NELSON PINTO NETO

EQUAÇÕES ALTERNATIVAS DA GRAVITAÇÃO

TESE DE MESTRADO

Prof. Orientador: MÁRIO NOVELLO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1983

Aos meus pais e,

à Carla

AGRADECIMENTOS

A Mário Novello, por tudo.

A José Martins Salim, pelas suas sugestões e ajuda paciente nos cálculos mais tediosos.

A Ivano Damião Soares, pelas suas propostas e questões levantadas.

À Marilene Bernardi, pelo bom trabalho de datilografia.

À Myrian C.A. Costa, pela sua infinita boa vontade.

Aos funcionários do CBPF, pelo seu trabalho silencioso, mas fundamental.

Ao CNPq, pela bolsa recebida.

Aos colegas do CBPF, pelas sugestões, apoio e amizade.

RESUMO

Neste trabalho mostramos, através de um novo formalismo, que os efeitos das flutuações quânticas do campo gravitacional nas equações de Einstein são análogos aos efeitos de um meio contínuo na Eletrodinâmica de Maxwell. A seguir, um exemplo concreto das aplicações destas equações é estudado. Examina-se os efeitos das flutuações quânticas como fontes de perturbação nos Universos de Minkowski e Friedmann. No primeiro caso encontramos soluções que representam ondas gravitacionais se propagando com velocidade menor que a da luz. No segundo caso verificamos que, pela presença das flutuações quânticas, a parte elétrica do tensor de Weyl perturbado se anula sempre e a sua parte magnética se anula apenas quando não há perturbação no tensor de cisalhamento. Além disso, se a curvatura do tri-espaço do Universo de Friedmann é nula, as flutuações quânticas, segundo o esquema estudado, fazem com que a densidade de energia gravitacional caia mais rapidamente que a densidade de energia que constitui aquele Universo. Apenas no caso em que a pressão anisotrópica perturbada é proporcional à perturbação no tensor de cisalhamento, sendo a constante de proporcionalidade negativa, é que verificamos um crescimento exponencial na densidade de energia gravitacional.

SUMÁRIO

CONVENÇÕES

Índices gregos variam de 0 a 3

Índices latinos variam de 1 a 3

Assinatura da métrica: (+ ---)

Derivada covariante: seja $A\ (x^\mu)$ um campo vetorial. A sua derivada covariante é dada por:

$$A^\alpha{}_{;\nu}\ (x^\mu) = A^\alpha{}_{,\nu}\ (x^\mu) + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\ A^\beta\ (x^\mu)$$

onde $\displaystyle A^\alpha{}_{,\nu}\ (x^\mu) \equiv \frac{\partial A^\alpha\ (x^\mu)}{\partial x^\nu}$

Tensor de Riemann:

$$A^\alpha{}_{;\mu;\nu} - A^\alpha{}_{;\nu;\mu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\ A^\beta$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\beta\nu} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu}$$

Equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\ g_{\mu\nu} = -k\ T_{\mu\nu}$$

onde $\displaystyle k = \frac{8\pi G}{c^4}$

G é a constante de Gravitação universal que aparece nas leis de Newton e C a velocidade da luz.

$\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Desde a sua publicação em 1916(1), a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, T.R.G., vem passando por vários testes experimentais. Suas previsões, por exemplo, para o avanço do perihélio de Mercúrio, a ação da gravidade solar sobre a trajetória de sinais luminosos provenientes de estrelas distantes e o desvio para o vermelho da luz sob a ação do campo gravitacional terrestre conferem com os dados experimentais (2). Mas os testes que até hoje comprovaram a T.R.G. foram realizados em campos gravitacionais fracos, isto é, campos gerados por densidades muito menores que a densidade crítica definida por:

$$\rho \sim (c^3\ k^2\ \hbar)^{-1} \sim 10^{94} g\ cm^{-3}$$

É possível, portanto, que a T.R.G. seja apenas uma boa aproximação de uma outra teoria da Gravitação que descreva com mais propriedade campos fortes, como sugeriu o próprio Einstein em(3).

Mas porque perdermos tempo nestas conjecturas se a T.R.G. descreve bem o que conhecemos? Além de ser uma teoria simples e elegante, ela propiciou um avanço extraordinário em Cosmologia teórica por apresentar soluções bastante interessantes (universos finitos mas ilimitados) e coerentes com as observações astronômicas feitas até hoje (como, por exemplo, a solução de Friedmann para as equações de Einstein). A razão de tal questionamento reside em problemas teóricos graves da teoria, como veremos a seguir.

O primeiro problema aparece quando se tenta quantizar o campo gravitacional, objetivo que deve ser alcançado se desejarmos descrever de forma unívoca os campos físicos conhecidos. Se fizermos expansão perturbativa, a T.R.G. quantizada não é renormalizável quando acoplada a fotons, campos escalares ou fermions, pelo menos até certo nível de aproximação[4]. Na ausência de matéria e com constante cosmológica porém, ela é renormalizável, neste mesmo nível de aproximação.

Este resultado nos deixa três alternativas:

1ª) O campo gravitacional é fundamentalmente diferente dos outros campos físicos conhecidos, que são quânticos. Isto nos levaria a abandonar a idéia da grande unificação dos campos fundamentais da natureza através do esquema usual de Teorias de Gauge.

2ª) Este comportamento altamente divergente da T.R.G. quântica talvez desapareça quando a pudermos tratar por métodos não-perturbativos, possibilitando até que ela atue como um corte nas divergências de todos os outros campos da natureza.

3ª) A T.R.G. deve ser modificada quando os efeitos quânticos se tornam importantes introduzindo-se na Lagrangeana de Einstein termos com potência superior a um no tensor de curvatura ou acoplamentos não mínimos com a matéria.

Como métodos não-perturbativos de se tratar T.R.G. quântica não estão ainda bem sedimentados, examinaremos com mais profundidade a terceira possibilidade antes de pensarmos em nos entregar à primeira alternativa.

Na referência[5], K.S.Stelle sugere uma Lagrangeana quadrática no tensor de curvatura que no limite de baixas energias reduz-se à Lagrangeana de Einstein. Prova a seguir que uma teoria quântica para a Gravitação proveniente desta Lagrangeana é renormalizável.

Em[6], R.Utyiama e B.S. de Witt mostram que, considerando-se a interação de campos de matéria quantizados com um campo gravitacional clássico via equações de Einstein, o tensor momento-energia daqueles campos apresentarão divergência do tipo ∞^4, ∞^2 e $\ell n \infty$. As duas primeiras divergências são eliminadas pela renormalização da constante cosmológica e da constante gravitacional, respectivamente. A terceira é suprimida pela introdução de termos quadráticos no tensor de curvatura na Lagrangeana da teoria. Depois destas modificações as equações de campo ficam:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = -k \langle T_{\mu\nu} \rangle$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein clássico, Λ a constante cosmológica renormalizada, $g_{\mu\nu}$ a métrica clássica, k a constante gravitacional renormalizada e $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ o valor médio do tensor momento-energia dos campos quânticos de matéria que será sempre finito.

Vemos portanto, que a busca de teorias não lineares no tensor de curvatura para a Gravitação são um bom caminho para se resolver o problema da renormalização.

Por outro lado, mesmo que as equações de Einstein sejam válidas microscopicamente, entendidas portanto como equações para operadores de Heisemberg, haverá flutuações quânticas da métrica em torno de um certo valor médio (que é o medido no laboratório) e, se as escrevermos em termos destes valores médios elas modificarão sua forma. V.L. Ginzburgh, D.A. Kirzhnitz e A.A. Lyubushin tratam deste assunto em[7]. Seja a equação de Einstein:

$$G^{\alpha}{}_{\beta} + \Lambda\, \delta^{\alpha}{}_{\beta} = -k\, T^{\alpha}{}_{\beta} \tag{1.1}$$

Expressemos a métrica em termos de seu valor médio e suas flutuações:

$$g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}$$

Construindo o tensor $\bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ em termos de $\langle g_{\mu\nu}\rangle$, podemos escrever (1.1) da seguinte forma:

$$\bar{G}^{\alpha}{}_{\beta} = -k\, T^{\alpha}{}_{\beta} - \Lambda\, \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \phi^{\alpha}{}_{\beta} \tag{1.2}$$

onde $G^{\alpha}{}_{\beta}$ só depende de $\langle g_{\mu\nu}\rangle$ e $\phi^{\alpha}{}_{\beta}$ das flutuações $\delta g_{\mu\nu}$.

Se desprezarmos as flutuações quânticas da matéria podemos expandir $\phi^{\alpha}{}_{\beta}$ em termos de $\bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, suas derivadas e suas contrações com relação a $\langle g_{\mu\nu}\rangle$. Como $\bar{G}^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0$, $T^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0$ e $\Lambda\, \delta^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0$ então $\phi^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0$, onde a derivada covariante é calculada em função de $\langle g_{\mu\nu}\rangle$. Os termos de ordem zero e de ordem um na expansão impõem uma renormalização na constante cosmológica e na constante gravitacional, respectivamente. O termo de ordem dois faz aparecer quantidades nas equações de campo provenientes de uma Lagrangeana quadrática no tensor de curvatura. Para os cálculos feitos, levamos em conta que $\phi^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0$ em qualquer ordem da expansão.

Vemos portanto, que, dependendo do seu grau de importância, as flutuações quânticas da métrica fazem aparecer na ação gravitacional termos de ordem dois, três ou mais no tensor de curvatura, construídos a partir de $<g_{\mu\nu}>$.

As aplicações deste tipo de tratamento são feitas, utilizando o formalismo Quase-Maxwelliano para a Gravitação, em[8] e [9].

O outro grave problema teórico da T.R.G. é que, se o tensor momento-energia não apresenta densidade e pressão negativas e se não existe nenhum ponto de espaço-tempo cuja vizinhança seja cortada mais de uma vez por uma curva tipo-tempo ou nula então, para situações bastante gerais e de realidade física, como por exemplo universos homogêneos, isotrópicos e compatíveis com a radiação de $3^{o}K$ ou objetos sofrendo colapso gravitacional, as geodésicas tipo-tempo e nulas são incompletas, o que nos leva a crer que o espaço-tempo apresenta um ponto singular[10]. Assim, a T.R.G., sob condições extremamente razoáveis, prevê que existam regiões do espaço-tempo onde nenhuma teoria física, nem mesmo ela própria, seja aplicável.

Para resolver este problema podemos novamente supor que a T.R.G. não seja válida, pelo menos no limite de campos fortes e que a Lagrangeana de Einstein deva ser modificada. Em[11], H. Nariai propõe, como anteriormente, uma Lagrangeana quadrática no tensor de curvatura como solução do problema. Também em[12] e [13], M.Novello, J.M.Salim e H.Heintzmann propõem uma Lagrangeana com acoplamento não mínimo entre Gravitação e Eletromagnetismo como forma de remover a singularidade de um Universo homogêneo e isotrópico espacialmente.

A análise dos problemas teóricos da T.R.G. sugere, portanto, que a Lagrangeana de Einstein deva ser modificada para resolver a questão das singularidades nas soluções da teoria e torná-la, quando quantizada, renormalizável e compatível com as flutuações quânticas da métrica.

Sob esse prisma e seguindo a linha de J.Plebasnki e M.Novello em [14] e [24], construiremos no capítulo 2 uma teoria macroscópica para a Gravitação em termos do valor médio da métrica por analogia à Eletrodinâmica em meios polarizados onde as equações de Maxwell para os campos elétrico e magnético macroscópicos também devem ser modificadas. Definiremos campos gravitacionais macroscópicos e a partir deles construiremos uma função de estrutura H que nos dará todas as informações sobre as flutuações quânticas do campo gravitacional. Sua forma explícita dependerá fenomenologicamente de cada caso particular pois não existe ainda uma teoria quântica fechada para a Gravitação. Com estas quantidades construiremos uma ação cujas equações de campo reduzir-se-ão às equações de Einstein quando as flutuações quânticas da métrica se tornam desprezíveis.

No capítulo 3 desenvolveremos estas equações e as colocaremos na sua forma Quase-Maxwelliana.

Finalmente, no capítulo 4, explicitaremos uma fun ção de estrutura H conveniente e, utilizando as equações do capítulo anterior, trataremos as flutuações quânticas do campo gravitacional como fontes de perturbação dos Universos de Minkowski e Friedmann avaliando em seguida seus efeitos na propagação de ondas gravitacionais.

O apêndice A trará relações algébricas úteis satisfeitas pelos tensores de curvatura e de Weyl. No apêndice B obteremos, de princípios variacionais, as equações de campo utilizadas na tese. No apêndice C, através de variações em ações de 2ª e 3ª ordem no tensor de curvatura, construiremos os invariantes topológicos de 2ª ordem e mostraremos as dificuldades de se encontrar tais invariantes de 3ª ordem, se existem.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES MACROSCÓPICAS DA GRAVITAÇÃO

Vimos na introdução desta tese as principais motivações para que se modifique a Lagrangeana de Einstein. Para realizar estas modificações buscaremos inspiração numa analogia entre a Eletrodinâmica num meio macroscópico e Gravitação, onde as flutuações quânticas do campo gravitacional desempenhariam nesta última o mesmo papel de um meio macroscópico na primeira. O que faremos agora, portanto, será desenvolver uma teoria covariante para a Eletrodinâmica num meio polarizado para depois fazermos o mesmo com a Gravitação.

i) Eletrodinâmica num meio polarizado

Seja A_μ o quadri-potencial eletromagnético. O tensor eletromagnético num espaço curvo de métrica $g_{\mu\nu}$ é definido por:

(2.1) $$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

onde o ponto e vírgula representa a derivação covariante definida por uma conexão simétrica $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ e a vírgula uma derivação simples.

Com $F_{\mu\nu}$ podemos definir os invariantes:

(2.2) $$F_1 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{e } F_2 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\overset{*}{\mu}\nu}$$

onde $$F^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\nu} \ , \ F^{\overset{*}{\mu}\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \qquad \text{e}$$

$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = - \dfrac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$ sendo $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ totalmente anti-simétrico em μ,ν,α e β e $\varepsilon^{0123} = 1$

Constrói-se então a ação:

$$S = \int (F_1 - e\, A_\mu\, j^\mu)\sqrt{-g}\ d^4x \tag{2.3}$$

onde j^μ é o quadri-vetor corrente eletromagnética e e a carga do eletron.

Variando-se esta ação em relação a A_μ e igualando o resultado a zero, ou seja, dizendo-se que a ação é estacionária em relação a variações de A_μ obtemos (ver [26]):

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = e\, j^\mu \tag{2.4}$$

que são as equações de Maxwell neste espaço curvo. A métrica $g_{\mu\nu}$ deste espaço é considerada congelada e portanto não faremos variações em relação a ela.

Quando estamos num meio polarizado, o potencial A_μ (e portanto os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ usuais) sofrem flutuações em torno de um certo valor médio, que é o que se mede no laboratório. O mesmo acontece para j^μ. Assim:

$$A_\mu = \langle A_\mu \rangle + \delta A_\mu \qquad \text{e} \qquad j^\mu = \langle j^\mu \rangle + \delta j^\mu$$

substituindo estes valores em (2.4) temos:

$$\bar{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \langle j^\mu \rangle + \Phi^\mu$$

onde $\bar{F}^{\mu\nu}$ é calculado usando-se o vetor $\langle A^\mu \rangle$ e Φ^μ só depende das flutuações δA^μ e δj^μ.

Portanto, as equações de Maxwell não valem para os valores médios de A_μ. Isto nos leva a construir outra Lagrangeana que nos dê a dinâmica do campo $<A_\mu>$, Lagrangeana esta que dependerá do tipo de meio polarizado envolvido no problema pois para cada meio haverá um particular esquema de perturbação para o potencial A_μ.

Assim, seja L (a Lagrangeana) uma função qualquer dos invariantes F_1 e F_2 definidos em (2.2):

$$L = L\ (F_1,\ F_2)$$

Na ausência de cargas livres a ação é:

$$S = \int L\ \sqrt{-g}\ d^4x \tag{2.5}$$

Esta ação só depende de A_μ (daqui por diante denotaremos $<A_\mu>$ simplesmente por A_μ).

Definamos agora o tensor $P^{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$P^{\mu\nu} = 2\ \frac{\delta L}{\delta F_{\mu\nu}} = 2\ \frac{\delta L}{\delta (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu})} \tag{2.6}$$

Podemos construir com $P^{\mu\nu}$ dois novos invariantes:

$$P_1 = \frac{1}{4}\ P^{\mu\nu}\ P_{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad P_2 = \frac{1}{4}\ P^{\mu\nu}\ P_{\mu}{}^{*}{}_{\nu} \tag{2.7}$$

onde $\quad P_{\mu*\nu} = \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\ P^{\rho\sigma}$

Note que $P^{\mu\nu}$ tem as mesmas simetrias que $F_{\mu\nu}$, por construção.

Podemos então definir uma função H dos invariantes P_1 e P_2 como em (14) usando o mesmo processo da mecânica clássica onde, a partir de uma Lagrangeana L que depende das coordenadas generalizadas q e suas derivadas temporais $\dot{q}$, se passa para uma Hamiltoniana H que é função dos momenta canonicamente conjugados a q, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, e de q, onde p e q são consideradas variáveis independentes $(H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}))$. Assim:

$$H(P_1, P_2) = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - L(F_1, F_2) \tag{2.8}$$

A ação então reduz-se a:

$$S = \int \left(\frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - H(P_1, P_2)\right) \sqrt{-g}\, d^4x$$

e suas variáveis independentes são agora $P^{\mu\nu}$ e A_μ

Note, por (2.8), que H não depende de $F_{\mu\nu}$ pois:

$$\frac{\delta H}{\delta F_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} - \frac{\delta L}{\delta F_{\mu\nu}}(F_1, F_2) = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} - \frac{1}{2} P^{\mu\nu} = 0$$

As equações de movimento que resultam das variações de S em relação a $P^{\mu\nu}$ e A_μ são (veja apêndice B)

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} \Rightarrow P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\delta S}{\delta P_{\mu\nu}} \Rightarrow F^{\mu\nu} = H_{p_1} P^{\mu\nu} + H_{p_2} P^{\mu * \nu} \tag{2.10}$$

onde $H_{p_i} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$

Note que, se $H(P_1, P_2) = P_1$ temos de (2.10) que $F^{\mu\nu} = P^{\mu\nu}$

Substituindo em (2.9) obtemos:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

que são as equações de Maxwell num espaço curvo, sem cargas livres. A Lagrangeana é exatamente a Lagrangeana de Maxwell pois, usando (2.7) e (2.8) temos:

$$L = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - H\,(P_1, P_2) = \frac{1}{2} P^{\mu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = L \text{ Maxwell}$$

Vê-se portanto que as equações de movimento (2.10) e (2.9) têm como caso particular as equações de Maxwell.

Seja agora um dado observador com velocidade V^{μ}. Então, os quadrivetores campo elétrico e magnéticos para este observador são definidos por:

$$E^{\mu} = F^{\mu\nu} V_{\nu} \qquad \text{e} \qquad B^{\mu} = F^{\mu *\nu} V_{\nu}$$

ou, equivalentemente

$$F^{\mu\nu} = -V^{\mu} E^{\nu} + V^{\nu} E^{\mu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} V_{\rho} B_{\sigma}$$

Analogamente, definiremos os vetores D^{μ} e H^{μ} da seguinte forma:

$$D^{\mu} = P^{\mu\nu} V_{\nu} \qquad \text{e} \qquad H^{\mu} = P^{\mu *\nu} V_{\nu}$$

Da mesma forma,

$$P^{\mu\nu} = -V^{\mu} D^{\nu} + V^{\nu} D^{\mu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} V_{\rho} H_{\sigma}$$

Com estas definições a equação (2.10) quando projetada em V_{ν}, nos dá:

$$E^{\mu} = H_{p_1} D^{\mu} + H_{p_2} H^{\mu} \tag{2.11}$$

Se multiplicarmos (2.10) por $\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}$ e levantarmos os índices com a métrica $g_{\mu\nu}$ encontramos:

$$F^{\mu * \nu} = - H_{p_2} P^{\mu\nu} + H_{p_1} P^{\mu * \nu}$$

Projetando em V_{ν} temos:

$$B^{\mu} = - H_{p_2} D^{\mu} + H_{p_1} H^{\mu} \tag{2.12}$$

Explicitando D^{μ} em (2.11) vem que:

$$D^{\mu} = \frac{1}{H_{p_1}} E^{\mu} - \frac{H_{p_2}}{H_{p_1}} H^{\mu} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12) obtemos:

$$B^{\mu} = \frac{H^2_{p_1} + H^2_{p_2}}{H_{p_1}} H^{\mu} - \frac{H_{p_2}}{H_{p_1}} E^{\mu} \tag{2.14}$$

Assim, se $H_{p_1} \neq 0$, podemos obter D^{μ} e B^{μ} em função de E^{μ} e H^{μ}. A função $H(P_1,P_2)$ nos dá completamente os coeficientes das equações que ligam estas quantidades, relacionadas com a constante dielétrica ε e a permeabilidade magnética μ do meio. A função H carrega dentro de si todas as informações sobre o meio polarizado em questão e é portanto chamada de função de estrutura. Conhecendo-se o meio com detalhe conhece-se H e vice-versa.

Note que este tratamento não dá conta de meios polarizados anisotrópicos, pois neste caso as relações entre $(D^\mu\ ,\ B^\mu)$ e $(E^\mu,\ H^\mu)$ envolvem tensores e não mais coeficientes escalares como por exemplo:

$$D^\mu = X^\mu{}_\nu\, E^\nu \qquad \text{e} \qquad B^\mu = Y^\mu{}_\nu\, H^\nu$$

ii) Gravitação

Seja $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ o tensor de curvatura definido por:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu\ \nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu\ \mu} + \Gamma^\varepsilon{}_{\beta\mu}\,\Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\nu} - \Gamma^\varepsilon{}_{\beta\nu}\,\Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\mu}$$

onde $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ é a conexão simétrica em β e μ do espaço curvo com metrica $g_{\mu\nu}$.

Vê-se pela definição acima que $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = - R^\alpha{}_{\beta\nu\mu}$.

