STENIO WULCK ALVES DE MELO

ESTUDO DE CONTRIBUIÇÕES DE CORRENTE DE TROCA PARA O ESPALHAMENTO PION-DÊUTERON A ENERGIAS INTERMEDIÁRIAS

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1983 -

Aos meus pais e à
minha esposa Léa

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. João Carlos Costa dos Anjos pela orientação, apoio, paciência e dedicação prestados ao longo desta tese.

- Ao Prof. Fernando Raimundo Aranha Simão pela participação ativa e importante em momentos importantes deste trabalho.

- À Clélia Mineiro pelo carinho e paciência demonstrados na datilografia da maior parte desta tese.

- À Marilêa Alves de Mêlo, minha esposa, por datilografar com dedicação e boa vontade a parte restante deste trabalho.

- À CAPES e CNPq, em tempos diferentes, pelas bolsas de estudo.

- Ao Departamento de Física Teórica (FIT) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), donde faço parte, por ter me permitido concluir este trabalho.

RESUMO

Calculamos, usando gráficos de Feynmann, a contribuição de correntes de troca de pions ao espalhamento elástico πd na região da ressonância Δ (1232). Nossos resultados mostram que a adição de correntes de troca aos termos de espalhamento simples e duplo melhoram o acordo com os dados experimentais.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I

1.1 - INTRODUÇÃO

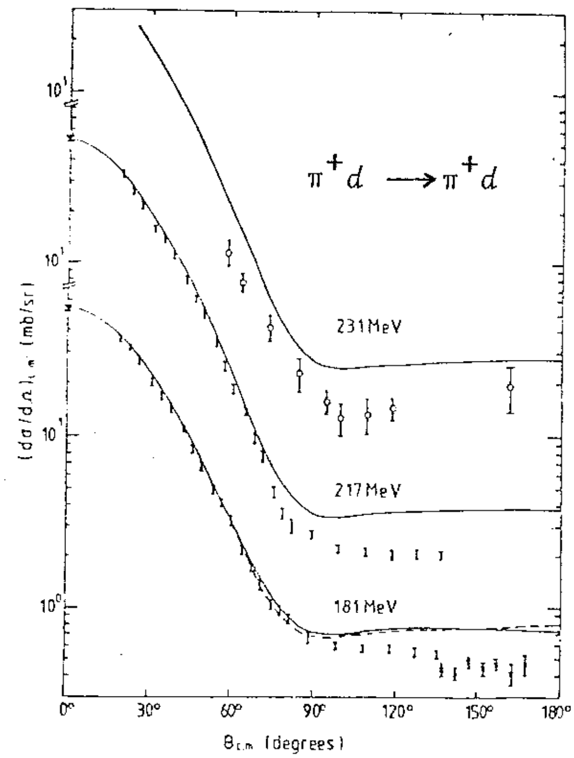
Nestes últimos trinta anos um grande esforço tem sido feito para a compreensão do espalhamento pion-dêuteron (πd). Isto porque uma análise bem detalhada deste sistema, que é, na realidade, o sistema hadron-núcleo mais simples que se pode imaginar, é de fundamental importância no estudo das interações de hadrons com núcleos mais complexos. Então, o dêuteron é privilegiado por proporcionar um "laboratório" natural para as perguntas que devem ser respondidas no estudo dos espalhamentos sobre núcleos mais pesados. Por exemplo: como descrever as interações a dois corpos no interior de um sistema ligado? Como se dão as interações a três corpos? Um outro ponto também relevante na análise do sistema πd é que podemos tirar informações a respeito da função de onda do dêuteron, muito embora na maioria das vezes levemos em conta o fato de o dêuteron ser bem descrito através de uma função de onda fenomenológica cujas propriedades são bem conhecidas.

A maioria dos modelos teóricos para o espalhamento πd usa como ingredientes básicos as equações de Faddeev, ref. (1), ou a série de espalhamento múltiplo, ref. (2), modelos que serão descritos no próximo Capítulo.

Nos últimos anos e paralelamente à crescente sofisticação dos modelos teóricos, refs. (3 → 9), que passaram a incluir vários tipos de correções aos modelos básicos (spin, onda *D* do dêuteron, movimento de Fermi, correções de ligação nuclear, correções relativísticas, absorção e/ou emissão de pion, troca de méson ρ , etc.), multiplicaram-se as experiências, refs. (10 → 20), gerando com isto um grande número de medidas de alta precisão. O acordo entre os modelos teóricos e os dados experimentais é muito bom até energias do pion incidente T_π da ordem de 180 Mev. Daí em diante, surgem discrepâncias no espalhamento a grande ângulos ($\theta > 70^o$) que se acentuam à medida que a energia cresce como pode ser visto na Fig. 1.1, onde cálculos teóricos feitos pelo Grupo de Lyon, refs. (21 → 23), em diversos níveis de sofisticação, são comparados aos dados experimentais mais recentes, refs. (19,20).

O fato de que estas discrepâncias não tenham sido ainda explicadas parece indicar que, a estas energias e a grandes ângulos de espalhamento, outras contribuições não contidas nos ingredientes iniciais entram em jogo. As ressonâncias dibariônicas nos fornecem um exemplo concreto de tais contribuições, refs. (24 → 28). Entretanto, embora elas sejam importantes e devam ser adicionadas aos termos já considerados, não são por si só capazes de melhorar substancialmente o acordo com os resultados experimentais, ref. (25).

As correntes de troca nos fornecem outros termos que não estão contidos nos ingredientes iniciais. O conceito de corrente de troca tem sido dado tendo como base o modelo nuclear convencional: em primeira aproximação, um núcleo é considerado como uma coleção de núcleons que se comportam aproximadamente como se estivessem livres. Entretanto, é sabido que dentro de tal contexto a interação eletromagnética de um núcleo deve ser



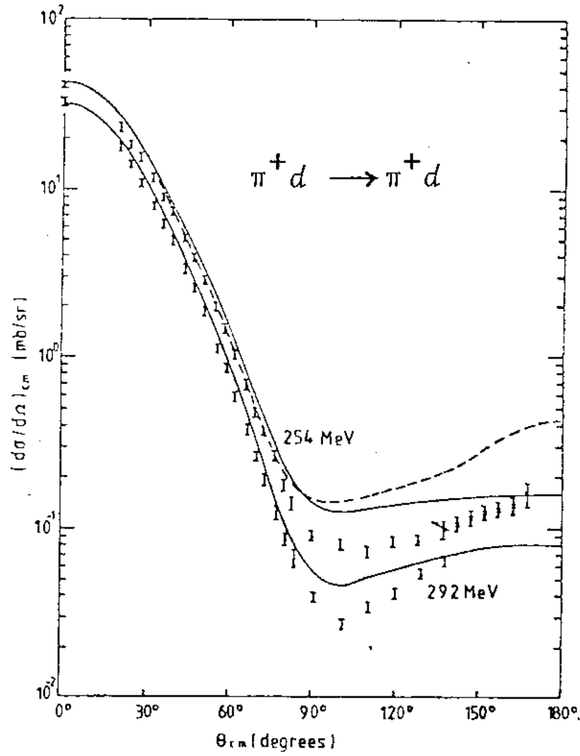


Figura 1.1 - Seção de choque diferencial π^+d no sistema do centro de massa para energias do pion incidente entre 181 Mev e 294 Mev. As curvas teóricas correspondem a trabalhos do grupo de Lion, refs. [21 → 23], e os pontos experimentais são da ref. [20].

grandemente modificada em consequência da presença de forças de troca, que são componentes importantes das forças nucleares. Mais exatamente, tais componentes são responsáveis pela parte de longo alcance do potencial nuclear. Isto dá origem às correntes de troca mesônicas, refs. (29,30).

As trocas de mésons num núcleo, além de manterem os núcleons unidos, afetam de maneira substancial todas as quantidades de interesse físico como correntes, ref. (31), densidades de carga, ref. (32), susceptibilidades, ref. (33) e seções de choque de espalhamento, ref. (34). Tem sido verificado recentemente, ref. (35), que cálculos com correntes de troca são bem sucedidos no sentido de diminuir as discrepâncias entre modelos teóricos e dados experimentais.

Talvez a evidência mais clara da presença e importância da corrente de troca mesônica seja vista na eletrodesintegração do dêuteron, $ed \to enp$, próximo ao limiar, ref. (36). Para esta reação, a seção de choque calculada via aproximação de impulso é uma função que decresce muito rapidamente com o momento transferido, enquanto que a contribuição à seção de choque proveniente da corrente de troca de pion decresce muito mais lentamente. Então, para grandes valores do momento transferido a reação é dominada pela corrente de troca.

As refs. (29,30) discutem extensivamente este mecanismo.

Diante da importância do mecanismo de corrente de troca para a Física Nuclear, como vimos acima, é natural então estudarmos sua relevância na reação elástica πd. A este nível, as principais análises existentes são sobre os efeitos da corrente de troca de um pion sobre o comprimento de espalhamento da reação πd, refs. (37 $\rightarrow$ 40). Nesses trabalhos, a importância da corrente de troca é discutida considerando-se somente a contribuição do espalhamento $\pi\pi$, onde o pion incidente interage com um pion trocado entre os núcleons do dêuteron, Fig. 1.2.a. Entre o limiar da reação πd e a região das ressonâncias os diagramas da Fig. 1.2 descrevem a amplitude da corrente de troca, ref. (41). As conclusões das referências citadas indicam que este mecanismo é importante.

O objetivo do presente trabalho é estimar a contribuição de tais correntes na região de energia onde ressonâncias podem ser excitadas. Para isto nos colocaremos na região da ressonância 3-3, onde os cinco últimos diagramas da Fig. 1.2 são dominantes.

No Capítulo II apresentamos os modelos teóricos básicos mais importantes utilizados no estudo do espalhamento partícula-núcleo.

No Capítulo III calculamos a seção de choque diferencial para os espalhamentos simples, duplo e corrente de troca fazendo uso da técnica dos diagramas de Feynman, refs. (42$\rightarrow$46). Neste Capítulo a relevância do mecanismo de corrente de troca diante dos espalhamentos simples e duplo é verificada.

No Capítulo IV apresentamos nossos resultados e conclusões.

Nos Apêndices A, B, C e D apresentamos em detalhe os cálculos que aparecem nos Capítulos anteriores.

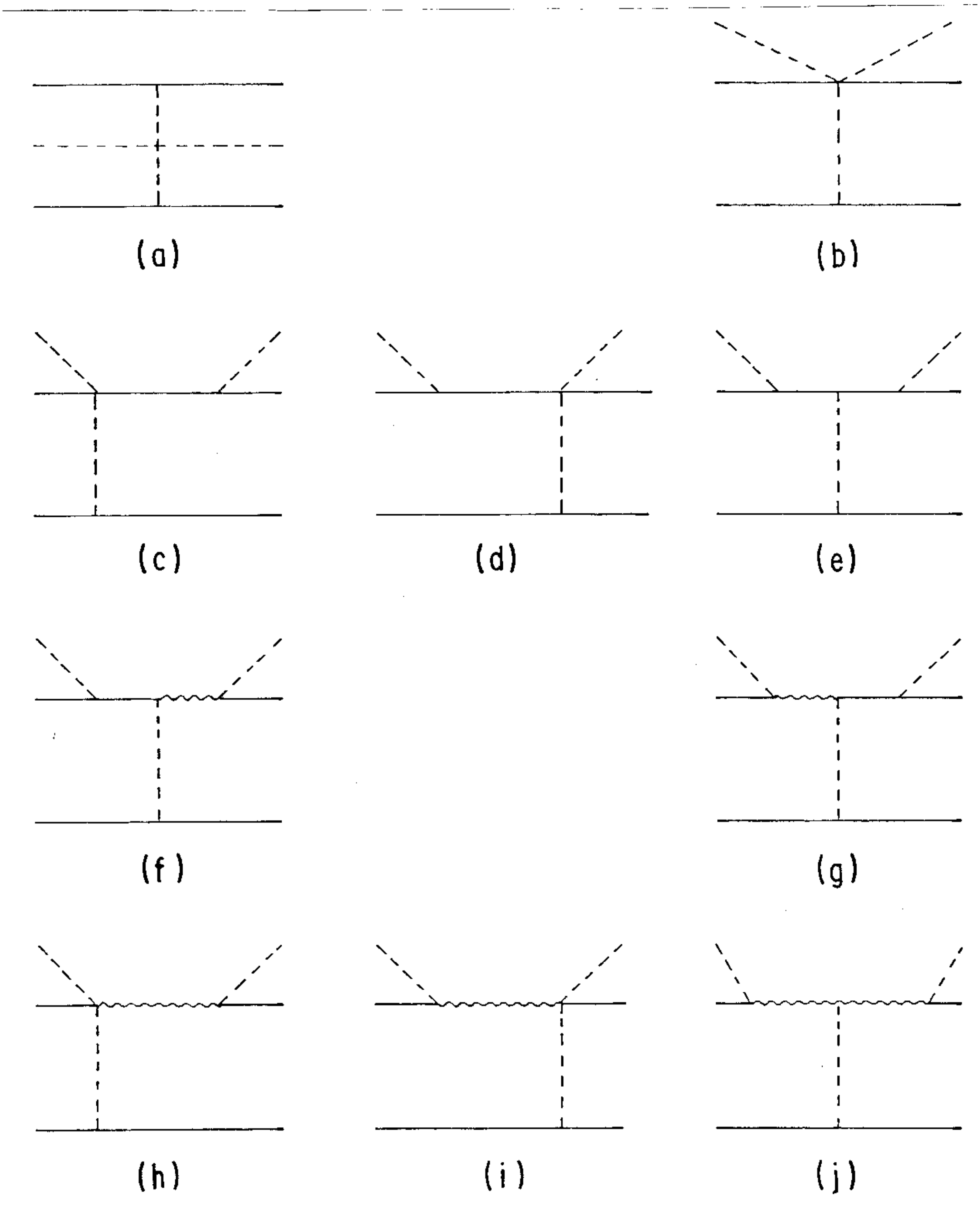


Figura 1.2 - Amplitude total para o mecanismo de corrente de troca, ref. (41). ---- (pion), —— (núcleon) e ∿∿∿∿ (ressonância 3-3).

CAPÍTULO II

MODELOS TEÓRICOS PARA O ESPALHAMENTO PION-DÊUTERON (πd)

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste Capítulo apresentamos, de uma maneira sucinta, os principais modelos teóricos que apareceram, a partir de 1950, para descrever a interação entre uma partícula incidente e um núcleo (alvo) complexo. Os modelos estão apresentados na ordem cronológica de aparecimento e as referências indicadas mostram um pouco da evolução dos respectivos modelos.

O objetivo deste Capítulo é dar uma visão geral dos modelos propostos para o estudo da interação partícula-núcleo.

2.2 - MODELO DE CHEW - APROXIMAÇÃO DE IMPULSO (AI)

A aproximação de impulso (*AI*) apareceu no final de 1950 quando Chew (47), discutindo o espalhamento inelástico de nêutrons por dêuterons a altas energias, formulou um modelo para esta reação onde os espalhamentos nêutron-nêutron e nêutron-próton aparecem, numa mesma energia, explicitamente. A idéia básica desse modelo é expressar a amplitude de espalhamento nêutron-dêuteron como uma superposição de amplitudes de espalhamento por núcleons livres que tenham uma distribuição de momento igual àquela que teriam quando estão ligados formando o dêuteron. As suposições para tal aproximação são: *i*) a partícula incidente interage somente com um núcleon de cada vez, *2i*) a amplitude da onda incidente é pouco afetada durante sua passagem através do núcleo e *3i)* a força de ligação nuclear tem um efeito desprezível durante o tempo da interação forte ou seja, o único papel dessa força seria o de preparar o pacote representando a função de onda do núcleo. A generalização desse modelo foi feita dois anos depois por Chew e Goldberger (48): o problema passou a ser o espalhamento de uma partícula por um núcleo qualquer onde o hamiltoniano total é dado por

$$H = K + N + U$$

sendo K o operador energia cinética total, N a energia potencial nuclear e U o potencial de interação total entre o núcleo e a partícula incidente:

$$U = \sum_{i=1}^{A} U_i$$

onde A é o número de partículas no núcleo e U_i é o potencial de interação entre o projétil e o i-ésimo núcleon.

Os operadores de transição para o espalhamento a dois corpos são dados por

$$t_i^{(+)}(z) = U_i\, w^{(+)}(z)$$

$$t_i^{(-)}(z) = w^{(-)}(z) U_i$$

com

$$w^{(+)}(z) = 1 + (z-K-U_i)^{-1}\, U_i$$

$$w^{(-)}(z) = 1 + U_i(z-K-U_i)^{-1}$$

sendo $w_i^{(+)}$ $(w_i^{(-)})$ um operador que atua à direita (esquerda) de um auto-estado de K com energia E. As amplitudes de espalhamento são dadas pelos elementos de matriz $t_i^{(\pm)}$ entre os estados inicial e final constituídos por partículas livres.

O operador de transição para o espalhamento partícula-núcleo complexo é dado por

$$T^{(+)}(z) = \sum_{i=1}^{A} \{t_i^{(+)} + U(z-H_0-U)^{-1}\left[N, W_i^{(+)}\right] + \left[1 + \right.$$

$$\left. + U(z-H_0-U)^{-1}\right](U-U_i)(W_i^{(+)} - 1)\} \qquad (2.2.1)$$

onde $T(z)$ é calculado entre os estados do hamiltoniano não-perturbado.

Diante das suposições para a AI simples desconsideram-se os dois últimos termos da série na eq. 2.2.1 ficando só os termos $t_i^{(+)}$ que correspondem aos espalhamentos simples e dão a AI de Chew de 1950. Para a AI generalizada, o segundo termo da eq.2.2.1 corresponde aos efeitos do potencial de ligação nuclear e o último termo dá as correções de espalhamento múltiplo (a partícula incidente pode colidir com mais de um núcleon do núcleo complexo).

Numa primeira aproximação

$$T^{(+)}(z) = \sum t_i^{(+)} + \sum_{i'} \sum_{i} (W_i^{(-)} - 1)\left[U, W_i^{(+)}\right] +$$

$$+ \sum_{i' \neq i} \sum t_{i'}^{(-)} (z-K)^{-1} t_i^{(+)} \qquad (2.2.2)$$

onde o segundo termo do lado direito é o efeito do potencial de ligação nuclear sobre os espalhamentos individuais a dois corpos e o terceiro termo é o espalhamento duplo.

Este modelo foi aplicado, discutido e extendido por, entre muitos outros, Rockmore (49); Carlson (50); Ferreira et al. (51) e Mandelzweig et al. (52).

2.3 - MODELO DE BRUECKNER - MODELO ESTÁTICO

No início de 1953, Brueckner (53), discutindo a importância do espalhamento múltiplo na *AI*, formulou um modelo para a reação πd onde o recuo dos núcleons é desconsiderado mas a contribuição do espalhamento múltiplo é incluída. O dêuteron é considerado como sendo formado por dois centros espalhadores fixos e a função de onda espalhada é descrita assintoticamente pela superposição das duas ondas esféricas provenientes dos núcleons espalhadores. A distribuição das coordenadas dos núcleons está contida na função de onda do dêuteron. Este modelo foi usado inicialmente por Drell e Verlet (54) na discussão das correções de espalhamento múltiplo para a reação πd a energias intermediárias, e posteriormente, entre outros, por Gabathuler e Wilkin (55) no cálculo da seção de choque da reação πd na região da ressonância 3-3.

2.4 - MODELO DE GLAUBER

Em 1955 aparece o modelo de Glauber (56) para o cálculo da seção de choque do dêuteron a altas energias. Este modelo é válido quando o comprimento de onda da partícula incidente é muito pequeno em relação ao seu alcance de interação com os núcleons do dêuteron alvo. Supondo que as energias de interação entre as partículas incidentes e os núcleons do alvo sejam pequenas diante das energias cinéticas incidentes, as colisões podem ser descritas individualmente por métodos que são essencialmente aqueles da teoria de difração, Fernbach et al. (57). Na aproximação de difração, este modelo supõe que a onda plana incidente passa virtualmente sem desvios pela região de interação e emerge sofrendo somente uma mudança de fase e amplitude que depende da posição. Com este modelo mostrou-se que as seções de choque do dêuteron não podiam ser consideradas apenas como a soma das seções de choque sobre o nêutron e o próton, como era até então consideradas: a seção de choque sobre o dêuteron é inferior e isto é principalmente uma consequência do efeito de "sombra", pois um dos núcleons do dêuteron sofre o eclipse do outro. Este modelo aparece numa forma generalizada em 1965, onde Franco e Glauber (58) levam em conta explicitamente o Espalhamento Duplo (*ED*) além do habitual Espalhamento Simples (*ES*). As duas suposições básicas do modelo são: *i*) a amplitude de espalhamento é calculada como se os núcleons do núcleo fossem espalhadores fixos e, subsequentemente, o resultado é mediado sobre a função de onda do dêuteron, *2i*) a *altas energias*, todos os espalhamentos são a *pequenos ângulos* e podem ser razoavelmente bem descritos pela aproximação eikonal, Perl (59). Com estas hipóteses obtém-se para a amplitude de espalhamento a seguinte expressão:

$$F_{fi}(\vec{q}) = i\,\frac{k}{2\pi}\int exp\left[i\vec{q}.\vec{b}\right] d^2b \int \phi_f^*(\vec{r})\,\{1 -$$

$$- exp\left[i\chi_n(\vec{b}-1/2\vec{S}) + i\chi_p(\vec{b}+1/2\vec{S})\right]\}\ \phi_i(\vec{r})d\vec{r}$$

onde $\vec{q} = \vec{k}-\vec{k}'$ e $\vec{r} = \vec{r}_p-\vec{r}_n$. $\vec{k}(\vec{k}')$ é o tri-momento da partícula incidente (espalhada) e $\vec{r}_p(\vec{r}_n)$ é o vetor posição do próton (nêutron) no centro de massa do dêuteron. O vetor $\vec{b}$ é o parâmetro de impacto (perpendicular a direção do feixe incidente) e $\vec{S}$ é a projeção de $\vec{r}_i(i=n,p)$ perpendicular a direção de incidência. A função $\chi_n(\chi_p)$ é a defasagem produzida pelo nêutron (próton) na sua posição instantânea.

Quando uma partícula muito energética incide num núcleo complexo, a amplitude $f(\vec{q})$ para o espalhamento elástico próximo da direção para frente é, segundo Glauber (58),

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi}\int exp(i\vec{q}.\vec{b})\ \Gamma(\vec{b})\ d^2b$$

onde

$$\Gamma(\vec{b}) = 1 - exp\left[i\ \chi(\vec{b})\right]$$

como

$$1 - exp\left[i\chi_n(\vec{b}-1/2\vec{S}) + i\chi_p(\vec{b}+1/2\vec{S})\right] = \Gamma_n(\vec{b}-1/2\vec{S}) +$$

$$+ \Gamma_p(\vec{b}+1/2\vec{S}) - \Gamma_n(\vec{b}-1/2\vec{S})\ \Gamma_p(\vec{b}+1/2\vec{S})$$

temos

$$F_{fi}(\vec{q}) = \langle f|\ F(\vec{q},\vec{S})\,|i\rangle \qquad (2.4.1)$$

onde

$$\vec{F}(\vec{q},\vec{S}) = exp(1/2\ \vec{q}.\vec{S})\ f_n(\vec{q}) + exp(-1/2\ \vec{q}.\vec{S})\ f_p(\vec{q}) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi k}\int exp(i\vec{q}\,'.\vec{S})\ f_n(\vec{q}\,'+1/2\ \vec{q})\ f_p(-\vec{q}\,'+1/2\ \vec{q})d^2q' \tag{2.4.2}$$

Na eq. 2.4.1

$$<f|\ F(\vec{q},\vec{S})|i> = \int \phi^*(\vec{r})\ F(\vec{q},\vec{S})\ \phi_i(\vec{r})\ d\vec{r}$$

O primeiro (segundo) termo na eq. 2.4.2 é a amplitude de *ES* proveniente do nêutron (próton) e o terceiro termo é o *ED*. A ausência de termos de ordem superior é uma consequência da suposição implícita que os espalhamentos a grandes ângulos são desprezíveis.

No caso do espalhamento elástico

$$F_{ii}(\vec{q}) = S(1/2\ \vec{q})\ f_n(\vec{q}) + S(-1/2\ \vec{q})\ f_p(\vec{q}) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi k}\int S(\vec{q}\,')\ f_n(1/2\ \vec{q}+\vec{q}\,')\ x\ f_p(1/2\ \vec{q}-\vec{q}\,')\ d^2q'$$

onde

$$S(\vec{q}) = \int exp(i\vec{q}.\vec{r})\ |\phi(\vec{r})|^2\ d\vec{r}$$

é o fator de forma do dêuteron no seu estado fundamental.

Aplicações e extensões desse modelo foram feitas por, entre vários, Harrington (34,60); Fäldt e Ericson (61); Alberi e Bertocchi (45) e Landau (62).

2.5 - MODELO DE FADDEEV

No início de 1961, Faddeev (1), analisando a teoria de espalhamento para um sistema de três partículas, escreve as auto-funções do hamiltoneano correspondente como uma soma de três termos que satisfazem, cada um deles, um conjunto de equações integrais acopladas. Supondo que as interações entre as partículas se dêem aos pares, Faddeev mostra que a determinação dos núcleos das equações integrais se dá resolvendo-se o problema de dois corpos. Noutros termos, Faddeev relaciona a matriz de transição total do sistema de três partículas com aquela do sistema de duas partículas. Vejamos isto: consideremos um sistema de três partículas não-relativísticas formado, por exemplo, pela incidência de uma partícula i sobre um alvo composto por duas outras partículas j e k que interagem entre si através de um potencial N. Seja K a energia cinética total do sistema e U o potencial que descreve a interação (a dois corpos) entre a partícula i e as partículas j e k. O hamiltoniano H deste sistema é

$$H = K + N + U \qquad (2.5.1)$$

Na notação de Faddeev $(i,j,k = 1,2,3 \;;\; i \neq j \neq k)$

$$\begin{aligned} H_0 &= K = T_1 + T_2 + T_3 \\ V &= U + N = V_{23} + V_{31} + V_{12} \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

onde

$$T_i = -\frac{1}{2m_i}\,\nabla_i^2 \qquad (i = 1,2,3)$$

e V_{ij} atua somente na variável $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ da função de onda do hamiltoniano $H(V_{ij} \to 0$ quando $\vec{r}_{ij} \to \infty)$.

O operador de transição total $T(z)$ para este sistema, atuando no espaço de Hilbert das três partículas, satisfaz a equação

$$T(z) = V - V\, G_0(z)\, T(z) \tag{2.5.3}$$

que é a equação de Lippmann-Schwinger (63) onde $G_0(z)$ é a resolvente para as três partículas livres:

$$G_0(z) = (H_0 - z)^{-1} \tag{2.5.4}$$

Substituindo a eq. 2.5.2 na eq. 2.5.3 temos, num processo iterativo,

$$T(z) = (V_{23}+V_{31}+V_{12}) - (V_{23}+V_{31}+V_{12})\, G_0(z)(V_{23}+V_{31}+V_{12}) + \ldots$$

numa forma compacta

$$T(z) = T^{(1)}(z) + T^{(2)}(z) + T^{(3)}(z)$$

onde

$$T^{(1)}(z) = V_{23} - V_{23}\, G_0(z)\, T(z)$$

e $T^{(2)}(z)$, $T^{(3)}(z)$ definidos analogamente. Os $T^{(i)}(z)$ satisfazem ao seguinte conjunto de equações acopladas (Equações de Faddeev):

$$T^{(1)}(z) = T_{23}(z) - T_{23}(z)\, G_0(z)\left[T^{(2)}(z) + T^{(3)}(z)\right]$$

$$T^{(2)}(z) = T_{13}(z) - T_{13}(z)\, G_0(z)\left[T^{(1)}(z) + T^{(3)}(z)\right] \tag{2.5.5}$$

$$T^{(3)}(z) = T_{12}(z) - T_{12}(z)\, G_0(z)\left[T^{(1)}(z) + T^{(2)}(z)\right]$$

com

$$T_{jk}(z) = V_{jk} - V_{jk}\, G_o(z)\, V_{jk} + \ldots$$

que é solução da equação

$$T_{jk}(z) = V_{jk} - V_{jk}\, G_o(z)\, T_{jk}(z)$$

para V_{ki} e V_{ij} nulos. Os $T_{jk}(z)$ são operadores de transição a dois corpos mas que atuam no espaço de Hilbert das três partículas. Para relacionar tais operadores com aqueles definidos no espaço de Hilbert de duas partículas ver, por exemplo, a ref. Ferreira et al (64). Com as eqs. 2.5.5, Faddeev contorna as dificuldades encontradas caso o problema de três corpos seja tratado segundo a equação de Lippmann-Schwinger: o sistema de equações de Faddeev é passível de uma solução numérica enquanto que uma solução para a equação de Lippmann-Schwinger é muito difícil, Watson e Nuttal (65). A extensão relativística das equações de Faddeev foi dada por Alessandrini e Omnès (66) em meados de 1965. Extensões desse modelo foram feitas, por exemplo, por Thomas e Afnan (67); Thomas (68); Giraud et al (69) e Fayard et al. (23).

2.6 - MODELO DE GOLDBERGER E WATSON - SÉRIE DE ESPALHAMENTO MÚLTIPLO (SEM)

Uma solução formal para a equação de Lippmann-Schwinger, eq. 2.5.3, no caso do espalhamento de uma partícula por um núcleo complexo, foi dada por Watson (70) em 1953. Tal solução é conhecida pelo nome de Série de Espalhamento

Múltiplo (*SEM*) e foi posteriormente generalizada, em 1964, por Goldberger e Watson (2). O nome *SEM* está associado à interpretação física que ela permite dar aos sucessivos espalhamentos da partícula incidente no núcleo complexo. No caso específico do problema πd, este espalhamento é descrito como resultado de uma seqüência de espalhamentos πN onde N está ligado ao outro núcleon do dêuteron através de seu potencial de interação. Vejamos: a reação πd, nosso sistema de três partículas, vista pela teoria de espalhamento múltiplo de Watson está descrita pelo hamiltoniano da eq. 2.5.1. A solução formal da equação de Lippmann-Schwinger é

$$T(z) = t_1 + t_2 + t_1 G_N t_2 + t_2 G_N t_1 + t_1 G_N t_2 G_N t_1 + \ldots \quad (2.6.1)$$

onde

$$G_N(z) = (z - K - N)^{-1}$$

e

$$t_i = t_i(z) = U_i + U_i G_N(z)\ t_i(z)$$

representa o espalhamento simples do π pelo núcleon i ligado e U_i é a interação do π com o núcleon isolado i. Os termos $t_i G_N t_j$, $t_i G_N t_j G_N t_i$, ... representam os espalhamentos duplo, triplo, ... com $i \neq j$ ou seja, não existe dois espalhamentos sucessivos pelo mesmo núcleon.

