as constantes de estrutura têm as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} C^k_{ij} &= -C^k_{ji} \\ C^k_{ij}C^m_{kn} + C^k_{jn}C^m_{ki} + C^k_{ni}C^m_{kj} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

O conjunto de todas as isometrias de uma variedade constituem um grupo de Lie(9), que é usualmente denominado grupo de isometrias ou de movimento. O conjunto de todos os vetores de Killing formam a álgebra de Lie associada ao grupo de isometrias, onde o comutador, eq. (1.2.9), é substituído pelo comutador dos vetores de Killing.

Se temos p vetores de Killing ζ_i eles obedecem à álgebra

$$[\zeta_i,\zeta_j] = C^k_{ij}\ \zeta_k \quad , \qquad i,j,k = 1,\ldots,p \tag{1.2.11}$$

Os coeficiente C^k_{ij} são constantes e iguais as constantes de estrutura do grupo abstrato de Lie isomorfo a este.

Não é nosso objetivo discutir definições, propriedades e relações entre grupos e álgebras de Lie. Esta discussão pode ser encontrada em vários textos [84] [85]. Apresentaremos apenas alguns dos resultados mais importantes: [20] [75]

1) Os grupos de Lie constituem uma classe especial de variedades diferenciáveis, que são variedade e grupo simultaneamente com a operação de grupo sendo diferenciável.

2) Cada grupo de Lie está associado com uma única álgebra de Lie.

3) A cada álgebra de Lie podem corresponder vários grupos de Lie, mas apenas um grupo de Lie é simplesmente conexo e é denominado grupo de cobertura universal desta álgebra.

4) As dimensionalidades da variedade do grupo e da álgebra de Lie associada são as mesmas.

Numa variedade riemanniana de dimensionalidade n, a eq. (1.2.8) é uma equação diferencial com $n(n+1)/2$ condições iniciais (n condições iniciais $\zeta_i(xo)$ e $n(n-1)/2$ condições $\zeta_i(x_o)_{||j} = -\zeta_j(x_o)_{||i}$). Portanto esta variedade admite um número máximo de $n(n+1)/2$ vetores de Killing linearmente independentes. Quando este número é máximo dizemos que a variedade é maximalmente simétrica. Neste caso o espaço tem curvatura constante e as componentes do tensor de Riemann são [15] :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\alpha\mu} \, g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu} \, g_{\alpha\nu}) \tag{1.2.12}$$

onde

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = \text{constante} \tag{1.2.13}$$

é o escalar de curvatura.

Portanto, se p é o número de vetores de Killing linearmente independentes de uma variedade M de dimensionalidade n então

$$0 \leqq p \leqq \frac{n(n+1)}{2} \quad . \tag{1.2.14}$$

A órbita de um dado ponto P de uma variedade M, sob o grupo de isometrias G, é o conjunto de pontos Q, tal que A(P) = Q, onde A é algum elemento de G. A órbita é uma subvariedade H de M.

O grupo G é dito ser transitivo sobre M, se dados dois pontos quaisquer P e Q de M, existe pelo menos um $A \in G$ tal que A(P) = Q. Se A é único então o grupo é dito ser simplesmente transitivo, se A não é único então o grupo é dito ser multiplamente transitivo. Mostra-se que[20] um grupo multiplamente transitivo contém transformações que deixam algum ponto fixo.

Chamamos de grupo de isotropia, I_p, ou grupo de estabilidade de P ao conjunto de todas as $A \in G$, tal que A(P) = P.

Sejam r, d e s as dimensionalidades do grupo de isometria, da órbita H e do grupo de isotropia respectivamente, então:

$$r = d + s \quad . \tag{1.2.15}$$

Quando d = r, o grupo é simplesmente transitivo, ou seja, a dimensionalidade de G é igual à da órbita H. É claro que se a dimensionalidade de G é maior que a de H, então G é multiplamente transitivo e neste caso existe um subgrupo de isotropia.

1.3) Homogeneidade e Isotropia[20]

Desenvolvemos, até aqui, o formalismo matemático para o estabelecimento de isometrias. Observamos que as simetrias de uma variedade (em particular uma variedade espaço-tempo riemanniana) são expressas pela invariância do tensor métrico sob o transporte de Lie. Se existe uma isometria, então dois pontos relacionados por ela não serão distingüíveis em termos de qualquer teoria geométrica da física, em particular da Relatividade Geral[20]. O conjunto de todas as isometrias formam um grupo de Lie, e os vetores de Killing, geradores destas isometrias, têm estrutura de álgebra de Lie, tendo o comutador como produto.

O número máximo de vetores de Killing linearmente independentes de um espaço-tempo quadridimensional, é, segundo a equação (1.2.14), igual a dez. Diz-se então que a variedade tem um G_{10} de movimento, ou seja, um grupo de isometria de dimensionalidade dez. Este é o caso do espaço-tempo plano que tem simetria máxima.

Definimos anteriormente grupo de isotropia, I_p, como o grupo de movimento que deixa o ponto P fixo. O grupo de isotropia de maior dimensionalidade que um espaço-tempo pode ter é o grupo de rotações de Lorentz (G_6). Mostra-se[9] que todo grupo de isotropia, deve ser um subgrupo do grupo homogêneo de Lorentz.

Dizemos que existe simetria esférica em torno de um ponto P, se existe uma direção tipo-tempo neste ponto tal que todas as direções espaciais perpendiculares a ela sejam equivalentes[20].

Dada uma direção tipo-tempo em P, se existe uma direção tipo-espaço, tal que todas as direções espaciais em uma superfície bidimensional, perpendicular a ambas as direções tipo-espaço e tipo-tempo, sejam equivalentes, dizemos que o espaço tem simetria rotacional em P[20]. Este é o caso dos universos de Tolman-Bondi e Kantowski-Sachs. Sendo que o universo de Tolman-Bondi é esfericamente simétrico na origem. Um universo que é esfericamente simétrico em relação a qualquer ponto é dito ser isotrópico. É o caso do universo de Friedman.

Um espaço que tem simetria rotacional em relação a qualquer ponto é dito ter simetria de rotação local (LRS)[73].

Se existe uma superfície bidimensional tipo-tempo, tal que em todo ponto da superfície tem-se simetria de rotação em torno de direções tipo-tempo e tipo-espaço na superfície, então o espaço-tempo é dito ter simetria axial. Um espaço com simetria axial e simetria de translação ao longo do eixo é dito ter simetria cilíndrica[20].

Na linguagem de grupos estas definições querem dizer que um G_1 de isotropia em um ponto P deixando um vetor tipo-tempo fixo implica em simetria rotacional. Um G_3 atuando da mesma forma implica em simetria esférica. Simetria axial ocorre quando existe um G_1 de rotações espaciais deixando todo ponto de alguma superfície bidimensional tipo-tempo fixa [20].

Dizemos que um espaço-tempo é homogêneo quando um grupo de transformações isométricas atua transitivamente sobre êle. Em Cosmologia, estamos, em geral, interessados em homogeneidade espacial. Homogeneidade espacial ocorre quando um grupo atua transitivamente sobre as seções espaciais tridimensionais. É preciso observar que um espaço-tempo homogêneo não implica em espaço homogêneo. Um exemplo é o universo de Gödel, que é homogêneo no espaço-tempo, com um G_5 atuando sobre toda a variedade, mas não é homogêneo espacialmente [75].

Pela equação (1.2.14), o número máximo de vetores de Killing em uma variedade tridimensional é seis. Portanto, para analisar variedades espacialmente homogêneas devemos considerar apenas os casos r = 3,4,5 e 6.

Se r = 3 o grupo é simplesmente transitivo sobre as hipersuperfícies tridimensionais. Quando r = 4,Egorov[20] mostrou que existe sempre um subgrupo G_3. Este subgrupo pode atuar em hipersuperfícies tipo-espaço tri ou bidimensionais. Na primeira hipótese, recaímos no caso de r = 3. Na segunda hipótese, quando ele atua em superfícies tipo-espaço bidimensionais, sabemos que estas superfícies deverão ter curvatura constante já que admitem um número máximo de vetores de Killing linearmente independentes. Modelos cosmológicos deste tipo foram estudados pela primeira vez por Kompaneets e Chernov[(69)] para o caso de poeira ($p=0$) e radiação ($p=\rho/3$) mas são conhecidos como modelos de Kantowski-Sachs que independentemente o estudaram para o caso de poeira[(42)].

O caso r = 5 é impossível, pois isto nos conduziria a um subgrupo de isotropia G_2 e como duas rotações em torno de eixos diferentes geram uma rotação em torno de um terceiro eixo não há subgrupo G_2.

Quando r = 6, temos um número máximo de vetores de Killing linearmente independentes para a órbita (d = 3), o espaço tem simetria máxima e deve ter curvatura escalar constante. Este é o caso das métricas tipo Robertson-Walker em que o espaço é homogêneo e isotrópico em torno de qualquer ponto. Assim, o espaço é esfericamente simétrico em torno de qualquer ponto. Na linguagem de grupos, dizemos que há um subgrupo de isotropia G_3, que é o grupo de rotações em torno de um eixo qualquer, que passa por um ponto arbitrário P.

Do que foi discutido até aqui, podemos adotar um critério para a existência de homogeneidade espacial. Diremos que há homogeneidade espacial quando existe um G_3 simplesmente transitivo atuando sobre as seções espaciais tridimensionais. O único caso excepcional, que não é considerado nesta definição, é o de Kantowski-Sachs onde há um G_4.

O que restaria fazer então, seria examinar todos os possíveis G_3 e classificar as variedades tridimensionais que os admitem.

1.4) A Classificação de Bianchi[1], [79]

A classificação de todas as variedades tridimensionais que admitem um grupo de isometria simplesmente transitivo foi feita originalmente por L.Bianchi[76], que encontrou nove tipos diferentes. Estes nove tipos de espaços de Bianchi correspondem a nove conjuntos não equivalentes de constantes de estrutura e a obtenção destes é o método que utilizaremos. Este método é devido a C.G.Behr que introduziu ainda algumas modificações na classificação de Bianchi[77].

Sejam ζ_i $(i = 1,2,3)$, os três vetores de Killing linearmente independentes de uma variedade tridimensional.

Da condição de álgebra temos

$$[\zeta_i, \zeta_j] = C^k_{ij}\, \zeta_k \quad (i,j,k = 1,2,3) \qquad (1.4.1)$$

onde C^k_{ij} são as constantes de estrutura.

Como sabemos, as constantes de estrutura além de anti-simétricas em seus índices inferiores

$$C^k_{ij} = - C^k_{ji} \tag{1.4.2}$$

satisfazem a identidade de Jacobi,

$$C^k_{[ij} \; C^e_{m]k} = E^{ijm} \; C^k_{ij} \; C^e_{mk} = 0 \tag{1.4.3}$$

onde $E^{ijm} = E_{ijm}$, é o "pseudo tensor" totalmente antisimétrico com $E_{123} = 1$.

A eq. (1.4.2) implica que para uma variedade tridimensional temos C^k_{ij} com nove componentes independentes. Construimos então a matriz

$$M^{ij} = E^{imn} \; C^j_{mn} \tag{1.4.4}$$

que tem o mesmo número de componentes que C^k_{ij}.

Podemos sempre decompor a matriz M^{ij} em suas partes simétrica e antisimétrica,

$$M^{ij} = M^{(ij)} + M^{[ij]} \; . \tag{1.4.5}$$

A matriz antisimétrica $M^{[ij]}$ tem três componentes independentes que podem ser expressas na forma do vetor

$$a_k = E_{kij} \; M^{[ij]} \tag{1.4.6}$$

ou ainda

$$E^{mnk} a_k = E^{mnk} E_{kij} M^{[ij]} = \frac{1}{2} (\delta^m_i \delta^n_j - \delta^n_i \delta^m_j) M^{[i\ j]} =$$

$$= M^{[m\ n]} . \qquad (1.4.7)$$

Assim,

$$M^{ij} = M^{(ij)} + E^{ijk} a_k \quad . \qquad (1.4.8)$$

Invertendo a eq. (1.4.4) obtemos que

$$C^j_{mn} = E_{mni} M^{ij} = E_{mni} (M^{(ij)} + E^{ijk} a_k) \qquad (1.4.9)$$

ou ainda

$$C^j_{mn} = E_{mni} M^{(ij)} + \frac{1}{2} (\delta^j_m a_n - \delta^i_n a_m) \quad . \qquad (1.4.10)$$

Da identidade de Jacobi, eq. (1.4.3), e da eq. (1.4.4) temos que

$$M^{ij} C^k_{ij} = 0 \quad . \qquad (1.4.11)$$

Substituindo (1.4.8) e (1.4.10) em (1.4.11) obtemos

$$M^{(ij)} a_j = 0 \quad . \qquad (1.4.12)$$

Observamos então, da eq.(1.4.12) que as seis componentes da matriz simétrica $M^{(ij)}$ e as três componentes do vetor a_k, que descrevem C^k_{ij}, não são independentes entre si.

Por uma transformação linear a coeficientes constantes dos vetores de base podemos reduzir a matriz $M^{(ij)}$ a forma diagonal. Sejam n_1, n_2 e n_3 seus autovalores. A eq.

(1.4.12) nos mostra então que se o vetor a_k existe, ele encontra-se ao longo de uma das direções principais da matriz $M^{(ij)}$, aquela correspondente ao autovalor zero.

Sem perda de generalidade, podemos tomar $a_k=(a,0,0)$ e a eq. (1.4.12) reduz-se a

$$a\ n_1 = 0 \tag{1.4.13}$$

ou seja, uma das quantidades a ou n_1 deve ser nula.

Assim, observamos que as relações de comutação, eq. (1.4.1), tomam a forma.

$$\begin{aligned}
[\zeta_1,\zeta_2] &= -\frac{a}{2}\zeta_2 + n_3\zeta_3, \\
[\zeta_2,\zeta_3] &= n_1\zeta_1, \\
[\zeta_3,\ \zeta_1] &= n_2\ \zeta_2 + \frac{a}{2}\ \zeta_3.
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Temos ainda a liberdade de mudar o sinal dos ζ_i e estes podem sofrer uma transformação de escala arbitrária (multiplicação por constantes). Podemos assim escolher a sempre positivo (quando diferente de zero) e mudar, simultaneamente, o sinal dos n_i. As constantes de estrutura podem ser feitas iguais 0 e $\pm$ 1, exceto nos casos em que $an_2\ n_3 \neq 0$ (tipos III, VI e VII). Nesses casos, pode-se mostrar que a existência, ou não, de um subgrupo abeliano G_1 depende do valor de $h = \dfrac{a^2}{4n_1n_2}$ que é o que caracteriza a diferença entre os tipos III e VI [79].

Assim, numa base para o espaço vetorial das soluções das equações de Killing, que permita expressar $M^{(ij)}$ na forma diagonal e $a_k = (a,o,o)$, a escolha original de Bianchi pode ser apresentada na tabela abaixo.

TIPO	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	+	0	0
III	+	0	+	-
IV	+	0	0	+
V	+	0	0	0
VI($h\neq 1$)	+	0	+	-
VII	+	0	+	+
VIII	0	+	+	-
IX	0	+	+	+

Tabela 1.4.1 - Possíveis escolhas independentes para os sinais das constantes de estrutura na eq. (1.4.14).

1.5) Notas sobre as métricas de Bianchi (22) (23)

Como vimos, um espaço-tempo apresenta homogeneidade espacial se ele admite um grupo de isometria, G_r, que atua transitivamente sobre as seções espaciais tridimensionais. Quando este grupo tem dimensão $r = 3$, ele é simplesmente transitivo e cosmologias que apresentam estas características são conhecidas como modelos de Bianchi, já que podem ser classificadas de acordo com o tipo de Bianchi de seu grupo de movimento.

Em todos os modelos espacialmente homogêneos, os vetores unitários, η, normais às órbitas do grupo, formam um campo vetorial, geodésico e invariante sob a ação do grupo. Isto pode ser visto da seguinte forma: Seja $\{\zeta_a\}$ uma base qualquer de campos de Killing, geradores do grupo de isometria cujas órbitas são as hipersuperfícies espaciais tridimensionais. A condição de ortogonalidade implica que

$$g(\eta,\zeta_a) = 0, \qquad a = 1,2,3 \tag{1.5.1}$$

em todos os pontos da órbita.

Portanto,

$$L_{\zeta_a} g(\eta,\zeta_b) = (L_{\zeta_a} g)(\eta,\zeta_b) + g(L_{\zeta_a}\eta,\zeta_b) + g(\eta, L_{\zeta_a}\zeta_b) = 0. \tag{1.5.2}$$

Como $L_{\zeta_a} g = 0$ e $L_{\zeta_a}\zeta_b = C^c_{ab}\,\zeta_c$, devemos ter

$$g(L_{\zeta_a}\eta,\ \zeta_b) = 0. \tag{1.5.3}$$

E como os vetores da base geram o espaço tangente em cada ponto P da órbita, $L_\zeta\,\eta$ é normal a órbita em cada ponto.

Como $g(\eta,\eta)$ é constante, é fácil verificar que,

$$L_{\zeta_a} g(\eta,\eta) = 0 \Longrightarrow L_{\zeta_a}\eta = 0 \tag{1.5.4}$$

e

$$\nabla_\eta g(\eta,\eta) = 0 \Longrightarrow \eta^\mu \eta_{\mu||\nu}\, \eta^\nu = 0 \,. \tag{1.5.5}$$

A Equação (1.5.4) nos mostra que o campo vetorial η, é invariante sob a ação do grupo. Para mostrar que ele é também geodésico, observe que

$$0 = \nabla_\eta g(\eta,\zeta_a) = \eta_{\mu||\nu}\eta^\nu\, \zeta_a^\mu + (\zeta_a)_{\mu||\nu}\, \eta^\nu\, \eta^\mu = \eta_{\mu||\nu}\, \eta^\nu \zeta_a^\mu +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[(\zeta_a)_{\mu||\nu} + (\zeta_a)_{\nu||\mu}]\, \eta^\nu\, \eta^\mu = \eta_{\mu||\nu}\, \eta^\nu\, \zeta_a^\mu \,. \tag{1.5.6}$$

Portanto, de (1.5.5) e (1.5.6), obtemos que

$$\eta^\mu{}_{||\nu}\, \eta^\nu = 0 \,. \tag{1.5.7}$$

Podemos assim escolher a coordenada t como sendo o parâmetro afim ao longo desta geodésica e com

$$\eta_\mu = t_{,\mu} \,, \quad \eta^\mu \eta_\mu = 1 \,, \tag{1.5.8}$$

as órbitas, H(t), são hipersuperfícies {t = constante }.

A métrica será escrita na forma:*

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}\, w^i\, w^j \,, \qquad i,j = 1,\, 2,\, 3 \tag{1.5.9}$$

onde w^i são as 1-formas nas órbitas.

A base dos vetores espaciais pode ser escolhi

* Consideramos apenas modelos não inclinados. Nesse caso a 4-velocidade do fluido, u, pode ser escolhida igual à normal, η, em cada ponto.

da de diversas formas. No entanto, a descrição das seções de homogeneidade é simplificada se usamos uma base $\{B_a\}$, a = 1, 2, 3 denominada base invariante. Seu emprego é útil pois, como veremos, cada componente do tensor métrico nesta base é constante em toda seção de homogeneidade gerada pelo grupo. Além disso, os coeficientes de estrutura de B_a são constantes em cada órbita e podem, por uma escolha apropriada, ser feitos a menos de um sinal, iguais às constantes de estrutura do grupo de isometria. Passemos então à definição desta base.

Sejam $\{\zeta_a\}$ a = 1, 2, 3 os campos de Killing já definidos anteriormente. Vamos construir, em cada órbita, a partir destes vetores, três campos vetoriais tangentes $\{B_a\}$, denominados campos de base invariante, de acordo com

$$L_{\zeta_b} B_a = [B_a, \zeta_b] = 0 \quad , \qquad (1.5.10)$$

para todo a, b.

A condição de integrabilidade para estas equações está garantida pelas identidades de Jacobi aplicadas a ζ_a, ζ_b e B_a, que são automaticamente satisfeitas se C^a_{bd} são as constantes de estrutura do grupo de isometria.

Para fixar os B_a completamente devemos especificar seus valores em pelo menos um ponto P_o de cada órbita do grupo. O campo vetorial é então construído pelo transporte de Lie, isto é, exigindo que seja válida a eq. (1.5.10). Uma escolha inicial é $B_a(P_o) = \zeta_a(P_o)$.

Definindo funções ϕ^a_b, o campo de base invariante B_b é escrito como

$$B_b = \phi^a_b \zeta_a \ , \qquad (1.5.11)$$

tal que em p_o,

$$\phi^a_b = \delta^a_b \ . \qquad (1.5.12)$$

Definindo D^c_{ab} por

$$[B_a, B_b] = D^c_{ab} B_c \qquad (1.5.13)$$

e substituindo (1.5.13) e (1.5.10) nas identidades de Jacobi para B_a, B_b e ζ_c, obtemos que os coeficientes D^c_{ab} são constantes na órbita.

Substituindo (1.5.11) em (1.5.13) e (1.5.10), obtemos que

$$\phi^a_b \phi^c_d C^e_{ac} \doteq - D^m_{bd} \phi^e_m \ , \qquad (1.5.14)$$

e portanto em p_o

$$C^e_{ac} = - D^e_{ac} \ . \qquad (1.5.15)$$

Assim, como D^e_{ac} são constantes em cada órbita, a estrutura algébrica da álgebra de Lie associada a $\{B_a\}$ é a mesma que a dos campos de Killing. O campo de bases invariantes $\{B_a\}$ é usualmente dito ser o gerador do grupo de transformações recíprocas do grupo de isometria. É importante observar que o grupo recíproco de um grupo de isometria não é em geral um grupo de isometria[23]. Observe ainda que:

$$(L_\zeta g)(B_a, B_b) = L_\zeta g(B_a, B_b) - g(L_\zeta B_a, B_b) - g(B_a, L_\zeta B_b) = L_\zeta g_{ab} =$$

$$\zeta[g_{ab}] = 0 . \qquad (1.5.16)$$

Portanto nesta base a derivada das funções g_{ab} na direção ζ é nula, isto é, elas são constantes em cada órbita. Assim, reescrevemos eq. (1.5.9) na forma,

$$ds^2 = dt^2 - g_{ab}(t)\, B^a B^b , \qquad (1.5.17)$$

onde B^a são agora as 1-formas duais invariantes,

$$B^a [B_b] = \delta^a_b . \qquad (1.5.18)$$

Numa base de coordenadas, os vetores da base invariante são escritos como

$$B_a = A^i_a \frac{\partial}{\partial x^i} , \qquad (1.5.19)$$

onde A^i_a, a matriz de transformação entre as duas bases, é uma matriz 3x3 não singular.

As 1-formas invariantes são

$$B^a = A^a_i \, dx^i \tag{1.5.20}$$

onde

$$A^i_a \, A^a_j = \delta^i_j \tag{1.5.21}$$

Assim, reescrevemos o elemento da linha eq. (1.5.17) como

$$ds^2 = dt^2 - g_{ab} \, A^a_i \, A^b_j \, dx^i \, dx^j = dt^2 - g_{ij} dx^i \, dx^j \tag{1.5.22}$$

onde

$$g_{ij} = g_{ab} \, A^a_i \, A^b_j \; . \tag{1.5.23}$$

Como descrevemos na seção anterior, podemos, dado um elemento de linha de certo espaço-tempo espacialmente homogêneo, saber a que tipo de Bianchi ele pertence. No entanto, é comum estarmos muitas vezes interessados no problema inverso, ou seja, conhecido o tipo de Bianchi, qual é a forma mais geral do elemento de linha que esse admite?

Para responder esta pergunta, partimos da única informação que dispomos, ou seja, a álgebra dos campos de Killing associada a um dos tipos de Bianchi. Devemos então, inicialmente, encontrar uma possível representação desta álgebra. De posse deste resultado, construímos a base invariante através da eq. (1.5.10) e determinamos a matriz A^i_a. Invertendo esta matriz obtemos as 1-formas invariantes através da eq.(1.5.20) e teremos, substituindo este resultado na eq. (1.5.17), a forma mais geral do elemento de linha para o tipo de Bianchi desejado. Este procedimento está desenvolvido com detalhes na ref.[79], para os tipos I e II de Bianchi. Nas refs.[9, 70] são encontradas tabeladas todas as 1-formas invariantes para os nove tipos de Bianchi.

1.6) Modelos de Friedman-Robertson-Walker

Os universos de Friedman-Robertson-Walker (FRW) são certamente os modelos cosmológicos relativísticos mais importantes que já surgiram até o momento. Eles se caracterizam por serem espacialmente homogêneos e isotrópicos. Esta hipótese permite a escolha de uma forma particular para o elemento de linha, que simplifica enormemente as equações de Einstein, tornando possíveis soluções explícitas. Os modelos de FRW apresentam apenas a expansão de volume (θ) diferente de zero, sendo nulos o tensor de rotação ($W_{\mu\nu}$) e o tensor de distorção ($\sigma_{\mu\nu}$). Tais restrições sobre o campo de velocidades do fluido e a escolha de um sistema de coordenadas co-movente implicam em um elemento de linha para o espaço-tempo na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\ \gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j \quad ; \quad i,j,k = 1,2,3 \ . \qquad (1.6.1)$$

O fato do fluido ser irrotacional nos permite então a separação única do espaço-tempo em "tempo cosmológico" e seções espaciais de homogeneidade. Os coeficientes $\gamma_{ij}(x^k)$, em (1.6.1) descrevem a forma da hipersuperfície de homogeneidade em cada instante t. Podemos assim pensar que as coordenadas dos pontos (aglomerados de galáxias) são fixas e que o que muda na geometria de uma hipersuperfície para a outra é a escala de distância. Isto é, todas as distâncias entre pontos do espaço expandem-se (não dizemos que contraem-se pois observa-se experimentalmente um deslocamento para o vermelho nas bandas de absorção) do mesmo fator R(t), deixando a forma da hipersuperfície inalterada(5). O termo R(t) que aparece na eq. (1.6.1) é chamado de fator de expansão ou fator de escala.

Os modelos espacialmente homogêneos e isotrópicos, como os de FRW, têm seções espaciais de máxima simetria, com seis vetores de Killing, e portanto, com curvatura constante, podendo ser esta positiva, negativa ou nula. Neste caso, mostra-se [15] que podemos sempre escolher um sistema de coordenadas apropriado tal que a métrica da hipersuperfície de homogeneidade toma a forma abaixo, conhecida como métrica de Robertson-Walker,

$$d\ell^2 = R^2(t) \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{k}{4}\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right]\right)^2} \quad , \qquad (1.6.2)$$

onde k, é constante e está relacionada ao tensor de Riemann da seção espacial por:

$$^*R_{ijk\ell} = \frac{k}{R^2(t)}(\gamma_{ik}\,\gamma_{j\ell} - \gamma_{i\ell}\,\gamma_{jk}) \quad . \qquad (1.6.3)$$

O tensor de Ricci será então ($^*R_{ij} = {^*R^k}_{ikj}$)

$$^*R_{ij} = 2\frac{k}{R^2(t)}\,\gamma_{ij} \qquad (1.6.4)$$

e o escalar de curvatura

$$^*R = \frac{6k}{R^2(t)} \;. \qquad (1.6.5)$$

Adotando o sistema de coordenadas polares (r, θ, ϕ) o elemento infinitesimal de linha de um espaço-tempo espacialmente homogêneo e isotrópico, em coordenadas co-moventes, toma a forma:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{kr^2}{4})^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) \quad , \qquad (1.6.6)$$

na qual a constante k pode assumir três valores distintos: k = = +1 (curvatura espacial positiva), k = 0 (curvatura espacial nula) e k = -1 (curvatura espacial negativa).

Até aqui descrevemos algumas propriedades geométricas e cinemáticas dos modelos FRW. A fim de investigar suas propriedades dinâmicas, devemos fazer hipóteses sobre o tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, a ser usado nas equações de Einstein.

Faremos a hipótese de que $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia de um fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p\, h_{\mu\nu} \quad , \qquad (1.6.7)$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão isotrópica medidos por um observador com quadrivelocidade u^μ, definida tal que $u^\mu = \delta^\mu_o$, e $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$ é o tensor de projeção. A homogeneidade do modelo impõe que a densidade de energia e a pressão sejam funções apenas do tempo.

Com o elemento de linha da equação (1.6.6) e com o tensor momento-energia definido na equação (1.6.7), as equações de Einstein se reduzem a duas equações

$$8\pi\rho = 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{3k}{R^2} , \qquad (1.6.8)$$

$$-8\pi p = 2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} , \qquad (1.6.9)$$

onde . significa derivada parcial em relação ao tempo.

Podemos simplificar a resolução destas equações fazendo uso da equação que expressa a conservação,local de energia,

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0, \qquad (1.6.10)$$

que, no caso, escreve-se como

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 . \qquad (1.6.11)$$

Lembrando que

$$\theta = u^{\alpha}{}_{||\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\; u^{\alpha})_{,\alpha} = \frac{3\dot{R}}{R} , \qquad (1.6.12)$$

reescrevemos (1.6.11) como

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R} = 0 . \qquad (1.6.13)$$

A eq. (1.6.8) é resolvida conhecendo-se a função $\rho(R)$ que, por sua vez, é obtida de (1.6.13) se dispusermos de uma equação de estado, $p = p(\rho)$. As eqs. (1.6.8), (1.6.13) e a eq. de estado, são as equações fundamentais da dinâmica do modelo.

A hipótese mais simples que podemos fazer para a equação de estado é uma relação linear

$$p = \lambda\rho \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \quad . \qquad (1.6.14)$$

Assim obtemos de (1.6.13) a dependência de ρ com o fator de expansão

$$\rho = \rho_o \; R^{-3(1+\lambda)} \quad , \qquad (1.6.15)$$

onde $\rho_o > 0$ é uma constante arbitrária de integração.

As soluções mais conhecidas para as equações dinâmicas do modelo, com equação de estado linear, são as que tem como fonte, poeira (λ=0) e radiação (λ=1/3). Um fluido de poeira é geralmente usado para representar o estágio atual do universo, onde a pressão é praticamente nula. Radiação é utilizada para descrever os estágios iniciais do universo, pois para gases extremamente quentes é frequente o uso desta equação de estado.

Para estes dois casos, a eq. (1.6.15) nos dá

$$\text{a)}\ \lambda = 0 \implies \rho = \rho_o \; R^{-3}, \qquad (1.6.16)$$

$$\text{b)}\ \lambda = 1/3 \implies p = \frac{1}{3} \; \rho = \frac{\rho_o}{3} \; R^{-4} \quad . \qquad (1.6.17)$$

Para os modelos de FRW, J.Peter Vajk[(25)] reuniu vinte e cinco soluções exatas em forma fechada. Além das mencionadas acima, êle apresenta soluções para matéria ultra densa[(24)] (λ=1), para equação de estado com λ=2/3, para λ arbitrário e combinações (dois ou três fluidos que não interagem entre si). Para o caso de apenas um fluido, soluções paramétricas, em termos de funções elementares, são encontradas para: poeira ($k = 0, \pm 1$), radiação ($k = 0, \pm 1$), $\lambda = \frac{2}{3}$ ($k = 0$), matéria ultra densa ($k = 0$) e λ arbitrário ($k = 0$). Nos casos restantes as soluções são exibidas sob a forma integral. Pode-se mostrar no entanto, que pelo menos algumas destas integrais podem ser expressas na forma de funções hipergeométricas de Gauss[(16)].

Neste trabalho, apresentaremos apenas as soluções para o caso $\lambda = 0$ (poeira), pois serão úteis no cap. 3.

1) $k = 0$, seção enclidiana.