Se o espaço é de Riemann, a conexão $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ é o símbolo de Cristoffel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\mu\end{matrix}\right\}$ definido por:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\mu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\varepsilon}\ (g_{\varepsilon\beta,\mu} + g_{\varepsilon\mu,\beta} - g_{\mu\beta,\varepsilon})$$

Neste caso o tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\varepsilon}\, R^\varepsilon{}_{\beta\mu\nu}$ será anti-simétrico em α e β, simétrico na troca do par $(\alpha\ \beta)$ por (μ,ν), além de possuir a anti-simetria em μ e ν já mencionada. Quando o espaço não é de Riemann, o tensor de curvatura não apresenta todas estas simetrias. Cabe então definir os tensores $P_{\alpha\beta\mu\nu}$, $P_{\alpha\mu}$ e P da seguinte forma:

$$(2.15) \quad P_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{4} (R_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\beta\alpha\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\nu\mu\alpha\beta}),$$

$$P_{\alpha\mu} = P_{\alpha\beta\mu\nu}\, g^{\beta\nu} \quad \text{e} \quad P = P_{\alpha\mu}\, g^{\alpha\mu}$$

Com eles construimos o tensor conforme de curvatura sem traço (tensor de Weyl):

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = P_{\alpha\beta\mu\nu} - H_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6} P\, g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{onde}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (P_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + P_{\beta\nu}\, g_{\alpha\mu} - P_{\alpha\nu}\, g_{\beta\mu} - P_{\beta\mu}\, g_{\alpha\nu}) \quad \text{e}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}\, g_{\beta\mu}$$

Seja $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ o tensor de Weyl no espaço de Riemann, onde $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\}$. Portanto $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ só depende de $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas. Podemos com ele construir a ação:

$$(2.16) \qquad S = \int \frac{1}{8} (C_{\alpha\beta\mu\nu}\, C^{\alpha\beta\mu\nu} - W_{\alpha\beta\mu\nu}\, W^{\alpha\beta\mu\nu}) \sqrt{-g}\, d^4$$

Variando-a independentemente em relação à conexão e à métrica, igualando o resultado a zero e impondo que o espaço seja de Riemann, encontramos (ver referência [15]):

$$(2.17) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Usando as identidades de Bianchi:

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = R^{\alpha\mu;\beta} - R^{\mu\beta;\alpha} \Rightarrow R^{\alpha\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} R^{,\alpha} \quad \text{temos:}$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu};\ \nu = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(R^{\mu\alpha;\beta} - R^{\mu\beta;\alpha}\right) + \frac{1}{12}\left(R^{,\alpha} g^{\beta\mu} - R^{,\beta} g^{\alpha\mu}\right) = 0$$

que tem como solução particular $R_{\mu\nu} = 0$.

A equação de Einstein ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -k\, T_{\mu\nu}$, que quando $T_{\mu\nu} = 0$ nos dá $R^{\mu\nu} = 0$) é uma equação algébrica em $R_{\mu\nu}$ e dinâmica em $g_{\mu\nu}$ já que envolve derivadas de 2ª ordem deste tensor. Mas o tensor métrico não é um observável da teoria. Um observador é sempre um conjunto de réguas e relógios que se move ao longo de uma curva no espaço-tempo, bem como as partículas sobre as quais ele faz as medidas. Se esta curva é geodésica então, sendo:

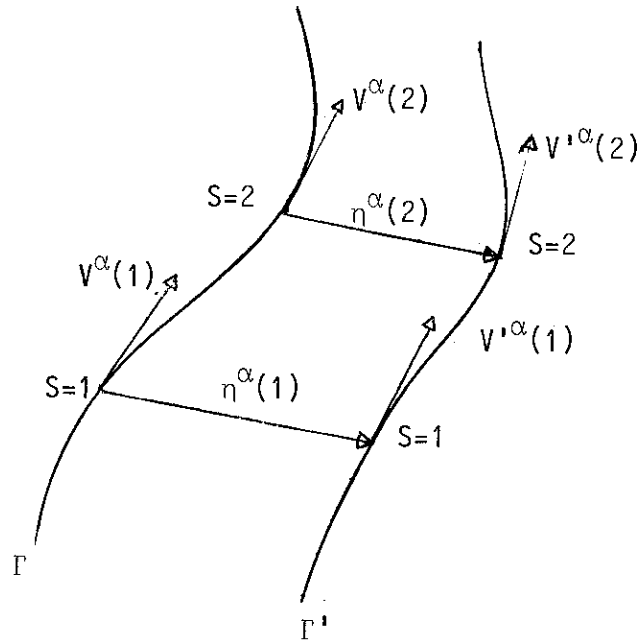
$$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds},\quad \frac{DV^{\mu}}{Ds} = V^{\mu}{}_{;\nu} V^{\nu} \quad \text{e} \quad \frac{dV^{\mu}}{ds} = V^{\mu}{}_{,\nu} V^{\nu}$$

onde s é o parâmetro sobre a curva geodésica teremos:

$$\frac{DV^{\mu}}{Ds} = \frac{dV^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} V^{\alpha} V^{\nu} = 0$$

Mas sempre é possível ir-se para um sistema de coordenadas onde a conexão $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ se anula ao longo desta curva. Portanto, medir-se geodésicas não nos dá informação suficiente sobre a existência do campo gravitacional.

Seja agora uma outra curva geodésica da mesma família desta. Seja $\eta^{\alpha}(s)$ o vetor que nos dá a separação entre estas curvas, como mostra a figura 2.1:



A equação de evolução de η^{α} é dada por:

(2.18) $$\frac{D^2 \eta^{\alpha}}{Ds^2} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} \eta^{\mu} V^{\nu}$$ (ver referência (16))

Esta equação nos dá uma forma de medir o tensor de Riemann que só é nulo se não houver campo gravitacional (espaço plano). Este tensor é, portanto, o observável da teoria (veja[27]) e é natural que se procure uma equação dinâmica para ele. A equação (2.17) é uma excelente candidata pois, além de ser uma equação dinâmica para $W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ (que envolve o tensor de curvatura), ela propaga as equações de Einstein no vazio ($R_{\mu\nu} = 0$), válidas numa dada hiper-superfície tipo-espaço (isto é, cuja normal em todos os pontos é tipo-tempo), ao longo de uma região do espaço-tempo que contém esta superfície[17].

Note agora que a equação (2.17), que nos daria a dinâmica do campo gravitacional no vazio, é similar à equação (2.4) quando $j^{\mu} = 0$, isto é, no vazio de cargas. Isto nos leva a dizer que o tensor $C^{\alpha\beta\mu\nu}$, que no espaço de Riemann é o tensor $W^{\alpha\beta\mu\nu}$, faz para a gravitação o mesmo papel que $F^{\mu\nu}$ faz para o Eletromagnetismo. O tensor $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ tem todos os tra ços nulos, como $F^{\mu\nu}$, além de haver semelhanças entre a ação (2.16) e $\int \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x$.

Extrapolaremos agora esta analogia para a Eletrodinâmica em meios polarizados. Sejam os invariantes C_1 e C_2 definidos por:

$$(2.19) \qquad C_1 = \frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{1}{8} \overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde $\overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = C^{\alpha^*\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} C_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu}$

Pelas propriedades do tensor de Weyl, $C^{\alpha^*\beta\mu\nu} = C^{\alpha\beta\mu^*\nu}$.

Seguindo o exemplo da seção (i), diremos que a Lagrangeana L em (2.16) deva ser modificada pela presença de flutuações quânticas do campo gravitacional, podendo ser uma função qualquer de C_1 e C_2.

(2.20) $\qquad L = L\,(C_1, C_2)$ onde C_1 e C_2 são calculados utilizando-se os valores médios das quantidades envolvidas.

A ação $S = \int L \sqrt{-g}\, d^4x$ teria como variáveis independentes $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ e $g_{\mu\nu}$.

Note que, em Gravitação, existiria a possibilidade de termos outros invariantes métricos a serem incluídos na Lagrangeana.

$$C_3 = \frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} C_{\rho\sigma\alpha\beta} \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{1}{8} \overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} C_{\rho\sigma\alpha\beta}$$

o que não acontece no Eletromagnetismo onde $F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\ \beta} F_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda} \overset{*}{F}_{\alpha}^{\ \beta} F_{\beta\lambda} = 0$ [18]. Neste trabalho não consideraremos Lagrangeana envolvendo estes invariantes.

Continuando esta analogia definiremos:

$$(2.21) \qquad Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu} = 4 \frac{\delta L}{\delta C^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu}}$$ que tem todas as simetrias do tensor $C_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}$.

$$(2.22) \qquad Q_1 = \frac{1}{8} Q^{\alpha\beta\mu\nu} Q_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{1}{8} \overset{*}{Q}^{\alpha\beta\mu\nu} Q_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Defini-se então uma função H de Q_1 e Q_2 como em (2.8):

$$H\ (Q_1, Q_2) = \frac{1}{4} C^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu} - L\ (C_1, C_2)$$

A ação fica:

$$S = \int L \sqrt{-g}\ d^4 = \int \left[\frac{1}{4} C^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu} - H\ (Q_1, Q_2) \right] \sqrt{-g}\ d^4x$$

onde as variáveis independentes são $Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$.

Variando-se a ação em relação a estas variáveis e igualando o resultado a zero obtemos (veja apêndice B)

$$(2.23) \qquad \frac{\delta S}{\delta \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\mu}} = 0 \Rightarrow (\sqrt{-g}\ Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu})_{;\nu} = 0$$

$$(2.24) \qquad \frac{\delta S}{\delta Q_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}} = 0 \Rightarrow C^{\alpha\beta\mu\nu} = H_{Q_1} Q^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_2} \overset{*}{Q}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde $H_{Q_1} = \frac{\partial H}{\partial Q_1}$ e $H_{Q2} = \frac{\partial H}{\partial Q_2}$

(2.25) $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow H = H_{Q_1} Q_1 + H_{Q2} Q_2$

o que nos dá um vínculo sobre a função de estrutura H. A forma geral que deve ter H para que satisfaça (2.25) é:

$$H(Q_1, Q_2) = Q_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^n + Q_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^n$$

onde a_n e b_n são funções arbitrárias das coordenadas x^μ.

Se o espaço é de Riemann, $\sqrt{-g};\nu = 0$ (veja apêndice B) e $Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu};\ \nu = 0$.

Neste caso $C^{\alpha\beta\mu\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}$ e as equações (2.23), (2.24) e (2.25) ficam:

(2.26) $Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu};\nu = 0$

(2.27) $W^{\alpha\beta\mu\nu} = H_{Q_1} Q^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_2} \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$

(2.28) $H = H_{Q_1} Q_1 + H_{Q_2} Q_2$

Quando não há flutuações quânticas do campo gravitacional a função H toma a forma $H = Q_1$ pois, de (2.27) vem que $W^{\alpha\beta\mu\nu} = Q^{\alpha\beta\mu\nu}$ e substituindo em (2.26) temos que $W^{\alpha\beta\mu\nu};\nu=0$ que é justamente a equação (2.17), já discutida. Vê-se portanto que (2.17) é um caso particular do sistema formado por (2.26), (2.27) e (2.28). Note ainda que $H = Q_1$ satisfaz (2.28).

Seja agora um observador V^{μ}. A parte elétrica e magnética do tensor de Weyl, segundo este observador é:

$$E^{\alpha\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}\, V_{\beta}\, V_{\mu} \quad \text{e} \quad B^{\alpha\nu} = \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\, V_{\beta}\, V_{\mu} \tag{2.29}$$

Analogamente definimos:

$$D^{\alpha\nu} = Q^{\alpha\beta\mu\nu}\, V_{\beta}\, V_{\mu} \quad \text{e} \quad H^{\alpha\nu} = \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\, V_{\beta}\, V_{\mu} \tag{2.30}$$

Projetando (2.27) em V_{μ} obtemos, como em (2.11) e (2.12):

$$E^{\mu\nu} = H_{Q_1}\, D^{\mu\nu} + H_{Q_2}\, H^{\mu\nu} \tag{2.31}$$

$$B^{\mu\nu} = -H_{Q_2}\, D^{\mu\nu} + H_{Q_1}\, H^{\mu\nu} \tag{2.32}$$

Tirando $D^{\mu\nu}$ e $B^{\mu\nu}$ em função de $E^{\mu\nu}$ e $H^{\mu\nu}$ temos:

$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{H_{Q_1}}\, E^{\mu\nu} - \frac{H_{Q_2}}{H_{Q_1}}\, H^{\mu\nu}$$

$$B^{\mu\nu} = \frac{H^2_{Q_1} + H^2_{Q_2}}{H_{Q_1}}\, H^{\mu\nu} - \frac{H_{Q_2}}{H_{Q_1}}\, E^{\mu\nu}$$

Estas são as relações constitutivas que ligam $D^{\mu\nu}$ e $B^{\mu\nu}$ com $E^{\mu\nu}$ e $H^{\mu\nu}$, análogos a D^{μ}, B^{μ}, E^{μ} e H^{μ} no caso eletromagnético. A função $H(Q_1, Q_2)$ determina completamente os coeficientes destas relações que, por uma analogia com as equações

(2.13) e (2.14), podem ser identificadas com a "constante dielétrica" ε e a "permeabilidade magnética" μ deste "meio gravitacional polarizado", polarização esta não mais causada por átomos ou moléculas como no caso eletromagnético mas sim pelas flutuações quânticas do campo gravitacional.

Portanto, a função *H* traz dentro de si as informações sobre os efeitos das flutuações quânticas no comportamento do campo gravitacional possibilitando um tratamento simples, belo e esclarecedor destes efeitos por sua analogia formal com a Eletrodinâmica em meios polarizados. Podemos, por exemplo, presumir que, para determinadas funções de estrutura, será possível encontrar soluções tipo onda para o campo $E^{\mu\nu}$ (ondas gravitacionais) que se propaguem com velocidade menor que a da luz já que isto acontece no caso eletromagnético. Mas isto será assunto para os próximos capítulos.

CAPÍTULO III

REPRESENTAÇÃO QUASE-MAXWELLIANA DA TEORIA

No capítulo anterior, formulamos equações macroscópicas para a Gravitação. Desenvolveremos aqui estas equações e as colocaremos na sua representação Quase-Maxwelliana com o intuito de, no capítulo seguinte, aplicá-la em teoria de perturbação por ser a mais apropriada para este tipo de teoria (16).

i) Desenvolvimento das Equações Macroscópicas da Gravitação

No capítulo II estabelecemos as seguintes relações:

(3.1) $$Q^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

(3.2) $$W^{\alpha\beta\mu\nu} = H_{Q_1}\, Q^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_2}\, \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

(3.3) $$H = H_{Q_1}\, Q_1 + H_{Q_2}\, Q_2$$

Como $Q^{\alpha\beta\mu\nu}$ tem as mesmas simetrias do tensor de Weyl então, de (3.1) vem que, considerando que o espaço é de Riemann:

(3.4) $$\frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\beta\rho\sigma}\, Q_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow Q^{\overset{*}{\alpha}\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Tirando a divergência covariante de (3.2) e utilizando (3.4) e (3.1) obtemos:

$$(3.5) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = H_{Q_1,\nu}\, Q^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_2,\nu}\, \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

A relação dual à (3.2) é:

$$(3.6) \qquad \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = - H_{Q_2}\, Q^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_1}\, \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Podemos escrever (3.2) e (3.6) da seguinte forma:

$$(3.7) \qquad \begin{pmatrix} W^{\alpha\beta\mu\nu} \\ \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{Q_1} & H_{Q_2} \\ - H_{Q_2} & H_{Q_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{\alpha\beta\mu\nu} \\ \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \end{pmatrix}$$

Se $H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2} \neq 0$, ou seja, se $H_{(Q_1,Q_2)}$ depende explicitamente de Q_1 ou Q_2, que são os casos de interesse físico, podemos inverter a relação (3.7) encontrando:

$$\begin{pmatrix} Q^{\alpha\beta\mu\nu} \\ \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2}} \begin{pmatrix} H_{Q_1} & -H_{Q_2} \\ H_{Q_2} & H_{Q_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\alpha\beta\mu\nu} \\ \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \end{pmatrix}$$

Substituindo este resultado em (3.5) encontramos:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \Big[H_{Q_1,\nu} \left(H_{Q_1} W^{\alpha\beta\mu\nu} - H_{Q_2} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\right) + $$

$$+ H_{Q_2,\nu} \left(H_{Q_2} W^{\alpha\beta\mu\nu} + H_{Q_1} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\right) \Big] \frac{1}{H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2}} =$$

$$= W^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{(H_{Q_1,\nu} H_{Q_1} + H_{Q_2,\nu} H_{Q_2})}{H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2}} + \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{(H_{Q_2,\nu} H_{Q_1} - H_{Q_1,\nu} H_{Q_2})}{H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2}}$$

Assim:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}\left[\ell n(H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2})\right]_{,\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{H^2{}_{Q_1}}{H^2{}_{Q_1}+H^2{}_{Q_2}} \quad \frac{H_{Q_2}}{H_{Q_1}}{}_{,\nu} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Definindo:

$$(3.8) \qquad \Phi_\nu \equiv \frac{1}{2}\left[\ell n\,(H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2})\right]_{,\nu}$$

$$(3.9) \qquad \Lambda_\nu \equiv \frac{H^2{}_{Q_1}}{H^2{}_{Q_1} + H^2{}_{Q_2}} \left(\frac{H_{Q_2}}{H_{Q_1}}\right)_{,\nu}$$

teremos:

$$(3.10) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \Phi_\nu\, W^{\alpha\beta\mu\nu} + \Lambda_\nu\, \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

ii) Representação Quase-Maxwelliana da teoria

Seja V^μ o vetor tangente a uma curva numa varieda de de dimensão 4 que representa o espaço-tempo físico. Seja agora um observador que descreva esta curva. Se ele é um obser vador físico então V^μ tem de ser um vetor tipo tempo ($V^\mu\, V\mu>0$) para que em cada ponto ele viaje dentro de cones de luz locais. Normalizando V^μ temos: $V^\mu\, V_\mu = 1$.

Definamos o tensor $h_{\mu\nu}$ cuja ação é projetar veto res no tri-espaço ortogonal a V^μ:

$$(3.11) \qquad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu\, V_\nu$$

Vê-se que $h_{\mu\nu}$ é efetivamente um tensor de projeção ortogonal a V^{μ}:

a) Qualquer $\hat{\eta}^{\mu}$ tal que $\hat{\eta}^{\mu} = h^{\mu}{}_{\nu}\,\eta^{\nu}$ é ortogonal a V^{μ}:

$$V_{\mu}\,\hat{\eta}^{\mu} = V_{\mu}\,h^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\nu} = V_{\mu}\,(\delta^{\mu}{}_{\nu} - V^{\mu}V_{\nu})\eta^{\nu} = (V_{\nu} - V_{\nu})\eta^{\nu} = 0$$

b) $$h^{\mu\nu}\,h_{\nu}{}^{\alpha} = h^{\mu\alpha} \quad \text{pois:}$$

$$h^{\mu\nu}h_{\nu}{}^{\alpha} = (g^{\mu\nu} - V^{\mu}V^{\nu})\,(\delta_{\nu}{}^{\alpha} - V_{\nu}V^{\alpha}) = g^{\mu\alpha} - V^{\mu}V^{\alpha} - V^{\mu}V^{\alpha} + V^{\mu}V^{\alpha} =$$

$$= g^{\mu\alpha} - V^{\mu}V^{\alpha} = h^{\mu\alpha}$$

Além disso, podemos identificar $h_{\mu\nu}$ como a métrica do sub-espaço H formado pelos vetores ortogonais a V^{μ} pois:

$$ds^{2} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} - V_{\mu}V_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + V_{\mu}V_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} =$$

$$= h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + (V_{\mu}dx^{\mu})^{2}$$

onde identificamos $dl = \sqrt{h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}$ com uma distância puramente espacial e $dt = V_{\mu}dx^{\mu}$ com um intervalo de tempo (veja (*16*)) para entender o significado físico destes intervalos.

Se t é uma coordenada global do espaço-tempo então dt é uma 1- forma diferenciável e os sub-espaços H em cada ponto sob a curva de vetor tangente V^{μ} se fundem formando uma hipersuperfície S. Para verificarmos esta afirmação, derivemos exteriormente dt:

$$d(dt) = d(V_\mu dx^\mu) = V_{\mu,\nu}\, dx^\nu \wedge dx^\mu$$

Como dt é uma 1- forma diferenciável então d(dt)=0

Assim:

$V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu} = 0 \iff V_\mu = \phi_{,\mu}$ e a superfície S é definida pela equação: $\Phi = c$ onde c é uma constante qualquer .

Podemos então induzir uma afinidade sobre S definindo o operador:

$$\nabla_\mu Y_\nu \equiv h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta Y_{\beta;\alpha} \qquad (3.12)$$

onde $Y_\nu (x^\mu)$ pertence a S

Vê-se facilmente que $\nabla_\alpha h_{\mu\nu} = h_\alpha{}^\beta h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma;\beta} = 0$

Definidos V_μ e $h_{\mu\nu}$, podemos usá-los para projetar a equação (3.10) de quatro maneiras diferentes.

Como ilustração, tomemos mais uma vez o exemplo do Eletromagnetismo no espaço de Minkowski, na ausência de cargas. Neste caso, os campos vetoriais V_μ representam observadores inerciais. Assim:

$$V_{\mu,\nu} = 0$$

As equações de Maxwell são:

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (3.13)$$

$$F^{\mu *\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (3.14)$$

Projetando estas equações em V_μ temos:

a) de (3.13):

$$V_\mu \, F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = (V_\mu \, F^{\mu\nu})_{,\nu} = - E^{\nu}{}_{,\nu} = 0$$

b) de (3.14):

$$V_\mu \, \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = (V_\mu \, \overset{*}{F}{}^{\mu\nu})_{,\nu} = - B^{\nu}{}_{,\nu} = 0$$

Projetando agora em $h^{\alpha}{}_{\mu}$ e usando que

$F^{\mu\nu} = - V^{\mu}E^{\nu} + V^{\nu}E^{\mu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma}V_\rho B_\sigma$ temos:

a) de (3.13) e notando que $V_\mu E^\mu = - V_\mu F^{\mu\nu}V_\nu = 0 = V_\mu B^\mu$:

$$h^{\alpha}{}_{\mu} \, F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = h^{\alpha}{}_{\mu} \, (-V^{\mu}E^{\nu}{}_{,\nu} + V^{\nu}E^{\mu}{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, V_\rho B_{\sigma,\nu}) =$$

$$= - h^{\alpha}{}_{\mu} V^{\mu}E^{\nu}{}_{,\nu} + V^{\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}E^{\mu}{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, V_\rho B_{\sigma,\nu} \, h^{\alpha}{}_{\mu} =$$

$$= V^{\nu}E^{\alpha}{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, V_\rho B_{\sigma,\nu}\delta^{\alpha}{}_{\mu} - \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, B_{\sigma,\nu} \, V_\rho \, V^{\alpha} \, V_\mu =$$

$$= \dot{E}^{\alpha} + \eta^{\alpha\nu\rho\sigma} \, V_\rho B_{\sigma,\nu} = 0 \qquad \text{onde} \qquad E^{\alpha}{}_{,\nu}V^{\nu} = \dot{E}^{\alpha}$$

b) de (3.14)

$$h^{\alpha}{}_{\mu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = h^{\alpha}{}_{\mu} \, (-V^{\mu}B^{\nu}{}_{,\nu} + V^{\nu}B^{\mu}{}_{,\nu} - \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, V_\rho E_{\sigma,\nu}) =$$

$$= \dot{B}^{\alpha} - \eta^{\alpha\nu\rho\sigma} E_{\sigma,\nu} V_{\rho} = 0$$

Portanto, as equações (3.13) e (3.14) quando projetadas nos dão:

$$E^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad B^{\nu}{}_{,\nu} = 0$$

$$\dot{E}^{\alpha} + \eta^{\alpha\nu\rho\sigma} V_{\rho} B_{\sigma,\nu} = 0 \qquad \dot{B}^{\alpha} - \eta^{\alpha\nu\rho\sigma} V_{\rho} E_{\sigma,\nu} = 0$$

Quando $V^{\mu} = \delta^{\mu}_{o}$ e como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ teremos:

$$E^{\nu} = -F^{\mu\nu} V_{\mu} = -F^{\mu\nu}\eta_{\mu o} = -F^{\mu\nu}\,\delta_{\mu}^{o} = -F^{o\nu}$$

$$B^{\nu} = -\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} V_{\mu} = -\overset{*}{F}{}^{o\nu}$$

Notando que $\eta^{\alpha\nu\rho\sigma} = -\dfrac{\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}$, o conjunto de equações (3.15) fica:

$$E^{a}{}_{,a} = 0 \qquad B^{a}{}_{,a} = 0$$

$$\dot{E}^{a} - \varepsilon^{abc} B_{c,b} = 0 \qquad \dot{B}^{a} + \varepsilon^{abc} E_{c,b} = 0$$

que em notação vetorial é:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Estas são as equações de Maxwell em termos dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, que são as quantidades medidas no laboratório.

