

ITZHAK RODITI

O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO: TRANSFORMAÇÕES DE ESCALA  
E MUDANÇAS DE ESQUEMA. SUA UTILIDADE NA TEORIA  
QUÂNTICA DE CAMPOS

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1983-

– a Ana, Pablo e Sonia

– a ETTY e Henri

## AGRADECIMENTOS

Ao Mignaco, que preencheu todos os sentidos da palavra orientar, e de quem espero, nos anos que virão, seguir como companheiro.

À Sonia pelo amor, à Ana pelo carinho, ao Pablo pela alegria . Sem os três este trabalho sequer chegaria a engatinhar.

A todos os meus amigos e amigas do CBPF, em especial aos que formam o DCP, e que me proporcionaram um ambiente solidário, cujas impressões, certamente, trarei sempre dentro de mim.

À Helena, cujo esforço hábil, transformou minha caligrafia, nem sempre legível, neste trabalho.

Ao CBPF e ao CNPq, pelos recursos de infra-estrutura e pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

A partir de um estudo da teoria de perturbações, explicita-se o grupo de renormalização no sentido mais amplo de Stueckelberg e Peterman, no qual se consideram além das mudanças de escala, as de esquema de renormalização. Examinamos neste trabalho, as consequências provenientes da utilização deste grupo.

Como proposta inicial verificamos qual informação podemos obter, na CDQ, utilizando somente os dados a priori independentes pelas mudanças de esquema. Neste sentido, propusemos uma aproximação racional para a função de Callan-Symanzik  $\beta(g)$ , que nos fornece um parâmetro de expansão útil na região perturbativa e que permite também num estudo semi-clássico o confinamento.

Num espectro mais abrangente, propomos um método de se obter um melhoramento dos resultados perturbativos. Fazemos uso então de uma variação de todos os parâmetros relevantes do grupo de renormalização. Essencialmente pedimos que quantidades físicas calculadas perturbativamente sejam insensíveis por mudanças do grupo de renormalização, até uma dada ordem. Encontramos então um sistema algébrico de equações com o qual chegamos ao melhoramento desejado. Os resultados assim obtidos são comparados com os de outros métodos existentes.

## SUMMARY

Starting from a study of perturbation theory, the renormalization group is expressed, not only for changes of scale but also within the original view of Stueckelberg and Peterman, for changes of renormalization scheme. We investigate here the consequences that follow from using that group.

A first proposal is to see what information can be obtained, in QCD, considering only the terms coming from perturbation theory that are, from the beginning, scheme independent. With this in mind, we show that a rational approximation for the Callan-Symanzik function  $\beta(g)$  provides a useful expansion parameter for the perturbative regime and also allows for confinement in a semiclassical approach.

Following a more general point of view, we propose a method to obtain an improvement of the perturbative results for physical quantities. We use for this a variation of all the relevant parameters of the renormalization group. Essentially we ask that physical quantities, obtained from perturbative calculations, to be insensitive by changes of the renormalization group, up to a given order. We then find an algebraic system of equations that conveys to the desired improvement. The results obtained with this method are compared with those of other existing methods.

## SUMARIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
SUMMARY .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABELAS .....	ix
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO II</u> - TEORIA DE CAMPOS .....	4
2.1 - TEORIA DE CAMPOS: FUNCIONAIS GERADORES E MATRIZES .....	4
2.2 - AS DIVERGÊNCIAS NA SÉRIE PERTURBATIVA .....	12
2.3 - REGULARIZAÇÃO E RENORMALIZAÇÃO .....	15
<u>CAPÍTULO III</u> - O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO .....	18
3.1 - RENORMALIZAÇÃO PERTURBATIVA .....	18
3.2 - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO .....	21
3.3 - EQUAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO .....	25
3.4 - DILATAÇÕES E A EQUAÇÃO DE CALLAN-SYMANZIK .....	29
<u>CAPÍTULO IV</u> - DIFERENTES PRESCRIÇÕES .....	36
4.1 - MUDANÇAS DE PRESCRIÇÃO .....	36
4.2 - COMPARANDO DIFERENTES ESCOLHAS DE PRESCRIÇÃO .....	42
<u>CAPÍTULO V</u> - TEORIA DE PERTURBAÇÕES E INDEPENDÊNCIA PELO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO .....	50
5.1 - QUAIS PARÂMETROS FIXAM UMA PRESCRIÇÃO .....	50
5.2 - QUANTIDADES FÍSICAS E INVARIANTES DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO .....	54
5.3 - O PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	58
5.4 - O MÉTODO DA CONVERGÊNCIA APARENTE MAIS RÁPIDA (FAC) .....	62
5.5 - UM PROBLEMA APARENTE EM $N=-1$ .....	64
5.6 - A INCLUSÃO DAS MASSAS .....	67

<u>CAPÍTULO VI</u> - APLICAÇÕES DE $\overline{PMS}$ .....	69
6.1 - APLICAÇÕES A CDQ .....	69
6.2 - APLICAÇÕES A EDQ .....	72
<u>CAPÍTULO VII</u> - CONCLUSÃO .....	76
<u>APÊNDICE A</u> - MS, $\overline{MS}$ e MOM .....	80
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	86

LISTA DE FIGURAS

FIG.

PÁG.

3.3.1 - Possíveis comportamentos da função $\beta(\lambda)$ para casos em que temos $\lambda_{IV}^* = 0$ (a) e $\lambda_{UV}^* = 0$ (b) .....	29
--	----

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>	<u>PÁG.</u>
6.1.1 - Valores do aproximante $R_{e^+e^-}$ , para $Q/\Lambda_{MS} = 50$ e $100$ com $N_f = 3$ , nos esquemas $\overline{PMS}$ , $PMS$ , $FAC$ e $MS$ .....	71
6.1.2 - Valores do aproximante $R_{qq}$ , para $Q/\Lambda_{MS} = 50$ e $100$ com $N_f = 4$ , nos esquemas $\overline{PMS}$ , $PMS$ , $FAC$ e $MS$ .....	72
6.2.1 - O momento magnético anômalo do elétron $R = (g-2)$ na terceira aproximação, para os esquemas $\overline{PMS}$ , $\overline{FAC}$ e $EF$ (subtração na camada de massa) .....	74
6.2.2 - O momento magnético anômalo do muon na terceira aproximação para os esquemas $\overline{PMS}$ , $FAC$ e $EF$ .....	75

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Se por um lado os cálculos perturbativos na eletrodinâmica quântica possibilitaram uma grande compatibilidade entre resultados teóricos e medidas experimentais, nos dando confiança neste tratamento da teoria quântica de campos, também fizeram com que, mais modernamente, nos fortalecêssemos em preconceitos inerentes a estas aplicações na eletrodinâmica. Mais especificamente, na teoria de calibre<sup>( 1, 2, 3 )</sup> não-abeliana, renormalizável<sup>( 4 )</sup>, a cromodinâmica quântica<sup>( 5, 6 )</sup>, descobriu-se a propriedade de liberdade assintótica<sup>( 7, 8 )</sup>, tornando possível para descrever fenômenos típicos de altas energias o uso de perturbações. Entretanto a experiência anterior com a eletrodinâmica impediu durante um bom período enxergar a maneira correta de se focar a utilização da série perturbativa.

O ponto central é que na eletrodinâmica temos um parâmetro de expansão, a constante de estrutura fina, que se define de uma maneira "natural" nesta teoria pelo limite clássico. Agora, na cromodinâmica não é vantajosa a realização de uma escolha semelhante; qualquer constante que se defina, a uma dada energia, se revela inapropriada para o estudo de processos em energias maiores. De fato um aspecto importante é que não conhecemos o resultado exato nem da eletrodinâmica quântica nem da

cromodinâmica nem de nenhuma outra teoria quântica de campos, neste mundo de quatro dimensões. Apenas perturbativamente consegue-se obter alguns resultados. Porém justamente aí surgem as ambigüidades pois dependendo da maneira como se renormalize a teoria encontraremos valores diferentes em melhor ou pior acordo com o experimento, e isto acontece com todas as teorias renormalizáveis calculadas perturbativamente.

O grupo de renormalização<sup>(9,10)</sup> permite formular na teoria este conjunto de ambigüidades, em especial investigando-se o subgrupo das transformações de escala<sup>(11,12,13)</sup> é que se obteve o resultado já citado da liberdade assintótica.

Temos como objetivo neste trabalho explorar o grupo de renormalização no caso mais geral, em que se incluem todas as possíveis mudanças de esquema de renormalização, e como completar a informação da teoria de perturbação. O fato de que o resultado exato da teoria deve ser independente pelo grupo nos aponta dois caminhos, um em que utilizamos dados que são desde o início independentes e outro em que devemos aprender, justamente a ter controle sobre a informação que depende do grupo.

No Capítulo II, utilizando uma formulação funcional, procuramos estabelecer os pontos que nos são importantes da teoria quântica de campos, principalmente fixando a linguagem e levantando a questão da renormalização.

A renormalização e o grupo de renormalização serão vistos no Capítulo III, aonde explicitaremos com uso da renormalização multiplicativa o que é o conjunto de transformações que chamamos de grupo de renormalização. Ainda neste capítulo examinaremos as chamadas equações do grupo de renormalização, sua relação com a teoria canônica de transformações de escala e com a

análise dimensional.

Em seguimento, no Capítulo IV, analisamos as mudanças de prescrição propriamente ditas, procurando então desenvolver a idéia de manipularmos apenas a informação que a priori independe das mudanças de prescrição. É possível então mostrar que para escolhas específicas se satisfazem os requerimentos básicos para que possamos desprezar massas no limite de altas energias. Com o mesmo ponto de vista mas em outro regime estudamos também, via uma aproximação semi-clássica, a influência das mudanças de esquema sobre o problema do confinamento para quarks estáticos.

No quinto capítulo veremos como fixar uma prescrição sem nos referirmos a uma prescrição de base e com esta informação escrevemos as equações gerais do grupo de renormalização, também para as quantidades físicas que devem ser independentes pelo grupo. Nos cálculos perturbativos esta invariância se perde, propomos então uma maneira de, dentro deste nível, recuperarmos parte desta invariância. Analisamos também outras propostas neste sentido e procuramos mostrar as vantagens e limitações da que realizamos.

O Capítulo VI traz algumas aplicações do método que desenvolvemos, e aí comparamos valores calculados em diferentes esquemas.

Finalmente, no Capítulo VII, apresentamos nossas conclusões.

## CAPÍTULO II

### TEORIA DE CAMPOS

#### 2.1 - TEORIA DE CAMPOS: FUNCIONAIS GERADORES E MATRIZ S

A teoria quântica relativística de campos combina, por construção, a simetria relativística com uma interpretação probabilística ligada à quantização das variáveis dinâmicas. Este quadro teórico se revelou extremamente adequado ao estudo da física de partículas elementares. Já a partir dos primeiros trabalhos de Heisenberg e Pauli, no sentido de se construir a eletrodinâmica quântica (EDQ), apenas com a aproximação de Born conseguiram-se resultados surpreendentemente compatíveis com a experiência. Por outro lado, entretanto, a teoria continha quantidades divergentes que por muito tempo foram motivo de preocupação e dúvida quanto à validade da teoria. Com o desenvolvimento da renormalização <sup>(14,15,16)</sup> na teoria de perturbação, foi dado um passo decisivo na solução destes problemas e na evolução da física de campos quânticos.

As quantidades infinitas às quais nos referimos se relacionam diretamente à dificuldade de se definir produtos de campos em um mesmo ponto, como foi reconhecido por Bohr e Rosenfeld <sup>(17,18)</sup> no caso do campo eletromagnético. Surge portanto a necessidade de descrevermos os campos quânticos como distribuições com valores em operadores e dar um sentido ao pro

duto de campos através de uma interpretação adequada de suas singularidades. Este programa foi desenvolvido e existe uma extensa literatura <sup>(19,20,21)</sup> dedicada a uma construção rigorosa (axiomática) da teoria.

Seguindo uma abordagem tradicional, mais elementar, não estaremos interessados em todas as definições e questões da teoria axiomática, apenas estabeleceremos a partir de uma teoria lagrangiana a linguagem necessária aos problemas que queremos investigar. Vamos definir os objetos, para nós relevantes, dentro de uma teoria de campo escalar  $\phi(x)$  e ao final generalizaremos para a EDQ e a cromodinâmica quântica (CDQ).

Para um campo escalar com interação quártica,  $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ , temos uma densidade lagrangiana  $L$  na forma <sup>(22)</sup>

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \quad . \quad (2.1.1)$$

A fim de estudarmos a dinâmica da teoria desejamos encontrar as funções de Green. Estas podem ser obtidas, de modo elegante, utilizando-se métodos funcionais similares ao desenvolvido por Schwinger <sup>(16,22)</sup>. O método consiste em modificar a ação,

$$S = \int d^4x L \quad (2.1.2)$$

adicionando um termo de fonte  $\int d^4x J(x)\phi(x)$  (onde  $J(x)$  é uma função escalar) e em seguida construir um funcional  $Z[J]$ , integrando a exponencial da ação modificada no espaço dos campos, cuja medida denotamos por  $D[\phi]$ . O resultado é o funcional <sup>(22)</sup>

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= N \int D[\phi] \exp\left[i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + J\phi \right)\right] \\
 &= N \exp\left[-i \frac{1}{4!} \lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4\right] \int D[\phi] \exp\left[i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right)\right] \\
 &= N \exp\left[-i \frac{1}{4!} \lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4\right] \exp\left[-\frac{i}{2} \int d^4u d^4v J(u) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \Delta_F(u-v)J(v)\right] \quad (2.1.3)
 \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_F(z) = \frac{i}{16\pi^4} \int d^4k' e^{-ik'z} \cdot \frac{i}{k'^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (2.1.4)$$

e  $N$  indica uma constante de normalização de tal forma que  $Z[0] = 1$ . A importância deste funcional,  $Z[J]$ , é que derivando funcionalmente em relação a  $J(x)$  é possível obter os momentos com respeito a  $\phi$  da integral na eq. (2.1.3) e estes são precisamente as funções de Green.

Não sabemos porém resolver exatamente integrais funcionais em que apareçam potências maiores que bilineares em  $\phi$ . Para obtermos uma aproximação devemos expandir  $Z[J]$  em potências de  $\lambda$ .

As funções de Green  $G^n$ , de  $n$ -pontos, são o valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo dos campos  $\phi$  <sup>(22)</sup>

$$G_{\text{dis}}^n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle, \quad (2.1.5)$$

com o produto ordenado definido por

$$T\phi(x_1), \dots, \phi(x_n) = \sum_P \theta(t_{p_1}, \dots, t_{p_n}) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad , \quad (2.1.6)$$

onde a soma  $\tilde{\epsilon}$  sobre todas as permutações dos índices e a função  $\theta$  força a condição

$$t_{p_1} \geq t_{p_2} \geq \dots \geq t_{p_n} \quad .$$

Conforme dissemos, estas funções são obtidas derivando  $Z[J]$   $n$  vezes em relação a  $J$  e tomando o ponto  $J=0$ , isto é,

$$(-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = G_{disc}^n(x_1, \dots, x_n) \quad . \quad (2.1.7)$$

Se mostra então que de (2.1.3) podemos obter as várias contribuições perturbativas às funções de Green. Em termos gráficos podemos associar uma linha a cada propagador  $\Delta_F(x-y)$  e anéis às integrações sobre produtos de propagadores, de modo a obtermos diagramas do tipo:

para a função de dois pontos

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad ; \quad (2.1.8)$$

para a de quatro pontos

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad , \quad (2.1.9)$$

e sucessivamente.

Como vemos,  $Z[J]$  produz as funções  $G^n$  que têm componentes conexas e desconexas. O funcional  $W[J]$  que nos fornece apenas as funções de Green conexas  $G^n$  é definido por,

$$Z[J] = \exp i W[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J \quad . \quad (2.1.10)$$

A interpretação é que  $Z[J]$  nos fornece a amplitude de probabilidade de que o sistema esteja num estado de vácuo  $|0\rangle$  para  $t = \infty$  quando ele estava no estado  $|0\rangle$  para  $t = -\infty$ , sob ação de  $J(x)$ . Notemos que se requer que  $J(x) \rightarrow 0$  para  $|t| \rightarrow \infty$ .

Da estrutura das funções de Green aparece outro funcional útil, aquele que gera as funções de vértice  $\Gamma^{(n)}$  amputadas e irredutíveis por uma partícula (IIP). Isto quer dizer que elas são compostas apenas de gráficos que não possuem linhas externas e que não podem ser separados em dois quando rompemos apenas uma de suas linhas. Chamaremos este funcional de  $\Gamma[\phi]$ . Ele pode ser obtido através de uma transformação de Legendre funcional em  $W[J]$  <sup>(23)</sup>,

$$W[J] = \Gamma[\phi_c] + \int dx J(x) \phi(x) \quad (2.1.11)$$

$$\phi = \frac{\delta}{\delta J} W[J], \quad \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta J} = -J(x) \quad . \quad (2.1.12)$$

Derivando  $\Gamma[\phi]$ , n vezes, em relação a  $\phi$  obteremos os  $\Gamma^{(n)}$ ,

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1), \dots, \delta \phi(x_n)} \right|_{\phi=0} = \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad . \quad (2.1.13)$$

Note-se que da invariância por translação, os  $\Gamma^{(n)}$  dependem apenas de  $(n-1)$  diferenças  $(x_i - x_j)$  <sup>(22,23)</sup>. O mesmo, é claro, é válido para as funções de Green.

Por meio de uma transformação de Fourier, podemos escrever as funções de Green conexas e as IIP no espaço dos momentos,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \exp[i \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j] \cdot [(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)] G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.1.14)$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \exp[i \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j] \cdot [(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.1.15)$$

A fim de descrever os processos físicos devemos construir a matriz  $S$  <sup>(22,24,25)</sup>; esta é o operador que liga estados de partículas livres entre um tempo muito anterior (infinito) e um muito posterior (também infinito) relativamente a um dado evento de interesse. Se chamamos de  $|j\rangle_{-\infty}$  os estados nos tempos  $(-\infty)$ , os elementos de matriz do operador  $S$  são,

$$S_{fi} = {}_{+\infty}\langle f | i \rangle_{-\infty} \quad (2.1.16)$$

Seguindo Lehmann-Symanzik-Zimmermann, podemos obter a matriz  $S$  partindo das funções de Green. Para tal, devemos tirar

os polos dos propagadores, tomar o limite da camada de massa ( $p^2 = m^2$ ) e projetar sobre as funções de onda dos estados inicial e final. Podemos resumir este processo utilizando um funcional gerador. À semelhança da eq. (2.1.3) temos que <sup>(22)</sup>

$$S = : \exp \left[ \int d^4x \phi(x) \left( \square + m^2 \right) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] : Z[J] \Big|_{J=0} , \quad (2.1.17)$$

onde na exponencial devemos entender que estamos tomando o produto normal e  $\phi(x)$  é visto como operador de campo <sup>(22,24)</sup> (o do lagrangiano original) e não como uma função.