Substituindo a eq. (1.6.16) em (1.6.8) esta reduz-se a

$$3 \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = 8\pi\rho_o R^{-3} . \tag{1.6.18}$$

Assim,

$$R(t) = Ro\ t^{2/3} \tag{1.6.19}$$

e

$$\rho = \rho_o R^{-3} = \frac{R_o^3}{.6\pi} R^{-3} = \frac{1}{6\pi} t^{-2} \tag{1.6.20}$$

2) $k = 1$, seção esférica .

Neste caso a eq. (1.6.8) reduz-se a

$$\dot{R}^2 = -1 + \frac{2R_o}{R} , \tag{1.6.21}$$

cuja solução na forma paramétrica ($dt = Rd\eta$), é

$$R = R_o (1 - \cos\eta), \tag{1.6.22}$$

$$t = R_o (\eta - \operatorname{sen}\eta). \tag{1.6.23}$$

A expressão para a densidade é:

$$\rho = \rho_o R^{-3} = \frac{3}{4\pi} R_o R^{-3} = \frac{3}{4\pi R_o^2 (1-\cos\eta)^3} . \qquad (1.6.24)$$

3) k = -1, seção pseudo-esférica .

A equação (1.6.8) reduz-se a

$$\dot{R}^2 = 1 + \frac{2R_o}{R} , \qquad (1.6.25)$$

cuja solução na forma paramétrica ($dt = Rd\eta$) é

$$R = R_o (\cosh \eta - 1), \qquad (1.6.26)$$

$$t = R_o (\operatorname{senh} \eta - \eta) . \qquad (1.6.27)$$

A expressão para a densidade toma a forma

$$\rho = \rho_o R^{-3} = \frac{3}{4\pi} R_o R^{-3} = \frac{3}{4\pi R_o^2 (\cosh\eta - 1)^3} . \qquad (1.6.28)$$

Podemos observar que, para $t \to 0$, ou seja, $\eta \ll 1$, os três modelos apresentam a mesma taxa de expansão,

$$R \cong t^{2/3} . \qquad (1.6.29)$$

A densidade também apresenta a mesma dependência com o tempo para os três casos,

$$\rho \cong t^{-2} . \qquad (1.6.30)$$

Estes fatos trazem, portanto, o problema de que para as soluções obtidas existe um estado no qual a métrica torna-se singular ($R=0$), e a densidade infinita.

$$k = \frac{8\pi}{3} R^2 (\rho - \rho_c) \quad . \tag{1.6.33}$$

Podemos assim caracterizar a topologia usual do modelo pelo sinal de $\rho - \rho_c$.

Portanto,

$$\rho > \rho_c \rightarrow k > 0 \rightarrow k = 1 \tag{1.6.34}$$

$$\rho = \rho_c \rightarrow k = 0 \tag{1.6.35}$$

$$\rho < \rho_c \rightarrow k < 0 \rightarrow k = -1 \tag{1.6.36}$$

Podemos ilustrar estes resultados através de uma analogia simples. O movimento de uma galáxia típica dos modelos de FRW é análogo ao de uma pedra lançada na superfície da Terra(4). Caso a pedra seja lançada com uma velocidade suficientemente grande, ou o que dá no mesmo, a massa da Terra seja suficientemente pequena para esta velocidade, a pedra apesar de retardando seguirá indefinidamente afastando-se da Terra. Por outro lado, se a velocidade com que a pedra for lançada é pequena ela atingirá uma altura máxima e retornará em seguida. O primeiro exemplo é análogo ao de um universo cuja densidade é menor que a densidade crítica, o segundo ao de um universo cuja densidade é maior que ρ_c. A situação intermediária é justamente aquela em que a pedra é lançada com a velocidade de escape, ou analogamente em que a densidade do universo é igual a densidade crítica. Do exposto entendemos também que, nestes modelos, o movimento das galáxias se dá não porque alguma força as impulsiona, pelo contrário, a força gra

Com o objetivo de resolver o problema, poderíamos tentar modificar a hipótese de que a matéria que constitui o fluido cósmico é uma poeira. Poderíamos substituí-la, por exemplo, por um fluido com pressão. Einstein(17) mostrou que tal modificação não altera em nada o caráter principal das soluções. Elas continuam singulares. É justamente essa, uma das características mais intrigantes dos modelos de FRW. Ela implica que houve um "nascimento" do universo em um passado remoto seguido de uma expansão. Esta é a razão pela qual as cosmologias baseadas nesses modelos são chamadas de teorias da grande explosão ("big bang").

Embora para $t \to 0$ os três modelos apresentem a mesma taxa de expansão êles terão evoluções distintas. O modelo de curvatura positiva descreve um universo que expande-se até um raio finito máximo em $t=R_0\pi$ e depois contrai-se. Os outros dois casos descrevem universos que expandem-se contínua e indefinidamente.

Vamos mostrar agora que, no caso em estudo, podemos caracterizar a topologia do modelo, através da medida da densidade de energia contida no universo (14).

A eq. (1.6.8) pode ser reescrita como:

$$k = \frac{8}{3}\pi\rho\, R^2 - \dot{R}^2 . \tag{1.6.31}$$

Definindo uma densidade crítica ρ_c pela relação

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 , \tag{1.6.32}$$

podemos reescrever eq. (1.6.31) como:

vitacional é atrativa. Usualmente, no contexto destes modelos , interpreta-se o movimento como consequência de um certo tipo de explosão no passado.

Apesar dos modelos de FRW serem os que melhor se ajustam aos dados observacionais que dispomos (radiação de fundo, "red shift"), não podemos afirmar, com certeza, que na atualidade o comportamento do universo em larga escala seja efetivamente o dos modelos de FRW. Não podemos garantir, tampouco, qual dos três tipos de universos FRW melhor descreveria o universo real.

Sobre os problemas que apresentam os modelos espacialmente homogêneos, e os de FRW em particular, discutiremos um pouco no próximo capítulo.

Quanto a qual dos tipos de universos de FRW escolher para a descrição do universo em larga escala as dificuldades são as seguintes[(9)]: como vimos anteriormente, conhecida a equação de estado $p(\rho)$ podemos integrar as eqs. (1.6.8) e (1.6.13) para cada valor de k. As quantidades teóricas que aparecem, ρ_o ou R_o e $R(t_o)$, onde t_o é o tempo atual, podem ser relacionadas com quantidades observadas.

As quantidades mensuráveis usualmente utilizadas são:

1) a densidade de matéria atualmente presente, $\rho(t_o)$, que nos dá $\rho_o/(R(t_o))^3$.

2) A constante de Hubble, $H = (\dot{R}/R)_{t_o}$.

3) $(\ddot{R}/R)_{to}$, ou outra medida equivalente da aceleração, por exemplo, o parâmetro de desaceleração $q = (R\,\dot{R}^{-2}\,\ddot{R})_{to}$

A terceira quantidade é redundante já que, por exemplo, para poeira, $-\frac{6\ddot{R}}{R} = 8\pi\,\rho_o/R^3$. No entanto esta relação nos fornece uma forma eficaz de confirmar as observações feitas. Se a observação redundante não está de acordo com as outras duas é porque alguma coisa deve estar errada na observação ou na teoria, ou mesmo nos modelos.

Na verdade, estas três medidas estão em desacordo e acredita-se que a razão seja a seguinte.

Embora $(\dot{R}/R)_{to}$ parece ter um resultado já bem estabelecido, o mesmo não ocorre com $\rho(to)$ e $(\ddot{R}/R)_{to}$. A incerteza em $\rho(to)$ provém do fato de que apenas matéria radiante é medida, podendo haver grandes quantidades de matéria não radiante que não são computadas. A incerteza na desaceleração advém de erros experimentais em medidas de objetos de grandes "red shifts". No momento atual medidas do parâmetro de desaceleração implicam em $k = +1$, enquanto que medidas da densidade de matéria luminosa implicam em $k = -1$ (9).

Para Einstein dificilmente poderíamos provar que a seção espacial é pseudo-esférica, isto porque necessitaríamos de estabelecer um limite superior para a densidade de energia e, com segurança, apenas um limite inferior parece ser possível (17)*. No entanto para que tivéssemos um universo de seção esférica a quantidade de matéria não radiante deveria exceder por um fator $\cong 10$ a quantidade de matéria radiante. Exis

*Veja no entanto a ref. nº 10, pg. 386.

tem indícios de que as galáxias possuem halos constituídos de matéria não luminosa cuja densidade excederia justamente por este fator a densidade luminosa da galáxia. Este fato tem sugerido que a matéria no universo estaria, predominantemente, sob forma não luminosa. Trabalhos recentes têm dirigido sua atenção para este fato[66][67]. Quem sabe estaria certa a raposa no Pequeno Príncipe de S.Exuperie para quem o essencial é invisível para os olhos?[68]

1.7) Três classes de modelos espacialmente homogêneos e anisotrópicos.

Como vimos, um espaço-tempo é dito ser espacialmente homogêneo se ele admite um grupo de isometrias atuando transitivamente sobre hipersuperfícies tipo-espaço tridimensionais. Quando o grupo de isometria é de quatro parâmetros, G_4, o teorema de Egorov[22] estabelece que este admite um subgrupo de três parâmetros, G_3, cujas órbitas podem ser bi ou tridimensionais. Quando as órbitas são tridimensionais temos um dos tipos de Bianchi pois o G_3 é simplesmente transitivo. Por outro lado, se as órbitas são bidimensionais, estas terão simetria máxima e curvatura constante. Este é o caso das três classes de modelos, espacialmente homogêneos e anisotrópicos que pretendemos analisar nesta seção.

A curvatura K do 2-espaço pode ser positiva, negativa ou nula e o espaço-tempo tem métrica na forma:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\, dx^2 - B^2(t)\begin{cases} d\Omega^2 \\ dl^2 \\ d\Sigma^2 \end{cases} \qquad , \qquad (1.7.1)$$

onde

a) $K > 0$ $\quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2$

b) $K = 0$ $\quad dl^2 = d\eta^2 + d\zeta^2$

c) $K < 0$ $\quad d\Sigma^2 = d\theta^2 + \text{sen}\, h^2\theta\, d\phi^2$.

As simetrias de cada um desses espaços-tempo, podem ser descritas por quatro campos de vetores de Killing, tipo-espaço, que, em termos do sistema de coordenadas utilizado em (1.7.1), serão escritos como:(52)

a) $K > 0$

$$X_{(1)} = \frac{\partial}{\partial\phi} \; ; \; X_{(2)} = \text{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\,\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \; ;$$
$$X_{(3)} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \text{cotg}\,\theta\, \text{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \; ; \; X_{(4)} = \frac{\partial}{\partial x} \; . \qquad (1.7.2)$$

b) $K = 0$

$$Y_{(1)} = \eta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \zeta \frac{\partial}{\partial\eta} \; ; \; Y_{(2)} = \frac{\partial}{\partial\zeta} \; ;$$
$$Y_{(3)} = \frac{\partial}{\partial\eta} \; ; \; Y_{(4)} = \frac{\partial}{\partial x} \; . \qquad (1.7.3)$$

c) $K < 0$

$$Z_{(1)} = - \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + (\mathrm{ctg}\ h\theta \ \ \mathrm{sen}\phi - 1) \frac{\partial}{\partial\phi} ;$$

$$Z_{(2)} = \mathrm{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\ h\theta \ \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} ; \qquad (1.7.4)$$

$$Z_{(3)} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - (\mathrm{ctg}\ h\theta \ \mathrm{sen}\,\phi + 1) \frac{\partial}{\partial\phi} ;$$

$$Z_{(4)} = \frac{\partial}{\partial x} .$$

As álgebras de Lie correspondentes são:

a) $K > 0$

$$[X_{(1)}, X_{(2)}] = X_{(3)} \ ; \ [X_{(2)}, X_{(3)}] = X_{(1)}; \ [X_{(3)}, X_{(1)}] = X_{(2)}$$

$$[X_{(4)}, X_{(i)}] = 0, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.7.5)$$

b) $K = 0$

$$[Y_{(1)}, Y_{(2)}] = Y_{(3)}; \ [Y_{(2)}, Y_{(3)}] = 0; \ [Y_{(3)}, Y_{(1)}] = Y_{(2)}$$

$$[Y_{(4)}, Y_{(i)}] = 0, \ i = 1,2,3. \qquad (1.7.6)$$

c) $K < 0$

$$[Z_{(1)}, Z_{(2)}] = Z_{(1)}; \ [Z_{(2)}, Z_{(3)}] = Z_{(3)}; \ [Z_{(3)}, Z_{(1)}] = 2Z_{(3)}$$

$$[Z_{(4)}, Z_{(i)}] = 0, \ i = 1,2,3. \qquad (1.7.7)$$

Nos modelos apresentados acima, $X_{(4)}$, $Y_{(4)}$ e $Z_{(4)}$ são geradores de translações espaciais paralelo ao eixo de simetria (direção x).

Os vetores de Killing, $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$;$Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$; $Z_{(1)}$, $Z_{(2)}$, $Z_{(3)}$, são geradores de rotação em torno do eixo x e/ou translações espaciais perpendiculares a este eixo, sendo tangentes ao sub-espaço bidimensional {t = constante, x = constante}.

Quando a curvatura é nula é fácil observar que o grupo G_4 admite um subgrupo G_3, gerado por $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$ e $Y_{(4)}$, cujas órbitas são tridimensionais, e que o espaço-tempo pertence ao tipo I de Bianchi. No caso em que a curvatura é negativa, o G_4 admite um outro G_3, gerado por $Z_{(1)}$, $Z_{(2)}$ e $Z_{(4)}$, cujas órbitas são também hipersuperfícies tipo-espaço tridimensionais. Pode-se mostrar ainda, por um cálculo direto, que $Z_{(1)}$, $Z_{(2)}$ e $Z_{(4)}$ formam um grupo simplesmente transitivo, do tipo III de Bianchi [21].

Assim, a classe de modelos em que a curvatura é positiva é o único tipo de universo espacialmente homogêneo com um G_3 que não é simplesmente transitivo. Estes modelos são conhecidos na literatura como modelos de Kantowski-Sachs [42], que os estudaram para o caso em que o conteúdo material é poeira ($p = 0$). Na verdade estes modelos foram estudados pela primeira vez por Kompaneets and Chernov, [69] que, no entanto, não observaram esta propriedade do modelo. Kantowski-Sachs incluiram erroneamente em seu trabalho, o caso $K < 0$ como de modelos homogêneos não tendo um G_3 simplesmente transitivo , mas isto foi corrigido posteriormente por Kantowski (22).

Uma lista razoavelmente completa de todas as soluções exatas conhecidas pode ser encontrada em Vajk e Eltgroth(52), para os três valores de K. São conhecidas soluções exatas tendo como fonte poeira, radiação, constante cosmológica, matéria ultra densa ($p = \rho$), combinações de poeira e campo magnético e poeira carregada com campo magnético. As referências para as soluções citadas acima podem ser encontradas também em Mac Callum(22).

As componentes do tensor momento-energia correspondentes ao elemento de linha (1.7.1) podem ser facilmente computadas usando-se as fórmulas obtidas por Dingle (26).

Teremos:

$$8\pi\ T^1{}_1 = 2\,\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{k}{B^2}\,, \tag{1.7.8}$$

$$8\pi\ T^2{}_2 = 8\pi\ T^3{}_3 = \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}\,, \tag{1.7.9}$$

$$8\pi\ T^0{}_0 = 2\,\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{k}{B^2}\,, \tag{1.7.10}$$

$$T^\mu{}_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu)\,, \tag{1.7.11}$$

onde $k = +1,\ 0,\ -1$ se $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$ ($K = k/B^2$); ponto significa derivada parcial em relação ao tempo e as coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^0) são (x, θ, ϕ, t) para $k = \pm 1$ e (x, η, ζ, t) para $k = 0$.

Apresentaremos, agora, as soluções das equações de campo para os três valores de k, no caso em que o conteúdo material é poeira (p = 0). Usando um sistema de coordenadas co-movente, teremos

$$T^0{}_0 = \rho \quad \text{e} \quad T^i{}_j = 0 \quad (i,j = 1,2,3). \tag{1.7.12}$$

Para integrarmos as equações de campo, observamos que, com a condição dada pela eq. (1.7.12), a eq. (1.7.8) apresenta a mesma forma das equações diferenciais que governam o fator de expansão nos modelos de Friedman. Estas equações são chamadas de equações de Friedman e têm solução conhecida. Obtemos, então, a expressão de B(t) integrando a eq. (1.7.8), o resultado é substituído em (1.7.9) e integrando determinamos a expressão para A(t). A expressão da densidade é obtida usando-se os resultados para A(t) e B(t) na eq. (1.7.10).

Apresentamos a seguir os resultados na forma paramétrica ($dt = B\, d\eta$).

a) k = + 1 (Modelo de Kantowski-Sachs).

$$B(\eta) = \frac{\ell}{2}(1 - \cos\eta), \tag{1.7.13}$$

$$t = \frac{\ell}{2}(\eta - \operatorname{sen}\eta), \tag{1.7.14}$$

onde $\ell > 0$ e $0 < t < \frac{\pi\ell}{2}$

e

$$A(\eta) = M\left(1 - \frac{\eta}{2}\operatorname{ctg}\eta/2\right) + \varepsilon \operatorname{ctg}\eta/2, \tag{1.7.15}$$

onde $\varepsilon = 0,1$ e $M \geq 0$ são constantes de integração.

A expressão para a densidade resulta:

$$8\pi\rho = \frac{M\csc^4 \eta/2}{\ell^2 (M - (M\eta/2 + \varepsilon)\mathrm{ctg}\,\eta/2} = \frac{M}{AB^2} . \qquad (1.7.16)$$

Podemos observar que para $M = 0$ ($\rho = 0$) o elemento infinitesimal de linha reduz-se a

$$ds^2 = - \mathrm{ctg}^2\, \eta/2\, dx^2 - B^2(t)\,(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2) + dt^2 , \qquad (1.7.17)$$

que, com a transformação

$$B = k\,(1 - \cos\eta) \equiv T, \qquad (1.7.18)$$

assume a forma:

$$ds^2 = - \left(\frac{2k}{T} - 1\right) dx^2 - T^2\,(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2) + \left(\frac{2k}{T} - 1\right)^{-1} dT^2 \qquad (1.7.19)$$

que é a extensão analítica do espaço-tempo de Schwarzschild dentro do horizonte (região T) (18) (19).

De fato, talvez o espaço-tempo mais conhecido, que admite em grupo de Lie de quatro parâmetros, cuja álgebra é dada pela eq. (1.7.5), seja a solução de Schwarzschild, só que neste caso o campo vetorial $X_{(4)}$ é tipo-tempo fora do horizonte. No entanto, dentro da esfera de Schwarzschild $X_{(4)}$ é tipo-espaço, a solução não é estática, é espacialmente homogênea e possui localmente, as mesmas simetrias que os modelos de Kantowski-Sachs.

b) $k = 0$

$$B(t) = t^{2/3}, \tag{1.7.20}$$

$$A(t) = \varepsilon t^{-1/3} + M\, t^{2/3}, \tag{1.7.21}$$

onde ε e M são constantes de integração.

A expressão para a densidade resulta:

$$8\,\pi\rho = \frac{4}{3}\,\frac{M}{Mt^2 + \varepsilon t} = \frac{4}{3}\,\frac{M}{AB^2}\,. \tag{1.7.22}$$

Esta solução (Bianchi I) obtida por Kompaneets e Chernov, é caso particular de um modelo estudado por Heckman e Shucking.[69] Observamos também que quando a constante de integração ε é igual a zero o modelo é isotrópico para todo t, e reduz-se as soluções de Friedman com seção euclidiana. Observe ainda que para $M=0$ ($\rho=0$) obtemos as soluções de Kasner com expoentes (- 1/3, 2/3, 2/3).

c) $k = -1$

$$B(\eta) = \frac{\ell}{2}\,(\cosh\eta - 1), \tag{1.7.23}$$

$$t = \frac{\ell}{2}\,(\operatorname{senh}\eta - \eta), \tag{1.7.24}$$

$$A(\eta) = \varepsilon\,\operatorname{ctg\,h}\eta/2 - M(1 - \eta/2\,\operatorname{ctg\,h}\eta/2), \tag{1.7.25}$$

onde $\varepsilon = 0, 1$ e $M \gtrless 0$ são constantes de integração.

A expressão para a densidade resulta:

$$8\,\pi\rho = \frac{M\,\operatorname{csch}^4\eta/2}{\ell^2(M\,\eta/2 + \varepsilon)\,\operatorname{ctgh}\eta/2 - M} = \frac{M}{A\,B^2} \tag{1.7.26}$$

CAPÍTULO 2

MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS

2.1) Introdução

Durante muitos anos a cosmologia relativística teve sua atenção dirigida, essencialmente, para os modelos homogêneos e isotrópicos de Friedman. Mas, até que ponto o universo real pode ser descrito por estes modelos ou, dito de outra forma, em que medida as hipóteses de homogeneidade e isotropia têm uma base observacional?

A hipótese de homogeneidade espacial tem sua origem histórica com Copérnico que sugeriu, no Século XVI, que a Terra não ocupa o centro do universo. Essa idéia de que não ocupamos um lugar privilegiado no universo, teve um grande reforço no início deste século com uma série de descobertas. Em 1918,Shapley mostrou que o Sol não está no centro da galáxia. Nos anos 20, confirmou-se que as nebulosas eram outras galáxias e, posteriormente, em 1952, através de uma revisão de medidas de distâncias, Baade provou que a nossa não é a maior de todas as galáxias[91] [23].

Efetivamente, a hipótese de Copérnico, tem sido confirmada ao longo dos anos. No entanto, ela não permite extrapolações como as do chamado "Princípio Cosmológico", segundo o qual o universo apresenta o mesmo aspecto para todos os observadores em um dado instante. Como garantir que, se nós observamos isotropia, então todos a observam ou, se nós observamos uma lei de Hubble linear, então todos devem observá-la também? Ou ainda, como verificar observacionalmente que regiões fora do nosso horizonte de partículas são espacialmente homogêneas? Se não conseguimos responder estas perguntas, não nos resta outra alternativa senão a de admitir que a suposição de homogeneidade espacial é uma extrapolação, em escala cosmológica, da hipótese de Copérnico[83] [90].

Embora a homogeneidade, em larga escala, não possa ser observada diretamente, a isotropia pode. Algumas evidências concernentes à isotropia ou possíveis anisotropias são as seguintes:[22]

1) A distribuição de galáxias, segundo alguns autores, especialmente G. de Vaucouleurs é anisotrópica.

2) A constante de Hubble é isotrópica dentro de uma faixa de erro de 25 por cento.

3) A distribuição de fontes de rádio é isotrópica, podendo haver anisotropias numa faixa inferior a 5 por cento.

4) A radiação de fundo é altamente isotrópica, mas uma anisotropia de dipolo e uma possível anisotropia de quadrupolo foram detectadas.

5) Há possibilidade de existência de um campo magnético intergaláctico que quebraria a isotropia.

Os resultados acima não constituem ainda indicadores definitivos de anisotropia. No entanto, se algum deles for confirmado, a consequência é que a visão tradicional de um universo homogêneo e isotrópico deve ser abandonada.

Os modelos de FRW apresentam ainda outras dificuldades:[22] [86]

1) Segundo esses modelos, estaríamos recebendo informação de regiões com as quais não temos relação causal.

2) Pequenas flutuações estatísticas nesses modelos não crescem em tempo suficiente para propiciar a formação de galáxias.

3) Esses modelos parecem não ser suficientemente gerais para descrever adequadamente a singularidade e o universo em sua fase inicial.

Como conciliar então o alto grau de isotropia observado na radiação de fundo e os problemas apresentados pelos modelos de FRW? Motivado por esta indagação é que Misner propôs o chamado programa de "Cosmologia Caótica". Este programa sugere que o universo iniciou-se em um estado caótico, com a presença de todo tipo de anisotropias e inomogeneidades, sendo estas eliminadas por vários processos dissipativos restando apenas pequenas parcelas que são hoje observadas. Misner deu início a esse programa construindo um modelo anisotrópico do tipo I de Bianchi onde a anisotropia seria dissipada nos estágios iniciais de evolução do universo por processos viscosos na radiação de neutrinos[87].

Os argumentos de Misner foram severamente criticados por vários autores; dentre estes destacamos Collins e Hawking que mostraram que dentre todos os modelos homogêneos apenas uma classe (aquela que tem exatamente a velocidade de escape) poderia tender à isotropia. Esta classe é de medida nula no espaço de todos os modelos homogêneos e, portanto, só teríamos isotropia assintoticamente se condições particulares iniciais fossem postuladas[88]. No entanto, estas considerações, como os próprios autores reconhecem, não são válidas para os modelos espacialmente não homogêneos. Acreditavam eles que inomogeneidades devem produzir anisotropias, o que aparentemente é bastante razoável. Contudo, no estudo da evolução dos modelos inomogêneos de Tolman-Bondi, Bonnor mostrou que, por exemplo, a classe hiperbólica (velocidade maior que a de escape) tende, para grandes valores da coordenada temporal, à homogeneidade e isotropia [28]. Bonnor e Tomimura confirmaram esses resultados para a classe II dos modelos de Szekeres e recentemente Goode e Wainwright para a classe I[41] [89].

Como vimos no capítulo anterior, no estudo de cosmologias espacialmente homogêneas a utilização de grupos de isometria tem uma enorme aplicação. Primeiro, porque a imposição de um grupo de isometria torna as equações mais fáceis de serem integradas e novas soluções exatas podem ser encontradas; segundo, porque assim podemos classificar de forma invariante os espaços-tempo conhecidos. No entanto, para alguns autores, estamos chegando a um ponto, em cosmologia relativística, em que os grupos de isometria estão perdendo sua utilidade[92]. A razão deve-se a que os modelos de FRW e os de Bianchi de uma forma mais geral apresentam uma série de defeitos; fato que tem incen tivado, nestes últimos anos, uma crescente investigação de modelos espacialmente não homogêneos.

Em contraposição à definição de homogeneidade espacial, definimos os modelos espacialmente não homogêneos como aqueles cujas hipersuperfícies espaciais tridimensionais não são órbitas de um grupo de isometrias.

Como então tratar de inomogeneidades? O primeiro passo, ainda utilizando a técnica de grupos de isometria, seria o de examinar modelos postulando, por exemplo, a existência de um número menor (um, dois ou mesmo três) de vetores de Killing. Dentre essas, talvez a situação mais simples seja aquela em que temos um G_3 cujas órbitas são superfícies bidimensionais tipo-espaço. Neste caso, os modelos formam uma subclasse dos modelos com simetria de rotação local (LRS)[(73)] [(74)], no qual o espaço-tempo é invariante sob uma rotação espacial em torno de um eixo de simetria tipo-espaço em cada ponto[(92)]. Esse é o caso dos modelos de Tolman-Bondi, Ruban e Eardley-Liang-Sachs, que se enquadram nos casos IIai, IIb e III biii da classificação de Ellis. Esse será também o caso dos modelos que apresentaremos no próximo capítulo.

No entanto, não podemos usar a técnica de grupos de isometria quando temos variedades que não admitem nenhum vetor de Killing, como é o caso do espaço-tempo de Szekeres[(35)]. Contudo, as soluções de Szekers apresentam um outro tipo de simetria. Foi mostrado por Berger, Eardley e Olson e por Collins e Szafron que as seções espaciais tridimensionais destes modelos, são conformalmente planas [(65)] [(94)]. Além disso, tanto a segunda forma fundamental dessas hipersuperfícies, quanto seu tensor de Ricci, possuem dois autovalores iguais.

Esses exemplos mostram a necessidade de se partir para o que Collins denominou de estudo das "simetrias intrínsecas". Ou seja, em vez de pensarmos em termos de simetrias do espaço-tempo, devemos concentrar nossa atenção em simetrias de subvariedades(92).

Finalmente tem-se colocado a questão de como classificar os modelos espacialmente inomogêneos. Um programa desta natureza foi iniciado por Collins e Szafron para os modelos de Szekeres. Esses modelos têm a característica de que o fluxo de matéria é ortogonal às hipersuperfícies {t = constante}, que são conformalmente planas. Este resultado permite uma caracterização invariante desses modelos em termos da congruência do fluido. Além disso, pode-se classificar esses modelos hierarquicamente de acordo com a anulação ou não de vários invariantes(94),(95), (96). Wainwright ampliou este estudo desenvolvendo um método de classificação para modelos cosmológicos inomogêneos e irrotacionais(64). Seu esquema é baseado na estrutura algébrica de três tensores de segunda ordem; o tensor de distorção da congruência do fluido, o tensor de Cotton-York e o tensor de Ricci de traço nulo, estes últimos associados às hipersuperfícies ortogonais ao fluxo do fluido.

Neste capítulo apresentaremos inicialmente os modelos espacialmente inomogêneos com simetria esférica; em primeiro lugar dada sua importância histórica e em segundo pois nos permitirão uma compreensão melhor dos modelos de Szekeres. Em seguida apresentaremos, com detalhes, estes últimos onde procuramos enfatizar sua importância como generalização de uma série de modelos conhecidos.

2.2) Modelos espacialmente inomogêneos com simetria esférica.

Provavelmente o primeiro modelo cosmológico espacialmente não homogêneo tenha sido o investigado por R.C.Tolman em 1934[29]. Tolman procurou estudar o efeito de inomogeneidades nos modelos de Einstein e Lemaitre. Para isto ele supôs um modelo em que partículas de poeira são distribuídas não uniformemente com simetria esférica em torno de uma origem. Ao encontrar as soluções das equações de campo, Tolman tinha em mente a necessidade de estabelecer limites para conclusões sobre modelos homogêneos. As propriedades investigadas permitiram que ele concluísse que não há nenhuma ação gravitacional que, necessariamente, implique no desaparecimento de inomogeneidades com o tempo. Isto é demonstrado pela descoberta de casos em que uma perturbação sobre a densidade , tanto no caso estático como não estático, tende a crescer com o tempo.

Posteriormente, W.B.Bonnor mostrou que duas classes de soluções do modelo de Tolman (parabólica e hiperbólica) podem evoluir de inomogeneidades e anisotropias para os modelos de Friedman[28] . No entanto, Bonnor partiu de restrições bem mais severas: por exemplo, considerou que a densidade é diferente de zero em qualquer ponto do espaço, em qualquer instante, ou seja, seu modelo não admite buracos. Mesmo assim, o resultado obtido é extremamente valioso pois seríamos tentados a pensar que inomogeneidades devem produzir anisotropia ao invés de isotropia.

Os modelos espacialmente inomogêneos com simetria esférica em torno de um ponto são também conhecidos na literatura como modelos de Tolman-Bondi. Bondi em 1947 estudou propriedades de um sistema idêntico ao de Tolman e obteve equações de movimento equivalentes [27]. No entanto, as propriedades do modelo investigadas por Bondi são distintas: ao encontrar as equações de movimento, observou que estas por uma interpretação diferente de constantes, são idênticas as equações newtonianas da energia. Analisou também a conexão entre a geometria do tri-espaço e a energia de camadas esféricas de matéria, além de encontrar o deslocamento espectral de linhas previsto pelo modelo.

A forma mais geral do elemento de linha para sistemas que apresentam simetria esférica espacial pode ser escrita como [3]

$$ds^2 = -A^2dr^2 - B^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2) + C^2dt^2 + 2D\,dr\,dt \quad , \qquad (2.2.1)$$

onde A, B, C e D são funções apenas de r e t.

Usando-se um sistema de coordenadas co-movente e considerando sistemas sem pressão e, consequentemente sem gradiente de pressão pode-se mostrar que o elemento de linha, eq. (2.2.1), pode ser reduzido à forma: [12]

$$ds^2 = dt^2 - A^2dr^2 - B^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2) \quad , \qquad (2.2.2)$$

onde agora A e B são funções de novas variáveis r e t.