Vê-se, portanto que projetar equações tensoriais em direções definidas por V^{μ} e $h_{\mu\nu}$ é no fundo apresentá-las em termos de quantidades mensuráveis pois para usarmos réguas e relógios é preciso definir direções tipo-espaço e tipo-tempo , respectivamente, no cone de luz local. Os tensores V_{μ} e $h_{\mu\nu}$ nos definem estas direções.

Motivados pelo exemplo do Eletromagnetismo projetaremos também a equação (3.10). A diferença aqui é que (3.10) possue um grau de tensorialidade maior que as equações do Eletromagnetismo e portanto as projeções deverão ter também um maior grau de tensorialidade que no exemplo eletromagnético.As projeções que faremos em (3.10) são:

a) $V^{\beta}\ V^{\mu}\ h^{\alpha\rho}$

b) $\eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\ V_{\lambda}\ V^{\mu}$

c) $h^{\mu(\sigma}{}_{\eta}{}^{\rho)\lambda\alpha\beta}\ V_{\lambda}$

d) $V^{\beta}\ h^{\mu(\rho}{}_{h}{}^{\sigma)\alpha}$

onde $A^{(\rho\sigma)} = A^{\rho\sigma} + A^{\sigma\rho}$ e $A^{[\rho\sigma]} = A^{\rho\sigma} - A^{\sigma\rho}$

Os cálculos das projeções do lado esquerdo de (3.10) se encontram na referência (16). Preocupemo-nos com o lado di reito, $\psi_\nu W^{\alpha\beta\mu\nu} + \Lambda_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = J^{\alpha\beta\mu}$

a) $$V_\beta V_\mu h_{\alpha\rho} (\psi_\nu W^{\alpha\beta\mu\nu} + \Lambda_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}) = h_{\alpha\rho} E^{\alpha\nu}\psi_\nu + h_{\alpha\rho} B^{\alpha\nu} \Lambda_\nu =$$

$$= E_\rho{}^\nu \psi_\nu + B_\rho{}^\nu \Lambda_\nu$$

pois $V\alpha E^{\alpha\nu} = V_\alpha W^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta V_\mu = 0 = V_\alpha B^{\alpha\nu}$

b) $$\eta_{\rho\lambda\alpha\beta} V^\lambda V_\mu (\psi_\nu W^{\alpha\beta\mu\nu} + \Lambda_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}) = 2\psi_\nu \overset{*}{W}{}_{\rho\lambda}{}^{\mu\nu} V^\lambda V_\mu +$$

$$- 2\Lambda_\nu W_{\rho\lambda}{}^{\mu\nu} V^\lambda V_\mu = 2 (B_\rho{}^\nu \psi_\nu - E_\rho{}^\nu \Lambda_\nu)$$

c) Aqui usaremos as relações (ver referência (16)):

$$W_{\alpha\beta\gamma\sigma} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\gamma\delta\lambda\rho} - g_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\gamma\delta\lambda\rho}) V^\mu V^\lambda E^{\nu\rho} + \tag{3.16}$$

$$+ (\eta_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\gamma\delta\lambda\rho} + g_{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\gamma\delta\lambda\rho}) V^\mu V^\lambda B^{\nu\rho}$$

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\theta\varepsilon} = - (g_{\theta\varepsilon\lambda\rho} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} + \eta_{\lambda\rho\theta\varepsilon} g_{\alpha\beta\mu\nu}) V^\mu V^\lambda E^{\nu\rho} + \tag{3.17}$$

$$+ (\eta_{\lambda\rho\theta\varepsilon} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} - g_{\theta\varepsilon\lambda\rho} g_{\alpha\beta\mu\nu}) V^\mu V^\lambda B^{\nu\rho}$$

Além disso:

$$V^\lambda V^\theta g_{\mu\lambda\theta\tau} = V^\lambda V^\theta (g_{\mu\theta} g_{\lambda\tau} - g_{\lambda\theta} g_{\mu\tau}) = V_\mu V_\tau - g_{\mu\tau} = -h_{\mu\tau}$$

Assim:

i) $$h_{\mu}{}^{\sigma} \quad \eta^{\rho}{}_{\lambda\alpha\beta} V^{\lambda} \; W^{\alpha\beta\mu\nu} \; \psi_{\nu} =$$

$$= h^{\gamma\sigma} \; \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} \; V_{\lambda} \; W_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \; \psi^{\varepsilon} = 2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V_{\lambda} \; \overset{*}{W}{}^{\rho\lambda}{}_{\gamma\varepsilon} =$$

$$= -2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V^{\lambda} \; g^{\rho\mu} \Big[(g_{\gamma\varepsilon\alpha\beta} \; \eta_{\mu\lambda\theta\tau} + \eta_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \; g_{\mu\lambda\theta\tau}) V^{\theta} V^{\alpha} E^{\tau\beta} +$$

$$-(\eta_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \; \eta_{\mu\lambda\theta\tau} - g_{\gamma\varepsilon\alpha\beta} \; g_{\mu\lambda\theta\tau}) \; V^{\theta} V^{\alpha} B^{\tau\beta} \Big] =$$

$$= -2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V^{\lambda} \; g^{\rho\mu} \; V^{\theta} \; V^{\alpha} \; E^{\tau\beta} \; g_{\gamma\varepsilon\alpha\beta} \; \eta_{\mu\lambda\theta\tau} +$$

$$-2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V^{\lambda} \; g^{\rho\mu} \; V^{\theta} \; V^{\alpha} \; E^{\tau\beta} \; \eta_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \; g_{\mu\lambda\theta\tau} +$$

$$+2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V^{\lambda} \; g^{\rho\mu} \; V^{\theta} \; V^{\alpha} \; B^{\tau\beta} \; \eta_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \; \eta_{\mu\lambda\theta\tau} +$$

$$-2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; V^{\lambda} \; g^{\rho\mu} \; V^{\theta} \; V^{\alpha} \; B^{\tau\beta} \; g_{\gamma\varepsilon\alpha\beta} \; g_{\mu\lambda\theta\tau} =$$

$$= 0 + 2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; g^{\rho\mu} \; h_{\mu\tau} \; V^{\alpha} \; E^{\tau\beta} \; \eta_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + 0 +$$

$$+ 2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; g^{\rho\mu} \; h_{\mu\tau} \; V^{\alpha} \; B^{\tau\beta} \; (g_{\gamma\alpha} \; g_{\varepsilon\beta} - g_{\gamma\beta} \; g_{\varepsilon\alpha}) =$$

$$= 0 + 2\eta_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{\varepsilon} \; \psi^{\varepsilon} \; E^{\rho\beta} + 0 + 2\psi^{\varepsilon} \; h^{\gamma\sigma} \; g^{\rho\mu} \; h_{\mu\tau} \; V_{\gamma} \; B^{\tau}{}_{\varepsilon} +$$

$$-2\psi^{\varepsilon} \; h^{\sigma}{}_{\beta} \; g^{\rho\mu} \; h_{\mu\tau} \; V_{\varepsilon} \; B^{\tau\beta} =$$

$$= 2\eta_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{\varepsilon} \; \psi^{\varepsilon} \; E^{\rho\beta} + 0 - 2\psi^{\varepsilon} \; V_{\varepsilon} \; B^{\rho\sigma}$$

Ao simetrizarmos temos:

$$h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)}{}_{\lambda\alpha\beta}\, V^{\lambda}\, W^{\alpha\beta\mu\nu}\, \psi_{\nu} = 2\left[\eta^{\alpha\varepsilon\beta(\sigma}E^{\rho)}{}_{\beta}\, V_{\alpha}\, \psi_{\varepsilon} - 2V_{\varepsilon}\, \psi^{\varepsilon}\, B^{\rho\sigma}\right]$$

pois $B^{(\rho\sigma)} = 2B^{\rho\sigma}$ já que $B^{\rho\sigma}$ é um tensor simétrico.

ii) O termo $h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)}{}_{\lambda\alpha\beta}\, V^{\lambda}\, \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\, \Lambda_{\nu}$ é obtido do anterior trocando-se $E_{\rho\sigma}$ por $B_{\rho\sigma}$, $B_{\rho\sigma}$ por $-E_{\rho\sigma}$ e ψ_{ε} por Λ_{ε}, como se pode inferir das equações (3.16) e (3.17). Assim:

$$h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)}{}_{\lambda\alpha\beta}\, V^{\lambda}\, J^{\alpha\beta\mu} = 4\left(\frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\varepsilon\beta(\sigma}E^{\rho)}{}_{\beta}\, V_{\alpha}\, \psi_{\varepsilon} - V_{\varepsilon}\, \psi^{\varepsilon}\, B^{\rho\sigma} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\varepsilon\beta(\sigma}B^{\rho)}{}_{\beta}\, V_{\alpha}\, \Lambda_{\varepsilon} + V_{\varepsilon}\, \Lambda^{\varepsilon}\, E^{\rho\sigma}\right)$$

d) Cálculo de $V^{\beta}\, h^{\gamma(\rho}h^{\sigma)\alpha}\, J_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\text{i)}\quad V^{\beta}\, h^{\gamma\rho}\, h^{\sigma\alpha}\, \psi^{\varepsilon}\, W_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = V^{\beta}\, h^{\gamma\rho}\, h^{\sigma\alpha}\, \psi^{\varepsilon}\Big[(\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\, \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta} -$$

$$- g_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\gamma\varepsilon\lambda\theta})\, V^{\mu}V^{\lambda}E^{\nu\theta} + (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\, g_{\gamma\varepsilon\lambda\theta} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\, \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta})\, V^{\mu}V^{\lambda}B^{\nu\theta}\Big] =$$

$$= V^{\beta}\, h^{\gamma\rho}\, h^{\sigma\alpha}\, \psi^{\varepsilon}\, \eta_{\alpha\beta\mu\nu}\, \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta}\, V^{\mu}\, V^{\lambda}\, E^{\nu\theta} +$$

$$- V^{\beta}\, h^{\gamma\rho}\, h^{\sigma\alpha}\, \psi^{\varepsilon}\, g_{\alpha\beta\mu\nu}\, g_{\gamma\varepsilon\lambda\theta}\, V^{\mu}\, V^{\lambda}\, E^{\nu\theta} +$$

$$+ V^{\beta}\, h^{\gamma\rho}\, h^{\sigma\alpha}\, \psi^{\varepsilon}\, \eta_{\alpha\beta\mu\nu}\, g_{\gamma\varepsilon\lambda\theta}\, V^{\mu}\, V^{\lambda}\, B^{\nu\theta} +$$

$$+ V^{\beta} h^{\gamma\rho} h^{\sigma\alpha} \psi^{\varepsilon} g_{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta} V^{\mu} V^{\lambda} B^{\nu\theta} =$$

$$= 0 + h^{\gamma\rho} h_{\alpha\nu} h^{\sigma\alpha} \psi^{\varepsilon} (g_{\gamma\lambda} g_{\varepsilon\theta} - g_{\varepsilon\lambda} g_{\gamma\theta}) V^{\lambda} E^{\nu\theta} + 0$$

$$- h^{\gamma\rho} h_{\alpha\nu} h^{\sigma\alpha} \psi^{\varepsilon} \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta} V^{\lambda} B^{\nu\theta} =$$

$$= 0 - h^{\rho}{}_{\theta} h^{\sigma}{}_{\nu} \psi^{\varepsilon} V_{\varepsilon} E^{\nu\theta} - h^{\gamma\rho} h^{\sigma}{}_{\nu} \psi^{\varepsilon} \eta_{\gamma\varepsilon\lambda\theta} V^{\lambda} B^{\nu\theta} =$$

$$= -\psi^{\varepsilon} V_{\varepsilon} E^{\rho\sigma} - \psi_{\varepsilon} V_{\lambda} \eta^{\rho\varepsilon\lambda\theta} B^{\sigma}{}_{\theta} = -\psi^{\varepsilon} V_{\varepsilon} + \psi_{\varepsilon} V_{\lambda} \eta^{\varepsilon\lambda\theta\rho} B^{\sigma}{}_{\theta}$$

Simetrizando temos:

$$V^{\beta} h^{\gamma(\rho} h^{\sigma)\alpha} \psi^{\varepsilon} W_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = -2\psi^{\varepsilon} V_{\varepsilon} E^{\rho\sigma} + \psi_{\varepsilon} V_{\lambda} \eta^{\varepsilon\lambda\theta(\rho} B^{\sigma)}{}_{\theta}$$

ii) $V^{\beta} h^{\gamma(\rho} h^{\sigma)\alpha} \Lambda^{\varepsilon} \overset{*}{W}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = -2\Lambda^{\varepsilon} V_{\varepsilon} B^{\rho\sigma} - \Lambda^{\varepsilon} V_{\lambda} \eta^{\varepsilon\lambda\theta(\rho} E^{\sigma)}{}_{\theta}$

(Trocamos $E_{\rho\sigma}$ por $B_{\rho\sigma}$, $B_{\rho\sigma}$ por $-E_{\rho\sigma}$ e ψ_{ε} por Λ_{ε})

Portanto:

$$V^{\beta} h^{\mu(\rho} h^{\sigma)\alpha} J_{\alpha\beta\mu} = 2\left[-\psi^{\varepsilon} V_{\varepsilon} E^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \psi_{\varepsilon} V_{\lambda} \nu^{\varepsilon\lambda\theta(\rho} B^{\sigma)}{}_{\theta} + - \Lambda^{\varepsilon} V_{\varepsilon} B^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \Lambda_{\varepsilon} V_{\lambda} \eta^{\varepsilon\lambda\theta(\rho} E^{\sigma)}{}_{\theta} \right]$$

As projeções a), b), c) e d) aplicadas em $W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}$ nos dão (16):

$$a)\quad h^{\alpha\sigma}\, h^{\gamma\delta}\, E_{\alpha\delta;\sigma} + \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu}\, V^{\beta}\, B^{\nu\delta}\, \Sigma^{\mu}{}_{\delta} + 3B^{\sigma\nu}\, W_{\nu}$$

$$b)\quad 2\left[h^{\alpha\sigma}\, h^{\gamma\delta}\, B_{\alpha\delta;\sigma} - \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu}\, V^{\beta}\, E^{\nu\delta}\, \Sigma^{\mu}{}_{\delta} - 3E^{\sigma\nu}\, W_{\nu}\right]$$

$$c)\quad 4\Big[-h^{\rho}{}_{\mu}\, h^{\sigma}{}_{\nu}\, \dot{B}^{\mu\nu} - \theta\, B^{\rho\sigma} + a_{\alpha}\, E_{\beta}{}^{(\rho}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} +$$

$$- \frac{1}{2}\, E^{\mu}{}_{\beta;\alpha}\, h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} + \frac{1}{2}\, B_{\nu}{}^{(\rho}h^{\sigma)}{}_{\nu}\, V^{\mu}{}_{;\nu} +$$

$$+ \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\, \eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\, V_{\mu}\, V_{\lambda}\, B_{\delta\alpha}\, \theta_{\beta\nu}\Big]$$

$$d)\quad 2\Big[-h^{\rho}{}_{\mu}\, h^{\sigma}{}_{\nu}\, \dot{E}^{\mu\nu} - \theta E^{\rho\sigma} - a_{\alpha}\, B^{(\rho}{}_{\beta}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, B^{\mu}{}_{\beta;\alpha}\, h^{(\sigma}{}_{\mu}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} + \frac{1}{2}\, E_{\nu}{}^{(\rho}h^{\sigma)}{}_{\mu}\, V^{\mu}{}_{;\nu} +$$

$$+ \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\, \eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\, V_{\mu}\, V_{\lambda}\, E_{\delta\alpha}\theta_{\beta\nu}\Big]$$

onde, sendo $Q_{\alpha\beta} = V_{\alpha;\beta} - \dot{V}_{\alpha}\, V_{\beta}$, temos:

$$\theta = Q^{\alpha}{}_{\alpha};\quad \Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, Q_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}\, \theta\, h_{\alpha\beta}\ ;\quad W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, Q_{[\alpha\beta]};$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, Q_{(\alpha\beta)};\quad a_{\alpha} = \dot{V}_{\alpha} = V_{\alpha;\beta}\, V^{\beta}\ ;\quad W^{\alpha} = -\frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\, W_{\beta\delta}\, V_{\delta}$$

Portanto, as equações projetadas são:

$$(3.18)\qquad a)\ h^{\alpha\sigma}\, h^{\delta\gamma}\, E_{\alpha\delta;\gamma} + \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu}\, V^{\beta}\, B^{\nu\delta}\, \Sigma^{\mu}{}_{\delta} + 3\, B^{\sigma\nu}\, W_{\nu} =$$

$$= E^{\sigma\varepsilon}\,\psi_{\varepsilon} + B^{\sigma\varepsilon}\,\Lambda_{\varepsilon}$$

$$\text{(3.19) b)}\quad h^{\alpha\sigma}\,h^{\delta\gamma}\,B_{\alpha\delta;\gamma} - \eta^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu}\,V^{\beta}\,E^{\nu\delta}\,\Sigma^{\mu}{}_{\delta} - 3E^{\sigma\nu}\,W_{\nu} =$$

$$= B^{\sigma\varepsilon}\,\psi_{\varepsilon} - E^{\sigma\varepsilon}\,\Lambda_{\varepsilon}$$

$$\text{(3.20) c)}\quad h^{\rho}{}_{\mu}\,h^{\sigma}{}_{\nu}\,\dot{B}^{\mu\nu} + \theta\,B^{\rho\sigma} - a_{\alpha}\,E_{\beta}{}^{(\rho}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\,V_{\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,E^{\mu}{}_{\beta;\alpha}\,h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}\,V_{\lambda} - \frac{1}{2}\,B_{\nu}{}^{(\rho}h^{\sigma)}{}_{\mu}\,V^{\mu}{}_{;\,\nu} +$$

$$- \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\,\eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\,V_{\mu}\,V_{\lambda}\,B_{\delta\alpha}\,\theta_{\beta\nu} =$$

$$= V_{\varepsilon}\,\psi^{\varepsilon}\,B^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\,\eta^{\varepsilon\alpha\beta(\sigma}E^{\rho)}{}_{\beta}\,V_{\alpha}\,\psi_{\varepsilon} - V_{\varepsilon}\,\Lambda^{\varepsilon}\,E^{\rho\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\eta^{\varepsilon\alpha\beta(\sigma}B^{\rho)}{}_{\beta}\,V_{\alpha}\,\Lambda_{\varepsilon}$$

$$\text{(3.21) d)}\quad h^{\rho}{}_{\mu}\,h^{\sigma}{}_{\nu}\,\dot{E}^{\mu\nu} + \theta\,E^{\rho\sigma} + a_{\alpha}\,B_{\beta}{}^{(\rho}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\,V_{\lambda} +$$

$$- \frac{1}{2}\,B^{\mu}{}_{\beta;\alpha}\,h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}\,V_{\lambda} - \frac{1}{2}\,E_{\nu}{}^{(\rho}h^{\sigma)}{}_{\mu}\,V^{\mu;\nu} +$$

$$- \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\,\eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\,V_{\mu}\,V_{\lambda}\,E_{\alpha\delta}\,\theta_{\beta\nu} =$$

$$= V_{\varepsilon}\,\psi^{\varepsilon}\,E^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\,\eta^{\varepsilon\alpha\beta(\rho}B^{\sigma)}{}_{\beta}\,V_{\alpha}\,\psi_{\varepsilon} + \Lambda^{\varepsilon}\,V_{\varepsilon}\,B^{\rho\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\eta^{\varepsilon\alpha\beta(\sigma}E^{\rho)}{}_{\beta}\,V_{\alpha}\,\Lambda_{\varepsilon}$$

Estas são as projeções da equação (3.10) segundo as direções a), b), c) e d).

CAPÍTULO IV

TEORIA DE PERTURBAÇÃO NOS UNIVERSOS DE MINKOWSKI E FRIEDMANN

Neste capítulo estudaremos as flutuações quânticas do campo gravitacional como fontes de perturbação dos universos de Minkowski e Friedmann. Para efetuarmos os cálculos, apresentaremos um exemplo especial simples de função de estrutura H que nos dará uma visão de como podem aquelas flutuações influenciar na propagação de ondas gravitacionais.

i) Explicitação da função de estrutura

Seja $H(Q_1,Q_2) = \cos[\alpha(x^\mu)]Q_1 + \operatorname{sen}[\alpha(x^\mu)]Q_2$ onde $\alpha(x^\mu)$ é uma função escalar das coordenadas x^μ. Esta forma de $H(Q_1,Q_2)$ satisfaz à condição (2.25).

As derivadas de $H(Q_1,Q_2)$ são:

$$H_{Q_1} = \cos[\alpha(x^\mu)] \qquad \text{e} \qquad H_{Q_2} = \operatorname{sen}[\alpha(x^\mu)]$$

substituindo estas expressões em (3.8) e (3.9) temos:

$$\psi_\nu = 0 \qquad \text{e} \qquad \Lambda_\nu = [\alpha(x^\mu)]_{,\nu}$$

Se $\alpha(x^\mu)$ é tal que $\alpha_{,\nu} = \beta\, V_\nu$ onde β é uma constante arbitrária e V_ν é o campo de velocidades sobre o qual estão referidas as equações (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) (o que é sempre possível, como já vimos, se $dt = V_\mu\, dx^\mu$ é uma 1-forma diferenciável) então $\Lambda_\nu = \beta\, V_\nu$.