A eq. 2.6.1 é obtida por um processo iterativo das equações de Faddeev, eq. 2.5.5.

Em termos do espalhamento πN com o núcleon livre, a *SEM* é escrita como:

$$T = T_1 + T_2 + T_1 G_o T_2 + T_2 G_o T_1 + T_1 G_o T_2 G_o T_1 + T_1 G_o T_N G_o T_2 +$$

$$+ \; T_2 G_o T_N G_o T_2 \; + \; T_2 G_o T_N G_o T_1 \; + \; \ldots \qquad (2.6.2)$$

onde

$$T_i(z) \;=\; U_i \;-\; U_i G_o T_i(z)$$

$$T_N(z) \;=\; N \;+\; N G_N(z) N$$

$G_o = G_o(z)$ está dado pela eq. 2.5.4, T_i descreve o espalhamento do π pelo núcleon i livre e T_N descreve a interação entre os núcleons do dêuteron tendo o π como partícula espectadora.

Na eq. 2.6.2 temos novamente os espalhamentos simples e duplo e os termos que correspondem às interações núcleon-núcleon intermediárias, também conhecidas como as correções de ligação nuclear. A eq. 2.6.2 é mostrada numa representação diagramática na Fig. 2.1.

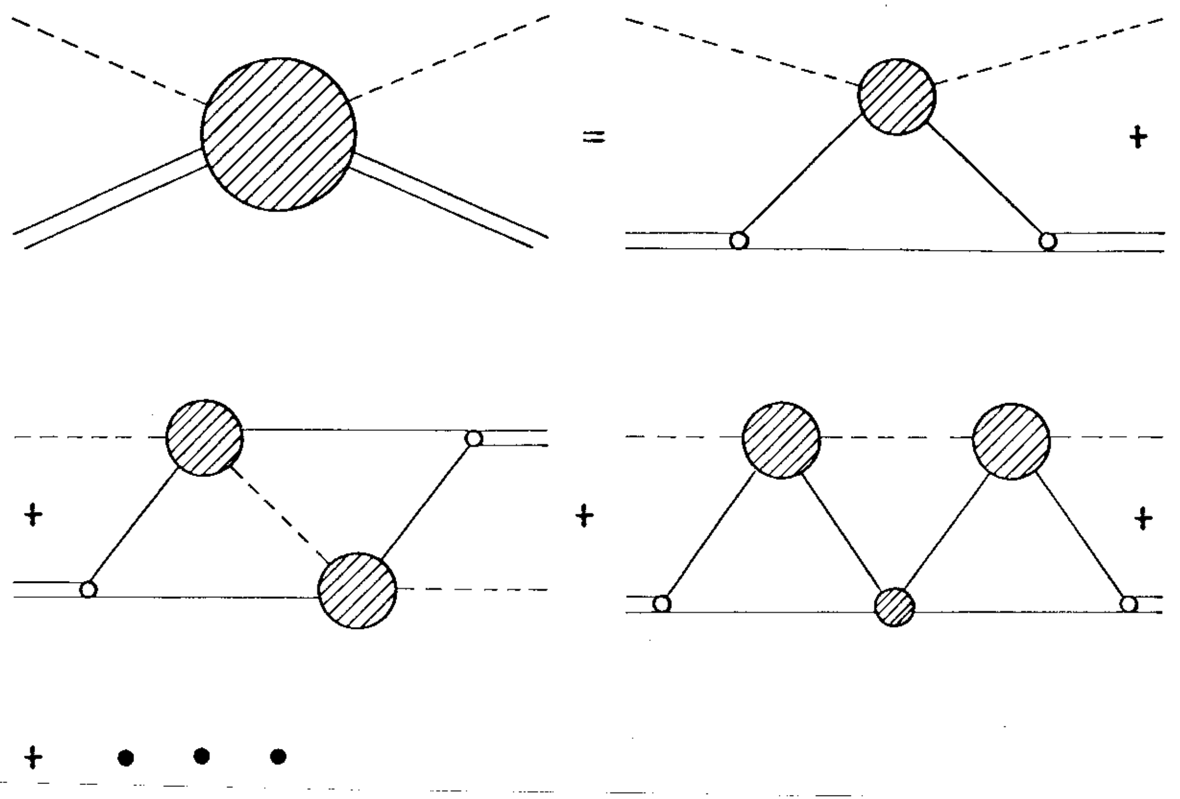


Figura 2.1 - Representação diagramática para a SEM da reação πd. (a) espalhamento simples, (b) espalhamento duplo e (c) correção de ligação nuclear

A AI de Chew (47), supondo uma rápida convergência da *SEM*, diz que

$$T = T_1 + T_2$$

e a primeira correção para esta *AI* será o espalhamento duplo:

$$T = T_1 + T_2 + T_1 G_o T_2 + T_2 G_o T_1$$

Nesta última expressão estão os termos comumente usados na maioria dos trabalhos sobre πd. As eqs. 2.6.2 e 2.2.2 são equivalentes.

As referências Myhrer e Thomas (71); Ferreira et al. (64) e Aguiar (72) aplicam e discutem esse modelo.

CAPÍTULO III

SEÇÃO DE CHOQUE PARA OS ESPALHAMENTOS SIMPLES, DUPLO E CORRENTE DE TROCA

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste nosso trabalho as contribuições para a seção de choque diferencial da reação $\pi^{+}d$ são provenientes dos diagramas *b*, *c* e *d* apresentados na Fig. 3.1.1. Lá, diagramaticamente, a amplitude do espalhamento $\pi^{+}d$ é escrita como uma soma de amplitudes referentes, respectivamente, aos espalhamentos simples, duplo e corrente de troca.

Calcularemos aqui a seção de choque dos diagramas *b*, *c* e *d*, e da soma deles com o objetivo de avaliar a importância do mecanismo de corrente de troca diante dos espalhamentos simples e duplo.

O modelo teórico é aquele da *AI* acrescido de termos de corrente de troca; o tratamento é semi-relativístico pois a parte de interação é tratada de forma covariante via regras de Feynman e a parte de estrutura do dêuteron é estudada no limite não-relativístico.

As aproximações comuns aos três gráficos serão apresentadas no espalhamento simples e os cálculos serão feitos no referencial do muro de tijolos (Breit).

Para a corrente de troca tomaremos o acoplamento do pion nos vértices πNN, $\pi N\Delta$ e $\pi\Delta\Delta$ em γ_5 (pseudo-escalar) e os vértices, por existirem partículas fora da camada de massa, serão corrigidos segundo a prescrição de Wolf (73)

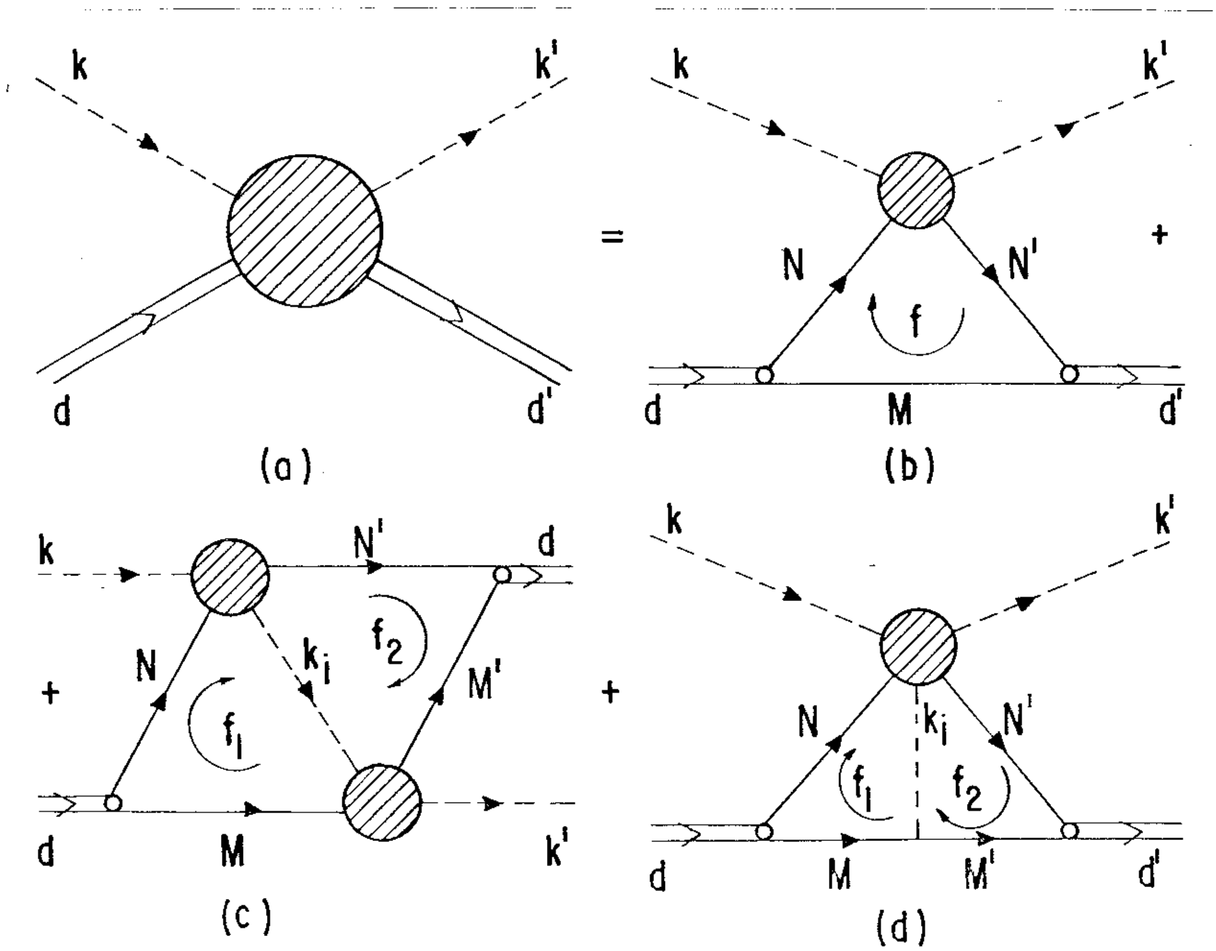


Figura 3.1.1 - Representação gráfica do espalhamento pion-dêuteron (πd). A linha tracejada corresponde a um méson, a linha cheia simples a um núcleon e a linha dupla ao dêuteron. As letras representam os quadri-momentos das partículas exceto o f que é a variável de integração.

3.2 - ESPALHAMENTO SIMPLES (ES)

O diagrama *b* da Fig. 3.1.1 ilustra este espalhamento. Ele é, quantitativamente, a principal contribuição para a seção de choque $\pi d \to \pi d$. A amplitude de Feynman correspondente é

$$T^{S}_{\lambda'\lambda} = - \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} \, T_r \left[\frac{i(\not{N}'+m')}{N'^2-m'^2+i\xi} \, A_{\pi N} \, \frac{i(\not{N}+m')}{N^2-m'^2+i\xi} \, \frac{G\Gamma.\xi_\lambda}{\sqrt{2}} \right. \, x$$

$$\left. x \, \frac{i(-\not{M}+m')}{M^2-m'^2+i\xi} \, \frac{G\Gamma'.\xi^*_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \right]$$

O traço vem do circuito fermiônico, m' é a massa do núcleon e s é a variável de integração que escolhemos como o momento relativo dos núcleons no dêuteron inicial:

$$s = 1/2(N-M)$$

$A_{\pi N}$ é a amplitude de Dirac do espalhamento πN e é função dos invariantes $s_{\pi N}$ e $t_{\pi N}$ (energia ao quadrado no referencial do centro de massa e momento transferido). As quantidades G, ξ_λ ($\xi_{\lambda'}$) e $\Gamma(\Gamma')$ são, respectivamente, a constante de acoplamento dêuteron-núcleon-núcleon "dNM", o quadrivetor polarização do dêuteron inicial (final) e o vértice relativístico dNM do dêuteron inicial (final).

Como o dêuteron é um estado nuclear composto por dois núcleons fracamente ligados, desprezaremos a interação NN e colocaremos a parte de spin dos núcleons nas respectivas camadas de massa. Esta aproximação será comum aos demais diagramas da Fig. 3.1.1

$$\not{N}' + m' = 2m' \sum_{n'} u(N',n')\,\bar{u}(N',n')$$

$$\not{N} + m' = 2m' \sum_{n} u(N,n)\,\bar{u}(N,n)$$

$$-\not{M} + m' = -2m' \sum_{m} v(-M,m)\,\bar{v}(-M,m)$$

onde m, n e n' são índices de spin dos núcleons. Fazendo a massa $m' = m$ temos

$$T^{S}_{\lambda'\lambda} = -i\,\frac{8m^3}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{m\\n\\n'}} \int d^4 \not{h}\; T_{h} \left[\frac{u(N',n')\,\bar{u}(N',n')}{N'^2-m^2+i\xi}\; A_{\pi N} \times \right.$$

$$\left. \times\; \frac{u(N,n)\bar{u}(N,n)}{N^2-m^2+i\xi}\; \frac{G\Gamma.\xi_{\lambda}}{\sqrt{2}}\; \frac{v(-M,m)\bar{v}(-M,m)}{M^2-m^2+i\xi}\; \frac{G\Gamma'.\xi^{*}_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \right]$$

Neste ponto, substituiremos o traço pelos índices linha e coluna nas matrizes γ e espinores. Procederemos assim para os demais diagramas. Manteremos os índices implícitos para não sobrecarregar a notação.

Uma outra aproximação, também comum aos demais diagramas, consiste em se colocar um dos núcleons de cada vértice dNM na camada de massa. Este núcleon será aquele que assistirá à interação do segundo núcleon com o pion incidente ou seja, é o núcleon espectador.

Segundo Gross (74), a condição de camada de massa para o núcleon M é equivalente a

$$\frac{1}{M^2-m^2} \rightarrow -i\pi \frac{1}{M_o}\delta(M_o - \sqrt{m^2+\vec{M}^2})$$

que nos restringe a tomar somente a contribuição do polo em $M_o = (m^2+\vec{M}^2)^{1/2}$ quando da integração em δ_o, que fica imediata em conseqüência da função delta.

Com esta aproximação o vértice $\Gamma(\Gamma')$ tornar-se-á função só da variável $N^2(N'^2)$ e está dado por

$$\Gamma_\mu = F_1(N^2,m^2)\ \gamma_\mu + F_2(N^2,m^2)\ \delta_\mu$$

onde os F_i são fatores de forma para o vértice dNM, Blankenbecler e Cook (75); Gross (74); Gourdin et al. (76) ; Barry (77) e δ_μ é o momento relativo dos núcleons.

Definindo

$$F_{n'n} = \bar{u}(N',n')\ A_{\pi N}\ u(N,n)$$

$$\Psi_\lambda^{m,n}\ (N^2,m^2) = \frac{G}{N^2-m^2}\ \bar{u}(N,n)\ \frac{\Gamma\cdot\xi_\lambda}{\sqrt{2}}\ v(-M,m)$$

$$\Psi_{\lambda'}^{*m,n'}\ (N'^2,m^2) = \frac{G}{N'^2-m^2}\ \bar{v}(-M,m)\ \frac{\Gamma'\cdot\xi_{\lambda'}^*}{\sqrt{2}}\ u(N,n)$$

temos

$$T^{S}_{\lambda',\lambda} = - \frac{8m^3 \pi}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{m \\ n' \\ n}} \int d^3\delta \; \Psi^{*m\;,n'}_{\lambda'} (N'^2, m^2) \; F_{n'n} \; \Psi^{m,n}_{\lambda} (N^2, m^2) \frac{1}{\sqrt{m^2 + \vec{M}^2}}$$

onde $F_{n'n}$ é a amplitude de espalhamento πN. No Apêndice D.2 discutiremos o procedimento de extrapolação para a camada de massa de $F_{n'n}$ usada neste e nos demais espalhamentos tratados. No caso de considerarmos somente a ressonância 3-3, parametrizaremos a onda P_{33} por uma Breit-Wigner. A razão para isto está no fato de encontrarmo-nos numa região de energia onde esta ressonância é dominante. $\Psi(\Psi^*)$ é a função de onda relativística do dêuteron inicial (final) com um dos núcleons na camada de massa. No limite não relativístico, Bertocchi e Capella (44); Anjos et al (46),

$$\Psi^{m,n}_{\lambda} (N^2, m^2) = \frac{1}{2m} (32\pi m^3)^{1/2} \; \psi_{\lambda}^{m,n} (\vec{\delta}_i)$$

onde ψ é a função de onda do dêuteron e $\vec{\delta}_i$ o momento relativo dos núcleons no dêuteron inicial. No Apêndice D.3 mostramos como a condição de camada de massa para um núcleon do vértice dNM estabelece a passagem relativística → não-relativística deste vértice. Então,

$$T^{S}_{\lambda',\lambda} = - 4m^2 \sum_{m} \sum_{\substack{n' \\ n}} \int d^3\delta \; \psi^{*m\;,n'}_{\lambda'} (\vec{\delta}_f) \; F_{n'n} \; \psi^{m,n}_{\lambda} (\vec{\delta}_i) \frac{1}{\sqrt{m^2 + \vec{M}^2}}$$

Tanto a amplitude $F_{n'n}$ como $M_o = (m^2 + \vec{M}^2)^{1/2}$ são funções de $\vec{\delta}$ através dos quadri-momentos dos núcleons. Diante do decaimento exponencial da função de onda quando $|\vec{s}|$ aumenta, excluiremos estas funções (F e M_o) da integral para um valor fixo e pequeno de $|\vec{s}|$ e, consequentemente, valor fixo de $s_{\pi N}$, $t_{\pi N}$, N^2 e N'^2, Bertocchi e Capella (44); Carlson (50). Neste trabalho o valor escolhido para $\vec{s}$ será aquele para o qual o referencial da sub-reação πN coincida com aquele da reação πd (Apêndice A.3.a). Esta aproximação será comum aos demais diagramas considerados neste trabalho.

No caso do ES, a exclusão se dá para $\vec{s} = \vec{\Delta}/2$ e os invariantes da sub-reação πN serão

$$s_{\pi N} = s_{\pi d} + m^2 - 2mS_o$$

$$N^2 = N'^2 = 5m^2 - 2md_o$$

$$t_{\pi N} = t_{\pi d}$$

$$k^2 = k'^2 = \mu^2$$

com

$$S_o = k_o + d_o$$

onde $s_{\pi d}$ é o quadrado da energia da reação πd no referencial do centro de massa, $t_{\pi d}$ é o momento transferido, $k_o(d_o)$ é a energia do pion (dêuteron) no referencial do muro de tijolos e μ é a massa do pion.

Agora, a amplitude se escreve

$$T^S_{\lambda',\lambda} = -4m \sum_{\substack{m\\m'}} \sum_{\substack{n\\n'}} \delta_{m'm} F_{n'n} \int d^3 s \; \psi^{*m',n'}_{\lambda'}(\vec{s}-\vec{\Delta}/2) \; \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{s}+\vec{\Delta}/2)$$

A função $\delta_{m'm}$ nos garantirá que a polarização do núcleon espectador se manterá a mesma durante a interação.

Definindo

$$I_{\lambda',\lambda}^{\substack{m'n'\\ m\,n}}(\Delta) = \int d^3\!\mathfrak{z}\; \psi_{\lambda'}^{*m',n'}(\vec{\mathfrak{z}}-\vec{\Delta}/2)\; \psi_{\lambda}^{m,n}(\vec{\mathfrak{z}}+\vec{\Delta}/2)$$

e

$$g_S = -\,4m$$

temos

$$T^S_{\lambda',\lambda} = g_S \sum_{\substack{m\\ m'}} \sum_{\substack{n\\ n'}} \delta_{m'm}\, F_{n'n}\, I_{\lambda',\lambda}^{\substack{m'n'\\ m\,n}}(\Delta) \qquad (3.2.1)$$

A integral $I(\Delta)$ acima é a definição do fator de forma do dêuteron. Depois da substituição da função de onda do dêuteron tal integral dará origem aos fatores de forma escalar E, quadripolar Q e magnético M. Tal integral está resolvida no Apêndice B.2.

Atribuindo valores às polarizações dos dêuterons obtemos

$$T^S_{1,1} = \left[E(\Delta) - \sqrt{1/2}\; Q(\Delta)\right] \Sigma F_{++}$$

$$T^S_{1,0} = \sqrt{1/2}\; M(\Delta)\; \Sigma F_{+-} \qquad (3.2.2)$$

$$T^S_{0,0} = \left[E(\Delta) + \sqrt{2}\; Q(\Delta)\right] \Sigma F_{++}$$

$$T^S_{1,-1} = 0$$

onde

$$E(\Delta) = g_S \int \left[u^2(r) + w^2(r)\right] j_0(\Delta r)\, dr$$

$$Q(\Delta) = g_S \int \left[2u(r)w(r) - \sqrt{1/2}\ w^2(r) \right] j_2(\Delta r)\ dr$$

$$M(\Delta) = g_S \int \{ \left[u^2(r) - 1/2\ w^2(r) \right] j_0(\Delta r) +$$

$$+ 1/2 \left[\sqrt{2}\ u(r)w(r) + w^2(r) \right] j_2(\ r) \}\ dr$$

As funções $u(r)$ e $w(r)$ são, respectivamente, parte radial das ondas S e D do dêuteron e j_l é uma função de Bessel esférica de ordem l.

O símbolo Σ representa a soma das amplitudes de espalhamento sobre o próton e sobre o nêutron. Na Fig. 3.2.1 ilustramos essa soma.

Decompondo os isospins (ver Apêndice D.4.a)

$$\Sigma F = \frac{4}{3} F^{I=3/2} + \frac{2}{3} F^{I=1/2}$$

onde I são índices de isospin.

$F_{++}(F_{+-})$ é a amplitude de spin não-flip (flip) da reação πN no referencial do muro de tijolos. Estas amplitudes estão calculadas explicitamente no Apêndice C.3.a:

$$F_{++} = \frac{d_0}{2m} A'$$

$$F_{+-} = - \frac{|\vec{S}|\,|\vec{\Delta}|}{m} B$$

onde

$$A' = A + 2m \frac{k_0}{d_0} B$$

$$\vec{S} = \vec{k} + \vec{\Delta}$$

A e B são as amplitudes invariantes πN.

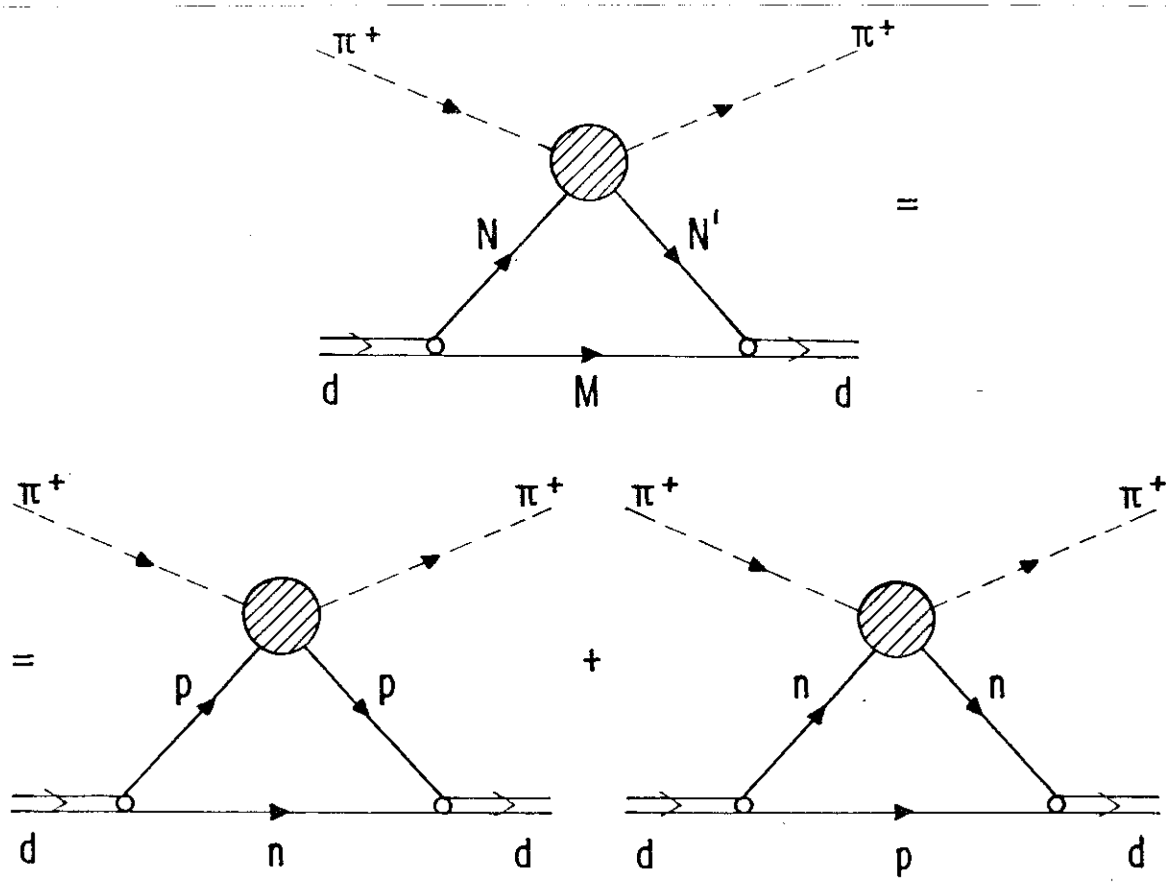


Figura 3.2.1 - ES para o espalhamento $\pi^+ d \rightarrow \pi^+ d$

Finalmente, para a seção de choque diferencial no referencial do centro de massa, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{3} \sum_{\lambda,\lambda'} |T^S_{\lambda',\lambda}|^2 \qquad (3.2.3)$$

onde

$$N = \frac{1}{64\pi^2 \, s_{\pi d}}$$

Na Fig. 3.2.2 comparamos a curva teórica da eq. 3.2.3 com as informações experimentais.

3.3 - *ESPALHAMENTO DUPLO (ED)*

O diagrama c da Fig. 3.1.1 representa o termo de *ED*. A amplitude de Feynman para este diagrama é

$$T^{D}_{\lambda'\lambda} = - \iint \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i(\not{N}'+m)}{N'^2-m^2+i\xi} A_{\pi N} \frac{i(\not{N}+m)}{N^2-m^2+i\xi} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{G\Gamma\xi_{\lambda}}{\sqrt{2}} \frac{i(-\not{M}+m)}{M^2-m^2+i\xi} A'_{\pi N} \frac{i(-\not{M}'+m)}{M'^2-m^2+i\xi} \frac{G\Gamma'\xi^*_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \frac{i}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \right]$$

Todas as quantidades acima já estão definidas na seção anterior (*ES*). Com a aproximação relativa à parte de spin na camada de massa temos

$$T^{D}_{\lambda'\lambda} = - i \frac{16m^4}{(2\pi)^8} \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} \int d^4 q_1 d^4 q_2 Tr \left[\frac{u(N',n') \, \bar{u}(N',n')}{N'^2-m^2+i\xi} \times \right.$$

$$\times A_{\pi N} \frac{u(N,n) \, \bar{u}(N,n)}{N^2-m^2+i\xi} \frac{G\Gamma.\xi_{\lambda}}{\sqrt{2}} \frac{v(-M,m) \, \bar{v}(-M,m)}{M^2-m^2+i\xi} \times$$

$$\left. \times A'_{\pi N} \frac{v(-M',m') \, \bar{v}(-M',m')}{M'^2-m^2+i\xi} \frac{G\Gamma'.\xi^*_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \right]$$

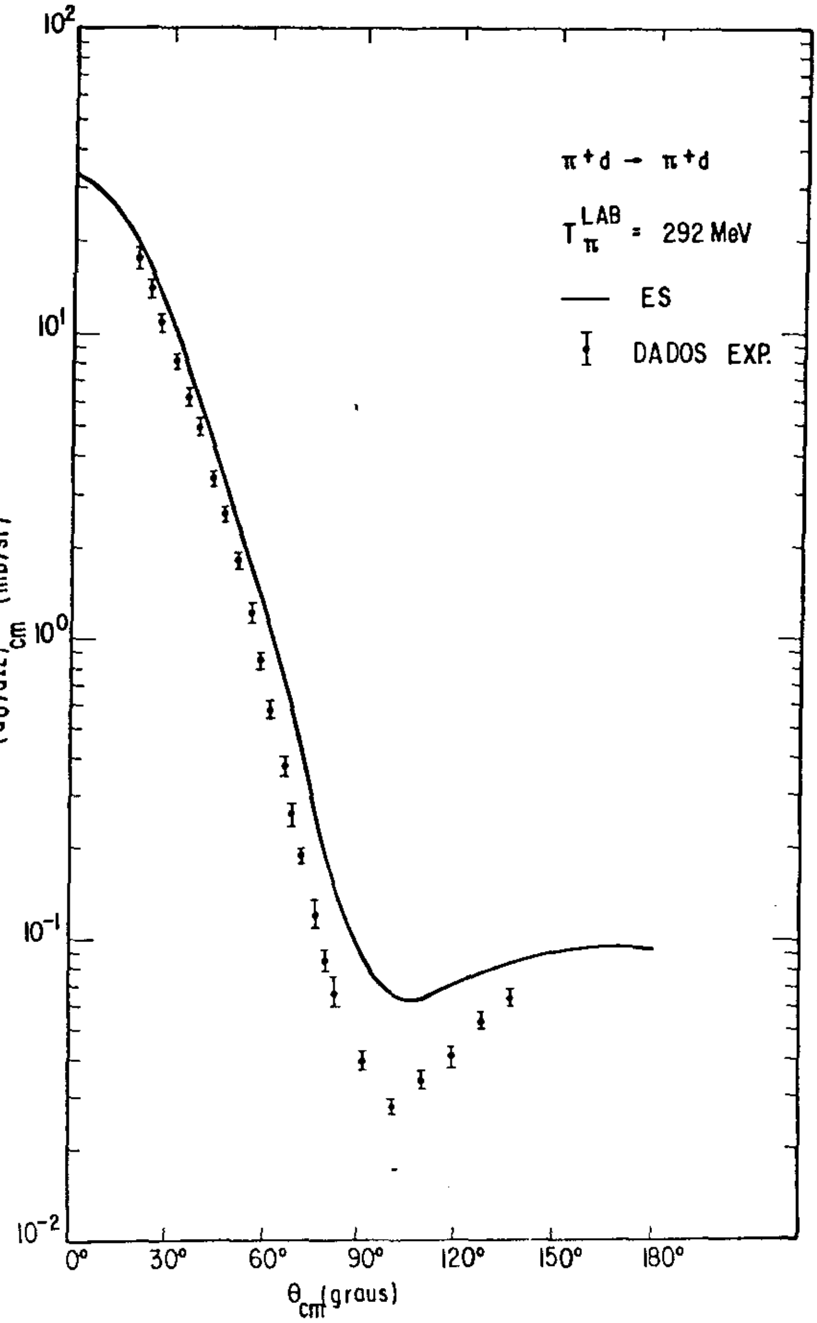


Figura 3.2.2 - Seção de choque diferencial da reação $\pi^+d \longrightarrow \pi^+d$ para energia cinética do pion incidente T_π = 292 Mev. A linha cheia corresponde ao nosso ES e os pontos experimentais são da ref. (20).