Como, por hipótese, o sistema não tem pressão,

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad , \qquad (2.2.3)$$

e, em um sistema de coordenadas co-movente ,$u^\nu = \delta^\nu_0$ teremos

$$T^0_0 = \rho \; , \; T^i_j = T^i_0 = T^0_i = 0 \;\; (i,j = 1,2,3). \qquad (2.2.4)$$

As componentes do tensor momento-energia, correspondentes ao elemento de linha (2.2.2) podem ser computadas usando-se as fórmulas obtidas por Dingle[26] ; combinando esses resultados com (2.2.4), teremos

$$8\pi\ T^o_o = 2\ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{1+\dot{B}^2}{B^2} - \frac{1}{A^2}(2\frac{B''}{B} + \frac{B'^2}{B^2} - \frac{2A'B'}{AB}) = 8\pi\rho\ , \qquad (2.2.5)$$

$$8\pi T^1_1 = 2\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{1+\dot{B}^2}{B^2} - \frac{B'^2}{A^2B^2} = 0\ , \qquad (2.2.6)$$

$$8\pi T^2_2 = 8\pi T^3_3 = \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{1}{A^2}(\frac{B''}{B} - \frac{A'B'}{AB}) = 0\ , \qquad (2.2.7)$$

$$8\pi T^o_1 = -8\pi A^2\ T^1_o = -2(\frac{\dot{B}'}{B} - \frac{\dot{A}B'}{AB}) = 0, \qquad (2.2.8)$$

onde linha significa derivada parcial em relação à coordenada r e o ponto derivada parcial em relação à coordenada t.

Tolman e Bondi ao integrarem as equações de campo consideraram que $G^1_o = 0$ não poderia degenerar em uma identidade. Para isto, impuseram que

$$B' = \frac{\partial B}{\partial r} \neq 0\ . \qquad (2.2.9)$$

Esta restrição não advém das equações de campo nem da hipótese de simetria esférica e portanto os modelos de Tolman-Bondi não representam todas as soluções possíveis de modelos esfericamente simétricos, com poeira, sem pressão[43,44]. Assim, a solução geral deve incluir também o caso em que B'=0, ou seja, em que o elemento de linha escreve-se como

$$ds^2 = dt^2 - A^2(r,t)\, dr^2 - B^2(t)(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2). \qquad (2.2.10)$$

Estes modelos foram estudados por V.A.Ruban (43,44) e são uma generalização inomogênea simples dos modelos de Kantowski-Sachs. Na literatura russa estes modelos são chamados de modelos T da esfera, enquanto os de Tolman-Bondi são também conhecidos como centro simétricos. Os modelos T da esfera, ao contrário dos de Tolman-Bondi, não tem análogo clássico e sua existência bem como certas propriedades não usuais (massa ativa constante, máximo defeito de massa possível em Relatividade Geral) são devidas fundamentalmente a não linearidade da teoria e a topologia do modelo (43).

Como dissemos, estes modelos são generalizações inomogêneas simples dos modelos de Kantowski-Sachs (vide cap.1). Além disso, como veremos, são obtidos como caso particular dos modelos de classe II (EI) de Szekeres quando $\rho = \rho(r,t)$. No capítulo 3 várias propriedades geométricas destes modelos serão discutidas e para evitar repetições não o apresentaremos com detalhes aqui.

Impondo então que $B' \neq 0$ (Tolman-Bondi), obtemos da eq. (2.2.8)

$$\frac{\dot{B}'}{B'} = \frac{\dot{A}}{A} . \qquad (2.2.11)$$

Integrando a eq.(2.2.11) , teremos

$$A(r,t) = \frac{1}{w(r)} \frac{\partial B(r,t)}{\partial r} , \qquad (2.2.12)$$

onde $w(r)$ é uma função arbitrária de r tal que

$$w(r) > 0 . \qquad (2.2.13)$$

Substituindo a eq. (2.2.12) na eq. (2.2.6), teremos

$$\dot{B}(1-w^2) + \frac{\partial}{\partial t}(B\dot{B}^2) = 0, \tag{2.2.14}$$

integrando, obtemos

$$\dot{B}^2 = w^2 - 1 + \frac{2m(r)}{B} \quad , \tag{2.2.15}$$

onde m(r) é uma segunda função arbitrária de r.

Substituindo as equações (2.2.15) e (2.2.12) em (2.2.5) , obtemos para a densidade

$$4\pi\rho = \frac{m'(r)}{B'B^2} \quad . \tag{2.2.16}$$

A fim de investigar certas propriedades do modelo , é mais vantajoso trabalhar com M, a soma das massas de todas as partículas com coordenada radial menor que r, do que com a densidade ρ.

Temos, então,

$$M(r) = \int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\theta \rho\sqrt{-g} = 4\pi \int_0^r \rho AB^2 dr \ , \tag{2.2.17}$$

ou ainda, usando (2.2.12) e (2.2.16)

$$M(r) = \int_0^r w^{-1} m'(r) \ dr \quad . \tag{2.2.18}$$

Desde que a massa é positiva, devemos ter $\frac{dM}{dr} > 0$ e portanto a eq.(2.2.18) requer que

$$m'(r) \geqslant 0 \tag{2.2.19}$$

e é claro também de (2.2.18) ,que

$$m(r) = \int_0^r M'(r)\ w(r)\ dr \quad . \tag{2.2.20}$$

Desde que m = 0 em r = 0, usando a equação (2.2.15) , temos:

$$\dot{B}^2 = w^2 - 1 + \frac{2}{B} \int_0^r M'(r)\ w(r)\ dr \quad . \tag{2.2.21}$$

Equações (2.2.21) ou (2.2.15) podem ser integradas e apresentam três soluções distintas conforme $w^2 \gtreqless 1$.

Antes de apresentar estes resultados, faremos algumas observações acerca de propriedades da eq. (2.2.21) . Queremos compará-la com a aproximação newtoniana: para isto, devemos considerar baixas velocidades e pequenas massas. Assim,(1,27)

$$w(r) \sim 1 \quad , \tag{2.2.22}$$

$$w^2(r) = 1 + 2E(r), \tag{2.2.23}$$

onde E é pequeno.

Pode-se mostrar(27) ainda que, se um observador no centro 0 da esfera do fluido mede a distância de um objeto de tamanho conhecido localizado em (t,r,θ,ϕ) através do seu tamanho aparente, o resultado que ele obterá é $B(r,t)$. Portanto, podemos considerar $B(r,t)$ como a distância da origem a uma partícula P em (r,θ,ϕ) no instante t. Este resultado é baseado ainda no fato de que a superfície esférica{ r= constante, t = constante} tem área igual a $4\pi B^2(r,t)$. Como t mede o tempo próprio da partícula, $\frac{\partial B}{\partial t}$ pode ser considerada a sua velocidade. Com estas interpretações de velocidade e distância, substituindo (2.2.23) em (2.2.21) e desprezando o produto de E por M', obtemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^2 - \frac{M(r)}{B} = E(r), \qquad (2.2.24)$$

que é idêntica a equação newtoniana da energia, onde E representaria a energia total por unidade de massa.

Se não desprezamos em (2.2.21) o produto de E por M' teremos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{B}\int_0^r M'(r)(1+2E(r))^{1/2}\,dr = E(r), \qquad (2.2.25)$$

e, portanto, com as definições de distância e velocidade a única diferença entre (2.2.24) e (2.2.25) é que, no segundo caso, a massa gravitacional ativa depende da energia total.

A aceleração pode ser obtida derivando-se a equação (2.2.25) e novamente obtemos que a aceleração é inversamente proporcional a distância. O resultado é:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\frac{1}{B^2}\int_0^r M'(r)\ (1+2E(r))^{1/2}\,dr. \qquad (2.2.26)$$

Só que não podemos mais obter a eq.(2.2.25) de (2.2.26) sem ambiguidade na medida em que a constante de integração E(r) esta contida em (2.2.26).

Uma outra semelhança importante entre estas equações e as newtonianas é que as camadas de matéria tendo uma distância maior da origem do que a de uma partícula P não afetam seu movimento.

O sistema estudado não apresenta rotação e neste sentido podemos separar o espaço-tempo em uma parte espacial e outra temporal.

Neste modelo o tri-espaço tem a métrica

$$d\sigma^2 = A^2 dr^2 + B^2(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2\Theta\, d\phi^2) , \qquad (2.2.27)$$

onde

$$A = \frac{1}{w(r)} \frac{\partial B}{\partial r} . \qquad (2.2.28)$$

Como estamos considerando as seções {t = constante} , podemos considerar B como uma função de r apenas. E como B(r) é uma função monotônica crescente pode ser considerada como uma coordenada.

Assim,

$$d\sigma^2 = \frac{dB^2}{H^2} + B^2(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2\Theta\, d\phi^2) , \qquad (2.2.29)$$

onde $H(B) = w(r)$

O tensor de Riemann da seção espacial é facilmente calculado e obtemos :

$$^*R_{121}{}^2 = {}^*R_{131}{}^3 = -\frac{1}{HB}\frac{dH}{dB} ,$$

$$^*R_{232}{}^3 = 1 - H^2 \qquad \text{e} \qquad (2.2.30)$$

$$^*R_{122}{}^3 = {}^*R_{121}{}^3 = {}^*R_{132}{}^3 = 0.$$

O tensor de Ricci é então

$$^*R^1_1 = 2\,\frac{H}{B}\frac{dH}{dB} , \quad {}^*R^2_2 = {}^*R^3_3 = \frac{H^2-1}{B^2} + \frac{H}{B}\frac{dH}{dB} \qquad (2.2.31)$$

e o escalar de curvatura

$$*R = \frac{2}{B^2} \frac{d}{dB} (B(H^2-1)) \ . \qquad (2.2.32)$$

Portanto, das equações acima , obtemos que o tri-espaço é plano se H=1, ou o que dá no mesmo, w = 1. Se $B(H^2-1)$ é uma função crescente de B, a curvatura do tri-espaço é positiva . No caso contrário, a curvatura do tri-espaço é negativa.

O significado da função w(r) é claro quando interpretamos B(r,t) como a distância da origem de uma partícula P em (r,θ,ϕ) no instante t. Observamos da eq.(2.2.15) que quando $w^2=1$, a velocidade da partícula $\frac{\partial B}{\partial t}$ é igual a zero para $B=\infty$. Esta situação na teoria newtoniana é chamada de movimento parabólico das partículas. Se $w^2>1$, teremos da eq.(2.2.15) que $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ para $B = \infty$, isto é, as partículas escapam de seu próprio campo gravitacional(movimento hiperbólico). Por outro lado se $w^2<1$ as partículas atingem uma distância máxima da origem determinada por:

$$B_{max} = \frac{2m(r)}{1-w^2} \ , \qquad (2.2.33)$$

a partir da qual cessa a expansão e inicia-se uma contração. Este caso é conhecido como movimento elíptico [13].

Assim podemos associar a função w(r) a energia total das partículas e da eq. (2.2.32) observamos que a curvatura do tri-espaço está inteiramente determinada por ela.

Como vimos, a eq. (2.2.15) apresenta diversas soluções de acordo com $w^2 \gtreqless 1$. Apresentamos a seguir os resultados. No caso $w^2 \gtrless 1$ as soluções estão expressas na forma paramétrica.

a) $w^2 = 1$ (modelos parabólicos)

A equação (2.2.15) toma a forma

$$\dot{B}^2 = \frac{2m(r)}{B} \, , \tag{2.2.34}$$

cuja solução é:

$$B = \left(\frac{9m}{2}\right)^{1/3} (t+\beta)^{2/3} \, , \tag{2.2.35}$$

em que β (r) é uma função arbitrária de r.

Observamos que se fizermos

$$m(r) = \frac{2}{9} r^3 \quad e \quad \beta = 0 \tag{2.2.36}$$

obtemos a solução de Friedman de seção euclidiana. Para m=constante $\neq 0$, de (2.2.16), obtemos que $\rho = 0$. Portanto esta solução aplica-se ao espaço vazio, isto é, ela pode descrever o campo gerado por uma massa pontual.

Considerando

$$m = k, \quad \beta = r \, , \tag{2.2.37}$$

onde k é uma constante, reobtemos a solução de Schwarzschild[1].

b) $w^2 > 1$ (modelos hiperbólicos).

A solução de (2.2.15) é escrita na forma paramétrica como:

$$B = \frac{m}{(w^2-1)} \, (\cosh\eta - 1) \, , \tag{2.2.38}$$

$$t+\beta=\frac{m}{(w^2-1)^{3/2}}(\text{senh}\eta-\eta) \quad , \tag{2.2.39}$$

onde $\beta=\beta(r)$ é uma função arbitrária.

Observamos que com a escolha

$$w^2= 1+r^2,\ m=a_o r^3 \quad e \quad \beta=0 \quad , \tag{2.2.40}$$

onde a_o é uma constante positiva, reobtemos os modelos abertos de ($\kappa=-1$) de Friedman.

c) $w^2<1$ (modelos elípticos).

A solução de (2.2.15) escrita na forma paramétrica é para $\eta>0$,

$$B = \frac{m}{(1-w^2)}(1-\cos\eta) \quad , \tag{2.2.41}$$

$$t + \beta = \frac{m}{(1-w^2)^{3/2}}(\eta-\text{sen}\eta) \quad , \tag{2.2.42}$$

onde β é uma função arbitrária de r.

Observamos também que tomando

$$w^2= 1+ r^2 \quad , \quad m=a_o r^3 \quad e \quad \beta=0 \quad , \tag{2.2.43}$$

onde a_o é uma constante positiva, obtemos os modelos fechados de Friedman.

Finalizando, é importante ressaltar que, embora nas soluções apresentadas apareçam três funções arbitrárias de r, a saber, w, β e m, podemos por uma transformação de coordenadas eliminar uma destas funções. Assim, a solução geral depende de apenas duas funções arbitrárias com significado físico, as quais podem ser determinadas fornecendo-se a densidade e a distribuição de velocidades da matéria em algum instante t.

2.3) MODELOS DE SZEKERES

Os modelos de Szekeres são usualmente definidos como soluções das equações de Einstein, tendo como fonte de curvatura um fluido perfeito,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi[(\rho+p)u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu}], \qquad (2.3.1)$$

cujo fluxo é irrotacional, geodético, normal às hipersuperfícies $\{t = \text{constante}\}$, e para o qual a métrica pode ser escrita na forma

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha} dz^2 - e^{2\beta}(dx^2 + dy^2); \qquad (2.3.2)$$

onde, $\alpha = \alpha(t,x,y,z)$ e $\beta = \beta(t,x,y,z)$.

O sistema de coordenadas empregado é co-movente, $u^\mu = \delta^\mu_0$, u^ν é a quadrivelocidade do fluido, ρ a densidade de energia medida por um observador movendo-se com o fluido e p a pressão isotrópica.

Seguindo Szekeres [31], será conveniente introduzir um par de variáveis complexas ζ e $\bar{\zeta}$ definidos por:

$$\zeta = x + iy \quad \text{e} \quad \bar{\zeta} = x - iy. \qquad (2.3.3)$$

Assim a métrica toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha} dz^2 - e^{2\beta} d\zeta\, d\bar{\zeta}. \qquad (2.3.4)$$

As equações de campo reduzem-se então a:

$$8\pi(T^0_0 - 2T^\zeta_\zeta - T^1_1) = -2(\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 + 2\dot{\beta}^2) = 8\pi(\rho + 3p) \ , \tag{2.3.5}$$

$$4\pi\ T^0_1 = -\dot{\beta}' + \beta'(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = 0 \quad , \tag{2.3.6}$$

$$8\pi\ T^1_1 = -4\ e^{-2\beta}\ \beta_{\zeta\bar{\zeta}} - e^{-2\alpha}\beta'^2 + 2\ddot{\beta} + 3\dot{\beta}^2 = -8\pi p \quad , \tag{2.3.7}$$

$$8\pi\ T^\zeta_\zeta = e^{-2\alpha}(-\beta'' + \alpha'\beta' - \beta'^2) - 2e^{-2\beta}(\alpha_{\zeta\bar{\zeta}} + \alpha_\zeta\alpha_{\bar{\zeta}}) + \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 + \tag{2.3.8}$$

$$+\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} = -8\pi p \ ,$$

$$8\pi\ T^0_\zeta = -\dot{\alpha}_\zeta - \dot{\beta}_\zeta + \alpha_\zeta(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) = 0 \quad , \tag{2.3.9}$$

$$8\pi\ e^{2\beta}\ T^1_\zeta = \beta'_\zeta - \beta'\alpha_\zeta = 0 \ , \tag{2.3.10}$$

$$4\pi\ e^{2\beta}\ T^{\bar{\zeta}}_\zeta = \alpha_{\zeta\zeta} + (\alpha_\zeta)^2 - 2\beta_\zeta\alpha_\zeta = 0 \quad , \tag{2.3.11}$$

onde

$$' \equiv \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \cdot \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ , \ \alpha_\zeta \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial\zeta} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) ,$$

$$\alpha_{\bar{\zeta}} \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Observe-se que as equações (2.3.9), (2.3.10) e 2.3.11) são complexas e portanto, temos ao todo 10 equações de campo.

Como por hipótese o fluxo é geodético, as equações de conservação de energia e momento, eq.(1.1.3), impõem que a pressão deva ser função apenas do tempo: $p=p(t)$. No entanto, a densidade de energia não está sujeita a nenhuma restrição e no caso geral, como veremos adiante, será uma função das coordenadas espaciais e do tempo: $\rho = \rho(t, z, \zeta, \bar{\zeta})$.

É possível mostrar que as equações de campo (2.3.5) a (2.3.11) implicam que[30]

$$\dot{\beta}_\zeta = 0 \quad . \tag{2.3.12}$$

Para prosseguir na integração das equações de campo, devemos dividir as soluções em duas classes. As soluções ditas de classe I se $\beta' \neq 0$ e as soluções de classe II se $\beta' = 0$.

Analisemos inicialmente, as soluções de classe I.

I) Soluções de classe I ($\beta' \neq 0$)[30], [31]

Usando a equação (2.3.12) e o fato de que β é uma função real e portanto $\dot{\beta}_{\bar{\zeta}} = 0$, podemos escrever β na forma

$$\beta = \log \phi(t,z) + \upsilon(z,\zeta,\bar{\zeta}). \tag{2.3.13}$$

Como $\beta' \neq 0$, a eq. (2.3.6) é integrada e obtemos

$$\alpha = \log(h(z,\zeta,\bar{\zeta})\,\phi' + h(z,\zeta,\bar{\zeta})\,\phi\nu'). \tag{2.3.14}$$

A equação (2.3.10), para ser satisfeita, implica em:

$$h_\zeta = 0 \rightarrow h_{\bar{\zeta}} = 0 \tag{2.3.15}$$

e, portanto,

$$h = h(z). \tag{2.3.16}$$

Assim ϕ pode ser redefinida como $\phi\,h$ e ν como

ν-log h de tal forma que β permanece inalterado e

$$\alpha = \log(\phi' + \phi\nu') \ . \tag{2.3.17}$$

A equação (2.3.9) é assim identicamente satisfeita e a equação (2.3.7) implica em:

$$4e^{-2\nu}\ \nu_{\zeta\bar{\zeta}} + 1 = \dot{\phi}^2 + 2\ddot{\phi}\phi + 8\pi p\phi^2 \ . \tag{2.3.18}$$

Note que do lado esquerdo temos funções de z, ζ e $\bar{\zeta}$ e do lado direito funções de z e t; portanto, podemos escrever

$$4e^{-2\nu}\ \nu_{\zeta\bar{\zeta}} + 1 = -\kappa(z) \tag{2.3.19}$$

e

$$2\ddot{\phi}\phi + \dot{\phi}^2 + 8\pi p\phi^2 = -\kappa(z) \tag{2.3.20}$$

para alguma função real $\kappa(z)$.

Observe que a métrica bidimensional

$$d\sigma^2 = e^{2\nu}\ d\zeta\ d\bar{\zeta} \quad , \quad \nu = \nu(\zeta,\bar{\zeta},z) \ , \tag{2.3.21}$$

tem curvatura gaussiana dada por [31]

$$K = -4\ e^{-2\nu}\ \nu_{\zeta\bar{\zeta}} \ ; \tag{2.3.22}$$

portanto, a equação (2.3.19) expressa o fato de que as seções {t = constante e z = constante}, tem curvatura constante. Além disso, como $K = K(z)$, derivando eq. (2.3.22) em relação a ζ obtemos

$$(\nu_{\zeta\zeta} - (\nu_\zeta)^2)_{\bar{\zeta}} = 0 \tag{2.3.23}$$

e, integrando, teremos

$$\nu_{\zeta\zeta} - (\nu_{\zeta})^2 = \tau(\zeta, z). \qquad (2.3.24)$$

Uma transformação do tipo

$$\begin{aligned} \zeta &= f(\zeta') \\ \bar{\zeta} &= \bar{f}(\bar{\zeta}') \end{aligned} \qquad (2,3.25)$$

preservará a forma da métrica (2.3.21) ; mas, agora, com a nova função,

$$\nu'(\zeta', \bar{\zeta}', z) = \nu(\zeta, \bar{\zeta}, z) + \frac{1}{2} \log f_{\zeta'} + \frac{1}{2} \log \bar{f}_{\bar{\zeta}'}. \qquad (2.3.26)$$

Assim, a função τ, em (2.3.24) , sofre a transformação

$$\tau'(\zeta', z) = \tau(\zeta, z)\ (f_{\zeta'})^2 + \frac{1}{2}(\log f_{\zeta'})_{\zeta'\zeta'} - \frac{1}{4}\left[(\log f_{\zeta'})_{\zeta'}\right]^2 . \qquad (2.3.27)$$

Podemos sempre escolher esta transformação tal que

$$\tau'(\zeta', z) = 0. \qquad (2.3.28)$$

Desse modo, sem perda de generalidade, podemos tomar

$$(e^{-\nu})_{\zeta\zeta} = e^{-\nu}\ (-\nu_{\zeta\zeta} + (\nu_{\zeta})^2) = 0 \qquad (2.3.29)$$

e, integrando, obtemos

$$e^{-\nu} = a(z)\zeta\ \bar{\zeta} + B(z)\zeta + \bar{B}(z)\ \bar{\zeta} + c(z) . \qquad (2.3.30)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.3.22), teremos

$$ac - B\bar{B} = \frac{K}{4} = \frac{1+\kappa(z)}{4} , \qquad (2.3.31)$$

onde a(z) e c(z) são funções reais e B(z) é complexa.

A equação (2.3.20) pode ser escrita na forma ,

$$\frac{2\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 8\pi\, p + \frac{\kappa(z)}{\phi^2} = 0 \qquad (2.3.32)$$

e observamos que, para cada valor fixo de z, esta é justamente a equação que governa o fator de expansão nos modelos de Friedman (vide eq. 1.6.9).

As equações que necessitam ser resolvidas, a fim de determinarmos p, ρ e ϕ , são as eqs.(2.3.32) e (2.3.5) . O sistema é indeterminado, mas soluções exatas podem ser obtidas a partir do seguinte algoritimo:(30) devemos , inicialmente, especificar explicitamente $p=p(t)$ e resolver a eq.(2.3.32) .Assim a métrica estará determinada já que α e β podem ser obtidos diretamente das equações (2.3.13) ,(2.3.17) e (2.3.30) . Finalmente, usamos a eq.(2.3.5) como a equação de definição de ρ . É claro que com este procedimento as soluções encontradas não são necessariamente fisicamente aceitáveis, para sê-lo, elas deverão satisfazer condições fundamentais de energia.

O modelo mais simples foi obtido originalmente por Szekeres (31) e consiste em tomar $p = 0$. Com esta escolha a equação (2.3.32) reduz-se a

$$2\ddot{\phi}\phi + \dot{\phi}^2 = -\kappa(z) , \qquad (2.3.33)$$

que tem como primeira integral

$$\dot{\phi}^2 = -\kappa(z) + \frac{\ell(z)}{\phi}, \qquad (2,3.34)$$

onde $\ell(z)$ é uma função arbitrária de z.

A solução geral desta equação é:

$$\phi = F(\kappa(z),\ \ell(z),\ t - t_0(z)), \qquad (2.3.35)$$

onde $t_0(z)$ é uma nova função arbitrária de z e $F(\kappa,\ell,t)$ são as funções de Friedman, definidas da seguinte forma:

(i) $\kappa > o$, $\ell > o$, $F(\kappa,\ell,t) = \ell\kappa^{-1}\text{sen}^2\eta/2$, $t = \frac{\ell}{2}\kappa^{-3/2}(\eta - \text{sen}\ \eta)$.

(iia) $\kappa < o$, $\ell < o$; $F(\kappa,\ell,t) = \ell\kappa^{-1}\cosh^2\eta/2$, $t = -\frac{\ell}{2}(-\kappa)^{-3/2}(\eta + \text{senh}\ \eta)$.

(iib) $\kappa < o$; $\ell > o$; $F(\kappa,\ell,t) = -\ell\kappa^{-1}\text{senh}^2\eta/2$, $t = \frac{\ell}{2}(-\kappa)^{-3/2}(-\eta + \text{senh}\eta)$.

(2.3.36)

(iic) $\kappa < o$; $\ell = o$; $F(\kappa,o,t) = (-\kappa)^{1/2}t$.

(iiia) $\kappa = o$, $\ell > o$; $F(o,\ell,t) = (\frac{9\ell}{4})^{1/3}t^{2/3}$.

(iiib) $\kappa = o$, $\ell = o$; $F(o,o,t)$ = constante.

Estas funções são definidas como soluções da eq. (2.3.34) que se anulam em $t = 0$ (exceto no caso iiib), e que são positivas para algum intervalo $t > 0$. Isto elimina a consideração dos casos $\kappa > o$, $\ell \leq o$ e $\kappa = o$, $\ell < o$.

Observamos que a solução de Szekeres de classe I con têm sete funções arbitrárias de z. No sistema de coordenadas empregado, temos cinco funções reais, a, c, κ, ℓ, t_0, e uma complexa B, o que totaliza sete funções arbitrárias. No entanto, apenas cinco destas funções têm significado físico, já que existe uma relação entre elas, a eq. (2.3.31) , e uma pode ser igualada a ±1 por uma transformação de coordenadas do tipo $z' = F(z)$.

A expressão para a densidade é obtida diretamente da eq. (2.3.5) e, usando a eq. (2.3.34) , toma a forma

$$8\pi\rho = \frac{\ell' + 3\ell\nu'}{\phi^2(\phi' + \phi\nu')} \quad . \tag{2.3.37}$$

A fim de discutir certas propriedades dos modelos de classe I será conveniente uma mudança na notação até aqui empregada. A modificação consiste no seguinte:

- A equação (2.3.31) será reescrita como

$$ac - B\bar{B} = \frac{1+\kappa(z)}{4} = \frac{\varepsilon}{4} \; e^{2f(z)} ; \tag{2.3.38}$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0, \text{ para } \kappa(z) = -1 , \\ \varepsilon &= 1, \text{ para } \kappa(z) > -1 , \\ \varepsilon &= -1, \text{ para } \kappa(z) < -1. \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Redefinindo então

$$\begin{aligned} a(z) &= a^*(z) \quad e^f , \\ c(z) &= c^*(z) \quad e^f , \\ B(z) &= B^*(z) \quad e^f , \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

teremos a eq. (2.3.30) reescrita como

$$e^{-\nu} = P/w \ , \tag{2.3.41}$$

onde

$$P = a^* \zeta\bar{\zeta} + B^*\zeta + \bar{B}^* \bar{\zeta} + c^* \ , \tag{2.3.42}$$

com

$$a^*c^* - B^*\bar{B}^* = \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.3.43}$$

e

$$w(z) = e^{-f(z)}. \tag{2.3.44}$$

Assim,

$$e^{\beta} = \phi e^{\nu} = \frac{\phi w}{P} \ . \tag{2.3.45}$$

Definindo

$$R = \phi w \ , \tag{2.3.46}$$

a eq. (2.3.45) fica

$$e^{\beta} = \frac{R}{P} \ . \tag{2.3.47}$$

As eqs.(2.3.41) e (2.3.46) substituídas em (2.3.17) fornecem

$$\alpha = \log \frac{P}{w}\left(\frac{R}{P}\right)' \tag{2.3.48}$$

e, portanto,

$$e^{\alpha} = \frac{P}{w}\left(\frac{R}{P}\right)' \quad . \tag{2.3.49}$$

Usando as eqs. (2.3.46) e (2.3.38) , a eq. (2.3.20) é reescrita como

$$\dot{R}^2 = w^2 - \varepsilon + \frac{S}{R}, \tag{2.3.50}$$

onde

$$S(z) = w^3(z) \quad \ell(z) \quad , \tag{2.3.51}$$

A expressão para a densidade resulta:

$$8\pi\rho = \frac{PS' - 3SP'}{P^3 w \; e^{\alpha} e^{2\beta}} = \frac{PS' - 3SP'}{R^2(PR' - RP')} \quad . \tag{2.3.52}$$

Vamos resumir nossos resultados até aqui. A solução é a métrica, eq. (2.3.4) com e^{α} dado pela eq.(2.3.49) e e^{β} pela eq. (2.3.47) . P é expresso pela eq.(2.3.42) , com a condição (2.3.43) e R satisfaz a eq. (2.3.50) . Temos ao todo sete funções arbitrárias dependentes apenas de z: cinco reais w,a,c,S, uma proveniente da integração da eq.(2.3.50) , e uma complexa B. Destas, apenas cinco tem significado físico. A expressão para a densidade é a eq. (2.3.52).

Podemos observar, pela expressão da densidade, que esta depen derá de ζ e $\bar{\zeta}$ a menos que

$$a) \quad \frac{P'}{P} = G(z) \quad , \tag{2.3.53}$$

ou

$$b) \quad \frac{S'}{3S} = \frac{R'}{R} \quad . \tag{2.3.54}$$

No caso (a) teremos, da eq. (2.3.49) , que

$$\alpha = \alpha(z,t) \tag{2.3.55}$$

e a eq. (2.3.53) é equivalente a existência de uma função $g(z)$ tal que

$$a^* = e^{g(z)}\, a_1 \quad , \quad B^* = e^{g(z)}\, B_1 \quad , \quad c^* = e^{g(z)}\, c_1 \quad , \tag{2.3.56}$$

onde a_1 e c_1 são constantes reais e B_1 complexa.

No entanto, devido a restrição imposta pela eq. (2.3.43), devemos ter $g(z) = 0$ em (2.3.56) para $\varepsilon = \pm 1$ e no caso $\varepsilon = 0$ absorvemos $e^{g(z)}$ em w e não há perda de generalidade em considerar mos $P' = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} a^* &= a_1 \quad , \\ B^* &= B_1 \quad , \\ c^* &= c_1 \quad . \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

Mostra-se ainda [31], que por uma transformação bilinear de coordenadas do tipo,

$$\zeta' = \frac{m\zeta + n}{p\zeta + q} \quad , \tag{2.3.58}$$

onde m, n, p e q são constantes complexas, podemos tomar, sem perda de generalidade,

$$B_1 = 0 \ , \ c_1 = 1/2 \quad e \quad a_1 = \varepsilon/2. \tag{2.3.59}$$

Assim

$$P = \frac{1}{2}\,(1 + \varepsilon\zeta\bar{\zeta}) \ . \tag{2.3.60}$$

Analisemos agora a forma do elemento de linha para os diversos valores de ε, com P dado pela eq. (2.3.60):

a) Se $\varepsilon = 1$, o elemento de linha, eq.(2.3.4), toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{R'}{w}\right)^2 dz^2 - 4R^2(1+\zeta\bar{\zeta})^{-2} d\zeta\, d\bar{\zeta} \quad , \tag{2.3.61}$$

que, com a introdução de coordenadas polares

$$\zeta = e^{i\psi}\ \mathrm{ctg}\ \theta/2 \qquad \bar{\zeta} = e^{-i\psi}\ \mathrm{ctg}\ \theta/2 \ , \tag{2.3.62}$$

é reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{R'}{w}\right)^2 dz^2 - R^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\psi^2) \quad , \tag{2.3.63}$$

que é o mesmo dos modelos esfericamente simétricos de Tolman-Bondi.

ii) Se $\varepsilon = 0$, o elemento de linha (2.3.4) toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - (\frac{R'}{w})^2 dz^2 - 4R^2 d\zeta\, d\bar{\zeta} \tag{2.3.64}$$

e, com a introdução das coordenadas

$$\zeta = \frac{1}{2}(x+iy) \qquad \bar{\zeta} = \frac{1}{2}(x-iy), \tag{2.3.65}$$

pode ser reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - (\frac{R'}{w})^2 dz^2 - R^2(dx^2+dy^2) \tag{2.3.66}$$

que é a métrica dos modelos plano-simétricos de D.Eardley,E.Liang e R.Sachs [32].