Assim:

$$(4.1) \qquad \psi_\nu = 0$$

$$(4.2) \qquad \Lambda_\nu = \beta V_\nu \qquad \text{onde} \quad V^\nu V_\nu = 1$$

De (3.10) vem:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \beta V_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Usando-se (3.17) chega-se que:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\beta\eta^{\alpha\beta\varepsilon\theta} E_\varepsilon{}^\mu V_\theta - \beta V^{[\alpha}E^{\beta]\mu}$$

que corresponde a tomar $\eta = p = -\beta$ como os únicos coeficientes da expansão feita na referência (9) diferentes de zero. Este caso não foi estudado no artigo citado.

ii) Perturbações no Universo de Minkowski

A métrica do Universo de Minkowski é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1,-1,-1,-1)$. Portanto a curvatura é zero ($R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}=0$), a derivada covariante reduz-se à derivada simples (os símbolos de Christofell se anulam) e os observadores físicos são, já que não há gravitação, os observadores inerciais: $V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} = 0$

Desta maneira temos:

$$E^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} = V^{\mu;\nu} = \Sigma^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} = 0, \; a^\alpha = W^\alpha = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0$$

Perturbando agora as expressões (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21), desprezando termos de segunda ordem e usando (4.1) e (4.2) temos:

(4.3) $$E^{\sigma\gamma}{}_{,\gamma} = 0 = J^{\sigma}$$

(4.4) $$B^{\sigma\gamma}{}_{,\gamma} = 0 = I^{\sigma}$$

(4.5) $$\dot{B}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\, E^{(\rho}{}_{\beta,\tau}\, \eta^{\sigma)\alpha\tau\beta}\, V_{\alpha} = -\beta E^{\rho\sigma} = L^{\rho\sigma}$$

(4.6) $$\dot{E}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, B^{(\rho}{}_{\beta,\tau}\, \eta^{\sigma)\alpha\tau\beta}\, V_{\alpha} = \beta B^{\rho\sigma} = K^{\rho\sigma}$$

onde $E^{\rho\sigma} \equiv \delta E^{\rho\sigma}$, $B^{\rho\sigma} \equiv \delta B^{\rho\sigma}$, $\dot{B}^{\rho\sigma} = B^{\rho\sigma}{}_{;\mu}\, V^{\mu} \simeq B^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\, V^{\mu}$ e

$E^{\alpha\beta}{}_{;\mu} \simeq E^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ pois:

$$E^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = E^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + E^{\nu\beta}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} + E^{\alpha\nu}\, \Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}$$

e as duas últimas parcelas do termo à direita desta igualdade são desprezíveis por serem em segunda ordem na perturbação.

Equações tipo onda para os campos $E^{\mu\nu}$ e $H^{\mu\nu}$ são obtidas acoplando a derivada na direção V^{μ} e o rotacional das equações (4.6) e (4.5), respectivamente, em perfeita analogia com o caso eletromagnético.

A derivada temporal de (4.6) nos dá:

(4.7) $$\ddot{E}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, \dot{B}^{(\sigma}{}_{\beta,\tau}\, \eta^{\rho)\alpha\tau\beta}\, V_{\alpha} = \dot{K}^{\rho\sigma}$$

O rotacional de (4.5) é:

$$(4.8)\qquad \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\, V_{\nu}\, \dot{B}^{\rho\xi}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\, \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\, V_{\nu}\, E^{\rho}{}_{\beta,\tau,\mu}\, \eta^{\xi\alpha\tau\beta}\, V_{\alpha} + \frac{1}{2}\, \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\, V_{\nu}\, E^{\xi}{}_{\beta,\tau,\mu}\, \eta^{\rho\sigma\tau\beta}\, V_{\alpha} = \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\, V_{\nu}\, L^{\rho\xi}{}_{,\mu}$$

Usando que:

$$\eta^{\sigma\nu\mu\xi}\ \eta_{\xi\alpha\tau\beta} = \det\begin{pmatrix} \delta^{\sigma}{}_{\alpha} & \delta^{\sigma}{}_{\tau} & \delta^{\sigma}{}_{\beta} \\ \delta^{\nu}{}_{\alpha} & \delta^{\nu}{}_{\tau} & \delta^{\nu}{}_{\beta} \\ \delta^{\mu}{}_{\alpha} & \delta^{\mu}{}_{\tau} & \delta^{\mu}{}_{\beta} \end{pmatrix}$$

e

$$\eta^{\sigma\nu\mu\xi}\ \eta_{\rho\alpha\tau\beta} = -\det\begin{pmatrix} \delta^{\sigma}{}_{\rho} & \delta^{\sigma}{}_{\alpha} & \delta^{\sigma}{}_{\tau} & \delta^{\sigma}{}_{\beta} \\ \delta^{\nu}{}_{\rho} & \delta^{\nu}{}_{\alpha} & \delta^{\nu}{}_{\tau} & \delta^{\nu}{}_{\beta} \\ \delta^{\mu}{}_{\rho} & \delta^{\mu}{}_{\alpha} & \delta^{\mu}{}_{\tau} & \delta^{\mu}{}_{\beta} \\ \delta^{\xi}{}_{\rho} & \delta^{\xi}{}_{\alpha} & \delta^{\xi}{}_{\tau} & \delta^{\xi}{}_{\beta} \end{pmatrix}$$

temos:

$$(4.9)\qquad \frac{1}{2}\, \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\, V_{\nu}\, E^{\rho}{}_{\beta,\tau,\mu}\, \eta^{\xi\alpha\tau\beta}\, V_{\alpha} = \frac{1}{2}\left[-\ddot{E}^{\rho\sigma} + \dot{E}^{\rho\mu}{}_{,\mu}\, V^{\sigma} + E^{\rho\sigma,\mu}{}_{,\mu} - E^{\rho\mu,\sigma}{}_{,\mu} \right]$$

(4.10) $$\frac{1}{2}\,\eta^{\sigma\nu\mu\xi}\,\eta^{\rho\alpha\tau\beta}\,E_{\xi\beta,\tau,\mu}\,V_\alpha\,V_\nu = \frac{1}{2}\,(g^{\rho\sigma}\,E^{\xi\beta}{}_{,\beta,\xi} +$$

$$+ \dot{E}^{\rho\mu}{}_{,\mu}\,V^\sigma - V^\rho\,V^\sigma\,E^{\tau\mu}{}_{,\tau,\mu} - E^{\rho,\mu,\sigma}{}_{,\mu} + V^\rho\,\dot{E}^{\sigma\tau}{}_{,\tau} +$$

$$+ E^{\rho\sigma,\mu}{}_{,\mu} - \ddot{E}^{\rho\sigma} - E^{\sigma\tau}{}_{,\tau}{}^{,\rho})$$

De (4.8), (4.9) e (4.10) vem:

$$\eta^{\sigma\nu\mu\xi}\,V_\nu\,\dot{B}^\rho{}_{\xi,\mu} = \frac{1}{2}\,(\ddot{E}^{\rho\sigma} - \dot{E}^{\rho\mu}{}_{,\mu}\,V^\sigma - E^{\rho\sigma,\mu}{}_{,\mu} + E^{\rho\mu,\sigma}{}_{,\mu} +$$

$$- g^{\rho\sigma}\,E^{\tau\beta}{}_{,\tau,\beta} - \dot{E}^{\rho\mu}{}_{,\mu}\,V^\sigma + V^\rho\,V^\sigma\,E^{\tau\mu}{}_{,\tau,\mu} + E^{\rho\mu,\sigma}{}_{,\mu} +$$

$$- V^\rho\,\dot{E}^{\tau\sigma}{}_{,\tau} - E^{\rho\sigma,\mu}{}_{,\mu} + \ddot{E}^{\rho\sigma} + E^{\tau\sigma,\rho}{}_{,\tau}) + \eta^{\sigma\nu\mu}{}_{\xi}\,V_\nu\,L^{\rho\xi}{}_{,\mu}$$

Substituindo esta expressão em /4.7) temos:

$$\ddot{E}^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\left[4\ddot{E}^{\rho\sigma} - 3\dot{E}^{\mu(\rho}{}_{,\mu}\,V^{\sigma)} - 4E^{\rho\sigma}{}_{,\mu}{}_{,\mu} + 3E^{\mu(\rho,\sigma)}{}_{,\mu} + \right.$$

$$\left. -2\,h^{\rho\sigma}E^{\tau\mu}{}_{,\tau,\mu}\right] - \frac{1}{2}\,\eta^{\nu\mu(\sigma}{}_{\xi}\,L^{\rho)\xi}{}_{,\mu}\,V_\nu = \dot{K}^{\rho\sigma}$$

Usando (4.3) encontramos:

$$E^{\rho\sigma,\mu}{}_{,\mu} + \frac{3}{4}\,\dot{J}^{(\rho}V^{\sigma)} - \frac{3}{4}\,J^{(\rho,\sigma)} + \frac{1}{2}\,h^{\rho\sigma}\,J^\mu{}_{,\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\eta^{\nu\mu(\sigma}{}_{\xi}\,L^{\rho)\xi}{}_{,\mu}\,V_\nu + \dot{K}^{\rho\sigma}$$

Assim:

$$\Box\, E^{\rho\sigma} = \frac{3}{4}\, J^{(\rho,\sigma)} - \frac{3}{4}\, \dot{J}^{(\rho}V^{\sigma)} - \frac{1}{2}\, h^{\rho\sigma}\, J^{\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\eta^{\nu\mu(\sigma}{}_{\xi}L^{\rho)\xi}{}_{,\mu}V_{\nu} + \dot{K}^{\rho\sigma}$$

Vê-se de (4.3), (4.5) e (4.6) que:

$$J^{\rho} = 0,\ L^{\rho\xi} = -\beta E^{\rho\xi} \quad \text{e} \quad K^{\rho\sigma} = \beta B^{\rho\sigma}.$$

Portanto temos:

$$\Box\, E^{\rho\sigma} = -\frac{\beta}{2}\, \eta^{\nu\mu(\sigma}{}_{\xi}\, E^{\rho)\xi}{}_{,\mu}\, V_{\nu} + \beta\dot{B}^{\rho\sigma}$$

Utilizando (4.5) obtemos:

$$(4.11)\quad \Box\, E^{\rho\sigma} - 2\beta\dot{B}^{\rho\sigma} - \beta^{2}\, E^{\rho\sigma} = 0$$

De forma análoga, obtemos para $B^{\rho\sigma}$ a seguinte expressão:

$$(4.12)\qquad \Box\, B^{\rho\sigma} + 2\beta\dot{E}^{\rho\sigma} - \beta^{2}\, B^{\rho\sigma} = 0$$

Note que, na ausência de flutuações quânticas, isto é, quando $\beta = 0$, caimos numa equação de onda plana para $E^{\rho\sigma}$ $B^{\rho\sigma}$ cuja velocidade de fase é a velocidade da luz.

Para resolver (4.11) e (4.12), tentemos as soluções:

$$B^{\rho\sigma} = b^{\rho\sigma}\, e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \qquad \text{e} \qquad E^{\rho\sigma} = \ell^{\rho\sigma}\, e^{ik_{\mu}x^{\mu}}$$

onde $b^{\rho\sigma}$, $\ell^{\rho\sigma}$ e k_μ são constantes.

Substituindo em (4.11) encontramos:

$$\ell^{\rho\sigma}\,(-k_\mu\, k^\mu) - 2\beta\, b^{\rho\sigma}\, ik_o - \beta^2\, E^{\rho\sigma} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ell^{\rho\sigma} = -\frac{2\, ik_o\beta}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)}\, b^{\rho\sigma} \qquad (4.13)$$

Fazendo o mesmo para (4.12) achamos:

$$b^{\rho\sigma} = \frac{2\, ik_o\, \beta}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)}\, \ell^{\rho\sigma}$$

Substituindo este resultado em (4.13) obtemos:

$$\ell^{\rho\sigma} = \frac{(-2\, ik_o)}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)}\, \frac{(2\, ik_o)\, \beta^2}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)}\, \ell^{\rho\sigma} \Rightarrow \frac{4\, k_o^{\,2}\, \beta^2}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2\, k_o\beta}{(\beta^2 + k_\mu\, k^\mu)} = \pm\, 1$$

Assim:

$$(4.13) \qquad \ell^{\rho\sigma} = \mp\, i\, b^{\rho\sigma}$$

$$(4.14) \qquad k_\mu\, k^\mu = -\,\beta^2 \pm 2\, k_o\, \beta$$

e de (4.3) e (4.4):

$$(4.15) \qquad \ell^{\rho\sigma}\, k_\sigma = b^{\rho\sigma}\, k_\sigma = 0$$

De (4.13) vemos que $E^{\rho\sigma}$ esta defasado de $B^{\rho\sigma}$ de $\mp \pi/2$ pois:

$$B^{\rho\sigma} = b^{\rho\sigma}\, e^{ik_\mu x^\mu} = \pm\, i\ell^{\rho\sigma}\, e^{ik_\mu x^\mu} = \ell^{\rho\sigma}\, e^{i(k_\mu x^\mu \pm \pi/2)} = E^{\rho\sigma}\, e^{\pm i\pi/2}$$

A equação (4.14) nos dá que $k^\mu k_\mu > 0$. Isto significa que as ondas gravitacionais podem se propagar com velocidade menor ou igual à da luz (as soluções $k^\mu k_\mu < 0$ que representariam ondas gravitacionais com velocidades maiores que a da luz são fisicamente inaceitáveis). Portanto, as flutuações quânticas do campo gravitacional, neste caso específico, desempenham o mesmo papel para ondas gravitacionais que os meios dielétricos de índice de refração constante e diferente de um desempenham para a propagação de ondas eletromagnéticas.

A equação (4.15) nos diz que $E^{\rho\sigma}$ e $B^{\rho\sigma}$ são perpendiculares à direção de propagação das ondas dada pelo vetor k_σ.

Assim, as equações (4.11) e (4.12) admitem uma solução tipo onda plana com as características apontadas acima.

iii) Pertubações no Universo de Friedmann

O modelo cosmológico de Friedmann é um modelo para um Universo homogêneo e isotrópico espacialmente. O elemento de linha infinitesimal para este universo é dado por:

$$(4.16) \qquad ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi)(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2)\right] =$$

$$= g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

Este elemento de linha satisfaz as equações de Einstein $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = -k\, T^{\mu\nu}$ onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia de um fluido perfeito que é dado por:

$$(4.17) \qquad T^{\mu\nu} = \rho\, V^{\mu} V^{\nu} - p h^{\mu\nu}$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão isotrópica do fluido, V^{μ} o campo de velocidades de um dado observador e $h^{\mu\nu}$ o tensor projeção ortogonal a V^{μ}.

Se este observador é comovente com a matéria então, no sistema de coordenadas (t, χ, θ, ϕ), $V^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{0}$. É fácil ver que V^{μ} é uma geodésica para a métrica dada por (4.16) de modo que estes observadores, ligados aos aglomerados de galáxias, estão sujeitos apenas ao próprio campo gravitacional do Universo de Friedmann. O sistema de coordenadas (t, χ, θ, ϕ) é dito comovente e para se ter uma imagem pictórica delas basta pensá-las como linhas desenhadas sobre um balão inflável. A medida que ele cresce, os pontos sobre a sua superfície, que representam os aglomerados de galáxia, vão se afastando, mas as linhas mover-se-ão com eles o que faz com que tenham as mesmas coordenadas. A coordenada t é tanto o tempo cósmico como o tempo próprio dos aglomerados de galáxias.

Como $dt = V_{\mu}\, dx^{\mu} = g_{\mu o}\, dx^{\mu} = dt$ é uma 1-forma, pois t é uma coordenada global do espaço-tempo, então, como já vimos no capítulo 3, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_{\mu}V_{\nu}$ define uma hiper-superfície com elemento de linha $h_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$. Mediante uma escolha de sistema de coordenadas que mantenham $V^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{o}$ se pode fazer com que $g_{\mu o} = \delta^{o}{}_{\mu}$ [16] . Assim, $h_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} = g_{ij}\, dx^{i}\, dx^{j}$ onde i e j podem assumir os valores 1, 2 e 3.

Se (4.16) satisfaz as equações de Einstein então a função $\sigma(\chi)$ toma as possíveis formas [19] :

$$\sigma = \chi \ , \quad \sigma = sen\ \chi \ , \quad \sigma = sh\ \chi$$

Estas funções correspondem aos seguintes valores para o escalar de curvatura do tri-espaço definido por h (19):

$$^{(3)}R = 0 \ , \quad ^{(3)}R = 6, \quad ^{(3)}R = -6$$

É fácil mostrar que este tri-espaço é homogêneo e isotrópico no sentido em que ele é maximalmente simétrico ou, de outro modo, apresenta o número máximo de vetores de kil ling independentes (para um espaço tridimensional este número é 6e correspondem a três translações e três rotações neste tri- -espaço o que significa que a métrica g_{ij} é invariante segundo estas transformações). Isto confirma o fato de que (4.16) é o elemento de linha de um Universo homogêneo e isotrópico espa cialmente.

A forma de A(t) é encontrada quando se explicita a equação de estado $p = f\ (\rho)$.

O tensor de cisalhamento, $\Sigma_{\alpha\beta}$, o vetor de rotação w_{α} e a aceleração a_{α}, definidos no capítulo III são nulos.

Vimos no capítulo II que as equações de Einstein no vazio, $R_{\mu\nu} = 0$, são equivalentes às equações $W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ desde que aquelas sejam válidas numa dada hiper-superfície ti po-espaço. Da mesma forma, as relações:

$$(4.18) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2} T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6} g^{\mu[\alpha} T^{,\beta]}$$

são equivalentes às equações $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = - T^{\mu\nu}$ (fizemos $k = 1$), estabelecendo-se as mesmas restrições.

Portanto, na presença de matéria, a equação (3.10) é modificada para:

$$(4.19) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \psi_\nu W^{\alpha\beta\mu\nu} + \Lambda_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu[\alpha;\beta]} +$$

$$+ \frac{1}{6} g^{\mu[\alpha} T^{,\beta]} \quad \text{onde} \quad T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

No caso específico de ψ_ν e Λ_ν serem dados por (4.1) e (4.2) temos:

$$(4.20) \qquad W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \beta V_\nu \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6} g^{\mu[\alpha} T^{,\beta]}$$

Quando projetamos estas equações nas direções dadas no capítulo III encontramos [16]:

$$(4.21) \qquad h^{\varepsilon\alpha} h^{\delta\gamma} E_{\alpha\delta;\gamma} + \eta^{\varepsilon}{}_{\beta\mu\nu} V^\beta B^{\nu\delta} \Sigma^\mu{}_\delta + 3B^{\varepsilon\nu} W_\nu =$$

$$= \frac{1}{3} h^{\varepsilon\alpha} \rho_{,\alpha} + \frac{\theta}{3} q^\varepsilon - \frac{1}{2} (\Sigma^\varepsilon{}_\nu - 3W^\varepsilon{}_\nu) q^\nu + \frac{1}{2} \pi^{\varepsilon\mu} \dot{V}_\mu +$$

$$+ \frac{1}{2} h^{\varepsilon\alpha} \pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu}$$

$$(4.22) \qquad h^{\varepsilon\alpha}\, h^{\delta\gamma}\, B_{\alpha\delta;\gamma} - \eta^{\varepsilon}{}_{\beta\mu\nu}\, V^{\beta}\, E^{\nu\delta}\, \Sigma^{\mu}{}_{\delta} - 3E^{\varepsilon\nu}\, W_{\nu} =$$

$$= 2(p+\rho)\, W^{\varepsilon} - \eta^{\varepsilon\alpha\beta\lambda}\, V_{\lambda}\, q_{\alpha;\beta} + \eta^{\varepsilon\alpha\beta\lambda}(\Sigma_{\mu\beta} + W_{\mu\beta})\,\pi^{\mu}{}_{\alpha}$$

$$(4.23) \qquad h^{\rho}{}_{\mu}\, h^{\sigma}{}_{\nu}\, \dot{B}^{\mu\nu} + \theta B^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, B_{\nu}{}^{(\rho}h^{\sigma)}{}_{\mu}\, V^{\mu;\nu} +$$

$$- \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\, \eta^{\rho\lambda\alpha\beta}\, V_{\mu}V_{\lambda}B_{\alpha\delta}\, \theta_{\nu\beta} - \dot{V}_{\alpha}E_{\beta}{}^{(\rho}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} + \frac{1}{2}\, E^{\mu}{}_{\beta;\alpha}h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}V_{\lambda} =$$

$$= -\frac{3}{4}\, q^{(\sigma}W^{\rho)} + \frac{1}{2}\, h^{\rho\sigma}\, q^{\alpha}\, W_{\alpha} + \frac{1}{4}\, \Sigma_{\beta}{}^{(\sigma}\eta^{\rho)\alpha\beta\lambda}\, V_{\lambda}\, q_{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{4}\, h^{\mu(\sigma}\eta^{\rho)\alpha\beta\lambda}\, V_{\lambda}\, \pi_{\mu\alpha;\beta} - \beta E^{\rho\sigma}$$

$$(4.24) \qquad h^{\varepsilon}{}_{\mu}\, h^{\sigma}{}_{\nu}\, \dot{E}^{\mu\nu} + \theta E^{\varepsilon\sigma} - \frac{1}{2}\, E_{\nu}{}^{(\varepsilon}h^{\sigma)}{}_{\mu}\, V^{\mu;\nu} +$$

$$- \eta^{\sigma\nu\mu\delta}\, \eta^{\varepsilon\lambda\alpha\beta}\, V_{\mu}V_{\lambda}E_{\alpha\delta}\, \theta_{\beta\nu} + \dot{V}_{\alpha}\, B_{\beta}{}^{(\varepsilon}\eta^{\sigma)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} +$$

$$- \frac{1}{2}\, B_{\beta}{}^{\mu}{}_{;\alpha}\, h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\varepsilon)\lambda\alpha\beta}\, V_{\lambda} = \frac{1}{6}\, h^{\varepsilon\sigma}\, (q^{\mu}{}_{;\nu} - q^{\mu}\dot{V}_{\mu} - \pi^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}) -$$

$$- \frac{1}{2}\, (p+\rho)\, \Sigma^{\varepsilon\sigma} + \frac{1}{2}\, q^{(\varepsilon}\dot{V}^{\sigma)} - \frac{1}{4}\, h^{\mu(\varepsilon}h^{\sigma)\alpha}\, q_{\mu;\alpha} + \frac{1}{2}\, h^{\varepsilon}{}_{\alpha}\, h^{\sigma}{}_{\mu}\, \dot{\pi}^{\alpha\mu} +$$

$$+ \frac{1}{4}\, \pi_{\beta}{}^{(\varepsilon}\Sigma^{\sigma)\beta} + \frac{1}{4}\, \pi_{\beta}{}^{(\varepsilon}W^{\sigma)\beta} + \frac{1}{6}\, \theta\, \pi^{\varepsilon\sigma} + \beta B^{\varepsilon\sigma}$$

onde $\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta}\, h^{\alpha}{}_{\mu}\, h^{\beta}{}_{\nu} - \frac{1}{3}\, T_{\alpha\beta}\, h^{\alpha\beta}\, h_{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica do fluido e $q_{\lambda} = T_{\alpha\beta}\, V^{\beta}\, h^{\alpha}{}_{\lambda}$ é o fluxo de energia em relação a V^{β}.