Para finalizar esta seção vamos escrever o funcional gerador da EDQ e o da CDQ <sup>(22,26)</sup>. No primeiro caso  $Z$  é da forma:

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int D[A] D[\psi] D[\bar{\psi}] \cdot \\ \cdot \exp \left\{ i \int d^4x \left\{ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\xi} (\partial_\lambda A^\lambda)^2 + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J_\mu A^\mu \right\} + iG \right\} . \quad (2.1.18) \end{aligned}$$

Temos nesta expressão o lagrangiano usual da EDQ, os termos de fonte  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  e  $J_\mu$  que têm papel análogo ao  $J$  no caso do campo escalar (lembramos porém que  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  satisfazem uma álgebra de Grassmann e não são invariantes de calibre) e um termo

$$F_\xi[A] = \int d^4x \left\{ - \frac{1}{2\xi} (\partial_\lambda A^\lambda)^2 \right\} + G \quad (2.1.19)$$

onde

$$\exp[iG] = \int D[\Delta] \exp[-i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \Delta)^2] \quad (2.1.20)$$

e

$$\Delta = \text{função de calibre da transformação, } A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Delta \quad .$$

$F_\xi[A]$ , comparece ao lidarmos com o problema da fixação de calibre e não interfere no cálculo da matriz S. No caso de teorias abelianas, como EDQ, o termo de fantasma  $\exp[iG]$  é eliminado na normalização, sem interferir com a unitariedade da teoria. O mesmo não ocorre para teorias de calibre não abelianas, como a CDQ.

Para a CDQ o funcional é definido por

$$Z[k, \bar{k}, J] = N \int D[G] D[q] D[\bar{q}] D[\zeta] D[\zeta^*] \cdot \exp[i \int d^4x \{ L_{\text{eff}} + J_a^\mu G_{a\mu} + \bar{k}q + \bar{q}k \}] \quad (2.1.21)$$

$$L_{\text{eff}} = L + \frac{1}{2\zeta} (\partial^\mu G_{a\mu}) (\partial^\mu G_{a\nu}) + \frac{1}{2} \zeta_a^* (\delta_{ab} \square^2 + gf_{abc} G_c^\mu \partial_\mu) \zeta_b$$

$$L = - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \bar{q}(i\not{D} - M)q$$

$$D^\mu = \partial^\mu + igG^\mu$$

$$G^\mu = \frac{1}{2} \lambda_a G_a^\mu \quad .$$

$\lambda_a$  são os geradores do grupo  $[SU(3)]_{\text{COR}}$  na representação fundamental ;

$G_a^\mu$  são os campos de calibre ;

$q, \bar{q}$  são os espinores que representam os quarks ;

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu + ig[G^\mu, G^\nu] ;$$

$g$  é a constante de acoplamento ;

$\xi$  é o parâmetro de fixação de calibre ;

$f_{abc}$  são as constantes de estrutura de  $SU(3)$  ;

$\zeta_a^*$  e  $\zeta_a$  são campos escalares com uma estatística de Fermi-Dirac e são chamados de fantasmas; eles com-  
parecem para preservar a unitariedade, não in-  
terferindo com a dinâmica subjacente, no senti-  
do que não definem campos interpolantes assintó-  
ticos físicos.

## 2.2 - AS DIVERGÊNCIAS NA SÉRIE PERTURBATIVA

Ao avaliarmos a seguinte contribuição conexa ( cf .  
eqs. (2.1.3) e (2.1.4) )

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= (-i\lambda)^2 \int d^4z d^4x \cdot \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(z-z') \cdot \\
 &\cdot \Delta_F(z-z') \Delta_F(x_3-z') \Delta_F(x_4-z') \quad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

na representação dos momenta (eq. (2.1.15)) chega-se a

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= [(-i\lambda) (2\pi)^4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \prod_{n=1}^4 \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}] \cdot \\
 &\cdot (i\lambda) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2-m^2+i\epsilon)} \cdot \frac{1}{[(k'-k_3-k_4)^2-m^2+i\epsilon]} \cdot
 \end{aligned}
 \tag{2.2.2}$$

Verifica-se na eq. (2.2.2) que a integral aí presente é divergente. No Apêndice A consideramos mais em detalhe esta expressão.

As questões que se colocam agora são: há outras divergências quando progredimos na série perturbativa? Se houverem, elas podem ser sistematizadas ou se tornarão incontroláveis?

Do exemplo acima vemos que a divergência ocorre devido à integral dos propagadores que formam um circuito fechado (anel). Estes anéis estão contidos nos diversos termos perturbativos das funções  $IIP \Gamma^{(n)}$  e a simples contagem de potências, nas integrais que aí surgem, nos permite obter o grau de divergência.

Existe uma relação simples entre o número de anéis (A) e o número de linhas (I) e vértices (V) dos  $\Gamma^{(n)}$ , esta é <sup>(22)</sup>:

$$A = I - V + 1 \tag{2.2.3}$$

Para as ordens mais baixas é fácil nos convenceremos da relação acima. Nas ordens mais altas podemos usar um raciocínio indutivo, pois se em uma linha acrescentamos 1 anel



passamos de I para I+2 e de V para V+1, com o que se chega a

$$I + 2 - (V+1) + 1 = A + 1 \quad . \quad (2.2.4)$$

Há também uma relação entre o número,  $n$ , de pontos que se ligam a linhas externas, com  $I$  e  $V$

$$n = 4V - 2I \quad . \quad (2.2.5)$$

De novo podemos nos convencer por intermédio da indução.

Da contagem de potências temos que o grau de divergência  $D_\Gamma$  de um diagrama  $\Gamma^{(n)}$  será

$$D_\Gamma = 4L - 2I \quad ; \quad (2.2.6)$$

utilizando as eqs. (2.2.3) e (2.2.5) temos

$$D_\Gamma = 4 - n \quad , \quad (2.2.7)$$

o que significa que o grau  $D_\Gamma$  de um diagrama depende só do número de argumentos da classe de funções a que pertence e não da ordem na qual foi calculado. Podemos verificar na eq. (2.2.7) que há somente dois tipos de divergência para a teoria  $\lambda\phi^4$ , a saber:

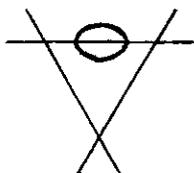
$$n = 2 \quad , \quad \Gamma^{(2)} \quad , \quad D_\Gamma = 2 \quad (\text{quadrática}) \quad ; \quad (2.2.8)$$

$$n = 4 \quad , \quad \Gamma^{(4)} \quad , \quad D_\Gamma = 0 \quad (\text{logaritmica}) \quad . \quad (2.2.9)$$

Deste modo, ficam respondidas as perguntas formuladas inicialmente.

Devemos, porém, ser cuidadosos na análise das contri-

buições perturbativas, pois é claro que mesmo funções aparentemente convergentes podem incluir gráficos contendo inserções divergentes. Por exemplo, para a função 11P de 6 argumentos,  $D_{\Gamma} = -2$ , porém o diagrama,



(2.2.10)

contém uma divergência. Constitui o âmago do conceito de renormalização que estas contribuições podem ser tratadas, sem gerar problemas ulteriores, num quadro sistemático e recorrente. As funções de Green não são observáveis da teoria, mas as quantidades relevantes podem chegar a ser escritas com sua ajuda. A análise dos problemas considerada até aqui nas funções de Green aplica-se sem mudanças significativas.

Teorias em que a divergência das expressões perturbativas depende apenas da classe de funções e não da ordem de aproximação são chamadas de renormalizáveis. Em oposição, as que não satisfazem este critério são ditas não-renormalizáveis.

### 2.3 - REGULARIZAÇÃO E RENORMALIZAÇÃO

O aparecimento de integrais divergentes na série perturbativa nos faz pensar sobre o sentido de todo este formalismo. A maneira de enfrentarmos este problema é não mais considerarmos a interpretação ingênua de que estamos utilizando funções cujas integrais nos dão valores infinitos, mas sim que estamos trabalhando com integrais regularizadas no senti

do das distribuições, como discutido por Gelfand e Shilov <sup>(27)</sup>.

A idéia essencial é que ao invés da integral divergente de uma função (ou distribuição)  $g(x)$ , o objeto de interesse é o funcional,

$$(g, \chi) = \int g(x)\chi(x)dx \quad , \quad (2.3.1)$$

onde a função de teste  $\chi$  [cf. ref. <sup>(27)</sup>] é escolhida de forma a dar sentido à integral (2.3.1).

Desde os trabalhos de Bohr e Rosenfeld e o aparecimento da formulação da teoria das distribuições de Schwartz <sup>(28)</sup> definem-se os campos  $\phi$  como sendo distribuições com valores em operadores <sup>(29)</sup>, formalmente

$$\int \phi(x)\chi(x)dx = \phi(\chi) \quad , \quad (2.3.2)$$

onde  $\chi$  são funções de teste  $C_0^\infty$  (cf. refs. <sup>(27,21)</sup>). A partir de um conjunto de axiomas que permitem caracterizarmos uma medida de probabilidade  $d\mu$  <sup>(19,30)</sup> mostra-se que é possível construirmos o campo  $\phi(\chi)$  <sup>(29,30)</sup>. Seguindo essencialmente o caminho axiomático Epstein e Glaser <sup>(20)</sup> mostraram, de um modo bastante preciso, que é possível se construir uma série perturbativa que fornece, a cada ordem, termos finitos satisfazendo os requerimentos dos axiomas.

No enfoque usual, mais heurístico, da renormalização, que discutiremos no capítulo seguinte, o processo consiste em eliminarmos a parte divergente das integrais em questão. Isto pode ser realizado com a inclusão de contratermos no lagrangiano; feito isto, ao impormos condições sobre as partes finitas

das funções de Green estamos fixando uma renormalização. Há duas observações a fazer: uma é que com este procedimento aparece de maneira clara, o caráter multiplicativo da renormalização, o que permite estabelecer a existência do grupo de renormalização; a outra é que quando nos referimos a divergências, ou eliminação de divergências, para interpretar corretamente seu significado devemos nos referir à visão mais rigorosa da teoria de distribuições. Nesse sentido, a regularização dimensional <sup>(31,32)</sup> emerge bastante naturalmente do contexto dessa teoria.

## CAPÍTULO III

### O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

#### 3.1 - RENORMALIZAÇÃO PERTURBATIVA

Vimos anteriormente como surgem divergências na série perturbativa das funções de Green e da matriz S. Queremos agora estudar o processo pelo qual podemos manipulá-las de modo a obter resultados que nos forneçam valores físicos bem definidos.

Investiguemos as funções  $\Gamma^{(n)}$ , que para M anéis têm o seguinte aspecto :

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \propto \int \prod_{i=1}^M \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4} \prod_{\ell=1}^I \frac{1}{(k_\ell^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (3.1.1)$$

onde  $k_\ell$  é uma combinação linear de momenta externos e sobre anéis. Suponhamos agora um caso especial em que  $\Gamma^{(n)}$  tem grau  $D_\Gamma \geq 0$  (cf. Cap. II) mas é internamente convergente, ou seja, todos os subgráficos  $\gamma$  contidos em  $\Gamma^{(n)}$  têm grau  $D_\gamma < 0$ . Se diferenciarmos  $\Gamma^{(n)}$  com respeito a algum momentum externo  $p_i$  teremos termos da forma

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{1}{(k_\ell^2 - m^2 + i\epsilon)} = \frac{2k_\ell}{(k_\ell^2 - m^2 + i\epsilon)^2},$$

ou seja, no limite  $p_i \rightarrow \infty$  temos  $p_i/p_i^4$  ao invés de  $1/p_j^2$ . O efeito da derivação é portanto diminuir o grau  $D_\Gamma$  de ao menos

uma unidade. Se continuarmos neste caminho um certo número de vezes teremos um resultado que é convergente. A parte divergente de  $\Gamma^{(n)}$  foi assim "eliminada" pelas derivações, o que indica que ela deve ter a forma de um polinômio de grau menor ou igual a  $D_\Gamma$  nos momentos  $p_1, \dots, p_{n-1}$ . Notemos que este caso especial de  $\Gamma$  que examinamos é usualmente chamado de "primitivamente divergente" (PD) e, pelo visto anteriormente no caso de  $\lambda\phi^4$  estes são apenas  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$ . Incluindo no lagrangiano um contra termo  $\Delta L$  cuja contribuição no desenvolvimento perturbativo anu le exatamente a parte divergente de  $\Gamma^{(n)}$  podemos, neste caso, chegar a um valor bem definido para a função em questão. Nem to dos os gráficos I1P são PD, um gráfico I1P com M anéis pode ter subgráficos de  $M'$  anéis ( $M' < M$ ) que necessitem uma redefinição com a utilização de contra termos.

O processo geral é iterativo, tomamos um lagrangiano  $L_0$  com o qual definimos propagadores e vértices, construímos contra termos  $\Delta L_1$  que eliminem as divergências nos gráficos I1P de um anel gerados por  $L_0$ , em seguida com o novo lagrangiano  $L_1 = L_0 + \Delta L_1$  geramos gráficos de dois anéis e construímos  $\Delta L_2$ , e segue-se deste modo até fazer todas as sub-integrações, convergentes. Teremos desse modo, o lagrangiano <sup>(33)</sup>

$$L = L_0 + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots \quad (3.1.2)$$

A prova geral de que a renormalização gera de fato amplitudes perturbativas finitas é extremamente trabalhosa e se deve principalmente aos trabalhos de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, e Zimmermann (BPHZ) <sup>(34,35,36)</sup>.

Voltando à eq. (3.1.2) teremos que a forma dos contra

termos fica limitada pelo fato que a divergência é um polinômio cujo grau não pode exceder  $D_\Gamma$ . No caso especial da teoria de campo escalar com interação  $\lambda\phi^4$  vimos (cf. Cap.II) que só podemos ter  $D_\Gamma \leq 2$ , isto leva <sup>(22,23)</sup> a que os únicos contratermos desta teoria são proporcionais a  $(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)$ ,  $\phi^2$  e  $\phi^4$ . Observemos que para construir os contratermos devemos escolher um método de regularização (cf. Apêndice A) que nos possibilite separar uma parte divergente e outra finita nas integrais sobre anéis. Os observáveis da teoria não dependem do método utilizado e são funções das variáveis cinemáticas.

A expressão geral do lagrangiano que produz amplitudes  $\Gamma^{(n)}$  finitas será <sup>(20,22,23)</sup>

$$L_R = \frac{1}{2} Z_3 \{ \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R \} - \frac{1}{2} (m_R^2 - \delta m^2) \phi_R^2 - \frac{1}{4!} Z_1 \lambda_R \phi_R^4 \quad (3.1.3)$$

As constantes de proporcionalidade  $Z_1$ ,  $Z_3$  e  $\delta m^2$  são chamadas de constantes de renormalização (o sub-índice "R" indica o lagrangiano que gera amplitudes finitas). Podemos da eq. (3.1.3) definir os seguintes campos e constantes:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z_3^{1/2} \phi_R \quad , \\ m_0^2 &= Z_3^{-1} (m_R^2 - \delta m^2) \quad , \\ \lambda_0 &= Z_3^{-2} Z_1 \lambda_R \quad . \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Encontra-se

$$L_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0) - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4 \quad (3.1.5)$$

Ora, este é idêntico ao lagrangiano inicial com o qual obtivemos termos divergentes. A diferença formal entre as funções de Green  $G_0^{(n)}$  e  $G_R^{(n)}$  é a normalização das linhas externas; internamente quando utilizamos a eq. (3.1.4) teremos os cancelamentos necessários, a relação entre as duas será <sup>(22)</sup>

$$G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_R, m_R) = Z_3^{-n/2} G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_0, m_0) \quad , \quad (3.1.6)$$

e para as funções IIP

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_R, m_R) = Z_3^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_0, m_0) \quad . \quad (3.1.7)$$

Notemos porém que estas funções  $G_0$  e  $\Gamma_0$  do lagrangiano  $L_0$  não são matematicamente consistentes, mas que a regra multiplicativa das eqs. (3.1.4), (3.1.6) e (3.1.7) nos possibilita expressar as propriedades decorrentes da renormalização.

### 3.2 - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

A inclusão no lagrangiano de contratermos, permite chegar a uma teoria com amplitudes finitas, entretanto resta uma ambigüidade (cf. Cap. II) pois pode-se incluir arbitrariamente termos cujas constantes sejam finitas e tenham a mesma estrutura que os contratermos <sup>(10,22,33)</sup>. Quer dizer, mesmo após a eliminação dos "infinitos" resta um conjunto de parâmetros arbitrários, o que resulta em que há não uma única, mas uma infinidade de teorias renormalizadas. Uma maneira de especifi-

car um dado conjunto de parâmetros se realiza ao fixarmos as constantes da teoria, massas, constantes de acoplamento, etc., dando valores específicos para as funções IIP relevantes em valores especiais dos momenta envolvidos.

Por exemplo, para a teoria  $\lambda\phi^4$  podemos pedir

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} &= 1 \\ \Gamma_R^{(4)}(p_1 p_2 p_3 p_4) \Big|_S &= -\lambda \\ S = p_i \cdot p_j &= (4\delta_{ij} - 1) \frac{m^2}{3} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Estas condições traduzem que o propagador da partícula tem um polo de resíduo 1 na camada de massa ( $p^2=m^2$ ), e que no ponto simétrico S o vértice renormalizado tem o valor da constante de acoplamento. A arbitrariedade consiste em que podemos escolher quaisquer outros pontos  $p_i$  para fixar valores, como

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\alpha^2} &= -im^2 \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\zeta^2} &= 1 \\ \Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\lambda \end{aligned} \quad (3.2.2) \quad \begin{cases} p_1 = \lambda_1 \\ p_2 = \lambda_2 \\ p_3 = \lambda_3 \\ p_4 = \lambda_4 \end{cases}$$

com os  $\lambda_i$  vetores arbitrários.

Após termos eliminado as divergências e fixado as partes finitas, temos escolhida uma prescrição de renormalização (R).

Este estado de coisas seria insatisfatório caso as predições físicas dependessem de escolhas diferentes de prescrição. O que ocorre é mais simples, pois as mudanças nas constantes arbitrárias se refletem numa mudança nos parâmetros físicos da teoria, de forma a haver uma compensação deixando o valor das quantidades físicas mensuráveis da teoria invariantes.

Se nos transportamos à regra definida na equação (3.1.4), podemos estabelecer uma relação entre diferentes esquemas de renormalização R e R', pois teremos para ambos

$$\phi_0 = Z_3^{1/2}(R)\phi_R = Z_3^{1/2}(R')\phi_{R'} ,$$

$$m_0^2 = Z_3^{-1}(R)(m_R^2 - \delta m_R^2) = Z_3^{-1}(R')(m_{R'}^2 - \delta m_{R'}^2) , \quad (3.2.3)$$

$$\lambda_0 = Z_3^{-2}(R)Z_1(R)\lambda_R = Z_3^{-2}(R')Z_1(R')\lambda_{R'} ,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
 \phi_{R'} &= z_3^{-1/2}(R', R) \phi_R \quad , \\
 m_{R'}^2 &= z_3(R', R) m_R + \delta(R', R) \quad , \\
 \lambda_{R'} &= z_3^2(R', R) z_1^{-1}(R', R) \lambda_R \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
 z_3(R', R) &= \frac{Z_3(R')}{Z_3(R)} \quad , \\
 z_1(R', R) &= \frac{Z_1(R')}{Z_1(R)} \quad , \\
 \delta(R', R) &= \delta m_{R'}^2 - z_3(R', R) \delta m_R^2 \quad .
 \end{aligned}$$

É importante observar que os  $z$ 's agora relacionam quantidades finitas e são portanto também finitos.