(iii) Se $\varepsilon = -1$ o elemento de linha, eq. (2.3.4) ; toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - (\frac{R'}{w})^2 dz^2 - 4R^2(1- \zeta\bar{\zeta})^{-2}\, d\zeta\, d\bar{\zeta} \tag{2.3.67}$$

que, com a transformação de coordenadas

$$\zeta = e^{i\psi}\, \mathrm{ctg\,h}\, \theta/2 \qquad \bar{\zeta} = e^{-i\psi}\, \mathrm{ctgh}\, \theta/2, \tag{2.3.68}$$

toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - (\frac{R'}{w})^2 dz^2 - R^2(d\theta^2 + \mathrm{senh}^2\theta\, d\psi^2) . \tag{2.3.69}$$

que é a métrica de uma classe de modelos não homogêneos com simetria pseudo-esférica, isto é, modelos com um grupo de simetria de três parâmetros cujas órbitas são pseudo-esferas.

No caso (b), isto é, se $\frac{R'}{R} = \frac{S'}{3S}$, devemos ter R como um produto de uma função de z por uma função de t. Assim, das equações (2.3.52) e (2.3.50), devemos ter $\rho=\rho(t)$ e podemos escrever o elemento de linha como

$$ds^2 = dt^2 - F(t)\, h_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{2.3.70}$$

onde $i,j = 1,2,3$ e h_{ij} é independente de t.

A solução neste caso é Friedman, o que decorre de um teorema de Szekeres estabelecendo que todo modelo de poeira cujo fluxo é irrotacional será Friedman se, em coordenadas co-moventes, as seções espaciais da métrica são conformalmente estáticas. Este é um resultado particular de um teorema mais geral[33] que garante que todos os espaços-tempo de Szekeres com $\rho=\rho(t)$, $\rho\neq 0$, são espacialmente homogêneos.

No caso geral, não devemos ter a, c e B constantes e obteremos generalizações das soluções apresentadas anteriormente (vide equações (2.3.63), (2.3.66) e (2.3.69)).

Se $\varepsilon=1$, obtemos então a generalização dos modelos de Tolman-Bondi. Observamos que as propriedades dinâmicas do modelo são governadas pela eq.(2.3.34), que é também a que aparece nos modelos esfericamente simétricos de Tolman-Bondi. Assim, teremos generalizações dos modelos hiperbólicos se $w^2>1$, dos modelos parabólicos se $w^2=1$ e dos modelos elípticos se $w^2<1$.

Note que as superfícies bidimensionais {z=constante e t=constante} são esféricas pois a, c e B são constantes sobre as mes mas. Portanto, como dissemos anteriormente, sob uma transformação bilinear, eq.(2.3.58) , o elemento de linha da seção pode ser escrito na forma

$$d\sigma^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\ d\psi^2) \quad . \tag{2.3.71}$$

No entanto, para diferentes valores de z a transformação muda e, consequentemente, a posição do centro da esfera. Além disso, se z não é constante não podemos tomar B = 0, c = 1/2 e a = 1/2 sem perda de generalidade. Assim, no caso geral, as esferas não estão uma dentro da outra de forma a termos simetria esférica, mas o centro de uma esfera está deslocado do da outra por uma translação infinitesimal em uma direção arbitrária. Szekeres denominou estes modelos de modelos quase-esféricos, por razões evidentes.[36]

Uma propriedade dos modelos quase-esféricos é que a soma das massas de todas as partículas com coordenada radial menor que z em um dado instante t independe do tempo. Isto é:

$$\begin{aligned} M(z,t) &= \int_0^z dz \int\int d\zeta d\bar{\zeta}\ \rho\sqrt{-g} = \int_0^z dz \iint d\zeta d\bar{\zeta}\ e^{\alpha} e^{2\beta}\rho = \\ &= (8\pi)^{-1} \int_0^z dz \iint d\zeta d\bar{\zeta}\ \left(\frac{S'}{wP^2} - 3S\frac{S'}{wP^3}\right) = \\ &= (8\pi)^{-1} \int_0^z dz \left[\frac{S'}{w}\iint \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{P^2} + \frac{3S}{w}\frac{d}{dz}\left(\iint \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{P^2}\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.3.72}$$

Mas, $d\zeta d\bar{\zeta}$ é sempre a métrica de uma esfera unitária e, portanto ,

$$\iint \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{P^2} = 4\pi \quad . \tag{2.3.73}$$

Assim,

$$M(z,t) = M(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{S'}{w}\,dz \qquad (2.3.74)$$

que é uma expressão idêntica a que obtivemos no estudo dos modelos esfericamente simétricos de Tolman-Bondi.

Observe que a massa total pode ser escolhida tendendo a zero tão rapidamente quanto se deseje, para isso basta escolher $S'(z)/w(z) \to 0$ suficientemente rápido quando $z \to \infty$. Mas, no caso geral, não podemos fazer $\rho = 0$ para $z < z_0$ pois isto implicaria em $S'(z) = 0$ e, como veremos neste caso, a solução obtida é a de Schwarzschild ou então o espaço-tempo é plano. Entretanto, Bonnor(34) mostrou que é possivel a junção de uma parte destes modelos tendo um volume espacial finito com a métrica de Schwarzschild externamente. Como a solução de Schwarzschild é estática concluimos que uma partícula em queda livre não irradia ondas gravitacionais. A importância deste resultado pode ser percebida se lembramos que ele é obtido para uma densidade limitada e positiva em todo espaço. Ainda, pode-se mostrar que as soluções de Szekeres não tem vetores de Killing(35).

Supondo a massa sempre positiva (o caso $S'=0$ será analisado posteriormente), devemos ter $\frac{dM}{dz} > 0$ e a eq.(2.3.74) requer que

$$S' > 0 \quad . \qquad (2.3.75)$$

Além desta, como veremos a seguir, outras restrições devem ser impostas as funções a, c, B, w, S e t_0 a fim de que tenhamos soluções fisicamente aceitáveis(36).

Primeiramente vamos considerar que em t=0 a função $R_0(z) = R(z,0)$ seja uma função monotonicamente crescente com z, tal que uma transformação $z' = f(z)$ pode ser efetuada de forma que

$$R_0(z) = z \quad . \tag{2.3.76}$$

Assim para que a métrica, eq. (2.3.4), seja de classe C^1 em todo espaço as funções a(z), c(z) e B(z) devem ser contínuas e diferenciáveis para $z \to 0$, com primeira derivada nula em z = 0. E para que a métrica seja localmente euclidiana em z = 0 devemos ter

$$w(0) = 1 \quad . \tag{2.3.77}$$

Da eq. (2.3.50) segue que, a fim de que R(z,0) seja limitada quando $z \to 0$, devemos ter S(z)/z limitado, isto é, $S(z) \to 0$ quando $z \to 0$. Por outro lado, a densidade será limitada para $z \to 0$ se

$$\frac{S'}{z^2} \text{ é limitado quando } z \to 0 \tag{2.3.78}$$

já que da equação (2.3.52) e das restrições acima

$$\rho \to \frac{S'}{z^2} \quad \text{quando } z \to 0 \tag{2.3.79}$$

Assim,

$$S' = 0(z^2) \ , \qquad S = 0(z^3) \quad \text{quando } z \to 0 \quad . \tag{2.3.80}$$

Pode-se mostrar ainda[36] que a condição de que a densidade inicial $\rho_0(z)=\rho(z,0)$ seja regular em todo espaço implica em

$$0 \geqslant a'c' - B'\bar{B}' > -\frac{1}{4}\min\left(\frac{1}{z^2}, \left(\frac{S'}{3S}\right)^2\right). \qquad (2.3.81)$$

Os casos $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = -1$ podem também ser estudados e obtemos resultados semelhantes, isto é, soluções quase-planas e quase-pseudo-esféricas, respectivamente; as superfícies {z = constante, t = constante} são planas ou pseudo-esferas de raio R. Uma diferença importante, no entanto, é que nestes casos a massa não é limitada.

Para encerrar nossa análise dos modelos de Szekeres de classe I, faltaria apenas considerar o caso $\rho = 0$. Apesar da não linearidade das equações de campo, neste caso, pode-se mostrar que não há perda de generalidade em tomar $\rho=0$ na eq.(2.3.52) . Esta condição implica em:

$$1) \quad \frac{P'}{P} = \frac{1}{3}\,\frac{S'}{S} \qquad (2.3.82)$$

ou

$$2) \quad S = 0 \quad . \qquad (2.3.83)$$

Na primeira hipótese não há perda de generalidade em tomar $P'=0$ e recaímos em elementos de linha já analisados anteriormente, eqs. (2.3.63) , (2.3.66) e (2.3.69) ,só que devemos ter $R_{\mu\nu}=0$. Devemos então considerar cada caso, isto é, em princípio teremos soluções distintas para cada valor de ε. Se $\varepsilon = 1$, obtemos a solução de Schwarzschild em coordenadas co-moventes. Para $\varepsilon=-1$, obtemos uma solução com simetria pseudo-esférica que pode ser obtida da solução de Schwarzschild pela transformação complexa $\Theta\to i\Theta$, $ds^2\to -ds^2$, enquanto que o caso $\varepsilon=0$ é obtido de Schwarzschild por um processo limite[(31)].

Faltaria analisar a segunda hipótese, isto é, S=0. É fácil observar que com esta condição recaímos no elemento de linha expresso na eq. (2.3.70), só que devemos ter agora $R_{\mu\nu}=0$. Pode-se mostrar que neste caso o tensor de Riemann se anula e portanto o espaço-tempo é plano [(31)].

II) Modelos de Classe II ($\beta'=0$)[(37), (30), (35)]

A equação (2.3.12) e o fato que β é uma função real permitem que escrevamos β na forma

$$\beta = \ell n\, R(t) + \nu(\zeta,\bar{\zeta}). \tag{2.3.84}$$

As equações (2.3.6) e (2.3.10) são identicamente satisfeitas e, integrando a eq. (2.3.9), obtemos

$$\alpha = \ell n \left[S(t,z) + R(t)\, A(z,\zeta,\bar{\zeta})\right], \tag{2.3.85}$$

onde S e A são funções arbitrárias. A equação (2.3.7) implica, então, que

$$4e^{-2\nu}\, \nu_{\zeta\bar{\zeta}} = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 8\pi p\, R^2. \tag{2.3.86}$$

Como do lado esquerdo temos funções de ζ e $\bar{\zeta}$ e do lado do direito temos funções dependentes apenas de t, podemos escrever

$$4e^{-2\nu}\ \nu_{\zeta\bar{\zeta}} = -\kappa\ , \tag{2.3.87}$$

$$2\ddot{R}R + \dot{R}^2 + 8\pi p\ R^2 = -\kappa, \tag{2.3.88}$$

onde κ é uma constante. As funções ν e R podem ser redefinidas de tal forma que possamos tomar

$$\kappa = 0,\ \pm 1\ . \tag{2.3.89}$$

A eq. (2.3.88) é a mesma equação que governa o fator de expansão nos modelos de Friedman e a eq. (2.3.87) expressa o fato de que as seções {t = constante, z = constante}, tem curvatura gaussiana constante. Integrando a eq. (2.3.87) obtemos

$$e^{-\nu} = a\ \zeta\bar{\zeta} + B\zeta + \bar{B}\bar{\zeta} + c \tag{2.3.90}$$

onde a, c são constantes reais, B é complexa e que satisfazem a relação

$$ac - B\bar{B} = \frac{K}{4}\ . \tag{2.3.91}$$

Como vimos, anteriormente, por uma transformação bilinear de coordenadas (eq.(2.3.58)), podemos, sem perda de generalidade, tomar

$$\begin{aligned} a &= K/2, \\ c &= 1/2, \\ B &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.92}$$

Assim,

$$e^{-\nu} = \frac{1}{2}(1 + K\,\zeta\bar{\zeta}). \qquad (2.3.93)$$

Usando a eq. (2.3.93) , segue da eq.(2.3.11) que

$$(e^{-\nu}A)_{\zeta\zeta} = (e^{-\nu}A)_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} = 0 \qquad (2.3.94)$$

e, integrando, obtemos

$$A = \left[U(z)\zeta\bar{\zeta} + V(z)\zeta + \bar{V}(z)\bar{\zeta} + w(z)\right]e^{\nu}, \qquad (2.3.95)$$

onde U(z) e w(z) são funções arbitrárias reais e V(z) complexa.

Usando as eqs. (2.3.90) e (2.3.95) reduzimos a eq. (2.3.8) a

$$\ddot{S}R + \dot{S}\dot{R} + \lambda\ddot{R} + 8\pi SRp = 2e^{-2\nu}A_{\zeta\bar{\zeta}} + \kappa A =$$

$$= 2\left[c\,U + a\,w - B\,\bar{V} - \bar{B}\,V\right], \qquad (2.3.96)$$

que com a escolha (2.3.92) toma a forma

$$\ddot{S}R + \dot{S}\dot{R} + S\ddot{R} + 8\pi SRp = U + \kappa w. \qquad (2.3.97)$$

Para que possamos determinar p, R, S e ρ devemos então resolver as eqs. (2.3.97) , (2.3.88) e (2.3.5) . Da mesma forma que nos modelos de classe I, aqui também o sistema é indeterminado. No entanto, podemos obter soluções exatas utilizando o seguinte algoritimo:[30] devemos, inicialmente, especificar, explicitamente, p=p(t) e resolver a eq. (2.3.88) para R. Posteriormente, substituir R e p na eq. (2.3.97) e resolvê-la para S. Finalmente, calculamos ρ através da eq. (2.3.5).

Novamente, nem todas as soluções obtidas são fisicamente aceitáveis. Algumas soluções exatas para fluido perfeito foram obtidas por Tomimura (p=constante R^{-2}) [37], Szafron e Wainwright[38] ($\kappa=0$, p=constante t^{-2}), Cadderni e Pollock[39] (p=constante R^{-4}, $\kappa = 0$) e recentemente Sales de Lima ($\kappa=0$, p=constante$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$) [40].

O modelo mais simples consiste em tomar p=0 e foi obtido pela primeira vez por Szekeres[31] e, independentemente, por Bonnor e Tomimura[41] que também estudaram suas propriedades e analisaram sua evolução utilizando uma notação diferente.

Com a condição p=0 eq. (2.3.97) fica:

$$\ddot{S}R + \dot{S}\dot{R} + S\ddot{R} = U + \kappa W \ , \tag{2.3.98}$$

e a eq. (2.3.88)

$$2\ddot{R}\,R + \dot{R}^2 = -\kappa \ , \tag{2.3.99}$$

que tem como primeira integral

$$\dot{R}^2 = -\kappa + \frac{\ell}{R} \tag{2.3.100}$$

onde ℓ é uma constante de integração.

A solução geral de (2.3.100) é:

$$R = F(\kappa, \ell, t-t_0) \tag{2.3.101}$$

onde $F(\kappa,\ell,t)$ são as funções de Friedman, já definidas anteriormente (eqs. (2.3.36)), e t_0 uma nova constante de integração.

Observamos que as soluções de classe II contêm seis funções arbitrárias de z. No sistema de coordenadas empregado temos; uma função complexa V (que equivale a duas funções reais), quatro funções reais, U, w e duas provenientes de integração da equação (2.3.98) . No entanto, destas quatro últimas apenas três são independentes, o que totaliza cinco funções arbitrárias.

Para demonstrar esta última afirmação vamos inicialmente supor que $\kappa \neq 0$ e tomar

$$S = (-\kappa U - w)R + T(z,t). \qquad (2.3.102)$$

Substituindo a equação acima na eq. (2.3.98) e usando a eq. (2.3.99), obtemos

$$R\ddot{T} + \dot{R}\,\dot{T} + \ddot{R}\,T = 0 \qquad (2.3.103)$$

cuja solução pode ser escrita na forma

$$T(z,t) = G(z)\,\gamma(t) + H(z)\,\lambda(t) \qquad (2.3.104)$$

onde G e H são funções arbitrárias de z; γ e λ são funções de t linearmente independentes e linearmente independentes de R, também.

Absorvendo o primeiro termo do lado direito da eq. (2.3.102) em $R\,A(z,\zeta,\bar{\zeta})$ da eq. (2.3.95) , esta é reescrita na forma ($\kappa \neq 0$)

$$\alpha = \ell n\,(T(t,z) + R(t)\,A) \qquad (2.3.105)$$

sendo $A(z,\zeta,\bar{\zeta})$ expresso agora como

$$A = e^{\nu}\left[L\zeta\bar{\zeta} + V\zeta + \bar{V}\bar{\zeta} - \kappa\, L\right] , \tag{2.3.106}$$

onde

$$L = \frac{1}{2}(U - \kappa w) . \tag{2.3.107}$$

Assim, teremos juntamente com as funções de integração G e H, mais três funções arbitrárias de z, uma real L e uma complexa V, o que totaliza cinco funções arbitrárias reais dependentes da variável z.

Vejamos agora o que ocorre quando $\kappa = 0$. Neste caso a solução da eq. (2.3.98) toma a forma

$$S = \frac{U}{2}\,\gamma(t) + M(z)\, R + H(z)\,\lambda(t), \tag{2.3.108}$$

onde $\gamma(t)$ pode ser obtido de (2.3.98) e $\lambda(t)$ de (2.3.103), conhecida a forma de R. γ, λ e R são funções de t linearmente independentes e M, H são funções arbitrárias de z.

Absorvendo M(z) em w na eq. (2.3.85) teremos cinco funções arbitrárias, três reais U, w e H e uma complexa V.

Da mesma forma que nas soluções de classe I, uma das funções pode ser igualada a ± 1 por uma transformação de coordenadas $z' = F(z)$. Portanto as soluções de classe II dependem de apenas quatro funções arbitrárias de z com significado físico. Resta observar que elas também dependem de constantes arbitrárias provenientes da integração da eq. (2.3.99) .

A expressão da densidade é obtida da equação (2.3.5) e, após algumas manipulações utilizando as equações (2.3.84), (2.3.85), e (2.3.99), toma a forma:

$$8\pi\rho = 3R^{-2}(\dot{R}^2 + \kappa) + 2e^{-\alpha}R^{-1}(\ddot{R}S - R\ddot{S}) \qquad (2.3.109)$$

A fim de continuarmos investigando as soluções de classe II, devemos considerar separadamente cada caso dependendo dos valores de κ e ℓ em (2.3.101). O procedimento a seguir é o seguinte:

a) $\kappa \neq 0$

1) definido κ, temos e^{ν} de (2.3.93).
2) Resolvemos a eq. (2.3.101) para os valores de κ e ℓ definidos e obtemos $R(t)$.
3) Substituimos $R(t)$ em (2.3.103) e integramos, obtendo $\gamma(t)$ e $\lambda(t)$. Assim α fica determinada a menos de funções arbitrárias.
4) Finalmente, a densidade é obtida usando-se os resultados acima na eq. (2.3.109).

b) $\kappa = 0$

1) Neste caso e^{ν} pode ser tomada igual a um.
2) Resolvemos a eq. (2.3.101) e obtemos $R(t)$.
3) Substituimos $R(t)$ em (2.3.103) e (2.3.98) integramos para obter $\lambda(t)$ e $\gamma(t)$. Assim α fica determinada a menos de funções arbitrárias.

Os modelos são classificados de acordo com o valor de κ e usaremos a mesma terminologia adotada na classificação dos modelos Tolman-Bondi. Assim se $\kappa = +1$ os modelos serão chamados de elípticos, se $\kappa = -1$ hiperbólicos e se $\kappa = 0$ parabólicos.

Apresentamos a seguir, os resultados e observamos que para homogeneizar a notação trocamos a letra da função arbitrária U por G nos modelos parabólicos.

1) Modelos Elípticos ($\kappa=1$)

a) Modelo EI - $\ell > 0$:

$$e^{-\nu} = \frac{1}{2}(1 + \zeta\bar{\zeta}), \tag{2.3.110}$$

$$e^{\alpha} = AR + T,$$

$$A = e^{\nu}(L\,\zeta\bar{\zeta} + V\zeta + \bar{V}\bar{\zeta} - L), \tag{2.3.111}$$

$$R = \ell\ \mathrm{sen}^2\eta/2\ , \quad t = \frac{\ell}{2}(\eta - \mathrm{sen}\eta),\ 0 < t < \pi\ , \tag{2.3.112}$$

$$T = G(\eta/2\ \ \mathrm{ctg}\eta/2 - 1) + H\ \mathrm{ctg}\eta/2, \tag{2.3.113}$$

$$8\pi\rho = \frac{3\ell A - G}{R^2\ e^{\alpha}}\ ; \tag{2.3.114}$$

2) Modelos Hiperbólicos $\kappa = -1$

$$e^{-\nu} = \frac{1}{2}(1 - \zeta\bar{\zeta}), \tag{2.3.115}$$

$$e^{\alpha} = AR + T,$$

$$A = e^{\nu}(L\,\zeta\bar{\zeta} + V\zeta + \bar{V}\bar{\zeta} + L); \tag{2.3.116}$$

a) Modelo HI - $\ell > 0$

$$R = \ell\ \mathrm{senh}^2\eta/2, \quad t = \frac{\ell}{2}(\mathrm{senh}\eta - \eta), \quad t > 0\ , \tag{2.3.117}$$

$$T = G(\frac{\eta}{2}\ \mathrm{ctgh}\,\eta/2 - 1) + H\ \mathrm{ctgh}\,\eta/2, \tag{2.3.118}$$

$$8\pi\rho = \frac{3\ell A + G}{R^2\ e^{\alpha}}\ ; \tag{2.3.119}$$

b) Modelo HII - $\ell<0$:

$$R = -\ell\ \cosh^2\eta/2, \quad t = -\frac{\ell}{2}(\eta + \mathrm{senh}\,\eta), \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.3.120}$$

$$T = G(\eta/2\ \mathrm{tgh}\,\eta/2 - 1) + H\ \mathrm{tgh}\ \eta/2, \tag{2.3.121}$$

$$8\pi\rho = \frac{3\ell A + G}{R^2\ e^{\alpha}}\ ; \tag{2.3.122}$$

c) Modelo H III - $\ell=0$

$$R = t, \quad (t > 0), \tag{2.3.123}$$

$$T = G\ \log\ t + H \tag{2.3.124}$$

$$8\Pi\rho = \frac{2G}{R^2 e^{\alpha}}\ ; \tag{2.3.125}$$

3) Modelos Parabólicos ($\kappa = 0$):

$$e^{-\nu} = 1 \tag{2.3.126}$$

$$e^{\alpha} = AR + T,$$

$$A = (G\zeta\bar{\zeta} - + V\zeta + \bar{V}\bar{\zeta} + w); \tag{2.3.127}$$

a) Modelo PI - $\ell > 0$:

$$R = t^{2/3} \quad (\text{usamos } \ell=4/9), \tag{2.3.128}$$

$$T = \frac{9}{5} G t^{2/3} + H t^{-1/3}, \qquad t > 0 \tag{2.3.129}$$

$$8\pi\rho = \frac{4A}{3R^2 e^{\alpha}} ; \tag{2.3.130}$$

b) Modelo P II - $\ell=0$

$$R = \text{constante} , \tag{2.3.131}$$

$$T = Gt^2 + Ht, \quad t > t_0 \ , \ e^{\alpha(t_0, z, \zeta, \bar{\zeta})} = 0, \tag{2.3.132}$$

$$8\pi\rho = - \frac{4G}{e^{\alpha}}. \tag{2.3.133}$$

Até aqui vinhamos usando o mesmo sistema de coordenadas adotado por Szekeres o que simplifica consideravelmente a integração das equações de campo.

No entanto, se desejamos analisar certas propriedades das soluções, como, por exemplo, saber que outros modelos estão contidos como caso particular nas soluções de classe II, ou ainda, estudar a evolução destes modelos, será conveniente mudarmos o sistema de coordenadas até aqui empregado. As transformações são as seguintes:

1) Se $\kappa=1$

$$\begin{aligned} \zeta &= e^{ix} \operatorname{ctg} y/2 \\ \bar{\zeta} &= e^{-ix} \operatorname{ctg} y/2 \end{aligned} \tag{2.3.134}$$

2) Se $\kappa=0$

$$\zeta = x + iy \qquad (2.3.135)$$

$$\bar{\zeta} = x - iy$$

3) Se $\kappa= -1$

$$\zeta = e^{ix}\, \mathrm{ctgh}\ y/2 \qquad (2.3.136)$$

$$\bar{\zeta} = e^{-ix}\, \mathrm{ctgh}\ y/2.$$

Com estas transformações o elemento de linha eq. (2.3.4)pode ser reescrito como

$$ds^2 = -dt^2 + Q^2 dz^2 + R^2(t)(dy^2 + h^2 dx^2), \qquad (2.3.137)$$

onde

1) $h = \mathrm{sen}\ y \qquad (\kappa = +1) \qquad (2.3.138)$

2) $h = \mathrm{senh}\, y \qquad (\kappa = -1) \qquad (2.3.139)$

3) $h = 1 \qquad (\kappa = 0) \qquad (2.3.140)$

e

$$Q = e^{\alpha} = AR + T.$$

Assim, expressando A em termos das novas coordenadas temos:

1) $A = (M \cos x + N\ \mathrm{sen}\ x)\ \mathrm{sen}\ y + 2L \cos y \qquad (\kappa=+1)$ (2.3.141)

2) $A = -(M\cos x + N\mathrm{sen}\ x)\mathrm{senh}\ y - 2L \cosh y \qquad (\kappa=-1)$

(2.3.142)

$$3)\ A = G(x^2+y^2) + Mx + Ny + w. \qquad (\kappa=0) \qquad (2.3.143)$$

Em todos os modelos, exceto no caso P II, o domínio da variável t é ditado pelos zeros da função de Friedman R. A escolha do domínio das variáveis espaciais depende de considerações topológicas; adotaremos em todos os modelos que

$$-\infty < x,y,z < \infty \qquad (2.3.144)$$

com exceção de EI para o qual (41)

$$0 \leqslant z < 2\pi\ , \quad 0 < y < \pi \quad e \quad 0 < x < \pi \qquad (2.3.145)$$

ou

$$-\infty < z < \infty\ , \quad 0 < y < \pi \quad e \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \qquad (2.3.146)$$

Todos os modelos dependem de quatro funções arbitrárias e nos casos HI, HII e EI de uma constante arbitrária ℓ.

Por uma inspeção direta no elemento de linha e na expressão da densidade observamos, que se fizermos G=H=0 nos modelos PI, HI e EI, obtemos as soluções de Friedman plana, aberta e fechada respectivamente. Este resultado segue do teorema de Szekeres, mencionado anteriormente, já que as seções espaciais são conformalmente estáticas. Observamos ainda que se G=H=0, teremos no caso PII um universo plano, estático e com densidade nula, enquanto que no caso HII teremos as soluções abertas de Friedman, mas com densidade negativa.

Podemos ainda por um conjunto distinto de particula rizações obter vários modelos homogêneos e anisotrópicos. Por exemplo, se tomarmos em HI e HII

$$M = N = L = 0 \quad e \quad G = c\,H, \text{ onde } \quad c = \text{constante}, \tag{2.3.147}$$

obteremos duas classes de modelos abertos estudados por Kantowski e Sachs [42]. Particularizações semelhantes em EI nos levam aos modelos de Kantowski - Sachs.

Ainda em EI, se tomarmos apenas

$$M = N = L = 0 \tag{2.3.148}$$

teremos os modelos não homogêneos com simetria esférica de Ruban [43] que são uma generalização inomogênea dos modelos de Kantowski-Sachs. E, se além da condição (2.3.148)temos $G = 0$, obtemos as soluções "internas" de Schwarzschild. Lembramos ainda que o modelo PI generaliza a solução de Kasner de expoentes (-1/3, 2/3,2/3) se $G=M=N=0$.

Teremos singularidades nos modelos de classe II onde

$$R = 0 \text{ (a)} \qquad \text{ou} \qquad Q = AR + T = 0 \quad \text{(b)} \tag{2.3.149}$$

As singularidades $R=0$ ocorrem sobre as hipersuperfícies $t = 0$ e são do mesmo tipo que encontramos nos modelos de Friedman. Já as singularidades $Q = 0$ não ocorrem usualmente sobre uma hipersuperfície $\{t=\text{constante}\}$ e admitem uma grande variedade de possibilidades, já que Q contém quatro funções arbitrárias de z. Garantindo-se o bom comportamento destas funções, os modelos (exceto EI que apresenta singularidades de linha [41]) aparentemente não contém nenhum outro tipo de singularidades. As funções arbi trárias devem ser escolhidas de tal forma que os modelos, se possível, no domínio da variável t, tenham densidades positivas. Nos modelos PI, HI e EI isto é sempre possível, no entanto, nos modelos PII, HII e HIII pelo menos uma seção do espaço-tempo terá densidades negativas (41).

A evolução dos modelos de classe II, estudada por Bonnor e Tomimura (41), depende das funções arbitrárias G(z) e H(z). Em todos os casos a superfície bidimensional {x=constante , t=constante} segue a história determinada pela função R(t), mas, na direção z, a expansão é diferente. O comportamento assintótico é determinado considerando, em $t=0^+$ e $t \to \infty$, a potência temporal dominante, na densidade e na métrica. Apresentamos na tabela abaixo, um resumo dos resultados obtidos no estudo da evolução dos modelos de Szekeres de classe II (41) .

Tabela 2.3.1.-Evolução dos modelos de Szekeres pertencentes à Classe II

Modelo	Subcasos	Evolução de:	Evolução para:
P.I	$H \neq 0$, $G \neq 0$	inomogêneo Kasner	inomogêneo e anisotrópico
	$H \neq 0$, $G = 0$	inomogêneo Kasner	Friedmann plano
	$H = 0$, $G \neq 0$	homogêneo anisotrópico	inomogêneo anisotrópico
P.II	___________	contém densidades negativas em todo instante de tempo	
H.I	$H \neq 0$, $G \neq 0$	inomogêneo K-S	Friedmann hiperbólico
	$H \neq 0$, $G = 0$	inomogêneo K-S	Friedmann hiperbólico
	$H = 0$, $G \neq 0$	homogêneo anisotrópico	Friedmann hiperbólico
H.II	___________	contém densidades negativas em todo instante de tempo	
H.III	___________	homogêneo anisotrópico	densidade não uniforme-métrica plana
E.I	$\pi G + H < 0$	inomogêneo K-S	inomogêneo e anisotrópico
	$\pi G + H = 0$	inomogêneo K-S	homogêneo anisotrópico

CAPÍTULO 3

Introdução de um Campo Eletromagnético e uma Radiação Isotrópica nos Modelos Cosmológicos de Szekeres

3.1) Introdução

Como vimos no capítulo anterior, as soluções de Szekeres generalizam vários espaços-tempo conhecidos. Contudo, modelos tendo apenas poeira como fonte de curvatura apresentam limitações; o universo além de matéria contém, por exemplo, radiação, sendo esta dominante no passado. Recentemente, Pollock e Caderni estudaram modelos da classe II de Szekeres com radiação isotrópica. No trabalho que apresentaremos a seguir, ampliamos esse enfoque adicionando um campo magnético e um campo elétrico paralelos. Este último foi introduzido, pois esperávamos que desta forma obteríamos uma estrutura mais rica, apesar de só haver indícios para um campo magnético em larga escala. A mesma motivação tivemos, ao permitir que os campos dependessem de todas as coordenadas. No entanto, como veremos, as equações acima mencionadas impõem uma dependência apenas temporal para o campo (o que está de acordo com as observações astronômicas). Mais ainda, o campo elétrico não acrescenta nenhuma estrutura nova como imaginávamos.