Analisaremos agora as perturbações tensoriais do Universo de Friedmann. Ao se levar em conta as flutuações quan ticas do campo gravitacional vemos que estas perturbações são as únicas que nos trarão resultados diferentes dos encontrados por J.M.Salim na referência [16]. Neste caso, portanto, $\delta W_\mu = \delta q_\mu = \delta V_\mu = 0$ e $\delta\theta = \delta\rho = 0$ [16]. Além disso temos que, no Universo de Friedmann, $E^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} = 0$ e $a^\mu = q^\mu = 0$. Assim, perturbando as equações (4.23),(4.24) e as equações de evolução:

$$\dot{\Sigma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^\mu{}_{(\alpha} h^\nu{}_{\beta)} a_{\mu;\nu} + \frac{2}{3}\theta\,\Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}\, a^\delta{}_{;\delta} = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta} \tag{4.25}$$

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^\alpha{}_{(\mu} h^\beta{}_{\nu)} (\Sigma_{\alpha\rho;\lambda} + W_{\alpha\rho;\lambda})\, \eta_\beta{}^{\varepsilon\rho\lambda} V_\varepsilon \tag{4.26}$$

onde $\dot{\Sigma}_{\alpha\beta} = h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta \Sigma_{\mu\nu;\lambda} V^\lambda$ e desprezando termos de 2ª ordem encontramos:

$$\dot{E}_{\varepsilon\rho} + \theta E_{\varepsilon\rho} - P_{\varepsilon\rho}(B) = C_{\varepsilon\rho} + \beta B_{\varepsilon\rho} \tag{4.27}$$

$$\dot{B}_{\varepsilon\rho} + \theta B_{\varepsilon\rho} + P_{\varepsilon\rho}(E) = D_{\varepsilon\rho} - \beta E_{\varepsilon\rho} \tag{4.28}$$

$$\dot{\Sigma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\Sigma_{\alpha\beta} = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta} \tag{4.29}$$

$$B_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}(\Sigma) \tag{4.30}$$

onde o operador $P_{\varepsilon\rho}$ é definido por:

$$P_{\varepsilon\rho}(\Phi) = \frac{1}{2} h^\mu{}_{(\varepsilon} h^\theta{}_{\rho)}\, \eta_\theta{}^{\lambda\nu\alpha} V_\lambda\, \Phi_{\alpha\mu;\nu} \qquad \text{e}$$

$$C_{\varepsilon\rho} = -\frac{1}{2}(p+\rho)\,\Sigma_{\varepsilon\rho} + \frac{1}{2} h^{\alpha}{}_{\varepsilon}\, h^{\mu}{}_{\rho}\, \dot{\pi}_{\alpha\mu} + \frac{1}{6}\,\theta\,\pi_{\varepsilon\rho},$$

$$D_{\varepsilon\rho} = -\frac{1}{2} P_{\varepsilon\rho}(\pi)$$

Para o modelo de Friedmann, é possível construir-se auto-funções harmônicas que são soluções da equação de Helmoholtz generalizada,

$$h^{\alpha}{}_{\varepsilon}\, h^{\tau}{}_{\rho}\, h^{\gamma\lambda}\,(h^{\mu}{}_{\alpha}\, h^{\nu}{}_{\tau}\, h^{\beta}{}_{\gamma}\, \hat{V}_{\mu\nu;\beta})_{;\lambda} = \frac{k^2}{\ell^2}\,\hat{V}_{\varepsilon\rho}$$

onde k é dado por:

$$^{(3)}R = 0 \quad , \quad a<|k|<\infty$$

$$^{(3)}R = -6 \quad , \; k^2 = q^2 + 3 \quad , \; 0 <q<\infty$$

$$^{(3)}R = 6 \quad , \; k^2 = n^2 - 3, \quad n = 3,4,\ldots$$

e que são bases completas nas hipersuperfícies de homogeneidade daquele modelo [16].

Podemos, portanto, expressar $E_{\mu\nu}$, $\Sigma_{\mu\nu}$ e $\pi_{\mu\nu}$ nesta base da seguinte maneira:

$$E_{\mu\nu} = E(t)\,\hat{V}_{\mu\nu}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} = L(t)\,\hat{V}_{\mu\nu}$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi(t)\,\hat{V}_{\mu\nu}$$

$$B_{\mu\nu} = B(t)\,\hat{V}_{\mu\nu}$$

Substituindo isto em (4.27), (4.28), (4.29) e usando de (4.30) que $B_{\mu\nu} = L\, P_{\mu\nu}(\hat{V})$ temos:

$$(\dot{E} + \theta E)\, \hat{V}_{\varepsilon\rho} - L\, P_{\varepsilon\rho}\left[P(\hat{V})\right] = \left[-\frac{1}{2}\,(p+\rho)L + \frac{1}{2}\,\dot{\pi} + \frac{\theta}{6}\,\pi\right] \hat{V}_{\varepsilon\beta} + \beta L P_{\varepsilon\rho}(\hat{V})$$

$$(\dot{L} + \theta L)\, P_{\varepsilon\rho}(\hat{V}) + L\, \dot{P}_{\varepsilon\rho}(\hat{V}) + E\, P_{\varepsilon\rho}(\hat{V}) = -\frac{1}{2}\pi\, P_{\varepsilon\rho}(\hat{V}) - \beta E \hat{V}_{\varepsilon\rho}$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3}\,\theta L + \frac{1}{2}\pi)\, \hat{V}_{\varepsilon\rho} = -\, E\, \hat{V}_{\varepsilon\rho}$$

Mas como (veja[16]):

$$P_{\varepsilon\rho}\left[P\,(\hat{V})\right] = h^{\alpha}{}_{\varepsilon}\, h^{\tau}{}_{\rho}\, h^{\gamma\lambda}\, (h^{\mu}{}_{\alpha}\, h^{\nu}{}_{\tau}\, h^{\beta}{}_{\gamma}\, \hat{V}_{\mu\nu;\beta})_{;\lambda} - \frac{1}{3}\,\theta^2 \hat{V}_{\varepsilon\rho} +$$

$$+ \rho\, \hat{V}_{\varepsilon\rho} \quad \text{e}$$

$$\dot{P}_{\varepsilon\rho}\,(\hat{V}) = -\,\frac{1}{3}\,\theta P_{\varepsilon\rho}\,(\hat{V})$$

teremos:

$$\left[\dot{E} + \theta E - (\rho - \frac{1}{3}\,\theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2})\, L\right] \hat{V}_{\varepsilon\rho} = \tag{4.31}$$

$$= \left[-\,\frac{1}{2}\,(p+\rho)\, L + \frac{1}{2}\,\dot{\pi} + \frac{\theta}{6}\,\pi\right] \hat{V}_{\varepsilon\rho} + \beta L\, P_{\varepsilon\rho}\,(\hat{V})$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3}\,\theta L + E)\, P_{\varepsilon\rho}(\hat{V}) = -\,\frac{1}{2}\,\pi\, P_{\varepsilon\rho}\,(\hat{V}) - \beta E\, \hat{V}_{\varepsilon\rho} \tag{4.32}$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3}\,\theta L + \frac{1}{2}\,\pi)\, \hat{V}_{\varepsilon\rho} = -E\hat{V}_{\varepsilon\rho} \tag{4.33}$$

Substituindo (4.33) em (4.32) obtemos:

$$\beta E \hat{V}_{\varepsilon\rho} = 0 \Rightarrow E_{\varepsilon\rho} = 0$$

Como $B_{\mu\nu} = L\, P_{\mu\nu}(\Sigma) = B(t)\, \hat{V}_{\mu\nu}$ então o sistema de equações acima fica:

$$(4.34) \quad \left[\frac{1}{2}(p-\rho) + \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k^2}{\ell^2}\right] L = \frac{1}{2}\dot{\pi} + \frac{\theta}{\sigma}\pi + \beta B$$

$$(4.35) \quad \dot{L} + \frac{2}{3}\theta L + \frac{1}{2}\pi = 0$$

Vê-se facilmente destas equações que se $L = 0$ então $\pi = 0$, $B = 0$ e o tensor de Wey perturbado se anula.

Se $\pi = m\, L$, onde m é uma constante qualquer, e $\theta = \frac{3\dot{A}}{A}$ temos de (4.3.5) que:

$$\dot{L} + \frac{2\dot{A}}{A} L + \frac{m}{2} L = 0$$

isto é,

$$L = D\, A^{-2}\, e^{-\frac{m}{2} t} \qquad \text{onde } D \text{ é uma constante.}$$

Portanto:

$$\dot{L} = -\frac{m}{2} e^{-\frac{m}{2} t} D\, A^{-2} + D\, A^{-3} \dot{A}\, e^{-\frac{m}{2} t} =$$

$$= -\frac{m}{2} L - \frac{2}{3}\theta L$$

Substituindo estes resultados em (4.34) obtemos:

$$(4.36) \qquad B = \left[\frac{1}{2}(p - \rho) + \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{m\theta}{6} + \frac{m^2}{4} - \frac{k^2}{\ell^2}\right] CA^{-2}\, e^{-m/2t}$$

onde $C = \dfrac{D}{\beta}$

Examinaremos o caso em que a curvatura do tri-espaço no Universo de Friedmann é zero (seção plana).

Para um fluido constituido de radiação, situação provável no começo do Universo, temos que $p = \frac{1}{3}\rho$. Assim (veja (19)).

$$A(t) = A_0\, t^{1/2}$$

$$\rho(t) = \frac{3}{4}\, t^{-2}$$

$$(4.37) \qquad \rho \propto A^{-4}$$

Substituindo estes valores em (4.36) encontramos:

$$\theta = 3\,\frac{\dot{A}}{A} = \frac{3}{2}\, t^{-1}$$

$$B = \left[\frac{1}{2}\, t^{-3} + \frac{1}{4}\, m\, t^{-2} + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{k^2}{\ell^2}\right) t^{-1}\right] CA_0^{-2}\, e^{-m/2\, t}$$

Considerando a componente T^{0000} do super-tensor de Bell-Robinson como a densidade de energia gravitacional temos:

$$\mu \propto E^2 + B^2 \propto B^2$$

Para tempos pequenos temos então que:

$$(4.38) \quad \mu \propto t^{-6} \propto A^{-12}$$

Tratemos agora de um fluido constituido de matéria incoerente (poeira) situação provável quando o tempo de vida do universo é grande. Neste caso temos[19]

$$p = 0, \; A(t) = A_0 \; t^{2/3}, \; \rho(t) = \frac{4}{3} \; t^{-2}$$

$$(4.39) \qquad \rho \propto A^{-3}$$

Substituindo estes valores em (4.36) obtemos:

$$B = \left[\frac{2}{3} \; t^{-10/3} + \frac{m}{3} \; t^{-7/3} + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{k^2}{\ell^2}\right) . \; t^{-4/3}\right] C \; A_0^{-2} \; e^{-\frac{m}{2}t}$$

Para tempos grandes vemos que a energia gravitacional tem uma variação exponencial:

$$(4.40) \qquad \mu \propto B^2 \propto e^{-\frac{m}{2} t}$$

No caso em que a perturbação na pressão anisotrópica for zero temos que m = 0 e portanto, para o caso da poeira:

$$(4.41) \qquad \mu \propto B^2 \propto t^{-8/3} \propto A^{-4}$$

Assim, sendo μ a densidade de energia gravitacional e ρ a densidade de energia do fluido que constitui $T^{\mu\nu}$, temos os seguintes casos para $\pi = mL$:

1º) $m > 0$

Para tempos pequenos vê-se de (4.37) e (4.38) que μ cai mais rapidamente que ρ. Para tempos grandes, a queda de μ se torna exponencial e portanto acentuadamente mais rápida que a de ρ (veja (4.40) e (4.39)).

2º) $m < 0$

A diferença deste para o primeiro caso ocorre quando consideramos tempos grandes. Nesta situação μ, ao invés de decrescer, aumenta exponencialmente.

3º) $m = 0$

Para tempos pequenos μ e ρ caem da mesma maneira que no primeiro caso. Já para tempos grandes, a queda de μ se torna menos acentuada mas mesmo assim maior que a de ρ (veja (4.41) e (4.39)).

CONCLUSÃO

Nesta tese procuramos desenvolver uma teoria para a Gravitação que levasse em conta os efeitos das flutuações quânticas do Campo Gravitacional. Com o objetivo de estabelecer uma analogia formal entre esta nova teoria e a Eletrodinâmica em meios contínuos definimos um novo tensor $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ em (2.21) e uma função de estrutura H em (2.22). A forma explícita de H não pôde ser dada pois ainda não existe uma boa teoria quântica para a Gravitação. A situação aqui é análoga à da Eletrodinâmica no século XIX onde, como não se conhecia a estrutura microscópica dos meios contínuos, as equações constitutivas que relacionavam o deslocamento elétrico $\vec{D}$ e o campo magnético $\vec{B}$ com o campo elétrico $\vec{E}$ e a indução magnética $\vec{H}$ eram puramente fenomenológicas. A diferença é que, em Gravitação, a fenomenologia ainda é muito pobre não se podendo portanto inferir sobre a função de estrutura H.

Em seguida, tendo imposto que o espaço-tempo seja Riemanniano, desenvolvemos a teoria na sua forma Quase-Maxwelliana. Assim, as equações tomaram uma forma fácil de se manipular de maneira que, quando tivermos um pouco mais de fenomenologia, possamos dar uma forma explícita para H no caso estudado e assim conhecer um pouco mais da teoria quântica para a Gravitação que está sendo procurada. Inversamente, se um dia tivermos em mãos esta teoria, poderemos, através da função H e daquelas equações, estabelecer os resultados experimentais que devem ser encontrados.

Para exemplificar este tipo de procedimento, explicitamos uma função de estrutura conveniente e exeminamos os efeitos das flutuações quânticas em teoria de perturbação, primeiramente no Universo de Minkowski e logo após no Universo de Friedmann.

No Universo de Minkowski, as equações Quase-Maxwellianas perturbadas apresentaram uma solução tipo onda que representava ondas gravitacionais se propagando com velocidade menor que a da luz, comportamento análogo ao de ondas eletromagnéticas viajando em meios dielétricos, como era de se esperar. Isto nos permite especular que flutuações quânticas podem gerar um análogo gravitacional do efeito Cherenkov do Eletromagnetismo.

No Universo de Friedmann para o caso estudado, verificamos que:

1º) As flutuações quânticas anulam a parte elétrica do tensor de Weyl perturbado.

2º) Se as perturbações no tensor de cisalhamento são nulas então a parte magnética do tensor de Weyl também o é e assim o próprio tensor de Weyl perturbado.

Em seguida estudamos o que aconteceria com a densidade de energia gravitacional, denotada por μ, no caso em que a perturbação na pressão anisotrópica é proporcional ao tensor de cisalhamento perturbado e considerando Universo de Friedmann com curvatura do tri-espaço nula. Quando aquela constante de proporcionalidade é positiva concluimos que a queda em μ é maior que a densidade de energia do fluido que constitui tal Universo, a qual chamamos de ρ. Para tempos grandes a queda de μ é exponencial. No caso em que a constante de proporção é negativa então μ aumenta exponencialmente para tempos grandes.

Quando a pressão anisotrópica é nula, μ também cai mais rapidamente que ρ para tempos pequenos. Para tempos grandes a sua queda é menos rápida, mas ainda mais acentuada que a de ρ. Assim, as flutuações quânticas, segundo o exemplo proposto, apresentam um comportamento típico de viscosidade para a energia gravitacional.

Para melhor avaliar os efeitos das flutuações quânticas do campo gravitacional é preciso portanto que se tenha uma teoria Quântica da Gravitação e que assim se encontre de forma mais realista a função de estrutura H para cada caso estudado.

Talvez fosse importante notar que poder-se-ia acrescentar à Lagrangeana termos cúbicos no tensor de Weyl e ver de que modo eles alterariam a estrutura formal de (2.26), (2.27) e (2.28) ou ainda estudar-se os efeitos das flutuações quânticas em espaços não Riemannianos ou com torção. Estas são observações que podem ser investigadas em futuros trabalhos.

APÊNDICE A

Mostraremos neste apêndice as seguintes relações algébricas satisfeitas pelos tensores de curvatura e de Weyl:

(A.1) $$R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;\;\;*} = -2H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;\;\;*} + \frac{1}{2}R\,\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

(A.2) $$R_{\mu\rho\alpha\beta}\,R_{\nu}^{\;\;\rho\alpha\beta} = \left(\frac{A}{4} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{6}R^{2}\right)g_{\mu\nu} + $$
$$+ 2W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R\,R_{\mu\nu}$$

onde $A \equiv W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu}$

(A.3) $$R_{\mu\rho\alpha\beta}\,\overset{*\,*}{R}{}^{\nu\rho\alpha\beta} = \left(-\frac{A}{4} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{6}R^{2}\right)\delta^{\nu}_{\;\mu}$$

(A.4) $$R_{\mu\rho\alpha\beta}\,\overset{*}{R}{}^{\nu\rho\alpha\beta} = \frac{B}{4}\,\delta^{\nu}_{\;\mu}$$

onde $B \equiv W_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$

(A.5) $$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\mu}C^{\beta\nu} = R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}$$

onde $C_{\alpha\mu} \equiv R_{\alpha\mu} - \frac{1}{4}R\,g_{\alpha\mu}$

A.1) Sabemos que $W^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;\;\;*} = \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$

Como:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - H_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}R\,g_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde

$$H_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(R_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}\, g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}\, g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}\, g_{\alpha\nu})$$

e $g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}\, g_{\beta\mu}$

temos:

$$0 = W^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - W_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} +$$

$$- H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} + H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} + \frac{1}{6} R\, g^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6} R\, g_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*}$$

Mas:

$$g^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\, g^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}(\delta^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - \delta^{\rho}{}_{\nu}\delta^{\sigma}{}_{\mu}) =$$

$$= \eta_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*}$$

Portanto:

$$R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\, H^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma} H_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{4}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\, (R^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu}\delta^{\rho}{}_{\mu} - R^{\rho}{}_{\nu}\delta^{\sigma}{}_{\mu} - R^{\sigma}{}_{\mu}\delta^{\rho}{}_{\nu}) +$$

$$- \frac{1}{4}\, \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\, (R^{\rho}{}_{\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta}\delta^{\rho}{}_{\alpha} - R^{\sigma}{}_{\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - R^{\rho}{}_{\beta}\delta^{\sigma}{}_{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{4}\, (\eta_{\alpha\beta\rho\nu}\, R^{\rho}{}_{\mu} + \eta_{\alpha\beta\mu\sigma}\, R^{\sigma}{}_{\nu} - \eta_{\alpha\beta\rho\mu}\, R^{\rho}{}_{\nu} - \eta_{\alpha\beta\nu\sigma}\, R^{\sigma}{}_{\mu} +$$

$$- \eta_{\mu\nu\rho\beta} R^{\rho}{}_{\alpha} - \eta_{\mu\nu\alpha\sigma} R^{\sigma}{}_{\beta} + \eta_{\mu\nu\beta\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha} + \eta_{\mu\nu\rho\alpha} R^{\rho}{}_{\beta})$$

Vemos assim que:

$$\text{(A.1.1)} \qquad H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\sigma\nu} R^{\sigma}{}_{\mu}$$

Então:

$$\text{(A.1.2)} \qquad R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} =$$

$$= \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\nu} - \eta_{\mu\nu\rho\beta} R^{\rho}{}_{\alpha} - \eta_{\alpha\beta\nu\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu} + \eta_{\mu\nu\rho\alpha} R^{\rho}{}_{\beta}) =$$

$$= - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} (R^{\rho}{}_{\alpha} \delta^{\sigma}{}_{\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta} \delta^{\rho}{}_{\alpha} - R^{\rho}{}_{\beta} \delta^{\sigma}{}_{\alpha} - R^{\sigma}{}_{\alpha} \delta^{\rho}{}_{\beta}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\nu} - \eta_{\alpha\beta\nu\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu} + \eta_{\mu\nu\alpha\sigma} R^{\sigma}{}_{\beta} - \eta_{\mu\nu\beta\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha})$$

É fácil ver que:

$$\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\nu} - \eta_{\alpha\beta\nu\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu} + \eta_{\mu\nu\alpha\sigma} R^{\sigma}{}_{\beta} - \eta_{\mu\nu\beta\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2} (R^{\sigma}{}_{\alpha} \eta_{\sigma\beta\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\beta} \eta_{\alpha\sigma\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu} \eta_{\alpha\beta\sigma\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu} \eta_{\alpha\beta\mu\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{2} R \; \eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Assim, de (A.1.2) temos:

$$\text{(A.1.3)} \qquad R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = -2 H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} + \frac{1}{2} R \; \eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

e (A.1.4) $$H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} = - H_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} + \frac{1}{2} R\ \eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Como consequências de (A.1.3) e (A.1.4) obtemos:

(A.1.5) $$R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta\mu\nu}^{\;\;*} = 2H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} R\ \eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

e

(A.16) $$R^{*\;*}_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - 2W_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6} R\ g_{\alpha\beta\mu\nu}$$

A.2) $$R_{\mu\rho\alpha\beta}\ R_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} = (W_{\mu\rho\alpha\beta} + H_{\mu\rho\alpha\beta} - \frac{1}{6} R\ g_{\mu\rho\alpha\beta})\ \times$$

$$\times\ (W_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} + H_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} - \frac{1}{6} R\ g_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta}) =$$

$$= W_{\mu\rho\alpha\beta}\ W_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} + W_{\mu\rho\alpha\beta}\ H_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} - \frac{1}{6} R\ W_{\mu\rho\alpha\beta}\ g_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} +$$

$$+ H_{\mu\rho\alpha\beta}\ W_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} + H_{\mu\rho\alpha\beta}\ H_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} - \frac{1}{6} R\ H_{\mu\rho\alpha\beta}\ g_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} +$$

$$- \frac{1}{6}\ g_{\mu\rho\alpha\beta}\ W_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} - \frac{1}{6}\ g_{\mu\rho\alpha\beta}\ H_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta} + \frac{1}{36} R^2\ g_{\mu\rho\alpha\beta}\ g_{\nu}^{\ \rho\alpha\beta}$$

Como $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem traço nulo temos:

(A.2.1) $$W_{\mu\beta\rho\sigma}\ H_{\nu}^{\ \beta\rho\sigma} = W_{\mu\beta\rho\sigma}\ \frac{1}{2}\ (R_{\nu}^{\ \rho} g^{\beta\sigma} + R^{\beta\sigma}\delta_{\nu}^{\ \rho} - R_{\nu}^{\ \sigma} g^{\beta\rho} - R^{\beta\rho}\delta_{\nu}^{\ \sigma}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ (W_{\mu\beta\nu\sigma}\ R^{\beta\sigma} - W_{\mu\beta\rho\nu}\ R^{\beta\rho}) = W_{\mu\beta\nu\rho}\ R^{\beta\rho}$$