Das regras acima podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 z(R, R) &= 1 \quad , \\
 z(R, R') &= z(R', R)^{-1} \quad , \\
 z(R'', R) &= z(R'', R') z(R', R) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

seja para  $z_1$  ou  $z_3$ .

Ou seja, o conjunto das transformações entre prescrições pareceria formar um grupo. A este conjunto chamaremos de Grupo de Renormalização (GR). Entretanto, o produto na eq.(3.2.5) só está satisfatoriamente definido, na forma geral acima, para transformações sucessivas ou para alguns sub-conjuntos de GR (33, 37), como por exemplo, quando ligamos diferentes prescrições apenas por transformações de escala nos pontos em que definimos  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$ . Deste grupo U(1) de transformações de escala é possível tirar importantes conclusões, como veremos nas seções seguin-

tes. Devemos perceber também que a unidade  $z(R,R)$  depende de havermos privilegiado uma dada prescrição como a origem.

### 3.3 - EQUAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

O que costuma-se chamar de equação do grupo de renormalização é exatamente aquela que se obtém no estudo da invariância por transformações de escala. A primeira derivação desta equação que trouxe resultados importantes foi a de Gell - Mann-Low <sup>(38)</sup>. Anos mais tarde Callan e Symanzik <sup>(12,13)</sup> obtiveram uma equação semelhante como consequência do estudo geral de transformações canônicas de escala <sup>(12)</sup>.

Vamos agora derivar esta equação tentando manter o ponto de vista da seção anterior. Escolhamos uma prescrição para um ponto de subtração  $\mu$  de modo que

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= \mu^2 - m^2, \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= 1, \\ \Gamma_R^{(4)} \Big|_{S_\mu} &= -\lambda, \quad S_\mu = p_i p_j = (4\delta_{ij} - 1) \frac{\mu^2}{3}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

quer dizer, as funções  $\Gamma$  dependem agora também do ponto  $\mu$ . Então para  $\mu$  e  $\mu'$  distintos teremos,

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m, \lambda, \mu) = z_3^{n/2}(\mu, \mu') \Gamma_R(p_1, \dots, p_n, m', \lambda', \mu'); \quad (3.3.2)$$

em especial se  $\mu' = \mu e^{-c}$  podemos especificar a variação em  $\mu$  com o parâmetro  $c$  e toda a dependência em  $c$  está contida nos  $z_i$ 's (39)

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m, \lambda, \mu e^c) = z_3^{n/2}(c) \Gamma_{R'}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, z_1(c) z_3^{-2}(c) \lambda, z_m^{-1}(c) m, \mu) \quad (3.3.3)$$

Note-se que estamos considerando uma constante multiplicativa,  $z_m$ , para a massa. Adiante justificaremos a escolha.

Derivando ambos os lados da eq. (3.3.3) por  $c$  e tomando o valor no ponto  $c=0$ , obtém-se (cf. Ref. (39))

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial c} \Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m, \lambda, \mu e^c) \right|_{c=0} &= \left( \frac{\partial z_3^{n/2}}{\partial c} \right) \Gamma_{R'}^{(n)}(p_1, \dots, \\ &\dots, p_{n-1}, z_1 z_3^{-2} \lambda, z_m^{-1} m, \mu) \Big|_{c=0} \\ &+ z_3^{n/2} \left. \frac{\partial}{\partial c} \Gamma_{R'}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, z_1 z_3^{-2} \lambda, z_m^{-1} m, \mu) \right|_{c=0} ; \end{aligned}$$

notando que  $\left. \frac{\partial}{\partial c} \right|_{c=0} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$  chega-se a

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m, \mu) = 0, \quad (3.3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \lambda^2 \left. \frac{\partial}{\partial c} \ell n z_3 \right|_{c=0} - \lambda \left. \frac{\partial}{\partial c} \ell n z_1 \right|_{c=0} , \\ \gamma_m(\lambda) &= \left. \frac{\partial}{\partial c} \ell n z_m \right|_{c=0} , \\ \gamma(\lambda) &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial}{\partial c} \ell n z_3 \right|_{c=0} . \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

A escolha de uma renormalização finita multiplicativa para a massa foi conveniente para a derivação da eq. (3.3.4), entretanto ela só é totalmente justificada quando estamos trabalhando num esquema de renormalização independente das massas, como os propostos por Weinberg<sup>(40)</sup> e 't Hooft<sup>(41)</sup>. Neste caso, as funções  $\beta$ ,  $\gamma_m$  e  $\gamma$  só dependem da constante de acoplamento  $\lambda$ . Para as situações em que a renormalização depende da massa a equação do grupo de renormalização tem forma idêntica à eq. (3.3.4) mas  $\beta$ ,  $\gamma_m$  e  $\gamma$  dependerão também da massa renormalizada  $m$  (42,43).

A equação (3.3.4) é linear de primeira ordem e sua solução é facilmente obtida (cf. Sneddon<sup>(44)</sup>) utilizando-se as equações das características

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \lambda(\kappa) = \beta(\lambda(\kappa)) \quad ; \quad \lambda(\kappa) = \lambda, \quad \kappa = 1 \quad , \quad (3.3.6)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} m(\kappa) = (-1 + \gamma_m(\lambda(\kappa))m(\kappa)) \quad ; \quad m(\kappa) = m, \quad \kappa = 1 \quad ,$$

e a identidade dimensional

$$\Gamma^{(n)}(\kappa p_1, \dots, \kappa p_{n-1}, \lambda, m, \mu) = \kappa^{4-n} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \frac{m}{\kappa}, \frac{\mu}{\kappa}) \quad , \quad (3.3.7)$$

$$\Gamma^{(n)}(\kappa p_1, \dots, \kappa p_{n-1}, \lambda, m, ) = \kappa^{4-n} e^{-n \int_{\lambda}^{\lambda(n)} dz \frac{\gamma(z)}{\beta(z)}} \quad .$$

$$\cdot \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda(\kappa), m(\kappa), \mu) \quad . \quad (3.3.8)$$

Quer dizer, ao escalarmos os momenta a dinâmica do problema passa a ser controlada pelas variáveis auxiliares  $\lambda(\kappa)$  e  $m(\kappa)$ , as

quais chamamos respectivamente de constante de acoplamento efetiva e massa efetiva.

A solução na forma da eq. (3.3.8) é especialmente importante no estudo do comportamento assintótico ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) da teoria; um dos pontos importantes é, por exemplo, a condição imposta pela eq. (3.3.6) de que para  $\kappa \rightarrow \infty$  teremos  $m(\kappa) \rightarrow 0$  apenas se  $\gamma_m < 1$ . Em geral, esta condição é assumida (mas não demonstrada) nas teorias em que trabalhamos. Apenas para teorias em que há liberdade assintótica (i.e.  $\lambda(\kappa) \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$ ) podemos em certos casos afirmar, com segurança, que  $m \rightarrow 0$  no limite de altas energias.

Da eq. (3.3.4) e do desenvolvimento perturbativo pode-se calcular as funções  $\beta(\lambda)$ ,  $\gamma_m(\lambda)$  e  $\gamma(\lambda)$  que terão a forma de séries infinitas em  $\lambda$  ;

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \beta_0 \lambda^2 + \beta_1 \lambda^3 + \dots \quad , \\ \gamma_m(\lambda) &= d_0 \lambda + d_1 \lambda^2 + \dots \quad , \\ \gamma(\lambda) &= f_0 \lambda^2 + f_1 \lambda^3 + \dots \quad .\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

Podemos perceber das relações acima e da eq. (3.3.6) que o sinal do coeficiente  $\beta_0$  é crucial para o andamento da teoria pois se  $\beta_0 > 0$ , temos um crescimento de  $\lambda$  com  $\kappa$ ; no caso oposto,  $\beta_0 < 0$ , teríamos  $\lambda$  decrescendo. Um estudo detalhado da estrutura de pontos fixos (pontos  $\lambda^*$  tais que  $\beta(\lambda^*) = 0$ ) de diversas teorias mostra <sup>(45,46)</sup> que as únicas teorias em que  $\beta_0 < 0$ , são as teorias de calibre não abelianas. Mais especificamente, se  $\lambda(\kappa) \rightarrow \lambda^*$  quando  $\kappa \rightarrow \infty$  dizemos que  $\lambda^*$  é um ponto fixo ultravioleta ( $\lambda_{UV}$ ); se  $\lambda(\kappa) \rightarrow \lambda^*$  quando  $\kappa \rightarrow 0$  dizemos que o ponto

fixo é infravermelho ( $\lambda_{IV}$ ). Em termos gráficos podemos ter

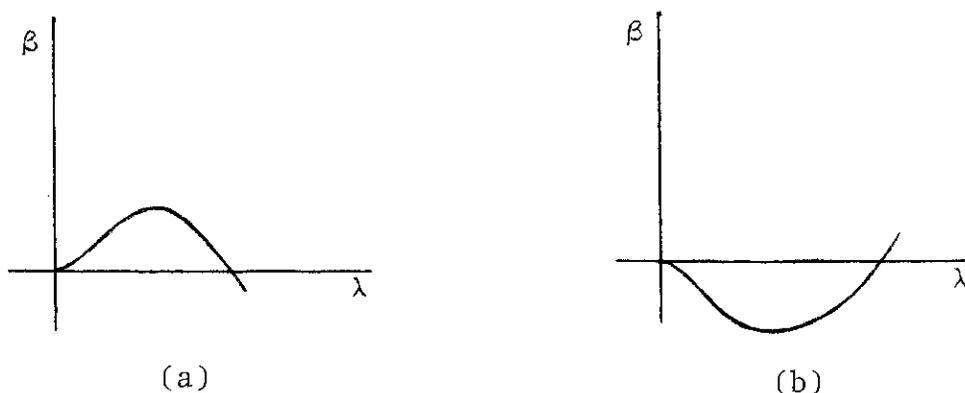


Gráfico 3.3.1 - Possíveis comportamentos da função  $\beta(\lambda)$  para casos em que temos  $\lambda_{IV}^* = 0$  (a) e  $\lambda_{UV}^* = 0$  (b).

Se  $\lambda(1) = \lambda$  pertence ao intervalo  $(\lambda_{UV}, \lambda_{IV})$  do gráfico 3.3.1a, quando  $\kappa \rightarrow \infty$   $\lambda(\kappa) \rightarrow \lambda_{UV} \neq 0$ , este é o caso para  $\beta_0 > 0$ . Quando  $\beta_0 < 0$  estamos na situação do gráfico 3.3.1b, em que para  $\kappa \rightarrow \infty$   $\lambda(\kappa) \rightarrow \lambda_{UV} = 0$ , que é o significado da liberdade assintótica.

### 3.4 - DILATAÇÕES E A EQUAÇÃO DE CALLAN-SYMANZIK

Por razões históricas e de completicidade, nos parece importante incluímos aqui uma breve exposição sobre a invariância de escala (dilatações), sua quebra e a subsequente solução por intermédio da equação de Callan-Symanzik.

Uma dilatação <sup>(11,47)</sup> é uma transformação sobre as coordenadas do espaço-tempo, da forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = e^{\alpha} x^\mu \quad . \quad (3.4.1)$$

Podemos denotar uma transformação deste tipo infinitesimal por

$$\delta_D x^\mu = - \epsilon x^\mu . \quad (3.4.2)$$

Investigando o efeito conjunto de dilatações e transformações do grupo de Poincaré<sup>(48)</sup> pode-se encontrar relações de comutação entre os geradores D, M e P respectivamente, das dilatações, do grupo de Lorentz e das translações.

$$[D, M^{\mu\nu}] = 0 \quad (3.4.3)$$

e

$$i [D, P^\mu] = P^\mu .$$

De posse das relações acima podemos escrever a ação de D sobre campos escalares quânticos como

$$\delta_D \phi(x) = i [D, \phi(x)] = (x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + d) \phi(x) , \quad (3.4.4)$$

onde d é chamado a dimensão de escala do campo.

Visto de outro modo, mais simples, as dilatações transformam o campo da seguinte maneira

$$\phi(x) \rightarrow e^{d\alpha} \phi(e^\alpha x) ; \quad (3.4.5)$$

a transformação infinitesimal associada é

$$\left. \frac{d\phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = (x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + d) \phi(x) . \quad (3.4.6)$$

Utilizando procedimentos canônicos podemos encontrar uma corrente de dilatação pelo teorema de Noether<sup>(10)</sup>

$$D^\mu = x_\nu \theta^{\mu\nu} . \quad (3.4.7)$$

$\theta^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum simétrico de Belinfante <sup>(49)</sup>.

A quadridivergência desta corrente é dada por

$$\partial_\mu D^\mu = \theta_\mu^\mu . \quad (3.4.8)$$

Quando a teoria tem massa nula,

$$\theta_\mu^\mu = 0 , \quad (3.4.9)$$

ou seja, há conservação da corrente de dilatação. Entretanto, quando há massa,

$$\theta_\mu^\mu = m^2 \phi^2 , \quad (3.4.10)$$

o que quer dizer que o termo de massa quebra a invariância da teoria por transformações de escala.

No estudo da quebra de simetria nas dilatações <sup>(11,47)</sup> é possível estabelecer um tipo de identidade de Ward, que relaciona as funções de vértice

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) , \quad (3.4.11)$$

com funções de vértice obtidas a partir da inserção de  $\theta_\mu^\mu = m^2 \phi^2$  a momentum transferido nulo

$$\Gamma_\Delta^{(n)}(0, p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) \quad (3.4.12)$$

que surgem de produtos do tipo

$$\langle 0 | T(m^2 \phi^2(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle . \quad (3.4.13)$$

Estas identidades têm a seguinte forma <sup>(11,47)</sup>

$$\begin{aligned} [m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + n(1-d)] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) = \\ = \Gamma_{\Delta}^{(n)}(0, p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Porém, nos cálculos explícitos estas identidades não são satisfeitas nesta forma. O ponto é que não se considerou de forma adequada para a obtenção da eq. (3.4.14) a renormalização da teoria. Para chegarmos às verdadeiras identidades de Ward é necessário modificar o lagrangiano por meio de um contratermo que dê origem as inserções de massa nos  $\Gamma^{(n)}$ , teremos então um lagrangiano que parametrizaremos por  $s$  <sup>(50)</sup>.

$$L^S = L_R - s Z_3 \frac{\Delta m^2}{2} \phi^2 \quad (3.4.15)$$

O termo em  $s$  é uma espécie de prova da corrente de dilatação. Este termo de inserção implica num deslocamento da massa, o que por sua vez implica numa mudança na constante de acoplamento, porque os contratermos de massa são usados nas funções de quatro pontos que definem  $\lambda$ .

$L^S$  dará origem a funções IIP renormalizadas

$$\Gamma^{S(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2(s), \lambda(s)) \Big|_{s=0} = \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) \quad (3.4.16)$$

e a derivação em  $s$  nos dá as funções com inserção,

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma^{S(n)} \Big|_{s=0} = - \Gamma^{(n)}(0; p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) \quad (3.4.17)$$

O efeito do contratermo adicional é o de uma renorma-

lização finita  $Z(s)$  (33,39,41) (cf. seção 3.2 e 3.3)

$$Z(s)^{n/2} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) = \Gamma^{s(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2(s), \lambda(s)) \quad (3.4.18)$$

Derivando em relação a  $s$  ambos os lados de (3.4.18), obtém -  
-se (50)

$$\begin{aligned} [\alpha(\lambda)m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda)] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) = \\ = \Gamma_{\Delta}^{(n)}(0; p_1, \dots, p_{n-1}, m^2, \lambda) \quad , \quad (3.4.19) \end{aligned}$$

onde

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2Z(s)} \left. \frac{dZ(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad ,$$

$$\beta(\lambda) = \left. \frac{d\lambda(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad ,$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{m^2(s)} \left. \frac{dm^2(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad .$$

Com as seguintes condições para as partes finitas

$$\Gamma^{(2)}(0; p^2, m^2, \lambda) = -im^2 \quad \text{em} \quad p^2 = m^2 \quad ;$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial p^2}(p^2, m^2, \lambda) &= i \end{aligned} \right\} \quad p^2 = m^2 \quad ;$$

$$\Gamma^{(4)}(p_1, \dots, p_3, m^2, \lambda) \Big|_{s=\text{ponto simétrico}} = -i\lambda \quad ,$$

podemos fixar  $\alpha(\lambda) = 1$ .

A equação (3.9.19) corrige a eq. (3.4.14) nos dando as verdadeiras identidades de Ward das transformações de escala. Esta equação tem uma forma semelhante à que derivamos na seção anterior, porém com o termo não homogêneo que vem das inserções. De modo geral, buscamos a solução da eq. (3.4.19) no limite em que podemos desprezar  $\Gamma_\Delta$ ; isto é equivalente a se requerer o limite em que a massa efetiva se anula, o que, como vimos na eq. (3.3.6), equivale a pedir que  $\gamma_m < 1$ .

Neste limite, em que podemos desprezar as massas, e do mesmo modo para teorias com massa nula, a equação de Callan-Symanzik e a eq. (3.3.4) terão a forma

$$[\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\lambda(\lambda)] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, \mu) = 0 \quad (3.4.20)$$

Isto traduz o fato que mesmo teorias invariantes por transformações de escala possuem anomalias nas identidades de Ward.

Pode-se traçar um paralelo com o que vimos das transformações de escala e a análise dimensional<sup>(51)</sup>. Quando estudamos uma teoria sem parâmetros com dimensão de massa, a CDQ com fermions sem massa por exemplo, o lagrangiano é invariante por dilatações. Esperaríamos então, que ao calcularmos uma quantidade  $R(Q)$  ( $Q \equiv$  energia), sem dimensão, como a razão de aniquilação  $\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \equiv R_{e^+e^-}$ , obtenha-se um valor constante; este não é o caso para  $R_{e^+e^-}$ , que apenas no limite assintótico, para altas energias, fornece uma constante.

O que ocorre é que tem-se uma incompatibilidade com o seguinte teorema da análise dimensional e seu corolário:

Uma função  $F$  de apenas duas variáveis  $x$  e  $y$  com dimensão de massa, que seja: adimensional, univocamente definida, e que em sua definição não ocorram constantes com dimensão de massa, somente pode ser função da razão  $x/y$ . Se  $F(\frac{x}{y})$  for independente de  $y$ , então deve ser uma constante.

A maneira de compatibilizar este teorema com a nossa teoria é notando que  $R(Q)$ , na verdade, não satisfaz os requerimentos do teorema; isto porque não temos apenas um único lagrangiano mas uma família (a um parâmetro) de lagrangianos com diferentes  $\lambda$ , e portanto,  $R(Q)$  não é definido univocamente. Deste modo, é possível introduzir na definição de  $R$  uma constante com dimensão de massa. No caso específico da CDQ, a teoria não nos fornece um limite de integração para  $g(\mu)$  (acoplamento efetivo da CDQ) na relação,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g(\mu) = \beta (g(\mu)) \quad . \quad (3.4.21)$$

A equação acima é a maneira que a teoria tem de traduzir a ambigüidade a um parâmetro e não ir de encontro aos teoremas da análise dimensional. Da mesma maneira, a eq. (3.4.20) é uma expressão desta ambigüidade da teoria.