3.2) Os Modelos

O elemento infinitesimal de linha para o espaço -tempo de Szekeres, classe II, pode ser escrito na forma

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2 dz^2), \qquad (3.2.1)$$

onde $Q = Q(x,y,z,t)$, $R=R(t)$ e $h=h(y)$ são funções a serem determinadas.

Os modelos são soluções das equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}, \qquad (3.2.2)$$

tendo como fonte de curvatura um fluido perfeito constituido de uma mistura de um fluido de poeira com uma radiação isotrópica que não interagem entre si e um campo eletromagnético que também não interage com os fluidos.

$$T_{\mu\nu} = (\rho_d + \frac{4}{3}\rho_r) u_\mu u_\nu - \frac{1}{3}\rho_r \, g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \qquad (3.2.3)$$

onde $\rho_d = \rho_d(x,y,z,t)$, $\rho_r = \rho_r(t)$ são as densidades de energia da poeira e da radiação, respectivamente. $\tau_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do campo eletromagnético expresso por

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}(F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} g_{\mu\nu}), \qquad (3.2.4)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell que satisfaz as equações,

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = J^{\mu}, \qquad (3.2.5)$$

$$F_{[\mu\nu||\sigma]} = 0, \qquad (3.2.6)$$

onde J^{μ} é o quadrivetor densidade de corrente.

O sistema de coordenadas empregado é co-movente, $u^{\mu}=\delta^{\mu}_{0}$,u^{ν} é a quadrivelocidade do observador que mede localmente as densidades ρ_d, ρ_r , a pressão $p_r=\frac{1}{3}\rho_r$ e o campo eletromagnético.

Vamos considerar que, no sistema de coordenadas empregado, apenas as componentes

$$F_{32} = -F_{23} = H \qquad (3.2.7)$$

e

$$F_{01} = -F_{10} = E \qquad (3.2.8)$$

do tensor eletromagnético são diferentes de zero. A hipótese expressa pelas eqs.(3.2.7) e (3.2.8) corresponde à campos elétrico e magnético paralelos e orientados na direção x. Com esta escolha o tensor momento-energia do campo eletromagnético é diagonal e terá componentes

$$-\tau^{2}_{2} = -\tau^{3}_{3} = \tau^{1}_{1} = \tau^{0}_{0} = \frac{H^2}{8\pi R^4 h^2} + \frac{E^2}{8\pi Q^2} , \qquad (3.2.9)$$

onde em princípio, $E = E(x,y,z,t)$ e $H = H(x,y,z,t)$.

Faremos a hipótese de que a densidade de energia da radiação é dada pela relação:

$$\rho_r = \frac{3c^2}{8\pi} R^{-4} , \qquad (3.2.10)$$

onde c^2 é uma constante real não negativa e $R^2(t)$ é a componente do tensor métrico.

Tivemos algumas motivações para escolher a expressão acima para a densidade de energia da radiação: em primeiro lugar, $\rho_r(t)$ e $R(t)$ são as únicas funções dependentes apenas do tempo nos modelos ; portanto, uma relação funcional entre elas deve existir. Além disso, como veremos adiante, com a escolha (3.2.10),a função $R(t)$ obedecerá a mesma equação diferencial que governa o fator de expansão nos modelos de Friedman, equação (1.6.9) , o que simplifica enormemente a integração das equações de campo, tornando possível a obtenção de soluções exatas . Os modelos estudados, como será visto adiante, tendem, para grandes valores da coordenada temporal, à homogeneidade e isotropia, tendo a função $R(t)$, assintoticamente, como fator de escala. E, como vimos no capítulo 1, os modelos de Friedman com equação de estado $p=\frac{1}{3}\rho$, apresentam para a densidade de energia a dependência funcional com o fator de escala expressa pela eq.(3.2.10).

Queremos ressaltar, no entanto, que a escolha (3.2.10) não é obtida como uma imposição da teoria; em síntese,é uma escolha. Isto fica claro se lembramos que a exigência de que os fluidos de poeira e radiação não interajam não implica que estes sejam separadamente conservados. Isto só ocorrerá se o elemento de linha reduzir-se à forma do elemento de linha de Friedman-Robertson-Walker, o que não é permitido já que temos uma direção de anisotropia imposta pela presença do campo eletromagnético. A exigência de não interação decorre da hipótese de fluido perfeito e se a abandonamos, ou seja, se desejamos introduzir ter mos de interação, a radiação não será mais isotrópica e necessitaremos acrescentar termos de pressão anisotrópica ao tensor momento-energia [39].

As equações de campo para o elemento de linha (3.2.1), com $T_{\mu\nu}$ dado pela eq. (3.2.3), satisfazendo eq. (3.2.7) e eq. (3.2.8), são escritas como: (veja apêndice A)

$$-8\pi Q^{-2}R^{2}T_{11}= 2R\ddot{R} + \dot{R}^{2}-h_{22}h^{-1} , \qquad (3.2.11)$$

$$-8\pi QR^{-1}T_{22}= Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R - h^{-2}R^{-1}(Q_{33}+hh_{2}Q_{2}) , \qquad (3.2.12)$$

$$-8\pi Qh^{-2}R^{-1}T_{33}= Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} +\ddot{Q}R - R^{-1}Q_{22} , \qquad (3.2.13)$$

$$-8\pi QR^{2}T_{00}= -Q\dot{R}^{2} -2\dot{Q}\dot{R}R + Q_{22}+ h^{-2}(Q_{33}+hh_{2}Q_{2}+hh_{22}Q) , \qquad (3.2.14)$$

$$-8\pi QT_{23}= Q_{23}-h^{-1}h_{2}Q_{3}=0 , \qquad (3.2.15)$$

$$-8\pi QT_{20}= \dot{Q}_{2}-Q_{2}R^{-1}\dot{R} =0 , \qquad (3.2.16)$$

$$-8\pi QT_{30}= \dot{Q}_{3}-Q_{3}R^{-1}\dot{R} = 0 . \qquad (3.2.17)$$

Nas equações acima, ponto significa derivação parcial em relação ao tempo e

$$Q_{2} = \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad Q_{23}= \frac{\partial^{2}Q}{\partial y\partial z} , \quad h_{2}= \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{etc}$$

Integrando as equações (3.2.16) e (3.2.17) obtemos

$$Q = R\, g(x,y,z) + T(x,t); \tag{3.2.18}$$

e, introduzindo este resultado em (3.2.15), obtemos a forma mais geral para Q, ou seja,

$$Q = R(t)\ (h(y)p(x,z)+q(x,y)) + S(x,t) \tag{3.2.19}$$

Na expressão acima, p,q e S são funções arbitrárias dos argumentos assinalados.

Além das hipóteses expressas pelas eqs.(3.2.7) e (3.2.8), consideraremos também que estamos fora das fontes, isto é, $J^{\mu} = 0$.

Com as hipóteses acima e como o tensor de campo eletromagnético é anti-simétrico, a eq. (3.2.5) pode então ser reescrita como:

$$F^{\mu\sigma}{}_{||\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\sqrt{-g}\ F^{\mu\sigma}) = 0 \tag{3.2.20}$$

Quando $\mu = 2$, teremos

$$\frac{\partial}{\partial z}\ (\sqrt{-g}\ F^{23}) = 0, \tag{3.2.21}$$

ou ainda

$$F^{23} = \frac{\bar{\alpha}(t,x,y)}{\sqrt{-g}} \tag{3.2.22}$$

e, analogamente, para $\mu = 3$

$$F^{32}= \frac{\bar{\ell}(t,x,z)}{\sqrt{-g}} \tag{3.2.23}$$

e, da propriedade de anti-simetria do tensor de campo eletromagnético,

$$F^{23}= \frac{\bar{\alpha}(t,x)}{\sqrt{-g}} \tag{3.2.24}$$

onde $\bar{\alpha}$ é uma função arbitrária de x e t.

Para $\mu=0$, a eq. (3.2.20) fornece

$$F^{01}= \frac{\bar{m}(t,y,z)}{\sqrt{-g}} \tag{3.2.25}$$

e, para $\mu=1$,

$$F^{10}= \frac{\bar{n}(x,y,z)}{\sqrt{-g}} \quad ; \tag{3.2.26}$$

como $F^{01}=-F^{10}$, teremos

$$F^{01}= \frac{\bar{m}(y,z)}{\sqrt{-g}} \tag{3.2.27}$$

onde $\bar{m}$ é função arbitrária de y e z.

Devemos ainda satisfazer a eq. (3.2.6) que pode ser escrita como

$$F_{\mu\nu,\tau}+ F_{\tau\mu,\nu} +F_{\nu\tau,\mu} =0 \quad . \tag{3.2.28}$$

Para $\mu=0$, $\nu=2$ e $\tau=3$ devemos ter

$$F_{23,0}=0. \tag{3.2.29}$$

Utilizando a eq. (3.2.24), teremos então

$$\acute{\bar{\alpha}}+\left(\frac{2\dot{R}}{R}-\frac{\dot{Q}}{Q}\right)\bar{\alpha}=0 \tag{3.2.30}$$

que integrada resulta em

$$\bar{\alpha}(t,x)=\frac{\bar{f}(x,y,z)Q}{R^2} \tag{3.2.31}$$

Obtemos ainda, para $\mu=1$, $\nu=2$ e $\tau=3$,

$$F_{23,1}=0 \tag{3.2.32}$$

e como

$$F_{23}=g_{22}g_{33}\,F^{23}=\bar{f}h, \tag{3.2.33}$$

devemos ter

$$\bar{f}=\bar{f}(y,z). \tag{3.2.34}$$

Assim, podemos escrever Q como

$$Q=\frac{R^2\,\bar{\alpha}(t,x)}{\bar{f}(y,z)} \tag{3.2.35}$$

Para $\mu=0$, $\nu=1$, e $\tau=2$, na eq. (3.2.28), teremos

$$F_{01,2}=0 \tag{3.2.36}$$

ou ainda, usando a eq. (3.2.27)

$$\bar{m}'+\frac{Q'}{Q}\bar{m}-\frac{h'}{h}\bar{m}=0 \tag{3.2.37}$$

onde linha significa derivada parcial em relação a y.

Integrando a eq.(3.2.37) obtemos

$$\bar{m}(y,z)=\frac{\bar{\beta}(t,x,z)h}{Q} \quad , \tag{3.2.38}$$

onde $\bar{\beta}$ é uma função arbitrária.

Temos, ainda, para $\mu=0$, $\nu=1$ e $\tau=3$

$$F_{01,3}=0 \tag{3.2.39}$$

e como

$$F_{01}=g_{00}g_{11}\,F^{01}=-\frac{\bar{\beta}}{R^2} \quad , \tag{3.2.40}$$

devemos ter

$$\bar{\beta}=\bar{\beta}(t,x) \quad . \tag{3.2.41}$$

Assim, Q pode ser escrito como

$$Q=\frac{\bar{\beta}(t,x)h}{\bar{m}(y,z)} \quad . \tag{3.2.42}$$

Devemos agora procurar compatibilizar as equações (3.2.35) e (3.2.42), provenientes da integração das equações de Maxwell, com as equações de campo da gravitação.

Inicialmente, vejamos se é possível a compatilização das eqs.(3.2.35) e (3.2.42) com a forma mais geral de Q proveniente da integração das eqs.(3.2.15), (3.2.16) e (3.2.17), isto é, a eq. (3.2.19).

Comparando então as eqs.(3.2.19), (3.2.35), e (3.2.42), veremos que só existem duas formas para Q, compatíveis com as equações acima:

$$a)\ Q = p(x)R(t)h(y)\left[\gamma(z) + \phi(y)\right]. \qquad (3.2.43)$$

ou

$$b)\ Q = Q(t,x) \qquad (3.2.44)$$

Analisemos, inicialmente, a hipótese a).Neste caso, é simples perceber que por uma transformação de coordenadas, podemos tomar $p(x)=1$. Sendo assim, devemos ter ainda, para compatibilizar (3.2.35) e (3.2.42) com (3.2.43),

$$\bar{\alpha}(t,x) = \frac{H_0}{R} \qquad (3.2.45)$$

e

$$\bar{\beta}(t,x) = E_0 R\ , \qquad (3.2.46)$$

onde E_0 e H_0 são constantes associadas a intensidade do campo elétrico e magnético, respectivamente.

Com $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ dados pelas eqs.(3.2.45),(3.2.46)e, utilizando as eqs.(3.2.7),(3.2.8),(3.2.33),(3.2.35), e (3.2.40) em (3.2.9) obtemos

$$\tau_{11} = -Q^2\left(\frac{H_0^{\,2}}{8\pi Q^2R^2} + \frac{E_0^{\,2}}{8\pi Q^2R^2}\right) = -\frac{m^2}{8\pi R^2}\ , \qquad (3.2.47)$$

onde

$$m^2 = E_0^{\,2} + H_0^{\,2}$$

Assim, com a hipótese expressa pela eq.(3.2.10), a eq.(3.2.11) é escrita como:

$$\frac{m^2}{Q^2} = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + \frac{c^2}{R^2} - h_{22}h^{-1} \qquad (3.2.48)$$

Portanto, a fim de compatibilizarmos o lado esquerdo da equação (3.2.48) com o lado direito, devemos ter em (3.2.43)

$$1)\quad \gamma(z) = \text{constante}$$
$$h(y) = \text{constante} \qquad (3.2.49)$$
$$e\quad \phi(y) = \text{constante}$$

ou

$$2)\quad R(t) = \text{constante}$$
$$e\quad \gamma(z) = \text{constante} \qquad (3.2.50)$$

No primeiro caso, teríamos Friedman de seção euclidiana como elemento de linha e é fácil mostrar que haverá incompatibilidade entre as equações de campo a menos que $m^2=0$. Na segunda hipótese a solução seria estática, a pressão da radiação atuaria como uma constante cosmológica e teríamos $Q = h(y)\ f(y)$ (onde f é uma função arbitrária de y) obedecendo a eq. diferencial

$$Q_{22} - c^2 Q - \frac{m^2}{Q} = 0 \ . \qquad (3.2.51)$$

Como estamos interessados em modelos expansionistas, não nos deteremos em analisar esta possível solução neste trabalho.

Resta-nos então analisar o caso (b), isto é, $Q=Q(t,x)$. Absorvendo R em $\bar{\alpha}$, escolhendo $\bar{f}(y,z)=H_0$ na eq.(3.2.35) e tomando $\bar{m}(y,z) = E_0 h(y)$ na eq.(3.2.42), onde E_0 e H_0 são constantes associadas a intensidade do campo elétrico e magnético, teremos, usando as equações (3.2.7), (3.2.8), (3.2.33), (3.2.40), (3.2.42) em (3.2.9)

$$\tau^0_0 = \tau^1_1 = -\tau^2_2 = -\tau^3_3 = \frac{m^2}{8\pi R^4} \qquad (3.2.52)$$

onde

$$m^2 = H_0{}^2 + E_0{}^2 \tag{3.2.53}$$

As equações de campo que necessitam ser integradas reduzem-se a:

$$-8\pi R^2 Q^{-2} T_{11} = \frac{m^2 - c^2}{R^2} = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - h_{22}h^{-1}, \tag{3.2.54}$$

$$-8\pi Q R^{-1} T_{22} = -8\pi Q R^{-1} h^{-2} T_{33} = -\frac{Q}{R^3}(m^2+c^2) = Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R, \tag{3.2.55}$$

$$-8\pi Q R^2 T_{00} = -\frac{Qm^2}{R^2} - 8\pi Q R^2 \rho_m = -Q\dot{R}^2 - 2\dot{Q}\dot{R}R + \frac{h_{22}}{h}Q, \tag{3.2.56}$$

onde $\rho_m = \rho_d + \rho_r$ é a densidade de matéria.

Podemos observar das equações acima, que o campo eletromagnético atua como uma "pressão positiva" na direção transversal ao campo e como uma "pressão negativa" na direção do campo. Fica evidente também como a escolha expressa na eq.(3.2.10) simplifica a resolução das equações de campo. Observamos também, que do ponto de vista matemático, as dificuldades serão as mesmas se consideramos um campo elétrico e um campo magnético paralelos ou se consideramos apenas um campo magnético. Como, em larga escala, campos elétricos não foram ainda observados e como não devemos esperar a existência de correntes elétricas e distribuições de cargas cosmológicas, no que se segue, consideraremos apenas a existência do campo magnético, como discutido na introdução geral.

Podemos reescrever a eq. (3.2.54) como

$$\frac{h_{22}}{h} = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - \frac{(m^2-c^2)}{R^2} . \tag{3.2.57}$$

Como do lado esquerdo temos funções de y e do lado direito funções dependentes apenas de t, devemos ter

$$\frac{h_{22}}{h} = -\kappa \tag{3.2.58}$$

e

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - \frac{(m^2-c^2)}{R^2} = -\kappa \quad , \tag{3.2.59}$$

onde κ é uma constante.

As funções h e R podem ser redefinidas de tal forma que possamos, sem perda de generalidade, tomar

$$\kappa = 0, \ \pm 1 \tag{3.2.60}$$

A eq.(3.2.58) esta associada ao fato de que as seções {x=constante e t=constante} tem curvatura gaussiana constante e a eq. (3.2.59) é do mesmo tipo de equação diferencial que governa o fator de expansão nos modelos de Friedman. Teremos três classes de soluções distintas de acordo com o valor de κ. Neste trabalho nos limitaremos a investigar a classe de modelos com $\kappa=0$, que é a mais simples. Para $\kappa=0$ na eq.(3.2.58) obtemos

$$h_{22} = 0 \tag{3.2.61}$$

cuja solução mais geral é

$$h = ay + b \quad , \tag{3.2.62}$$

onde a e b são constantes.

É fácil mostrar que por uma transformação de coordenadas na métrica, tal que

$$y' = \frac{1}{a}(ay + b)\cos az \ , \tag{3.2.63}$$

$$z' = \frac{1}{a}(ay + b)\,\text{sen}\, az \ , \tag{3.2.64}$$

a solução obtida é equivalente a tomar $h=1$, isto é, $a=0$ e $b=1$ em (3.2.62).

A eq.(3.2.59) é reescrita, com $\kappa=0$, como

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R} - \frac{m^2-c^2}{2R^3} = 0 \ . \tag{3.2.65}$$

Definindo uma nova variável dependente p, tal que

$$p(R) = \dot{R}(t) \ , \tag{3.2.66}$$

teremos,

$$\ddot{R} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dR}\,\frac{dR}{dt} = pp' \tag{3.2.67}$$

e reescrevemos (3.2.65) como

$$pp' + \frac{p^2}{2R} - \frac{m^2-c^2}{2R^3} = 0 \ , \tag{3.2.68}$$

que é uma equação de Bernoulli.[45]

Definindo

$$\mu = p^2 \ , \tag{3.2.69}$$

teremos,

$$\mu' + \frac{\mu}{R} - \frac{(m^2-c^2)}{R^3} = 0, \tag{3.2.70}$$

que integrada nos dá

$$\mu = \frac{\ell}{R} - \frac{(m^2-c^2)}{R^2} \,, \tag{3.2.71}$$

onde ℓ é uma constante de integração.

Assim, das eqs.(3.2.66), (3.2.69) e (3.2.71) obtemos

$$\dot{R}^2 = \frac{\ell}{R} - \frac{(m^2-c^2)}{R^2} \,. \tag{3.2.72}$$

Como veremos será conveniente trocar a variável t pela variável $\eta=\eta(t)$ definida como

$$dt = R\, d\eta \,. \tag{3.2.73}$$

A equação (3.2.72) é reescrita como:

$$R'^2 = \ell R - (m^2- c^2) \,, \tag{3.2.74}$$

onde linha denota derivada parcial em relação a η. Integrando então as eqs. (3.2.73) e (3.2.74), determinamos $R(\eta)$ e $t(\eta)$.

$$R(\eta) = \frac{\ell\eta^2}{4} + \frac{m^2-c^2}{\ell} \,, \tag{3.2.75}$$

$$t(\eta) = \frac{\ell\eta^3}{12} + \frac{m^2-c^2}{\ell}\eta \,. \tag{3.2.76}$$

As constantes de integração de η e t foram escolhidas de tal forma que em $\eta=0$ teremos $t=0$ e R mínimo.

Em termos da nova variável η e com R expresso pela eq. (3.2.75), a eq. (3.2.55) é reescrita como

$$Q''-Q\ \frac{\left(\frac{\ell^2}{8}\eta^2-\left(\frac{3m^2+c^2}{2}\right)\right)}{\left(\frac{\ell}{4}\eta^2+\frac{m^2-c^2}{\ell}\right)^2}=0 \quad , \tag{3.2.77}$$

onde a derivada agora é em relação a η.

As soluções de (3.2.77) serão distintas de acordo com a razão $\frac{m^2}{c^2}$. Analisemos, inicialmente os casos em que $\frac{m^2}{c^2}\neq 1$.

Com a substituição

$$\zeta = a\eta^2+ d \quad , \tag{3.2.78}$$

onde

$$a = \frac{\ell}{4} \quad e \quad d = \frac{m^2-c^2}{\ell} \tag{3.2.79}$$

a equação (3.2.77) é reescrita como:

$$\zeta^2 d\ Q_{\zeta\zeta}\left(\frac{\zeta}{d}-1\right)+\frac{1}{2}\zeta^2 Q_\zeta - Q\left(\frac{1}{2}(\zeta-d)-\frac{(3m^2+c^2)}{8a}\right)=0 \ . \tag{3.2.80}$$

A eq.(3.2.80) tem duas soluções linearmente independentes que podem ser expressas em termos das funções hipergeométricas de Gauss [46]. As soluções dependem de um parâmetro,

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{8m^2}{m^2-c^2}} \quad , \tag{3.2.81}$$

que, por sua vez é determinado fixando-se uma razão entre m^2 e c^2. α assume valores reais não negativos e pode ser também um imaginário puro, quando $m^2<c^2<9m^2$. Teremos ainda $\alpha=1$ para $m^2=0$ (solução sem campo eletromagnético), e $\alpha=3$, para $c^2=0$ (solução sem pressão). Como devemos ter $\frac{m^2}{c^2}>0$, α não pode estar compreendido no intervalo $1<\alpha<3$:

a) Para $\alpha \notin Z^+$ e $\alpha \notin (1,3)$ as duas soluções de (3.2.80) são expressas por

$$Q_1 = A(x)\, \zeta^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad F\left(1+\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}; 1+\alpha; \zeta/d\right) \tag{3.2.82}$$

e

$$Q_2 = B(x)\, \zeta^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad F\left(1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}; 1-\alpha; \zeta/d\right). \tag{3.2.83}$$

As funções hipergeométricas, $F(a,b;c;z)$, que aparecem nas equações (3.2.82) e (3.2.83) podem ser reduzidas se fizermos uso das seguintes relações[47]

$$F\left(1+A, \frac{1}{2}+A; 1+2A; z\right) = 2^{2A}(1-z)^{-1/2}\left[1+(1-z)^{1/2}\right]^{-2A} \tag{3.2.84}$$

e

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c-a+n-1}(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)\right] =$$

$$= (c-a)n\; z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-n}F(a-n,b;c;z); \tag{3.2.85}$$

assim obtemos que

$$F\left(A+1, A-\frac{1}{2}; 1+2A; z\right) =$$

$$= 2^{2A}\,\frac{\Gamma(A+1/2)}{\Gamma(A+3/2)}\left\{(A+1/2)(1-z)^{1/2}\left[1+(1-z)^{1/2}\right]^{-2A} + Az\left[1+(1-z)^{1/2}\right]^{-2A-1}\right\}. \tag{3.2.86}$$

onde

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \qquad (3.2.87)$$

e $\Gamma(z)$ são as funções gama.

Expressando em termos de η, já que

$$\frac{\zeta}{d} = \frac{\ell^2}{4(m^2-c^2)}\eta^2 + 1 \qquad (3.2.88)$$

e

$$m^2-c^2 = \frac{8m^2}{\alpha^2-1} \qquad (3.2.89)$$

obtemos

$$Q_1 = A(x)\left(\frac{\ell}{4}\eta^2 + \frac{8m^2}{\ell(\alpha^2-1)}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left\{\frac{1+\alpha}{2}\left[\left(\ell\frac{(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}\,m}\eta\right)\left(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\ell(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}\,m}\eta\right)^{-\alpha}\right] + \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{\ell^2(1-\alpha^2)}{32m^2}\eta^2+1\right)\left(1+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ell(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}m}\right)^{-\alpha-1}\right]\right\} \qquad (3.2.90)$$

e

$$Q_2 = B(x)\left(\frac{\ell}{4}\eta^2 + \frac{8m^2}{\ell(\alpha^2-1)}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left[\left(\frac{\ell(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}m}\eta\right)\left(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\ell(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}m}\eta\right)^{\alpha}\right] - \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{\ell^2(1-\alpha^2)}{32m^2}\eta^2+1\right)\left(1+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ell(1-\alpha^2)^{1/2}}{4\sqrt{2}m}\eta\right)^{\alpha-1}\right]\right\}. \qquad (3.2.91)$$

Observamos que para $\alpha>1$ as soluções acima são funções complexas. Neste caso, consideramos apenas a parte real das soluções.

b) Para $\alpha=0,1,3,4...$ as soluções são degeneradas e devem ser analisadas separadamente [48]

b1) $\alpha=0$ $(c^2=9m^2)$.

Teremos

$$Q_1 = A(x)\zeta^{1/2}\left(1-\frac{\zeta}{d}\right)^{1/2} F(0,3/2;\ 1;\ \zeta/d) \tag{3.2.92}$$

e

$$Q_2 = B(x)\zeta^{1/2}\left(-\frac{\zeta}{d}\right)^{-1} F(1,1;5/2;d/\zeta). \tag{3.2.93}$$

Utilizando as relações [47]

$$F(a,a+1/2;\ 1+2a;z) = 2^{2a}\left[1+(1-z)^{1/2}\right]^{-2a} \tag{3.2.94}$$

e

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{a+n-1}F(a,b;c;z)\right] = (a)_n\, z^{a-1}F(a+n,b;c;z), \tag{3.2.95}$$

obtemos que

$$F(0,3/2;1;\zeta/d) = 1\ . \tag{3.2.96}$$

Com o uso de [47]

$$F(1,1;3/2;-x^2) = \frac{\text{arc senh } x}{x(1+x^2)^{1/2}} \tag{3.2.97}$$

e

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)\right] =$$

$$\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-z)^{a+b-c-n}\ F(a,b;c+n;z), \tag{3.2.98}$$

resulta

$$F(1,1;5/2;-x^2) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3(1+x^2)^{1/2}}{x^3}\text{arc senh}x \quad . \qquad (3.2.99)$$

Podemos então expressar as soluções (3.2.92), (3.2.93), que para $\eta > \frac{\sqrt{32}m}{\ell} = \frac{1}{a}$, reduzem-se a:

$$Q_1 = A(x)\eta(a^2\eta^2-1)^{1/2} \qquad (3.2.100)$$

e

$$Q_2 = B(x)\left[a\eta(a^2\eta^2-1)^{1/2}\text{arc sen h}(a^2\eta^2-1)^{-1/2} - (a^2\eta^2-1)^{1/2}\right]. \qquad (3.2.101)$$

As razões para tomarmos $\eta > \frac{\sqrt{32}m}{\ell}$ são duas. Em primeiro lugar, não teríamos soluções no campo real para $\eta < \frac{\sqrt{32}m}{\ell}$ e, em segundo, para $\eta = \frac{\sqrt{32}m}{\ell}$ teríamos R=0 e a densidade de energia divergiria para este valor de η. Redefinindo então as constantes de integração de η e t de tal forma que em $\eta = \frac{\sqrt{32}m}{\ell}$ tenhamos t=0 e R=0, obtemos, em lugar de (3.2.75) e (3.2.76), as seguintes expressões:

$$R(\eta) = \frac{\ell}{4}\eta^2 - \frac{8m^2}{\ell}, \qquad (3.2.102)$$

$$t(\eta) = \frac{64\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\ell^2} + \frac{\ell}{12}\eta^3 - \frac{8m^2}{\ell}\eta \quad . \qquad (3.2.103)$$

b2) $\alpha = 1$ $(m^2=0)$

Teremos

$$Q_1 = A(x)\ (\zeta/d)\ F(0,3/2;2;\zeta/d) \qquad (3.2.104)$$

e

$$Q_2 = B(x)(-d/\zeta)(1-\zeta/d)^{1/2}\ F(1,2;5/2;d/\zeta). \qquad (3.2.105)$$

Usando a eq. (3.2.85) e a relação [47]

$$F(a,\frac{1}{2}+a;2a;z)= 2^{2a-1}(1-z)^{-1/2}\left[1+(1-z)^{1/2}\right]^{1-2a} , \tag{3.2.106}$$

obtemos que, em termos de η,

$$Q_1=A(x)\left(\frac{\ell^2}{4c^2}\eta^2 -1\right). \tag{3.2.107}$$

Usando que [47]

$$F(1,1;3/2;z) = \frac{\text{arc sen } z}{z(1-z^2)^{1/2}} \tag{3.2.108}$$

e

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{a+n-1}F(a,b;c;z)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n(a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-z)^{a-1}F(a+n,b;c+n;z) \tag{3.2.109}$$

obtemos que, para $\eta>\frac{2c}{\ell}$,

$$Q_2= B(x)\left[\left(\frac{\ell^2}{4c^2}\eta^2-1\right)\text{arc sen h}\left(\frac{\ell^2}{4c^2}\eta^2-1\right)^{-1/2} - \frac{\ell}{2c}\eta\right] . \tag{3.2.110}$$

As razões para tomarmos $\eta>\frac{2c}{\ell}$ são as mesmas que a do caso anterior. Redefinindo as constantes de η e t, de tal forma que em $\eta=2c/\ell$ tenhamos $t=0$ e $R=0$, obtemos no lugar de(3.2.75) e (3.2.76) , as seguintes expressões:

$$R(\eta) = \frac{\ell\eta^2}{4} - \frac{c^2}{\ell} , \tag{3.2.111}$$

$$t(\eta) = \frac{2}{3}\,\frac{c^3}{\ell^2} + \frac{\ell}{12}\eta^3 - \frac{c^2}{\ell}\eta \quad . \tag{3.2.112}$$

b3) $\alpha = 4,6,8...$

Teremos

$$Q_1 = A(x)\,\zeta^{\frac{1-\alpha}{2}}\, F\left(1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}; 1-\alpha; \zeta/d\right) \tag{3.2.113}$$

e

$$Q_2 = B(x)\,\zeta^{\frac{1-\alpha}{2}}\,(1-\zeta/d)^{\frac{1+\alpha}{2}}\, F\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}; -1/2; \frac{1}{1-\zeta/d}\right) \tag{3.2.114}$$

A função hipergeométrica da eq.(3.2.113) pode ser reduzida usando-se [(47)]

$$F(-m,b;-m-\ell;z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-m)_n (b)_n}{(-m-\ell)_n\, n!}\, z^n, \tag{3.2.115}$$

onde m e ℓ são inteiros não negativos.