(A.2.2) $$H_{\mu\beta\rho\sigma}\ W_{\nu}^{\ \beta\rho\sigma} = W_{\mu\beta\nu\rho}\ R^{\beta\rho}$$

$$(A.2.3) \quad H_{\mu\beta\rho\sigma} H_\nu{}^{\beta\rho\sigma} = \frac{1}{4} (R_{\mu\rho} g_{\beta\sigma} + R_{\beta\sigma} g_{\mu\rho} - R_{\mu\sigma} g_{\beta\rho} + $$

$$- R_{\beta\rho} g_{\mu\sigma}) (R_\nu{}^\rho g^{\beta\sigma} + R^{\beta\sigma} \delta_\nu{}^\rho - R_\nu{}^\sigma g^{\beta\rho} - R^{\beta\rho} \delta^\sigma{}_\nu) =$$

$$= \frac{1}{4} (4R_{\mu\rho} R_\nu{}^\rho + R_{\mu\nu} R - R_{\nu\beta} R_\mu{}^\beta - R_{\nu\beta} R_\mu{}^\beta + R_{\mu\nu} R +$$

$$+ R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - R_{\mu\beta} R_\nu{}^\beta + R R_{\mu\nu} + R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}) =$$

$$= R_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$$

$$(A.2.4) \quad H_{\mu\beta\rho\sigma} g_\nu{}^{\beta\rho\sigma} = \frac{1}{2} (R_{\mu\rho} g_{\beta\sigma} + R_{\beta\sigma} g_{\mu\rho} - R_{\mu\sigma} g_{\beta\rho} +$$

$$- R_{\beta\rho} g_{\mu\sigma}) (\delta_\nu{}^\rho g^{\beta\sigma} - \delta_\nu{}^\sigma g^{\beta\rho}) =$$

$$= \frac{1}{2} (4R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + 4R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu}$$

$$(A.2.5) \quad g_{\mu\beta\rho\sigma} g_\nu{}^{\beta\rho\sigma} = (g_{\mu\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\beta\rho}) (\delta_\nu{}^\rho g^{\beta\sigma} - \delta_\nu{}^\sigma g^{\beta\rho}) = 6 g_{\mu\nu}$$

Então usando (A.2.1), (A.2.2), (A.2.3), (A.2.4); (A.2.5) e que

$$W_{\mu\beta\rho\sigma} W_\nu{}^{\beta\rho\sigma} = \frac{W_{\theta\beta\rho\sigma} W^{\theta\beta\rho\sigma}}{4} g_{\mu\nu} = \frac{A}{4} g_{\mu\nu}$$ veja[20]

encontramos:

$$R_{\mu\beta\rho\sigma} R_\nu{}^{\beta\rho\sigma} = \left(\frac{A}{4} + \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} R^2 \right) g_{\mu\nu} + 2W_{\mu\beta\nu\rho} R^{\beta\rho} + \frac{1}{3} R R_{\mu\nu}$$

A.3) Usando (A.1.6) achamos:

$$R_{\mu\beta\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\overset{*}{\nu}\beta\overset{*}{\rho}\sigma} = R_{\mu\beta\rho\sigma} R^{\nu\beta\rho\sigma} - 2 R_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\beta\rho\sigma} +$$

$$- \frac{1}{6} R_{\mu\beta\rho\sigma} R g^{\nu\beta\rho\sigma} = \left(\frac{A}{4} + \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} R^2\right) \delta^{\nu}{}_{\mu} +$$

$$+ 2W_{\mu\beta}{}^{\nu\rho} R^{\beta}{}_{\rho} + \frac{1}{3} R R^{\nu}{}_{\mu} - 2W_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\beta\rho\sigma} - 2H_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\beta\rho\sigma} +$$

$$+ \frac{2}{6} R g_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\beta\rho\sigma} - \frac{R}{6} R_{\mu\beta\rho\sigma} (g^{\nu\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\beta\rho}) =$$

$$= (\frac{A}{4} + \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} R^2) \delta^{\nu}{}_{\mu} + 2W_{\mu\beta}{}^{\nu\rho} R^{\beta}{}_{\rho} + \frac{1}{3} R R^{\nu}{}_{\mu} +$$

$$- \frac{2A}{4} \delta^{\nu}{}_{\mu} - 2W_{\mu\beta}{}^{\nu\rho} R^{\beta}{}_{\rho} - \frac{1}{3} R R^{\nu}{}_{\mu} =$$

$$= (- \frac{A}{4} + \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} R^2) \delta^{\nu}{}_{\mu}$$

A.4) Usando (A.1.1) temos:

$$R_{\mu\beta\rho\sigma} R^{\overset{*}{\nu}\beta\rho\sigma} = R_{\mu\beta\rho\sigma}(W^{\nu\overset{*}{\beta}\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta\rho\theta} R^{\sigma}{}_{\theta} + \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta\theta\sigma} R^{\rho}{}_{\theta} +$$

$$- \frac{R}{6} \eta^{\nu\beta\rho\sigma}) = \frac{1}{2} R_{\mu\beta\rho\sigma}(\eta^{\nu\beta\rho\theta} R^{\sigma}{}_{\theta} + \eta^{\nu\beta\theta\sigma} R^{\rho}{}_{\theta}) +$$

$$+ W_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\overset{*}{\beta}\rho\sigma} + H_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\overset{*}{\beta}\rho\sigma} - \frac{1}{6} R g_{\mu\beta\rho\sigma} W^{\nu\overset{*}{\beta}\rho\sigma} +$$

$$- \frac{R}{6} \eta^{\nu\beta\rho\sigma} R_{\mu\beta\rho\sigma}$$

Mas:

$$W_{\mu\beta\rho\sigma}\ \overset{*}{W}{}^{\nu\beta\rho\sigma} = \frac{W_{\alpha\beta\rho\sigma}\ \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\rho\sigma}}{4}\ \delta^{\nu}{}_{\mu} = \frac{B}{4}\ \delta^{\nu}{}_{\mu}\ ,$$

$$H_{\mu\beta\rho\sigma}\ \overset{*}{W}{}^{\nu\beta\rho\sigma} = W_{\mu\beta}{}^{\overset{*}{\nu}\sigma}\ R^{\beta}{}_{\varepsilon} \qquad \text{e}$$

$$\overset{*}{R}{}^{\nu\beta}{}_{\mu\beta} = \overset{*}{W}{}^{\nu\beta}{}_{\mu\beta} = 0 \quad \text{pois } R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} =$$

$$= W_{\alpha\beta\mu\nu} + W_{\alpha\nu\beta\mu} + W_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad \text{Portanto:}$$

(A.4.1) $$R_{\mu\beta\rho\sigma}\ \overset{*}{R}{}^{\nu\beta\rho\sigma} = \frac{B}{4}\ \delta^{\nu}{}_{\mu}\ W_{\mu\beta}{}^{\overset{*}{\nu}\sigma} + R_{\mu\beta\rho\sigma}\ \eta^{\nu\beta\rho\theta}\ R_{\theta}{}^{\sigma}$$

No entanto:

$$\eta^{\nu\beta\rho\theta}\ R_{\mu\beta\rho\sigma} = -\ \eta^{\nu\beta\rho\theta}\ (R_{\mu\sigma\beta\rho} + R_{\mu\rho\sigma\beta}) =$$

$$= -\ \eta^{\nu\theta\beta\rho}\ R_{\mu\sigma\beta\rho} - \eta^{\nu\beta\rho\theta}\ R_{\mu\beta\rho\sigma} \Rightarrow \eta^{\nu\beta\rho\theta}\ R_{\mu\beta\rho\sigma} = -\ R_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta}$$

Assim:

$$R_{\mu\beta\rho\sigma}\ \eta^{\nu\beta\rho\theta}\ R_{\theta}{}^{\sigma} = -\ R_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta}\ R_{\theta}{}^{\sigma} =$$

$$= -(W_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta} + \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\sigma}{}^{\nu\varepsilon}\ R^{\theta}{}_{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\sigma}{}^{\varepsilon\theta}\ R^{\nu}{}_{\varepsilon} - \frac{R}{6}\ \eta_{\mu\sigma}{}^{\nu\theta})\ R_{\theta}{}^{\sigma} =$$

$$= -\ W_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta}\ R_{\theta}{}^{\sigma}$$

Substituindo em (A.4.1) temos:

(A.4.2) $$R_{\mu\beta\rho\sigma}\ \overset{*}{R}{}^{\nu\beta\rho\sigma} = \frac{B}{4}\ \delta^{\nu}{}_{\mu} + W_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta} R_{\theta}{}^{\sigma} - W_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta} R^{\sigma}{}_{\theta} = \frac{B}{4}\ \delta^{\nu}{}_{\mu}$$

O traço desta equação nos dá:

(A.4.3) $$R_{\alpha\beta\mu\nu}\, \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu}\, \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Usando (A.1.5) e (A.4.2) temos também que:

$$R_{\mu\beta\rho\sigma}\, R^{\nu\beta\overset{*}{\rho}\sigma} = \frac{B}{4}\, \delta^{\nu}{}_{\mu} + 2\, W_{\mu\sigma}{}^{\overset{*}{\nu}\theta}\, R^{\sigma}{}_{\theta}$$

A.5) Como $\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem traço nulo então:

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}\, C^{\alpha\mu}\, C^{\beta\nu} = \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}\left(R^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} R\, g^{\alpha\mu}\right)\left(R^{\beta\nu} - \frac{1}{4} R\, g^{\beta\nu}\right) =$$

$$= \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} = R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} - H^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} +$$

$$+ \frac{R}{6}\, \eta_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} = R_{\alpha\overset{*}{\beta}\mu\nu}\, R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\mu\theta}\, R^{\theta}{}_{\sigma} - \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\theta\nu}\, R^{\theta}{}_{\rho}\right) R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu} + 0 = R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\mu}\, R^{\beta\nu}$$

APÊNDICE B

Obteremos aqui as equações de campo utilizadas na tese, a partir de princípios variacionais.

B.1) Seja $S = \int \left(\frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - H \right) \sqrt{-g}\, d^4x$

onde $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ e

$H = H(P_1, P_2)$ sendo $P_1 = \frac{1}{4} P_{\mu\nu} P^{\mu\nu}$, $P_2 = \frac{1}{4} P_{\mu\nu} \overset{*}{P}{}^{\mu\nu}$

e $P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu}$. Os campos A_μ, $P_{\mu\nu}$ são considerados independentes e $g_{\mu\nu}$ está congelada. Variando-se S em relação a A_μ temos:

(B.1.1) $$\delta S = \delta \int \left(\frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - H \right) \sqrt{-g}\, d^4 = \int \frac{1}{2} P^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$= \int \frac{1}{2} P^{\mu\nu} \delta(A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}) \sqrt{-g}\, d^4x =$$

$$= \int \frac{1}{2} P^{\mu\nu} \left[(\delta A_\mu)_{;\nu} - (\delta A_\nu)_{;\mu} \right] \sqrt{-g}\, d^4x =$$

$$= \int P^{\mu\nu} (\delta A_\mu)_{;\nu} \sqrt{-g}\, d^4x =$$

$$= \int (P^{\mu\nu} \delta A_\mu)_{;\nu} \sqrt{-g}\, d^4x - \int P^{\mu\nu}{}_{;\nu} \delta A_\mu \sqrt{-g}\, d^4x$$

$P^{\mu\nu} \delta A_\mu$ é um vetor Y^ν. A divergência covariante de um vetor pode ser escrita em termos de derivadas simples da seguinte forma [21]:

$$Y^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{(Y^{\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}}{\sqrt{-g}}$$

Portanto:

$$\int (P^{\mu\nu}\ \delta A_{\mu})_{;\nu}\ \sqrt{-g}\ d^4x = \int (P^{\mu\nu}\ \delta A_{\mu}\ \sqrt{-g})_{,\nu}\ d^4x =$$

$$= \int_S P^{\mu\nu}\ \delta A_{\mu}\ d\Sigma_{\nu}$$

onde $\int_S P^{\mu\nu}\ \delta A_{\mu}\ d\Sigma_{\nu}$ representa uma integral das quantidades $P^{\mu\nu}\ \delta A_{\mu}$ sobre a superfície S do infinito, consequência do teorema de Gauss. Se estas quantidades vão a zero no infinito então:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \int P^{\mu\nu}{}_{;\nu}\ \delta A_{\mu}\ \sqrt{-g}\ d^4x = 0$$

Como as variações de A_{μ} são quaisquer então:

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\mu}} = 0 \Rightarrow P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Se fizermos variações de S em relação a P encontramos:

$$\text{(B.1.2)} \qquad \delta S = \int \left(\frac{1}{2}\ F_{\mu\nu}\ \delta P^{\mu\nu} - \delta H\right) \sqrt{-g}\ d^4x$$

Mas $\delta H = \dfrac{\delta H}{\delta P_1}\,\delta P_1 + \dfrac{\delta H}{\delta P_2}\,\delta P_2$

onde $\delta P_1 = \left(\frac{1}{4}\,P^{\mu\nu}P_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{4}\,\delta\left(P^{\mu\nu}\,g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\beta}\,P^{\alpha\beta}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\,P_{\mu\nu}\,\delta P^{\mu\nu}$$

e $\delta P_2 = \delta\left(\frac{1}{4}\,P^{\mu\nu}\,P^*_{\mu\nu}\right) = \delta\left(\frac{1}{4}\,P^{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,P^{\alpha\beta}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\,P^*_{\mu\nu}\,\delta P^{\mu\nu}$$

Assim,

$$\delta H = \frac{1}{2}\,\frac{\delta H}{\delta P_1}\,P_{\mu\nu}\,\delta P^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta H}{\delta P_2}\,P^*_{\mu\nu}\,\delta P^{\mu\nu}$$

Então B.1.2 fica:

$$\delta S = \int\left(\frac{1}{2}\,F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta H}{\delta P_1}\,P^*_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta H}{P_2}\,P^*_{\mu\nu}\right)\delta P^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,d^4x$$

Para variações independentes de $P^{\mu\nu}$ temos, portanto:

$$\frac{\delta S}{\delta P^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow F_{\mu\nu} = \frac{\delta H}{\delta P_1}\,P_{\mu\nu} + \frac{\delta H}{\delta P_2}\,P^*_{\mu\nu}$$

B.2) Seja $S = \int\left(\frac{1}{4}\,C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} - H\right)\sqrt{-g}\,d^4x$

onde $C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = P^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}\,(P^{\alpha}{}_{\mu}\,g_{\beta\nu} + P_{\beta\nu}\,\delta^{\alpha}{}_{\mu} - P^{\alpha}{}_{\nu}\,g_{\beta\mu} - P_{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}) +$

$$+ \frac{1}{6} P \, (\delta^{\alpha}{}_{\mu} \, g_{\beta\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu} \, g_{\beta\mu})$$

Com $P^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, $P_{\alpha\mu}$ e P definidos em (2.15).

A função H depende apenas de $Q_1 = \frac{1}{8} Q^{\alpha\beta\mu\nu} Q_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $Q_2 = \frac{1}{8} Q^{\alpha\beta\mu\nu} \overset{*}{Q}_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Consideramos $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$, a conexão $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ e a métrica $g_{\mu\nu}$ como variáveis independentes.

O tensor $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ tem as mesmas simetrias de $C_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ e traço nulo. Assim:

$$C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} = P^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{4} \, (R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} - R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} - R_{\nu\mu}{}^{\alpha}{}_{\beta}) \, Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} =$$

$$= R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$$

Variando-se S em relação ã $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ temos:

$$\delta S = \int \frac{1}{4} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \, \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, \sqrt{-g} \, d^4x \tag{B.2.1}$$

Para computarmos a variação de $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ em relação ã $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$, faremos uma mudança de coordenadas tal que, num determinado ponto, a conexão se anula. Neste caso, para o ponto considerado temos:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu}$$

Portanto:

$$(B.2.2) \qquad \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu})_{,\nu} - (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu})_{,\mu}$$

Note que $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ não é um verdadeiro tensor pois mediante uma mudança de coordenadas ele se transforma da seguinte maneira:

$$(B.2.3) \qquad \bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial\bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\mu}} \Gamma^{\nu}{}_{\rho\sigma} + \frac{\partial^{2}\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial\bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\mu}}$$

No entanto, $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ é um verdadeiro tensor pois o termo não homogêneo de (B.2.3) não depende da conexão usada e portanto:

$$\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial\bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\mu}} \delta\Gamma^{\nu}{}_{\rho\sigma}$$

Como em (B.2.2) a derivada simples é a propria derivada covariante, já que $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = 0$ no ponto considerado, então aquela equação fica:

$$(B.2.4) \qquad \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu})_{;\mu}$$

Esta é uma igualdade tensorial que portanto deve independer do sistema de coordenadas utilizado. Assim (B.2.4) vale em todos os pontos e é uma expressão geral para $\delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$.

Desenvolvendo (B.2.1) temos:

$$\delta S = \int \frac{1}{4} Q_{\alpha}{}^{\rho\mu\nu} \left[(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu})_{;\mu} \right] \sqrt{-g}\; d^4x$$

$$= \int \frac{1}{2} Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu;\nu} \sqrt{-g}\; d^4x \quad . \text{ Assim:}$$

$$\text{(B.2.5)} \qquad \delta S = \int \left(\frac{1}{2} Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} \sqrt{-g}\right)_{;\nu} d^4x \;+$$

$$- \int \frac{1}{4} (\sqrt{-g}\; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu})_{;\nu}\; \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} d^4x$$

Usando a definição dada na referência [22] para a diferenciação de uma quantidade do tipo:

$$B^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} = \sqrt{-g}\; A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}$$

onde $A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}$ é um verdadeiro tensor vemos que,

sendo $Y^{\nu} = \frac{1}{4} Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$

$$(Y^{\nu} \sqrt{-g})_{;\nu} = (Y^{\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu} Y^{\alpha} \sqrt{-g} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho} Y^{\alpha} \sqrt{-g} =$$

$$= (Y^{\nu} \sqrt{-g})_{,\nu}$$

Portanto, usando-se o mesmo raciocínio que na seção B.1, podemos desprezar o termo $\int (\sqrt{-g}\; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu})_{;\nu}\; d^4x$

em (B.2.5) por ser uma integral sobre uma superfície no infinito.

Assim:

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int (\sqrt{-g}\; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu})_{;\nu}\; \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\; d^4x$$

Para variações independentes de $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ temos:

$$\frac{\delta S}{\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{-g}\; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu})_{;\nu} = 0$$

Variando-se agora S em relação a $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ encontramos:

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{4}\; C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\; \delta Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} - \delta H\right) \sqrt{-g}\; d^4x$$

onde:

$$\delta = \frac{\partial H}{\partial Q_1}\, \delta Q_1 + \frac{\partial H}{\partial Q_2}\, \delta Q_2 =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial Q_1}\, \frac{1}{8}\, \delta\left(Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; Q_{\rho}{}^{\sigma\theta\phi}\; g^{\rho\alpha}\; g_{\sigma\beta}\; g_{\theta\mu}\; g_{\phi\nu}\right) +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial Q_2}\, \frac{1}{8}\, \delta\left(Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; Q_{\rho}{}^{\sigma\theta\phi}\; \frac{1}{2}\, \eta_{\theta\phi\mu\nu}\; g_{\sigma\beta}\; g^{\alpha\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\, \frac{\partial H}{\partial Q_1}\, Q^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\; \delta Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial H}{Q_2}\, \overset{*}{Q}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\; \delta Q_{\alpha}{}^{\beta\mu}$$

Assim:

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{4}\, C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial H}{\partial Q_1}\, Q^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial H}{\partial Q_2}\, \overset{*}{Q}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\right) \times\; \delta Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\; \sqrt{-g}\; d^4$$

Portanto,

(B.2.6) $$\frac{\delta S}{\partial Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu}} = 0 \Longrightarrow C^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q^\alpha{}_{\beta\mu\nu} - \frac{\partial H}{\partial Q_2} \overset{*}{Q}{}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$$

Finalmente, variando-se S em relação à $g_{\mu\nu}$ encontramos:

(B.2.7) $$\delta S = \int -\delta H \sqrt{-g}\, d^4x + \int \left[+ \frac{1}{4} C^\alpha{}_{\beta\mu\nu} Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} - H \right] \delta\sqrt{-g}\, d^4x$$

onde:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}$$ (veja referência [23])

e

(B.2.8) $$\delta H = \frac{\partial H}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \frac{\partial H}{\partial Q_2} \delta Q_2$$

Calculando δQ_1 temos:

$$\delta Q_1 = \frac{1}{8} Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q_\rho{}^{\sigma\theta\phi}\, \delta\, (g^{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} g_{\theta\mu} g_{\nu\phi}) =$$

$$= \frac{1}{8} (Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q_{\rho\beta\mu\nu}\, \delta g^{\rho\alpha} + Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q^{\alpha\sigma}{}_{\mu\nu}\, \delta g_{\beta\sigma} +$$

$$+ Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q^\alpha{}_\beta{}^\theta{}_\nu\, \delta g_{\theta\mu} + Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q^\alpha{}_{\beta\mu}{}^\phi\, \delta g_{\nu\phi})$$

Como $\delta(\delta^\alpha{}_\beta) = \delta(g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta}) = 0$ então $g_{\rho\beta}\, \delta g^{\alpha\rho} = -g^{\alpha\rho}\, \delta g_{\rho\beta}$.