## CAPÍTULO IV

### DIFERENTES PRESCRIÇÕES

#### 4.1 - MUDANÇAS DE PRESCRIÇÃO

Conforme estudamos anteriormente diferentes prescrições podem ser relacionadas por intermédio de renormalizações finitas cujo efeito é uma redefinição das constantes da teoria. Em termos perturbativos podemos ao definirmos uma constante de acoplamento  $g$  numa dada prescrição ligá-la a outra constante  $g'$  por meio de uma série, que no caso da CDQ resulta ser da forma

$$g^2 = g'^2 + a'g'^4 + c'g'^6 + d'g'^8 + \dots \quad (4.1.1)$$

Podemos ver que na primeira ordem as constantes coincidem na sua definição, pois nesta ordem apenas os diagramas do tipo árvore (sem correções radiativas) comparecem. Seguindo com  $g$  como sendo uma constante de base, vamos relacionar  $g$  com outro  $g''$  e depois  $g'$  com  $g''$ .

$$g^2 = g''^2 + a''g''^4 + c''g''^6 + d''g''^8 + \dots \quad (4.1.2)$$

$$g'^2 = g''^2 + \hat{a}g''^4 + \hat{c}g''^6 + \hat{d}g''^8 + \dots \quad (4.1.3)$$

Substituindo  $g''$  na eq. (4.1.1) encontraremos a lei de transformação dos coeficientes para diferentes escolhas de  $g$ ,

$$g^2 = g'^2 + (\hat{a} + a')g'^4 + (c' + 2a'\hat{a} + \hat{c})g'^6 + \\ + (\hat{d} + a'\hat{a} + 2a'\hat{c} + 3c'\hat{a} + d')g'^8 + \dots, \quad (4.1.4)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a'' &= \hat{a} + a' \\ c'' &= c' + 2a'\hat{a} + \hat{c} \\ d'' &= d' + 3c'\hat{a} + 2a'\hat{c} + a'\hat{a}^2 + \hat{d} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Pode-se notar que a relação dos termos de ordem  $g^4$  é bastante simples (puramente aditiva). Mais adiante veremos que estes coeficientes  $a$ 's estão ligados a diferentes escalas da teoria.

Busquemos agora a estrutura de transformações para a função  $\beta$  de Callan-Symanzik (eq. (3.3.6)). Note-se que estaremos utilizando uma forma de  $\beta$  usual da CDQ, mas o raciocínio é geral e pode ser diretamente aplicado para outras teorias que tenham a massa efetiva desprezível assintoticamente. Temos portanto, aplicando  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$  de ambos os lados da eq. (4.1.1),

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g^2 = \beta(g^2) &= -b_0 g^4 - b_1 g^6 - b_2 g^8 - b_3 g^{10} - \dots \\ &= -b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - b'_3 g'^{10} - \dots \\ &\quad + 2a' g'^2 (-b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - b'_3 g'^{10} - \dots) \\ &\quad + 3c' g'^4 (-b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - \dots) \\ &\quad + 4d' g'^6 (-b'_0 g'^4 - \dots) + \dots \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Novamente, substituindo no lado esquerdo da eq. (4.1.6)

a eq. (4.1.1) temos:

$$\begin{aligned}
 & - b_0 (g'^2 + a'g'^4 + c'g'^6 + \dots)^2 \\
 & - b_1 (g'^2 + a'g'^4 + c'g'^6 + \dots)^3 \\
 & - b_2 (g'^2 + a'g'^4 + c'g'^6 + \dots)^4 \tag{4.1.7} \\
 & - b_3 (g'^2 + \dots)^5 + \dots = - b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - b'_3 g'^{10} - \dots \\
 & \quad + 2a'g'^2 (-b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - b'_3 g'^{10} + \dots) \\
 & \quad + 3c'g'^4 (-b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 + \dots) \\
 & \quad + 4d'g'^6 (-b'_0 g'^4 + \dots) \quad .
 \end{aligned}$$

Igualando potências, teremos:

$$\begin{aligned}
 g'^4: & \quad b'_0 = b_0 \\
 g'^6: & \quad b'_1 + 2a'b'_0 = b_1 + 2a'b_0, \dots \quad b'_1 = b_1 \tag{4.1.8} \\
 g'^8: & \quad b'_2 = b_2 + b_1 a' + b_0 (a'^2 - c') \\
 g'^{10}: & \quad b'_3 = b_3 + 2b_2 a' + b_1 a'^2 + 2b_0 (2a'c' - d' - a'^3) \quad . \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Das equações (4.1.8) emerge o importante fato<sup>(39,41)</sup> de que os dois primeiros coeficientes da função  $\beta$  independem da escolha da prescrição, com as condições que foram impostas.

Podemos verificar a consistência das relações dadas na eq. (4.1.5) investigando a transformação dos coeficientes de  $\beta$  que dependem da prescrição (isto é,  $b_2, b_3, \dots$ ). A trans -

formação para  $g'' \rightarrow g$  é formalmente idêntica a  $g' \rightarrow g$ , e portanto,

$$b_2'' = b_2 + b_1 a'' + b_0 (a''^2 - c'') \quad . \quad (4.1.9)$$

Substituindo  $b_2$  pelo valor da eq. (4.1.8), temos

$$\begin{aligned} b_2'' &= b_2' - b_1 a' - b_0 (a'^2 - c') + b_1 a'' + b_0 (a''^2 - c'') \\ &= b_2' + b_1 (a'' - a') + b_0 (a''^2 - a'^2 - c'' + c') \quad . \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Das equações (4.1.5)

$$b_2'' = b_2' + b_1 \hat{a} + b_0 (\hat{a}^2 - \hat{c}) \quad (4.1.11)$$

que é exatamente a relação que esperaríamos para os coeficientes de  $\beta''(g'')$  e  $\beta'(g')$ . Verificamos então que a lei de transformação entre os coeficientes em duas prescrições está embutida na mesma lei para os coeficientes da função  $\beta$ , isto é de certa forma esperado pois  $\beta$  é obtida como uma série em  $g$ . Note mos que estamos nos referindo sempre a um esquema particular em relação a outro; o problema de quais parâmetros fixam uma prescrição sem privilegiar outra será discutido no próximo Capítulo.

Como foi dito, a constante "a" está ligada a diferentes escolhas de escala, a questão é que, como vimos no capítulo anterior, a teoria não nos dá uma condição de contorno para a solução de

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g^2 = \beta(g^2) \quad . \quad (4.1.12)$$

Uma solução perturbativa é (52, 53)

$$g^2(\mu) = \frac{1}{b_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} - \frac{b_1}{b_0^3} \frac{\ln \ln(\mu^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} + O\left(\frac{1}{\ln^3(\mu^2/\Lambda^2)}\right) \quad (4.1.13)$$

e  $\Lambda$  é a escala, um parâmetro livre (5,51,53) que deve ser obtido experimentalmente e está ligado à condição de contorno inexistente na eq. (4.1.12). Celmaster et al. (52,54) mostraram que para

$$g_i^2 = g_j^2 + a_{ij} g_j^4, \quad (4.1.14)$$

$$\frac{\Lambda_i}{\Lambda_j} = e^{a_{ij}/b_0}.$$

Então podemos ver que se fizermos uma transformação de escala em  $\Lambda_j$ , tal que  $\Lambda_j \rightarrow \Lambda_j e^{-a/b_0}$ , teremos

$$\frac{\Lambda_i}{\Lambda_j e^{-a/b_0}} = \frac{e^{a_{ij}/b_0}}{e^{-a/b_0}} = e^{(a_{ij}+a)/b_0}, \quad (4.1.15)$$

ou seja, a lei dada pela eq. (4.1.5), obviamente, quando relacionamos sistemas que tenham a mesma escala,  $a_{ij} = 0$ .

Tendo em vista que os  $b_2, b_3, \dots$  dependem da prescrição, 'tHooft percebeu que a partir de um esquema de base, por exemplo a subtração mínima (41) (MS) da regularização dimensional (40,41), poderia se encontrar uma relação de tal forma que os  $b'_2, b'_3, \dots$ , transformados fossem todos nulos. Sua escolha foi

$$a' = 0 \quad (4.1.16)$$

$$b'_2 = b_2 - b_0 c = 0$$

$$\vdots$$

de modo que seu  $\beta$  é composto apenas dos dois primeiros termos independentes da prescrição

$$\beta(g^2) = -b_0 g^4 - b_1 g^6 \quad . \quad (4.1.17)$$

Com esta escolha e também escolhendo

$$\gamma_m(g) = d_0 g^2 \quad , \quad (4.1.18)$$

't Hooft (52,55,56) mostrou importantes propriedades da estrutura analítica da QCD.

Como foi dito anteriormente, não se mostrou em nenhuma teoria (salvo as de gauge não abelianas como a QCD) que a massa efetiva  $m$  tende a se anular em altas energias. Vimos no Capítulo anterior que a condição para que isto ocorra é que  $\gamma_m(g_{UV}^*) < 1$ .

É curioso notar que se fizermos uma escolha como a de 't Hooft para  $\lambda\phi^4$ , teremos (57)

$$\beta(\lambda) = \frac{3}{2} \lambda^2 - \frac{17}{6} \lambda^3 \quad (4.1.19)$$

$$\gamma_m(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \quad ,$$

ou seja, teremos um ponto fixo UV de valor

$$\lambda_{UV}^* = \frac{9}{17} \quad , \quad (4.1.20)$$

e, portanto,

$$\gamma_m(\lambda^*) = \frac{9}{34} < 1 \quad , \quad (4.1.21)$$

ou seja, nesta prescrição especial a condição é satisfeita. Pa-

ra EDQ porém, a função  $\beta$  até o segundo termo é <sup>(58)</sup>

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2, \quad (4.1.22)$$

o que dá

$$\alpha^* = -\frac{4}{3}, \quad (4.1.23)$$

ou seja, no eixo positivo não temos ponto fixo, mas temos <sup>(59)</sup>

$$\gamma_m(\alpha) = -3\alpha, \quad (4.1.24)$$

e independentemente do valor de  $\alpha$ ,  $\gamma_m < 1$ .

Portanto, nestas prescrições particulares  $\gamma_m < 1$ , e a suposição de que no regime de altas energias podemos desprezar as massas é plausível.

## 4.2 - COMPARANDO DIFERENTES ESCOLHAS DE PRESCRIÇÃO

Uma das primeiras formas de enfrentar o problema de que na CDQ não podemos definir uma prescrição "privilegiada", tal como na EDQ é a normalização na camada de massa, foi procurar prescrições de renormalização que fornecessem previsões quantitativas razoáveis. Estas escolhas se refletem em diferentes constantes de acoplamento "g", em consequência surgiu a idéia de se procurar a melhor constante de acoplamento. Uma das escolhas mais bem sucedidas foi a subtração no espaço dos momenta (MOM) <sup>(52,60,61)</sup> que foi profundamente estudada por Celmaster et al. <sup>(52,54)</sup>. Além desta temos a subtração mínima (MS) <sup>(41)</sup> e suas versões modificadas ( $\overline{MS}$ ) <sup>(6,62)</sup>. Todas estas escolhas estão vin

culadas à normalização dimensional (observemos que no decorrer do texto, salvo menção explícita, estaremos trabalhando numa teoria sem massa). A implementação dos diferentes esquemas é discutida no Apêndice A.

Em função do sucesso dos resultados obtidos com o esquema MOM, Braaten e Leveille<sup>(61)</sup> estudaram como relacionar  $g_{MS}$  e  $g_{\overline{MS}}$  com  $g_{MOM}$ . Uma das razões para tal é que no caso de teorias com massa  $MS$  e  $\overline{MS}$  nos dão parâmetros que independem da renormalização da massa. O resultado para  $\overline{MS}$  é<sup>(61,63)</sup>

$$g_{MOM}^2(\mu) = g_{\overline{MS}}^2 (\mu e^{-t_{MOM}}) \left\{ 1 + [8,319 - 1,257N_f + \frac{213}{16(33-2N_f)}] \frac{g_{\overline{MS}}^4}{(4\pi^2)^2} \right\} \quad (4.2.1)$$

$$t_{MOM} = 1 - \frac{12-N_f}{3(33-2N_f)} \quad , \quad N_f = \text{número de sabores} . \quad (4.2.2)$$

Nosso intuito agora é investigar três diferentes escolhas de prescrição<sup>(64)</sup> na CDQ, seguindo essencialmente o espírito da proposição de 't Hooft que vimos na seção anterior. Nesse sentido, Adler<sup>(65)</sup>, estudando um problema de estática não-abeliana com espécimens de quarks com massa infinita, (i.e.  $N_f = 0$ ), propôs uma função  $\beta$  que retivesse apenas a primeira contribuição,  $\beta_A = -b_0 g^4$ . A escolha de 't Hooft retém os dois primeiros termos independentes da escolha de prescrição, como vimos na eq. (4.1.17). Caminhando na direção de trabalhar apenas com os termos de  $\beta$  independentes da prescrição, podemos pensar numa aproximação racional (RA) para  $\beta$ . Esta escolha, está, de

certa forma, a meio caminho das propostas de Adler e 't Hooft , pois mantêm propriedades boas das duas escolhas. Chega-se a este  $\beta_{RA}^{(64)}$  com o primeiro aproximante de Padé<sup>(66)</sup>

$$\beta_{RA}(g^2) = - \frac{b_0 g^4}{1 - \frac{b_1}{b_0} g^2} , \quad (4.2.3)$$

onde nas escolhas descritas,

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2}{(4\pi)^2} (11 - \frac{2}{3} N_f) , \\ b_1 &= \frac{2}{(4\pi)^4} (102 - \frac{38}{3} N_f) . \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

No âmbito da seção anterior, vimos que a eq. (4.1.8)

$$\begin{aligned} b_0' &= b_0 \\ b_1' &= b_0 \\ b_2' &= b_0(a^2 - c) + b_1 a + b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Para  $\beta_{tH}$  como vimos, escolhem-se  $a=0$  e os outros coeficientes de modo a anular todos os  $b_i'$ ,s ( $i \geq 2$ ), de modo que para  $b_2' = 0$  temos,

$$c = b_2/b_0 . \quad (4.2.6)$$

Para obter  $\beta_{RA}$ , podemos escolher  $a = 0$  e equacionar consistentemente as outras constantes com os da expansão

$$\beta_{RA}(g_{RA}^2) = - b_0 g_{RA}^4 - b_1 g_{RA}^6 - \frac{b_1^2}{b_0} g_{RA}^8 + \dots , \quad (4.2.7)$$

de forma que para  $b_2' = b_1^2/b_0$  encontramos

$$c = \frac{b_2}{b_0} - \frac{b_1^2}{b_0^2} , \quad (4.2.8)$$

e assim por diante.

Ora, escolher  $a = 0$  significa que estamos escolhendo a mesma escala  $\Lambda$  de algum esquema de referência. Por exemplo ,  $\overline{MS}$  para o qual existe calculado o coeficiente  $b_2^{(67)}$

$$b_2 = \frac{2}{(4\pi)^6} \left( \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} N_f + \frac{325}{54} N_f^2 \right) . \quad (4.2.9)$$

Neste caso teremos

$$\begin{aligned} \frac{g_{\overline{MS}}^2}{g_{tH}^2} &= g_{tH}^2 \left( 1 + \frac{b_2}{b_0} g_{tH}^4 \right) , \\ \frac{g_{\overline{MS}}^2}{g_{RA}^2} &= g_{RA}^2 \left( 1 + \left( \frac{b_2}{b_0} - \frac{b_1^2}{b_0^2} \right) g_{RA}^4 \right) . \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Podemos ver que tanto  $b_2/b_0$  como  $b_2/b_0 - b_1^2/b_0^2$  são números pequenos e em especial para  $N_f = 3$  o coeficiente para  $g_{RA}^4$  é menor que para  $g_{tH}^4$ . A idéia é que portanto ambos podem ser relacionados com o esquema MOM de Braaten e Leveille, e pelo menos até terceira ordem na expansão devem dar bons resultados dentro do espírito do esquema MOM. Já para o esquema de Adler encontra-se (63,64) :

$$\begin{aligned} g_{tH}^2 &= g_A^2 \left\{ 1 + \ln \left( \frac{b_1}{b_0} g_A^2 \right) \left( \frac{b_1}{b_0} g_A^2 \right) + \left[ \ln^2 \left( \frac{b_1}{b_0} g_A^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{b_1}{b_0} g_A^2 \right) - 1 \right] \times \left( \frac{b_1}{b_0} g_A^2 \right)^2 + o \left( (g_A^2 \ln g_A^2)^3 \right) \right\} , \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

o que fornece coeficientes grandes nas sucessivas ordens , não

sendo de utilidade como um parâmetro de expansão.

Por outro lado, Adler com esta aproximação de um anel da função  $\beta$  foi capaz de obter um potencial linear que traduz no seu modelo o confinamento. Mais tarde, com T. Piran<sup>(68)</sup> ele utilizou uma outra aproximação, com características de dois anéis que melhorava, em parte, seus resultados. Já com o uso da expressão de dois anéis exata, aparentemente, as propriedades se perderiam<sup>(69)</sup>. O ponto central é a procura de um mínimo não trivial (diferente de  $F_{\mu\nu} = 0$ ) para um lagrangiano efetivo. A proposta usual<sup>(65,70)</sup> é se incorporar na ação efetiva apenas os aspectos do grupo de renormalização da teoria, por intermédio da constante de acoplamento efetiva. Com isto tem-se para ação efetiva

$$S_{\text{eff}}[A] = \int d^4x L_{\text{eff}}(x) \quad ,$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \frac{F^2}{g^2(t)} \quad F^2 = \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad , \quad (4.2.12)$$

$$t \equiv \frac{1}{4} \log (F^2/\mu^2) \quad ,$$

onde  $L_{\text{eff}}$  é o lagrangiano efetivo para os campos  $F_{\mu\nu}$  e que para Adler inclui efeitos de quarks como fontes, e  $g(t)$  é a constante de acoplamento definida como  $(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \equiv \frac{\partial}{\partial t})$

$$\frac{d}{dt} g^2(t) = \beta(g^2(t)) \quad ,$$

ou

$$t = \int_{g_0^2}^{g^2(t)} \frac{dg^2}{\beta(g^2)} \quad . \quad (4.2.13)$$

Utilizando  $\beta_A(g_A^2) = -b_0 g_A^2$  encontra-se (com  $\mu^2 = e x^2$ ) das eqs.

(4.2.12) e (4.2.13)

$$L_{\text{eff}}^A(F^2) = \frac{1}{8} b_0 F^2 \log\left(\frac{F^2}{ex^2}\right) \quad , \quad (4.2.14)$$

de modo que para  $F^2 = x^2$  chega-se a um mínimo negativo

$$L_{\text{eff}}^A(x^2) = -\frac{1}{8} b_0 x^2 \quad , \quad (4.2.15)$$

o que possibilita a Adler a obtenção de um potencial de campo médio linear. Notemos porém que se espera que as aproximações utilizadas sejam válidas nas regiões  $|F^2/ex^2| \ll 1$ , ou  $|F^2/ex^2| \gg 1$ .