As amplitudes de espalhamento das sub-reações πN deste diagrama estão dadas por

$$F_{n'n} = \bar{u}(N',n')\ A_{\pi N}\ u(N,n)$$

$$F_{m'm} = \bar{v}(-M,m)\ A'_{\pi N}\ v(-M',m')$$

Colocando-se o núcleon espectador de cada sub-reação πN na camada de massa e efetuando-se a integral em δ_0 obtemos

$$T^{D}_{\lambda'\lambda} = i\,\frac{16m^4\pi^2}{(2\pi)^8}\sum_{\substack{m\\ m'}}\sum_{\substack{n\\ n'}}\iint d^3\delta_1 d^3\delta_2\ \Psi^{*m',n'}_{\lambda'}(M'^2,m^2)\ F_{n',n}\ F_{m',m}\ \times$$

$$\times\ \Psi^{m,n}_{\lambda}(N^2,m^2)\ \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{M}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{N}'^2}}\cdot\frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi}$$

Tomando-se o limite não-relativístico para as funções Ψ e Ψ^* escreveremos

$$T^{D}_{\lambda'\lambda} = i\,\frac{m^3}{2\pi^3}\sum_{\substack{m\\ m'}}\sum_{\substack{n\\ n'}}\int d^3\delta_1 d^3\delta_2\ \psi^{*m'n'}_{\lambda'}(\vec{\delta}_f)\ F_{n'n}\ F_{m'm}\ \times$$

$$\times\ \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{\delta}_i)\ \frac{1}{k_i-\mu^2+i\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{M}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{N}'^2}}$$

No referencial do muro de tijolos e tirando $M_0 = (m^2+\vec{M}^2)^{1/2}$, $N'_0 = (m^2+\vec{N}'^2)^{1/2}$ e as amplitudes de spin da integral para $\vec{\delta} = 0$ (ver Apêndice A.3.b) teremos $A_{\pi N} = A'_{\pi N}$. Os invariantes das sub-reações πN serão

$$s_{\pi N} = \frac{s_{\pi d} - 2m^2 + \mu^2}{2}$$

$$t_{\pi N} = t_{\pi d}/4$$

$$N^2 = N'^2 = m^2$$

$$k_i^2 = \mu^2 - \frac{t_{\pi d}}{4}$$

Definindo

$$I^{m'n'}_{\lambda',\lambda}{}^{m,n}(\Delta) = \int d^3 s_1 d^3 s_2 \, \psi^{*m',n'}_{\lambda'}(\vec{s}_2) \, \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{s}_1) \, \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi}$$

e

$$s_D(\Delta) = i \frac{m^3}{2\pi^3} \cdot \frac{1}{(m^2 + \vec{\Delta}^2/4)}$$

temos

$$T^D_{\lambda',\lambda} = s_D(\Delta) \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} F_{n'n} F_{m'm} I^{m'n'}_{\lambda',\lambda}{}^{m,n}(\Delta)$$

A integral $I^{m'n'}_{\lambda',\lambda}{}^{m,n}(\Delta)$ está calculada no Apêndice B.3.

Depois de atribuir valores às polarizações λ e λ' do dêuteron obtemos

$$T^D_{1,1} = G_D(\Delta) \sum F^p_{++} F^n_{++} + G_E(\Delta) \sum F^p_{+-} F^n_{+-}$$

$$T^D_{1,0} = \frac{i}{\sqrt{2}} G_F(\Delta) \sum (F^p_{++} F^n_{+-} + F^p_{+-} F^n_{++})$$

$$T^{D}_{0,0} = G_G(\Delta)\ \Sigma\ F^{p}_{++}\ F^{n}_{++} + G_H(\Delta)\ \Sigma\ F^{p}_{+-}\ F^{n}_{+-}$$

$$T^{D}_{1,-1} = G_I(\Delta)\ \Sigma\ F^{p}_{++}\ F^{n}_{++} + G_J(\Delta)\ \Sigma\ F^{p}_{+-}\ F^{n}_{+-}$$

onde

$$G_D = G_A + G_3 - (25/100)\ G_4$$

$$G_E = -\ G_C - (3/10)\ G_3 + (9/28)\ G_4$$

$$G_F = G_A - (5/10)\ G_3 + (15/28)\ G_4$$

$$G_G = G_B + G_3 - (5/10)\ G_4$$

$$G_H = -\ G_B - (4/10)\ G_3 + (5/14)\ G_4$$

$$G_I = G_C - (75/100)\ G_4$$

$$G_J = G_A + \frac{1}{10}\ G_3 - \frac{25}{100}\ G_4$$

com

$$G_A = G_1 + (\sqrt{1/2})\ G_2$$

$$G_B = G_1 - \sqrt{2}\ G_2$$

$$G_C = (3/\sqrt{2})\ G_2$$

e

$$G_1 = g_D(\Delta) \int h(kr)\ j_o(Kr)\ u^2(r)\ dr$$

$$G_2 = g_D(\Delta) \int h(kr)\ j_2(Kr)\ u(r)w(r)\ dr$$

$$G_3 = g_D(\Delta) \int h(kr)\ j_o(Kr)\ w^2(r)\ dr$$

$$G_4 = g_{\mathcal{D}}(\Delta) \int h(kr)\ j_2(Kr)\ w^2(r)\ dr$$

com

$$g_{\mathcal{D}}(\Delta) = 2\pi^2\ f_{\mathcal{D}}(\Delta)$$

Exceto por $h(x)$ que é uma função de Hankel, as demais funções já foram definidas no *ES*. k é o módulo do tri-momento do π incidente e $K = |\vec{K}| = \dfrac{|\vec{k}+\vec{k}'|}{2}$.

O símbolo Σ diante do produto F^pF^n tem o significado dado no *ES* agora, porém, incluindo os diagramas de troca de carga ilustrados na Fig. 3.3.1

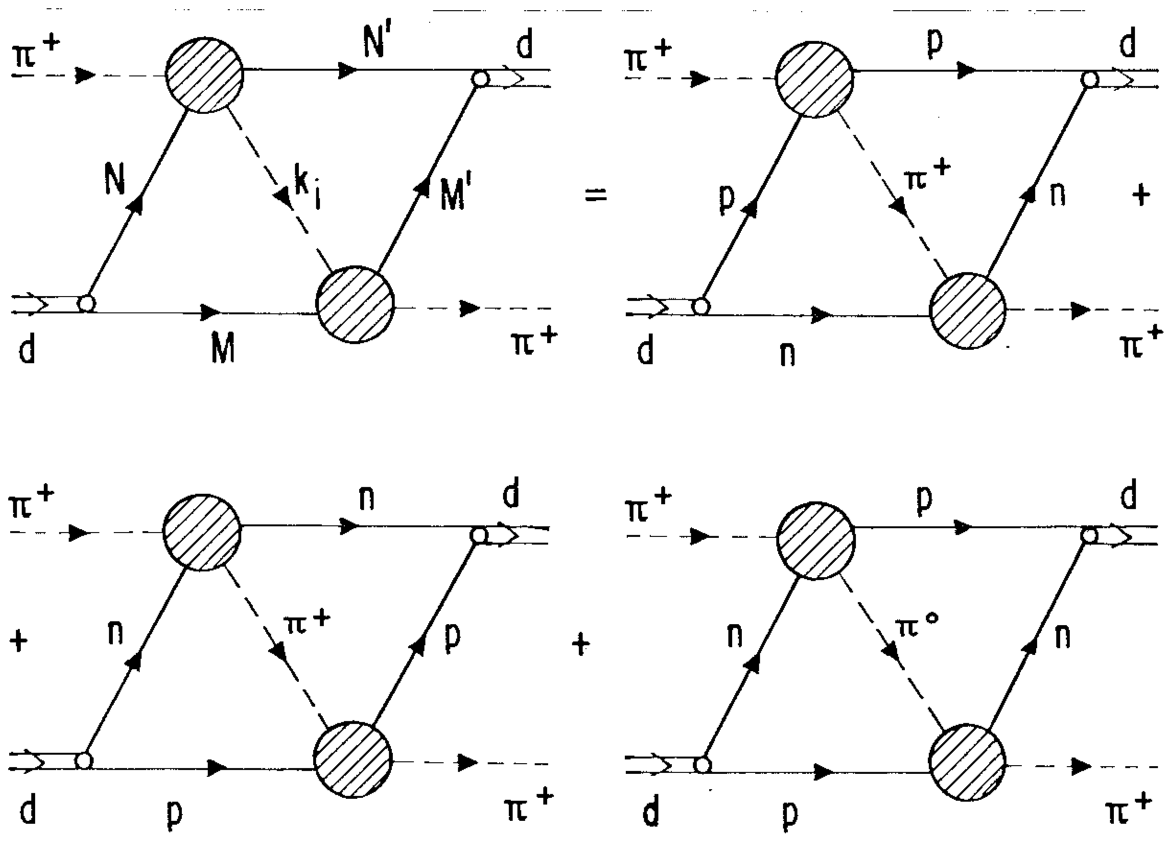


Figura 3.3.1 - ED para o espalhamento $\pi^+d \to \pi^+d$

$$G_4 = g_{\mathcal{D}}(\Delta) \int h(kr)\ j_2(Kr)\ w^2(r)\ dr$$

com

$$g_{\mathcal{D}}(\Delta) = 2\pi^2\ f_{\mathcal{D}}(\Delta)$$

Exceto por $h(x)$ que é uma função de Hankel, as demais funções já foram definidas no *ES*. k é o módulo do tri-momento do π incidente e $K = |\vec{K}| = \dfrac{|\vec{k}+\vec{k}'|}{2}$.

O símbolo Σ diante do produto $F^p F^n$ tem o significado dado no *ES* agora, porém, incluindo os diagramas de troca de carga ilustrados na Fig. 3.3.1

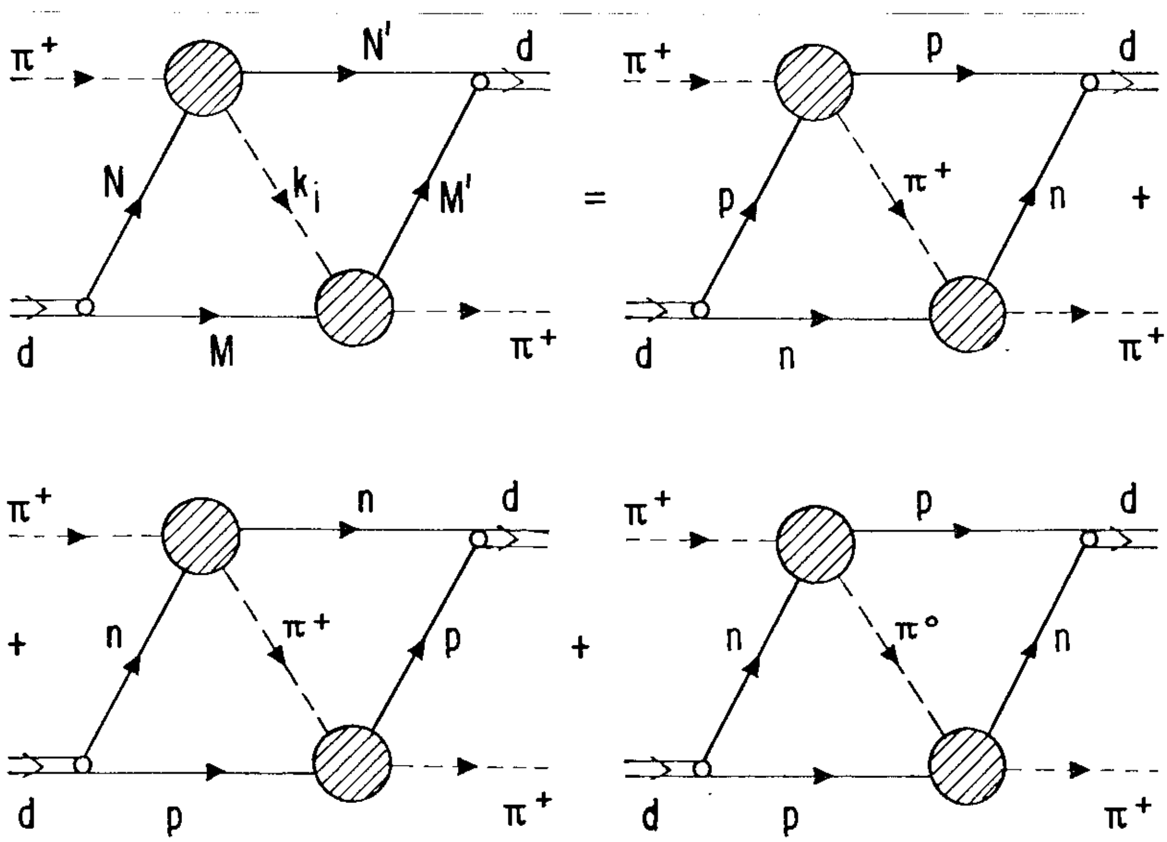


Figura 3.3.1 - ED para o espalhamento $\pi^+ d \to \pi^+ d$

Exemplificando,

$$\Sigma\ F^{p}_{++}\ F^{n}_{+-} = F^{\pi^+ p\to\pi^+ p}_{++}\ F^{\pi^+ n\to\pi^+ n}_{+-} + F^{\pi^+ n\to\pi^+ n}_{++}\ F^{\pi^+ p\to\pi^+ p}_{+-} +$$

$$+ F^{\pi^+ n\to\pi^o p}_{++}\ F^{\pi^o p\to\pi^+ n}_{+-}$$

onde as amplitudes F_{++} e F_{+-} estão definidas no *ES*.

Decompondo os isospins (ver Apêndice D.4.b)

$$\Sigma\ F^{p}F^{n} = \frac{2}{9}\Big[2F^{I=3/2}\ F^{I=3/2} + 4F^{I=3/2}\ F^{I=1/2} +$$

$$+ 4F^{I=1/2}\ F^{I=3/2} - F^{I=1/2}\ F^{I=1/2}\Big]$$

Concluindo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{3} \sum_{\lambda,\lambda'} |T^{S}_{\lambda',\lambda} + T^{\mathcal{D}}_{\lambda',\lambda}|^{2} \qquad (3.3.1)$$

onde N e T^{S} estão definidos na eq. 3.2.3.

A curva na Fig. 3.3.2 corresponde a seção de choque diferencial do *ED* conforme calculamos e na Fig. 3.3.3 temos a curva da seção de choque da eq. 3.3.1 comparada aos dados experimentais.

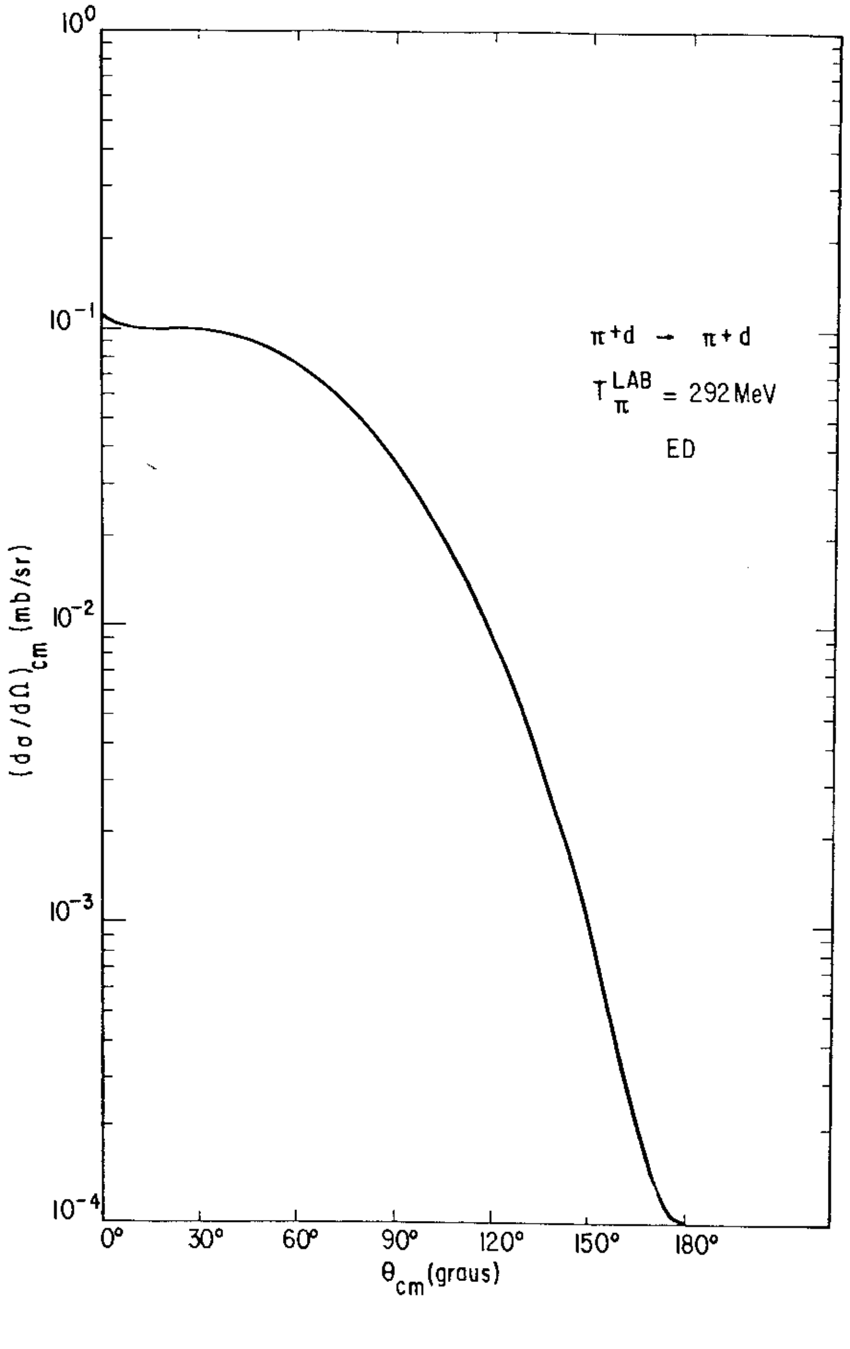


Figura 3.3.2 - Seção de choque diferencial do nosso ED na reação $\pi^+d \longrightarrow \pi^+d$ para $T_\pi = 292$ Mev.

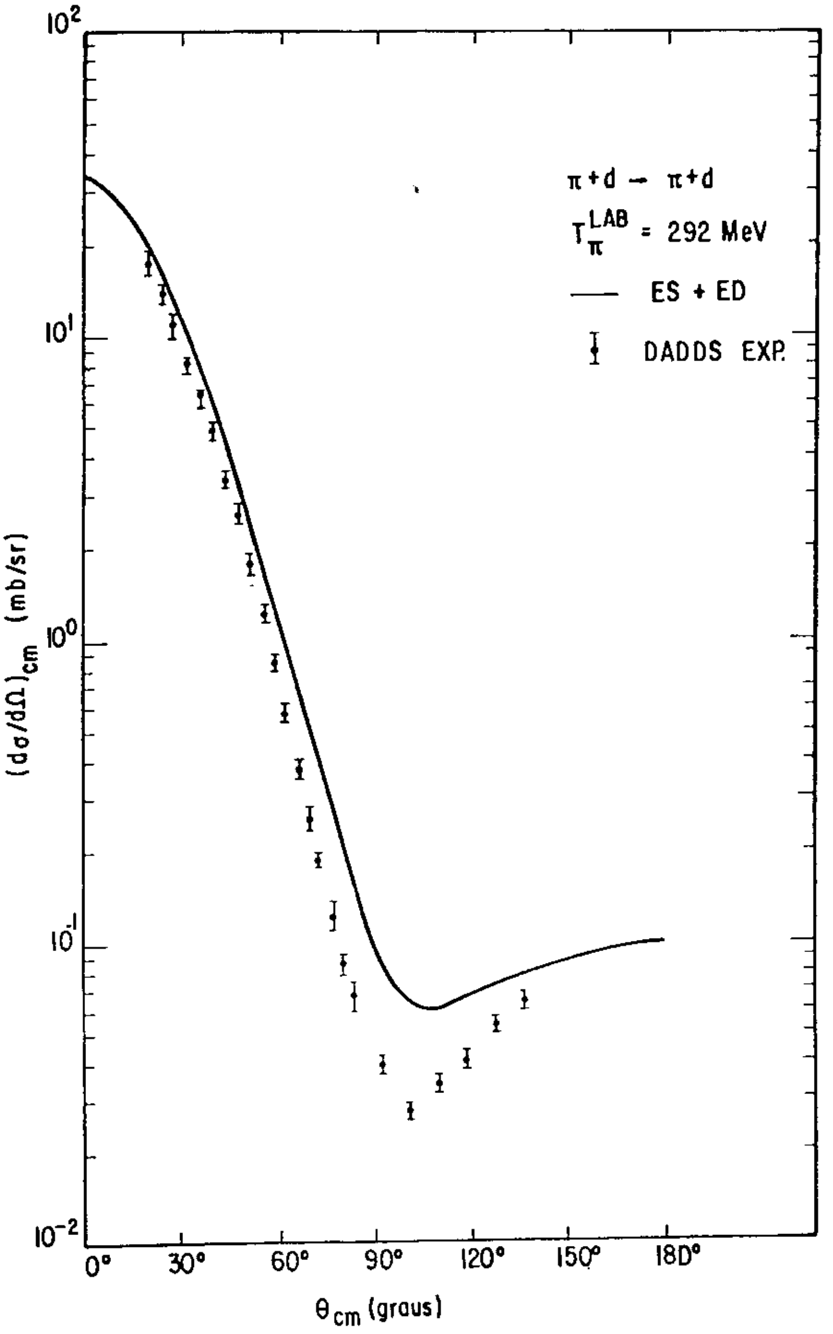


Figura 3.3.3 - O mesmo da Fig. 3.2.2 agora somando-se ao ES o ED

3.4 - CORRENTE DE TROCA (CT)

A amplitude para este mecanismo é dada pela soma das amplitudes correspondentes aos diagramas da Fig. 1.1. Como estamos trabalhando num intervalo de energia onde a ressonância 3-3 é dominante consideraremos aqueles gráficos onde pelo menos uma dessas ressonâncias seja excitada.

Dos últimos cinco diagramas da Fig. 1.1 calcularemos os três mais importantes, Robilotta (41). Na Fig. 3.4.1 representamos diagramaticamente o mecanismo *CT* na região da ressonância 3-3

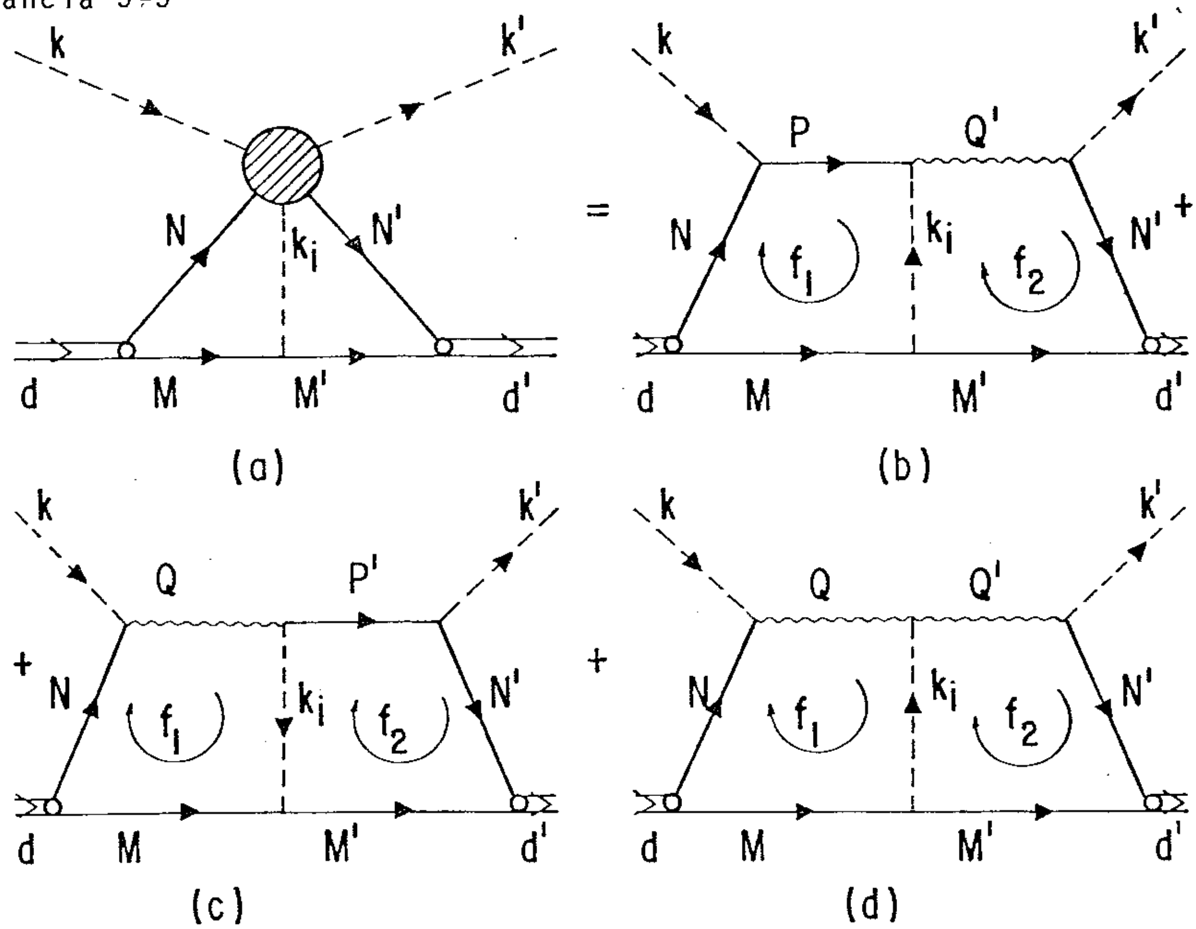


Figura 3.4.1 - Mecanismo de CT na região da ressonância 3-3. A linha franzida representa a ressonância 3-3. As letras indicam os quadrimomentos das partí-

culas exceto os $f_i (i=1,2)$ que são as variáveis de integração.

Nos cálculos que se seguem, escreveremos a ressonância 3-3 dos diagramas *b* e *c* da Fig. 3.4.1 como sendo parte da amplitude de Dirac $A_{\pi N}$. Para o diagrama *d* desta figura, as ressonâncias serão escritas explicitamente através do propagador de Rarita-Schwinger.

a) *Diagrama* $N\Delta$ - A amplitude de Feynman para o diagrama *b* da Fig. 3.4.1 é

$$T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} = - \iint \frac{d^4 f_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 f_2}{(2\pi)^4} \, Tr \left[\frac{i(\not{N}'+m)}{N'^2-m^2+i\xi} A_{\pi N} \frac{i(\not{P}+m)}{P^2-m^2+i\xi} \right. \times$$

$$\times\; C'_{\pi NN} \gamma_5 \frac{i(\not{N}+m)}{N^2-m^2+i\xi} \frac{G\Gamma \xi_\lambda}{\sqrt{2}} \frac{i(-\not{M}+m)}{M^2-m^2+i\xi} \cdot C_{\pi NN} \gamma_5 \times$$

$$\left. \times\; \frac{i(-\not{M}'+m)}{M'^2-m^2+i\xi} \frac{G\Gamma' \xi^*_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \frac{i}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \right] \qquad (3.4.1)$$

onde

$$C_{\pi NN} = g_{\pi NN} \, F_\pi$$

com F_π sendo o fator de forma para o vértice πNN normalizado tal que $F_\pi(\mu^2, m^2, m^2) = 1$ e $g_{\pi NN}$ constante de acoplamento πNN : $\dfrac{g^2_{\pi NN}}{4\pi} = 14.7$

As demais quantidades já foram definidas nas seções anteriores.

Pela aproximação que consiste em colocar a parte de spin na camada de massa temos

$$T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} = \frac{16m^4}{(2\pi)^8} \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} \iint d^4 \delta_1 d^4 d_2 \left[\frac{\bar{v}(-M',m')\, G\Gamma'.\xi^{*}_{\lambda}{}'\, u(N',n')}{(M'^2-m^2+i\xi)(N'^2-m^2+i\xi)\sqrt{2}} \right. x$$

$$x\ \bar{u}(N',n')\ A_{\pi N} \frac{(\not{P}+m)}{P^2-m^2+i\xi}\ C'_{\pi NN}\ \gamma_5\ u(N,n)\ x$$

$$x \frac{\bar{u}(N,n)\ G\Gamma\xi_\lambda\ v(-M,m)}{(M^2-m^2+i\xi)(N^2-m^2+i\xi)\sqrt{2}}\ \bar{v}(-M,m)\ C_{\pi NN}\ \gamma_5 v(-M',m')\ x$$

$$\left. x \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \right]$$

Onde as amplitudes de spin são agora definidas por

$$F_{n'n} = \bar{u}(N',n')\ A_{\pi N}(\not{P}+m)\ \gamma_5\ u(N,n) \tag{3.4.2}$$

$$G_{m'm} = \bar{v}(-M,m)\gamma_5\ v(-M',m')$$

Colocando os núcleons M e M' na camada de massa e fazendo a passagem relativística → não-relativística para as funções Ψ e Ψ^*, obtemos

$$T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} = -\frac{m^3}{2\pi^3}\ C'_{\pi NN}\ C_{\pi NN} \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} \iint d^3\delta_1 d^3\delta_2\ \psi^{*m',n'}_{\lambda'}(\vec{\delta}_f)\ F_{n'n}\ G_{m'm}\ x$$

$$x\ \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{\delta}_i) \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{M}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{M}'^2}} \cdot \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \cdot \frac{1}{P^2-m^2+i\xi} \tag{3.4.3}$$

A aproximação de exclusão das amplitudes de spin, de $M_0 = M'_0 = (m^2+\vec{M}'^2)^{1/2}$ se dá, na CT, nas mesmas condições do ED. Deste modo, os invariantes da sub-reação πN serão (ver Apêndice A.3.c)

$$s_{\pi N} = \frac{s_{\pi d} + \mu^2 - 2m^2}{2}$$

$$t_{\pi N} = \mu^2 - t_{\pi d}/4$$

$$P^2 = s_{\pi N}$$

$$N'^2 = m^2$$

$$k_i^2 = t_{\pi d}/4$$

Considerando somente a contribuição da onda P_{33} à amplitude $A_{\pi N}$ e parametrizando-a por uma Breit-Wigner, podemos colocar o termo polo em fator e deixá-lo no integrando

$$T^{N\Delta}_{\lambda',\lambda} = -\frac{m^3}{2\pi^3} \cdot \frac{C'_{\pi NN}\, C_{\pi NN}}{(m^2+\vec{\Delta}^2/4)} \sum_{m,m'} \sum_{n,n'} F_{n'n}\, G_{m'm}\, I^{m'n'}_{\lambda',\lambda}{}^{m\,n}(\Delta) \qquad (3.4.4)$$

onde

$$I^{m'n'}_{\lambda',\lambda}{}^{m\,n}(\Delta) = \iint d^3s_1 d^3s_2\, \psi^{*m',n'}_{\lambda'}(\vec{s}_2)\, \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{s}_1)\, \frac{1}{P^2-m^2+i\xi} \cdot \frac{1}{Q'^2-M^2} \times$$

$$\times \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \qquad (3.4.5)$$

com $M = M_\Delta - i\Gamma/2$ sendo M_Δ a massa da ressonância 3-3 e Γ sua largura.