Usando este resultado encontramos:

$$\delta Q_1 = \frac{1}{8} (-Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} Q^\varepsilon{}_{\beta\mu\nu}\, g^{\rho\alpha}\, \delta g_{\varepsilon\rho} +$$

$$+ \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; Q^{\alpha\sigma}{}_{\mu\nu} \; \delta g_{\beta\sigma} + Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; Q^{\alpha}{}_{\beta\mu}{}^{\phi} \; \delta g_{\nu\phi} =$$

$$= \frac{1}{8} \; (-Q^{\beta\rho\mu\nu} \; Q_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\mu\nu} \; \delta g_{\varepsilon\rho} + Q^{\alpha\beta\mu\nu} \; Q_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \; \delta g_{\beta\sigma} +$$

$$+ \; 2Q^{\alpha\beta\mu\nu} \; Q_{\alpha\beta\mu}{}^{\phi} \; \delta g_{\nu\phi}) = \frac{1}{4} \; Q^{\alpha\beta\mu\nu} \; Q_{\alpha\beta\mu}{}^{\phi} \; \delta g_{\nu\phi}$$

Fazendo o cálculo de δQ_2 temos:

$$\delta \left(\frac{1}{8} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; \frac{1}{2} \; \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \; Q^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\rho\sigma} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; Q_{\theta}{}^{\phi\rho\sigma} \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; \delta(\sqrt{-g} \; g^{\alpha\theta} \; g_{\beta\phi}) =$$

$$= \frac{1}{16} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; Q_{\theta}{}^{\phi\rho\sigma} \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; (-\frac{1}{2} \; \sqrt{-g} \; g_{\gamma\tau} \; \delta g^{\gamma\tau} \; g^{\alpha\theta} \; g_{\beta\phi} +$$

$$+ \; \sqrt{-g} \; g_{\beta\phi} \; \delta g^{\alpha\theta} + \sqrt{-g} \; g^{\alpha\theta} \; \delta g_{\beta\phi}) =$$

$$= \frac{1}{16} \; Q^{\theta\beta\mu\phi} \; Q_{\theta\beta}{}^{\rho\sigma} \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; (-\frac{1}{2}) \; \sqrt{-g} \; g_{\gamma\tau} \; \delta g^{\gamma\tau} \; +$$

$$+ \; \frac{1}{16} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; Q_{\theta\beta}{}^{\rho\sigma} \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; \sqrt{-g} \; \delta g^{\alpha\theta} \; +$$

$$+ \; \frac{1}{16} \; Q^{\theta\beta\mu\nu} \; Q_{\theta}{}^{\phi\rho\sigma} \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; \sqrt{-g} \; \delta g_{\beta\phi} =$$

$$= -\frac{1}{2} \; Q_2 \; g_{\mu\nu} \; \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; \overset{*}{Q}_{\theta\beta\mu\nu} \; \sqrt{-g} \, \delta g^{\alpha\theta} \; +$$

$$-\frac{1}{8} \; Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \; \overset{*}{Q}_{\theta\beta\mu\nu} \sqrt{-g} \; \delta g^{\alpha\theta}$$

$$= - \frac{1}{2} Q_2 \, g_{\mu\nu} \, \delta g^{\mu\nu}$$

Portanto, (B.2.8) fica

$$\delta H = - \frac{\partial H}{\partial Q_1} \frac{1}{4} Q^{\alpha\beta\theta}{}_{\mu} Q_{\alpha\beta\theta\nu} \, \delta g^{\mu\nu} - \frac{\partial H}{\partial Q_2} \frac{1}{2} Q_2 g_{\mu\nu} \, \delta g^{\mu\nu}$$

Substituindo em (B.2.7) temos:

$$\delta S = \int \Bigg[\left(\frac{1}{4} C^{\alpha}{}_{\beta\theta\phi} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\theta\phi} - H \right) \left(- \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q^{\alpha\beta\theta}{}_{\mu} \, Q_{\alpha\beta\theta\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 \, g_{\mu\nu} \Bigg] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x$$

Assim, se $\frac{\delta S}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$ então:

$$- \frac{1}{8} C^{\alpha}{}_{\beta\theta\phi} \, Q_{\alpha}{}^{\beta\theta\phi} \, g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} H g_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q^{\alpha\beta\theta}{}_{\mu} \, Q_{\alpha\beta\theta\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 \, g_{\mu\nu} = 0$$

Usando (B.2.6) temos:

$$\text{(B.2.9)} \quad - \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q_1 \, g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 \, g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} H g_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q^{\alpha\beta\theta}{}_{\mu} \, Q_{\alpha\beta\theta\nu} = 0$$

Multiplicando esta equação por $g_{\mu\nu}$ encontramos:

$$- 4 \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q_1 - 2 \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 + 2H + 2 \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 - H = 0$$

Substituindo este resultado em (B.2.9) e usando que $Q^{\alpha\beta\theta}{}_{\mu} \; Q_{\alpha\beta\theta\nu} = 2 \, Q_1 \, g_{\mu\nu}$, já que $Q^{\alpha\beta\mu\nu}$ tem as mesmas simetrias de $C^{\alpha\beta\mu\nu}$, vem:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial H}{\partial Q_2} Q_2 - H \right) g_{\mu\nu} = 0$$

APÊNDICE C

Neste apêndice trataremos dos invariantes topológicos de 2ª ordem no tensor de curvatura e suas contrações e de variações em invariantes métricas de 3ª ordem nestas mesmas quantidades.

C.1) Invariantes topológicos gravitacionais

Seja uma ação S da forma:

$$S = \int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, \phi_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x$$

onde $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de um espaço-tempo Riemanniano e $\phi^{\varepsilon\beta\mu\nu}$ um tensor anti-simétrico nos pares (ε,β) e (μ,ν).

Variando-se S em relação a $g_{\mu\nu}$ temos:

$$\delta S = \int \phi_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \, \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4 + \int \phi_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \, \delta\sqrt{-g} \, d^4x$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\varepsilon} \, \delta g^{\alpha\varepsilon} \quad \text{(veja (23))}$$

$$\text{(C.1.1)} \qquad \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu;\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu;\mu}$$

Mas:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon} \left(g_{\varepsilon\beta,\mu} + g_{\varepsilon\mu,\beta} - g_{\mu\beta,\varepsilon} \right)$$

Portanto:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}\,\delta g^{\alpha\varepsilon}\,(g_{\varepsilon\beta,\mu} + g_{\varepsilon\mu,\beta} - g_{\mu\beta,\varepsilon}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,g^{\alpha\varepsilon}\,(\delta g_{\varepsilon\beta,\mu} + \delta g_{\varepsilon\mu,\beta} - \delta g_{\mu\beta,\varepsilon})$$

No ponto em que, para um dado sistema de coordenadas, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = 0$, a derivada covariante é a própria derivada simples. Como o espaço é de Riemman, neste ponto temos:

$$g_{\varepsilon\beta,\mu} = g_{\varepsilon\beta;\mu} = 0$$

Assim:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\varepsilon}\,(\delta g_{\varepsilon\beta;\mu} + \delta g_{\varepsilon\mu;\beta} - \beta g_{\mu\beta;\varepsilon}) \tag{C.1.2}$$

Como esta é uma igualdade tensorial, então ela vale para qualquer sistema de coordenadas e, portanto, em todos os pontos.

Então, usando (C.1.1) e (C.1.2) temos:

$$\Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}\,\delta R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} = \Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}\,(\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu;\mu}) =$$

$$= 2\,\Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} =$$

$$= 2\Phi^{\alpha\beta\mu\nu}\,\frac{1}{2}\,g^{\alpha\varepsilon}\,(\delta g_{\varepsilon\beta;\mu;\nu} + \delta g_{\varepsilon\mu;\beta;\nu} - \delta g_{\mu\beta;\varepsilon;\nu})$$

$$= \Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu} \, (\delta g_{\varepsilon\beta;\mu;\nu} + \delta g_{\varepsilon\mu;\beta;\nu} - \delta g_{\mu\beta;\varepsilon;\nu})$$

Como $\delta g_{\varepsilon\beta;\mu;\nu}$ é simétrico $\Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu}$ anti-simétrico em ε e β vem que:

$$\Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu} \, \delta R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} = 2\Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu} \, \delta g_{\varepsilon\mu;\beta;\nu}$$

Assim:

$$\delta S = \int 2\Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu} \, \delta g_{\varepsilon\mu;\beta;\nu} \, \sqrt{-g} \, d^4x - \frac{1}{2} \int \Phi_{\theta}^{\ \beta\mu\nu} \, R^{\theta}_{\ \beta\mu\nu} \, g_{\alpha\varepsilon} \, \delta g^{\alpha\varepsilon} \, \sqrt{-g} \, d^4x$$

Utilizando-se o teorema de Gauss vê-se que:

$$\delta S = \int (2\Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu}{}_{;\nu;\beta} \, \delta g_{\varepsilon\mu} - \frac{1}{2}\Phi_{\theta}^{\ \beta\mu\nu} \, R^{\theta}_{\ \beta\mu\nu} \, g_{\alpha\varepsilon} \, \delta g^{\alpha\varepsilon}) \, \sqrt{-g} \, d^4x$$

Mas: $\Phi^{\varepsilon\beta\mu\nu}{}_{;\nu;\beta} \, \delta g_{\varepsilon\mu} = \Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}{}_{;\nu;\beta} \, g^{\alpha\varepsilon} \, \delta g_{\varepsilon\mu} =$

$$= - \Phi_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu}{}_{;\nu;\beta} \, g_{\varepsilon\mu} \, \delta g^{\alpha\varepsilon} = -\Phi_{\alpha\ \varepsilon}^{\ \beta\ \nu}{}_{;\nu;\beta} \, \delta g^{\alpha\varepsilon}$$

Assim:

$$\delta S = - \int (2\Phi_{\alpha\ \varepsilon}^{\ \beta\ \nu}{}_{;\nu;\beta} + \frac{1}{2}\Phi^{\theta\beta\mu\nu} \, R_{\theta\beta\mu\nu} \, g_{\alpha\varepsilon}) \, \delta g^{\alpha\varepsilon} \, \sqrt{-g} \, d^4x \qquad \text{(C.1.3)}$$

Seja agora a ação:

$$S_1 = \int R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} \, R_{\alpha}^{\ \beta\mu\nu} \, \sqrt{-g} \, d^4x$$

$$(C.1.4) \quad \delta S_1 = \int R_\alpha{}^{\beta\mu\nu}\, \delta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x + \int R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, \delta R_\alpha{}^{\beta\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x + \int R_\alpha{}^{\beta\mu\nu} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, \delta\sqrt{-g}\, d^4x$$

Mas:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, \delta R_\alpha{}^{\beta\mu\nu} = \delta(R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon}\, g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon}) R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} =$$

$$= R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon}\, \delta R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon} +$$

$$+ R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon}\, \delta(g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon})$$

$$= R_\alpha{}^{\beta\mu\nu}\, \delta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon}\, \delta(g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon})$$

No entanto:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon}\, \delta(g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon}) =$$

$$= R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R^\rho{}_{\sigma\lambda\varepsilon}\, (\delta g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon} + g_{\alpha\rho}\, \delta g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon} +$$

$$+ g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, \delta g^{\lambda\mu}\, g^{\nu\varepsilon} + g_{\alpha\rho}\, g^{\sigma\beta}\, g^{\lambda\mu}\, \delta g^{\nu\varepsilon})$$

$$= - R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R_\theta{}^{\beta\mu\nu}\, g_{\alpha\rho}\, \delta g^{\theta\rho} + R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R_{\alpha\sigma}{}^{\mu\nu}\, \delta g^{\sigma\beta} +$$

$$+ R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R_\alpha{}^\beta{}_\lambda{}^\nu\, \delta g^{\lambda\mu} + R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\, R_\alpha{}^{\beta\mu}{}_\varepsilon\, \delta g^{\nu\varepsilon} =$$

$$= - R_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\theta\beta\mu\nu}\, g_{\varepsilon\theta}\, \delta g^{\alpha\varepsilon} + R_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\theta\mu\nu}\, g_{\varepsilon\theta}\, \delta g^{\sigma\beta}$$

$$+ R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\theta\nu} g_{\theta\lambda} \delta g^{\lambda\mu} + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\theta} g_{\varepsilon\theta} \delta g^{\nu\varepsilon} =$$

$$= - R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\theta\beta\mu\nu} g_{\varepsilon\theta} \delta g^{\alpha\varepsilon} + R_{\beta\alpha\mu\nu} R^{\beta\theta\mu\nu} g_{\varepsilon\theta} \delta g^{\alpha\varepsilon} +$$

$$+ R_{\mu\beta\alpha\nu} R^{\mu\beta\theta\nu} g_{\theta\varepsilon} \delta g^{\alpha\varepsilon} + R_{\mu\beta\nu\alpha} R^{\mu\beta\nu\theta} g_{\varepsilon\theta} \delta g^{\alpha\varepsilon} =$$

$$= 2R_{\alpha\nu\mu\beta} R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} \delta g^{\alpha\varepsilon}$$

Assim, substituindo estes resultados em C.1.4 temos:

$$\delta S_1 = \int 2R_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$+ \int (2R_{\alpha\nu\mu\beta} R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} - \frac{1}{2} R^{\theta\beta\mu\nu} R_{\theta\beta\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon})\, \delta g^{\alpha\varepsilon} \sqrt{-g}\, d^4x$$

Identificando na 1ª integral $2R_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ com $\Phi_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ temos:

$$\text{(C.1.5)} \quad \delta S_1 = \int (-4R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}{}^{\nu}{}_{;\nu;\beta} + 2R_{\alpha\nu\mu\beta} R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} - \frac{1}{2} R^{\theta\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu})\delta g^{\alpha\varepsilon} \sqrt{-g}\, d^4x$$

Note que:

$$R^{\alpha\varepsilon\nu\beta}{}_{;\nu;\beta} = \frac{1}{2} (R^{\alpha\varepsilon\nu\beta}{}_{;\nu;\beta} - R^{\alpha\varepsilon\nu\beta}{}_{;\beta;\nu}) =$$

$$= \frac{1}{2} (R^{\alpha}{}_{\rho\nu\beta} R^{\rho\varepsilon\nu\beta} + R^{\varepsilon}{}_{\rho\nu\beta} R^{\alpha\rho\nu\beta} + R^{\nu}{}_{\rho\nu\beta} R^{\alpha\varepsilon\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\nu\beta} R^{\alpha\varepsilon\nu\rho}) = 0$$

Assim:

$$(R^{\alpha\beta\varepsilon\nu} + R^{\varepsilon\beta\alpha\nu})_{;\nu;\beta} = (-R^{\alpha\varepsilon\nu\beta} - R^{\alpha\nu\beta\varepsilon} + R^{\varepsilon\beta\alpha\nu})_{;\nu;\beta} =$$

$$= - R^{\alpha\varepsilon\nu\beta}{}_{;\nu;\beta} + 2R^{\varepsilon\beta\alpha\nu}{}_{;\nu;\beta} = 2R^{\varepsilon\beta\alpha\nu}{}_{;\nu;\beta}$$

Portanto não é necessário simetrizarmos o 1º termo do integrando de C.1.5 pois ele já é simétrico.

Calculemos em seguida a variação da ação:

(C.1.6) $$\delta S_2 = \delta \int R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x =$$

$$= \int (R^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\, \delta R^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}\, \delta\sqrt{-g})\, d^4x$$

Mas:

(C.1.7) $$R^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} = R^{\mu\nu} \left[(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{;\alpha} \right] =$$

$$= R^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon} (\delta g_{\varepsilon\mu;\alpha;\nu} + \delta g_{\varepsilon\alpha;\mu;\nu} - \delta g_{\mu\alpha;\varepsilon;\nu} - \delta g_{\varepsilon\mu;\nu;\alpha} -$$

$$- \delta g_{\varepsilon\nu;\mu;\alpha} + \delta g_{\mu\nu;\varepsilon;\alpha}) =$$

$$= R^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon} (\delta g_{\varepsilon\alpha;\mu;\nu} - 2\, \delta g_{\varepsilon\mu;\nu;\alpha} + \delta g_{\mu\nu;\varepsilon;\alpha})$$

Por outro lado:

$$R_{\mu\nu}\, \delta R^{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\, \delta (R_{\alpha\beta}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) = R^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} +$$

$$+ R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}\, g^{\nu\beta}\, \delta g^{\mu\alpha} + R_{\alpha\beta}\, R_{\mu\nu}\, g^{\mu\alpha}\, \delta g^{\nu\beta} =$$

$$= R^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu} + 2R_{\alpha\beta}\ R_{\mu\nu}\ g^{\nu\beta}\ \delta g^{\mu\alpha} =$$

$$= R^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu} + 2R_{\alpha}{}^{\nu}\ R_{\nu\varepsilon}\ \delta g^{\alpha\varepsilon}$$

Assim, (C.1.6) fica:

$$\delta S_1 = \int (2R^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu}\ \sqrt{-g} + 2R_{\alpha}{}^{\nu}\ R_{\nu\varepsilon}\ \delta g^{\alpha\varepsilon} + R^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu}\ \delta\sqrt{-g})\ d^4x$$

$$= \int 2R^{\mu\nu}\ \frac{1}{2}\ g^{\alpha\varepsilon}\ (\delta g_{\alpha\varepsilon;\mu;\nu} - 2\delta g_{\varepsilon\mu;\nu;\alpha} + \delta g_{\mu\nu;\varepsilon;\alpha}) +$$

$$+ \int 2R_{\alpha}{}^{\nu}\ R_{\nu\varepsilon}\ \delta g^{\varepsilon\alpha}\ \sqrt{-g}\ \ d^4x \quad +$$

$$- \int \frac{1}{2}\ g_{\alpha\varepsilon}\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ \ R^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu}\ d^4x$$

Integrando por partes o 1º termo e usando o teorema de Gauss temos:

$$\delta S_2 = \int (R^{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu}\ g^{\alpha\varepsilon}\ \delta g_{\alpha\varepsilon} - 2R^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\nu}\ g^{\alpha\varepsilon}\ \delta g_{\varepsilon\mu} +$$

$$+ R^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\varepsilon}\ \ g^{\alpha\varepsilon}\ \delta g_{\mu\nu})\ \sqrt{-g}\ d^4x \quad +$$

$$+ \int (2R_{\alpha}{}^{\nu}\ R_{\nu\varepsilon} - \frac{1}{2}\ g_{\alpha\varepsilon}\ R^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu})\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ d^4x \quad \Rightarrow$$

$$\text{(C.1.8)} \quad \Rightarrow \delta S_2 = \int (2\ R_{\varepsilon}{}^{\nu}{}_{;\alpha;\nu} - R^{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu}\ g_{\alpha\varepsilon} - \Box\ R_{\alpha\varepsilon} \quad +$$

$$+ 2R_{\alpha}{}^{\nu}\ R_{\nu\varepsilon} - \frac{1}{2}\ g_{\alpha\varepsilon}\ R^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu})\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

onde $\Box R_{\alpha\varepsilon} = R_{\alpha\varepsilon}{}^{;\mu}{}_{;\mu}$

Variando-se agora a ação $S_3 = \int \sqrt{-g}\ R^2\ d^4x$ temos:

$$\delta S_3 = \int -\frac{1}{2}\, g_{\alpha\varepsilon}\ R^2\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ d^4x\ +\ 2\int R\ \delta R\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Mas:

$$R\delta R = R\ \delta(R_{\mu\nu}\ g^{\mu\nu}) = R\ g^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu} + R\ R_{\alpha\varepsilon}\ \delta g^{\alpha\varepsilon}$$

Para o cálculo de $R\ g^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu}$ utilizaremos (C.1.7) substituindo $R^{\mu\nu}$ por $R\ g^{\mu\nu}$. Assim:

$$R\ g^{\mu\nu}\ \delta R_{\mu\nu} = R\ g^{\alpha\varepsilon}\left[\delta g_{\alpha\varepsilon;\mu;\nu} - \delta g_{\varepsilon\mu;\nu;\alpha}\right] g^{\mu\nu}$$

Portanto:

$$\delta S_3 = \int 2R\ g^{\alpha\varepsilon}\ g^{\mu\nu}\ (\delta g_{\alpha\varepsilon;\mu;\nu} - \delta g_{\varepsilon\mu;\nu;\alpha})\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

$$+ \int 2R\ R_{\alpha\varepsilon}\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ d^4x\ +$$

$$- \frac{1}{2}\int g_{\alpha\varepsilon}\ R^2\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Integrando por partes o 1º termo e usando o teorema de Gauss

$$\text{(C.1.9)}\qquad \delta S_3 = \int d^4x\ (2R_{;\alpha;\varepsilon} - 2\Box R\ g_{\alpha\varepsilon} + 2R\ R_{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\varepsilon}\ R^2)\ \delta g^{\alpha\varepsilon}\ \sqrt{-g}$$

Usando as identidades de Bianchi contraidas temos:

$$(C.1.10) \qquad R_{\alpha\ \varepsilon}^{\ \beta\ \nu}{}_{;\nu;\beta} = R_{\alpha\varepsilon}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - R_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{;\alpha;\beta}$$

$$(C.1.11) \qquad R_{;\alpha;\varepsilon} = 2R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta;\varepsilon} = 2R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\varepsilon;\beta} - 2R_{\alpha\rho\varepsilon\beta}\, R^{\rho\beta} +$$

$$+ R_{\rho\varepsilon}\, R_{\alpha}{}^{\rho}$$

$$(C.1.12) \qquad - \Box R = -g^{\mu\nu}\, R_{;\nu;\mu} = -2R_{\nu}{}^{\beta}{}_{;\beta;\mu}\, g^{\mu\nu} = -\, 2R^{\mu\beta}{}_{;\beta;\mu} =$$

$$= -2R^{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu}$$

Usando também a identidade:

$$W_{\alpha\nu\mu\beta}\, W_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} = \frac{1}{4}\, W_{\rho\nu\mu\beta}\, W^{\rho\nu\mu\beta}\, g_{\alpha\varepsilon}$$

e que $W_{\alpha\nu\mu\beta} = R_{\alpha\nu\mu\beta} - H_{\alpha\nu\mu\beta} + \frac{1}{6}\, R\, g_{\alpha\nu\mu\beta}$ temos :

$$W_{\alpha\nu\mu\beta}\, W_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} = R_{\alpha\nu\mu\beta}\, R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} - R_{\varepsilon}{}^{\beta}\, R_{\alpha}{}^{\beta} - R_{\varepsilon}{}^{\beta}\, R_{\alpha\beta}$$

$$- R^{\nu\beta}\, R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} - R^{\nu\beta}\, R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} + \frac{1}{3}\, R\, R_{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{3}\, R\, R_{\alpha\varepsilon} +$$

$$+ R\, R_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{2}\, R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu}\, G_{\alpha\varepsilon} - \frac{R^2}{6}\, g_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{3}\, R\, R_{\alpha\varepsilon} +$$

$$- \frac{1}{3}\, R\, R_{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{6}\, R^2\, g_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{6}\, R^2\, g_{\alpha\varepsilon} = R_{\alpha\nu\mu\beta}\, R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} +$$

$$- 2R_{\varepsilon}{}^{\beta} R_{\alpha\beta} - 2R^{\nu\beta} R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} + RR_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon} +$$

$$- \frac{1}{6} R^2 g_{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{4} W_{\rho\nu\mu\beta} W^{\rho\nu\mu\beta} g_{\alpha\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4} R_{\rho\nu\mu\beta} R^{\rho\nu\mu\beta} g^{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{12} R^2 \Rightarrow$$

$$\text{(C.1.13)} \quad \Rightarrow R_{\alpha\nu\mu\beta} R_{\varepsilon}{}^{\nu\mu\beta} = 2R_{\varepsilon}{}^{\beta} R_{\alpha\beta} + 2R^{\nu\beta} R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} - RR_{\alpha\varepsilon} +$$

$$+ \frac{1}{4} R_{\rho\nu\mu\beta} R^{\rho\nu\mu\beta} g_{\alpha\varepsilon} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{4} R^2 g_{\alpha\varepsilon}$$

Subtraindo quatro vezes (C.1.8) de (C.1.5) somando (C.1.9) ao resultado e utlizando (C.1.10), (C.1.11), (C.1.12) e (C.1.13) encontramos:

$$\delta S_1 - 4\, \delta S_2 + \delta S_3 = \int (-4R_{\varepsilon\alpha}{}^{;\beta}{}_{;\beta} + 4R_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{;\alpha;\beta} +$$

$$+ 4R_{\varepsilon}{}^{\beta} R_{\alpha\beta} + 4R^{\nu\beta} R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} - 2RR_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{2} R_{\rho\beta\mu\nu} R^{\rho\beta\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon}$$

$$- 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{2} R^2 g_{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{2} R_{\rho\beta\mu\nu} R^{\rho\beta\mu\nu} g_{\alpha\varepsilon} +$$

$$+ 4\Box R_{\alpha\varepsilon} - 8R^{\nu}{}_{\alpha;\varepsilon;\nu} + 4R^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} g_{\alpha\varepsilon} - 8R^{\nu}{}_{\alpha} R_{\nu\varepsilon} +$$

$$- 2g_{\alpha\varepsilon} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 4R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\varepsilon;\beta} - 4R_{\alpha\nu\varepsilon\beta} R^{\nu\beta} + 4R_{\varepsilon}{}^{\beta} R_{\alpha}{}^{\beta} +$$

$$-4R^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} g_{\alpha\varepsilon} + 2RR_{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{2} R^2 g_{\alpha\varepsilon})\, \delta g^{\alpha\varepsilon} \sqrt{-g}\, d^4x = 0$$