Uma possível melhora deste resultado sugeriria que fôssemos para ordens mais altas de  $\beta(g^2)$ . A partir daí, os resultados são controversos.

Utilizando a prescrição de 't Hooft, Elizalde<sup>(69)</sup> obteve para  $L_{\text{eff}}$ :

$$L_{\text{eff}}^{\text{'tH}}(F^2) = \frac{1}{8} b_0 F^2 \left\{ \log\left(\frac{F^2}{ex^2}\right) + 4 \frac{b_1}{b_0} \log\left(\frac{b_0^2}{4b_1} \left| \log \frac{F^2}{ex^2} \right| \right) \right\} . \quad (4.2.16)$$

Com esta forma ele não obteve um mínimo para  $L_{\text{eff}}^{\text{'tH}}$ , entretanto ao incluirmos na aproximação de  $1/g_{\text{'tH}}^2$  termos de  $(\log(\frac{F^2}{ex^2}))^{-2}$  torna a surgir um mínimo para (com  $N_f = 0$ ):

$$y = \log\left(\frac{F^2}{ex^2}\right) \cong 0,636 \quad , \quad (4.2.17)$$

ou

$$F^2 \cong x^2 e^{1.636} \quad . \quad (4.2.18)$$

Pode se notar que tanto este número quanto  $F^2 = x^2$  não estão propriamente na região de validade da aproximação.

Adler e Piran<sup>(68)</sup> propuseram um modelo que incorpora o segundo log ("next to leading log"). Sua fórmula melhorada não leva a um lagrangiano como a eq. (4.2.16). Entretanto,

a primeira derivada do seu lagrangiano com respeito  $\frac{1}{2} F^2$ , que eles escrevem como,

$$\varepsilon(E) = \frac{1}{2} b_0 \left[ \log\left(\frac{E}{k}\right) + 2 \frac{b_1}{b_0} \log \log \left(\frac{E}{k}\right) \right] \quad , \quad (4.2.19)$$

tem um zero para  $E_{\min} = 1.680 k$  ,  
 um valor que ainda não está inteiramente dentro da região esperada. Qualquer expressão como a eq. (4.2.16) leva a negligenciar, nesta região, termos com valores comparáveis aos que se cancelam na eq. (4.2.19).

Agora, se utilizamos  $\beta_{RA}(g^2)$  chega-se a um lagrangiano efetivo <sup>(64)</sup>

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}}^{\text{RA}}(F^2) &= \frac{1}{8} b_0 F^2 \left\{ \log\left(\frac{F^2}{ex^2}\right) + \frac{4b_1}{b_0^2} \log\left(\frac{b_0}{b_0^2} \left| \log\left(\frac{F^2}{ex^2}\right) \right| \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{8} b_0 x^2 e^{y+1} \left\{ y + \frac{4b_1}{b_0^2} \log \frac{b_0}{4} y \right\} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Esta expressão, com todos os termos, fornece um mínimo negativo para  $y_0 \cong 2.458$

$$L_{\text{eff}}^{\text{RA}} \cong - \frac{1}{8} b_0 x^2 \cdot (4\pi)^2 \cdot (0.339) \quad . \quad (4.2.21)$$

Notamos que neste caso

$$\begin{aligned} F &= x^2 e^{3.458} \\ &\cong 30x^2 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

em mais acordo com a região de aproximação utilizada.

À luz de todos estes resultados aproximativos trans-

parece que devemos ser cuidadosos antes de chegar a uma conclusão definitiva sobre a existência de um mínimo da ação efetiva. Devemos mencionar porém que Adler e Piran<sup>(68)</sup> obtêm resultados bastante interessantes para o potencial entre quarks.

## CAPÍTULO V

### TEORIA DE PERTURBAÇÕES E INDEPENDÊNCIA PELO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

#### 5.1 - QUAIS PARÂMETROS FIXAM UMA PRESCRIÇÃO

Já sabemos que apenas os dois primeiros termos de  $\beta$  têm coeficientes que independem da prescrição em teorias com massa nula. Nas eqs. (4.1.8) este fato fica evidente. Podemos nas mesmas equações notar também que os  $b_i$  ( $i \geq 2$ ) dependem linearmente dos termos que controlam a variação de ordem  $O(g^{i+4})$ , a saber

$$\begin{aligned} b_2 &\leftrightarrow c \\ b_3 &\leftrightarrow d \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Até agora estivemos relacionando diferentes esquemas, entretanto queremos agora mostrar como se pode encontrar uma maneira de caracterizar um esquema de renormalização sem privilegiarmos um esquema de base. Com as indicações acima podemos pensar que existem parâmetros independentes, no sentido de controlar as variações de diferentes ordens em  $g$ . Além disso, como nas mudanças entre prescrições os coeficientes de  $\beta$  variam linearmente com os  $c$ ,  $d$ , ..., e  $\frac{\partial g^2}{\partial c} = O(g^6)$ ,  $\frac{\partial g^2}{\partial d} = O(g^8)$  esperamos que os parâmetros  $b_i$  ( $i \geq 2$ ) possam classificar as prescrições. Este pro-

grama foi realizado por Stevenson<sup>(71)</sup> e decorre da visão original de Stueckelberg e Petermann<sup>(9)</sup> sobre o grupo de renormalização.

Vamos mudar um pouco a notação passando de  $g^2$  para  $\alpha$  (incluindo em  $\alpha$  as potências de  $2\pi$  que aparecem nos coeficientes de  $\beta$ ). Observemos mais uma vez que estamos tratando de teorias com massa nula, o que significa que mudar a definição  $\alpha$  é mudar de esquema. Como já estudamos, a função  $\beta(\alpha)$  é definida por

$$\mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = \beta(\alpha) = -b_0 \alpha^2 - b_1 \alpha^3 - b_2 \alpha^4 + \dots, \quad (5.1.2)$$

quer dizer,  $\mu$  controla as variações de  $O(\alpha^2)$ , mais especificamente  $\ln(\frac{\mu}{\Lambda})$  onde  $\Lambda$  implica numa escolha de limite de integração<sup>(\*)</sup>. Se escolhermos  $\tau = b_0 \ln(\frac{\mu}{\Lambda})$  ao invés de  $\mu$ , temos a mesma estrutura para a variação de  $\alpha$ , porém ao invés de  $\beta$  temos  $\frac{\beta}{b_0} \equiv \hat{\beta}$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = -\alpha^2 - \frac{b_1}{b_0} \alpha^3 - \frac{b_2}{b_0} \alpha^4 + \dots \quad (5.1.3)$$

Ao fixarmos  $\tau$ , que equivale a estabelecer o ponto onde realizamos a renormalização, o esquema de renormalização (ER) está amarrado até dois anéis. Isto é semelhante a escolher a identidade de GR nas eqs. (3.2.5). Deste ponto em diante precisaríamos de novos parâmetros  $\omega_2, \omega_3, \dots$ , de tal modo que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_i} = O(\alpha^{i+1}) \quad i = 2, 3, \dots \quad (5.1.4)$$

Investiguemos agora o que é esta dependência de  $\alpha$  nos  $\omega_i$  ( $i \geq 2$ ).

---

(\*) 
$$b_0 \ln \left( \frac{\mu}{\Lambda} \right) = \int_0^a \frac{dx}{\hat{\beta}(x)} - \int_0^\infty \frac{dx}{x^2(1-cx)}$$

Vamos supor como Stevenson<sup>(71)</sup> que a eq. (5.1.4) admite uma ex pansão em potências de  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_i} = N_i \alpha^{i+1} (1 + W_1^i \alpha + W_2^i \alpha^2 + \dots) \quad (5.1.5)$$

onde ainda não sabemos o que são  $N_i$  e os  $W_j^i$ ; entretanto, podemos adiantar que estes coeficientes não podem depender de  $\mu$  (ou  $\tau$ ) a não ser por intermédio de  $\alpha(\mu)$ , a partir essencialmente da análise dimensional ao trabalharmos com uma teoria sem massa; porém como estamos supondo que  $\partial \alpha / \partial \omega_i$  tem uma expansão em potências de  $\alpha$  os  $W$  devem ser independentes de  $\alpha$ . Agora, como o conjunto de parâmetros  $\tau, \omega_i$  ( $i \geq 2$ ) controla diferentes ordens de variação, consideramos que neste sentido eles são independentes, i.e., as derivadas parciais comutam. Para que isto ocorra a única possibilidade é que os coeficientes  $b_i/b_0 \equiv c_i$  ( $c_1 \equiv c, i = 1, 2, \dots$ ) dependam dos  $\omega_i$ , de modo que temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \omega_i \partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \omega_i} \hat{\beta}(\alpha) = N_i (-2\alpha - 3c\alpha^2 - 4c_2\alpha^3 - \dots) (\alpha^{i+1} + W_1^i \alpha^{i+2} + \\ &+ W_2^i \alpha^{i+3} + \dots) - \frac{\partial c_2}{\partial \omega_i} \alpha^4 - \frac{\partial c_3}{\partial \omega_i} \alpha^5 + \\ &+ \dots + \frac{\partial c_i}{\partial \omega_i} \alpha^{i+2} + \dots + \frac{\partial c_{i+j}}{\partial \omega_i} \alpha^{i+j+2} + \dots \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau \partial \omega_i} &= \frac{\partial}{\partial \tau} N_i \alpha^{i+1} (1 + W_1^i \alpha + W_2^i \alpha^2 + \dots) = \\ &= N_i (i+1) \alpha^i (-\alpha^2 - (c\alpha^3 + \dots)) (1 + W_1^i \alpha + W_2^i \alpha^2 + \dots) + \end{aligned}$$

$$+ N_i \alpha^{i+1} (W_1^i (-\alpha^2 - c\alpha^3 + \dots) + \dots) \quad .$$

Igualando potências nas equações acima encontramos

$$\frac{\partial c_2}{\partial \omega_i} = \dots = \frac{\partial c_{i-1}}{\partial \omega_i} = 0$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \omega_i} = N_i (i - 1) \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial c_{i+j}}{\partial \omega_i} = N_i \sum_{n=0}^j (i+j-1-2n) c_n W_{j-n}^i \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (c_0 = W_0 = 1).$$

Surge das eqs. (5.1.7) que os  $c_i$  dependem linearmente dos  $\omega_i$  (a semelhança das eqs. (5.1.1)); este resultado sugere que identifiquemos os  $\omega_i$ 's com os  $c_i$ 's. Os  $\omega_i$ 's devem ser mutuamente independentes, quer dizer que ao identificarmos os coeficientes temos que requerer  $\partial c_{i+j} / \partial \omega_i \equiv \partial \omega_{i+j} / \partial \omega_i = 0$ . Sucede então que de  $c_i \equiv \omega_i$  e da eq. (5.1.7)

$$N_i = \frac{1}{i-1} \quad i = 2, 3, \dots \quad , \quad (5.1.8)$$

e da independência dos  $\omega_i$

$$\frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^j (i+j-1-2n) c_n W_{j-n}^i = 0 \quad , \quad j=1, 2, \dots \quad (c_0 = 1, c_1 = c, W_0 = 1) \quad (5.1.9)$$

Vemos portanto que ao se escolher valores determinados para as constantes  $c_i$  ( $i \geq 2$ ) da função  $\beta$  e para o ponto  $\tau$  estamos caracterizando uma escolha de renormalização.

## 5.2 - QUANTIDADES FÍSICAS E INVARIANTES DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Tendo caracterizado, por intermédio dos parâmetros  $\tau$ ,  $c_i$  ( $i \geq 2$ ), a escolha de prescrição, podemos novamente derivar as equações de GR levando em conta toda a dependência do grupo. Por exemplo, utilizando as regras entre quantidades nuas e renormalizadas (eq. (3.1.4))

$$\Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau, c_i) = Z^{n/2}(\tau, c_i) \Gamma_0^{(n)}(p, \alpha_0) \quad , \quad (5.2.1)$$

derivando por  $\tau$  e  $c_i$  de ambos os lados teremos o conjunto de equações

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \right]_{\alpha \text{ fixo}} + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - n\gamma \Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau) = 0 \quad , \quad (5.2.2)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial c_i} \right]_{\alpha} + \beta_i \frac{\partial}{\partial \alpha} - n\gamma_i \Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau, c_i) = 0 \quad (i \geq 2) \quad ,$$

onde

$$\hat{\beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \quad ; \quad \beta_i = \frac{\partial \alpha}{\partial c_i} \quad ; \quad (5.2.3)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln Z \quad ; \quad \gamma_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_i} \ln Z \quad .$$

A informação que queremos extrair da teoria, são as quantidades físicas, i.e., posição do polo num propagador, elementos de matriz S, etc. Estas quantidades físicas "R" devem ser totalmente independentes da escolha da prescrição, caso contrário teríamos um universo físico diferente para cada escolha. Esta propriedade fundamental da teoria se traduz formalmente nas

seguintes equações

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \right]_{\alpha \text{ fixo}} + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} R = 0 \quad , \quad (5.2.4)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial c_i} \right]_{\alpha \text{ fixo}} + \beta_i \frac{\partial}{\partial \alpha} R = 0 \quad .$$

Apesar de intuitivas as eqs. (5.2.4) podem ser verificadas <sup>(46)</sup>.  
Assumimos aqui que R possui uma expansão perturbativa :

$$R = \alpha^N (1 + r_1 \alpha + r_2 \alpha^2 + \dots) \quad , \quad (N \equiv N^\circ \text{ inteiro}) \quad . \quad (5.2.5)$$

Este é o caso por exemplo para

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \equiv (3 \sum_i q_j^2) (1+R) \quad , \quad (5.2.6)$$

onde neste caso  $N = 1$ .

Com as eqs. (5.2.4) e a expansão da eq. (5.2.5),  
obtemos,

$$\begin{aligned} \alpha^{N+1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial \tau} - N \right) + \alpha^{N+2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial \tau} - N c - (N+1)r_1 \right) + \\ + \alpha^{N+3} \left( \frac{\partial r_3}{\partial \tau} - N c_2 - (N+1)r_2 c - (N+2)r_2 \right) + \dots = 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\alpha^{N+1} \frac{\partial r_1}{\partial c_2} + \alpha^{N+2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial c_2} + N \right) + \alpha^{N+1} \left( \frac{\partial r_3}{\partial c_2} + N W_1^2 + (N+1)r_1 \right) + \dots = 0 \quad ,$$

$$\alpha^{N+1} \frac{\partial r_1}{\partial c_3} + \alpha^{N+2} \frac{\partial r_2}{\partial c_3} + \alpha^{N+3} \left( \frac{\partial r_3}{\partial c_2} + \frac{N}{2} \right) + \dots = 0 \quad .$$

Como as equações acima devem ser satisfeitas para to-

do  $\alpha$ , desde que consideremos que a utilização da expansão perturbativa é um procedimento matematicamente consistente, então a solução é que os coeficientes se anulem identicamente

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} - N = 0 \quad ; \quad \frac{\partial r_1}{\partial c_2} = 0 \quad ; \quad \dots \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial \tau} - Nc_2 - (N+1)r_1 &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial r_2}{\partial c_2} + N = 0 \quad \dots \\ \vdots \end{aligned}$$

A forma geral destas equações é

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial \tau} &= \sum_{n=0}^{i-1} (N+n)r_n c_{i-n-1} \quad , \\ \frac{\partial r_i}{\partial c_j} &= \frac{-1}{(j-1)} \sum_{n=0}^{i-j} (N+n)r_n W_{i-j-n}^j \quad , \quad i \geq j \quad ; \\ &= 0 \quad , \quad i < j \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

com  $c_0 = r_0 = W_0 \equiv 1$  e  $c_1 \equiv c$ .

A partir da integração das eqs. (5.2.9) podemos obter um conjunto de quantidades  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$  que são chamadas invariantes do grupo de renormalização, temos<sup>(71,72,73)</sup>

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \tau - \frac{r_1}{N} \\ \rho_2 &= r_2 + Nc_2 - \frac{(N+1)}{2N} (r_1 + \frac{N}{N+1} c)^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

As quantidades  $\rho_i$  contêm toda a informação do cálculo perturbativo e são invariantes por mudanças de esquema, por construção. Na prática podemos calcular apenas alguns termos da série

perturbativa e neste caso o valor aproximado de R dependerá da prescrição. Se conhecemos i termos de R, o valor aproximado nu ma dada prescrição é

$$R^{(i)} = \alpha_i^N [1 + r_1 \alpha_i + \dots + r_{i-1} \alpha_i^{i-1}] \quad , \quad (5.2.11)$$

onde o índice inferior "i" significa que o acoplamento "α" está definido por β truncado em "i" termos ,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} = - \alpha_i^2 [1 + c \alpha_i + \dots + c_{i-1} \alpha_i^{i-1}] \quad . \quad (5.2.12)$$

Poderíamos pensar em truncar as séries em ordens diferentes, ou utilizar outras aproximações tais como aproximantes de Padé<sup>(64,66)</sup>. Entretanto queremos o valor de  $R^{(i)}$  apenas até a ordem em que temos acesso pelo cálculo explícito de diagramas o que nos permite até uma dada ordem obter os invariantes  $\rho$  (eq. (5.2.10)).

Vejam agora qual o efeito da mudança de prescrição nos aproximantes  $R^{(i)}$  (71,74). Dois esquemas estão ligados por

$$\alpha = \alpha' + a \alpha'^2 + \dots \quad , \quad (5.2.13)$$

e portanto,

$$\alpha^n = \alpha'^n + o(\alpha'^{n+1}) \quad . \quad (5.2.14)$$

Para dois aproximantes  $R_A^{(i)}(\alpha)$  e  $R_B^{(i)}(\alpha')$  temos

$$\begin{aligned} R &= R_A^{(i)}(\alpha) + o(\alpha^{N+i}) \\ R &= R_B^{(i)}(\alpha') + o(\alpha'^{N+i}) \quad , \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Da eq. (5.2.14) nota-se que

$$R_A^{(i)}(\alpha) = R_B^{(i)}(\alpha') + o(\alpha^{N+i}) \quad . \quad (5.2.16)$$

Podemos reescrever a eq. (5.2.16) simbolicamente como:

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial (ER)} = o(\alpha^{N+i}) \quad (5.2.17)$$

o que significa que o efeito de variarmos os parâmetros  $\tau, c_2, \dots, c_{i-1}$  que fixam a prescrição é de, pelo menos,  $o(\alpha^{N+i})$ , para R definido como na eq. (5.2.11).

### 5.3 - O PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

A dependência do resultado perturbativo no esquema de renormalização permite estudar o modo pelo qual este resultado perturbativo seja, o mais possível, uma boa aproximação da quantidade calculada. A proposta, bem sucedida, de Stevenson <sup>(71)</sup> consiste em escolher aquela prescrição que seja menos sensível a mudanças de esquema de renormalização. Este princípio foi por Stevenson chamado de PMS (princípio da menor sensibilidade) e podemos caracterizá-lo ao escolhermos um esquema de modo a minimizar a resposta do resultado a variações do esquema. Este esquema de renormalização para Stevenson (ER=PMS) é obtido com o requerimento de que o resto de  $o(\alpha^{N+i})$  na eq. (5.2.17) se anule.