No Apêndice C.3.b mostramos que

$$G_{m'm} = \frac{|\vec{\Delta}|}{2m} \quad S_m \quad \delta_{m'm} \tag{3.4.6}$$

onde $S_{\pm 1/2} = \pm 1$.

então

$$T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} = \mathcal{J}_{N\Delta}(\Delta) \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} S_m \, \delta_{m'm} \, F_{n'n} \, I^{m\,n}_{\lambda'\lambda}{}^{m'n'}(\Delta) \tag{3.4.7}$$

com

$$\mathcal{J}_{N\Delta}(\Delta) = - C_{\pi NN} \, C'_{\pi NN} \, \frac{1}{8\pi m} \cdot \frac{|\vec{\Delta}|}{m} \cdot \frac{4m^4}{(m^2 + \vec{\Delta}^2/4)} \cdot \frac{1}{2\pi^2} \tag{3.4.8}$$

É importante observar aqui que o acoplamento pseudo-escalar para o pion no vértice πNN nos diagramas CT (Fig.3.4.1) impede a contribuição deste mecanismo no espalhamento para frente. Isto é facilmente visto na eq. 3.4.6 pois $G_{m'm}$ é proporcional ao momento transferido ($|\vec{\Delta}| = t_{\pi d/4}$) que se anula para $\Theta = 0^o$. Vale também notar que o elemento de matriz da eq. 3.4.7 se parece com aquele do ES, na eq. 3.2.1.

Suponhamos agora que, em vez da amplitude de Dirac para a interação πN, tenhamos o propagador de Rarita - Schwinger $P_{\nu\lambda}$ para a ressonância 3-3, Pilkhun (78) e Arndt et al.(79). Então

$$A_{\pi N} \to C^2_{\pi N\Delta} \; k'^{\nu} \; P_{\nu\lambda}(Q') \; k^{\lambda}_{i}$$

onde $C_{\pi N\Delta} = g_{\pi N\Delta} \, F_\Delta$ com $g_{\pi N\Delta}$ sendo a constante de acoplamento para o vértice $\pi N\Delta$ $\left(\frac{g^2_{\pi N\Delta}}{4\pi} = \frac{0.35}{\mu^2} \right)$ e F_Δ é o fator de forma deste vértice.

$$P_{\nu\lambda}(Q') = \frac{1}{Q^2-M^2}(Q'+M_\Delta)\frac{1}{3}\left[\frac{2}{M_\Delta^2}Q'_\nu Q'_\lambda - g_{\nu\lambda} - \gamma_\lambda\gamma_\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{M_\Delta}\left(\gamma_\nu Q'_\lambda - \gamma_\lambda Q'_\nu\right)\right]$$

Fatorizando o propagador $P_{\nu\lambda}(Q')$ numa parte dependente do spin $S_{\nu\lambda}$ e noutra parte que será o polo da Δ, escreveremos:

$$P_{\nu\lambda}(Q') = \frac{1}{Q'^2-M^2} S_{\nu\lambda}(Q')$$

A comparação entre as duas últimas expressões nos permite a definição de $S_{\nu\lambda}(Q')$.

Com isto

$$F_{n'n} = C'_{\pi NN} C^2_{\pi N\Delta} \frac{1}{Q'^2-M^2} \cdot \frac{1}{P^2-m^2+i\xi} \; x$$

$$x \; \bar{u}(N',n')k'^{\nu} S_{\nu\lambda}(Q')k_i^{\lambda} (\not{P}+m) \gamma_5 u(N,n) \qquad (3.4.9)$$

As eqs. 3.4.5 e 3.4.7 permanecem porém com

$$\delta'_{N\Delta}(\Delta) \equiv - C'_{\pi NN} C_{\pi NN} C^2_{\pi N\Delta} \frac{1}{8\pi m} \cdot \frac{|\vec{\Delta}|}{m} \cdot \frac{4m^4}{(m^2+\vec{\Delta}^2/4)} \cdot \frac{1}{2\pi^2}$$

Resolver exatamente a integral da eq. 3.4.5 é uma tarefa muito difícil pois trata-se de uma integral sêxtupla. Resolveremos esta integral de quatro maneiras aproximadas, sendo que a diferença entre elas está nos polos que serão mantidos no integrando. Em cada uma dessas situações procuraremos desacoplar a integral em f_1 da integral em f_2 ou através de uma mudança de variável ou considerando o polo do pion como função só de uma das duas variáveis de integração pois, conforme o Apêndice A.3.c,

$$k_i = 1/2(d-d') - f_1 + f_2 \qquad (3.4.10)$$

A finalidade disto é verificar como os resultados serão alterados e ter uma idéia, pela comparação dos resultados, da precisão com que estamos resolvendo a integral.

Situação 1 - Integração do polo do pion

Para os demais polos $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = 0$

Deixando os índices de lado

$$I = \frac{1}{P^2-m^2} \cdot \frac{1}{Q'^2-M^2} \int d^3f_1 d^3f_2 \; \psi(\vec{f}_1) \; \psi^*(\vec{f}_2) \; \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi}$$

Tal integral dá origem aos "*π-fatores de forma do dêuteron*", Apêndice B.4.a. Esta denominação está associada ao seguinte fato: enquanto os fatores de forma no *ES* correspondem aos vértices *dNd'N'*, os π-fatores de forma correspondem aos vértices *dNπd'N'*, Fig. 3.4.2.

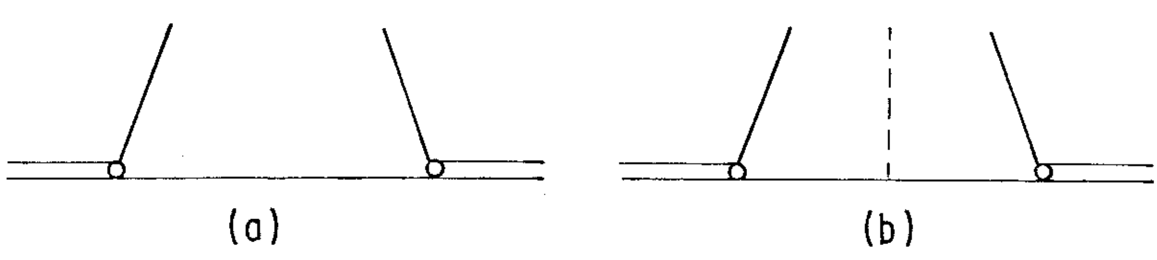


Figura 3.4.2 - Vértices dNd'N' (a), dNπd'N' (b)

Atribuindo valores às polarizações dos dêuterons as amplitudes ficam

$$T^{N\Delta}_{1,1} = \left[HS(\Delta) - \sqrt{1/2}\; HQ(\Delta) \right] \Sigma\, F_{++}$$

$$T^{N\Delta}_{1,0} = \sqrt{1/2}\; HM(\Delta)\; \Sigma\, F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{0,0} = - \left[HS(\Delta) + \sqrt{2}\; HQ(\Delta) \right] \Sigma\, F_{++}$$

$$T^{N\Delta}_{1,-1} = 0$$

onde agora

$$HS(\Delta) = g_{N\Delta}(\Delta) \int \frac{e^{-\mu r}}{r} \left[u^2(r) + w^2(r) \right] j_0(\Delta r)\, dr$$

$$HQ(\Delta) = g_{N\Delta}(\Delta) \int \frac{e^{-\mu r}}{r} \left[2u(r)w(r) - \sqrt{1/2}\; w^2(r) \right] j_2(\Delta r)\, dr$$

$$HM(\Delta) = g_{N\Delta}(\Delta) \int \frac{e^{-\mu r}}{r} \{ \left[u^2(r) - 1/2\; w^2(r) \right] j_0(\Delta r) +$$

$$+ 1/2 \left[\sqrt{2}\; u(r)w(r) + w^2(r) \right] j_2(\Delta r) \} dr$$

são, respectivamente, os π-fatores de forma esférico, quadri-polar e magnético do dêuteron e

$$g_{N\Delta}(\Delta) = \frac{1}{P^2 - m^2} \cdot \frac{1}{Q'^2 - M^2} \quad 2\pi^2\; \delta_{N\Delta}(\Delta)$$

O ΣF corresponde a todos estados de carga possíveis para as partículas intermediárias, Fig. 3.4.3

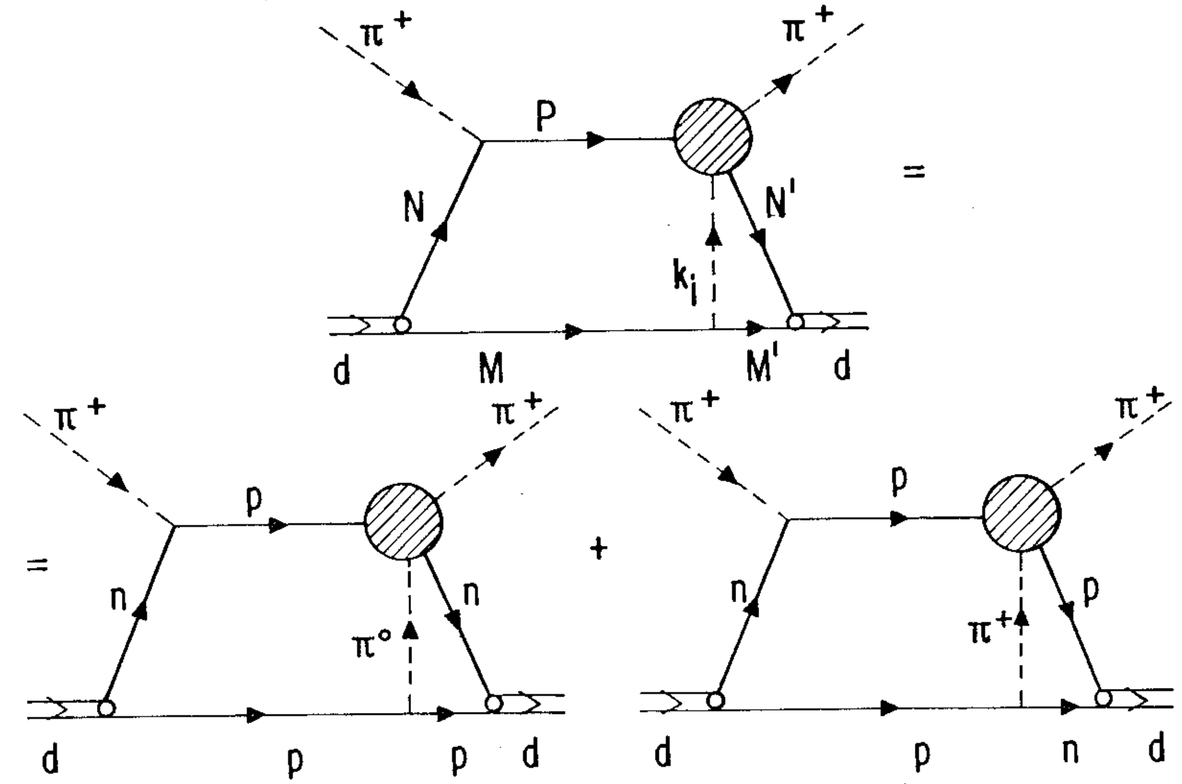


Figura 3.4.3 - CT(NΔ) para o espalhamento $\pi^+ d \to \pi^+ d$

Decompondo o isospin (ver Apêndice D.4.c)

$$\Sigma\ F = -\frac{8}{3}\,F^{I=3/2} + \frac{2}{3}\,F^{I=1/2} \tag{3.4.11}$$

De acordo com o Apêndice C.3.d

$$F^{N\Delta}_{++} = |\vec{\Delta}|\ A + \left(\frac{3s_{\pi d} - \mu^2 - 12m^2}{4}\right)\frac{|\vec{\Delta}|}{2m}\ B \tag{3.4.12}$$

$$F^{N\Delta}_{+-} = i\,\frac{d_0}{2m}\,|\vec{S}|\ A \tag{3.4.13}$$

onde A e B são as amplitudes invariantes definidas a menos do polo da ressonância que ficou na integral da eq. 3.4.5.

As expressões para F_{++} e F_{+-} quando consideramos o propagador da partícula de spin 3/2 no lugar da amplitude de Dirac estão dadas no Apêndice C.3.e. Agora o $g_{N\Delta}$ será aquele com $f'_{N\Delta}$ no lugar de $f_{N\Delta}$. Idem para as demais situações.

As eqs. 3.4.11, 12 e 13 permanecerão para cada uma das quatro soluções da eq. 3.4.5.

Situação 2 - Integração do polo do pion e o polo do núcleon independentemente.

O polo da ressonância 3-3 é excluído da integral para $\vec{f}_2 = \vec{0}$.

Nesta situação, o desacoplamento entre as integrais se dá desprezando a dependência do polo do pion com $\vec{f}_1$ (ver eq. 3.4.10).

$$I = \frac{1}{Q'^2 - M^2} \int d^3 f_1 \frac{\psi(\vec{f}_1)}{P^2 - m^2 + i\xi} \int d^3 f_2 \frac{\psi^*(\vec{f}_2)}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi} \qquad (3.4.14)$$

No Apêndice B.4.a resolveremos esta última integral.

Temos então para os $T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda}$ as seguintes expressões:

$$T^{N\Delta}_{1,1} = H_7 \; \Sigma F_{++} + H_8 \; \Sigma F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{1,0} = H_8 \; \Sigma F_{++} + H_9 \; \Sigma F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{0,0} = H_{10} \; \Sigma F_{++} + H_{11} \; \Sigma F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{1,-1} = H_{12} \; \Sigma F_{++} + H_8 \; \Sigma F_{+-}$$

onde

$$H_1 = g_{N\Delta}(\Delta) \; (S^{\pi} - \sqrt{1/2} \; D^{\pi})$$

$$H_2 = g_{N\Delta}(\Delta)\ (S^\pi + \sqrt{2}\ D^\pi)$$

$$H_3 = S^N - \sqrt{4\pi}\ \sqrt{1/10}\ D^N\ Y_{2,0}(\theta,\phi)$$

$$H_4 = S^N + \sqrt{4\pi}\ \sqrt{2/5}\ D^N\ Y_{2,0}(\theta,\phi)$$

$$H_5 = \sqrt{4\pi}\ \sqrt{3/20}\ D^N\ Y_{2,1}(\theta,\phi)$$

$$H_6 = \sqrt{4\pi}\ \sqrt{3/5}\ D^N\ Y_{2,2}(\theta,\phi)$$

$$H_7 = H_1\ H_3$$

$$H_8 = -\sqrt{2}\ H_1\ H_5$$

$$H_9 = \sqrt{1/2}\ H_1\ H_4$$

$$H_{10} = -\ H_2\ H_4$$

$$H_{11} = 2H_2\ H_5$$

$$H_{12} = -\ H_1\ H_6$$

e

$$S^\pi = \frac{1}{B_\pi} \int u(r)\, e^{-D_\pi r}\ j_0(C_\pi r)\, dr \qquad (3.4.15)$$

$$S^N = \frac{1}{B_N} \int u(r)\, e^{-D_N r}\ j_0(C_N r)\, dr \qquad (3.4.16)$$

$$D^\pi = \frac{1}{B_\pi} \int w(r)\, e^{-D_\pi r}\ j_2(C_\pi r)\, dr \qquad (3.4.17)$$

$$\mathcal{D}^N = \frac{1}{B_N} \int w(r)\, e^{-\mathcal{D}_N r}\, j_2(C_N r)\, dr \tag{3.4.18}$$

por sua vez, de acordo com o Apêndice A.3.c,

$$B_\pi = 1$$

$$\vec{C}_\pi = \vec{\Delta}$$

$$\mathcal{D}_\pi^2 = \mu^2$$

$$B_N = 2\,\frac{S_o}{d_o}$$

$$\vec{C}_N = \frac{1}{B_N}\left(\vec{S} - \frac{S_o}{d_o}\,\vec{\Delta}\right)$$

$$\mathcal{D}_N^2 = \frac{m^2 - s_{\pi N}}{B_N} - \vec{C}_N^2$$

$$\Theta = arc\ cos\left(-\frac{|\vec{\Delta}|}{2|\vec{C}_N|}\right) \tag{3.4.19}$$

$$\phi = 0 \tag{3.4.20}$$

Nesta situação

$$g_{n\Delta}(\Delta) = \frac{1}{Q'^2 - M^2}\,.\,2\pi^2 f_{N\Delta}(\Delta)$$

Situação 3 - Integral no polo do núcleon desacoplada da integral no polo da ressonância 3-3

O propagador do pion é mantido fora para $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = 0$. Esta exclusão desacopla naturalmente as integrais. Vale notar que esta aproximação é bastante natural pois o polo do pion está fora da região de integração ($M^2 = m^2$ e $M'^2 = m^2$) e consequentemente, o propagador é uma função suave de s_1 e s_2.

$$I = \frac{1}{k_i^2 - \mu^2} \int d^3 s_1\, \psi(\vec{s}_1)\, \frac{1}{P^2 - m^2 + i\xi} \int d^3 s_2\, \psi(\vec{s}_2)\, \frac{1}{Q'^2 - M^2}$$

Esta integral é semelhante àquela da eq. 3.4.14. A diferença está na troca do polo do pion pelo polo da ressonância 3-3. No Apêndice B.4.a discutiremos esta integral.

Aqui

$$T^{N\Delta}_{1,1} = H_{11}\, \Sigma\, F_{++} + H_{12}\, \Sigma\, F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{1,0} = H_{13}\, \Sigma\, F_{++} + H_{14}\, \Sigma\, F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{0,0} = H_{15}\, \Sigma\, F_{++} + H_{16}\, \Sigma\, F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{1,-1} = H_{17}\, \Sigma\, F_{++} + H_{18}\, \Sigma\, F_{+-}$$

onde

$$H_{11} = g_{N\Delta}(\Delta) \left[H_1 H_3 - \sqrt{2}\, H_5 H_7 + H_6 H_8 \right]$$

$$H_{12} = g_{N\Delta}(\Delta) \left[H_1 H_7 + 1/2(\sqrt{3}\, H_8 - 2H_9 - H_{10})\, H_{19} - H_6 H_7 \right]$$

$$H_{13} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[-\sqrt{2}\, H_1 H_7 - (H_9 + \sqrt{2}\, H_{10}) H_{19} + \sqrt{2}\, H_6 H_7\right]$$

$$H_{14} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[\sqrt{1/2}\, H_1 H_4 + 2 H_5 H_7 - (H_9 + \sqrt{2}\, H_{10})\, H_{20}\right]$$

$$H_{15} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[- H_2 H_4 + 2\sqrt{2}\, H_5 H_7\right]$$

$$H_{16} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[2 H_2 H_7 - 2\sqrt{1/2}\,(H_9 + \sqrt{2}\, H_{10})\, H_{19}\right]$$

$$H_{17} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[- H_1 H_8 - \sqrt{2}\, H_5 H_7 - (\sqrt{2}\, H_9 - H_{10})\, H_{20}\right]$$

$$H_{18} = g_{N\Delta}(\Delta)\left[H_1 H_7 + 1/2(\sqrt{3}\, H_8 - \sqrt{2}\, H_9 + H_{10})\, H_{19} - H_6 H_7\right]$$

com

$$H_1 = S^{\Delta'} - \sqrt{4\pi}\,\sqrt{1/2}\,\mathcal{D}^{\Delta'}\, Y_{2,0}(\Theta', \phi')$$

$$H_2 = S^{\Delta'} + \sqrt{4\pi}\,\sqrt{2}\,\mathcal{D}^{\Delta'}\, Y_{2,0}(\Theta', \phi')$$

$$H_3 = S^{N} - \sqrt{4\pi}\,\sqrt{1/10}\,\mathcal{D}^{N}\, Y_{2,0}(\Theta, \phi)$$

$$H_4 = S^{N} + \sqrt{4\pi}\,\sqrt{2/5}\,\mathcal{D}^{N}\, Y_{2,0}(\Theta, \phi)$$

$$H_5 = \sqrt{4\pi}\,\sqrt{5}\,\sqrt{3/10}\,\mathcal{D}^{\Delta'}\, Y_{2,1}(\Theta', \phi')$$

$$H_6 = \sqrt{4\pi}\,\sqrt{5}\,\sqrt{3/5}\,\mathcal{D}^{\Delta'}\, Y_{2,2}(\Theta', \phi')$$

$$H_7 = \sqrt{4}\,\sqrt{3/20}\,\mathcal{D}^{N}\, Y_{2,1}(\Theta, \phi)$$

$$H_8 = \sqrt{4\pi}\,\sqrt{3/5}\,\mathcal{D}^{N}\, Y_{2,2}(\Theta, \phi)$$

$$H_9 = \sqrt{4\pi}\ \sqrt{3/2}\ S^N$$

$$H_{10} = 4\pi \sqrt{3/10}\ \mathcal{D}^N\ Y_{2,0}(\Theta\ ,\ \phi)$$

$$H_{19} = \mathcal{D}^{\Delta'}\ Y_{2,1}(\Theta'\ ,\ \phi')$$

$$H_{20} = \mathcal{D}^{\Delta'}\ Y_{2,2}(\Theta'\ ,\ \phi')$$

A definição de $S_N(\mathcal{D}_N)$ é aquela da eq. 3.4.16(3.4.18). A definição de $S_{\Delta'}(\mathcal{D}_{\Delta'})$ é dada pela eq. 3.4.15 (eq.3.4.17) fazendo-se as seguintes substituições

$$B_\pi \rightarrow B_{\Delta'} = 2\,\frac{S_o}{d_o}$$

$$\vec{C}_\pi \rightarrow \vec{C}_{\Delta'} = \frac{\vec{A}_{\Delta'}}{B_{\Delta'}}$$

$$\mathcal{D}^2_\pi \rightarrow \mathcal{D}^2_{\Delta'} = \frac{M^2 - s_{\pi N}}{B_{\Delta'}} - \vec{C}^{\,2}_{\Delta'}$$

onde, de acordo com o Apêndice A.3.c,

$$\vec{A}_{\Delta'} = \vec{S} + \frac{S_o}{d_o}\vec{\Delta}$$

Os ângulos Θ e ϕ já conhecemos da situação anterior, eqs. 3.4.19 e 20. Para Θ' e ϕ' temos

$$\Theta' = arc\ cos\left(\frac{|\vec{\Delta}|}{2|\vec{C}_{\Delta'}|}\right)$$

$$\phi' = \phi$$

Por último

$$g_{N\Delta}(\Delta) = \frac{1}{k_i^2 - \mu^2} \; 2\pi^2 \; f_{N\Delta}(\Delta)$$

Situação 4 - Integral no polo do núcleon desacoplada da integral nos polos do pion e da ressonância 3-3

Desacoplaremos as integrais de uma maneira análoga àquela da situação 2.

$$I = \int d^3 f_1 \, \psi(\vec{f}_1) \frac{1}{P^2 - m^2 + i\xi} \int d^3 f_2 \, \psi^*(\vec{f}_2) \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi} \cdot \frac{1}{Q'^2 - M^2}$$

Esta integral também será resolvida no Apêndice B.4.a. No caso de considerarmos somente a onda S do dêuteron temos

$$T^{N\Delta}_{1,1} = H \, \Sigma \, F_{++}$$

$$T^{N\Delta}_{1,0} = \sqrt{1/2} \, H \, \Sigma \, F_{+-}$$

$$T^{N\Delta}_{0,0} = - H \, \Sigma \, F_{++}$$

$$T^{N\Delta}_{1,-1} = 0$$

onde

$$H = N^2 g_{N\Delta}(\Delta) \left(\sum_{j=1}^{5} C_j \, arctg \frac{|\vec{C}_N|}{\alpha_j + D_N} \right) \left[\frac{1}{R} \sum_{k=1}^{5} C_j \frac{1}{a_1(T_+ - T_-)} \, x \right.$$

$$\left. x \left(\ell n \frac{t_+ - T_+}{t_+ - T_-} + \ell n \frac{t_- - T_-}{t_- - T_+} \right) \right]$$

N, C_j e α_j são parâmetros da onda S de McGee.

$$\vec{R} = \vec{C}_{\Delta'} - \vec{C}_{\pi} \quad , \quad R = |\vec{R}|$$

$$\sigma_a = \vec{C}^2_{\Delta'} + D^2_{\Delta'} - \vec{C}^2_{\pi} - D^2_{\pi}$$

$$\sigma_b = \vec{C}^2_{\pi} + D^2_{\pi}$$

$$g = D^2_{\pi}/\vec{R}^2$$

$$h = 1 + (D^2_{\Delta'} - D^2_{\pi})/\vec{R}^2$$

$$a_1 = i \, 2 \, \alpha_j R + \sigma_a$$

$$a_2 = 2 \, \alpha_j R h + i \, 2(\alpha_j^2 + \sigma_b)$$

$$a_3 = h(\alpha_j^2 + \sigma_b) - g(\sigma_a - i \, 2 \, \alpha_j R)$$

$$T_{\pm} = - \frac{a_2}{2a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{a_2}{2a_1} \right)^2 - \frac{a_3}{a_1}}$$

$$g_{N\Delta}(\Delta) = - \frac{1}{B_\pi B_N B_{\Delta'} C_N} \; 2\pi^2 \; f_{N\Delta}(\Delta)$$

As demais quantidades já estão definidas nas situações anteriores.

Deixaremos para adicionar este diagrama àqueles do ES e ED depois de calcularmos os diagramas ΔN e $\Delta\Delta$. Conforme mostraremos no Apêndice C.3.e, a diferença entre a $F_{n'n}$ do $N\Delta$ e do ΔN está no sinal de F_{+-}.

b) *Diagrama* ΔN - A amplitude de Feynman para o diagrama c da Fig. 3.4.1 é

$$T^{\Delta N}_{\lambda'\lambda} = - \iint \frac{d^4 f_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 f_2}{(2\pi)^4} \; Tr \left[\frac{i(\not{N}' + m)}{N'^2 - m^2 + i\xi} C'_{\pi NN} \gamma_5 \frac{i(\not{P}' + m)}{P'^2 - m^2 + i\xi} \times \right.$$

$$\times A_{\pi N} \frac{i(\not{N} + m)}{N^2 - m^2 + i\xi} \frac{G\Gamma\xi_\lambda}{\sqrt{2}} \frac{i(-\not{M} + m)}{M^2 - m^2 + i\xi} C_{\pi NN} \gamma_5 \times$$

$$\left. \times \frac{i(-\not{M}' + m)}{M'^2 - m^2 + i\xi} \frac{G\Gamma'.\xi^*_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \frac{i}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi} \right]$$

Todas as quantidades do integrando já foram definidas anteriormente.

Seguindo o mesmo caminho de solução do elemento de matriz $T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda}$, eq. 3.4.1, e com o mesmo conjunto de aproximações, escrevemos

$$T^{\Delta N}_{\lambda'\lambda} = \mathfrak{f}(\Delta) \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} S_m \, \delta_{m'm} \, F_{n'n} \, I^{\substack{m'n' \\ mn}}_{\lambda'\lambda}(\Delta)$$

onde

$$F_{n'n} = \bar{u}(N', n') \, \gamma_5 (\not{P}' + m) \, A_{\pi N} \, u(N, n)$$

$$I^{\substack{m'n' \\ mn}}_{\lambda'\lambda}(\Delta) = \iint d^3 s_1 d^3 s_2 \, \psi^{*m',n'}_{\lambda'}(\vec{s}_2) \, \psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{s}_1) \frac{1}{P'^2 - m^2 + i\xi} \cdot \frac{1}{Q^2 - M^2} \, x$$

$$x \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi} \qquad (3.4.21)$$

e $\mathfrak{f}(\Delta)$ continua dado pela eq. 3.4.8.

De acordo com a situação tratada, a integral da eq. 3.4.21 terá uma solução idêntica àquela da 3.4.5 na situação correspondente. Por um lado, isto está relacionado ao fato de que, nessas condições, s_1 e s_2 são independentes e que, por outro lado, a reação πd é elástica. Então, para cada situação, $P^2 = P'^2$ e $Q^2 = Q'^2$ e a única diferença entre os diagramas está na definição do $F_{n'n}$ correspondente.

De acordo com o Apêndice C.3.e

$$F^{\Delta N}_{++} = |\vec{\Delta}| \, A + \left(\frac{3 s_{\pi d} - \mu^2 - 12 m^2}{4} \right) \frac{|\vec{\Delta}|}{2m} \, B \qquad (3.4.22)$$

$$F^{\Delta N}_{+-} = - i \frac{d_o}{2m} \, |\vec{S}| \, A \qquad (3.4.23)$$

A composição de isospin é aquela da eq. 3.4.11 do diagrama $N\Delta$.

Então, e de acordo com a situação considerada para a solução da eq. 3.4.21, os elementos de matriz $T^{\Delta N}_{\lambda',\lambda}$ são aqueles do diagrama $N\Delta$ porém com o $F_{++}(F_{+-})$ dado pela eq. 3.4.22 (3.4.23).