A função hipergeométrica da eq.(3.2.114) é reduzida observando-se que [(47)]

$$F(a,a+\frac{1}{2};1/2;z) = \frac{1}{2}(1+z^{1/2})^{-2a} + \frac{1}{2}(1-z^{1/2})^{-2a} \tag{3.2.116}$$

e, portanto,

$$F(0,-1/2;1/2;z) = 1 \quad . \tag{3.2.117}$$

Como [(47)]

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c-1}F(a,b;c;z)\right] = (c-n)_n\, z^{c-n-1} F(a,b;c-n;z), \tag{3.2.118}$$

devemos ter

$$F(0,-1/2;-1/2;z) = 1 . \qquad (3.2.119)$$

Com este resultado, podemos reduzir a função hipergeométrica da eq. (3.2.114) aplicando duas vezes a eq. (3.2.85).

b4) $\alpha=3,5,7...$

Teremos

$$Q_1=A(x)\zeta^{\frac{1-\alpha}{2}}F(1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2};1-\alpha;\zeta/d) \qquad (3.2.120)$$

e

$$Q_2=B(x)\zeta^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-\zeta/d)^{\frac{\alpha}{2}-1}F(1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2};5/2;\frac{1}{1-\zeta/d}). \qquad (3.2.121)$$

A função hipergeométrica na eq. (3.2.120) pode ser reduzida usando-se a eq. (3.2.115). Na eq. (3.2.121), a função hipergeométrica é reduzida usando-se as eqs. (3.2.117), (3.2.98) e (3.2.85).

De particular interesse são as soluções com $\alpha=3$. Neste caso teremos $c^2=0$ em (3.2.81) (solução sem radiação) e obteremos uma generalização inomogênea simples das soluções obtidas pela primeira vez por Doroshkevich [(49)*].

Para $\alpha=3$ teremos

$$Q_1=A(x)\zeta^{-1}F(-2,-1/2;-2;\zeta/d) \qquad (3.2.122)$$

e

$$Q_2=B(x)\zeta^{-1}(1-\zeta/d)^{\frac{1}{2}}F(-1/2,0;5/2;\frac{1}{1-\zeta/d}) \qquad (3.2.123)$$

Usando as eqs. (3.2.115), (3.2.117) (3.2.98) e (3.2.78) obtemos que

* (ver também as refs. 50, 51, 52)

$$Q(\eta,x)=Q_1+Q_2=A(x)\ \frac{\ell^4\eta^4+24\ell^2m^2\eta^2-48m^4}{\ell^2\eta^2+4m^2}+$$

$$+\ B(x)\ \frac{\eta}{\ell^2\eta^2+4m^2}\ . \qquad (3.2.124)$$

Das eqs. (3.2.75) e (3.2.76) , com $c^2=0$, obtemos que

$$R(\eta) = \frac{\ell}{4}\eta^2+\frac{m^2}{\ell} \qquad (3.2.125)$$

$$t(\eta) = \frac{\ell}{12}\eta^3+\frac{m^2}{\ell}\eta \qquad (3.2.126)$$

Assim, o elemento de linha, eq.(3.2.1) , com $\kappa=0$ toma a forma:

$$ds^2=dt^2-Q^2(t,x)dx^2-R^2(t)(dy^2+dz^2) \qquad (3.2.127)$$

onde Q,R, e t, em termos paramétricos, são dados pelas eq .(3.2.124) (3.2.125) e (3.2.126)

No caso em que escolhemos A(x) e B(x) iguais a constantes na eq.(3.2.124), obtemos com outra notação, os modelos espacialmente homogêneos de Doroshkevich. Escolhendo A(x)=0 e B(x)=constante encontramos um caso particular dos modelos de Rosen(53) , que investigou o caso mais geral de modelos homogêneos do tipo I de Bianchi tendo como fonte de curvatura apenas um campo magnético paralelo a um dos eixos das coordenadas espaciais. Jacobs (55 e 56) estudou sistematicamente este tipo de Bianchi e também obteve, independentemente, estes modelos com outra notação.

Rosen(54) procurou ainda estabelecer uma relação entre os modelos acima descritos e os modelos de Brill(61). Ele observou que se fizermos um processo limite, tal que, o raio da 3-esfera espacial, associada com a métrica de Brill, tender a infinito, esta seção torna-se euclidiana tal como a da sua métrica. Assim, com um raciocínio análogo ao de Brill, se permitirmos ao parâmetro η assumir valores imaginários puros, teremos uma extensão analítica do modelo para além da singularidade de coordenadas em $\eta=0$ e $R=m^2/\ell$. Por uma inspeção no elemento de linha observamos que, neste caso, as coordenadas x e t trocam de papel mas a assinatura da métrica não se altera. No limite descrito acima, a região do espaço-tempo $R < m^2/\ell$ seria uma generalização eletromagnética do espaço de Taub e a região $R > m^2/\ell$ uma generalização da região exterior de Nut [52]. No entanto, devemos deixar claro que este resultado só é válido neste limite já que as soluções de Rosen e Brill são não equivalentes sendo a primeira como dissemos, do tipo I de Bianchi e a segunda do tipo IX de Bianchi.

Analisemos agora o caso em que $\frac{m^2}{c^2}=1$

A eq. (3.2.77) é reescrita como

$$\eta^2 Q'' + \left(\frac{32m^2}{\ell^2}\eta^{-2}-2\right) Q=0. \tag{3.2.128}$$

Com a transformação [57]

$$Q=\eta^2 y(\zeta), \tag{3.2.129}$$

onde

$$\zeta = \eta^{-3} , \tag{3.2.130}$$

teremos,

$$9y'' + a^2\zeta^{-4/3}y = 0 , \tag{3.2.131}$$

onde a derivada agora é em relação a ζ e

$$a^2=\frac{32m^2}{\ell^2} \tag{3.2.132}$$

A solução da eq. (3.2.131) é da forma[(58)]

$$y=\sqrt{\zeta}Z_{3/2}(-\frac{4m}{\ell}\sqrt{2}\ \zeta^{1/3}), \tag{3.2.133}$$

onde[(59)]

$$Z_{3/2}(\bar{x})=A(x)J_{3/2}(\bar{x})+B(x)Y_{3/2}(\bar{x}) \tag{3.2.134}$$

com

$$Y_{\nu}(\bar{x})=\frac{J_{\nu}(\bar{x})\cos\nu\pi-J_{-\nu}(\bar{x})}{\operatorname{sen}\nu\pi} \tag{3.2.135}$$

e onde

$J_{\nu}(\bar{x})$ e $Y_{\nu}(\bar{x})$ são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo respectivamente.

Para $\nu=3/2$ teremos

$$Y_{3/2}(\bar{x}) = J_{-3/2}(\bar{x}). \tag{3.2.136}$$

As expressões para $J_{3/2}(\bar{x})$ e $J_{-3/2}(\bar{x})$ são:[(60)]

$$J_{3/2}(\bar{x})= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2\bar{x})^{3/2}(\bar{x}^{-2}\cos\bar{x} - \bar{x}^{-3}\operatorname{sen}\bar{x}) \tag{3.2.137}$$

e

$$J_{-3/2}(\bar{x})= -(\frac{2}{\pi})^{1/2}(\bar{x}^{-1/2}\operatorname{sen}\bar{x} + \bar{x}^{-3/2}\cos\bar{x}). \tag{3.2.138}$$

Com o uso das eqs.(3.2.129),(3.2.130)e (3.2.133) a (3.2.138), expressamos as soluções de (3.2.131), na forma paramétrica como:

$$Q=A(x)\left[a\eta\cos(a\eta^{-1})-\eta^2\operatorname{sen}(a\eta^{-1})\right]+B(x)\left[a\eta\operatorname{sen}(a\eta^{-1})+\eta^2\cos(a\eta^{-1})\right], \tag{3.2.139}$$

onde a é dado pela eq. (3.2.132)

Evidentemente, não há perda de generalidade em tomar a constante de integração é igual a 4/9. Com esta escolha podemos expressar R em termos de t como

$$R = t^{2/3}$$

Assim, $a^2=162m^2$ e Q toma a forma

$$Q=A(x)\,t^{2/3}\left[a t^{-1/3}\cos\left(\frac{a}{3}t^{-1/3}\right)-3\ \mathrm{sen}\left(\frac{a}{3}t^{-1/3}\right)\right]+$$

$$+B(x)\,t^{2/3}\left[a t^{-1/3}\mathrm{sen}\left(\frac{a}{3}t^{-1/3}\right)+3\cos\left(\frac{a}{3}t^{-1/3}\right)\right]. \qquad (3.2.140)$$

Resumindo nossos resultados até aqui: partimos da métrica de Szekeres (classe II), eq. (3.2.1). A escolha de um campo magnético paralelo a direção x só é possível, ao considerarmos soluções não estáticas, se tivermos $Q=Q(t,x)$. Assim, ganhamos simetria e a métrica reduz-se a:

$$ds^2= dt^2-Q^2(t,x)dx^2-R^2(t)(dy^2+h^2(y)dz^2). \qquad (3.2.141)$$

Consideramos a classe de modelos em que as seções bidimensionais {x=constante, t=constante }são planas, isto é, h=1 ou $\kappa=0$. Integramos as equações de campo e obtivemos os coeficientes métricos Q e R para os diversos modelos. Os modelos distinguem-se de acordo com a razão m^2/c^2, dependem de uma função arbitrária de x (a segunda pode ser igualada a ±1 por uma transformação de coordenadas) e de uma constante arbitrária .

A expressão para a densidade de matéria, $\rho_m=\rho_d+\rho_r$, pode ser obtida, para cada modelo, usando-se a eq.(3.2.56) que é reescrita como

$$8\pi\rho_m = \frac{QR^2\dot{R}^2 + 2\dot{Q}\dot{R}R^3 - m^2Q}{QR^4} \tag{3.2.142}$$

ou, em termos do parametro η,

$$8\pi\rho_m = \frac{R'^2}{R^4} + \frac{2Q'R'}{QR^3} - \frac{m^2}{R^4} \quad , \tag{3.2.143}$$

onde a derivada agora é em relação a η.

3.3) Comportamento assintótico e a anisotropia na fase inicial.

Para nós, será de grande importância o estudo da evolução temporal dos modelos que acabamos de apresentar. O efeito de um campo magnético em Cosmologia, é ainda objeto de intensa investigação e uma importante linha de pesquisa tem sido a de analisar como a presença de tal campo modifica a singularidade apresentada pela maioria dos modelos evolucionistas. Recentemente, Spokoiny(62) analisou o efeito de um campo eletromagnético na evolução dos modelos de Bianchi próximo à singularidade. Podemos dizer que um dos resultados obtidos foi, que se a presença do campo não remove a singularidade das soluções, pelo menos em alguns casos, ela modifica, qualitativamente, suas características. Caberia então perguntar se este seria um resultado particular das métricas de Bianchi ou ele se aplicaria também aos modelos espacialmente não homogêneos. Não é nossa intenção responder esta pergunta neste trabalho. No entanto, como veremos, no estudo do comportamento assintótico, próximo à singularidade, de dois modelos es pacialmente não homogêneos, um com e o outro sem o campo magnético a conclusão que chegamos não contradiz o resultado acima.

Outro aspecto importante de ser estudado é saber se os modelos apresentados na seção anterior, para grandes valores da coordenada temporal, tenderão a homogeneidade e isotropia como sugere o programa de "Cosmologia Caótica" de Misner.

Provavelmente nem todas as soluções apresentadas são fisicamente aceitáveis em todo seu domínio; caberia, portanto, observar se as condições de energia dominante, como exigidas pelos teoremas de singularidade(8) são satisfeitas assintoticamente.

Comecemos analisando o comportamento dos modelos para grandes valores da coordenada temporal: por uma inspeção direta na eq. (3.2.77), observamos que esta se reduz, para $t\to\infty$ $(\eta>>1)$, a

$$\eta^2 Q'' - 2Q = 0 \quad . \qquad (3.3.1)$$

Integrando a equação acima obtemos

$$Q = A(x)\eta^{-1} + B(x)\eta^2 \quad . \qquad (3.3.2)$$

Por uma transformação de coordenadas simples podemos eliminar uma das funções arbitrárias, por exemplo, $B(x)\to k=\pm 1$. Estamos fazendo a hipótese que $B(x)$ é uma função finita que não se anula. No que se segue estaremos sempre considerando esta hipótese e imporemos também que a função A(x) é finita.

Assim, tomando sempre a potência temporal dominante, obtemos

$$\lim_{\eta\to\infty} Q \cong k\,\eta^2 \quad . \tag{3.3.3}$$

Das eqs. (3.2.81) e (3.2.82), obtemos que

$$\lim_{\eta\to\infty} R \cong \frac{\ell}{4}\,\eta^2 \tag{3.3.4}$$

e, redefinindo as coordenadas espaciais, teremos para $t\to\infty$,

$$ds^2 \cong dt^2 - t^{4/3}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \tag{3.3.5}$$

Obtemos ainda que

$$\lim_{t\to\infty} 8\pi\mu \cong \frac{4}{3}\,t^{-2}, \tag{3.3.6}$$

onde

$$\mu = \rho_d + \rho_r + \rho_B \tag{3.3.7}$$

é a densidade de energia.

Os resultados acima são muito importantes pois significam que a classe de modelos apresentada tende à homogeneidade e isotropia (Friedman de seção euclidiana com equação de estado $p = 0$) qualquer que seja a razão m^2/c^2.

O estudo do comportamento assintótico próximo a singularidade deve ser efetuado para cada modelo em particular, já que em princípio, teremos comportamentos distintos para cada valor de m^2/c^2. Esta tarefa parece ser praticamente impossível, pois temos um número infinito de soluções. Mas, como queremos investigar o efeito do campo magnético sobre a singularidade, vamos comparar o comportamento assintótico de uma solução particular ($\alpha = 0$) com campo, com a solução ($\alpha = 1$) sem campo. O caso particular ($\alpha = 0$) foi escolhido, em primeiro lugar porque as soluções são fisicamente aceitáveis e, em segundo, são relativamente simples.

Antes de apresentar os resultados gostaríamos de fazer um breve comentário: como dissemos anteriormente, nem todas as soluções serão fisicamente aceitáveis em todo seu domínio de validade; para sê-lo, elas deverão satisfazer condições fundamentais de energia. Que condições são estas?

Na base de tetradas o tensor momento-energia, eq. (3.2.3), toma a forma diagonal,

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \dfrac{(c^2 - m^2)}{8\pi R^4} & & & \\ & \dfrac{(m^2 + c^2)}{8\pi R^4} & & \\ & & \dfrac{(m^2 + c^2)}{8\pi R^4} & \\ & & & \mu \end{pmatrix} . \qquad (3.3.8)$$

Esta forma do tensor momento-energia insere-se no caso designado por Hawking e Ellis como de tipo I[(8)]. Para este tipo de tensor momento-energia, as condições de energia dominante exi gem que

$$\mu \geqq 0 \tag{3.3.9}$$

e

$$-\mu \leqq p_i \leqq \mu \quad (\alpha = 1,2,3) \tag{3.3.10}$$

onde μ é a densidade de energia e no nosso caso

$$P_1 = \frac{(c^2 - m^2)}{8\pi R^4} \tag{3.3.11}$$

e

$$P_2 = p_3 = \frac{(m^2 + c^2)}{8\pi R^4} \tag{3.3.12}$$

Estas condições são equivalentes à densidade de energia não negativa, qualquer que seja o observador que a meça, e que a pressão não exceda a densidade, isto é, a velocidade do som não deve ultrapassar a velocidade da luz. Como um exemplo de solução fisicamente não aceitável próximo a singularidade mencionamos o caso $\frac{m^2}{c^2} = 1$.

A seguir apresentamos o comportamento assintótico próximo a singularidade para os modelos $\alpha = 1$ ($m^2 = 0$) e $\alpha = 0$ ($c^2 = 9m^2$). Lembramos que, em ambos os casos, estamos considerando que as funções arbitrárias, presentes nas soluções, são finitas e que $B(x)$ não se anula.

a) $\alpha = 1$ ($m^2 = 0$)

Neste caso, introduzindo um novo parâmetro ϕ; utilizando as eqs. (3.2.107), (3.2.110) e (3.2.111), podemos reescrever R e Q como:

$$R = \frac{c^2}{\ell} \phi^2 \tag{3.3.13}$$

$$Q = k \left[(1+\phi^2)^{1/2} - \phi^2 \text{arc senh} \frac{1}{\phi}\right] + A(x)\phi^2, \tag{3.3.14}$$

onde

$$\phi^2 = \left(\frac{\ell^2}{4c^2} \eta^2 - 1\right) \tag{3.3.15}$$

e

$$k = \pm 1. \tag{3.3.16}$$

Portanto para $\phi \to 0+$ obtemos

$$\lim_{\phi \to 0+} R \cong \frac{c^2}{\ell} \phi^2 \tag{3.3.17}$$

$$\lim_{\phi \to 0+} Q \cong 1 \tag{3.3.18}$$

$$\lim_{\phi \to 0+} 8\pi \rho_m \cong \frac{\ell^4}{c^6} \phi^{-8}, \tag{3.3.19}$$

$$\lim_{\phi \to 0+} 8\pi\rho_d \cong -2 \frac{\ell^4}{c^6} \phi^{-8}, \tag{3.3.20}$$

$$\lim_{\phi \to 0+} \frac{\rho_d}{\rho_r} \cong -\frac{2}{3}, \tag{3.3.21}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \frac{p_r}{\rho_m} \cong 1 \tag{3.3.22}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \sigma^1{}_1 = -\lim_{\phi\to 0+} 2\sigma^2{}_2 = \lim_{\phi\to 0+} 2\sigma^3{}_3 \cong -\frac{\ell^2}{3c^3} \phi^{-4} \tag{3.3.23}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \sigma \cong \frac{\ell^4}{3c^6} \phi^{-8}, \tag{3.3.24}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \theta^2{}_2 = \lim_{\phi\to 0+} \theta^3{}_3 \cong \frac{\ell^2}{c^3} \phi^{-4} \tag{3.3.25}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \theta^1{}_1 \cong 0 \tag{3.3.26}$$

e

$$\lim_{\phi\to 0+} \theta \cong \frac{2\ell^2}{c^3} \phi^{-4} \tag{3.3.27}$$

b) $\alpha = 0$ $(c^2 = 9m^2)$

Introduzindo um novo parâmetro ϕ, tal que

$$\phi^2 = \frac{\ell^2}{32m^2} \eta^2 - 1 \tag{3.3.28}$$

e utilizando as eqs. (3.2.100) a (3.2.102), podemos reescrever R e Q como

$$R = \varepsilon \phi^2 \tag{3.3.29}$$

$$Q = k[(1+\phi^2)^{1/2}\phi \text{ arc senh } \frac{1}{\phi} - \phi] + A(x)(\phi^2(1+\phi^2)^{1/2}) \tag{3.3.30}$$

onde

$$\varepsilon = \frac{8m^2}{\ell} \tag{3.3.31}$$

e

$$k = \pm 1 \tag{3.3.32}$$

Assim, obtemos que

$$\lim_{\phi\to 0+} Q \cong \phi \ln \phi, \tag{3.3.33}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} R = \varepsilon\phi^2, \tag{3.3.34}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} 8\pi\,\rho_m \cong \frac{15m^2}{\varepsilon^4}\,\phi^{-8}, \tag{3.3.35}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} 8\pi\rho_B \cong \frac{m^2}{\varepsilon^4}\,\phi^{-8}, \tag{3.3.36}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} 8\pi\rho_d \cong -\frac{12m^2}{\varepsilon^4}\,\phi^{-8}, \tag{3.3.37}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} 8\pi\mu \cong \frac{16m^2}{\varepsilon^4}\,\phi^{-8}, \tag{3.3.38}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \frac{\rho_d}{\rho_r} \cong -\frac{4}{9} \tag{3.3.39}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \frac{p_2}{\mu} = \lim_{\phi\to 0+} \frac{p_3}{\mu} \cong \frac{10}{16}, \tag{3.3.40}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \frac{p_1}{\mu} \cong \frac{1}{2} \tag{3.3.41}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \sigma^1{}_1 = -\lim_{\phi\to 0+} 2\sigma^2{}_2 = -\lim_{\phi\to 0+} 2\sigma^3{}_3 \cong -\frac{2\sqrt{2}m}{3\varepsilon^2}\,\phi^{-4}, \tag{3.3.42}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} \sigma \cong \frac{2m^2}{3\varepsilon^4}\,\phi^{-8}, \tag{3.3.43}$$

$$\lim_{\phi\to 0+} 2\,\theta^1{}_1 = \lim_{\phi\to 0+} \theta^2{}_2 = \lim_{\phi\to 0+} \theta^3{}_3 \cong \frac{2\sqrt{2}m}{\varepsilon^2}\,\phi^{-4} \tag{3.3.44}$$

e

$$\lim_{\phi\to 0+} \theta \cong \frac{5\sqrt{2}m}{\varepsilon^2}\,\phi^{-4} \tag{3.3.45}$$

Podemos observar que tanto no caso (a) como no caso (b) a densidade de energia da poeira torna-se negativa a medida que nos aproximamos da singularidade (veja as eqs. 3.3.20 e 3.3.37). No entanto, como exigido pelo teorema de singularidade, em ambos os casos a densidade de energia é positiva. Portanto não há violação deste teorema e podemos dizer que, de certa forma, a noção de poeira perde o significado para esta fase de evolução do universo. Observamos ainda que a segunda exigência do teorema de singularidade,(eq. 3.3.10), também é satisfeita em ambos os casos (veja as eqs. (3.3.22), (3.3.40) e (3.3.41), sendo que no primeiro caso (solução sem campo) temos, assintóticamente, $p = \rho$ (matéria ultra densa),como equação de estado.

Note que o tipo de singularidade é modificado pela presença do campo. No caso (a), observamos nas eqs. (3.3.17) e (3.3.18) que para $\phi = 0$ duas componentes do tensor métrico são nulas e que uma é constante. A densidade diverge para este valor de ϕ e o sistema apresenta uma singularidade verdadeira, isto é, ela não pode ser removida por uma mudança de sistema de coordenadas. No caso (b) também temos uma singularidade verdadeira para $\phi = 0$ (veja as eqs.(3.3.33) e (3.3.34), só que neste caso há um colapso nas três direções espaciais, sendo que na direção x o colapso processa-se de forma mais lenta que nas outras direções.

Com as considerações feitas sobre as funções arbitrárias e em primeira aproximação (já que estamos considerando a potência temporal dominante), tanto o caso (a) como o (b), são assintoticamente, para $t \to 0+$, modelos espacialmente homogêneos do tipo I de Bianchi. A métrica mais geral para este tipo de Bianchi pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - [R_i(t)dx^i]^2; \quad (\alpha = 1,2,3) \quad . \tag{3.3.46}$$

Pode-se mostrar que para este tipo de Bianchi a anisotropia pode ser quantificada através de um parâmetro A, que varia no intervalo $0 \leq A \leq 2$ (39), (107)

O parâmetro A é definido como

$$A = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} H^{-2}(H_i - H)^2, \tag{3.3.47}$$

onde

$$H_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}, \tag{3.3.48}$$

é o parâmetro de Hubble na direção x^α e

$$H = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} H_i \qquad . \tag{3.3.49}$$

Uma alta anisotropia implica em $A \sim 2$ e inversamente, baixa anisotropia corresponde a $A \sim 0$.

Para os dois modelos estudado podemos escrever A como

$$A = 2\left(\frac{\dot{Q}R - \dot{R}Q}{\dot{Q}R + 2\dot{R}Q}\right)^2 \qquad . \tag{3.3.50}$$

Assim obtemos que no caso (a)

$$\lim_{\phi \to 0+} A \cong 0{,}5 \tag{3.3.51}$$

e no caso (b)

$$\lim_{\phi \to 0+} A \cong 0{,}08 \qquad . \tag{3.3.52}$$

O resultado acima nos indica que, pelo menos no caso estudado, o campo magnético diminui a anisotropia na fase inicial. Este fato reforça a não inclusão de termos de viscosidade no tensor momento-energia, já que efeitos dissipativos só deverão ser relevantes em modelos com altas taxas de anisotropia(39),(107).

3.4) Campos de Killing.

No capítulo 1 discutimos a importância dos campos de Killing em uma variedade espaço-tempo riemanniana. Observamos que as simetrias desta variedade são expressas pela invariância do tensor métrico sob o transporte de Lie e que o conjunto de todas as isometrias formam um grupo de Lie, sendo os campos de Killing os geradores destas isometrias.

Os modelos de Szekeres, até onde sabemos, foram os primeiros modelos cosmológicos a serem estudados que não apresentam vetores de Killing. E é justamente esta propriedade que os torna o conjunto mais geral de soluções exatas das equações de Einstein conhecido até o momento.

Como vimos na seção anterior, se desejamos soluções não estáticas, a introdução de um campo eletromagnético na direção x só é possível se a métrica de Szekeres reduzir-se a forma:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2(t,x)\, dx^2 - R^2(t)(dy^2 + h^2(y)dz^2) \qquad (3.4.1)$$

onde

$$h(y) = \begin{cases} \text{sen } y & k = 1 \\ 1 & k = 0 \\ \text{senh } y & k = -1 \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

Nesta seção pretendemos demonstrar que a métrica acima apresenta simetrias, ou mais precismamente, um grupo de isometrias de três parâmetros cujas órbitas são as seções bidimensionais $\{t = \text{constante e } x = \text{constante}\}$.

Para a métrica, eq. 3.4.1, os símbolos de Cristoffel não nulos são:

$$\Gamma^0_{11} = \dot{Q}\, Q, \quad \Gamma^0_{22} = \dot{R}\, R, \quad \Gamma^0_{33} = R\dot{R}\, h^2, \tag{3.4.3}$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{Q}}{Q}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{Q_1}{Q}, \tag{3.4.4}$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \Gamma^2_{33} = -\, h_2 h, \tag{3.4.5}$$

$$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{R}}{R} \quad \text{e} \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{h_2}{h} \tag{3.4.6}$$

Assim, para a métrica (3.4.1), as dez equações de Killing, eq. (1.2.8), podem ser escritas na forma:

$$K^0{}_{,0} = 0, \tag{3.4.7}$$

$$K^0{}_{,1} - Q^2 K^1{}_{,0} = 0, \tag{3.4.8}$$

$$K^0{}_{,2} - R^2 K^2{}_{,0} = 0, \tag{3.4.9}$$

$$K^0{}_{,3} - R^2 h^2 K^3{}_{,0} = 0, \tag{3.4.10}$$

$$Q\, K^1{}_{,1} - \dot{Q} K^0 + Q_1 K^1 = 0, \tag{3.4.11}$$

$$R\, K^2{}_{,2} + \dot{R}\, K^0 = 0, \tag{3.4.12}$$

$$R\, K^3{}_{,3} + \dot{R} K^0 + R h_2\, K^2 = 0, \tag{3.4.13}$$

$$Q^2K^1{,}_2 + R^2K^2{,}_1 = 0, \qquad (3.4.14)$$

$$Q^2K^1{,}_3 + R^2h^2K^3{,}_1 = 0, \qquad (3.4.15)$$

$$K^2{,}_3 + h^2K^3{,}_2 = 0, \qquad (3.4.16)$$

onde, $K = K^\lambda \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$ $\lambda = 0,1,2,3$, é um campo de Killing e

$$Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \; h_2 = \frac{\partial h}{\partial y}, \; \dot{R} = \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{etc.}$$

Da eq. (3.4.7) obtemos que

$$K^0 = f(x^i); \; i = 1,2,3 \qquad (3.4.17)$$

As eqs. (3.4.8), (3.4.9) e (3.4.10) nos permitem escrever que

$$\dot{K}^1 = \frac{f{,}_1}{Q^2}, \qquad (3.4.18)$$

$$\dot{K}^2 = \frac{f{,}_2}{R^2}, \qquad (3.4.19)$$

$$\dot{K}^3 = \frac{f{,}_3}{R^2h^2}. \qquad (3.4.20)$$

A fim de resolver as equações diferenciais para $f(x^i)$, no que se segue, admitiremos que esta função é contínua e diferenciável.

Diferenciando a eq. (3.4.19) em relação a z e a eq. (3.4.20) em relação a y obtemos

$$\dot{K}^2{,}_3 = \frac{f{,}_{23}}{R^2} \qquad (3.4.21)$$

$$\dot{K}^3{}_{,2} = \frac{f_{,23}}{R^2h^2} - 2\, f_{,3}\, R^{-2}\, h^{-3}\, h_2, \qquad (3.4.22)$$

onde supomos $f_{,23} = f_{,32}$

Diferenciando a eq. (3.4.16) em relação a t e substituindo as eqs. (3.4.21) e (3.4.22) obtemos

$$f_{,23} - f_{,3}\, h_2\, h^{-1} = 0. \qquad (3.4.23)$$

Integrando a equação acima obtemos que

$$f = h(y)\, H(x,z) + L(x,y). \qquad (3.4.24)$$

Diferenciando a eq. (3.4.12) em relação ao tempo teremos

$$\dot{R}\, K^2_{,2} + R\, \dot{K}^2{}_{,2} + f\ddot{R} = 0. \qquad (3.2.25)$$

Diferenciando (3.4.19) em relação a y teremos,

$$\dot{K}^2{}_{,2} = f_{,22}\, R^{-2}. \qquad (3.2.26)$$

Substituindo (3.4.12) e (3.4.26) em (3.4.25) obtemos

$$(R\ddot{R} - \dot{R}^2)\, f + f_{,22} = 0\ . \qquad (3.4.27)$$

Como R = R(t) satisfaz a eq. (3.2.59) e como f não depende do tempo, devemos ter, em geral, f=0, isto é,

$$K^0 = 0. \qquad (3.4.28)$$

Com este resultado, integramos a eq. (3.4.11) e obtemos que

$$K^1 = \frac{q(t,y,z)}{Q\ (t,x)}\ . \qquad (3.4.29)$$

Da eq. (3.4.8) obtemos então que

$$\dot{q}Q - \dot{Q}q = 0. \tag{3.4.30}$$

Como $Q = A(x)F_1(t) + B(x)F_2(t)$, onde A e B são funções arbitrárias de x e F_1, F_2 são funções linearmente independentes, devemos ter q = 0 em (3.4.30), já que, em geral, $\dot{Q} \neq 0$.

Portanto,

$$K^1 = 0 \tag{3.4.31}$$

Integrando as equações (3.4.9), (3.4.12) e (3.4.14) obtemos que

$$K^2 = K^2(z) \tag{3.4.32}$$

Das equações (3.4.10) e (3.4.15) obtemos que

$$K^3 = K^3(y,z) \tag{3.4.33}$$

Diferenciando eq. (3.4.16) em relação a z e substituindo na eq. (3.4.13) também diferenciada em relação a z obtemos

$$K^2{}_{,33} - \varepsilon K^2 = 0 \tag{3.4.34}$$

onde

$$\varepsilon = h\, h_{22} - (h_2)^2 \tag{3.4.35}$$

é constante igual a -1 para $k = \pm 1$ e 0 para $k = 0$.

A fim de continuarmos integrando as equações de Killing devemos considerar separadamente cada caso.

1) $\varepsilon = -1$

Neste caso a solução geral de (3.4.34) é

$$K^2 = a\, e^{iz} + b\, e^{-iz}, \tag{3.4.36}$$

onde a e b são constantes.

Substituindo o resultado acima na eq.(3.4.13) e integrando obtemos

$$K^3 = \frac{ih_2}{h} (a\, e^{iz} - b\, e^{-iz}) + c \tag{3.4.37}$$

onde c é uma nova constante.

2) $\varepsilon = 0$

A solução geral de (3.4.34) é

$$K^2 = a\, z + b \tag{3.4.38}$$

onde a e b são constantes.

Integrando, com este resultado, a eq. (3.4.13) obtemos

$$K^{3'} = g(y). \tag{3.4.39}$$

Substituindo (3.4.39) em (3.4.16) e usando (3.4.38) obtemos

$$K^3 = - a\, y + c \tag{3.4.40}$$

onde c é uma nova constante.