Assim vemos que:

$$S_I = \int (R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \sqrt{-g}\, d^4x$$

é um invariante topológico pois não depende de flutuações da métrica $\frac{\delta S_I}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$ (a menos de termos de superfície)

É fácil ver que usando (A.3),

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 =$$

$$= A - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{2}{3} R^2 = - 4\overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}{}^{*} \; R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$$

O 2º invariante topológico gravitacional é dado por:

$$S_4 = \int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \overset{*}{R}{}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x$$

Para prová-lo, calculamos $\frac{\delta S_4}{\partial g_{\mu\nu}}$

$$S_4 = \int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}} R_{\rho\sigma\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} R_{\rho\sigma\alpha\beta}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, d^4x =$$

$$= +\frac{1}{2} \int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, d^4x =$$

Assim:

$$\delta S_4 = \frac{1}{2} \int R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\, d^4 x$$

$$+ \frac{1}{2} \int R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma} \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \; \delta R^{\beta}{}_{\alpha\mu\nu} \; d^4x$$

$$= - \int R^{\beta}{}_{\alpha}{}^{\overset{*}{\mu\nu}} \; \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \; \sqrt{-g} \; d^4x$$

$$- \int R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\overset{*}{\rho\sigma}} \; \delta R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma} \; \sqrt{-g} \; d^4x$$

$$= 2 \int R_{\alpha}{}^{\beta\overset{*}{\mu}\nu} \; \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \; \sqrt{-g} \; d^4x$$

Usando (C.1.3) fazendo $R_{\alpha}{}^{\beta\overset{*}{\mu}\nu} = \Phi_{\alpha}{}^{\beta\overset{*}{\mu}\nu}$ temos:

$$\delta S_4 = -4 \int R_{\alpha}{}^{\overset{*}{\beta}}{}_{\varepsilon}{}^{\nu}{}_{;\nu;\beta} \; \sqrt{-g} \; \delta g^{\alpha\varepsilon} d^4x$$

Mas:

$$R^{\alpha\beta\overset{*}{\varepsilon}\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\varepsilon\nu\rho\sigma} \; R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma;\nu} =$$

$$= \frac{1}{6} \eta^{\varepsilon\nu\rho\sigma} \left(R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma;\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha\beta}{}_{\sigma\nu;\rho}\right) = 0$$

Assim:

$$\frac{S^4}{\delta g^{\alpha\varepsilon}} = 0, \text{ a menos de termos de superfície}$$

C.2) Invariantes métricos de 3ª ordem no tensor de curvatura

Primeiramente trataremos dos invariantes métricos com um dual, que são (veja [25]):

$$\text{(C.2.1)} \qquad S_5 = \int W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \; W^{\overset{*}{\mu\nu}}{}_{\rho\sigma} \; W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \; \sqrt{-g} \; d^4x$$

(C.2.2) $$S_6 = \int \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\mu} C_{\beta\nu} \sqrt{-g}\, d^4 = \int \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

(por A.5)

(C.2.3) $$S_7 = \int \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu} R = \int \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} R$$

(por A.4.2)

Note que S_5 pode ser escrito como uma combinação linear de

$$S_8 = \int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \overset{*}{R}{}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x \quad , S_6 \text{ e } S_7$$

Calculando portanto $\frac{\delta S_8}{\partial g_{\mu\nu}}$ temos:

$$S_8 = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} R_{\rho\sigma\theta\phi} R^{\theta\phi}{}_{\alpha\beta}\, d^4x =$$

$$= +\frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} R^{\beta}{}_{\alpha\theta\phi} R^{\theta\phi}{}_{\rho\sigma}\, d^4x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} R^{\phi}{}_{\theta\sigma\rho} R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\, d^4x$$

$$\delta S_8 = -\frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\phi}{}_{\theta\sigma\rho} R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\, \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\, d^4x \; +$$

$$- \frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\, \delta R^{\phi}{}_{\theta\sigma\rho}\, d^4x \; +$$

$$- \frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} R^{\phi}{}_{\theta\sigma\rho}\, \delta R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\, d^4x =$$

$$= \int \sqrt{-g}\, R_{\theta}{}^{\overset{*}{\phi\mu\nu}} R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\, \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\, d^4x \; \pm$$

$$+ \int \sqrt{-g}\; R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\; \delta R^{\phi}{}_{\theta\sigma\rho}\; d^4x \quad +$$

$$+ \int \sqrt{-g}\; R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta}{}^{\phi}{}_{\rho\sigma}\; \delta R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\; d^4x$$

A última integral nos dá:

$$\int \sqrt{-g}\; R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta}{}^{\phi}{}_{\rho\sigma}\; \delta R^{\theta}{}_{\phi\alpha}{}^{\beta}\; d^4x$$

$$= \int \sqrt{-g}\; R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta}{}^{\phi}{}_{\rho\sigma}\; \delta(R^{\theta}{}_{\phi\alpha\varepsilon}\; g^{\beta\varepsilon})\; d^4x$$

$$= \int R^{\alpha\varepsilon\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta}{}^{\phi}{}_{\rho\sigma}\; \delta R^{\theta}{}_{\phi\alpha\varepsilon}\; \sqrt{-g}\; d^4x + \int R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta}{}^{\phi}{}_{\rho\sigma}\; R^{\theta}{}_{\phi\alpha\varepsilon}\; \delta g^{\beta\varepsilon}\; \sqrt{-g}\; d^4x$$

$$= \int R^{\mu\nu\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\rho\sigma}\; \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\; \sqrt{-g}\; d^4 \quad - \int R_{\alpha}{}^{\varepsilon\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta\phi\rho\sigma}\; R^{\theta\phi\alpha\mu}\; \delta g_{\varepsilon\mu}$$

Assim:

$$\delta S_8 = 2\int R_{\alpha}{}^{\beta\theta\phi}\; R_{\theta\phi}{}^{\stackrel{*}{\mu\nu}}\; \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \int R_{\alpha}{}^{\beta\stackrel{*}{\theta\phi}}\; R_{\theta\phi}{}^{\mu\nu}\; \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \quad -$$

$$- \int R_{\alpha}{}^{\varepsilon\stackrel{*}{\rho\sigma}}\; R_{\theta\phi\rho\sigma}\; R^{\theta\phi\alpha\mu}\; \delta g_{\varepsilon\mu}$$

Definindo:

$$\Phi_{\alpha}{}^{\beta\stackrel{*}{\mu\nu}} = R_{\alpha}{}^{\beta\theta\phi}\; R_{\theta\phi}{}^{\stackrel{*}{\mu\nu}} \quad ,$$

$$X_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} = R_{\alpha}{}^{\beta\stackrel{*}{\theta\phi}}\; R_{\theta\phi}{}^{\mu\nu}$$

e usando (C.1.3) temos:

$$(C.2.4) \qquad \delta S_8 = \int \Big[4\ (\overset{*}{\Phi}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} + 2\ (X^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} - $$

$$- R_{\theta\phi\nu}{}^{\mu}\ X^{\nu\varepsilon\theta\phi} \Big] \sqrt{-g}\ \delta g_{\varepsilon\mu}\ d^4x$$

Avaliando $\dfrac{\delta S_6}{\delta g_{\mu\nu}}$ temos:

$$\delta S_6 = \int + \frac{1}{2}\ \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu}\ R_{\alpha\mu}\ R_{\beta\nu}\ \sqrt{-g}\ d^4x =$$

$$= \delta \int - \frac{1}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\ R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\ R_{\alpha\mu}\ R_{\beta}{}^{\nu}\ d^4x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\ R_{\rho\alpha}\ R_{\sigma}{}^{\beta}\ \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ d^4x +$$

$$- \frac{1}{2} \int \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\ R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\ R^{\nu}{}_{\beta}\ \delta R_{\alpha\mu}\ d^4x +$$

$$- \frac{1}{2} \int \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\ R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\ R_{\alpha\mu}\ \delta R^{\nu}{}_{\beta}\ d^4x =$$

$$= \frac{1}{2} \int R_{\alpha\rho}\ R_{\sigma}{}^{\beta}\ \eta^{\rho\sigma\mu\nu}\ \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ \sqrt{-g}\ d^4x +$$

$$+ \int \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu}{}_{\nu}\ R^{\nu}{}_{\beta}\ \delta R_{\alpha\mu}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

$$+ \int \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu}{}_{\nu}\ R_{\alpha\mu}\ \delta R^{\nu}{}_{\beta}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Usando (C.1.3) para a 1ª integral e métodos análogos aos usados no cálculo de δS_2 para a 2ª integral pois, como é fácil ver, $R^{\varepsilon}{}_{\rho}\ R_{\sigma}{}^{\beta}\ \eta^{\rho\sigma\mu\nu}$ é anti-simétrico nos pares (ε,β) e (μ,ν) e $\overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\ R_{\alpha\mu}$ é simétrico em β e ν, encontramos:

$$\delta S_6 = \int\left[2(R^{\varepsilon\rho}\ R^{\sigma\beta})_{;\nu;\beta}\ \eta_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} + \Box\ (\overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu}\ R_{\nu\beta}) + \right.$$

$$+ (\overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\rho\sigma}\ R_{\beta\sigma})_{;\alpha;\rho}\ g^{\varepsilon\mu} - 2\ (\overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta\rho\sigma}\ R_{\beta\sigma})^{;\mu}{}_{;\rho} +$$

$$\left. - \overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta\rho\sigma}\ R_{\beta\sigma}\ R^{\mu}{}_{\rho}\right] \delta g_{\varepsilon\mu}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Calculando $\dfrac{\delta S_7}{\delta g_{\mu\nu}}$ temos:

$$\delta S_7 = \delta\int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\ \overset{*}{R}{}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\ R\ \sqrt{-g}\ d^4x =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \delta\int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ R_{\rho\sigma\alpha}{}^{\beta}\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ R\ d^4x =$$

$$= \frac{1}{2}\ \delta\int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\ R\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x =$$

$$= \frac{1}{2}\int R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\ R\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ d^4x +$$

$$+ \frac{1}{2}\int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ R\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \delta R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\ d^4x +$$

$$+ \frac{1}{2}\int R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma}\ \delta R\ d^4x =$$

$$= 2\int \overset{*}{R}{}_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\ R\ \sqrt{-g}\ \delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\ d^4x$$

$$+ \int \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\ R_{\alpha\beta\mu\nu}\ \sqrt{-g}\ \delta R\ d^4x$$

Utilizando o mesmo procedimento do cálculo de δS_3 e (C.1.3) achamos:

$$\delta S_7 = \iint \Big[4(R \overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} + \Box \, (R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta})\, g^{\varepsilon\mu} +$$

$$- (R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta})^{;\varepsilon;\mu} - R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} R^{\varepsilon\mu} \Big] \delta g_{\varepsilon\mu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

Desenvolveremos agora o termo $(\overset{*}{\Phi}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta}$ que aparece em δS_8. De (A.1) vem que:

$$(\overset{*}{\Phi}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} = (X^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} - 2(\overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\nu;\beta} +$$

$$+ (R \overset{*}{R}{}^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta}$$

Mas:

$$(C.2.5) \qquad (X^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} = (R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\nu;\beta} = (R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\nu})_{;\beta} +$$

$$+ (R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma;\nu} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\beta}$$

Usando as identidades de Bianchi no 2º termo e definindo :

$$a \equiv (R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\nu})_{;\beta}$$

temos:

$$(X^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} = a - \Big[(R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon} + R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta})\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} \Big]_{;\beta} =$$

$$= a - R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}{}_{;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} - R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta}{}_{;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} +$$

$$- (R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon} + R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta})\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\beta} =$$

$$= a - R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}{}_{;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} - (R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\beta} +$$

$$+ R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\beta} - R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\beta} - R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\beta} =$$

$$= a - \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}\, R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}{}_{;\beta} - \frac{1}{2}\, (R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\sigma\nu}{}^{\mu;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\varepsilon}{}_{\nu})_{;\beta}$$

$$- R^{\rho\sigma\beta\nu}{}_{;\varepsilon}\, R^{*}{}_{\rho\sigma}{}^{\mu}{}_{\nu;\beta} =$$

$$= a - R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}{}_{;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}\, (R_{\rho\sigma\nu}{}^{\varepsilon}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu})^{;\beta}{}_{;\beta} +$$

$$- R_{\rho\sigma\beta\nu}{}^{;\varepsilon}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}_{;\beta}$$

Usando (A.4) , (A.4.2) e definindo b:

$$b \equiv R_{\rho\sigma}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{;\varepsilon}{}_{;\beta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}$$

$$c \equiv (R_{\rho\sigma\nu\theta}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\nu\theta})^{;\beta}{}_{;\beta}\, g^{\mu\varepsilon}$$

vem que:

$$\text{(C.2.6)}\quad (X^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} = a-b-c-R_{\rho\sigma\beta\nu}{}^{;\varepsilon}\, \frac{1}{2}\, (\overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu;\beta} - \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\beta}{}^{;\nu})$$

$$= a-b-c- R_{\rho\varepsilon\beta\nu}{}^{;\varepsilon}\, \frac{1}{2}\, (\overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\mu\nu}{}^{;\beta} + \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\beta\mu;\nu}) =$$

$$= a-b-c- R_{\rho\sigma\beta\nu}{}^{;\varepsilon}\, \frac{1}{2}\, (- \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\nu\beta;\mu}) =$$

$$= a-b-c- \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\beta\nu}{}^{;\varepsilon} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\beta\nu;\mu} =$$

$$= a-b-c- \frac{1}{4} (R_{\rho\sigma\beta\nu} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\beta\nu})^{;\varepsilon;\mu} + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\beta\nu} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\beta\nu;\varepsilon;\mu}$$

Este último termo, $\frac{1}{2} R_{\rho\sigma\beta\nu} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\beta\nu;\varepsilon;\mu}$, que aparece em δS_8, não aparece ser redutível a nenhum dos outros termos das outras variações, o que torna difícil encontrar uma combinação linear de δS_8, δS_6 e δS_7 que seja um invariante topológico.

Vejamos agora, os invariantes métricos sem dual. Examinando[25] e escrevendo aqueles invariantes em termos apenas do tensor de curvatura e suas contrações temos:

$$S_9 = \int R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_{10} = \int R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} R \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_{11} = \int R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_{12} = \int R_{\alpha\beta} R^{\beta}{}_{\mu} R^{\alpha\mu} \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_{13} = \int R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_{14} = \int R^3 \sqrt{-g}\, d^4x$$

Calculando a variação destes invariantes em relação a $g_{\mu\nu}$ e usando os mesmos métodos dos cálculos anteriores temos:

$$\delta S_9 = \int \sqrt{-g} \Big[6(R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} \; R^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\nu;\beta} - 3R_{\alpha\beta\rho}{}^{\mu} \; R^{\alpha\beta\theta\phi} \; R_{\theta\phi}{}^{\rho\varepsilon} \; +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\varepsilon\mu} \; R^{\alpha\beta\theta\phi} \; R_{\theta\phi\rho\sigma} \; R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \Big] \, \delta g_{\varepsilon\mu} \; d^4 x$$

$$\delta S_{10} = \int \sqrt{-g} \Big[4(R \; R^{\varepsilon\beta\mu\nu})_{;\nu;\beta} + (R^{\alpha\beta\rho\sigma} \; R_{\alpha\beta\rho\sigma})^{;\theta}{}_{;\theta} \;\; g^{\varepsilon\mu} \; +$$

$$- (R^{\alpha\beta\rho\sigma} \; R_{\alpha\beta\rho\sigma})^{;\mu;\varepsilon} + \frac{1}{2} (R^{\alpha\beta\rho\sigma} \; R_{\alpha\beta\rho\sigma} \; R) \; g^{\varepsilon\mu} \; +$$

$$- R^{\alpha\beta\rho\sigma} \; R_{\alpha\beta\rho\sigma} \; R^{\varepsilon\mu} - 2R_{\alpha\beta\rho}{}^{\mu} \; R^{\alpha\beta\rho\varepsilon} \; R \Big] \;\; \delta g_{\varepsilon\mu} \; d^4 x$$

$$\delta S_{11} = \int \sqrt{-g} \Big[(R^{\varepsilon\mu} \; R^{\beta\nu})_{;\nu;\beta} - (R^{\beta\mu} \; R^{\varepsilon\nu})_{;\nu;\beta} + (R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\rho}{}_{\nu} \; R^{\nu\beta})_{;\rho;\alpha} \; g^{\varepsilon\mu}$$

$$- 2(R^{\varepsilon}{}_{\beta}{}^{\rho}{}_{\nu} R^{\beta\nu})^{;\mu}{}_{;\rho} + (R^{\varepsilon}{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} \; R^{\nu\beta})^{;\theta}{}_{;\theta} \; +$$

$$+ \frac{1}{2} R^{\alpha\beta\theta\nu} \; R_{\alpha\theta} \; R_{\beta\nu} \; g^{\varepsilon\mu} - 3R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} \; R^{\beta\nu} \; R^{\varepsilon}{}_{\alpha} \Big] \; \delta g_{\varepsilon\mu} \; d^4 x$$

$$\delta S_{12} = \int \sqrt{-g} \Big[\frac{3}{2} (R^{\alpha}{}_{\nu} \; R^{\nu\beta})_{;\alpha;\beta} \; g^{\varepsilon\mu} - 3(R^{\varepsilon\nu} \; R_{\nu}{}^{\beta})^{;\mu}{}_{;\beta} \; +$$

$$+ \frac{3}{2} (R^{\varepsilon\nu} \; R^{\mu}{}_{\nu})^{;\theta}{}_{;\theta} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \; R^{\alpha}{}_{\rho} \; R^{\rho\beta} \; g^{\varepsilon\mu} \; +$$

$$+ 3R_{\alpha\beta} \; R^{\beta\varepsilon} \; R^{\mu}{}_{\alpha} \Big] \; \delta g_{\varepsilon\mu} \; d^4 x$$

$$\delta S_{13} = \int \sqrt{-g} \Big[(R \; R^{\alpha\beta})_{;\alpha;\beta} \; g^{\varepsilon\mu} - 2(R \; R^{\varepsilon\nu})^{;\mu}{}_{;\nu} + (R \; R^{\varepsilon\mu})^{;\theta}{}_{;\theta}$$

$$+ (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})^{;\theta}{}_{;\theta} \, g^{\varepsilon\mu} - (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})^{;\varepsilon;\mu} - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R^{\varepsilon\mu} +$$

$$-2 R^{\mu\nu} R_{\nu}{}^{\varepsilon} R + \frac{1}{2} R R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\mu} \Big] \delta g_{\varepsilon\mu} \, d^4x$$

$$\delta S_{14} = \int \sqrt{-g} \Big[3 \, (R^2)^{;\theta}{}_{;\theta} \, g^{\varepsilon\mu} - 3(R^2)^{;\varepsilon;\mu} - 3R^2 R^{\varepsilon\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2} R^3 g^{\varepsilon\mu} \Big] \delta g_{\varepsilon\mu} \, d^4x$$

Utilizando um procedimento análogo ao empregado em (C.2.6), o termo $(R^{\varepsilon\beta}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu})_{;\nu;\beta}$ proveniente de δS_9 nos dará uma quantidade do tipo $R_{\rho\sigma\beta\nu} R^{\rho\sigma\beta\nu;\varepsilon;\mu}$ que parece também não ser redutível a nenhum dos outros termos das variações de S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}.

Esta é a maior dificuldade de se encontrar um invariante topológico gravitacional de 3ª ordem, se existir.

REFERÊNCIAS

1. A.Einstein: "The Principle of Relativity", (Dover Publications, Inc. 1952), pag. 109.

2. C.M.Mill: "The Confrontation between Gravitation and Experiment", (An Einstein Centenary Survey, Cambridge University Press, 1979).

3. A.Einstein: "The Meaning of Relativity", (Princeton University Press, Princeton, 1974), pag. 129.

4. S.Deser e P. von Nieuwenhuizen: Phys. Rev. D.10, 401, (1974).

5. K.S.Stelle: Phys. Rev. D.16, 953, (1977).

6. R.Utiyama e B.S.De Witt: Journal of Math.Phys., 3, 608, (1962).

7. V.L.Ginzburg, D.A. Kirzhnits e A.A. Lyubushin: Sov.Phys. JETP, 33,242, (1971).

8. M.Novello: Let. al Nuovo Cimento, vol. 24, 2, 72, (1979).

9. M.Novello: Rev. Bras. de Física, vol.8, 442, (1978).

10. S.W.Hawking e R.Penrose: Proc. Roy. Soc. Lond. A.314, 529, (1970).

11. H.Nariai: Prog. of Theor. Phys., 46, 433, (1971).

12. M.Novello e J.M.Salim: Phys. Rev. D, 20, 377, (1979).

13. M.Novello e H.Heintzmann: "An Eternal Universe", (Notas de Física, CBPF, Rio, 1983).

14. J.Plebanski: Lectures on non-linear Electrodynamics, (Nordita, 1968).

15. T.Obata e J.Chiba: Gen.Rel. and Grav., 10, 547 (1979).

16. J.M.Salim: "Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação as Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann", Tese de Doutorado, CBPF, Rio, (1982).

17. M.Novello: "Tópicos de Gravitação" (I Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Rio, 1978).

18: J.D. de Oliveira: "Identidades Duais do Tensor de Weyl" Tese de Mestrado, CBPF, Rio, (1980).

19. M.Novello: "Cosmologia Relativista" (II Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Rio, 1980).

20. M.Novello e J.D. de Oliveira: Gen.Rel. and Grav., 12, 871, (1980).

21. L.Landau e E.Lifshitz: "Teoria do Campo" (Editora Mir, Moscou, 1980), pag. 323.

22. C.W.Misner, K.S.Thorne e J.A.Wheeler: "Gravitation", (W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1973), pag. 501.

23. R.Adler, M.Bazin, M.Schiffer: "Introduction to General Relativity", (Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD., 1975), pag. 359.

24. M.Novello: "Metric Fluctuations: The Macroscopic Equations of Gravity and Chaos Versus Anti-Chaos" (III Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Rio, 1982).

25. M.Novello e J.M.Salim: "Non Equilibrium Relativistic Cosmology", (Notas de Física, CBPF, Rio, 1983), pags. 14 e 15.

26. J.D.Jackson: "Classical Electrodynamics", (John Wiley & Sons, New York, 1975), pag. 595.

27. F.A.Pirani: Ac. Phys. Pol., vol. XV, 6, 389, (1956).

“EQUAÇÕES ALTERNATIVAS DA GRAVITAÇÃO”

NELSON PINTO NETO

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Mario Novello/CBPF

Carlos Márcio do Amaral/UFRJ

José Martins Salim/CBPF

Rio de Janeiro, 03 de novembro de 1983