Se em vez da amplitude de Dirac tivéssemos o propagador de Rarita-Schwinger para a partícula de spin 3/2 teríamos

$$F_{n'n} = C'_{\pi NN}\, C^2_{\pi N\Delta} \frac{1}{p'^2 - m^2 + i\xi} \cdot \frac{1}{Q^2 - M^2}\, \bar{u}(N',n')\gamma_5(\not{P}' +$$

$$+ m)\; k^{\nu}_{i}\, S_{\nu\lambda}(Q)\; k^{\lambda} u(N,n)$$

No Apêndice C.3.f também calcularemos este $F_{n'n}$.

c) *Diagrama* $\Delta\Delta$ - A amplitude de Feynman para o diagrama d da Fig. 3.4.1 é

$$T^{\Delta\Delta}_{\lambda',\lambda} = - \iint \frac{d^4 \delta_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^2 \delta_2}{(2\pi)^4}\; Tr\left[\frac{i(\not{N}'+m)}{N'^2-m^2+i\xi}\; C_{\pi N\Delta}\; k'^{\nu} P_{\nu\alpha}(Q')\; x \right.$$

$$x\; C_{\pi\Delta\Delta}\; \gamma_5 P^{\alpha\mu}(Q)\; C_{\pi N\Delta}\; k_{\mu} \frac{i(\not{N}+m)}{N^2-m^2+i\xi} \quad \frac{G\Gamma.\xi_{\lambda}}{\sqrt{2}} \quad x$$

$$x\; \frac{i(-\not{M}+m)}{M^2-m^2+i\xi}\; C_{\pi NN}\; \gamma_5\; \frac{i(-\not{M}'+m)}{M'^2-m^2+i\xi} \quad \frac{G\Gamma'.\xi^{*}_{\lambda'}}{\sqrt{2}} \quad x$$

$$\left. x\; \frac{i}{k^2_i-\mu^2+i\xi} \right]$$

Exceto por $C_{\pi\Delta\Delta}$, que é a constante de acoplamento $\pi\Delta\Delta$, as demais quantidades já foram definidas. Para esta constante de acoplamento tomamos o valor dado por Arndt et al(79), $\frac{C^2_{\pi\Delta\Delta}}{4\pi} = 20$. Para efeito de notação chamaremos a ressonância 3-3 com o momento $Q(Q')$ de partícula $Q(Q')$.

Com o mesmo conjunto de aproximações do diagrama $N\Delta$ porém, tomando explicitamente dois propagadores de Rarita-Shwinger, escrevemos

$$T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda} = \delta_{\Delta\Delta}(\Delta) \sum_{\substack{m \\ m'}} \sum_{\substack{n \\ n'}} S_m \, \delta_{m'm} \, F_{n'n} \, I^{\substack{m'n' \\ m\,n}}_{\lambda'\lambda}(\Delta)$$

onde

$$\delta_{\Delta\Delta}(\Delta) = -iC_{\pi NN} \, C^2_{\pi N\Delta} \, C_{\pi\Delta\Delta} \frac{1}{8\pi m} \cdot \frac{|\vec{\Delta}|}{m} \cdot \frac{4m^4}{m^2+\vec{\Delta}^2/4} \cdot \frac{1}{2\pi^2}$$

$$F_{n'n} = \bar{u}(N',n') \, k'^{\nu} S_{\nu\alpha}(Q') \, \gamma_5 \, S^{\alpha\mu}(Q) \, k_{\mu} u(N,n)$$

e

$$I^{\substack{m'n' \\ m\,n}}_{\lambda'\lambda}(\Delta) = \iint d^3\delta_1 d^3\delta_2 \psi^{*\,m',n'}_{\lambda'}(\vec{\delta}_2)\psi^{m,n}_{\lambda}(\vec{\delta}_1) \frac{1}{Q^2-M^2} \cdot \frac{1}{Q'^2-M^2} \cdot \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi} \tag{3.4.24}$$

Seguindo o esquema dos diagramas $N\Delta$ e ΔN, resolveremos esta última integral também de quatro maneiras diferentes e equivalentes àquelas dos diagramas $N\Delta$ e ΔN.

Situação 1 - Integração do polo do pion

Os demais polos são excluídos do integrando da eq. 3.4.24 para $\vec{\delta}_1 = \vec{\delta}_2 = \vec{0}$.

Os $T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda}$ são aqueles da situação 1 do diagrama $N\Delta$ porém com

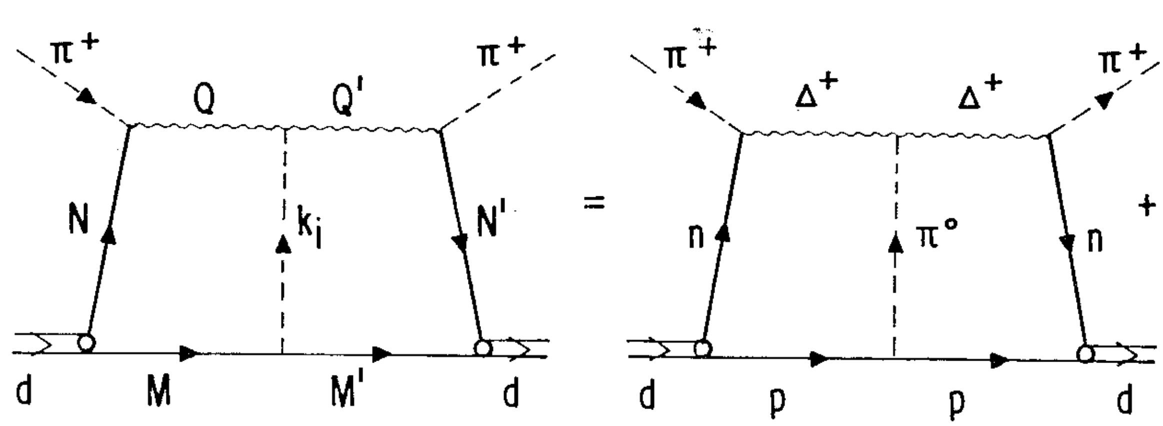
$$g_{\Delta\Delta}(\Delta) = \frac{1}{(Q^2-M^2)^2} \; 2\pi^2 \; \delta_{\Delta\Delta}(\Delta)$$

$$F^{\Delta\Delta}_{++} = -\frac{1}{18}\,|\vec{\Delta}|\,\beta_1 + \frac{1}{18}\,\frac{|\vec{\Delta}|}{m}\,\beta_2$$

$$F^{\Delta\Delta}_{+-} = i\,\frac{1}{18}\,\frac{d_0}{m}\,|\vec{S}|\,\beta_1$$

Os $\beta_i (i=1,2)$ deixamos, por conveniência, no Apêndice C.3.h.

Aqui, o Σ refere-se aos seguintes, e possíveis, estados de carga para as partículas intermediárias, Fig. 3.4.4.



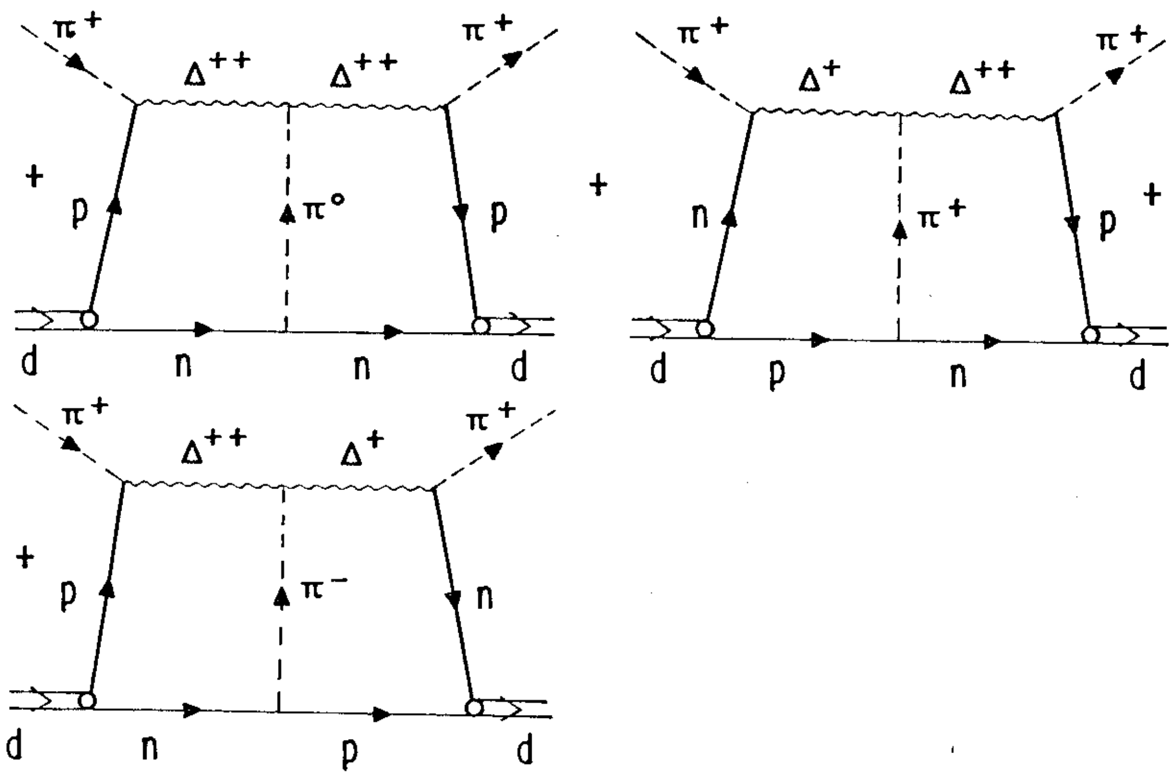


Figura 3.4.4 - CT (ΔΔ) para o espalhamento $\pi^+ d \to \pi^+ d$

A decomposição do isospin correspondente é (ver Apêndice D.4.c):

$$\Sigma F = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}\, F$$

Situação 2 - Integração do polo da partícula Q e do polo do pion independentemente

O polo da partícula Q' é excluído para $\vec{s}_2 = \vec{0}$.

O desacoplamento das integrais se dá como na situação 2 do diagrama $N\Delta$.

Os $T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda}$ são aqueles da situação 2 do diagrama $N\Delta$ porém com as substituições

$$\begin{aligned} B_N &\rightarrow B_\Delta \\ \vec{C}_N &\rightarrow \vec{C}_\Delta \\ D_N &\rightarrow D_\Delta \end{aligned} \qquad (3.4.25)$$

nas eqs. 3.4.16, 18 e 19 e que nos leva a uma mudança do índice N para o Δ nestas equações.

Pelo Apêndice A.3.c

$$B_\Delta = B_N$$

$$\vec{C}_\Delta = \vec{C}_N$$

$$D^2_\Delta = \frac{M^2 - s_{\pi N}}{B_\Delta} - \vec{C}^2_\Delta$$

O ΣF e o $F_{++}(F_{+-})$ são aqueles da situação 1. Aqui

$$g_{\Delta\Delta}(\Delta) = \frac{1}{Q^2 - M^2}\; 2\pi^2\; f_{\Delta\Delta}(\Delta)$$

Situação 3 - Integrais nos polos das partículas Q e Q', desacopladas

Com a exclusão do polo do pion para $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{0}$, o desacoplamento é automático.

Os $T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda}$ são aqueles da situação 3 do diagrama $N\Delta$ porém com F_{++}, F_{+-} e ΣF dados na situação 1 do diagrama $\Delta\Delta$. Levar em conta também as substituições dadas na eq. 3.4.25 para as eqs. 3.14.16, 18 e 19. Aqui

$$g_{\Delta\Delta}(\Delta) = \frac{1}{k_i^2-\mu^2}\, 2\pi^2\, f_{\Delta\Delta}(\Delta)$$

Situação 4 - Integral do polo da partícula Q desacoplada da integral do polo do píon e do polo da partícula Q'

As integrais são desacopladas segunda a prescrição da situação 2.

Os $T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda}$ são aqueles da situação 4 do diagrama $N\Delta$ levando-se em conta as substituições dadas na eq. 3.4.25 e os F_{++}, F_{+-} e ΣF para o diagrama $\Delta\Delta$. Agora

$$g_{\Delta\Delta}(\Delta) = -\, 2\pi^2\, f_{\Delta\Delta}(\Delta)$$

Finalizando, as curvas na Fig. 3.4.5 correspondem a seguinte seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma^{CT}}{d\Omega} = \frac{N}{3} \sum_{\lambda'\lambda} \left| T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} + T^{\Delta N}_{\lambda'\lambda} + T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda} \right|^2$$

nas quatro situações consideradas para I (Δ).

As curvas da Fig. 3.4.6 correspondem a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{3} \sum_{\lambda'\lambda} \left| T^{S}_{\lambda'\lambda} + T^{D}_{\lambda'\lambda} + T^{N\Delta}_{\lambda'\lambda} + T^{\Delta N}_{\lambda'\lambda} + T^{\Delta\Delta}_{\lambda'\lambda} \right|^2$$

naquelas situações da Fig. 3.4.5 para I (Δ) da corrente de troca.

As curvas da Fig.3.4.6 foram obtidas tomando-se a amplitude $F_{n'n}$ dos diagramas da corrente de troca com o propagador de Rarita-Schwinger.

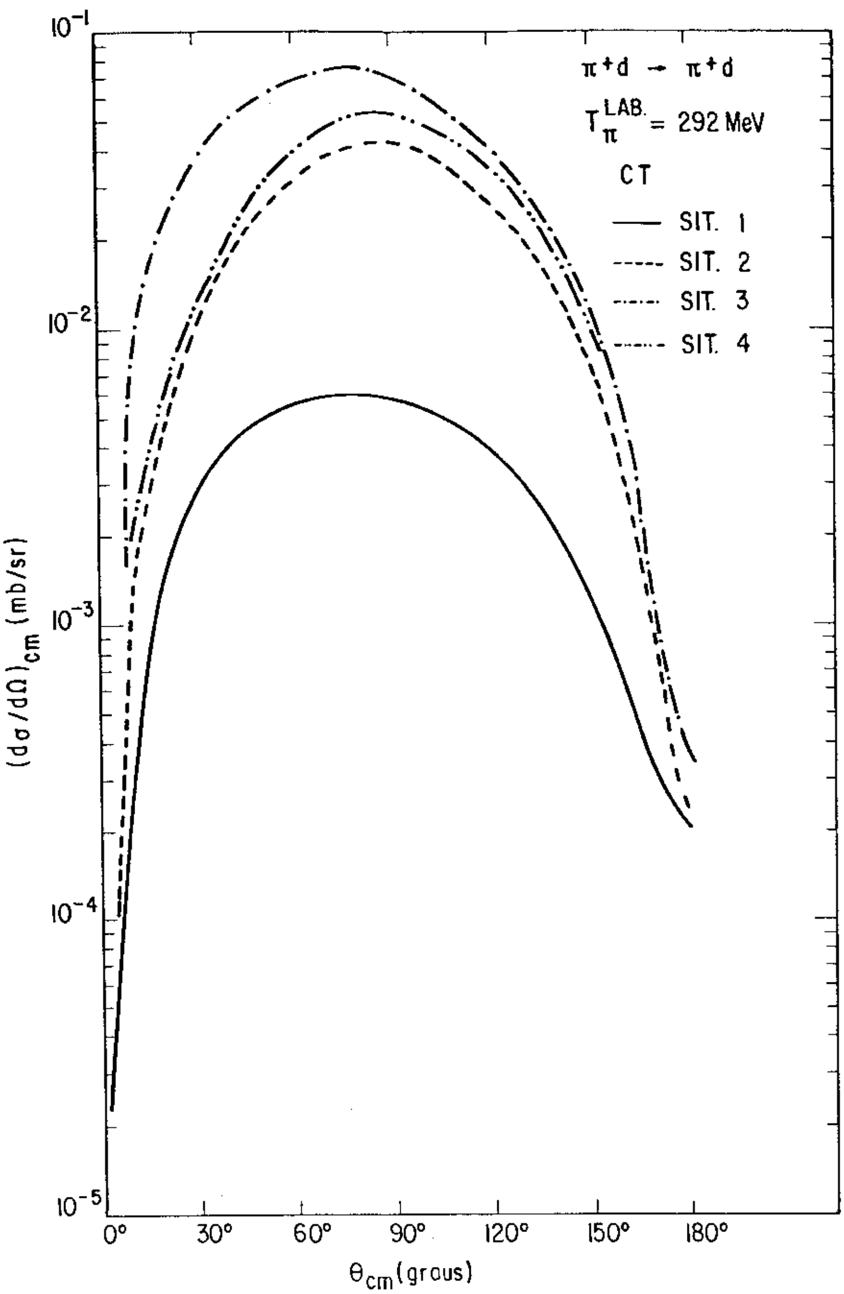


Figura 3.4.5 - Seção de choque diferencial da nossa CT na reação $\pi^+ d \longrightarrow \pi^+ d$ para $T_\pi = 292$ Mev.

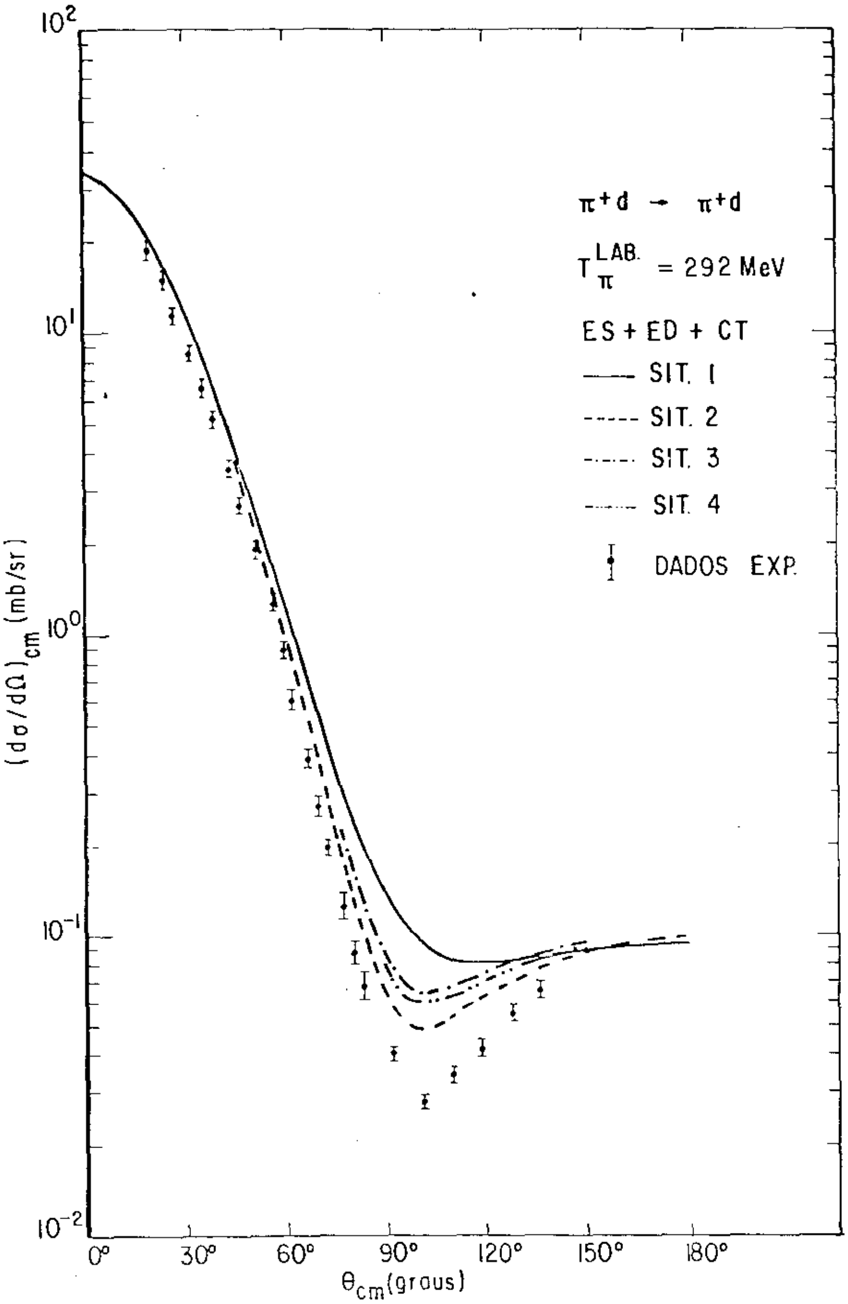


Figura 3.4.6 - O mesmo da Fig. 3.2.2 agora somando-se ao ES o ED e a CT.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Antes de fazermos a comparação entre o nosso modelo e os dados experimentais é bom salientar que o objetivo principal deste trabalho é avaliar a contribuição do mecanismo de corrente de troca (*CT*) diante das contribuições dos espalhamentos simples e duplo (*ES* e *ED*) através do uso de um conjunto de aproximações comuns a todos os diagramas envolvidos no cálculo da seção de choque diferencial da reação $\pi^+ d \to \pi^+ d$ (Fig. 3.1.1). Usamos um modelo sem refinamentos para descrever o *ES*, que é o termo principal, e o *ED*, que é sua primeira correção. Como conseqüência, os nossos resultados teóricos não podem reproduzir satisfatoriamente os dados experimentais que exigem modelos mais sofisticados para o *ES*. O importante, no entanto, é que, preservando-se o mesmo conjunto de aproximações para cada termo da amplitude total, tem-se condições de estimar a importância relativa dos termos na descrição do processo.

Nas figs. 3.2.2, 3.3.2 e 3.4.5 apresentamos, respectivamente, a seção de choque diferencial dos mecanismos, *ES*, *ED* e *CT* (nas quatro situações descritas no texto) calculados isoladamente para T_π = 292 Mev.

A relevância do *ES* quando comparado aos *ED* e *CT* é incontestável. Ele é dominante, conforme mostra sua seção de choque diferencial, para qualquer valor do ângulo de espalhamento Θ.

A seção de choque diferencial do *ED* é máxima para frente e diminui à medida que o ângulo Θ aumenta. A soma deste mecanismo ao *ES* nos dá uma seção de choque diferencial, nesta energia, ligeiramente diferente daquela do *ES* (Fig. 3.3.3).

O mecanismo de *CT* apresenta uma seção de choque diferencial que é nula para frente, assume seu valor máximo para Θ 90° e depois decresce rapidamente até 180° (Fig. 3.4.5). As diferentes curvas apresentadas nesta figura ilustram as quatro situações das integrais de circuito (Eqs. 3.4.5 e 3 4.24). Pode-se ver que, salvo a Situação 1, onde somente um polo (o do pion intermediário) é integrado, as demais situações dão resultados comparáveis, indicando que as integrais estão calculadas com boa aproximação. O comportamento da seção de choque diferencial na Fig. 3.4.5 pode ser entendido da seguinte maneira: a amplitude de *CT* contém em fator a amplitude de spin $G_{m'm}$ (Eq. 3.4.6) que é proporcional ao momento transferido $|\vec{\Delta}|$ e que sendo zero para frente provoca a anulação da amplitude nesta região. Por outro lado, e partindo do fato que as integrais de circuito dos diagramas $N\Delta$ e ΔN (Fig. 3.4.1 b e c) são idênticas (Eqs. 3.4.5, 3.4.21), a amplitude de spin $F_{n'n}$ correspondente à linha fermiônica superior dos diagrama da *CT* tem a parte de spin não-flip (F_{++}) se anulando para os diagramas $N\Delta$ e ΔN e é pequena para o diagrama $\Delta\Delta$ (Fig. 3.4.1 d). Já as amplitudes de spin flip (F_{+-}) correspondentes são proporcionais ao vetor $\vec{S}$ que é normal a $\vec{\Delta}$ (Fig. A.2.1) e se anulam para $\Theta = 180^{\circ}$. Partindo daí entende-se que a contribuição de *CT* se dê essencialmente na região do mínimo ($\Theta \simeq 90^{\circ}$) como mostrado na Fig. 3.4.5.

É importante notar que as curvas da Fig. 3.4.5 foram obtidas para o valor fenomenológico da constante de acoplamento

$C^2_{\pi\Delta\Delta}/4\pi = 20$, de Arndt et al (79). Alguns trabalhos teóricos (mesma referência) dão para esta constante de acoplamento um valor em torno de $C^2_{\pi\Delta\Delta}/4\pi = 130$. Tomando-se este último valor para a constante de acoplamento, a contribuição de *CT* é aumentada de somente 10% nos ângulos superiores a $\Theta = 90^o$ muito embora a contribuição do diagrama $\Delta\Delta$ (Fig. 3.4.1 d) aumente de um fator 6. Na seção de choque diferencial correspondente à soma coerente *ES + ED + CT* (Fig. 3.4.6) esta variação de $C_{\pi\Delta\Delta}$ induz um aumento de 25% na região do mínimo e de 10% para trás.

Comparando-se as Figs. 3.3.2 e 3.4.5 (a partir da Situação 2) observa-se que o *ED* é dominante até $\Theta \simeq 60^o$ e a partir daí a *CT* assume maior importância pois sua seção de choque cai mais lentamente que aquela do *ED* até $\Theta \sim 150^o$ quando ambos os mecanismos passam a ter a mesma ordem de grandeza. É lícito observar aqui que a seção de choque diferencial dos *ES* e *ED* contêm as ondas *S* e *D* do dêuteron enquanto que a seção de choque diferencial da *CT* só contém a onda *S*, muito embora tenhamos incluído nos nossos cálculos teóricos da *CT* (até a Situação 3) também a onda *D*. Não obstante, verificamos numericamente que a inclusão desta onda altera em quase nada nossos resultados.

Finalmente, nas Fig. 4.1, 2, 3 e 4 mostramos nossos resultados teóricos para pions incidentes com energias de 181, 217, 254 e, novamente, 292 Mev. As curvas em linha cheia correspondem às contribuições relativas aos *ES + ED*, que são os mecanismos usualmente considerados e as curvas em linha tracejada representam as contribuições dos termos de *CT* (Situação 2) quando somados coerentemente aos *ES* e *ED*. Como podemos observar as *CT* contribuem sempre no sentido de melhorar o acordo com os resultados experimentais. Embora a melhora não seja muito significativa para ângulos próximos de 180°, ela é, no entanto, bastante importante na região do mínimo ($\theta \simeq 100^{\circ}$). Entretanto como dissemos acima, seria necessário um modelo melhor para os *ES* e *ED* (como, por exemplo, não excluir a amplitude de spin da integral de circuito) para reproduzirmos, desde a região de pequenos ângulos, os resultados experimentais.