Exemplificando o processo para um aproximante  $R^{(2)}$

$$R^{(2)} = \alpha_2^N (1 + r_1 \alpha_2) \quad , \quad (5.3.1)$$

apenas a variação em  $\tau$  é relevante; esta nos fornece,

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = (-N + \frac{\partial r_1}{\partial \tau}) \alpha_2^{N+1} - Nc\alpha_2^{N+2} - (N+1)r_1\alpha_2^{N+2} - (N+1)r_1c\alpha_2^{N+3} . \quad (5.3.2)$$

Pedindo a consistência da série perturbativa até a ordem  $\alpha^{N+1}$  pela condição da eq. (5.2.17) os termos de ordem menor que  $\alpha^{N+2}$  se anulam como na eq. (5.2.7), i.e.

$$-N + \frac{\partial r_1}{\partial \tau} = 0 , \quad (5.3.3)$$

que nos fornece o primeiro invariante

$$\rho_1 = \tau - \frac{r_1}{N} . \quad (5.3.4)$$

Ficamos então com (eliminando por conveniência da notação o sub-índice "2")

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = O(\alpha^{N+2}) = -(Nc + (N+1)r_1)\alpha^{N+2} - (N+1)r_1c\alpha^{N+3} . \quad (5.3.5)$$

O que PMS requer é que

$$Nc + (N+1)r_1(\tau) + (N+1)r_1c\alpha(\tau) = 0 . \quad (5.3.6)$$

Resolvendo esta equação transcendente obtém-se os valores ótimos  $\bar{r}_1 = r_1(\bar{\tau})$  e  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{\tau})$  construindo-se então o aproximante  $R_{PMS}^{(2)}$  no esquema de menor sensibilidade.

$$R_{PMS}^{(2)} = \bar{\alpha}^N (1 + \bar{r}_1 \bar{\alpha}) \quad . \quad (5.3.7)$$

Note-se entretanto que a eq. (5.3.6) é uma mistura de termos de ordem  $\alpha^{N+2}$  e  $\alpha^{N+3}$  que aparecem nas eqs. (5.2.7), envolvendo apenas  $c$  e  $r_1$ , as quantidades que vêm das ordens utilizadas de  $R$  e  $\beta$ . PMS neste sentido escapa da teoria de perturbação (como Politzer notou<sup>(75)</sup>) pois mistura termos que se anulam de modos diferentes.

O procedimento de PMS para um aproximante da forma  $R^{(k+1)}$  fornece um sistema de equações transcendentais:

$$\sum_{\ell=0}^k \alpha \sum_{m=\ell}^k (N+m) r_m c_{k+\ell-m} = 0 \quad , \quad (5.3.8)$$

$$\int_0^\alpha \frac{x^{j+2} dx}{[\hat{\beta}^{(k+1)}(x)]^2} = \frac{\alpha^{j-1}}{(j-1)} \frac{[\sum_{\ell=0}^{k-j} \alpha^\ell \sum_{n=0}^{\ell} (N+m) r_m W_{\ell-m}^j]}{[\sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha^\ell \sum_{m=0}^{\ell} (N+m) r_m c_{\ell-m}]} \quad . \quad (5.3.9)$$

(j=2, ..., k)

A solução destas equações fornecerá os valores ótimos  $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k$  e  $\bar{\alpha}$  de modo a termos

$$\bar{R}_{PMS}^{(k+1)} = \bar{\alpha}^N (1 + \bar{r}_1 \bar{\alpha} + \dots + \bar{r}_k \bar{\alpha}^k) \quad . \quad (5.3.10)$$

Contudo, resolver as eqs. (5.3.8) e (5.3.9) requer um procedimento numérico trabalhoso, embora acessível por computador; além disso, como vimos, de um certo modo PMS foge à teoria de perturbação.

A nossa proposta<sup>(76)</sup> para resolver estas questões é nos mantermos no âmbito essencialmente perturbativo, o que no

caso de  $R^{(2)}$  significa pedir que apenas os termos da ordem  $\alpha^{N+2}$  se anulem, de modo que teremos

$$Nc + (N+1) r_1 = 0 \quad . \quad (5.3.11)$$

Isto em outras palavras traduz que estamos no esquema em que  $\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = O(\alpha^{N+3})$ . Estamos portanto pedindo a menor sensibilidade até a ordem subsequente de uma aproximação  $R^{(k+1)}$ . A este critério chamaremos de  $\overline{PMS}^{(76)}$ . Podemos, de uma maneira simples, implementar  $\overline{PMS}$  notando sua equivalência com o requerimento de escolhermos os pontos  $\tau, \dots, c_k$  em que o coeficiente  $r_{k+1}$  seja insensível à variação destes parâmetros. Assim, das eqs. (5.2.9) obtemos um sistema algébrico,

$$\sum_{m=0}^k (N+m) r_m c_{k-m} = 0 \quad , \quad (5.3.12)$$

$$- \frac{1}{j-1} \sum_{m=0}^{k+1-j} (N+m) r_m W_{k+1-j-m}^j = 0 \quad (j=w, \dots, k) \quad . \quad (5.3.13)$$

Outra forma de chegarmos a estas equações é expandindo as eqs. (5.3.9) e pedir a anulação dos termos de menor ordem  $^{(76)}$ .

A solução das eqs. (5.3.12) é da forma  $^{(76,77)}$

$$\tilde{r}_m = \frac{N}{(N+m)} \frac{(k-2m)}{k} \tilde{c}_m \quad (m=1, \dots, k) \quad . \quad (5.3.14)$$

Estes valores especiais  $\tilde{r}_m$  podem ser substituídos nas equações (5.2.10) dos invariantes  $\rho_1, \dots, \rho_k$  que podemos resolver sucessivamente para os  $\tilde{c}_m$  e  $\tilde{\tau}$ . O passo seguinte é resolver para  $\tilde{\alpha}$  utilizando

$$\tilde{\tau} = (\tilde{\alpha})^{-1} + c \ln \left( \frac{c \tilde{\alpha}}{1 + c \tilde{\alpha}} \right) + \int_0^{\tilde{\alpha}} \frac{(\tilde{c}_2 + \dots + \tilde{c}_k x^{k-2})}{(1 + ck)(1 + cx + \dots + \tilde{c}_k x^k)} dx \quad (5.3.15)$$

e obteremos o aproximante  $\frac{R^{(k+1)}}{\overline{PMS}}$ .

$$\frac{R^{(k+1)}}{\overline{PMS}} = \frac{\tilde{\nu} N}{\tilde{\alpha}} (1 + \tilde{r}_1 \tilde{\nu} + \dots + \tilde{r}_k \tilde{\nu}^k) \quad . \quad (5.3.16)$$

A forma de  $\tilde{\tau}$  envolve na eq. (5.3.15) uma escolha conveniente de  $\Lambda$ .

O problema de se resolver k equações transcendentas foi substituído por outro de resolver k-1 equações algébricas e apenas uma equação transcendente. Com motivação levemente diversa, Wrigley<sup>(78)</sup> chegou, independentemente, a resultados semelhantes. No capítulo seguinte compararemos resultados dos dois métodos PMS e  $\overline{PMS}$  e também com outro método conhecido como FAC que descreveremos a seguir.

#### 5.4 - O MÉTODO DA CONVERGÊNCIA APARENTE MAIS RÁPIDA (FAC)

Tanto para PMS como para  $\overline{PMS}$  os valores  $R^{(i)}$  são determinados pedindo-se a menor sensibilidade para mudanças de esquema até uma determinada ordem. Os critérios do tipo FAC<sup>(73,74)</sup>, por outro lado, pedem que aproximantes de ordens adjacentes sejam aproximadamente os mesmos ( $R^{(i)} \cong R^{(i+1)}$ ). Este método, desenvolvido inicialmente por Grunberg<sup>(73)</sup>, foi na verdade uma das primeiras tentativas de se abordar o problema da mudança de prescrição. A idéia original de Grunberg consiste em absorver no

acoplamento  $\alpha$  todas as correções possíveis. Para tal é necessário se escolher um esquema no qual todos os coeficientes  $r_1, r_2, \dots$  se anulem. Se pudéssemos encontrar um tal esquema teríamos (com  $r_1 = r_2 = \dots = 0$ )

$$R = \alpha^N, \quad (5.4.1)$$

que é, em princípio, uma quantidade exata e independente da prescrição. Efetuar esta escolha para um aproximante  $R^{(i)}$  é simples, à semelhança de  $\overline{\text{PMS}}$  basta substituir nos invariantes  $\rho_1, \dots, \rho_{i-1}$  os valores  $r_1 = \dots = r_{i-1} = 0$  e obteremos os valores particulares  $\hat{r}, \hat{c}_1 \dots \hat{c}_{i-1}$  que podem ser substituídos na eq.(5.3.15) com a qual se encontra  $\hat{\alpha}_{\text{FAC}}$ . Feito isto teremos:

$$\hat{R}_{\text{FAC}}^{(i)} = \hat{\alpha}_{\text{FAC}}^N. \quad (5.4.2)$$

De fato, com esta proposta temos um procedimento simples que a cada passo se aproxima do resultado "exato". Neste sentido FAC é bastante atraente. Entretanto cada escolha  $r_i = 0$  em FAC não leva em conta todas as possibilidades do grupo de renormalização como em  $\overline{\text{PMS}}$  (e PMS) e a aplicação de  $\overline{\text{PMS}}$  é tão simples quanto a de FAC. Uma outra ambigüidade em FAC é a escolha  $R = \alpha^N$  que poderia, por exemplo, ser substituída por  $R = \alpha^N e^\alpha$  e neste caso, os coeficientes teriam valores  $r_i = 1/i!$ . Em princípio, nada diferencia uma das duas escolhas como melhor (a não ser uma forma mais simples para  $R = \alpha^N$ ).

Gostaríamos ainda de apontar nesta seção que apesar dos pontos criticados FAC é também um critério alternativo para melhorarmos os valores, calculados perturbativamente, com auxí-

lio da informação dada pelo grupo de renormalização, por intermédio dos invariantes  $\rho_1, \rho_2, \dots$ .

### 5.5 - UM PROBLEMA APARENTE EM $N = -1$

Os momentos da função de estrutura do fóton (6,79,80) podem ser fatorizados de forma a obtermos uma quantidade  $R$  invariante pelo grupo de renormalização e cuja forma é basicamente,

$$R = \frac{1}{\alpha} + r_1 + r_2 \alpha + \dots \quad (5.5.1)$$

Este  $R$  corresponde a um valor para  $N$  (cf. eq. (3.2.5)) igual a  $-1$ .

Substituindo nas eqs. (3.2.7)  $N=-1$ , vemos que em todos os termos aonde  $r_1$  comparece, a menos da ordem  $\alpha^{N+1}$ , ele vem multiplicado por  $(N+1)$  de forma que perderemos toda informação sobre  $r_1$ , que não a utilizada para construir o primeiro invariante (eqs. (3.2.10))  $\rho_1$ . Isto impossibilita, em parte, a aplicação direta de  $\overline{\text{PMS}}$  (também  $\text{PMS}$ ), pois utilizamos exatamente a informação que vem das ordens maiores que  $\alpha^{N+1}$  para encontrar valores otimizados.

Exemplificando, para  $R^{(2)} = \frac{1}{\alpha} + r_1$  temos

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = c \alpha \quad , \quad (5.5.2)$$

que só pode se anular se  $\alpha = 0$ , pois  $c$  é um número que independe da prescrição. Notemos porém, que se tomamos  $\beta$  apenas na

aproximação de um anel temos automaticamente  $\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = 0$ ; e como nesta aproximação,

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (5.5.3)$$

de

$$\rho_1 = \tau + r_1 \quad (5.5.4)$$

obtém-se

$$R^{(2)} = \rho_1 \quad (5.5.5)$$

Portanto, ao tomarmos  $\beta$  apenas com 1 anel  $R^{(2)}$  é idêntico ao invariante  $\rho_1$ .

Procedendo da mesma forma para  $R^{(3)}$ , i.e., usando  $\beta$  de dois anéis (ao invés de três) encontraremos para  $\overline{\text{PMS}}$ :  $r_2 = 0$ ,  $\tilde{r}_1 = \rho_1 - \frac{\rho_2}{c}$  e  $\tilde{\alpha}$  é calculado com  $\tilde{\tau} = \frac{\rho_2}{c}$ . Em outras palavras, a perda de informação em  $r_1$  foi repassada para  $\beta$ .

Em FAC pede-se a anulação dos coeficientes  $r_1, r_2, \dots$ , com  $\beta$  na aproximação de um anel devemos ter também  $R_{\text{FAC}}^{(2)} = \rho_1 = \equiv \frac{1}{\alpha}$ , com  $\beta$  na aproximação de dois anéis teremos

$$\frac{1}{\alpha} = \rho_1 - c \ln \frac{c\alpha}{1+c\alpha} \quad (5.5.6)$$

ou seja, somente no limite  $\alpha \rightarrow \infty$  obtém-se  $\frac{1}{\alpha} = \rho_1 \approx 0$ , o que é, de certa forma, contraditório com o princípio de convergência de FAC.

No âmbito apenas das transformações de escala, que significa utilizarmos somente a primeira das equações (5.2.4), quantidades como o  $R$  da eq. (5.5.1) foram investigadas com a soma dos logaritmos dominantes ("leading logs") (ref. (33)). Das equações de consistência para a variação em  $\tau$  (eqs(5.2.9)),

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} = \sum_{n=0}^{i-1} (n-1)r_n c^{i-n-1} \quad (5.5.7)$$

obtêm-se

$$\begin{aligned}
 r_1 &= -\tau + O(1) \\
 r_2 &= -c\tau + O(1) \\
 &\vdots \\
 r_n &= -c \frac{\tau^{n-1}}{n-1} + O(\tau^{n-2}) \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{5.5.8}$$

A idéia na soma dos logaritmos dominantes, é essencialmente somar as potências maiores de  $c\tau$  (lembrar que  $\tau = b_0 \ln \frac{\mu}{\Lambda}$ ) dos coeficientes  $r_i$  na expansão (5.5.1), o que dá

$$R = \alpha^{-1} (1-\alpha\tau) + c \ln (1-\alpha\tau) + O(1) + \dots
 \tag{5.5.9}$$

Apesar de interessante este formalismo tem duas desvantagens, uma é que não resolve o problema da escolha de prescrição e outra é que não funciona como aproximação assintótica pela presença do polo em  $\tau = 1/\alpha$ . Como assinalado por Crewther <sup>(33)</sup> esta aproximação será válida apenas quando

$$1 - \alpha\tau \gg \alpha
 \tag{5.5.10}$$

Em princípio, uma das razões dos problemas assinalados é que tanto  $1/\alpha$  quanto os momentos da função de estrutura do fóton têm um caráter não perturbativo e aparentemente não podemos, nem devemos, aplicar nestes casos critérios projetados para quantidades que admitam expansões perturbativas.

### 5.6 - A INCLUSÃO DAS MASSAS

Dentro da classe de esquemas de renormalização que não dependem da massa, como os propostos por 't Hooft<sup>(41)</sup> e Weinberg<sup>(40)</sup>, temos que os dois primeiros coeficientes de  $\beta$  e o primeiro coeficiente de  $\gamma_m$  independem da prescrição. Além disso, as equações para  $\beta$  e  $\gamma_m$  são desacopladas,

$$\mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = \beta = \beta_0 \alpha^2 + \beta_1 \alpha^3 + \dots \quad (5.6.1)$$

$$\frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mu} m = \gamma_m = \delta_0 \alpha + \delta_1 \alpha^2 + \dots \quad (5.6.2)$$

Do mesmo modo que para  $\alpha$ , na eq. (5.6.1), a teoria não fornece para  $m$  (eq. (5.6.2)) um limite de integração. Com uma escolha semelhante à que fizemos anteriormente para  $\Lambda$ , podemos definir um limite  $m_0$ , por meio de,

$$\frac{\beta_0}{\delta_0} \ln \frac{m(\tau)}{m_0} = \int \hat{\gamma}_m(\alpha) d\tau = \int_0^\alpha \frac{\hat{\gamma}_m(x)}{\hat{\beta}(x)} dx - \int_0^\infty \frac{dx}{x^2(1+cx)} \quad (5.6.3)$$

onde

$$\hat{\gamma}_m = \frac{\gamma_m}{\delta_0} = \alpha(1 + d_1 \alpha + d_2 \alpha^2 + \dots) \quad (5.6.4)$$

$m_0$  é um parâmetro livre da teoria cujo valor deve ser fixado pela experiência. Da eq. (5.6.3) surge que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial d_1} &= O(\alpha) \\ \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial d_2} &= O(\alpha^2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

Em analogia com o formalismo anterior podemos, dentro deste conjunto de prescrições, utilizar os parâmetros  $\tau, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$  para classificar as renormalizações de acoplamento e massa.

As equações do grupo de renormalização para quantidades físicas serão dadas por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \hat{\gamma}_m \frac{\partial}{\partial m}\right)R &= 0 \quad , \\ \left(\frac{\partial}{\partial c_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial m}\right)R &= 0 \quad , \\ \left(\frac{\partial}{\partial d_i} + \gamma_i^m \frac{\partial}{\partial m}\right)R &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

$\frac{\partial m}{\partial c_i}$  pode ser obtido da eq. (5.6.3) e  $\gamma_i^m \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial d_i}$ , à semelhança de  $\beta_i$ .

O programa de otimização pode, em princípio, dentro destas limitações, ser realizado.

Para o caso mais geral em que a renormalização da massa se refletirá nos coeficientes  $\beta_0, \beta_1, \dots, \delta_0, \delta_1, \dots$ , nem mesmo os primeiros coeficientes serão independentes por mudanças de prescrição e as eqs. (5.6.1) e (5.6.2) serão acopladas. Se quisermos proceder a otimização neste caso, pareceria necessário que realizássemos variações funcionais dos  $\beta_i$ 's e  $\delta_i$ 's. Notando porém, que as renormalizações finitas de  $a$  e  $m$  podem ser caracterizadas pelo valor dos coeficientes no limite em que  $m/\mu \rightarrow 0$ , Politzer <sup>(75)</sup> propôs que estes valores seriam suficientes para parametrizar os diferentes esquemas. Com este enfoque da questão é possível mantermo-nos apenas dentro do conjunto de prescrições apresentado.

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÕES DE $\overline{\text{PMS}}$

#### 6.1 - APLICAÇÕES A CDQ

Várias aplicações<sup>(81,82)</sup> têm sido feitas dos métodos de otimização. Queremos aqui apenas exemplificar a utilização de  $\overline{\text{PMS}}$ , sem o intuito de um estudo completo das quantidades que investigaremos.