Vamos determinar agora os campos de Killing e suas álgebras para os diversos valores de k.

a) $k = 1$, $h = \text{sen } y$

Das equações (3.4.28), (3.4.31), (3.4.36) e (3.4.37) obtemos que

$$
\begin{aligned}
K^0 &= 0\\
K^1 &= 0\\
K^2 &= ae^{iz} + b\, e^{-iz}\\
K^3 &= i \operatorname{ctg} y\, (ae^{iz} - b\, e^{-iz}) + c
\end{aligned}
\qquad (3.4.41)
$$

Em uma base de coordenadas o campo de Killing mais geral é escrito como

$$K = (a\, e^{iz} + b\, e^{-iz}) \frac{\partial}{\partial y} + i \operatorname{ctg} y\, (ae^{iz} - be^{-iz}) \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial z} \quad . \qquad (3.4.42)$$

Portanto K é uma combinação linear dos seguinte vetores linearmente independentes:

$$
\begin{aligned}
K_A &= \frac{\partial}{\partial z} \quad ,\\
K_B &= \operatorname{sen} z \frac{\partial}{\partial y} + \operatorname{ctg} y \cos z \frac{\partial}{\partial z} \quad ,\\
K_C &= \cos z \frac{\partial}{\partial y} - \operatorname{ctg} y \operatorname{sen} z \frac{\partial}{\partial z} \quad .
\end{aligned}
\qquad (3.4.43)
$$

A álgebra de Lie correspondente é dada pelas seguintes relações de comutação:

$$
\begin{aligned}
[K_A, K_B] &= K_C \quad ,\\
[K_B, K_C] &= K_A \quad ,\\
[K_C, K_A] &= K_B \quad .
\end{aligned}
\qquad (3.4.44)
$$

c) $k = 0$, $h = 1$

Das equações (3.4.28), (3.4.31), (3.4.38) e (3.4.40) obtemos

$$\begin{aligned} K^0 &= 0 \\ K^1 &= 0 \\ K^2 &= a\,z + b \\ K^3 &= ay + c \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

Numa base de coordenadas podemos escrever o campo de Killing mais geral como

$$K = (a\,z + b)\,\frac{\partial}{\partial y} + (-a\,y + c)\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4.50}$$

K é uma combinação linear dos seguintes vetores linearmente independentes:

$$\begin{aligned} K_A &= y\,\frac{\partial}{\partial z} - z\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ K_B &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ K_C &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.4.51}$$

cuja álgebra é:

$$\begin{aligned} [K_B, K_A] &= + K_C, \\ [K_B, K_C] &= 0, \\ [K_C, K_A] &= - K_B. \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

b) $k = -1$, $h = \operatorname{sen} h\, y$

Das equações (3.4.28), (3.4.31), (3.4.36) e (3.4.37) obtemos

$$\begin{aligned} K^0 &= 0 , \\ K^1 &= 0 , \\ K^2 &= a\, e^{iz} + b\, e^{-iz} , \\ K^3 &= i \operatorname{ctg} h\, y\, (a\, e^{iz} - b\, e^{-iz}) + c . \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Numa base de coordenadas o campo de Killing mais geral é escrito como

$$K = (a\, e^{iz} + b e^{-iz}) \frac{\partial}{\partial y} + i \operatorname{ctg} h\, y (a\, e^{iz} - b e^{-iz}) \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial z} . \tag{3.4.46}$$

que é uma combinação linear dos seguintes vetores linearmente independentes:

$$\begin{aligned} K_A &= -\cos z \frac{\partial}{\partial y} + (\operatorname{ctgh} y \operatorname{sen} z - 1) \frac{\partial}{\partial z} , \\ K_B &= \operatorname{sen} z \frac{\partial}{\partial y} + \operatorname{ctg} h\, y \cos z \frac{\partial}{\partial z} , \\ K_C &= \cos z \frac{\partial}{\partial y} - (\operatorname{ctg} h\, y \operatorname{sen} z + 1) \frac{\partial}{\partial z} . \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Neste caso a álgebra é:

$$\begin{aligned} [K_A, K_B] &= K_A \\ [K_B, K_C] &= K_C \\ [K_C, K_A] &= 2\, K_B \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

3.5) Outros Resultados

a) Parâmetros Cinemáticos

Calcularemos a seguir os parâmetros cinemáticos associados à congruência de curvas $u^{\mu} = \delta^{\mu}_{o}$ co-movente com o fluido. O elemento de linha é o encontrado na eq. (3.4.1) com h dado por (3.4.2), usaremos ainda os resultados expressos nas eqs. (3.4.3) a (3.4.6) e adotaremos as definições da ref. (14).

I- Escalar de Expansão:

$$\theta = u^{\nu}{}_{||\nu} = u^{\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\nu} \quad u^{\lambda}. \tag{3.5.1}$$

Como $u^{\nu} = \delta^{\nu}_{o}$, teremos

$$\theta = \Gamma^{\nu}_{o\nu} = \frac{\dot{Q}}{Q} + 2\frac{\dot{R}}{R} \tag{3.5.2}$$

II - Tensor de Distorção:

$$\sigma_{\mu\nu} = [\frac{1}{2}(u_{\lambda||\alpha} + u_{\alpha||\lambda}) \ h^{\lambda}{}_{\mu} \ h^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{3}\theta \, h_{\mu\nu}] \tag{3.5.3}$$

onde

$$u_{\lambda} = \delta^{o}_{\lambda} \quad e \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_{\mu} u_{\nu} \tag{3.5.4}$$

Como,

$$u_{\lambda||\alpha} = u_{\lambda,\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha} \quad u_{\gamma}, \tag{3.5.5}$$

teremos

$$\sigma_{\mu\nu} = - \Gamma^{o}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \theta \, (g_{\mu\nu} - u_{\mu} \, u_{\nu}) \tag{3.5.6}$$

Portanto,

$$\sigma_{11} = \frac{2}{3} \frac{Q}{R} (\dot{R}Q - \dot{Q}R), \tag{3.5.7}$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{3} \frac{R}{Q} (\dot{Q}R - \dot{R}Q), \tag{3.5.8}$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{3} \frac{Rh^2}{Q} (\dot{Q}R - \dot{R}Q) \tag{3.5.9}$$

e o escalar de distorção

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu} \, \sigma^{\mu\nu}) = \frac{1}{3} \frac{(\dot{R}Q - \dot{Q}R)^2}{Q^2 \;\; R^2} \tag{3.5.10}$$

III - Tensor de Expansão:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \theta \, h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \tag{3.5.11}$$

As componentes não nulas serão

$$\theta^{1}{}_{1} = \frac{\dot{Q}}{Q} \tag{3.5.12}$$

$$\theta^{2}{}_{2} = \theta^{3}{}_{3} = \frac{\dot{R}}{R} \tag{3.5.13}$$

IV - Quadrivetor de Aceleração:

$$a^{\mu} = \dot{u}^{\mu} = u^{\mu}{}_{||\nu}\, u^{\nu} \tag{3.5.14}$$

Como $u^{\nu} = \delta^{\nu}_{o}$ e,

$$u^{\mu}{}_{||\nu} = u^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} u^{\lambda}, \tag{3.5.15}$$

teremos,

$$a^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{oo} = 0. \tag{3.5.16}$$

V - Tensor de Rotação

$$W_{\mu\nu} = u_{[\mu||\nu]} - a_{[\mu}u_{\nu]} \tag{3.5.17}$$

Como $a_{\mu} = 0$ e $u_{\nu} = \delta^{o}_{\nu}$, teremos

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (u_{\mu,\nu} - u_{\nu,\mu}) = 0, \tag{3.5.18}$$

portanto o escalar de rotação

$$W^2 = \frac{1}{2} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 0. \tag{3.5.19}$$

Assim, da mesma forma que nos modelos de Szekeres, as trajetórias dos diversos elementos do fluido são geodéticas ($a^{\mu} = 0$) e irrotacionais ($W_{\mu\nu} = 0$).

b) Tensor de Weyl

Usando a definição do tensor de Weyl, eq. (B.11) e as equações de campo, eqs. (3.2.54), (3.2.55) e (3.2.56), obtemos que as componentes não nulas do tensor de Weyl, para o elemento de linha, eq (3.4.1), são:

$$W^{01}{}_{01} = W^{23}{}_{23} = -2\,W^{02}{}_{02} = -2\,W^{03}{}_{03} = -2W^{12}{}_{12} = -2W^{13}{}_{13} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(8\pi\mu + \frac{5m^2 + 3c^2}{R^4}\right) + \frac{\ddot{Q}}{Q}\,. \qquad (3.5.20)$$

O espaço-tempo não é conformalmente plano, já que existem componentes não nulas do tensor Weyl. Ainda mais, construindo as matrizes (M), (P) e (N) (veja apêndice B), observamos que o espaço-tempo, como o de classe II de Szekeres, é tipo D na classificação de Petrov.

c) Tensor de Cotton-York.(63)

Como discutimos no apêndice B, o tensor de Weyl é identicamente nulo para variedades de dimensionalidade três. Para variedades deste tipo define-se um tensor conformalmente invariante, Rijk (veja a equação de definição, eq. (B.9)), que desempenha um papel análogo ao tensor de Weyl nestas variedades. Este tensor pode ser descrito em uma forma algebricamente equivalente através do tensor de Cotton-York, definido como

$$C^{ij} = 2E^{irs}\left({}^*R^j{}_r - \frac{1}{4}\,\delta^j{}_r\,{}^*R\right)_{||s} = -\,E^{irs}\,{}^*g^{jm}\,{}^*R_{mrs}\,,\ (i,j,r \text{ e } s = 1,2,3)$$

(3.5.21)

onde ${}^{*}R_{ij}$ é o tensor de Ricci da geometria tridimensional ${}^{*}R = {}^{*}R^{i}{}_{i}$ é o escalar de curvatura, ${}^{*}g_{ij}$ é a métrica da hipersuperfície tridimensional e E^{ijk} é o pseudo tensor completamente anti-simétrico de peso +1 com $E^{123} = 1$. Dizemos que este tensor (a rigor uma densidade tensorial) é conformalmente invariante na medida em que ${}^{*}\tilde{g}_{ij} = \Omega^2\, {}^{*}g_{ij}$ implica em $\Omega\tilde{C}_{ij} = C_{ij}$. Além disso, $C_{ij} = 0$ se e somente se a geometria tridimensional é conformalmente plana.[63] Pode-se mostrar ainda que

$$C_{ij} = C_{ji}, \tag{3.5.22}$$

$$C^{i}{}_{i} = 0, \tag{3.5.23}$$

e

$$C^{ij}{}_{||j} = 0 \quad . \tag{3.5.24}$$

Apesar das soluções de Szekeres não terem vetores de Killing elas apresentam um outro tipo de simetria, qual seja, pode-se mostrar que as seções espaciais tridimensionais destas soluções são conformalmente planas[65]. A seguir mostraremos que esta propriedade se mantem para os modelos por nós investigados.

O elemento de linha da seção espacial tridimensional é dado por

$$dl^2 = - Q^2\, dx^2 - R^2 dy^2 - R^2 h^2 dz^2 \tag{3.5.25}$$

onde $Q = Q(x)$, $R =$ constante e $h = h(y)$.

Os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$
{}^*\Gamma^1_{11} = \frac{Q_1}{Q} \; ; \; {}^*\Gamma^2_{33} = - h_2 \, h \text{ e } {}^*\Gamma^3_{32} = \frac{h_2}{h} \qquad (3.5.26)
$$

As componentes não nulas do tensor de Riemann são,

$$
{}^*R_{23\,23} = {}^*R_{32\,32} = - {}^*R_{23\,32} = - {}^*R_{32\,23} = - R \, h_{22} \, h, \qquad (3.5.27)
$$

e do tensor de Ricci

$$
{}^*R^2{}_2 = {}^*R^3{}_3 = - \frac{h_{22}}{R\,h} = \text{constante}. \qquad (3.5.28)
$$

O escalar de curvatura é constante e é dado por

$$
{}^*R = - \frac{2\,h_{22}}{R^2 h} \qquad (3.5.29)
$$

É imediato verificar que os componentes do tensor de Cotton-York são todas nulas e o espaço-tempo apresenta seções espaciais tridimensionais conformalmente planas. Note ainda que no caso h = 1 todas as componentes do tensor de Riemann são nulas e portanto neste caso, as seções são planas.

3.6) Conclusão

Enumeramos abaixo os principais resultados que obtivemos neste trabalho.

1) A introdução de um campo eletromagnético paralelo à direção x, só é possível para o espaço-tempo de Szekeres (classe II), ao considerarmos soluções não estáticas, se a métrica reduzir-se à forma da eq. (3.2.141). Estudamos a classe em que as seções bidimensionais {x = constante e t = constante} são planas (h=1), e observamos que os modelos distinguem-se de acordo com a razão m^2/c^2, dependendo de uma função e de uma constante, ambas arbitrárias. Obtivemos uma generalização simples de um dos modelos de Doroshkevich[(49)] (solução sem radiação), e um caso particular dos modelos de Caderni-Pollock[(39)] (solução sem campo).

2) No limite de grandes valores da coordenada temporal, a classe examinada evolui para homogeneidade e isotropia. A partir de um exemplo mostramos que o campo magnético pode modificar o tipo de singularidade e diminuir o parâmetro de anisotropia na fase inicial.

3) Os modelos são espacialmente inomogêneos, com um grupo de isometria de três parâmetros cujas órbitas são seções bidimensionais {t = constante e x = constante}.

4) Concluimos que os modelos são expansionistas, irrotacionais e geodéticos. São tipo D da classificação de Petrov, com seções espaciais tridimensionais conformalmente planas.

A seguir expomos certas lacunas que deixamos abertas ao longo deste trabalho. Sugerimos também idéias de continuidade do mesmo e nos permitimos fazer algumas especulações.

Seria interessante analisar a solução estática apresentada na seção 3.2 ; compará-la com outras existentes na literatura bem como estudar suas principais propriedades.

As equações de campo não foram integradas para as classes hiperbólicas e elípticas ($k = \pm 1$). Acreditamos que , tais classes não evoluem para homogeneidade e isotropia como sugere o programa de "Cosmologia Caótica" de Misner. Baseamo-nos para esta conjectura nos trabalhos de Doroshkevich e de Collins e Hawking. Esses últimos mostraram que apenas soluções parabólicas espacialmente homogêneas poderiam obedecer ao programa de Misner. Contudo, as classes $k = \pm 1$ são espacialmente inomogêneas e neste contexto coloca-se a seguinte questão: qual o papel desempenhado pelas inomogeneidades na dinâmica desses modelos ? Julgamos que as inomogeneidades presentes são "congeladas", isto é, elas poderiam ser prescritas inicialmente e manteriam-se com a evolução do modelo, sem alterar sua dinâmica. Para soluções cosmológicas inomogêneas com poeira, tendo uma métrica do mesmo tipo que a por nós investigada, Lund mostrou que os modelos têm um comportamento como se efetivamente fossem homogêneos[(121)]. Acreditamos que é possível estender este resultado para o caso de um fluido perfeito mais campo eletromagnético.

Outra questão que nos parece relevante é saber qual o papel real do campo magnético na dinâmica do universo . Como dissemos na Introdução deste trabalho, Sofue e colaboradores estimaram a intensidade atual do campo magnético intergaláctico em 10^{-9} G. Logo, a densidade de energia do campo (ρ_B), atualmente seria da ordem de 10^{-41} g/cm^3. Sabemos que a densidade de energia da radiação cósmica de fundo (ρ_r), hoje, é estimada em 10^{-34} g/cm^3(10). Nos modelos apresentados a razão $\frac{\rho_B}{\rho_r}$ é constante e igual a $\frac{m^2}{3c^2}$ em qualquer época. Assim, $\frac{m2}{3c^2}$ seria igual a 10^{-7}, e o modelo que melhor se ajustaria e stes dados observacionais seria aquele com $\alpha = 1-\varepsilon$, onde $\varepsilon \cong 10^{-6}$ (veja equação (3.2.81). Julgamos importante investigar, em tal modelo o tipo de singularidade apresentada, o valor do parâmetro de anisotropia, bem como estudar a taxa de formação primordial de elementos prevista.

APÊNDICE A

Modelos de Szekeres de classe II: obtenção das equações de campo com formalismo de tetradas.

A métrica é

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2\, dz^2), \tag{A.1}$$

onde

$$Q = Q(x,y,z,t)\ , \quad R = R(t) \text{ e } h = h(y).$$

Escolhendo as 1-formas

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt, \\ \theta^1 &= Qdx, \\ \theta^2 &= R\, dy\ , \\ \theta^3 &= Rhdz, \end{aligned} \tag{A.2}$$

reescrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 . \tag{A.3}$$

Derivando exteriormente (A.2) obtemos:

$$
\begin{aligned}
d\theta^0 &= 0 \\
d\theta^1 &= \dot{Q}\, dt \wedge dx + Q_2 dy \wedge dx + Q_3 dz \wedge dx \\
d\theta^2 &= \dot{R}\, dt \wedge dy \\
d\theta^3 &= \dot{R}\, h\, dt \wedge dz + Rh_2\, dy \wedge dz.
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Substituindo (A.2) em(A.4) teremos:

$$
\begin{aligned}
d\theta^0 &= 0 \\
d\theta^1 &= \frac{\dot{Q}}{Q}\, \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{Q_2}{RQ}\, \theta^2 \wedge \theta^1 + \frac{Q_3}{RQh}\, \theta^3 \wedge \theta^1 \\
d\theta^2 &= \frac{\dot{R}}{R}\, \theta^0 \wedge \theta^2 \\
d\theta^3 &= \frac{\dot{R}}{R}\, \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{h_2}{Rh}\, \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Como

$$
d\theta^A = -\frac{1}{2} C^A{}_{BC}\, \theta^B \wedge \theta^C \tag{A.6}
$$

e

$$
C^A{}_{BC} = -C^A{}_{CB}
$$

teremos, de (A.5), que os coeficientes $C^A{}_{BC}$ não nulos são:

$$C^1{}_{01} = -\frac{\dot{Q}}{Q} \qquad C^1{}_{21} = -\frac{Q_2}{RQ}$$

$$C^1{}_{31} = -\frac{Q_3}{RQh} \qquad C^2{}_{02} = -\frac{\dot{R}}{R} \tag{A.7}$$

$$C^3{}_{03} = -\frac{\dot{R}}{R} \qquad C^3{}_{23} = -\frac{h_2}{Rh}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci, definidos por

$$\gamma_{ABC} = -\frac{1}{2}(C_{ABC} - C_{CAB} + C_{BCA}),$$

com a propriedade

$$\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}, \tag{A.8}$$

serão:

$$\gamma_{011} = \frac{\dot{Q}}{Q} \qquad \gamma_{211} = \frac{Q_2}{RQ}$$

$$\gamma_{022} = \frac{\dot{R}}{R} \qquad \gamma_{311} = \frac{Q_3}{RQh} \tag{A.9}$$

$$\gamma_{233} = \frac{h_2}{Rh} \qquad \gamma_{033} = \frac{\dot{R}}{R}$$

As 1-formas de rotação $\omega^A{}_B = \gamma^A{}_{BC}\theta^C$ serão então:

$$\omega^1{}_0 = \omega^0{}_1 = \frac{\dot{Q}}{Q}\,\theta^1 \qquad \omega^2{}_0 = \omega^0{}_2 = \frac{\dot{R}}{R}\,\theta^2$$

$$\omega^3{}_0 = \omega^0{}_3 = \frac{\dot{R}}{R}\,\theta^3 \qquad \omega^1{}_2 = -\,\omega^2{}_1 = \frac{Q_2}{RQ}\theta^1 \qquad \text{(A.10)}$$

$$\omega^1{}_3 = -\omega^3{}_1 = \frac{Q_3}{RQh}\,\theta^1 \qquad \omega^3{}_2 = -\omega^2{}_3 = \frac{h_2}{Rh}\,\theta^3$$

Substituindo (A.2) nos $\omega^A{}_B$, obtemos

$$\omega^0{}_1 = \omega^1{}_0 = \dot{Q}\,dx, \qquad \omega^0{}_2 = \omega^2{}_0 = \dot{R}\,dy$$

$$\omega^0{}_3 = \omega^3{}_0 = \dot{R}\,h\,dz, \qquad \omega^1{}_2 = -\,\omega^2{}_1 = \frac{Q_2}{R}\,dx, \qquad \text{(A.11)}$$

$$\omega^3{}_2 = -\omega^2{}_3 = h_2 dz, \qquad \omega^1{}_3 = -\omega^3{}_1 = \frac{Q_3}{Rh}\,dx.$$

Derivando exteriormente e substituindo novamente as eqs. (A.1) , obtemos:

$$d\omega^0{}_1 = \frac{\ddot{Q}}{Q}\theta^0\wedge\theta^1 + \frac{\dot{Q}_2}{QR}\theta^2\wedge\theta^1 + \frac{\dot{Q}_3}{QRh}\,\theta^3\wedge\theta^1$$

$$d\omega^0{}_2 = \frac{\ddot{R}}{R}\theta^0\wedge\theta^2 \qquad \text{(A.12)}$$

$$d\omega^0{}_3 = \frac{\ddot{R}}{R}\theta^0\wedge\theta^3 + \frac{\dot{R}h_2}{R^2 h}\,\theta^2\wedge\theta^3$$

$$d\omega^2{}_1 = -\left(\frac{\dot{Q}_2 R - \dot{R}Q_2}{R^2 Q}\right)\theta^0\wedge\theta^1 - \frac{Q_{22}}{R^2 Q}\theta^2\wedge\theta^1 - \frac{Q_{23}}{R^2 Qh}\,\theta^3\wedge\theta^1$$

$$d\omega^2{}_3 = -\frac{h_{22}}{R^2 h}\,\theta^2\wedge\theta^3$$

$$d\omega^3{}_1 = -\left(\frac{\dot{Q}_3 R - \dot{R}Q_3}{QR^2 h}\right)\,\theta^0\wedge\theta^1 - \left(\frac{Q_{32}h - Q_3 h_2}{R^2 Q h^2}\right)\theta^2\wedge\theta^1 - \frac{Q_{33}}{R^2 h^2 Q}$$

Assim, as 2-formas de curvatura, definidas por

$$\Omega^A{}_B = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B, \tag{A.13}$$

serão dadas por:

$$\Omega^0{}_1 = \frac{\ddot{Q}}{Q}\,\theta^0\wedge\theta^1 + \left(\frac{\dot{Q}_2R-Q_2\dot{R}}{QR^2}\right)\theta^2\wedge\theta^1 + \left(\frac{\dot{Q}_3R-Q_3\dot{R}}{R^2Qh}\right)\theta^3\wedge\theta^1$$

$$\Omega^0{}_2 = \frac{\ddot{R}}{R}\theta^0\wedge\theta^2 \tag{A.14}$$

$$\Omega^0{}_3 = \frac{\ddot{R}}{R}\,\theta^0\wedge\theta^3$$

$$\Omega^2{}_3 = -\frac{h_{22}}{R^2h}\theta^2\wedge\theta^3 + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\theta^2\wedge\theta^3$$

$$\Omega^2{}_1 = \left(\frac{\dot{Q}_2R-\dot{R}Q_2}{R^2Q}\right)\theta^0\wedge\theta^1 - \frac{Q_{22}}{R^2Q}\,\theta^2\wedge\theta^1 - \left(\frac{Q_{23}h-Q_3h_2}{R^2Qh^2}\right)\theta^3\wedge\theta^1 +$$

$$+\frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ}\theta^2\wedge\theta^1$$

$$\Omega^3{}_1 = -\left(\frac{\dot{Q}_3R-\dot{R}Q_3}{QR^2h}\right)\theta^0\wedge\theta^1 - \left(\frac{Q_{32}h-Q_3h_2}{R^2h^2Q}\right)\theta^2\wedge\theta^1 - \left(\frac{Q_2h_2h+Q_{33}}{R^2h^2Q}\right)\theta^3\wedge\theta^1 +$$

$$+\frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ}\,\theta^3\wedge\theta^1.$$

Podemos então calcular diretamente as componentes de tetrada do tensor de Riemman fazendo uso da expressão

$$\Omega^{A}{}_{B} = -\frac{1}{2} R^{A}{}_{BCD}\,\theta^{C} \wedge \theta^{D} . \qquad (A.15)$$

Assim, as componentes não nulas do tensor de Riemman serão:

$$R^{0}{}_{101} = -\frac{\ddot{Q}}{Q}$$

$$R^{0}{}_{121} = -R^{2}{}_{101} = -\left(\frac{\dot{Q}_2 R - Q_2 \dot{R}}{QR^2}\right)$$

$$R^{0}{}_{131} = -R^{3}{}_{101} = -\left(\frac{\dot{Q}_3 R - Q_3 \dot{R}}{R^2 Qh}\right)$$

$$R^{0}{}_{202} = -\frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R^{0}{}_{303} = -\frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R^{2}{}_{323} = \frac{h_{22}}{R^2 h} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \qquad (A.16)$$

$$R^{2}{}_{121} = \frac{Q_{22}}{R^2 Q} - \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ}$$

$$R^{2}{}_{131} = R^{3}{}_{121} = \frac{Q_{23} h - Q_3 h_2}{R^2 Q h^2}$$

$$R^{3}{}_{131} = \frac{Q_{33} + h Q_2 h_2}{R^2 Q h^2} - \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} .$$

Com estes resultados, obtemos os componentes de tetrada do tensor de Ricci:

$$R_{AB} = R^{C}{}_{ACB} \text{ onde } R_{AB} = R_{BA}$$

$$R_{00} = \frac{\ddot{Q}}{Q} + 2\,\frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{Q}}{Q} + \frac{Q_{22}}{R^2 Q} - 2\frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{Q_{33} + hh_2 Q_2}{R^2 Q h^2}$$

$$R_{22} = -\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{Q_{22}}{R^2 Q} - \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{h_{22}}{R^2 h} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$$

$$R_{33} = -\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{Q_{33} + hh_2 Q_2}{R^2 Q h^2} - \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{h_{22}}{R^2 h} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 .$$

$$R_{02} = \frac{\dot{Q}_2 R - Q_2 \dot{R}}{QR^2} \tag{A.17}$$

$$R_{03} = \frac{\dot{Q}_3 R - Q_3 \dot{R}}{QR^2 h}$$

$$R_{23} = \frac{Q_{23} h - Q_3 h_2}{R^2 Q h^2}$$

$$R_{01} = R_{12} = R_{13} = 0.$$

O escalar de curvatura,

$$R = R^{0}{}_{0} + R^{1}{}_{1} + R^{2}{}_{2} + R^{3}{}_{3}$$

é dado por:

$$R = 4\,\frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} - \frac{2Q_{22}}{R^2Q} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2\,h_{22}}{R^2h} - 2\left(\frac{Q_{33} + hh_2Q_2}{R^2Qh^2}\right) +$$

$$+ \frac{2\ddot{Q}}{Q} + 4\,\frac{\ddot{R}}{R} \tag{A.18}$$

As componentes de tetrada do tensor de Einstein,

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R\,\eta_{AB}, \tag{A.19}$$

serão escritos como:

$$G_{00} = -2\frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{Q_{22}}{R^2Q} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{h_{22}}{R^2h} + \frac{Q_{33} + hh_2Q_2}{R^2Qh^2} \tag{A.20}$$

$$G_{11} = 2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{h_{22}}{R^2h}$$

$$G_{22} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{\ddot{Q}}{Q} - \frac{(Q_{33} + hh_2Q_2)}{R^2Q\,h^2}$$

$$G_{33} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} - \frac{Q_{22}}{R^2Q} + \frac{\ddot{Q}}{Q}$$

$$G_{02} = \frac{\dot{Q}_2R - Q_2\dot{R}}{QR^2}$$

$$G_{03} = \frac{\dot{Q}_3R - Q_3\dot{R}}{R^2Qh}$$

$$G_{23} = \frac{Q_{23}h - Q_3h_2}{R^2Qh^2}$$

As componentes do tensor de Einstein na base de coordenadas são obtidos de

$$G_{\mu\nu} = e^{(A)}{}_{\mu} e^{(B)}{}_{\nu} G_{(A)(B)}, \tag{A.21}$$

onde obtemos a tetrada $e^{(A)}{}_{\alpha}$ de

$$\theta^{(A)} = e^{(A)}{}_{\alpha} dx^{\alpha} \tag{A.22}$$

Assim

$$\begin{aligned} e^{(0)}{}_{0} &= 1 \\ e^{(1)}{}_{1} &= Q \\ e^{(2)}{}_{2} &= R \\ e^{(3)}{}_{3} &= Rh \end{aligned} \tag{A.23}$$

Portanto, em base de coordenada

$$\begin{aligned} G_{00} &= G_{(0)\,(0)} \\ G_{11} &= Q^2\, G_{(1)\,(1)} \\ G_{22} &= R^2\, G_{(2)\,(2)} \\ G_{33} &= R^2 h^2\, G_{(3)\,(3)} \\ G_{02} &= R\, G_{(0)\,(2)} \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$G_{03} = Rh\, G_{(0)\ (3)}$$

e

$$G_{23} = R^2 h\, G_{(2)\ (3)} \quad .$$

Assim, podemos escrever as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -\,8\pi\, T_{\mu\nu} \,, \tag{A.25}$$

na base de coordenadas como:

$$\begin{aligned}
-\,8\pi Q^{-2} R^2\, T_{11} &= 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - h_{22}\, h^{-1} \\
-\,8\pi Q\, R^{-1}\, T_{22} &= Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R - h^{-2}\, R^{-1}\, (Q_{33} + hh_2 Q_2) \\
-\,8\pi h^{-2} Q R^{-1}\, T_{33} &= Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R - R^{-1}\, Q_{22} \\
-\,8\pi Q R^2\, T_{00} &= -\,Q\,\dot{R}^2 - 2\dot{Q}\dot{R}R + Q_{22} + h^{-2}(Q_{33} + hh_2 Q_2 + hh_{22} Q) \\
-\,8\pi Q\, T_{23} &= Q_{23} - h^{-1} h_2\, Q_3 \\
-\,8\pi Q\, T_{20} &= \dot{Q}_2 - Q_2\, R^{-1}\, \dot{R} \qquad\qquad (A.26) \\
-\,8\pi Q\, T_{30} &= \dot{Q}_3 - Q_3\, R^{-1}\, \dot{R} \quad .
\end{aligned}$$

APÊNDICE B

Notas sobre o tensor de Weyl e a classificação de Petrov: um exemplo

Devido as propriedades de simetria do tensor de curvatura, pode-se mostrar que[15] em uma variedade riemanniana de dimensão n, existem $n^2(n^2-1)/12$ componentes independentes do tensor de curvatura, sendo que $n(n+1)/2$ destas componentes podem ser representadas pelas componentes do tensor de Ricci[8]. Portanto, se $n = 1$, $R_{hijk} = 0$, se $n = 2$ só temos uma componentes independente e se $n = 3$ o tensor de Ricci determina completamente o tensor de curvatura. Para $n > 3$ as $n(n+1)(n^2-n-6)/12$ componentes restantes do tensor de curvatura podem ser representadas pelo tensor

$$W_{hijk} = R_{hijk} - \frac{1}{n-2}(g_{hj}R_{ik} - g_{hk}R_{ij} - g_{ij}R_{hk} + g_{ik}R_{hj}) +$$

$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{hj}\, g_{ik} - g_{hk}\, g_{ij}). \tag{B.1}$$

denominado tensor de Weyl. Observamos que, como os dois últimos membros do lado direito, na equação acima, têm as propriedades de simetria do tensor de curvatura, o tensor de Weyl possui também estas propriedades de simetria, ou seja,

$$\begin{aligned} &W_{hijk} = - W_{hikj} = - W_{ihkj} = W_{jkhi} \\ &W_{hijk} + W_{hkij} + W_{hjki} = 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Além destas, é fácil verificar que

$$W^{h}{}_{ihk} = 0, \tag{B.3}$$

isto é, podemos pensar no tensor de Weyl como a parte do tensor de curvatura tal que todas as contrações são nulas.[8].