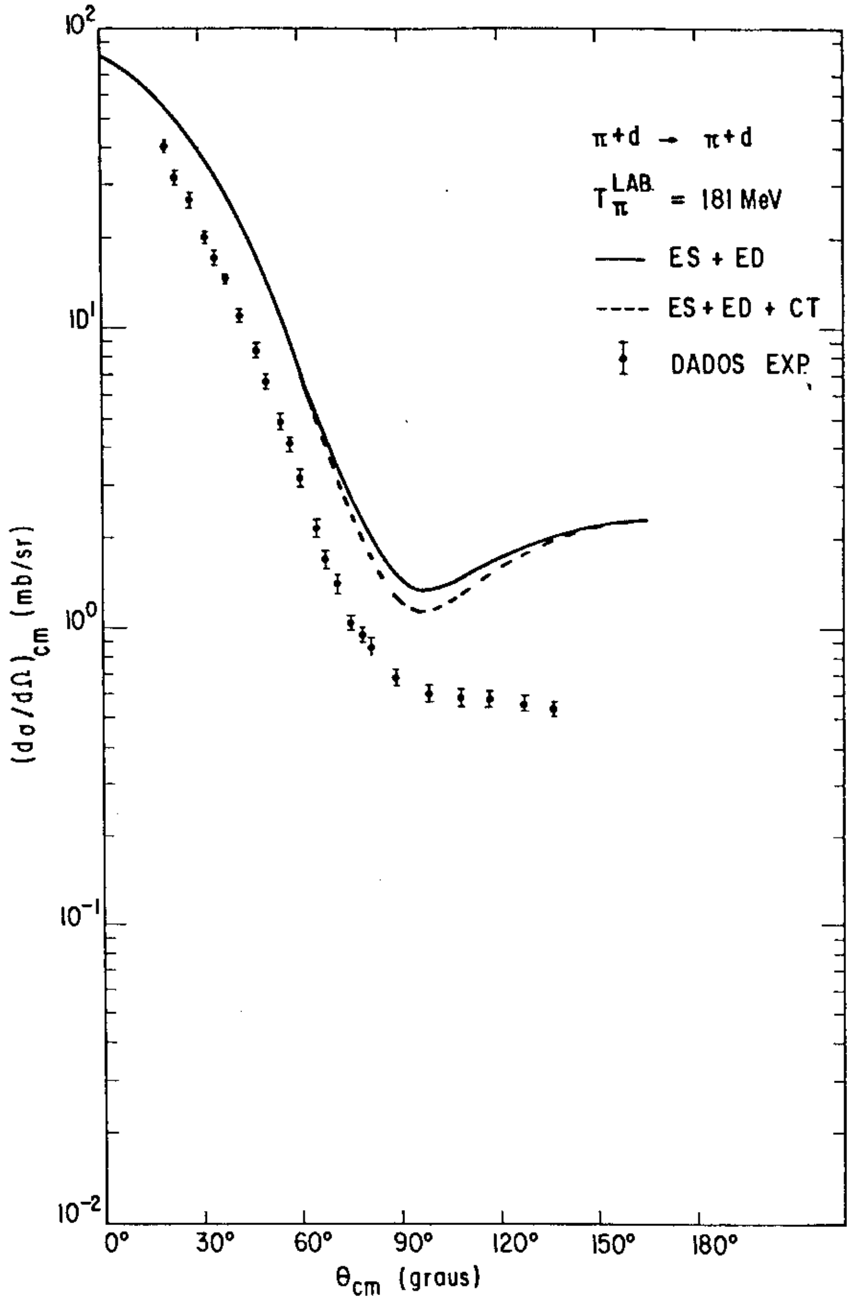


Figura 4.1 - *O mesmo da Fig. 3.4.6 (Situação 2) para* T_{π} = *181 Mev*

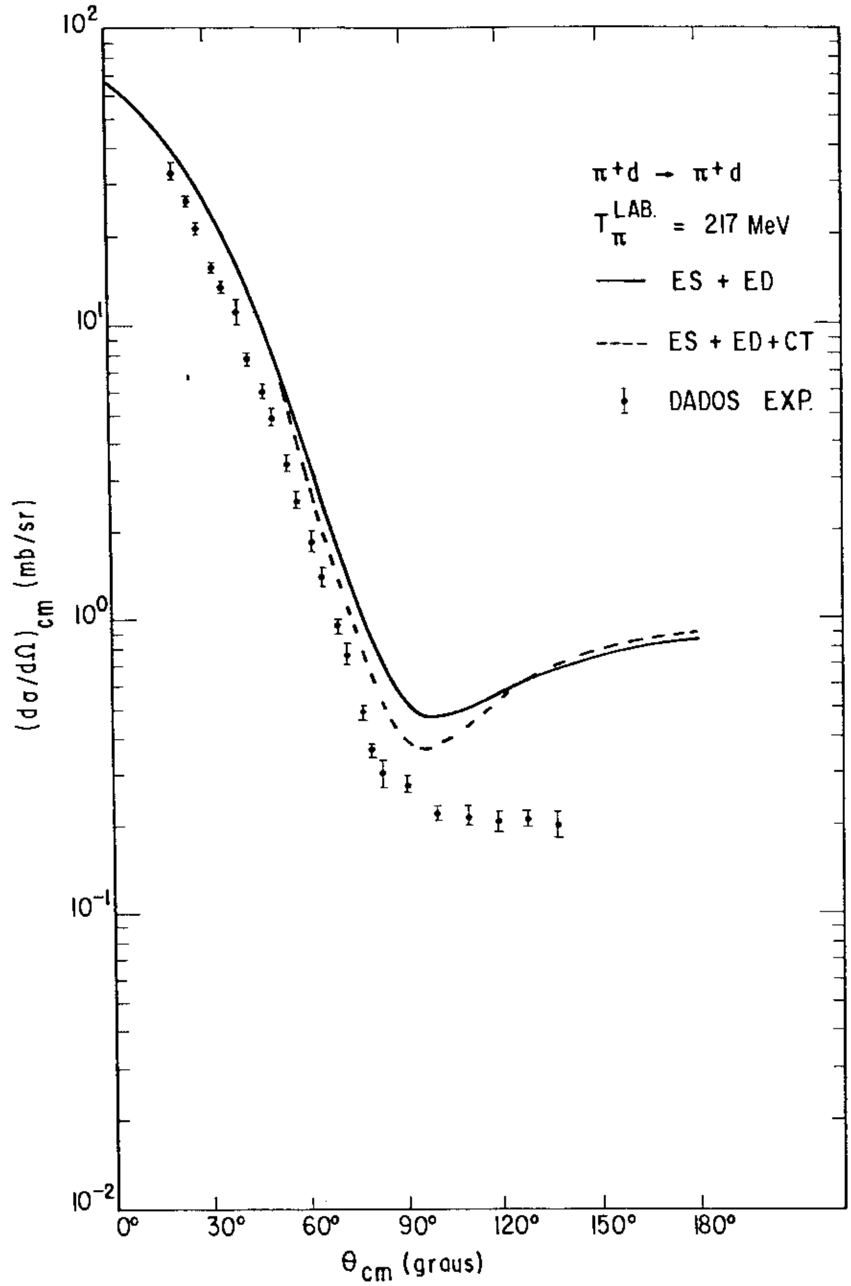


Figura 4.2 - Idem para T_π = 217 Mev

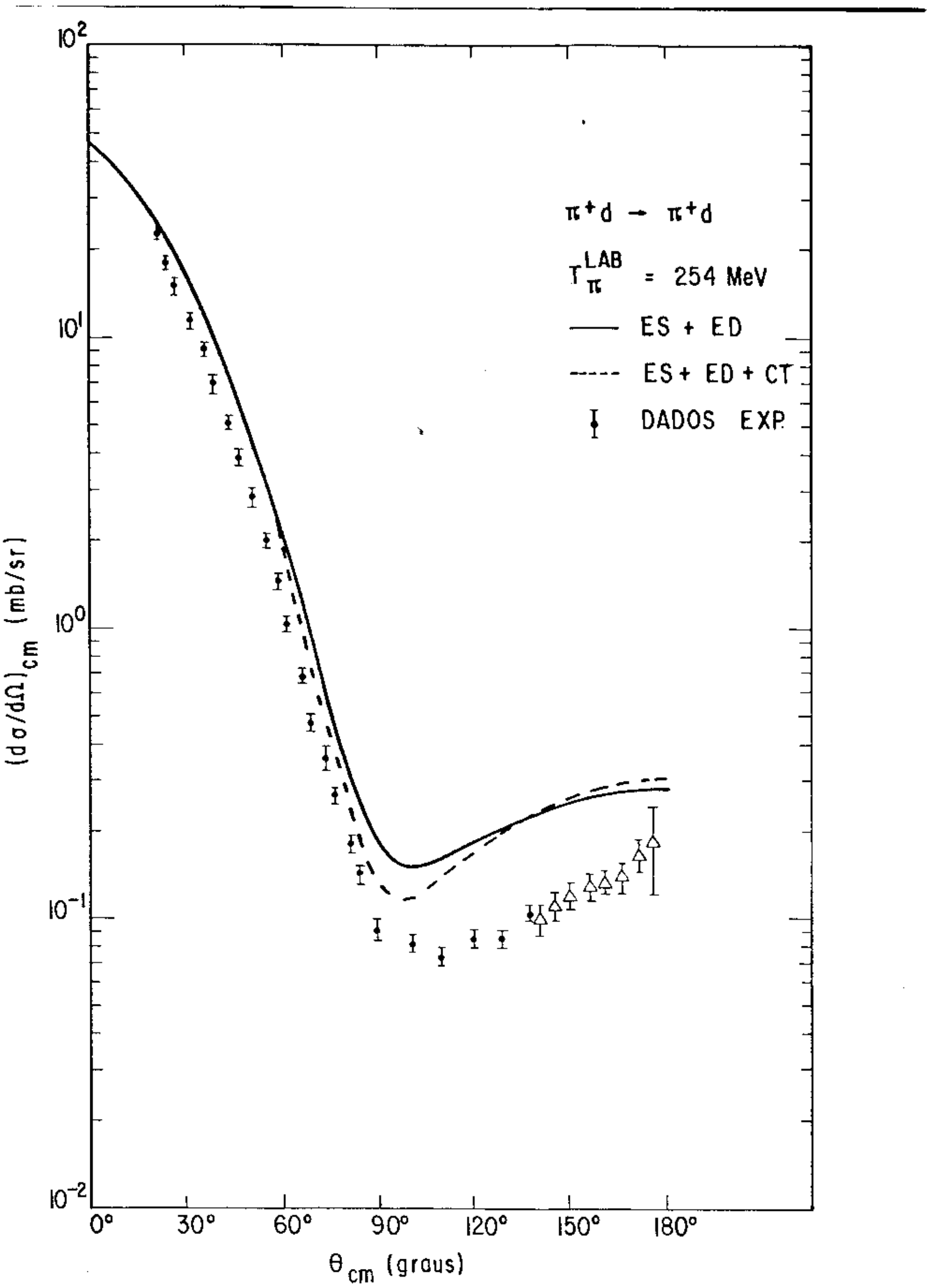


Figura 4.3 - *Idem para* T_π = 254 *Mev*

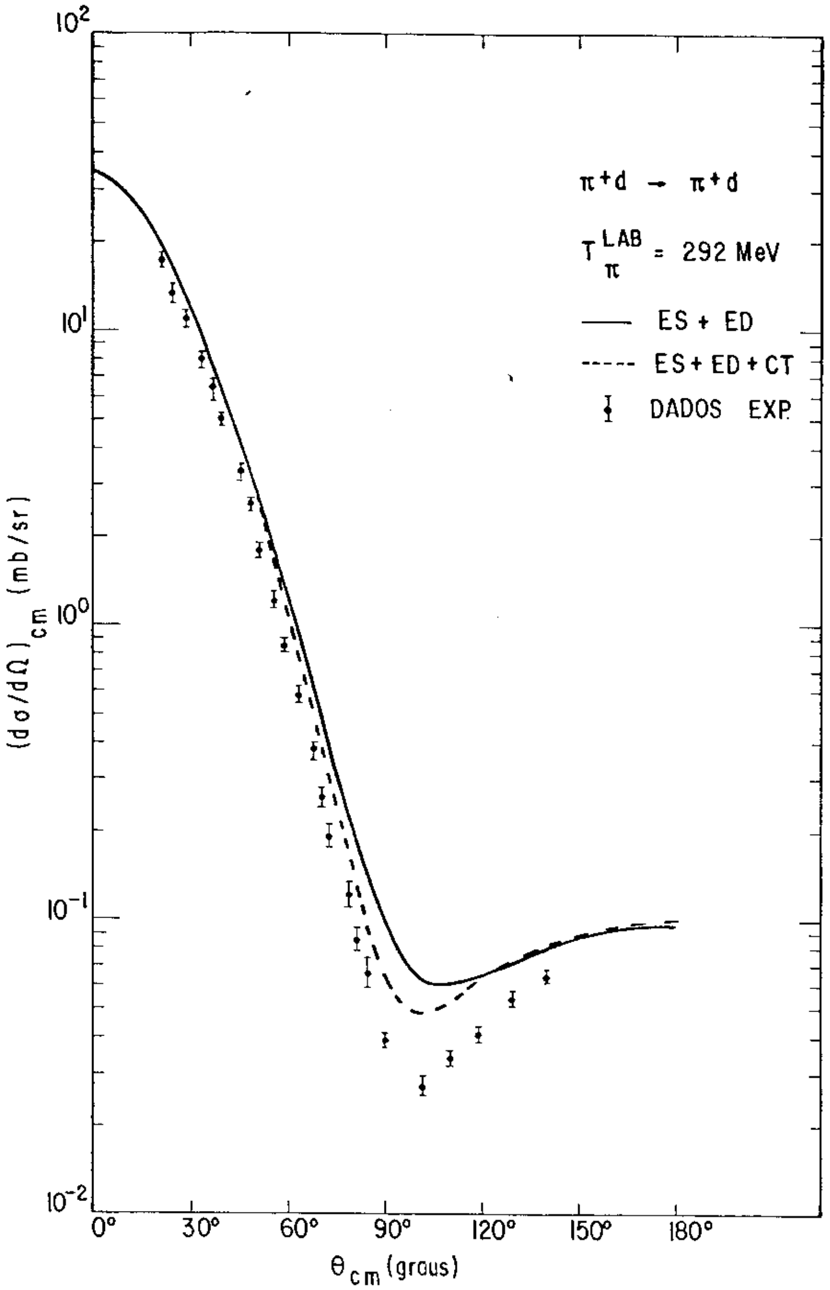


Figura 4.4 - *Idem para* T_π = *292 Mev*

APÊNDICE A

RELAÇÕES CINEMÁTICAS PARA OS ESPALHAMENTOS SIMPLES, DUPLO E CORRENTE DE TROCA

A.1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice usaremos o referencial do muro de tijolos (Breit) para escrever as relações cinemáticas da cada um dos espalhamentos considerados neste trabalho. A cinemática referente à parte de spin será feita, para cada diagrama de espalhamento, baseada na aproximação de exclusão das amplitudes πN das integrais nas variáveis de integração, Bertocchi e Capella (44); Carlson (50) e Alvear (80). Esta exclusão é feita para um valor da variável de integração que tem à ver com a condição imposta de coincidência entre o referencial da sub-reação πN e aquele da reação πd. Também estará relacionado, como falamos no Cap. III, ao valor da variável de integração que maximiza a função de onda do dêuteron. Na parte endereçada ao cálculo das integrais (onde os polos das partículas intermediárias estão presentes), a cinemática será feita levando-se em conta a variável de integração nos quadri-momentos das partículas intermediárias.

Na primeira parte deste Apêndice escreveremos a cinemática no referencial do muro de tijolos para as reações $ab \to ab$ e $ab \to a'b$ e a relacionaremos com aquela no referencial de centro de massa. Na segunda parte partiremos para o objetivo do Apêndice.

A.2 - REFERENCIAL DO MURO DE TIJOLOS

a) *Espalhamento* $\pi X \to \pi X$

Consideraremos aqui o espalhamento de um pion por uma partícula X que pode ser, conforme o caso, um núcleon ou um dêuteron.

Seja $k(k')$ e $X(X')$, respectivamente, o quadri-momento inicial (final) do pion e da partícula X. O referencial do muro de tijolos está definido pela seguinte condição

$$\vec{X} + \vec{X}' = 0 \tag{A.2.1}$$

o que implica em, para partículas de mesma massa,

$$X_0 = X'_0$$

No que segue, caracterizaremos a massa da partícula $X(X')$ por M e a massa do $\pi(\pi')$ por μ. O índice * sobre uma grandeza nos dirá que sua definição é no referencial do centro de massa $(C.M.)$. A ausência deste índice nos dirá que a grandeza está definida no referencial do muro do tijolos $(M.T.)$.

Definindo os quadri-momentos

$$S = k + X = k' + X' \tag{A.2.2}$$

$$K = \frac{k + k'}{2}$$

obtemos

$$S^2 = s$$

$$K^2 = \mu^2 - \frac{t}{4}$$

onde s é a energia ao quadrado da reção πX no $C.M$ e t é o momento transferido:

$$t = (k' - k)^2$$

Ainda por definição tomaremos

$$\vec{X} = \vec{\Delta}$$

$$\vec{X}' = - \vec{\Delta}$$

Com isto os quadri-momentos das partículas externas serão dados por

$$k = (k_o \, , \, \vec{S} - \vec{\Delta})$$

$$k' = (k_o \, , \, \vec{S} + \vec{\Delta})$$

$$X = (X_o \, , \, \vec{\Delta})$$

$$X' = (X'_o \, , \, - \vec{\Delta})$$

e

$$K = (k_o \, , \, \vec{S})$$

Na fig. A.2.1 representamos o referencial do muro de tijolos para a reação $\pi X \to \pi X$

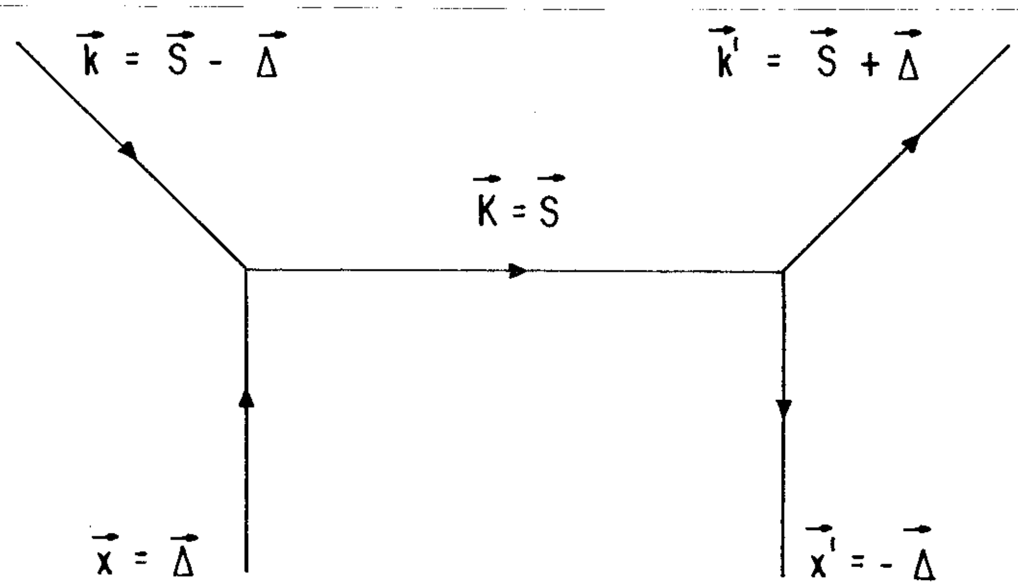


Figura A.2.1 - Referencial do muro de tijolos para a reação elástica $\pi x \to \pi x$. As letras representam os tri-momentos das partículas.

Partindo das relações acima verificamos que

$$\vec{S} \cdot \vec{\Delta} = 0$$

$$\vec{\Delta}^2 = - t/4$$

Como

$$t = -2\vec{k}^{*}(1 - \cos\Theta^{*}) = - 4\vec{k}^{*2} \operatorname{sen}^2 \frac{\Theta^*}{2}$$

então

$$\vec{\Delta}^2 = \vec{k}^{*2} \operatorname{sen}^2 \Theta^{*}/2 \qquad \text{(A.2.3)}$$

Temos ainda

$$X_0 = \sqrt{M^2 + \vec{\Delta}^2} \qquad \text{(A.2.4)}$$

$$k_0 = \frac{s - u}{4X_0}$$

onde

$$u = (k - x')^2$$

Pela eq. A.2.2

$$S_0 = k_0 + X_0 = \frac{s+M-\mu^2}{2X_0} = \frac{\sqrt{s}}{X_0} X^* \qquad \text{(A.2.5)}$$

$$\vec{S}^2 = S_0^2 - s$$

Pelas eqs. A.2.3, A.2.4 e A.2.5

$$\vec{S}^2 = \frac{s\,\vec{k}^*}{X_0^2} \cos^2 \frac{\Theta^*}{2}$$

$$\vec{k}^2 = \vec{k}'^2 = \vec{S}^2 + \vec{\Delta}^2$$

Pela fig. A.2.1

$$\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{|\vec{S}|}{\sqrt{\vec{S}^2 + \vec{\Delta}^2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\Theta}{2} = \frac{|\vec{\Delta}|}{\sqrt{\vec{S}^2 + \vec{\Delta}^2}}$$

b) *Espalhamento* $\pi X \rightarrow \pi' X$

Aqui as massas das partículas X serão iguais e as massas dos pions serão diferentes.

O referencial do muro de tijolos continuará sendo definido conforme a eq. A.1.1 e as definições de S, K e $\vec{\Delta}$ continuam como as do ítem anterior, porém com

$$K^2 = \frac{\mu^2 + \mu'^2}{2} - \frac{t}{4}$$

onde μ' é a massa do pion π'.

Ao contrário do espalhamento elástico, os vetores $\vec{S}$ e $\vec{\Delta}$ não são mais ortogonais. Agora

$$\vec{S} \cdot \vec{\Delta} = \frac{\mu^2 - \mu'^2}{2}$$

As demais relações envolvendo energias e momentos definidos no referencial de muro de tijolos são

$$\vec{\Delta}^2 = -\frac{t}{4}$$

$$X_o = X'_o = \sqrt{M^2 + \vec{\Delta}^2}$$

$$k_o = k'_o = \frac{s - u}{4X_o}$$

$$S_o = \frac{S + M - \dfrac{\mu^2 - \mu'^2}{2}}{2X_o}$$

$$\vec{S}^2 = S_o^2 - s$$

$$\vec{k}^2 = \vec{S}^2 + \vec{\Delta}^2 - \frac{\mu^2 - \mu'^2}{2} = k_o^2 - \mu^2$$

$$\vec{k}'^2 = \vec{S}^2 + \vec{\Delta}^2 + \frac{\mu^2 - \mu'^2}{2} = k_o^2 - \mu'^2$$

A.3 - RELAÇÕES CINEMÁTICAS PARA CADA DIAGRAMA CALCULADO

a) Espalhamento Simples (ES)

Na Fig. A.3.1 representamos o espalhamento simples para a reação elástica $\pi^+ d \to \pi^+ d$.

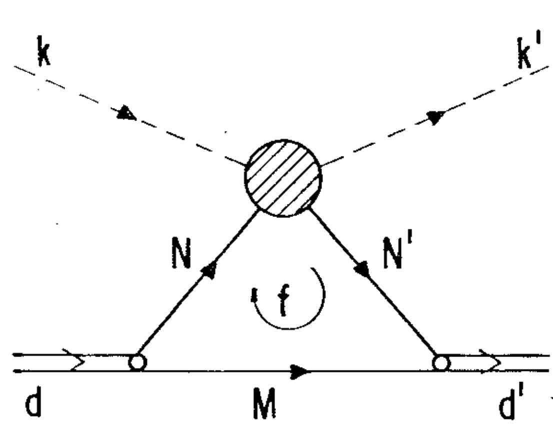


Figura A.3.1 - A legenda é aquela da figura 3.1.1. A bola tracejada representa a interação πN.

a.1) Cinemática para a amplitude de spin

Apesar dos quadri-momentos das partículas externas estarem bem definidos, aqueles referentes as partículas internas dependem de uma variável livre ζ, a variável de integração. Precisamos então saber como defini-la para com isto escrevermos os invariantes relativísticos da sub-reação πN em função daqueles da reação πd. No caso particular do *ES* o problema se reduz a definição do quadri-momento M (ver Fig. A.3.1) do núcleon espectador.

De acordo com a Fig. A.3.1

$$s_{\pi N} = (d+k-M)^2 = s_{\pi d} + M_0^2 - 2S_0M_0 - \vec{M}^2 + 2\vec{S}.\vec{M}$$

$$N^2 = (d-M)^2 = 4m^2 + M_0^2 - 2d_0M_0 - \vec{M}^2 + 2\vec{d}.\vec{M}$$

$$N'^2 = (d'-M)^2 = 4m^2 + M_0^2 - 2d_0'M_0 - \vec{M}^2 + 2\vec{d}'.\vec{M}$$

$$t_{\pi N} = t_{\pi d} = (k'-k)^2 = (d'-d)^2$$

onde

$$S = k + d = k' + d'$$

$$s_{\pi d} = S^2$$

e m é a massa do núcleon.

A dificuldade associada com a escolha do quadri-momento M se divide em dois problemas distintos e de naturezas diferentes: *a*) a escolha do tri-vetor $\vec{M}$, o que equivale a escolha do tri-momentum $\vec{\delta}$ do dêuteron inicial ou final e, *b*) a escolha da componente de energia M_o, o que corresponde a uma hipótese (ver Apêndice D-2) sobre a função de onda relativística do dêuteron ou mais particularmente, sobre sua dependência com δ_o.

O primeiro problema levantado acima pode ser contornado se efetuarmos a integral em $\vec{\delta}$. No entanto, podemos mostrar aqui que o referencial do muro de tijolos nos permite estabelecer, de uma maneira simples, os tri-momentos dos núcleons internos. Na realidade, como veremos a seguir, esta escolha direta se dá essencialmente para o espalhamento simples. Para os demais espalhamentos tal escolha é menos natural.

A eq. A.2.1, que define o referencial *M.T.*, sugere que tomemos para o núcleon espectador M seu tri-momento $\vec{M}$ igual a zero. Isto não é somente uma escolha simétrica para os dois dêuterons. Ela torna também o referencial *M.T.* da reação πN idêntico aquele da reação πd. Em particular, esta identidade faz com que os sistemas de referência e o eixo de quantização para o momento angular sejam os mesmos para os dêuterons, para o acoplamento L-S dos núcleons nos dêuterons e para os spins dos núcleons na reação πN. Na ref. Levy (81) isto é discutido detalhadamente.

Então, para o *ES*, quando nos referirmos a spin teremos

$$\vec{M} = \vec{0} \tag{A.3.1}$$

logo

$$s_{\pi N} = s_{\pi d} + M_o^2 - S_o M_o$$

$$N^2 = N'^2 = 4m^2 + M_o^2 - 2d_o M_o$$

$$t_{\pi N} = t_{\pi d}$$

$$S_o = k_o + d_o$$

$$d_o = \sqrt{4m^2 + \vec{\Delta}^2}$$

onde k_o é a energia do pion no referencial $M.T.$ e $\vec{\Delta}(\vec{\Delta}')$ é o tri-momento do dêuteron inicial (final) neste referencial.

Com respeito a escolha do M_o, a opção será colocar o núcleon espectador M na camada de massa. No Apêncide D-2 mostramos como isto implica numa hipótese sobre a função de onda relativística do dêuteron.

$$M_o^2 = \vec{M}^2 + m^2$$

Pela eq. A.2.1

$$M_o = m$$

Então os *invariantes da reação* πN são dados por

$$s_{\pi N} = s_{\pi d} + m^2 - 2mS_o$$

$$N^2 = N'^2 = 5m^2 - 2md_o$$

$$t_{\pi N} = t_{\pi d}$$

Com a eq. A.3.1 para o tri-momento do núcleon espectador, *a exclusão da amplitude* πN da integral na variável de integração se dá para

$$\vec{f} = \vec{\Delta}/2$$

logo, para as partículas internas,

$$M = (d_0/2\ ,\ 0)$$

$$N = (d_0/2\ ,\ \vec{\Delta})$$

$$N' = (d_0/2\ ,\ -\vec{\Delta})$$

a.2) Cinemática para a integral em $\vec{f}$

Para a *integral em* $\vec{f}$, os quadri-momentos das partículas são definidos a partir da conservação do momento-energia em cada vértice

$$d = M + N$$

$$d' = M' + N'$$

Como

$$d = (d_0\ ,\ \vec{\Delta})$$

$$d' = (d_0\ ,\ -\vec{\Delta})$$

e

$$M \equiv \frac{d}{2} - f$$

então

$$M = M' = \left(\frac{d_0}{2}\ ,\ \frac{\vec{\Delta}}{2} - \vec{f} \right)$$

$$N = \left(\frac{d_o}{2} , \frac{\vec{\Delta}}{2} + \vec{f} \right)$$

$$N' = \left(\frac{d_o}{2} , - 3 \frac{\vec{\Delta}}{2} + \vec{f} \right)$$

$$k = (k_o , \vec{S} - \vec{\Delta})$$

$$k' = (k_o , \vec{S} + \vec{\Delta})$$

O *momento relativo dos núcleons nos dêuteron* inicial e final é dado por, respectivamente,

$$\vec{f}_i = \frac{\vec{N} - \vec{M}}{2} = \vec{f}$$

$$\vec{f}_f = \frac{\vec{N'} - \vec{M'}}{2} = - \vec{\Delta} + \vec{f}$$

Como a integral em $d^3 f$ vai de $- \infty$ à $+ \infty$ podemos fazer

$$\vec{f} \rightarrow \vec{f} + \vec{\Delta}/2$$

logo

$$\vec{f}_i = \vec{f} + \vec{\Delta}/2$$

$$\vec{f}_f = \vec{f} - \vec{\Delta}/2$$

que são os argumentos das funções de onda dos dêuterons inicial e final.

b) Espalhamento Duplo (ED)

No diagrama abaixo, Fig. A.3.2, representamos a processo de espalhamento duplo para a reação elástica πd.

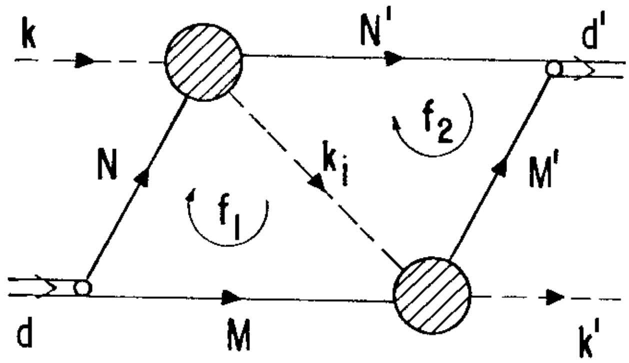


Figura A.3.2 - A legenda é aquela do ES

b.1) Cinemática para as amplitudes de spin

Como já vimos no *ES*, uma das aproximações nos nossos cálculos de seções de choque é a exclusão das amplitudes πN das integrais para um determinado valor de cada variável de integração. No caso do *ED* existem dois "circuitos" fechados (ver Fig. A.3.2) e as amplitudes πN são funções dos momentos f_1 e f_2 através dos quadri-momentos dos núcleons N, M, N' e M'. A exclusão dessas amplitudes obedecerá a seguinte condição: máxima simetria entre os dêuterons inicial e final ou seja, que os referenciais *M.T.* de ambas as sub-reações πN sejam confundidos com aquele da reação πd, Levy (81). Então, para a primeira subreação temos

$$\vec{N} + \vec{N}' = 0 \quad ; \quad N_0 = N'_0$$

e para a segunda sub-reação

$$\vec{M} + \vec{M}' = 0 \quad ; \quad M_0 = M'_0$$

Partindo da conservação do momento-energia nos vértices, temos

$$M \equiv d/2 - \delta_1$$

$$N = d/2 + \delta_1$$

$$M' \equiv d'/2 - \delta_2$$

$$N' = d'/2 + \delta_2$$

$$k_i = K - q \; . \qquad \text{(A.3.2)}$$

onde

$$K = \frac{1}{2}(k + k')$$

e

$$q = \delta_2 - \delta_1$$

Temos ainda, pela igualdade nos momentos e nas energias

$$N^2 = N'^2$$

$$M^2 = M'^2$$

$$\vec{\delta}_1 = -\vec{\delta}_2$$

$$s_1^o = s_2^o = s^o$$

de modo que

$$s_1 = \left(s^o \; , \; - \frac{\vec{q}}{2} \right)$$

$$s_2 = \left(s^o \; , \; \frac{\vec{q}}{2} \right)$$

Vemos então que a máxima simetria entre os dois dêuterons exige que as duas variáveis de integração sejam quadrivetores que tenham a mesma componente de energia e que as partes espaciais sejam anti-paralelas e de mesmo módulo.

Com isto, os momentos das partículas internas em função dos momentos das partículas externas e de $q = (0 \; , \; \vec{q})$ ficam

$$N = \left(\frac{d_o}{2} \; , \; \frac{\vec{\Delta} - \vec{q}}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{d_o}{2} \; , \; \frac{\vec{\Delta} + \vec{q}}{2} \right)$$

$$N' = \left(\frac{d_o}{2} \; , \; - \frac{\vec{\Delta} - \vec{q}}{2} \right)$$

$$M' = \left(\frac{d_o}{2} \; , \; - \frac{\vec{\Delta} + \vec{q}}{2} \right)$$

$$k_i = (k_o \; , \; \vec{S} - \vec{q})$$

As *amplitudes* πN serão agora excluidas das integrais em $\vec{q}$ para esta quantidade igual a zero.

Pela eq. A.3.2

$$k_i^2 = \mu^2 - \frac{t_{\pi d}}{4} \qquad (A.3.3)$$

Os *invariantes das reações* πN serão calculados usando-se a cinemática do sub-ítem A.2.6 pois, a eq. A.3.3, afirma que o pion intermediário está fora da camada de massa. Temos então:

$$s_{\pi N} = (k+N)^2 = \frac{s_{\pi d} - 2m^2 + \mu^2}{2}$$

$$t_{\pi N} = (k_i - k)^2 = \frac{t_{\pi d}}{4}$$

$$N^2 = M^2 = m^2$$

b.2) Cinemática para a integral no polo do pion

O *momento relativo dos núcleons nos dêuterons* inicial e final é dado por, respectivamente,

$$\vec{f}_i = \frac{\vec{N} - \vec{M}}{2} = \vec{f}_1$$

$$\vec{f}_f = \frac{\vec{N'} - \vec{M'}}{2} = \vec{f}_2$$

Para o *cálculo da integral no polo do pion* faremos a seguinte mudança de variável:

$$\vec{q}_1 = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$$
$$2\vec{q}_2 = -\vec{s}_1 - \vec{s}_2 \qquad (A.3.4)$$

de modo que

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{q}_1}{2} - \vec{q}_2$$

$$\vec{s}_2 = -\frac{\vec{q}_1}{2} - \vec{q}_2$$

e

$$d^3 s_1 d^3 s_2 = d^3 q_1 d^3 q_2$$

Como

$$k_i^2 = k_i^{o2} - \vec{k}_i^2$$

então

$$\mu^2 - k_i^2 = \vec{k}_i^2 - \vec{k}^2$$

Com isto temos

$$\vec{k}_i = \vec{k}_i(\vec{q}_1)$$

e as integrais serão desacopladas conforme veremos explicitamente no Apêndice B.3

c) *Corrente de Troca* (CT)

No diagrama *d* da Fig. 3.1.1 apresentamos a correção CT para o espalhamento elástico πd. A amplitude CT total é, conforme falamos no Cap. I e ilustramos diagramaticamente na Fig. 1.1, uma soma de amplitudes que correspondem aos possíveis diagramas que contribuem para tal mecanismo. Como estamos trabalhando numa região de energia onde a ressonância 3-3 é dominante, consideraremos as contribuições que contém, no mínimo, uma de tais ressonâncias. Dentre esses diagramas aqueles da Fig. 3.4.1 são os mais relevantes, Robillota (41).

c.1) Cinemática para as amplitudes de spin

Aqui, também, excluiremos as amplitudes de spin das integrais seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido no espalhamento duplo. Ou seja, para $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = 0$. Então, os momentos das partículas internas serão, para os três diagramas da *CT*,

$$N = M = \frac{d}{2} = \left(\frac{d_0}{2} , \frac{\vec{\Delta}}{2} \right)$$

$$N' = M' = \frac{d'}{2} = \left(\frac{d_0}{2} , - \frac{\vec{\Delta}}{2} \right)$$

$$k_i = N - N' = (0 , \vec{\Delta})$$

$$k_j = N' - N = (0 , - \vec{\Delta})$$

Pela conservação do momento-energia, a relação entre as partículas internas e externas, em termos de quadri-momentos, é agora imediata.