Vamos examinar dois exemplos típicos da CDQ: as correções  $R_{e^+e^-}$  para a razão de aniquilação  $e^+e^-$ <sup>(83)</sup>,

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = (3\sum q_i^2)(1+R_{e^+e^-}) \quad , \quad (6.1.1)$$

e o decaimento do quarkonium pseudoescalar<sup>(84)</sup>  $R_{q\bar{q}}$ ,

$$\frac{\Gamma(q\bar{q} \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(q\bar{q} \rightarrow 2\gamma)} = \frac{2\pi^2}{9 e_q^4 \alpha_{ef}^2} R_{q\bar{q}} \quad . \quad (6.1.2)$$

Até a segunda ordem nas expressões perturbativas teremos:

$$R_{e^+e^-}^{(2)} = \alpha(1 + r_{e^+e^-}\alpha) \quad , \quad (6.1.3)$$

$$R_{q\bar{q}}^{(2)} = \alpha^2(1 + r_{q\bar{q}}\alpha) \quad . \quad (6.1.4)$$

Utilizando a regularização dimensional<sup>(31,32)</sup>, na prescrição de subtração mínima (MS), teremos para os coeficientes r,

$$r_{e^+e^-}^{MS} = \frac{365}{24} - \frac{11}{12} N_f - 2b_0 \left[ \zeta(3) - \frac{1}{4} (\ln 4\pi - \gamma) \right] \quad (6.1.5)$$

$$r_{q\bar{q}}^{MS} = \frac{61}{2} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{13}{8} \pi^2 + b_0 (\ln 4\pi - \gamma) \quad (6.1.6)$$

$$b_0 = \frac{33 - 2N_f}{6}$$

$$b_1 = \frac{153 - 19N_f}{12}$$

$$\zeta(3) = 1,202057\dots$$

$$\gamma = 0,577216\dots$$

Com a escolha que fizemos de A no Capítulo V, teremos para MS,

$$\tau = b_0 \ln \left( \frac{Q}{\Lambda_{MS}} \right) + c \ln \frac{2c}{b_0} \quad (6.1.7)$$

Neste esquema os invariantes serão dados por,

$$\rho_1^{e^+e^-} = b_0 \ln \left( \frac{Q}{\Lambda_{MS}} \right) + c \ln \frac{2c}{b_0} - r_{e^+e^-}^{MS} \quad (6.1.8)$$

$$\rho_1^{q\bar{q}} = b_0 \ln \left( \frac{Q}{\Lambda_{MS}} \right) + c \ln \frac{2c}{b_0} - \frac{1}{2} r_{q\bar{q}}^{MS} \quad (6.1.9)$$

Os valores de  $\rho_1^{e^+e^-}$  e  $\rho_1^{q\bar{q}}$  são os que usaremos para encontrar o ponto  $\tilde{\tau}$  de PMS com (cf. eq. (5.3.14))

$$\hat{r}_1 = - \frac{N}{(N+1)} c \quad (6.1.10)$$

Das eqs. (5.2.10) temos

$$\hat{\tau}_{e^+e^-} = \rho_1 e^+ e^- - \frac{1}{2} c \quad (6.1.11)$$

$$\hat{\tau}_{q\bar{q}} = \rho_1 q\bar{q} - \frac{2}{3} c \quad (6.1.12)$$

Agora, substituindo  $\hat{\tau}$  na segunda aproximação:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\hat{\alpha}} + c \ln \frac{c\hat{\alpha}}{1+c\hat{\alpha}} \quad (6.1.13)$$

encontra-se o valor de  $\hat{\alpha}$ .

Nas Tabelas 6.1.1 e 6.1.2 comparamos os valores de  $R$  obtidos com  $\overline{PMS}$ , PMS e FAC, para escolhas específicas de  $\frac{Q}{\Lambda_{MS}}$ .

TABELA 6.1.1 - Valores do aproximante  $R_{e^+e^-}$ , para  $\frac{Q}{\Lambda_{MS}} = 50$  e 100 com  $N_f = 3$ , nos esquemas:  $\overline{PMS}$ , PMS, FAC e MS.

	$Q/\Lambda_{MS} = 50$		$Q/\Lambda_{MS} = 100$	
	$\alpha$	$R_{e^+e^-}$	$\alpha$	$R_{e^+e^-}$
MS	0,045997	0,058768	0,039785	0,049339
FAC	0,065978	0,065978	0,053748	0,053748
PMS	0,070074	0,066193	0,056439	0,053866
$\overline{PMS}$	0,070623	0,066189	0,056724	0,053864

TABELA 6.1.2 - Valores do aproximante  $R_{q\bar{q}}$ , para  $Q/\Lambda_{MS} = 50$  e  $100$  com  $N_f = 4$ , nos esquemas:  $\overline{PMS}$ ,  $PMS$ ,  $FAC$  e  $MS$ .

	$Q/\Lambda_{MS} = 50$		$Q/\Lambda_{MS} = 100$	
	$\alpha$	$R_{q\bar{q}}$	$\alpha$	$R_{q\bar{q}}$
MS	0,050278	0,005342	0,043506	0,003716
FAC	0,133548	0,017835	0,092034	0,008470
PMS	0,143310	0,018062	0,096583	0,008523
$\overline{PMS}$	0,145679	0,018048	0,097301	0,008522

## 6.2 - APLICAÇÕES A EDQ

Estudaremos agora os momentos magnéticos anômalos para o elétron e o muon. Nestes casos deveríamos, em princípio, levar em conta que não estamos numa teoria com liberdade assintótica e a renormalização não faz as massas efetivas serem, necessariamente, nulas em momentos grandes. Entretanto, as quantidades de interesse têm, no cálculo perturbativo, limite finito quando  $m_e$  e  $m_u$  se anulam (com razão  $m_e/m_u$  fixa). Além disso, como na seção anterior, queremos apenas verificar a utilização do  $\overline{PMS}$  na terceira ordem, sem uma maior preocupação com a melhoria dos resultados teóricos da eletrodinâmica. De qualquer forma, é possível estabelecer, como vimos, uma classe de esquemas apropriada ao estudo de teorias com massa, como a EDQ<sup>(85)</sup>.

Na EDQ, temos um esquema de renormalização privilegiado, a renormalização na camada de massa, que nos fornece o aco

plamento  $a_{ef} = \alpha_{ef}/\pi$  ( $\alpha_{ef} = 1/137,035987 =$  constante de estrutura fina). Podemos calcular os invariantes  $\rho$  dentro deste esquema, caracterizando  $\tau_{ef}$  por,

$$\tau_{ef} = \frac{1}{a_{ef}} + c \ln \frac{ca_{ef}}{1+ca_{ef}} + \int_0^{a_{ef}} \frac{c_2^{ef}}{(1+cx)(1+cx+c_2^{ef}x^2)} dx, \quad (6.2.1)$$

onde  $c = 3/4$  e  $c_2^{ef} = -\frac{121}{96}$  foram calculados por De Rafael e Rosner (58).

Na terceira ordem, os coeficientes  $\tilde{r}$  obtidos pela eq. (5.3.14) são,

$$\tilde{r}_1 = 0, \quad (6.2.2)$$

$$\tilde{r}_2 = -\frac{N}{N+2} \tilde{c}_2;$$

das eqs. (5.2.10) teremos,

$$\rho_1 = \tilde{\tau}, \quad (6.2.3)$$

$$\rho_2 = \frac{N(N+1)}{N+2} \tilde{c}_2 - \frac{N}{2(N+1)} c^2,$$

que nos dão os valores  $\tilde{\tau}$  e  $\tilde{c}_2$  para  $\overline{PMS}$ .

Em particular, nesta ordem podemos notar que a diferença entre PMS e FAC será muito pequena, pois o coeficiente  $r_1$  é nulo nas duas situações. Com isto  $\tau = \rho_1$  para ambos, o que nos dá (eq. (5.3.15)) essencialmente,

$$\frac{1}{a_{FAC}} = \frac{1}{a_{PMS}} - (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_2^{FAC}) \tilde{a}_{PMS}. \quad (6.2.4)$$

Da eq. (6.2.4) e dos valores de  $\tilde{c}_2$  e  $c_2^{\text{FAC}}$  decorre que

$$R_{\text{FAC}}^{(3)} \cong R_{\text{PMS}}^{(3)} + O(a^5) \quad . \quad (6.2.5)$$

Para o momento magnético do elétron (muon)  $R = (g-2)$  a expansão tem a forma

$$R^{(3)} = a + r_1 a^2 + r_2 a^3 \quad ;$$

os valores na camada de massa são:

para o elétron <sup>(71)</sup>

$$\begin{aligned} r_1 &= - 0,656956890 \quad , \\ r_2 &= 2.376 \pm 0.05 \quad ; \end{aligned}$$

para o muon <sup>(71)</sup>

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.531564460 \quad , \\ r_2 &= 48,90 \pm 0.1 \quad . \end{aligned}$$

Nas Tabelas 6.2.1 e 6.2.2 comparamos os valores de  $\overline{\text{PMS}}$ , FAC e na camada de massa (EF).

TABELA 6.2.1 - O momento magnético anômalo do elétron  $R = (g-2)$  na terceira aproximação, para os esquemas  $\overline{\text{PMS}}$ , FAC e EF (subtração na camada de massa).

	a	R
EF	0.002322819	0.002319305
FAC	0.002319931	0.002319931
$\overline{\text{PMS}}$	0.002320353	0.002320346

TABELA 6.2.2 - O momento magnético anômalo do muon na terceira aproximação para os esquemas  $\overline{\text{PMS}}$ , FAC e EF .

	a	R
EF	0.002322819	0.002331696
FAC	0.002363907	0.002363907
$\overline{\text{PMS}}$	0.002381120	0.002380822

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÃO

Na teoria de campos a renormalização comparece em três níveis: ao requerermos uma interpretação probabilística da teoria teremos essencialmente a renormalização do vácuo<sup>(21)</sup>; definindo apropriadamente os estados assintóticos da teoria por intermédio da função de dois pontos, estabelecemos as renormalizações da massa e campo; e ao pedirmos também uma definição para uma função ligada à interação (por exemplo, para  $\phi^4$ , a função de quatro pontos), chega-se à renormalização do acoplamento. Foi mostrado por Glimm e Jaffe<sup>(21)</sup>, para casos particulares, que apenas as teorias renormalizadas são matematicamente consistentes. Para o caso geral espera-se que este resultado seja válido.

Perturbativamente, a renormalização se processa por uma reparametrização do lagrangiano, que, como vimos, traz ambigüidades devidas às renormalizações finitas.

O resultado exato da teoria, até agora desconhecido, deve ser insensível a estas ambigüidades; chamamos esta propriedade de invariância pelo grupo de renormalização (GR). Entretanto, na prática, vemos que ao truncarmos a expansão perturbativa o resultado do cálculo de quantidades físicas se torna sensível à escolha de prescrição (EP). Durante muito tempo este fato foi desconsiderado pois na EDQ, teoria de campo protótipo, temos

uma EP (a renormalização na camada de massa) que se adapta bem ao estudo da eletrodinâmica a baixas energias. Mesmo assim já os primeiros estudos de GR<sup>(9,10,38)</sup> indicavam que o acoplamento  $\alpha$  deveria ser substituído pelo acoplamento efetivo  $\alpha(\mu)$ , que leva em conta a escala de energia do processo investigado.

Esta questão se torna mais ambígua na CDQ, onde em nenhuma escala de energia temos uma EP "mais natural" como na EDQ. O problema foi abordado com procedimentos heurísticos, como a escolha das subtrações nos valores cinemáticos dos experimentos, mas sem completamente determinar o que é entendido como "melhor valor" dos parâmetros.

Atualmente se propõe ('t Hooft<sup>(86)</sup>, Stevenson<sup>(87)</sup>) que esquemas de aproximação perturbativa que utilizam a informação do GR são relevantes no estudo da convergência da série perturbativa na CDQ, que embora possa ser divergente, o aprimoramento com o GR permite obter um limite finito.

No aprimoramento de resultados perturbativos por intermédio de escolhas específicas de prescrição, aparece uma questão que é aproveitar a informação "a priori" independente da prescrição, contida nos dois primeiros termos de  $\beta$ . Com o conhecimento usual de aproximantes de Padé escrevemos  $\beta_{RA}$  que tem a forma do primeiro aproximante racional e em princípio contém informação adicional sobre a série de  $\beta$  completa, diferente da utilizada em  $\beta_A$  e  $\beta_{tH}$ . Os resultados mostraram a validade desta aproximação na região perturbativa, como era de se esperar, comparável com a escolha de 't Hooft, enquanto a de Adler não é boa nesta região. No estudo do confinamento pelo método semi-clássico, as diversas aproximações introduzidas para a função  $\beta$  diferem significativamente. Estas diferenças

ocorrem em consequência das diferentes aproximações que se fazem não esclarecerem suficientemente os critérios para incluir ou desprezar, nas expansões, termos que são da ordem do resultado final. Com isto permanece um ponto inconclusivo quanto à aplicabilidade da própria aproximação semi-clássica além do primeiro termo de  $\beta$ .

No estudo sistemático do GR vimos que por intermédio dos coeficientes da função  $\beta$  é possível, para CDQ, ou em geral, teorias com liberdade assintótica, classificar diferentes EP's. A invariância das quantidades físicas pelo GR nos leva à construção, dentro do quadro perturbativo, dos invariantes  $\rho$ , estes nos permitem, a cada ordem, realizar escolhas coerentes dos parâmetros que fixam uma dada prescrição. Com esta informação é possível controlar o problema das ambigüidades.

O  $\overline{\text{PMS}}$  nos permite implementar este programa de maneira consistente com a teoria de perturbações. Este critério requer que escolhamos uma prescrição na qual as quantidades físicas calculadas até uma certa ordem na expansão perturbativa sejam insensíveis por mudanças de prescrição até a ordem subsequente. Os resultados obtidos com  $\overline{\text{PMS}}$  são, como foi visto, significativos e compatíveis com outros critérios alternativos (FAC, PMS). É interessante que o aprimoramento seja eficaz até no caso da EDQ, que pelo já dito, é diferente da CDQ.

No  $\overline{\text{PMS}}$  toda a informação do GR é traduzida no sistema algébrico de eqs. (5.3.12 e 13) combinados com os invariantes  $\rho$ . Esta simplicidade permite que a cada ordem tenhamos uma percepção clara do processo de aprimoramento e da quantidade de informação advinda do GR.

Alguns aspectos das limitações na aplicação do quadro perturbativo se encontram analisando os momentos da função de estrutura do fóton<sup>(6,79,80)</sup>; é possível aí se fatorizar uma quantidade R invariante por GR cujo primeiro termo é uma potência inversa do acoplamento,  $\alpha^{-1}$ . Nos procedimentos de aprimoramento surgem dificuldades neste caso. Há duas questões a serem levantadas; uma é a limitação real dos métodos quando  $N = -1$  a outra é o caráter não perturbativo de  $\alpha^{-1}$  e dos momentos de estrutura do fóton<sup>(80)</sup> dificultando a aplicação do aprimoramento.

A extensão de  $\overline{\text{PMS}}$  para teorias com massa, requer ainda investigação posterior, pois quando nos fixamos em prescrições que independem das massas, as quantidades físicas que estudamos só perceberão o efeito das massas em ordens maiores de  $\alpha$  do que as que temos acesso no momento. Além disso, como foi sugerido por Politzer<sup>(75)</sup>, não está clara a forma de estudar o desacoplamento de campos com massa no limite  $(\frac{m}{\mu} \rightarrow \infty)$ .

A noção que tentamos veicular neste trabalho, por intermédio de um estudo sistemático da teoria de perturbações e sua interrelação com o grupo de renormalização geral (transformações de escala e mudanças de esquema) é de que existe uma forte coerência interna nas teorias renormalizáveis. De um lado, a teoria de perturbações mesma nos explicita o grupo de renormalização, de outro, este grupo nos fornece dados que podem ser reintroduzidos na expansão das quantidades relevantes, possibilitando assim uma efetiva melhora dos resultados.

A expansão perturbativa, como vemos, aparece não só como um procedimento de cálculo, traz também no seu bojo informação não trivial sobre toda a teoria por intermédio do grupo de renormalização.

## APÊNDICE A

### MS, $\overline{MS}$ E MOM

A regularização dimensional descoberta por Bollini e Giambiagi <sup>(31)</sup>, e independentemente por 't Hooft e Veltman <sup>(32)</sup>, preserva de modo geral as propriedades de simetria do lagrangiano e em particular mantém a invariância de calibre. Esta última propriedade aliada à simplicidade da aplicação do método possibilitou se mostrar a renormalizabilidade da CDQ.

Em linhas gerais este método consiste em dar um sentido às integrais divergentes, que aparecem na expansão perturbativa das funções de Green, calculando-as numa dimensão "n". Por exemplo, de uma integral quadridimensional do tipo

$$\int \frac{d^4 k}{[k^2 + b^2]^m} \quad , \quad (A.1)$$

passamos para uma integral no espaço n-dimensional,

$$I(n) = \int \frac{d^n k}{[k^2 + b^2]^m} = i \pi^{n/2} \frac{\Gamma(m - \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} b^{2(\frac{n}{2} - m)} \quad . \quad (A.2)$$

Por continuação analítica, do lado direito da equação (A.2), esta integral pode ter valores para "n" não restritos aos números inteiros. Basicamente porque a função gama  $\Gamma(z)$  admite uma representação do tipo,

$$\Gamma(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(v+z)} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (A.3)$$

e portanto  $\Gamma(z)$  é analítica em todo o plano complexo, a menos de polos no eixo real para  $z = 0, -1, -2, \dots$

Usando a representação acima, por exemplo, para a teoria escalar  $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$  em que temos apenas divergências logarítmica e quadrática, respectivamente

$$\begin{aligned} n &= 2m \\ n &= 2m+2 \end{aligned} \quad (A.4)$$

na integral (A.2), vemos que na função  $\Gamma(z)$  estas aparecem como polos para  $z \rightarrow 0$  e  $z \rightarrow -1$ .

Para analisarmos as contribuições perturbativas das funções de Green é conveniente escrevermos as regras de Feynman (22) para construção de diagramas. Isto é possível com o formalismo estudado no Capítulo II. Para  $\lambda\phi^4$ , com o lagrangiano da eq. (2.1.1) estas regras no espaço dos momenta, se resumem a: para cada linha interna associar um propagador

$$\text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \quad \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad ; \quad (A.5)$$

efetuar as integrações sobre os momenta internos (sobre anéis)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad ; \quad (A.6)$$

para cada vértice associar um fator relacionado à interação

$$\begin{array}{c} p_1 \quad p_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad p_4 \end{array} \quad -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \quad ; \quad (A.7)$$

multiplicar cada diagrama por um fator  $S^{-1}$ , onde "S" é a ordem do grupo de permutações das linhas internas e vértices que deixam o diagrama invariante ao fixarmos as linhas externas.

Para obter funções conexas como na eq. (2.2.2) basta mantermos apenas estas contribuições e associar um propagador (A.5) a cada linha externa. Mantendo apenas os gráficos IIP e eliminando as linhas externas obtêm-se as funções  $\Gamma^{(n)}$  IIP.

Uma aplicação simples da renormalização com a regularização dimensional pode ser feita no diagrama IIP obtido da eq. (2.2.2)

$$\Gamma^{(4)}(p) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) [(k-p_1-p_2)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.8})$$

Com o auxílio da parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta \delta(\alpha+\beta-1)}{[\alpha a + \beta b]^2} \quad (\text{A.9})$$

podemos reescrever  $\Gamma^{(4)}$  como,

$$\Gamma^{(4)}(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\{ [k + (1-\alpha)(p_1+p_2)]^2 - m^2 + (1-\alpha)s - (1-\alpha)^2 s \}^2} \quad (\text{A.10})$$

onde  $s = (p_1+p_2)^2$ .