Dizemos que as métricas g e $\bar{g}$ são conformes se

$$\bar{g} = \Omega^2 g \tag{B.4}$$

onde Ω é alguma função diferenciável diferente de zero. Sob uma transformação conforme, em um dado ponto P, ângulos e razões entre magnitudes são preservadas, isto é, se x, y, z e w são vetores em P, então

$$\frac{g(x,y)}{g(z,w)} = \frac{\bar{g}(x,y)}{\bar{g}(z,w)} \quad . \tag{B.5}$$

Uma outra forma de caracterizar o tensor de Weyl é devida ao fato de que ele é invariante por transformações conformes. Isto é, pode-se mostrar[15] que sob uma transformação do tipo dada pela eq.(B.4), o tensor de Weyl satisfaz

$$\bar{W}^{h}{}_{ijk} = W^{h}{}_{ijk} \quad . \tag{B.6}$$

Quando as componentes do tensor métrico, em uma variedade riemanniana de dimensão maior que três, obedece a relação

$$g_{ij} = \Omega^2(x^k)\, \eta_{ij} \tag{B.7}$$

onde η_{ij} são as componentes de um tensor diagonal constante, o espaço é dito ser conformalmente plano. Neste caso, pode-se mostrar[15] que a condição necessária e suficiente para que isto ocorra é que

$$W_{hijk} = 0 \tag{B.8}$$

Quando n = 3 e o sistema de coordenadas é escolhido tal que $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, pode-se mostrar que[15] W_{hijk} é identicamente nulo. . E é claro não podemos usar, nesta situação, o fato do tensor de Weyl ser nulo como critério para que o espaço seja conformalmente plano. No entanto, existe um tensor conformalmente invariante que em um espaço riemanniano tridimensional tem um papel análogo ao do tensor de Weyl em dimensões maiores. Este tensor é definido por[63], [15]

$$R_{ijk} = {}^*R_{ij||k} - {}^*R_{ik||j} + \frac{1}{4} ({}^*g_{ik} \, {}^*R_{||j} - {}^*g_{ij} \, {}^*R_{||k}) \tag{B.9}$$

onde, ${}^*R_{ij}$ é o tensor de Ricci da geometria tridimensional, ${}^*g_{ij}$ a métrica induzida nesta hipersuperfície e ${}^*R = {}^*R^i{}_i$, o escalar de curvatura.

Pode-se mostrar[15] que uma geometria tridimensional é conformalmente plana se e somente se $R_{ijk} = 0$. Mostra-se ainda, usando-se a eq.(B.9), as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} R^i{}_{ij} &= {}^*g^{ik} R_{kij} = 0, \\ R_{ijk} + R_{ikj} &= 0, \\ R_{ijk} + R_{kij} + R_{jki} &= 0, \end{aligned} \tag{B.10}$$

que reduzem a cinco o número de componentes independentes de R_{ijk}[63].

Em uma variedade riemanniana de dimensionalidade de 4 ou mais particularmente, numa variedade espaço-tempo da Relatividade Geral, a equação de definição do tensor de Weyl , eq. (B.1), toma a forma

$$W_{hijk} = R_{hijk} - \frac{1}{2}(g_{hj}R_{ik} - g_{hk}R_{ij} - g_{ij}R_{hk} + g_{ik}R_{hj}) +$$

$$+ \frac{R}{6}(g_{hj}\, g_{ik} - g_{hk}\, g_{ij}). \qquad (B.11)$$

A equação acima juntamente com as equações de campo da gravitação nos mostram que o tensor de Weyl é a parte do tensor de curvatura que não está diretamente determinado pelas fontes, isto é, em regiões livres de fonte ele é a única parte do tensor de curvatura que pode ser diferente de zero. Sendo assim, o tensor de Weyl pode ser considerado como a quantidade que mais caracteriza o campo gravitacional e uma classificação de campos deve naturalmente iniciar-se por uma classificação deste tensor [6]. Esta classificação originalmente feita por Petrov, é independente do sistema de coordenadas empregado e tem tido um papel importante na compreensão e no desenvolvimento da Relatividade Geral. Em particular ela tem contribuído na descoberta de novas soluções exatas das equações de Einstein e em vários casos tem permitido a que se tirem conclusões acerca da possibilidade de existência ou não de radiação gravitacional em soluções pertencentes a algum tipo de Petrov.

Em uma variedade riemanniana é sempre possível obter uma classificação invariante, em um determinado ponto P, de qualquer tensor de segunda ordem, através do método de autovalores e autovetores. O tensor de Weyl é um tensor de quarta ordem e portanto não pode ser classificado diretamente a partir deste método. No entanto, seguiremos um método bastante próximo a este e que consiste, inicialmente, na construção de três matrizes 3x3 (M_{AB}), (N_{AB}) e (P_{AB})[7]. Como a classificação de Petrov é feita em um ponto, no que se segue usaremos uma ba se de tetradas. As matrizes (M), (N) e (P) são construídas de acordo com o seguinte esquema: um índice A de (M) corresponde a um par de índices hi de $W_{hi\rho\sigma}$ tal que

$$(1,2,3) \rightarrow (23,31,12). \qquad (B.12)$$

Assim

$$(M_{11}) = W_{2323}, \; (M_{12}) = W_{2331}, \; (M_{23}) = W_{3112} \text{ etc.}$$

Um índice A de (P) corresponde a um par de índices hi de W_{hijk} tal que

$$(1,2,3) \rightarrow (10,20,30) . \qquad (B.14)$$

Assim

$$(P_{11}) = W_{1010}, \; (P_{12}) = W_{1020}, \; (P_{23}) = W_{2030} \text{ etc.} \qquad (B.15)$$

O primeiro índice de (N) corresponde a um par de índices hi de W_{hijk} de acordo com (B.12) e o segundo índice de (N) corresponde a um par de índices jk de W_{hijk} de acordo com (B.14).

Assim

$$(N_{11}) = W_{2310}, \; (N_{12}) = W_{2320}, \; (N_{23}) = W_{3130} \text{ etc.} \qquad (B.16)$$

É fácil verificar, usando apenas as propriedades de simetria do tensor de Weyl, eq. (B.2), que (M) e (P) são matrizes simétricas por construção, enquanto (N) é em princípio, assimétrica de traço nulo, isto é,

$$\mathrm{Tr}(N) = \sum_A (N_{AA}) = 0 \qquad (B.17)$$

Pode-se verificar ainda, usando a eq. (B.3), as propriedades

$$(N_{AB}) = (N_{BA}),$$

$$(P_{AB}) = - (M_{AB}) \qquad (B.18)$$

e

$$Tr\ (P) = Tr(M) = 0 \quad .$$

Portanto (N) e (P) = -(M) são matrizes simétricas de traço nulo.

Introduzimos, agora, a matriz complexa, simétrica e de traço nulo (Q), definida por

$$(Q_{AB}) = \frac{1}{2}\ ((M_{AB}) - (P_{AB}) + 2i\ (N_{AB})) = (M_{AB}) + i(N_{AB}) \ . \qquad (B.19)$$

Observe que (M) e (N) tem cada qual cinco componentes independentes o que totaliza dez, não havendo, pelo menos a partir das propriedades de simetria e do fato de que $C^{i}{}_{kim} = 0$, nenhuma relação entre elas. Este número, dez, é justamente o número de componentes independentes do tensor de Weyl em uma variedade de dimensionalidade 4 e assim o conhecimento da matriz (Q) é equivalente ao conhecimento de W_{hijk}.

A fim de efetivar a classificação de W_{hijk} procuramos os autovalores λ e os auto-vetores $V_A \neq 0$ da matriz Q, isto é, as soluções de

$$\sum_{B} (Q_{AB})\ V_B = \lambda\ V_B \ . \qquad (B.20)$$

Em geral, tanto λ quando V_B são quantidades complexas. Como Tr (Q) = 0, a soma das raízes da eq. (B.20) é zero:

$$\overset{(1)}{\lambda} + \overset{(2)}{\lambda} + \overset{(3)}{\lambda} = 0 \ . \qquad (B.21)$$

Dependendo do número de autovetores independentes V_A temos os seguintes tipos canônicos de Petrov [1].

TIPO I

Existem três autovetores independentes a dois autovalores complexos independentes. Se dois destes autovalores são iguais, então o tipo de Petrov é D ou tipo I degenerado. Por uma rotação apropriada, podemos colocar a matriz (Q) e portanto (M) e (N) na forma diagonal,

$$(M) = \begin{pmatrix} m_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & m_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & m_3 \end{pmatrix} , \qquad (N) = \begin{pmatrix} n_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & n_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & n_3 \end{pmatrix} \qquad (B.22)$$

com $m_1 + m_2 + m_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 0$. Para o tipo D teremos, p. exemplo, $m_2 = m_3$ e $n_2 = n_3$.

TIPO II

Neste caso, existem dois autovetores independentes e um autovalor independente. Se este autovalor é zero, então o tipo de Petrov é N, ou tipo II nulo. As matrizes (M) e (N) podem ser colocadas nas seguintes formas canônicas [1]

$$(M) = \begin{pmatrix} -2m & \cdot & \cdot \\ \cdot & m+\sigma & \cdot \\ \cdot & \cdot & m-\sigma \end{pmatrix} \quad e \quad (N) = \begin{pmatrix} -2n & \cdot & \cdot \\ \cdot & n & \sigma \\ \cdot & \sigma & n \end{pmatrix} \qquad (B.23)$$

Para o tipo N, $m = n = 0$.

TIPO III

Existe apenas um autovetor independente e todos os autovalores são iguais e portanto nulos. As soluções da eq.(B.20) podem ser expressar na forma $(Q_{11}) = (Q_{22}) = Q_{33}) =$ $= 0$, $(Q_{12}) = -\sigma$ e $(Q_{13}) = i\sigma$ tal que

$$(M) = \begin{pmatrix} \cdot & -\sigma & \cdot \\ -\sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad e \quad (N) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \sigma \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma & \cdot & \cdot \end{pmatrix} . \tag{B.24}$$

Se $\sigma = 0$, $W_{hijk} = 0$ e o tipo de Petrov é 0.

Campos gravitacionais dos tipos D, II, N, III e 0 são ditos algebricamente especiais e o tipo I é chamado algebricamente geral. Lembramos que a classificação de Petrov é feita em um dado ponto P da variedade podendo mudar quando nos movimentamos sobre ela.

Finalizando, apresentamos como um exemplo a classificação de Petrov dos modelos de classe II de Szekeres.

As componentes não nulas do tensor de Weyl, em base de tetradas, para a métrica de Szekeres de Classe II são:

$$W^{10}{}_{10} = W^{23}{}_{23} = \frac{1}{6}\Big(\frac{Q_{22}}{R^2Q} - \frac{2\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{Q_{33} + hh_2Q_2}{R^2Qh^2} + 2\Big(\frac{\dot{R}}{R}\Big)^2 - \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{2h_{22}}{R^2h} + \frac{2\ddot{Q}}{Q}\Big), \tag{B.25}$$

$$W^{20}{}_{20} = W^{31}{}_{31} = \frac{1}{6}\Big(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} + \frac{Q_{22}}{R^2Q} + \frac{h_{22}}{R^2h} - \Big(\frac{\dot{R}}{R}\Big)^2 - \frac{\ddot{Q}}{Q} - 2\frac{Q_{33}+hh_2Q_2}{R^2Qh^2}\Big), \tag{B.26}$$

$$W^{30}{}_{30} = W^{12}{}_{12} = \frac{1}{6}\Big(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{Q}}{RQ} - \frac{2Q_{22}}{R^2Q} + \frac{h_{22}}{R^2h} + \frac{Q_{33}+ hh_2Q_2}{R^2Qh^2} - \frac{\ddot{Q}}{Q} - \Big(\frac{\dot{R}}{R}\Big)^2\Big). \tag{B.27}$$

Em geral para o espaço-tempo de Szekeres temos $G^2{}_2 = G^3{}_3$, neste caso, é fácil mostrar que

$$W^{20}{}_{20} = W^{30}{}_{30} = W^{12}{}_{12} = W^{13}{}_{13} \qquad (B.28)$$

Assim, construindo as matrizes (M), (P) e (N) de acordo com o esquema descrito anteriormente obtemos,

$$(M) = \begin{pmatrix} W_{2323} & \cdot & \cdot \\ \cdot & W_{3131} & \cdot \\ \cdot & \cdot & W_{1212} \end{pmatrix} \qquad (B.29)$$

$$(P) = \begin{pmatrix} W_{1010} & \cdot & \cdot \\ \cdot & W_{2020} & \cdot \\ \cdot & \cdot & W_{3030} \end{pmatrix} \qquad (B.30)$$

e

$$(N) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad (B.31)$$

Portanto a matriz complexa 3x3 (Q) é real, diagonal com dois autovalores iguais e três autovetores independentes. O espaço-tempo é do tipo D, podendo ser eventualmente do tipo 0 quando $W_{2323} = W_{3131} = W_{1212} = 0$.

BIBLIOGRAFIA

1 - Landau, L.D., e Lifshitz, E.M. - "The Classical Theory of Fields", 4 ed., Pergamon Press (1975).

2 - Adler, R.; Bazin, M.; e Schiffer, M. - "Introduction to General Relativity", 2 ed., Mc Graw-Hill Kogakusha(1975).

3 - Weinberg, S. - "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", 1 ed., John Wiley & Sons (1972).

4 - Weinberg, S. - "Os Três Primeiros Minutos: Uma Discussão Moderna sobre a Origem do Universo", 1 ed., Guanabara Dois (1980).

5 - Misner, C.W.; Thorne, K.S.; Wheeler, J.A. - "Gravitation", 1 ed., W.H. Freeman and Company (1973).

6 - Ehlers, J.; Kundt, W. - "Exact Solutions of the Gravitational Field Equations", em "Gravitation: An Introduction to Current Research", 1 ed., John Wiley & Sons (1962).

7 - Anderson, J.L. - "Principles of Relativity Physics", 2 ed., Academic Press (1973).

8 - Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. - "The Large Structure of Space-Time", 1 ed., Cambridge University Press (1979).

9 - Ryan, M.P. Jr., Shepley, L.C. - "Homogeneous Relativistic Cosmologies", 1 ed., Princeton University Press (1975).

10 - Ohanian, H.C. - "Gravitation and Spacetime", 1 ed.,W.W. Norton & Company, Inc (1976).

11 - Bondi, H. - "Cosmology", 1 ed., Cambridge University Press (1952).

12 - Lightman, A.P.; Press, W.H.; Price, R.H.; Teukolosky, S.A. - "Problem Book In Relativity and Gravitation", 1 ed., Princeton University Press (1975).

13 - Papapetrou, A. - "Lectures on General Relativity", 1 ed., D. Reidel Publishing Company (1974).

14 - Novello, M. - "Cosmologia Relativista", II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, Editado por M.Novello (CBPF) (1980), vol. I, pág. 203.

15 - Eisenhart, L.P. - "Riemannian Geometry", 1 ed., Princeton University Press (1964).

16 - Assad, M.J.D. - "Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético", Tese de Mestrado, CBPF (1980).

17 - Einstein, A. - "The Meaning of Relativity", 5 ed., Princeton University Press (1972), Apêndice para a 2 ed.

18 - Zel'dovich, Ya. B.; Novikov, I.D. - "Relativistic Astrophysics Volume 1: Stars and Relativity", 3 ed.,The University of Chicago Press (1978), Cap. 3.

19 - Arcuri, R.C. - "Núcleos Atrasados de Matéria no Universo de Friedman", Tese de Mestrado, CBPF (1982).

20 - MacCallum, M.A.H. - "Cosmological Models from a Geometrical Point of View" em "Cargése Lectures in Physics", vol. 6, Gordon and Breach (1973).

21 - Collins, C.B. - "Global Structure of the Kantowski Sachs Cosmological Models", J. Math. Phys., 18,(1977), 2116.

22 - Mac Callum,M.A.H. - "Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies", em "General Relativity: An Einstein Centenary Survey", editado por Hawking, S.W., e Israel, W., 1 ed., Cambridge University Press. (1979), cap. 11.

23 - Mac Callum, M.A.H. - "The Mathematics of Anisotropic Spatially - Homogeneous Cosmologies", em "Lectures Notes in Physics", editado por Demianski, M., 109,Springer Verlag(1979),1.

24 - Zel'dovich, Ya.B. - "The Equation of State Ultrahigh Densities and its Relativistic Limitations", Sov.Phys. JETP, 14(1962), 1143.

25 - Vajk, J.P. - "Exact Robertson-Walker Cosmological Solutions Containing Relativistic Fluids", J.Math.Phys., 10, (1969), 1145.

26 - Dingle, H. - "Volues of T^{ν}_{μ} and the Christoffel Symbols for a line Element of Considerable Generality", Proc.Nac. Am.Soc., 19,(1933), 559.

27 - Bondi, H. - "Spherically Symmetrical Models in General Relativity", Mon.Not.R. astr. Soc., 107, (1947), 410.

28 - Bonnor, W.B. - "Evolution of Inhomogeneous Cosmological Models", Mon.Not.R. astr. Soc., 167, (1974), 1.

29 - Tolman, R.C. - "Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models", Proc. Nac. Am. Soc., 20, (1934), 169.

30 - Szafron, D.A. - "Inhomogeneous Cosmologies: New exact Solutions and their Evolution", J. Math. Phys, 18,(1977), 1673.

31 - Szekeres, P. - "A class of Inhomogeneous Cosmological Models", Commun. Math. Phys., 41, (1975), 55.

32 - Eardley, D.; Liang, E.; Sachs, R. - "Velocity-Dominated Singularities in Irrotational Dust Cosmologies", J.Math. Phys, 13, (1972), 99.

33 - Spero, A.; Szafron, D.A. - "Spatial Conformal Flatness in Homogeneous and Inhomogeneous Cosmologies", J.Math.Phys. 19, (1978), 1536.

34 - Bonnor, W.B. - "Non-radiative Solutions of Einstein's Equations for Dust", Commun. Math. Phys. 51, (1976),191.

35 - Bonnor, W.B.; Sulaiman, A.H.; Tomimura, N. - "Szekeres's Space-Time Have no Killing Vectors", Gen.Rel.Grav., 8, (1977), 549.

36 - Szekeres, P. - "Quasispherical Gravitational Collapse", Phys. Rev. D., 12, (1975), 2941.

37 - Tomimura, N. - "Certain Inhomogeneous Cosmological Models", Tese de Doutorado, University of London, Queen Elizabeth College (1976).

38 - Szafron, D.A.; Wainwright, J. - "A Class of Inhomogeneous Perfect Fluid Cosmologies", J.Math. Phys., 18, (1977), 1668.

39 - Pollock, M.D.; Caderni, N. - "On the Introduction of Isotropic Blackbody Radiation into the Inhomogeneous Cosmological Models of Szekeres", Mon. Not. R. astr.Soc., 190, (1980), 509.

40 - Sales de Lima, J.A. - "Uma Generalização dos Modelos Cosmológicos Inomogêneos de Szekeres", Tese de Mestrado, CBPF (1982).

41 - Bonnor, W.B.; Tomimura, N. - "Evolution of Szekeres's Cosmological Models", Mon. Not. R. astr. Soc., 175,(1976), 85.

42 - Kantowski, R.; Sachs, R.K. - "Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models", J.Math. Phys, 7, (1966), 443.

43 - Ruban, V.A. - "T-Models of" Sphere "in Relativity Theory", JETP Letters, 8, (1968), 414.

44 - Ruban, V.A. - "Spherically Symetric T-Models in General Theory of Relativity", Sov. Phys. JETP, 29, (1969), 1027.

45 - Kamke, E. - "Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen", 1 ed., Akademische Verlgsgesllschaft (1959), vol 1, pg. 554.

46 - ver ref. 45, pg. 470.

47 - Oberhettinger, F. - "Hypergeometric Functions", em "Handbook of Mathematical Functions", editado por Abramowitz, M., e Stegun, I.A., 1 ed., Dover Publications, INC. (1972), pág. 555.

48 - Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F.G.- "Higher Transcendental Functions", 1 ed., McGraw-Hill Book Company, INC. (1954), Cap. II, seção 2.2.

49 - Doroshkevich, A.G. - "Model of a Universe with a Uniform Magnetic Field", Astrophysics, 1, (1965), 138.

50 - Shikin, I.S. - "A Uniform Anisotropic Cosmological Model with a Magnetic Field", Sov. Phys. Doklady, 11, (1967), 944.

51 - Thorne, K.S. - "Primordial Element Formation, Primordial Magnetic Fields, and the Isotropy of the Universe", Ap.J., 148, (1967), 51.

52 - Vajk, J.P.; Eltgroth, P.G. - "Spatially Homogeneous Anisotropic Cosmological Models Containing Relativistic Fluid and Magnetic Field", J. Math. Phys., 11,(1970), 2212.

53 - Rosen, G. - "Symmetries of the Einstein-Maxwell Equations", J.Math.Phys., 3, (1962), 313.

54 - Rosen, G. - "Spatially Homogeneous Solutions to the Einstein-Maxwell Equations", Phys. Rev., 136, (1964), B297.

55 - Jacobs, K.C. - "Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear", Ap. J., 153, (1968),661.

56 - Jacobs, K.C. - "Cosmologies of Bianchi Type I with a Uniform Magnetic Field", Ap. J, 155, (1969), 379.

57 - ver ref. 45, pág. 436.

58 - ver ref. 45, pág. 440.

59 - ver ref. 45, pág. 438.

60 - ver ref. 45, pág. 439.

61 - Brill, D.R. - "Eletromagnetic Fields in a Homogeneous, Nonisotropic Universe" - Phys. Rev., 133, (1964), B845.

62 - Spokoiny, B.L. - "The Effect of the Eletromagnetic Fields on the Evolution of Homogeneous Cosmological Model near the Singularity", Gen.Rel.Grav., 14, (1982), 279.

63 - York, J.W. Jr. - "Gravitational Degrees of Freedom and the Initial-Value Problem", Phys. Rev. Letters, 26,(1971), 1656.

64 - Wainwright, J. - "A classification scheme for Non-Rotating Inhomogeneous Cosmologies", J. Phys. A: Math.Gen., 12, (1979), 2015.

65 - Berger, B.K.; Eardley, D.M. - "Note on the spacetime of Szekeres", Phys Rev. D, 16, (1977), 3086.

66 - Ipser, J.; Sikivie P. - "Can Galactic Halos be Made of Axions?", Phys. Rev. Letters, 50, (1983), 925.

67 - Stecker, F.W.; Shafi, Q. - "Axions and the Evolution of Structure in the Universe", Phys. Rev. Letters, 50 (1983), 928.

68 - Thuan, T.X.; Montmerle, T. - "La Masse Invisible de L'Universe", La Recherche, nº 139, (1982), 1438.

69 - Kompaneets, A.S.; Chernov, A.S. - "Solution of the Gravitation Equations for a Homogeneous Anisotropic Model", Sov. Phys. JETP, 20, (1965), 1303.

70 - Taub, A.H. - "Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions" Annals of Mathematics, 53, (1951), 472.

71 - Mavridès, S. - "L'Univers Relativiste", 1 ed., Masson & Cie, Éditeurs, (1973).

72 - Tonnelat, M.A. - "Les Théories Unitaires de l'Electromagnétisme et de la Gravitation", 1ª ed., Gauthier-Villars,(1965).

73 - Ellis, G.F.R. - "Dynamics of Pressure - Free Mather in General Relativity", J.Math. Phys., 8, (1967), 1171.

74 - Stewart, J.M.; Ellis, G.F.R. - "Solutions of Einstein's Equations for a Fluid Wich Exhibit Local Rotational Symetry", J.Math. Phys., 9, (1968), 1072.

75 - Rebouças, M.J. - "Modelos do Universo com Rotação Dependente do Tempo e a Violação da Causalidade na Cosmologia", Tese de Doutorado, CBPF, (1981).

76 - Bianchi, L. - "Sugli Spazii a tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti", Mem. Soc. It. della Sc. (dei XL), 3, (1897), 267.

77 - Estabrook, F.B.; Wahlquist, H.D.; Behr, C.G. - "Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models", J.Math. Phys., 9, (1968), 497.

78 - Lovelock, D.; Rund, H. - "Tensors, Differential Forms and Variational Principles", 1 ed., John Wiley & Sons (1975).

79 - Soares, I.D. - "Notas de Aula do Curso de Cosmologia", CBPF (1979).

80 - Cartan, E. - "Sur les équations de la gravitation de Einstein", J. Math. Pures et Appl., 1, (1922), 141.

81 - Einstein, A. - "Como Vejo o Mundo", 10 ed., Editora Nova Fronteira (1981).

82 - Einstein, A. - "Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral", em "Textos Fundamentais da Física Moderna, Volume I, O Princípio da Relatividade", 2 ed., Fundação Calouste Gulbenkian (1971), pág. 141.

83 - Ellis, G.F.R. - "Limits to Verification in Cosmology", Ann. of the New York Acad. Sci., 336, (1980), 130.

84 - Gilmore R. - "Lie Groups, Lie Algebras, and Some of their Applications", 1 ed., John Wiley & Sons, Inc. (1974).

85 - Cohn, P.M. - "Lie Groups", 1 ed., Cambridge University Press (1957).

86 - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology", in: "Cargèse Lectures in Physics", Vol 6, Gordon and Breach (1973).

87 - Misner, C.W. - "The Isotropy of the Universe", Ap. J., 151, (1968), 431.

88 - Collins, C.B.; Hawking, S.W. - "Why is the Universe Isotropic?", Ap. J., 180, (1973), 317.

89 - Goode, S.W.; Wainwright, J. - "Singularities and Evolution of the Szekeres Cosmological Models", Phys. Rev. D, 26, (1982), 3315.

90 - Ellis, G.F.R. - "The Homogeneity of the Universe", Gen. Rel. Grav., 11, (1979), 281.

91 - Peebles, P.J.E. - "Physical Cosmology", 1 ed., Princeton University Press (1974).

92 - Collins, C.B. - "Intrinsic Symmetries in General Relativity", Gen. Rel. Grav., 10, (1979), 925.

93 - Collins, C.B.; Szafron, D.A. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Symmetries. I.", J. Math. Phys., 20, (1979), 2347.

94 - Szafron, D.A.; Collins, C.B. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Symmetries. II. Conformally Flat Slices and an Invariant Classification", J. Math. Phys, 20, (1979), 2354.

95 - Collins, C.B.; Szafron, D.A. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Symmetries. III. Conformally Flat Slices and their Analysis", J. Math. Phys, 20, (1979), 2362.

96 - Zel'dovich, Ya.B. - "Magnetic Model of the Universe" - Sov. Phys. JETP, 21, (1965), 656.

97 - Zel'dovich, Ya.B. - "The Hypothesis of Cosmological Magnetic Inhomogeneity" - Sov. Astronomy - AJ, 13,(1970), 608.

98 - Reinhardt, M.; Thiel, M.A.F. - "Does a Primaeval Magnetic Field Exist?", Astrophys. Letters, 7, (1970), 101.

99 - Fujimoto, M.; Kawabata, K.; Sofue, Y. - "Structures of Magnetic Fields in the Universe and Galaxies" Prog.Theor. Phys. Suppl., nº 49, (1971), 181, Cap. VI.

100 - Reinhardt, M - "Interpretation of Rotation Measures of Radio Sources"., Astron. & Astrophys., 19, (1972), 104.

101 - Vallée, J.P. - "Magnetic Field in the Intergalactic Region", Nature, 254, (1975), 23.

102 - Kobolov, V.M.; Reinhardt, M.; Sazonov, V.N. - "A Test of the Isotropy of the Universe", Astrophys. Letters, 17, (1976), 183.

103 - Kronberg, P.P.; Simard-Normandin, M. - "New Evidence on the origin of Rotation Measures in Extragalactic Sources", Nature, 263, (1976), 653.

104 - Ruzmaikin, A.A.; Sokoloff, D.D. - "The Interpretation of Rotation Measures of Extragalactic Radio Sources" - Astron. Astrophys., 58, (1977), 247.

105 - Sofue, I.; Fujimoto, M.; Kawabata, K. - "Intergalactic Magnetic Fields and Faraday Rotation of Extragalactic Radio Sources" - Publ. Astron. Soc. Japan, 31, (1979),125.

106 - Thomson, R.C.; Nelson, A.H. - "Galactic and Intergalactic Faraday Rotation", Mon. Not. R. astr. Soc. 201, (1982), 365.

107 - Caderni, N. - "Viscous Dissipation and Evolution of Homogeneous Cosmological Models", em "Lecture Notes in Physics", editado por Demianski, M., 109, Springer-Verlag,(1979), 81.

108 - Greenstein,G. - "Primordial Helium Production in "Magnetic" Cosmologies", Nature, 223, (1969), 938.

109 - Reinhardt, M. - "Orientation of Galaxies and a Magnetic Urfield" - Astrophysics and Space Science, 10, (1971),363.

110 - Brecher, K.; Blumenthal, G.R. - "On the Origin of Cosmic Magnetic Fields", Astrophysical Letters, 6, (1970), 169.

111 - Partridge, R.B. - "Cosmological Anisotropies in the Microwave Background" - em "Lecture Notes in Physics", editado por Demianski, M., 109, Springer-Verlag, (1979), 131.

112 - Gamow, G. - "The Evolution of the Universe" - Nature, 162, (1948), 680.

113 - Penzias, A.A.; Wilson, R.W. - "A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s" - Ap. J., 142, (1965),419.

114 - Boughn, S.P.; Cheng, E.S.; Wilkinson, D.T. - "Dipole and Quadrupole Anisotropy of the 2.7 k Radiation", Ap. J.,243, (1981), L113.

115 - Silk, J.; Wilson, M.L. - "Large-Scale Anisotropy of the Cosmic Microwave Background Radiation", Ap.J., 244,(1981), L37.

116 - Smoot, G.F.; Gorenstein, M.V., Muller, R.A. - "Detection of Anisotropy in the Cosmic Blackbody Radiation", Phys.Rev. Lett., 39, (1977), 898.

117 - Fabbri, R.; Melchiorri, F. - "Towards a Non-Friedmannian Universe" - Gen. Rel. Grav., 13, (1981), 201.

118 - Hart, L.; Davies, R.D. - "Motion of the Local Group of Galaxies and Isotropy of the Universe", Nature, 297,(1982), 191.

119 - Lubbin, P.M.; Epstein, G.L.; Smoot, G.F. - "3-mm Anisotropy Measurement and the Quadrupole Component in the Cosmic Background Radiation", Phys.Rev. Letters, 50,(1983),616.

120 - Fixsen, D.J.; Cheng, E.S.; Wilkinson, D.T. - "Large-Scale Anisotropy in the 2.7-k Radiation with a Balloon-Borne Maser Radiometer at 24.5 GHz", Phys. Rev. Letters, 50, (1983), 620.

121 - Lund, F. - "Effective Homogeneity of Some Inhomogeneous Cosmologies", Phys. Rev. D, 8, (1973), 4229.

122 - Kronberg, P.P. - "Rotation Measures and Cosmology", em "Radio Astronomy and Cosmology", ed. Jauncey D.L.,(1977), 367.

“INTRODUÇÃO DE UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO E UMA RADIAÇÃO ISOTRÓPICA NOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE SZEKERES”

IOAV WAGA

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Nazira Abache Tominura/UFF

Jaime Tiomno (CBPF)

Marcelo José Rebouças (CBPF)

Rio de Janeiro, 25 de agosto de 1983