Levando-se em conta que o pion intermediário está fora da camada de massa, *os invariantes da sub-reação* πN para os diagramas $N\Delta$ e ΔN são

$$s_{\pi N} = \frac{s_{\pi d} - 2m^2 + \mu^2}{2}$$

$$t_{\pi N} = \mu^2 - \frac{t_{\pi d}}{4}$$

$$P^2 = s_{\pi N}$$

$$N'^2 = m^2$$

$$k_i^2 = k_j^2 = \frac{t_{\pi d}}{4}$$

$$k'^2 = \mu^2$$

Se no lugar da amplitude de Dirac $A_{\pi N}$ *colocarmos o propagador da partícula de spin 3/2,* os produtos dos quadri-momentos abaixo relacionados serão úteis no cálculo da nova amplitude de spin $F_{n'n}$.

c.1.1) Diagrama $N\Delta$

$$k'.N' = \frac{1}{4}\,(s_{\pi d} - \mu^2 - 4m^2) \tag{A.3.5}$$

$$k'.N = \frac{1}{4}\,(s_{\pi d} - \mu^2 - 4m^2) + \frac{t_{\pi d}}{4} \tag{A.3.6}$$

$$N'.N = m^2 - \frac{t_{\pi d}}{8} \tag{A.3.7}$$

$$k'.Q' = \mu^2 + \frac{1}{4}\,(s_{\pi d} - \mu^2 - 4m^2) \tag{A.3.8}$$

$$k_i.Q' = \frac{t_{\pi d}}{8}$$

$$k'.k_i = \frac{t_{\pi d}}{4}$$

c.1.2) *Diagrama* ΔN

As expressões são as mesmas mostradas acima para o gráfico $N\Delta$ porém fazendo a substituição de Q' por Q e k' por k.

c.1.3) *Diagrama* $\Delta\Delta$

Como $\quad k'Q' = kQ$

$\quad\quad\quad k'Q = kQ'$

as eqs. A.3.5, A.3.6, A.3.7 e A.3.8 permanecem e adicionamos as que seguem

$$k.k' = \mu^2 - \frac{t_{\pi d}}{2}$$

$$k'.Q = \frac{1}{4}\,(s_{\pi d} - \mu^2 - 4m^2) + \mu^2 - \frac{t_{\pi d}}{4}$$

$$Q.Q' = \frac{1}{8}\,(4s_{\pi d} + 4\mu^2 - 8m^2 - t_{\pi d})$$

c.2) *Cinemática para as integrais dos polos das partículas intermediárias*

Para os três diagramas de CT temos

$$N = \left(\frac{d_o}{2} + \delta_1^o \;,\; \frac{\vec{\Delta}}{2} + \vec{\delta}_1\right)$$

$$M = \left(\frac{d_o}{2} - \delta_1^o \;,\; \frac{\vec{\Delta}}{2} - \vec{\delta}_1\right)$$

$$N' = \left(\frac{d_0}{2} + f_2^0 \; , \; - \frac{\vec{\Delta}}{2} + \vec{f}_2 \right)$$

$$M' = \left(\frac{d_0}{2} - f_2^0 \; , \; - \frac{\vec{\Delta}}{2} - \vec{f}_2 \right)$$

e para os *tri-momentos relativos dos núcleons nos dêuterons inicial e final*

$$\vec{f}_i = \frac{\vec{N} - \vec{M}}{2} = \vec{f}_1$$

$$\vec{f}_f = \frac{\vec{N}' - \vec{M}'}{2} = \vec{f}_2$$

Então, de acordo com o diagrama considerado e o polo (ou polos) que será (ão) integrado (os) *reescreveremos* ele (eles) da seguinte forma:

c.2.1) Diagrama $N\Delta$

c.2.1.1) Situação 1 - Integrando somente o polo do pion

$$k_i = \frac{1}{2}(d-d') - f_1 + f_2$$

Com a mudança de variável do *ED*, eq. A.3.4,

$$k_i = (-\,q_1^0 \; , \; \vec{\Delta} - \vec{q}_1)$$

$$d^3 f_1 d^3 f_2 = d^3 q_1 d^3 q_2$$

$$k_i = k_i(q_1)$$

Na realidade trataremos a integral para $k_i = (0\ ,\ \vec{\Delta} - \vec{q}_1)$ pois $\delta_1^o - \delta_2^o$ é pequeno conforme podemos ver calculando-os a partir da condição de camada de massa para os nucleons espectadores M e M'

$$M^2 = \left(\frac{d}{2} - \delta_1 \right)^2 = m^2 \qquad (A.3.9)$$

$$M'^{\,2} = \left(\frac{d'}{2} - \delta_2 \right)^2 = m^2 \qquad (A.3.10)$$

daí

$$\mu^2 - k_i^2 = \vec{k}_i^{\,2} + \mu^2$$

com

$$\vec{k}_i = \vec{\Delta} - \vec{q}_1$$

c.2.1.2) Situação 2 - Integrais nos polos do píon e do núcleon desacopladas

Polo do núcleon

$$P = k + \frac{d}{2} + \delta_1$$

Como

$$\delta_1^2 = d.\delta_1$$

que vem da condição de camada de massa para o núcleon espectador M (eq. A.3.9) e nos leva a (ver Apêndice D.2)

$$\delta_1^o = \frac{1}{d_o}\ (\vec{\Delta} - \vec{\delta}_1)\ .\ \vec{\delta}_1$$

temos

$$m^2 - P^2 = B_N\left[(\vec{C}_N + \vec{\delta}_1)^2 + D_N^2\right] \qquad (A.3.11)$$

onde

$$\vec{A}_N = \vec{S} - \frac{S_o}{d_o}\vec{\Delta}$$

$$B_N = 2\,\frac{S_o}{d_o}$$

$$\vec{C}_N = \frac{\vec{A}}{B_N}$$

$$D_N^2 = \frac{m^2 - s_{\pi N}}{B_N} - \vec{C}_N^2$$

Como os vetores $\vec{S}$ e $\vec{\Delta}$ são ortogonais (eles estão definidos para a reação elãstica πd) e orientados ao longo de y e z (ver Fig. B.3.1), o vetor $\vec{C}_N$ farã um ãngulo Θ diferente de zero com o eixo z e, como estã contido no plano yz, terã o ângulo azimutal ϕ nulo.

$$\vec{C}_N \cdot \vec{\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{\Delta}^2$$

logo

$$\cos\Theta = -\frac{|\vec{\Delta}|}{2|\vec{C}_N|}$$

Consideração anãloga deve ser feita para os vetores $\vec{C}$ nas situações que seguem.

Polo do pion k_i

$$k_i = \frac{1}{2}(d - d') + \delta_2$$

Num raciocínio análogo ao desenvolvido para o núcleon P, mas tendo em mente que o núcleon espectador é M' (eq. A.3.10, $\delta_2^2 = d'.\delta_2$), temos

$$\mu^2 - k_i^2 = B_\pi \left[(\vec{C}_\pi + \vec{\delta}_2)^2 + D_\pi^2 \right] \qquad (A.3.12)$$

onde

$$B_\pi = 1$$

$$\vec{C}_\pi = \vec{\Delta}$$

$$D_\pi^2 = \mu^2$$

Aqui o vetor $\vec{C}_\pi$ é paralelo ao eixo de quantização z.

c.2.1.3 - *Situação 3 - Integral no polo do núcleon desacoplada da integral no polo da ressonância Δ' (1232 Mev)*

Para o polo do núcleon temos a eq. A.3.12 acima.

Polo da Δ'

$$Q' = k' + N' = k' + \frac{d'}{2} + \delta_2$$

Aqui, também, o núcleon que está na camada de massa é M', então

$$M^2 - Q'^2 = B_{\Delta'} \left[(\vec{C}_{\Delta'} + \vec{\delta}_2)^2 + D_{\Delta'}^2 \right] \qquad (A.3.13)$$

onde

$$\vec{A}_{\Delta'} = \vec{S} + \frac{S_o}{d_o}\vec{\Delta}$$

$$B_{\Delta'} = 2S_0/d_0$$

$$\vec{C}_{\Delta'} = \vec{A}_{\Delta'}/B_{\Delta'}$$

$$D^2_{\Delta'} = (M^2 - s_{\pi N})/B_{\Delta'} - \vec{C}^2_{\Delta'}$$

$$M = M_\Delta - i\Gamma/2$$

Para Γ, largura da Δ', tomamos a parametrização de Wolf (73). Isto se aplicará também para os diagramas ΔN e $\Delta\Delta$. Aqui

$$\cos\Theta' = \frac{1}{2}\,\frac{|\vec{\Delta}|}{|C_{\Delta'}|}$$

c.2.1.4 - Situação 4 - Integral no polo do núcleon desacoplada da integral nos polos do pion e da ressonância Δ' (1232 Mev)

Para o polo do núcleon temos a eq. A.3.11 e para os polos do pion e da Δ' temos as eqs. A.3.12 e A.3.13.

c.2.2) Diagrama ΔN e $\Delta\Delta$

Para não adicionarmos contas repetitivas, e como não existe dificuldade em reescrever os polos das partículas intermediárias como função explícita da variável de integração, teremos para os polos dos diagramas ΔN e $\Delta\Delta$ expressões análogas àquelas, na situação correspondente, do diagrama $N\Delta$. A diferença entre os diagramas ΔN e $N\Delta$ está na "posição" dos polos pois teremos agora o polo da ressonância Δ (1232 Mev) no lugar do polo do núcleon *P* e vice-versa. Entre os diagramas $\Delta\Delta$ e $N\Delta$ basta considerar que teremos agora o polo da ressonância Δ *(1232 Mev)* no lugar do polo do núcleon *P*.

APÊNDICE B

AS INTEGRAIS DOS ESPALHAMENTOS

B.1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice apresentamos, de uma maneira mais ou menos detalhada, os caminhos seguidos na resolução das integrais que aparecem nos cálculos dos elementos de matriz referentes aos espalhamentos simples, duplo e corrente de troca.

As ondas S e D do dêuteron são aquelas de McGee (82), descritas no Apêndice D.5.

B.2 - ESPALHAMENTO SIMPLES (ES)

A integral que temos para resolver é

$$I_{\lambda'\lambda}^{\substack{m'n'\\ m\ n}} = \int d^3 q\ \psi_{\lambda'}^{*m',n'}(\vec{q} - \vec{\Delta}/2)\,\psi_{\lambda}^{m,n}(\vec{q} + \vec{\Delta}/2)$$

como

$$\psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3 r\ \psi(\vec{r})\ e^{-i\vec{p}.\vec{r}} \qquad (B.2.1)$$

$$I_{\lambda'\lambda}^{\substack{m'n'\\ m\ n}} = \int d^3 r\ \psi_{\lambda'}^{*m',n'}(\vec{r})\ \psi_{\lambda}^{m,n}(\vec{r})\ e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} \qquad (B.2.2)$$

No espaço das coordenadas a função de onda do dêuteron é dada por, Levy (81),

$$\psi_{\lambda,m,n}(\vec{r}) = a\,\frac{u(r)}{r}\,Y_{0,0}(\hat{r}) + b\,\frac{w(r)}{r}\,Y_{2,\alpha}(\hat{r}) \qquad (B.2.3)$$

onde:

$$a = \langle \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ m \ n \ | \ 1 \ , \ \lambda \rangle$$

$$b = \langle 2,1;\lambda - m-n \ , \ m+n \ | 1,\lambda \rangle\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \ m \ n \ | 1, \ m+n \rangle$$

são os acoplamentos, respectivamente, onda S e onda D do dêuteron; $u(r)$ e $\omega(r)$ são, na ordem, essas ondas. Os $Y(\hat{r}) \equiv (\Theta \ , \ \phi)$ são harmônicos esféricos. No Apêndice D.6 mostraremos como chegamos ao acoplamento onda S.

Depois de substituir a eq. B.2.3 na eq. B.2.2, obtemos

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

onde

$$I_1 = a'a \int u^2(r) e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} \ |Y_{o,o} \ (\hat{r})|^2 \ sen \ \Theta d\Theta dr d\phi$$

$$I_2 = a'b \int u(r) w(r) \ e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} \ sen \ \Theta d\Theta dr \ x$$

$$x \int_0^{2\pi} Y^*_{o,o}(\hat{r}) \ Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r}) \ d\phi$$

$$I_3 = ab' \int u(r) \ w(r) \ e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} \ sen \ \Theta d\Theta dr \ x$$

$$x \int_0^{2\pi} Y_{o,o}(\hat{r}) \ Y^*_{2,\lambda'-m'-n'} \ (\hat{r}) \ d\phi$$

$$I_4 = bb' \int w^2(r) \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \ (2\ell+1) \ i^{\ell} \ j_{\ell}(|\vec{\Delta}||\vec{r}|) \ x \right.$$

$$\times \left[Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r})\ Y^{*}_{2,\lambda'-m'-n'} P_{\ell}(\cos\Theta)\,d\hat{r} \right] dr \qquad (B.2.4)$$

Para escrever a eq. B.2.4, expandimos $e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}}$ em ondas parciais:

$$e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ i^{\ell} P_{\ell}(\cos\Theta)\ j_{\ell}(|\vec{\Delta}||\vec{r}|) \qquad (B.2.5)$$

onde $P_{\ell}(\cos\Theta)$ são as funções de Legendre de ordem ℓ e $j_{\ell}(|\vec{\Delta}||\vec{r}|)$ as funções de Bessel esféricas também de ordem ℓ.

Por sua vez

$$j_n(z) = \frac{1}{2}(-i)^n \int_0^{\pi} e^{-iz\ \cos\Theta} P_{\ell}(\cos\Theta)\ sen\ \Theta\ d\Theta \qquad (B.2.6)$$

e

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\phi}\ e^{im_2\phi}\ d\phi = 2\pi\delta_{m_1,\ m_2}$$

Então

$$I_1 = aa'\int u^2(r)\ j_0(|\vec{\Delta}||\vec{r}|)\,dr$$

$$I_2 = -\sqrt{5}\,a'b\int u(r)w(r)\ j_2(|\vec{\Delta}||\vec{r}|)\,dr$$

com o vínculo

$$\lambda - m - n = 0 \qquad (B.2.7)$$

$$I_3 = -\sqrt{5}\ ab'\int u(r)\ w(r)\ j_2(|\vec{\Delta}||\vec{r}|)\,dr$$

com o vínculo

$$\lambda' - m' - n' = 0 \qquad (B.2.8)$$

Para a eq. B.2.4 os cálculos são mais complicados. Começaremos com as integrais nas variáveis angulares. Seja

$$C = (-1)^{\alpha'} \int Y_{2,\alpha}(\hat{r})\, Y_{2,-\alpha'}(\hat{r})\, P_{\ell}(\cos\Theta)\, d\hat{r}$$

onde

$$Y^{*}_{2,\alpha'}(\hat{r}) = (-1)^{\alpha'}\, Y_{2,-\alpha'}(\hat{r}) \tag{B.2.9}$$

e

$$\alpha = \lambda - m - n$$

$$\alpha' = \lambda' - m' - n'$$

Pela relação entre os harmônicos esféricos e as funções de Legendre associadas:

$$C = (-1)^{-\alpha'} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int Y_{2,-\alpha'}(\hat{r})\, Y_{2,\alpha}(\hat{r})\, Y_{\ell,0}(\hat{r})\, d\hat{r}$$

Acontece que

$$\int Y_{\ell_1,m_1}(\hat{r})\, Y_{\ell_2,m_2}(\hat{r})\, Y_{\ell_3,m_3}(\hat{r})\, d\hat{r} = (-1)^{m_3} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell_3+1)}} \quad x$$

$$x <\ell_1 , \ell_2 ; 0 , 0 \mid \ell_3 , 0><\ell_1 , \ell_2 ; m_1 , m_2 \mid \ell_3 , m_3> \tag{B.2.10}$$

com

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \tag{B.2.11}$$

$$\mid \ell_1 - \ell_2 \mid \leq \ell \leq \ell_1 + \ell_2$$

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = par$$

daí

$$C = 5(-1)^{\alpha} \frac{1}{2\ell+1} \langle 2\,,\,2\,;\,0\,,\,0|\ell\,,\,0\rangle\langle 2\,,\,2\,;\,-\,\alpha\,,\,\alpha|\ell\,,\,0\rangle$$

e
$$0 \leq \ell \leq 4$$

logo

$$I_4 = 5bb'(-1)^{\alpha}\int w^2(r)\left[\sum_{\ell} i^{\ell}\ j_{\ell}(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\langle 2\,,\,2\,;\,0\,,\,0|\ell\,,\,0\rangle\ \times\right.$$

$$\left.\times\ \langle 2\,,\,2\,;\,-\,\alpha\,,\,\alpha|\ell\,,\,0\rangle\right]dr$$

Somando os $I_i(i = 1,\ 2,\ 3\ e\ 4)$ obtemos, finalmente,

$$I = aa'\int u^2(r)\ j_0(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr - \sqrt{5}\ a'b\int u(r)w(r)\ \times$$

$$\times\ j_2(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr - \sqrt{5}\ ab'\int u(r)w(r)\ j_2(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr\ +$$

$$+\ (-1)^{\alpha}bb'\left[\sqrt{5}\ \langle 2\,,\,2\,;\,-\,\alpha\,,\,\alpha|0,0\rangle\int w^2(r)\ j_0(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr\ +\right.$$

$$+\ 5\sqrt{\frac{2}{7}}\ \langle 2\,,\,2\,;\,-\,\alpha\,,\,\alpha|2\,,\,0\rangle\int w^2(r)\ j_2(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr\ +$$

$$\left.+\ 5\sqrt{\frac{18}{35}}\ \langle 2\,,\,2\,;\,-\,\alpha\quad\alpha|4\,,\,0\rangle\int w^2(r)\ j_4(|\vec{\Delta}|\,|\vec{r}|)\,dr\right]$$

Os vínculos dados pelas eqs. B.2.7, B.2.8 e B.2.11 são importantes na hora de ~~atribuirem-se~~ atribuirem-se valores às polarizações dos dêuterons (λ' e λ).

B.3 - ESPALHAMENTO DUPLO (ED)

Resolveremos aqui a seguinte integral

$$I_{\lambda',\lambda}^{\substack{m'n'\\ m\,n}}(\Delta) = \int d^3 s_1 d^3 s_2 \; \psi_{\lambda'}^{*m',n'}(\vec{s}_2)\; \psi_{\lambda}^{m,m}(\vec{s}_1)\; \frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi}$$

(B.3.1)

Para

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{q}_1}{2} - \vec{q}_2$$

$$\vec{s}_2 = -\frac{\vec{q}_1}{2} - \vec{q}_2 \qquad \text{(B.3.2)}$$

obtemos, ver Apêndice A.3.b,

$$\mu^2 - k_i^2 = \vec{k}_i^2 - \vec{k}^2$$

onde

$$\vec{k}_i = \vec{K} - \vec{q}_1$$

com

$$\vec{K} = \frac{\vec{k}+\vec{k}'}{2}$$

Pela eq. B.2.1

$$I = \int \psi^*(\vec{r})\; \psi(\vec{r})\, e^{-i\vec{K}.\vec{r}} \left[\int \frac{e^{i\vec{k}_i.\vec{r}}}{\vec{k}_i^2 - \vec{k}^2 + i\xi}\, d^3 k_i \right] d^3 r$$

A parte angular da integral em $d^3 k_i$ é imediata. No ângulo azimuntal ela é igual a 2π e no ângulo polar, fazendo udo da eq. B.2.6, obtemos $2j_0(|\vec{k}_i||\vec{r}|)$.

Então

$$I = \int \psi^*(r)\ \psi(\vec{r})\, e^{-i\vec{K}.\vec{r}} \left[-\frac{2\pi}{|\vec{r}|}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k}_i\ e^{-i|\vec{k}_i||\vec{r}|}\ d|\vec{k}_i|}{\vec{k}'^2_i - \vec{k}^2 - i\xi} \right] d^3r$$

(B.3.3)

Para chegar à eq. B.3.3, levamos em conta o fato de que $|\vec{k}_i|\ cos(|\vec{k}_i||\vec{r}|)$ é uma função impar de $|\vec{k}_i|$.

A integral entre parênteses na eq. B.3.3 está resolvida, pelo método dos resíduos, no Apêndice D.7.a.

Definindo

$$J = \int e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\ \psi^*(\vec{r})\ \psi(\vec{r})\ d\hat{r} \qquad (B.3.4)$$

temos

$$I = \int 2\pi^2\ r e^{i|\vec{k}||\vec{r}|} J dr$$

A substituição da eq. B.2.3 na eq. B.3.4 nos permite a seguinte espressão para J

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

onde

$$J_1 = aa'\ \frac{u^2(r)}{r^2} \int e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\ Y^*_{o,o}(\hat{r})\ Y_{o,o}(\hat{r})\ d\hat{r}$$

$$J_2 = a'b\ \frac{u(r)w(r)}{r^2} \int e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\ Y^*_{o,o}(\hat{r})\ Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r})\ d\hat{r}$$

$$J_3 = ab'\ \frac{u(r)w(r)}{r^2} \int e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\ Y_{o,o}(\hat{r})\ Y^*_{2,\lambda'-m'-n'}(\hat{r})\, d\hat{r}$$

$$J_4 = bb' \frac{w^2(r)}{r^2} \int e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\, Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r})\, Y^*_{2,\lambda'-m'-n'}(\hat{r})\, d\hat{r}$$

Atendemos agora para a Fig. B.3.1

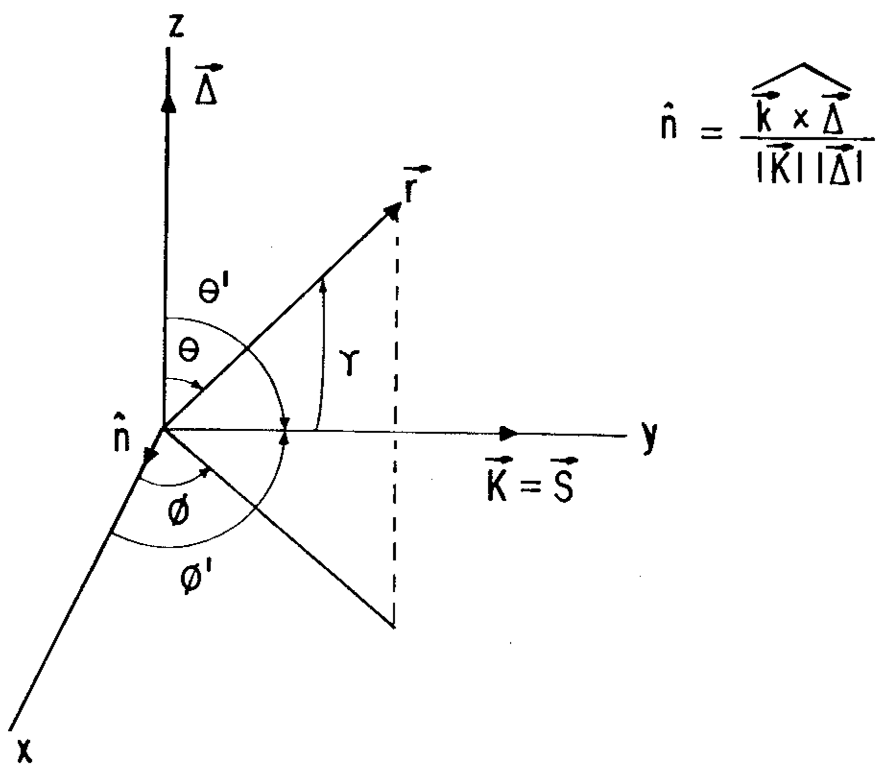


Figura B.3.1 - *Ângulos entre os vetores* $\vec{r}$, $\vec{k}$ *e* $\vec{K}$.

$\Theta(\Theta')$ *e* $\phi(\phi')$ *são os ângulos polar e azimutal do vetor* $\vec{r}(\vec{k})$, *e* γ *é o ângulo entre os vetores* $\vec{r}$ *e* $\vec{K}$

Como

$$e^{-i\vec{K}.\vec{r}} = \sum_{p} (2p+1) i^{p} \; j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; P(\cos\gamma)$$

com

$$P_p(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2p+1} \sum_{q=-p}^{p} Y^{*}_{p,q} \; (\Theta, \phi) \; Y_{p,q} \; (\Theta', \phi')$$

e, pela Fig. B.3.1, $\Theta' = \phi' = 90º$ temos

$$e^{-i\vec{K}.\vec{r}} = 4\pi \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} i^{p} j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; Y_{p,q}(\Theta', \phi') \; Y^{*}_{p,q}(\Theta, \phi) \tag{B.3.5}$$

então

$$J_1 = 4\pi a a' \frac{u^2(r)}{r} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} i^{p} j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; Y_{p,q}(\hat{K}) \; x$$

$$x \int Y^{*}_{o,o}(\hat{r}) \; Y_{o,o}(\hat{r}) \; Y^{*}_{p,q}(\hat{r}) \; d\hat{r}$$

$$J_2 = 4\pi a' b \frac{u(r)w(r)}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} i^{p} j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; Y_{p,q}(\hat{K}) \; x$$

$$x \int Y^{*}_{o,o}(\hat{r}) \; Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r}) \; Y^{*}_{p,q}(\hat{r}) \; d\hat{r}$$

$$J_3 = 4\pi a b' \frac{u(r)w(r)}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} i^{p} j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; Y_{p,q}(\hat{K}) \; x$$

$$x \int Y_{o,o}(\hat{r}) \; Y^{*}_{2,\lambda'-m'-n'}(\hat{r}) \; Y^{*}_{p,q}(\hat{r}) \; d\hat{r}$$

$$J_4 = 4\pi b b' \frac{w^2(r)}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} i^{p} j_p(|\vec{K}||\vec{r}|) \; Y_{p,q}(\hat{K}) \; x$$

$$x \int Y_{2,\lambda-m-n}(\hat{r}) \; Y^{*}_{2,\lambda'-m'-n'} \; Y^{*}_{p,q}(\hat{r}) \; dr$$

Pela eq. B.2.10

$$J_4 = 5\sqrt{4\pi}\,\frac{w^2(r)}{r^2}\,(-1)^{\alpha}\,bb' \sum_{p=0,2,4}\;\sum_{q''=-p}^{p} \frac{i^p}{(2p+1)^{1/2}}\,(-1)^{-q''}\; j_p(|\vec{K}|\,|\vec{r}|)\,x$$

$$x\, Y_{p,q''}(\hat{K}) < 2 \;,\; 2 \;;\; 0 \;,\; 0 \mid p \;,\; 0 >< 2 \;,\; 2 \;;\; q''-\alpha \,,\, \alpha \mid p \;,\; q'' >$$

onde

$$\alpha = \lambda - m - n$$

$$\alpha' = \lambda' - m' - n'$$

$$q'' = \alpha - \alpha' \qquad (B.3.6)$$

Para J_i $(i = 1,2,3)$ usamos

$$\int Y_{p,q}(\hat{r}) \; Y^{*}_{p',q'}(\hat{r})\, dr = \delta_{p,p'} \; \delta_{q,q'} \qquad (B.3.7)$$

Finalmente,

$$I = 2\pi^2 \Big\{ aa' \int h(|\vec{k}|\,|\vec{r}|) \;\; u^2(r)\, j_0(|\vec{K}|\,|\vec{r}|)\, dr \; -$$

$$- \sqrt{4\pi}\left[a'b \sum_{q=-2}^{2} Y_{2,q}(\hat{K}) \;+\; ab' \sum_{q'=-2}^{2} (-1)^{q'}\, Y_{2,q'}(\hat{K})\right] \; x$$

$$x \int h(|\vec{k}|\,|\vec{r}|)\, u(r)\, w(r) \;\; j_2(|\vec{K}|\,|\vec{r}|)\, dr \;+\; (-1)^{\alpha}\; bb' \;\; x$$

$$x \;\Big[\sqrt{5} <2 \;,\; 2 \;;\; -\alpha \,,\, \alpha \mid 0 \;,\; 0> \int h(|\vec{k}|\,|\vec{r}|)\, w^2(r)\, j_0(|\vec{K}|\,|\vec{r}|)\, dr \;+$$

$$+ \sqrt{4\pi}\sqrt{\frac{10}{7}} \sum_{q''=-2}^{2} (-1)^{-q''} <2\,,\,2\,;\,q''-\alpha\,,\,\alpha \mid 2\,,\,q''> Y_{2,q''}(\hat{K}) \; x$$

$$x \int h(|\vec{k}||\vec{r}|)\,w^2(r)\; j_2(|\vec{K}||\vec{r}|)\,dr + 4\pi\sqrt{\frac{10}{7}} \sum_{q''=-4}^{4} (-1)^{-q''} \; x$$

$$x <2\,,\,2\,;\,q''-\alpha\,,\,\alpha \mid 4\,,\,q''> Y_{4,q''}(\hat{K}) \int h(|\vec{k}||\vec{r}|)\;w^2(r)\,j_4(|\vec{K}||\vec{r}|)\,dr\Big]\Big\}$$

(B.3.8)

onde

$$q = \lambda - m - n \qquad (B.3.9)$$

$$q' = \lambda' - m' - n' \qquad (B.3.10)$$

Os vínculos dados pelas eqs. B.3.6, B.3.9 e B.3.10, são importantes nos cálculos da eq. B.3.8 quando atribuirmos valores às polarizações dos dêuterons.

Desconsideraremos nos cálculos o termo em $w^2(r)\,j_4(|\vec{K}||\vec{r}|)$ diante do fato dele ser muito pequeno em comparação com os demais.