Ao passarmos para o espaço de dimensão  $n$  pode-se fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\kappa + (1-\alpha)(p_1+p_2) \rightarrow \kappa \quad (\text{A.11})$$

com o que chega-se a,

$$\Gamma^{(4)}(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[k^2 + b^2]^2} \quad (\text{A.12})$$

onde  $b^2 = -m^2 + \alpha(1-\alpha)s$ .

Utilizando a fórmula (A.2) obtêm-se da integração em  $k$ ,

$$\Gamma^{(4)}(s) = i \frac{\lambda^2 \pi^{n/2}}{2(2\pi)^4} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \int_0^1 d\alpha b^{2(\frac{n}{2}-2)} \quad (\text{A.13})$$

Pode-se ver então da eq. (A.3) que após feita a regularização dimensional a divergência em  $\Gamma^{(4)}$  aparece como um polo isolado da função  $(2 - \frac{n}{2})$  quando  $n \rightarrow 4$ .

Tomando o limite em que  $n \rightarrow 4$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 4} \Gamma^{(4)}(s) &= \frac{i\lambda^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left( \frac{1}{2-\frac{n}{2}} - \gamma \right) \int_0^1 d\alpha \{ 2 - (2-\frac{n}{2}) \ln b^2 + \dots \} \\ &= \frac{i\lambda^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} - \frac{1}{2-\frac{n}{2}} - \frac{i\lambda^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left\{ \gamma - \int_0^1 d\alpha \ln b^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde  $\gamma = 0,577215665\dots$  é a constante de Euler.

Até esta ordem para eliminarmos o termo que diverge em  $n \rightarrow 4$  basta incluímos um contratermo no lagrangiano da eq. (2.1.1) da forma

$$\Delta L = \delta L \cdot \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (\text{A.15})$$

$$\delta L = - \frac{3\pi^2 \lambda}{2(2\pi)^4} - \frac{1}{2-\frac{n}{2}} \quad (\text{A.16})$$

a constante numérica 3 vem de considerarmos as contribuições

cruzadas do diagrama.

Com este  $\Delta L$  ao tomarmos o limite  $n \rightarrow 4$  elimina-se exatamente o termo com o polo, de modo a ficarmos apenas com a parte finita

$$\Gamma_R^{(4)} = - \frac{i\lambda^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \left\{ \gamma + \int_0^1 d\alpha \ln b^2 \right\} . \quad (A.17)$$

No lagrangiano renormalizado da eq. (3.1.3) teremos

$$Z_1 = 1 + \frac{3\pi^2}{2(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2-\frac{n}{2}} \lambda \quad (A.18)$$

e das regras da eq. (3.1.4), até a ordem  $\lambda^2$ , temos

$$\lambda_0 = \mu^{4-n} \left[ \left( 1 + \frac{3\pi}{2(2\pi)^4} \frac{1}{2-\frac{n}{2}} \lambda_R \right) \lambda_R \right] \quad (A.19)$$

onde incluímos uma unidade de massa <sup>(41)</sup>  $\mu$ , que serve para manter o acoplamento adimensional quando passamos a n-dimensões, e introduz uma arbitrariedade semelhante à escolha do ponto de subtração nas eqs. (3.3.1).

A renormalização de carga que realizamos costuma-se chamar de subtração mínima (MS) <sup>(41)</sup>, exatamente por apenas subtrairmos o polo. Entretanto poderíamos subtrair, arbitrariamente, qualquer constante finita, além do polo, na eq. (A.14), por exemplo a parte que contém  $\gamma$ , e que surge da regularização dimensional, a este procedimento se chama de subtração mínima modificada ( $\overline{MS}$ ) <sup>(62)</sup>.

Com  $\overline{MS}$  teríamos para  $\lambda_R$ ,

$$\lambda_0 = k^{4-n} \left\{ \left[ 1 + \frac{3\pi^2}{2(2\pi)^4} \left( \frac{1}{2-\frac{n}{2}} + \gamma \right) \lambda_R \right] \lambda_R \right\} . \quad (A.20)$$

Das eqs. (A.19) e (A.20) temos para  $\lambda_R$  e  $\lambda_{R'}$ , em  $n = 4$ , até a ordem estudada, a seguinte relação

$$\lambda_{R'} = \lambda_R - \frac{3\pi^2}{2(2\pi)^4} \gamma \lambda_R^2 \quad (\text{A.21})$$

que é um exemplo de uma renormalização finita (cf. Cap. IV).

A relação da regularização dimensional com as propriedades de escala da teoria foram investigadas por 't Hooft (41) que mostrou que a renormalização do acoplamento, com MS ou versões modificadas  $\overline{MS}$ , independe da renormalização da massa.

Uma outra maneira de renormalizar a teoria, ainda no quadro de regularização dimensional é subtraindo todo o valor da função de interesse num dado valor dos momenta. Para o caso que estamos estudando podemos escolher o ponto simétrico  $s = \mu^2$  na eq. (A.14) e teremos para  $\lambda_{\overline{R}}$

$$\lambda_0 = \mu^{4-n} [(1 - 3\Gamma^{(4)}(\mu)\lambda_{\overline{R}})\lambda_{\overline{R}}] \quad (\text{A.22})$$

Este tipo de renormalização costuma ser chamado de MOM (54).

Para QED e QCD, estes esquemas de renormalização que estudamos podem também ser aplicados, de maneira análoga a que vimos.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) - Yang, C.N. e Mills, R.L.; Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev. 96(1954)191.
- (2) - Utiyama, R.; Invariant theoretical interpretation of interaction, Phys. Rev. 101(1956)1597.
- (3) - Leite Lopes, J.; Gauge field theories: an introduction, Oxford, Pergamon Press (1981).
- (4) - 't Hooft, G.; Renormalization of massless Yang Mills fields, Nucl. Phys. B33(1971)173.
- (5) - Marciano, W. e Pagels, H.; Quantum Chromodynamics, Phys. Rep. 36(1978)137.
- (6) - Buras, A.; Asymptotic freedom in deep inelastic processes in the leading order and beyond, Rev. of Mod. Phys. 52(1980)199.
- (7) - Gross, D.J. e Wilczek, F.; Asymptotically free gauge theories. I, Phys. Rev. D8(1973)3633.
- (8) - Politzer, H.D.; Asymptotic Freedom: An approach to strong interactions, Phys. Rep. 14(1974)129.
- (9) - Stueckelberg, E.C.G. e Petermann, A.; La normalisation des constantes dans la theorie des quanta, Helv. Phys. Acta 26(1953)499.
- (10) - Bogoliubov, N.N. e Shirkov, D.V.; Introduction to the theory of quantized fields, New York, Interscience(1959).
- (11) - Coleman, S. e Jackiw, R.; Why dilatation generators do not generate dilatations, Annals of Phys. 67(1971)552.
- (12) - Callan, C.G.; Broken scale invariance in scalar field theory, Phys. Rev. D 2 (1970)1541.

- (13) - Symanzik, K.; Small distance behaviour in field theory and power counting, Commun. Math. Phys. 18(1970)227.
- (14) - Dyson, F.J.; The radiation theory of Tomonaga, Schwinger and Feynman, Phys. Rev. 75(1949)486.
- (15) - Salam, A.; Divergent integrals in renormalizable Field Theories, Phys. Rev. 84(1951)426.
- (16) - Schwinger, J.; Quantum Electrodynamics, New York, Dover (1958).
- (17) - Bohr, N. e Rosenfeld, L.; Zur frage der Messbarkeit der elektromagnetischen feldgrößen, Kgl. Dauske Vid. Sels., Math. fys. Medd. 12(1933).
- (18) - Bohr, N. e Rosenfeld, L.; Field and charge measurements in quantum electrodynamics, Phys. Rev. 78(1950)794.
- (19) - Streater, R. e Wightman, A.; PCT, spin and statistics, and all that, New York, Benjamin (1964).
- (20) - Epstein, H. e Glaser, V; The role of locality in perturbation theory, Ann. l'Inst. Henri Poincaré 19(1973)211.
- (21) - Glimm, J. e Jaffe, A.; Quantum Physics a functional integral point of view, New York, Springer-Verlag (1981).
- (22) - Itzykson, C. e Zuber, J.-B.; Quantum field theory, New York, Mc Graw-Hill (1980).
- (23) - Iliopoulos, J., Itzykson, C. e Martin, A.; Functional methods and perturbation theory, Rev. Mod. Phys. 47(1975)165.
- (24) - Lehmann, H., Symanzik, K. e Zimmermann, W.; On the formulation of quantized field theories, Nuovo Cimento, 1(1955)205.
- (25) - Eden, R.J., Landshoff, P.V., Olive, D.I. e Polkinghorne, J.C.; The analytic S-matrix, Cambridge, Cambridge University Press (1966).

- (26) - Huang, K.; Quarks leptons and Gauge fields, Singapore , World Scientific (1982).
- (27) - Gelfand, I.M. e Shilov, G.E.; Generalized functions, New York, Academic Press (1964).
- (28) - Schwartz, L.; Théorie des distributions, Paris, Hermann (1966).
- (29) - Wightman, A. E Garding, L.; Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory, Arkiv für Fisik 28(1965)129.
- (30) - Osterwalder, K. e Schrader, R.; Axioms for euclidean Green's functions I, Comm. Math. Phys. 31(1973)83.
- (31) - Bollini, C.G. e Giambiagi, J.J.; Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter, Nuovo Cimento 128(1972) 20.
- (32) - 't Hooft, G. e Veltman, M.; Regularization and renormalization of gauge fields, Nucl. Phys. B44(1972)189.
- (33) - Crewther, R.J.; Asymptotic behaviour in quantum field theory em Weak and electromagnetic interactions at high energies, Cargèse 1975, editado por Lévy, M., Basdevant, J.L., Speiser, D. e Gastmans, R., New York, Plenum Press (1976).
- (34) - Bogoliubov, N.N. e Parasiuk, O.S.; Über die multiplikation der kausalfunktionen in der quantentheorie der felder, Acta Math. 97(1957)227.
- (35) - Hepp, K.; Theorie de la renormalisation, New York, Springer Verlag (1970).
- (36) - Zimmerman, W.; Local operator products and renormalization in quantum field theory em Lectures on elementary particles and quantum field theories Brandeis summer institute 1970, editado por Deser, S., Grisaru, M. e Pendleton, H., MIT Press (1970).

- (37) - Astaud, M. e Jouvét, B.; Extension du "groupe" de renormalisation, Nuovo Cimento A 53(1968)841.
- (38) - Gell-Mann, M. e Low, F.E.; Quantum electrodynamics at small distances. Phys. Rev. 95(1954)1300.
- (39) - Peterman, A.; Renormalization group and the deep structure of the proton, Phys. Rep. 53(1979)157.
- (40) - Weinberg, S.; New approach to the renormalization group, Phys. Rev. 8(1973)3497.
- (41) - 't Hooft, G.; Dimensional regularization and the renormalization group, Nucl. Phys. B61(1973)455.
- (42) - Georgi, H. e Politzer, H.D.; Freedom at moderate energies: Masses in color dynamics, Phys. Rev. D 14(1976)1829.
- (43) - Nachtmann, O. e Wetzel, W.; On the quark mass dependence of the parameters of quantum chromodynamics, Nucl. Phys. B 146(1978)273.
- (44) - Sneddon, I.N.; Elements of partial differential equations, New York, Mc Graw-Hill (1957).
- (45) - Coleman, S. e Gross, D.J.; Price of Asymptotic Freedom, Phys. Rev. Letters 31(1973)851.
- (46) - Gross, D.J.; Applications of the renormalization group to high-energy physics em Methods in field Theory, Les Houches 1975; editado por Balian, R. e Zinn-Justin, J. , New York, North-Holland (1976).
- (47) - Coleman, S.; Dilatations em Properties of the fundamental interactions, "Ettore Majorana" 1971, editado por Zichichi, A., Bologna, Editrici Compositori (1973).
- (48) - Callan, C.G.; Scale invariance and the physics of the light cone em Particle Physics, Les Houches 1971, editado por De Witt, C. e Itzykson, C., New York, Jordan and Breach (1973).

- (49) - Callan, C.G., Coleman, S. e Jackiw, R.; A new improved energy-momentum tensor, *Annals of Phys.* 59(1970)42.
- (50) - Symanzik, K.; Small-distance-behaviour analysis and Wilson expansions, *Comm. Math. Phys.* 23(1971)49.
- (51) - Stevenson, P.M.; Dimensional analysis in field theory , *Annals of Phys.* 132(1981)383.
- (52) - Celmaster, W. e Gonsalves, R.J.; Quantum-Chromodynamics perturbation expansions in a coupling constant renormalized by momentum-space subtraction, *Phys. Rev. Lett.* 42(1979)1435.
- (53) - 't Hooft, G.; Some observations on quantum chromodynamics em Deeper pathways in high-energy physics, *Orbis Scientiae* 1977, editado por Kursunoglu, B., Perlmutter, A., Scott, L.F., Vhem M.-S., Hubbard, J., Milk, M. e Rastti, M., New York, Plenum Press (1977).
- (54) - Celmaster, W. e Sivers, D.; Studies in the renormalization-prescription dependence of perturbative calculations, *Phys. Rev.* D23(1981)227.
- (55) - 't Hooft, G.; can we make sense out of "quantum chromodynamics" em The whys of subnuclear physics, *Erice* 1977, editado por Zichichi, A., New York, Plenum Press (1979).
- (56) - Epstein, H., Iliopoulos, J.; The arbitrariness in the perturbation series in non-abelian gauge theories em Fourth international conference on collective phenomena, Moscow 1981, *Annals of the New York Acad. of Sci.* 373 (1981)1.
- (57) - Vladimirov, A.A., Kazakov, D.I., Tarasov, D.V., Calculation of critical exponents by quantum field theory methods, *Sov. Phys. JETP* 50(1979)521.
- (58) - de Rafael, E. Rosner, J.L.; Short-distance behaviour of quantum electrodynamics and the Callan-Symanzik equation for the photon propagator. *Annals of Phys.* 82(1979)369.

- (59) - Collins, J.C. e Macfralane, A.J.; New methods for the renormalization group, Phys. Rev. D10(1974)1201.
- (60) - Barbieri, R., Caneschi, L., Curci, G., d'Emilio, E.; Scaling violations and perturbative quantum chromodynamics, Phys. Lett. 81B(1979)207.
- (61) - Braaten, E., Leveille, J.P.; Minimal subtraction and momentum subtraction in quantum chromodynamics at two-loop order, Phys. Rev. D 24(1981)1369.
- (62) - Bardeen, W.A., Buras, A.J., Duke, D.W., Muta, T.; Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories, Phys. Rev. D18(1978)3998.
- (63) - Hagiwara, K.; On the usefulness of the 't Hooft and Adler transformation of the running coupling constant in perturbative quantum chromodynamics, Phys.Lett.118B(1982)91.
- (64) - Mignaco, J.A. e Roditi, I.; A simple interpolation for high and low momentum transfers in QCD, CBPF-NF-037/82, aceito para publicação em Physics Letters B.
- (65) - Adler, S.L.; Effective-action approach to mean-field non-Abelian statics, and a model for bag formation, Phys.Rev. D23(1981)2905.
- (66) - Baker, G.; The Padé approximant in theoretical physics, New York, Academic Press (1970).
- (67) - Tarasov, O.V., Vlamidirov, A.A. e Zharkov, A. Yu., The Gell-Mann-Low function of QCD in the three-loop approximation, Phys. Lett. 93B(1980)429.
- (68) - Adler, S.L. e Piran, T.; The heavy quark static potential in the leading log and the leading log log models, Phys. Lett. 117B(1982)91.
- (69) - Elizalde, E.; Is the next-to-leading log confining?, Phys. Lett. 115B(1982)307.
- (70) - Pagels, H. e Tomboulis, E.; Vacuum of the quantum Yang -

- Mills theory and magnetostatics, Nucl. Phys. B143 (1978) 485.
- (71) - Stevenson, P.M.; Optimized perturbation theory, Phys.Rev. D23(1981)2916.
- (72) - Celmaster, W. e Gonsalves, R.J.; Renormalization prescription dependence of the quantum-chromodynamic coupling constant, Phys. Rev. D20(1979)1420.
- (73) - Grunberg, G.; Renormalization Group improved perturbative QCD, Phys. Lett. 95B(1980)70.
- (74) - Peterman, A.; Two theorems on approximation methods in perturbative field theory, Phys.Lett. 110B(1982)237.
- (75) - Politzer, H.D.; Stevenson's optimized perturbation theory applied to factorization and mass scheme dependence , Nucl. Phys. B194(1982)493.
- (76) - Mignaco, J.A., Roditi, I.; A simpler version of PMS application to perturbation theory, CBPF-NF-047/82 e Phys. Lett. 126 B (1983)481.
- (77) - Pennington, M.R.; Renormalization-prescription ambiguity in perturbative quantum chromodynamics: Has Stevenson found the solution ?, Phys. Rev. D 26(1982)2048.
- (78) - Wrigley, J.C.; An alternative implementation of the "principle of minimal sensitivity", Phys. Rev. D27(1983) 1965.
- (79) - Witten, E.; Anomalous cross section for photon-photon scattering in gauge theories, Nucl. Phys. B120(1977)189.
- (80) - Antoniadis, I. e Grunberg, G.; Second-order QCD analysis of the photon structure function, Nucl. B213(1983)445.
- (81) - Duke, D.W., Kimel, J.D.; Application of the principle of minimal sensitivity to higher-order processes in quantum-chromodynamics, Phys.Rev. D25(1982)2960.

- (82) - Kubo, J., Sakakibara, S.; Equivalence of the fastest apparent convergence criterion and the principle of minimal sensitivity in perturbative quantum chromodynamics, Phys. Rev. D (1982)3656.
- (83) - Celmaster, W., Gonsalves, R.J.; Fourth-order quantum chromodynamic contributions to the  $e^+e^-$  annihilation cross section, Phys. Rev. D 21(1980)3112.
- (84) - Barbieri, R., Curci, G., d'Emilio, E., Remiddi, E.; Strong radiative corrections to annihilations of quarkonia in QCD, Nucl. Phys. B154(1979)535.
- (85) - Kubo, J., Sakahibara, S.; Optimized perturbation theory in quantum electrodynamics, Z. Phys. C14(1982)345.
- (86) - 't Hooft, G; Borel summability of a four-dimensional field theory, Phys. Lett. 119B(1982)369.
- (87) - Stevenson, P.M.; Optimization and the ultimate convergence of QCD perturbation theory, CERN-TH-3358, a ser pu blicado no Nucl. Phys. B.

# **“O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO-TRANSFORMAÇÕES DE ESCALA E MUDANÇAS DE ESQUEMA. SUA UTILIDADE NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS ”**

**ITZHAK RIDITI**

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Juan Alberto Mignaco/CBPF

Ronald Cintra Shellard/PUC

José Antonio Martins Simões/UFRJ

Juan José Giambiagi/CBPF

João Carlos Costa dos Anjos/CBPF