B.4 - CORRENTE DE TROCA (CT)

Diagramas NΔ, ΔN e ΔΔ

Resolveremos aqui a integral da eq. 3.4.2

a.1) Situação 1 - Integral do polo do píon

$$I = \iint d^3 s_1 d^3 s_2 \;\; \psi^*(\vec{s}_2)\;\; \psi(\vec{s}_1)\frac{1}{k_i^2-\mu^2+i\xi}$$

Esta integral é idêntica àquela da eq. B.3.1. Aqui, de acordo com o Apêndice A.3.c,

$$\mu^2 - k_i^2 = \vec{k}_i^2 + \mu^2$$

$$k_i = (0, \vec{\Delta} - \vec{q}_1)$$

Num raciocínio análogo aquele no *ED*

$$I_1 = 2\pi^2 \int r e^{-\mu r} \left[\int e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\hat{r} \right] dr$$

Substituindo as funções de onda, eq. B.2.3,

$$I_1 = 2\pi^2 \int \frac{e^{-\mu r}}{r} \left[aa' u^2(r) \int e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} Y^*_{0,0}(\hat{r}) Y_{0,0}(\hat{r}) d\hat{r} + \right.$$

$$+ ab' u(r) w(r) \int e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} Y_{0,0}(\hat{r}) Y^*_{2,\alpha'}(\hat{r}) d\hat{r} + a'b\, u(r) w(r) \times$$

$$\times \int e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} Y^*_{0,0}(\hat{r}) Y_{2,\alpha}(\hat{r}) d\hat{r} + bb' w^2(r) \int e^{-i\vec{\Delta}.\vec{r}} Y_{2,\alpha}(\hat{r}) \times$$

$$\left. \times Y^*_{2,\alpha'}(\hat{r}) d\hat{r} \right] dr$$

onde

$$\alpha = \lambda - m - n$$

$$\alpha' = \lambda' - m' - n'$$

As integrais nas variáveis angulares já as conhecemos do *ES*. De lá

$$I_1 = 2\pi^2 \left\{ aa' \int \frac{e^{-\mu r}}{r} u^2(r)\, j_0(\Delta r) dr - \sqrt{5}\, ab' \int \frac{e^{-\mu r}}{r} u(r) w(r) \times \right.$$

$$x \; j_2(\Delta r)\, dr - \sqrt{5}\; a'b \int \frac{e^{-\mu r}}{r}\; u(r) w(r)\; j_2(\Delta r)\; dr \; +$$

$$+ \; (-1)^{\alpha}\; bb' \left[\sqrt{5} < 2\,,\,2\,;\, -\alpha\,,\,\alpha \mid 0\,,\,0 > \int \frac{e^{-\mu r}}{r}\, w^2(r)\; j_o(\Delta r)\; dr \; + \right.$$

$$+ \; 5\sqrt{\frac{2}{7}} < 2\,,\,2\,;\, -\alpha\,,\,\alpha \mid 2\,,\,0 > \int \frac{e^{-\mu r}}{r}\; w^2(r)\; j_2(\Delta r) dr \, + \, 5\sqrt{\frac{18}{35}} \quad x$$

$$\left. x \; < 2\,,\,2\,;\, -\alpha\,,\,\alpha \mid 4\,,\; 0 > \int \frac{e^{-\mu r}}{r}\; w^2(r)\; j_4\;(\Delta r) dr \right] \Big\} >$$

Os vínculos dados pelas eqs. B.2.7, B.3.8 e B.2.11 devem ser considerados.

a.2) Situação 2 - Integral do polo do núcleon independente da integral do polo do píon

$$I_2 = \int d^3 s_1 \; \psi(\vec{s}_1) \; \frac{1}{p^2 - m^2 + i\,\xi} \int d^3 s_2 \; \psi^*(\vec{s}_2) \; \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\,\xi} \qquad \text{(B.4.1)}$$

Definamos

$$II_N = \int d^3 s \;\; \psi(\vec{s}) \; \frac{1}{p^2 - m^2 + i\xi} \qquad \text{(B.4.2)}$$

Pelo Apêndice A.3.c

$$II_N = - \frac{1}{B_N} \int d^3 s \;\; \psi(\vec{s}) \; \frac{1}{\left[(\vec{C}_N + \vec{s})^2 + D_N^2 \right]}$$

e da transformada de Fourier para $\psi(\vec{s})$

$$II_N = -\frac{1}{B_N}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi(\vec{r}) < \left\{ \int \frac{e^{i\vec{f}\cdot\vec{r}}}{\left[(\vec{C}_N+\vec{f})^2 + D_N^2\right]} d^3f \right\} > d^3r$$

Com a mudança de variável

$$\vec{F} = \vec{C}_N + \vec{f}$$

e a integração angular de d^3F

$$II_N = -\frac{1}{B_N}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi(r) e^{-i\vec{C}_N\cdot\vec{r}}\left[-\frac{2\pi}{r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iFr}}{\vec{F}^2 + D_N^2 - i\xi} dF\right] d^3r$$

(B.4.3)

Pelo Apêndice D.7.b, onde a integral entre colchetes na eq.B.4.3 encontra-se resolvida, e pela eq. B.2.3

$$II_N = -\frac{2\pi^2}{B_N}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} aI_u - \frac{2\pi^2}{B_N}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} bI_w \tag{B.4.4}$$

onde

$$I_u = \int u(r) e^{-D_N r}\left[\int e^{-i\vec{C}_N\cdot\vec{r}} Y_{0,0}(\hat{r})\, d\hat{r}\right] dr \tag{B.4.5}$$

$$I_w = \int w(r) e^{-D_N r}\left[\int e^{-i\vec{C}_N\cdot\vec{r}} Y_{2,\alpha}(\hat{r})\, d\hat{r}\right] dr \tag{B.4.6}$$

com

$$\alpha = \lambda - m - n$$

A integral no polo do pion segue o mesmo caminho da integral no polo do núcleon. Então, pelo Apêndice A.3.c,

$$II_{\pi} = -\frac{2\pi^2}{B_{\pi}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, a' I_{u'} - \frac{2\pi^2}{B_{\pi}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, b' I_{w'}$$

onde

$$I_{u'} = \int u(r) e^{-D_{\pi} r} \left[\int e^{-i\vec{C}_{\pi}\cdot\vec{r}}\, Y^{*}_{0,0}(\hat{r})\, d\hat{r} \right] dr$$

$$I_{w'} = \int w(r) e^{-D_{\pi} r} \left[\int e^{-i\vec{C}_{\pi}\cdot\vec{r}}\, Y_{2,\alpha'}(\hat{r})\, d\hat{r} \right] dr$$

com

$$\alpha' = \lambda' - m' - n'$$

Consequentemente,

$$I_2 = \frac{\pi}{2B_{\pi}B_N} \left(aa' I_u I_{u'} + ab' I_u I_{w'} + a'b I_{u'} I_w + bb' I_w I_{w'} \right)$$

Se considerarmos somente a onda S para o dêuteron

$$I = \frac{\pi}{2B_{\pi}B_N}\, aa' I_u I_{u'}$$

Fazendo uso da eq. B.2.6 e tomando para a onda S aquela de McGee

$$u(r) = N \sum_{j=1}^{5} C_j\, e^{-\alpha_j r}$$

temos

$$I_2 = 2\pi^2 N^2 \frac{aa'}{B_{\pi}B_N C_{\pi} C_N} \left[\sum_{j=1}^{5} C_j \,\mathrm{arctg}\left(\frac{C_N}{\alpha_j + D_N} \right) \right] x$$

$$x \left[\sum_{k=1}^{5} C_k \; arctg \left(\frac{C_\pi}{\alpha_k + D_\pi} \right) \right] \tag{B.4.7}$$

Consideraremos agora a onda D do dêuteron. De acordo com o Apêndice A.3.c

$$I_{w'} = \int w(r) e^{-D_\pi r} \left[\int e^{i\vec{\Delta}.\vec{r}} \; Y^*_{2,\alpha'}(\hat{r}) \; d\hat{r} \right] dr$$

Com ajuda da eq. B.2.5, da relação entre as harmônicas esféricas e os polinômios de Legendre associados e da eq. B.3.7

$$I_{w'} = - \sqrt{5} \; \sqrt{4\pi} \int w(r) e^{-D_\pi r} \; j_2(\Delta r) dr$$

com

$$\alpha' = 0 \tag{B.4.8}$$

Para I_w a solução é um pouco diferente. De acordo com o Apêndice A.3.c

$$\vec{C}_N = \frac{1}{B_N} \left(\vec{S} - \frac{S_o}{d_o} \vec{\Delta} \right)$$

ou seja, o vetor $\vec{C}_N$ faz um ângulo Θ diferente de zero com o eixo z. Ver Fig. B.3.1

Pela eq. B.3.5

$$e^{-i\vec{C}_N.\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p=-\ell}^{\ell} i^\ell \; j_\ell \; (C_N r) \; Y^*_{\ell,p} \; (\Theta , \phi) \; Y_{\ell,p} \; (\Theta' , \phi') \tag{B.4.9}$$

onde $\Theta(\Theta')$ e $\phi(\phi')$ são os ângulos polar e azimuntal do vetor $\vec{r}(\vec{C}_N)$. Pela Fig. B.3.1, $\phi' = 90^o$.

A substituição da eq. B.4.9 na eq. B.4.6 e a eq. B.3.7 nos leva a

$$I_w = -4\pi \sum_{p=-2}^{2} Y_{2,p}(\hat{C}_N) \int w(r) e^{-\mathcal{D}_N r} j_2(C_N r)\, dr$$

com

$$p = \alpha \tag{B.4.10}$$

Então

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{2\pi^2}{B_\pi B_N} \Big\{ & \left[aa' \int u(r)^{-\mathcal{D}_N r} j_0(C_N r)\, dr \right] \left[\int u(r) e^{-\mathcal{D}_\pi r} j_0(\Delta r)\, dr \right] - \\ & - \sqrt{5}\, ab' \left[\int u(r)^{-\mathcal{D}_N r} j_0(C_N r)\, dr \right] \left[\int w(r) e^{-\mathcal{D}_\pi r} j_2(\Delta r)\, dr \right] - \\ & - \sqrt{4\pi} a' b \left[\int u(r) e^{-\mathcal{D}_\pi r} j_0(\Delta r)\, dr \right] \left[\sum_{p=-2}^{2} Y_{2,p}(\hat{C}_N) \int w(r) e^{-\mathcal{D}_N r} \times \right. \\ & \left. \times\, j_2(C_N r)\, dr \right] + \sqrt{5}\sqrt{4\pi}\, bb' \left[\int w(r) r^{-\mathcal{D}_\pi r} j_2(\Delta r)\, dr \right] \times \\ & \times \left[\sum_{p=-2}^{2} Y_{2,p}(\hat{C}_N) \int w(r) e^{-\mathcal{D}_N r} j_2(C_N r)\, dr \right] \end{aligned} \tag{B.4.11}$$

Não devemos esquecer os vínculos das eqs. B.4.8 e B.4.10 na hora de somar sobre os spins.

a.3) Situação 3 - Integral do polo do núcleon independente da integral do polo da ressonância Δ' (1232 Mev)

$$I_3 = \int d^3 s_1 \; \psi(\vec{s}_1) \frac{1}{P^2 - m^2 + i\xi} \int d^3 s_2 \; \psi^*(\vec{s}_2) \frac{1}{Q'^2 - M^2} \quad \text{(B.4.12)}$$

A integral do polo do núcleon já conhemos da situação anterior. Resta-nos só a integral do polo da Δ' .

De acordo com o Apêndice A.3.c

$$\vec{C}_{\Delta'} = \frac{1}{B_{\Delta'}} \left(\vec{S} + \frac{S_0}{d_0} \vec{\Delta} \right)$$

Ou seja, este vetor faz um ângulo Θ' diferente de zero com o eixo z. Ver Fig. B.3.1.

Ainda pelo Apêndice A.3.c

$$M^2 - Q'^2 = B_{\Delta'} \left[(\vec{C}_{\Delta'} + \vec{s})^2 + D^2_{\Delta'} \right]$$

então

$$II_{\Delta'} = \int d^3 s_2 \; \psi^*(\vec{s}_2) \frac{1}{Q'^2 - M^2}$$

terá uma solução análoga àquela da integral do polo do núcleon, eq. B.4.2. A diferença está na substituição de

$$B_N \to B_{\Delta'}$$

$$\vec{C}_N \to \vec{C}_{\Delta'}$$

$$D_N \to D_{\Delta'}$$

nas eqs. B.4.4, B.4.5 e B.4.6.

No caso de considerarmos somente a onda S (de McGee) para o dêuteron teremos para I_3 a eq. B.4.7 com as seguintes substituições:

$$B_\pi \to B_{\Delta'}$$

$$C_\pi \to C_{\Delta'}$$

$$D_\pi \to D_{\Delta'}$$

Levando-se em conta também a onda D teremos para I_3 a eq. B.4.11 com as substituições que seguem

$$\int u(r)\, e^{-D_\pi r} j_0(\Delta r)\, dr \to \int u(r)\, e^{-D_{\Delta'} r} j_0(C_{\Delta'} r)\, dr$$

$$\int w(r)\, e^{-D_\pi r} j_2(\Delta r)\, dr \to \sqrt{4\pi} \sum_{p'=-2}^{2} Y_{2,p'}(\hat{C}_{\Delta'}) \int w(r)\, e^{-D_{\Delta'} r} j_2(C_{\Delta'} r)\, dr$$

Aqui

$$p' = \lambda' - m' - n'$$

a.4) Situação 4 - Integral do polo do núcleon independente da integral dos polos do pion e da ressonância Δ' (1232 Mev)

$$I_4 = \int d^3 s_1\, \psi(\vec{s}_1) \frac{1}{P^2 - m^2 + i\xi} \int d^3 s_2\, \psi^*(\vec{s}_2) \frac{1}{Q'^2 - M^2} \cdot \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi}$$

A integral no polo do núcleon P é aquela da situação 2. Resta-nos a integral nos polos do pion e da Δ'.

Seja

$$II = \int d^3 q\, \psi^*(\vec{q})\, \frac{1}{Q'^2 - M^2} \cdot \frac{1}{k_i^2 - \mu^2 + i\xi}$$

Pelo Apêndice A.3.c

$$II = \frac{1}{B_\pi B_{\Delta'}} \int d^3 q\, \psi^*(\vec{q})\, \frac{1}{\left[(\vec{C}_{\Delta'} + \vec{q})^2 + D_{\Delta'}^2\right]} \cdot \frac{1}{\left[(\vec{C}_\pi + \vec{q})^2 + D_\pi^2\right]}$$

O método dos parâmetros de Feynman nos diz que

$$\frac{1}{XY} = \int_0^1 \frac{d\beta}{\left[\beta X + (1-\beta)\, Y\right]^2}$$

para

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{\left[(\vec{C}_{\Delta'} + \vec{q})^2 + D_{\Delta'}^2\right]}$$

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{\left[(\vec{C}_\pi + \vec{q})^2 + D_\pi^2\right]}$$

temos

$$II = \frac{1}{B_\pi B_{\Delta'}} \int_0^1 d\beta \int d^3 q\, \psi^*(\vec{q})\, \frac{1}{\left[\beta X + (1-\beta) Y\right]^2}$$

Escrevendo

$$\beta X + (1-\beta) Y = (\vec{q} + \vec{E}) + D^2$$

onde

$$\vec{E} = \beta \vec{C}_{\Delta'} + (1-\beta) \vec{C}_\pi$$

$$\vec{R} = \vec{C}_{\Delta'} - \vec{C}_{\pi}$$

$$g = D_{\pi}^2 \;/\; \vec{R}^2$$

$$h = 1 + (D_{\Delta'}^2 - D_{\pi}^2) \;/\; \vec{R}^2$$

$$D^2 = \vec{R}^2(-\beta^2 + h\beta + g)$$

substituindo a transformada de Fourier de $\psi^*(\vec{\zeta})$ e definindo

$$\vec{F} = \vec{\zeta} + \vec{E}$$

temos

$$II = \frac{1}{B_{\pi}B_{\Delta'}} \; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi^*(r) e^{-i\vec{E}.\vec{r}} \left[\int \frac{e^{i\vec{F}.\vec{r}}}{\left[\vec{F}^2 + D^2\right]^2} \, d^3F \right] d\beta d^3r \qquad (B.4.13)$$

Como

$$\frac{1}{\left[\vec{F}^2 + D^2\right]^2} = -\frac{1}{2D}\,\frac{d}{dD}\left[\frac{1}{\vec{F}^2 + D^2}\right]$$

a integral entre colchetes na eq. B.4.13 assume uma forma já conhecida e resolvida no Apêndice D.7.b. Então, já com a substituição de $\psi^*(\vec{r})$; eq. B.2.3,

$$II = \frac{2\pi^2}{B_{\pi}B_{\Delta'}} \cdot \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \left[a' \int_0^1 \frac{1}{D} I_u(\beta)\, d\beta + b' \int_0^1 \frac{1}{D} I_w(\beta)\, d\beta \right]$$

onde

$$I_u(\beta) = \int r u(r) e^{-Dr} \left[\int e^{-i\vec{E}.\vec{r}}\, Y_{0,0}^*(\hat{r})\, d\hat{r} \right] dr$$

$$I_w(\beta) = \int r w(r) e^{-\mathcal{D}r} \left[\int e^{-i\vec{E}.\vec{r}} \, Y^*_{2,\alpha'}(\hat{r}) \, d\hat{r} \right] dr$$

com

$$\alpha' = \lambda' - m' - n'$$

Considerando para o dêuteron só a onda S de McGee

$$I_u(\beta) = \sqrt{4\pi} \; N \sum_{j=1}^{5} C_j \; \frac{1}{\gamma_j^2 + \vec{E}^2}$$

onde

$$\gamma_j = \alpha_j + \mathcal{D}$$

temos

$$II = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \; \frac{N}{B_\pi B_{\Delta'}} \; a' \sum_{j=1}^{5} C_j \int_0^1 \frac{1}{\mathcal{D}} \; \frac{1}{(\gamma_j^2 + \vec{E}^2)} \, d\beta$$

Expandindo

$$\gamma_j^2 + \vec{E}^2 = \alpha_j^2 + 2\alpha_j \mathcal{D} + \beta\sigma_a + \sigma_b$$

onde

$$\sigma_a = \vec{C}^2_{\Delta'} + \mathcal{D}^2_{\Delta'} - \vec{C}^2_\pi - \mathcal{D}^2_\pi$$

$$\sigma_b = \vec{C}^2_\pi + \mathcal{D}^2_\pi$$

e usando a substituição de Euler

$$t - i\beta = \sqrt{-\beta^2 + h\beta + g}$$

de modo que

$$\beta = \frac{t^2 - g}{h + 2it}$$

$$\frac{d\beta}{t - i\beta} = 2\,\frac{dt}{h + 2it}$$

$$D = R(t - i\beta)$$

obtemos

$$\gamma_j^2 + E^2 = \frac{a_1}{h + 2it}\,(t - T_+)(t - T_-)$$

onde

$$a_1 = i2\alpha_j R + \sigma_a$$

$$a_2 = 2\alpha_j Rh + i2(\alpha_j^2 + \sigma_b)$$

$$a_3 = h(\alpha_j^2 + \sigma_b) - g(\sigma_a - i2\alpha_j R)$$

e

$$T_\pm = -\frac{a_2}{2a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^2 - \frac{a_3}{a_1}}$$

Conseqüentemente,

$$II = \frac{\sqrt{2}\,\pi N}{B_\pi\, B_{\Delta'}}\,\frac{a'}{R}\sum_{j=1}^{5} C_j\,\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{(T_+ - T_-)}\left[\ell n\,\frac{t_+ - T_+}{t_+ - T_-} + \ell n\,\frac{t_- - T_-}{t_- - T_+}\right]$$

com

$$t_+ = i + D_{\Delta'}/R$$

$$t_- = D_\pi/R$$

Então, depois da integral no polo do núcleon P (só onda S),

$$I = - \frac{2\pi^2 N^2}{B_\pi B_N B_{\Delta'} C_N}\, aa' < \left\{ \left[\sum_{j=1}^{5} C_j \; arctg \frac{C_N}{\alpha_j + D_N} \right] x \right.$$

$$\left. x \; \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{5} C_k \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{(T_+ - T_-)} \left(\ell n \frac{t_+ - T_+}{t_+ - T_-} + \ell n \frac{t_- - T_-}{t_- - T_+} \right) \right] \right\} >$$

APÊNDICE C

CÁLCULO DOS ELEMENTOS DE MATRIZ ENTRE ESTADOS DE SPIN COM O FORMALISMO DOS ESPINORES

C.1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice calcularemos a amplitude de spin $F_{n'n}$ dos espalhamentos simples, duplo e corrente de troca definidas no Capítulo III.

C.2 - EXPRESSÕES GERAIS

Inicialmente calcularemos expressões que serão úteis posteriormente e que são escritas na forma

$$M_{\lambda'\lambda}(\Gamma) = \bar{u}(p' , \lambda')\Gamma\, u(p , \lambda) \qquad (C.2.1)$$

onde Γ é uma matriz de Dirac $4x4$: 1 , γ^{μ}, $\sigma^{\mu\nu}$... ; $\bar{u}(p' , \lambda')$ e $u(p , \lambda)$ são espinores de Dirac representando os estados de spin de uma partícula de spin $1/2$:

$$u(p , \lambda) = \frac{(\not{p}+m)}{\sqrt{2m(p_0+m)}} \begin{pmatrix} \chi_{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(p' , \lambda') = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0'+m)}} (\chi^{+}_{\lambda'} , 0)(\not{p}'+m)$$

Para as anti-partículas, os espinores de Dirac são

$$v(-p\ ,\ \lambda) = \frac{(-\not p+m)}{\sqrt{2m(p_o+m)}} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^c\chi_\lambda \end{bmatrix} \tag{C.2.2}$$

$$\bar{v}(-p'\ ,\ \lambda') = \frac{1}{\sqrt{2m(p_o'+m)}} (0,\ {}^c\chi^+_{\lambda'})(-\not p'+m) \tag{C.2.3}$$

onde ${}^c\chi_\lambda = C\chi_\lambda$ e C é o operador de conjugação de carga. Tanto em u como em v, os χ representam os espinores de Pauli.

No referencial de muro de tijolos $\vec{p} = -\vec{p}'$ e $p_o = p_o'$ então

$$\not p = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^o p_o - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}$$

$$\not p' = \gamma^\mu p'_\mu = \gamma^o p_o + \vec{\gamma}\cdot\vec{p}$$

logo

$$M_{\lambda'\lambda}(\Gamma) = \frac{1}{2m(p_o+m)} (\chi^+_{\lambda'}\ ,\ 0)(p_o\gamma_o+p_z\gamma_z+m)\Gamma(p_o\gamma_o-p_z\gamma_z + m) \begin{bmatrix} \chi_\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \tag{C.2.4}$$

Obs.: *i*) Nos cálculos que faremos a seguir escolheremos como eixo de quantização o eixo dos z e o vetor $\vec{p}$ ao longo deste eixo, $\vec{p} = (0\ ,\ 0\ ,\ p_z)$

2*i*) Levaremos em conta também que, na eq.C.2.4, o produto de um número impar de matrizes $\gamma_i (i = 1,\ 2,\ 3)$ dá uma contribuição nula para o traço e que a matriz γ_o pode ser substituida por 1 quando ela é aplicada ao espinor em repouso.

a) Façamos agora $\Gamma = \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (C.2.5)

onde I é a matriz identidade 2x2

Como

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \tag{C.2.6}$$

então

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_5) = \frac{1}{2m(p_0+m)} (\chi^+_{\lambda'} \; , \; 0)(p_0\gamma_0+p_z\gamma_z+m)(-p_0\gamma_0 \; + $$

$$+ \; p_z\gamma_z+m) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \tag{C.2.7}$$

Tomando

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\sigma_k (k = x \; , \; y$ e $z)$ são as matrizes $2x2$ de Pauli e sabendo que

$$(\chi'^+ \; , \; 0)\gamma_k = (0 \; , \; \chi'^+\sigma_k) \tag{C.2.8}$$

$$\gamma_k \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_k \chi \end{pmatrix} \tag{C.2.9}$$

$$\gamma_k \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k \chi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (C.2.10)$$

temos

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_5) = \frac{p_z}{m} \chi^{+}_{\lambda'} \sigma_z \chi_\lambda$$

b) Neste caso $\Gamma = \gamma_k\gamma_5$ $(k = x , y , z)$

Podemos partir da eq. C.2.7 onde fizemos o γ_5 atuar no espinor $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$. Daí, e usando as eqs. C.2.6, C.2.8, C.2.9 e C.2.10,

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_k\gamma_5) = \frac{1}{2m(p_0+m)} \left[(p_0+m)(\chi'^{+} , 0) + p_z(0 , \chi'^{+} \sigma_z)\right] x$$

$$x \left[(p_0+m) \begin{pmatrix} \sigma_k \chi \\ 0 \end{pmatrix} - p_z \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_k\sigma_z\lambda \end{pmatrix}\right]$$

Desenvolvendo o produto e usando

$$\sigma_z\sigma_k\sigma_z = - \sigma_k \qquad (k = x , y)$$

$$\sigma_z\sigma_k\sigma_z = \sigma_z \qquad (k = z)$$

chegamos a

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_k\gamma_5) = \begin{cases} \dfrac{p_0}{m} \chi'^{+} \sigma_k \chi & k = x , y \\ \chi'^{+} \sigma_k \chi & k = z \end{cases}$$

c) Agora $\Gamma = \gamma_0 \gamma_5$

Partindo de

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} \sigma_z \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

temos

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_0\gamma_5) = \frac{1}{2m(p_0+m)} \left[(p_0+m)(\chi'^{+} , 0) + p_z(0 , \chi'^{+} \sigma_z) \right] \times$$

$$\times \left[-(p_0+m) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} \sigma_z \chi \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

daí

$$M_{\lambda',\lambda}(\gamma_0\gamma_5) = 0$$

C.3 - CÁLCULOS DAS AMPLITUDES DE SPIN

a) Amplitude de spin $F_{n'n}$ da reação πN elástica.

A Fig. C.3.1 ilustra esta reação

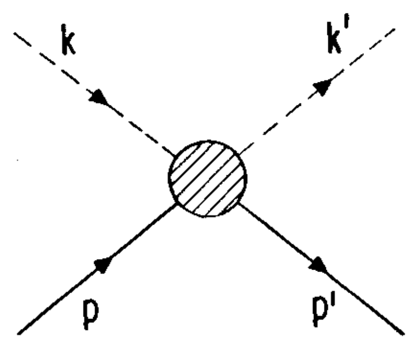


Figura C.3.1 - Reação elástica πN. A simbologia é aquela da figura. A.3.1.

$$F_{n'n} = \bar{u}(p' \, , \, n')(A+B\not{Q}) \; u(p \, , \, n)$$

A e B são as amplitudes invariantes de Dirac e

$$\not{Q} = 1/2(\not{k} + \not{k}')$$

Pelo Apêndice A.2.a

$$p = (p_0 \, , \, \vec{p})$$

$$p' = (p_0 \, , \, -\vec{p})$$

$$k = (k_0 \, , \, \vec{S} - \vec{p})$$

$$k' = (k_0 \, , \, \vec{S} + \vec{p})$$

Como estamos considerando os núcleons livres (na camada de massa)

$$(\not{p} - m) \; u(p \, , \, n) = 0$$

$$\bar{u}(p' \, , \, n')(\not{p}' - m) = 0$$

então

$$\bar{u}(p' \, , n') \; B\not{Q}u(p \, , n) = \bar{u}(p' \, , n') \; B\left(\frac{m}{p_0} \; k_0 - \vec{\gamma}.\vec{S}\right) \; u(p \, , n)$$

daí

$$F_{n'n} = \frac{1}{2m(p_0+m)} \; (\chi^+_{n'} \; , \; 0)(\not{p}'+m)(A'-B\vec{\gamma}.\vec{S})(\not{p}+m)\begin{pmatrix} \chi_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$A' = A + B \frac{m}{p_o} k_o$$

ou (Apêndice A.2)

$$A' = A + \frac{s_{\pi N} - u_{\pi N}}{4m\left(1 - \frac{t_{\pi N}}{4m^2}\right)} B$$

Efetuando-se o produto $(\not{p}' + m)(A' - B\vec{\gamma}.\vec{S})(\not{p} + m)$ e levando-se em conta as obs. i) e 2i), obtemos

$$F_{n'n} = \frac{1}{m} (\chi^+_{n'} \; , \; 0)(p_o A' + B\vec{\gamma}.\vec{S} \; \vec{\gamma}.\vec{p}) \begin{pmatrix} \chi_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por se tratar de uma reação elástica tomaremos o vetor $\vec{S}$ ao longo do eixo dos y pois, conforme vimos no Apêndice A.2.a, $\vec{S}.\vec{\Delta} = 0$ e $\vec{\Delta}$ encontra-se ao longo do eixo dos z. Então

$$\vec{S} = |\vec{S}| \; \hat{e}_y$$

$$\vec{p} = |\vec{p}| \; \hat{e}_z = p_z \; \hat{e}_z$$

onde $\hat{e}_i$ é um vetor unitário na direção do eixo $i (i = x \; , \; y)$ e

$$\vec{\gamma}.\vec{S} \; \vec{\gamma}.\vec{p} = -i|\vec{p}|\,|\vec{S}| \; \vec{\sigma}.\hat{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x \; , \; \sigma_y \; , \; \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli e $\hat{n}$ é um vetor unitário perpendicular ao plano yz .

Daí

$$F_{n'n} = \chi^{+}_{n'} \, (f + i\vec{\sigma}.\hat{n}g) \, \chi_n$$

com

$$f = \frac{p_o}{m} A'$$

$$g = - \frac{|\vec{S}|\,|\vec{p}|}{m} B$$

Atribuindo valores $(\pm 1/2)$ às polarizações n e n' obtemos

$$F_{++} = f$$

$$F_{+-} = ig$$

$F_{++}(F_{+-})$ é a amplitude de spin não-flip (flip) da reação πN.

b) **Amplitude de spin do vértice** πNN

$$M_{n'n}(\gamma_5) = \bar{u}(p' , n') \, \gamma_5 \, u(p , n) = \frac{p_z}{m} \, \chi^{+}_{n'} \, \sigma_z \, \chi_n$$

ou seja, as transições são puramente spin não-flip.

Num raciocínio análogo podemos verificar que

$$\bar{v}(-p , n) \, \gamma_5 v(-p' , n') = \frac{p_z}{m} \, \chi^{+}_{n'} \, \sigma_z \, \chi_n$$

Atribuindo-se valores $(\pm 1/2)$ as polarizações n e n'

temos

$$M_{n'n}(\gamma_5) = \frac{|\vec{p}|}{m} S_n \delta_{n'n}$$

onde $\quad S_{\pm 1/2} = \pm 1$

Visando os diagramas da corrente de troca calcularemos agora

$$M_{n'n}(k' \gamma_5) = \bar{u}(p', n') \not{k}' \gamma_5 u(p, n)$$

Inicialmente trataremos da reação inelástica $\pi d \to \pi' d$ e depois particularizamos para a reação elástica $(\pi' = \pi)$.

Vimos no Apêndice A.2.b que no caso da reação $\pi d \to \pi' d$ os vetores coplanares $\vec{S}$ e $\vec{\Delta}$ não são mais ortogonais.

Seja

$$\vec{S} = \vec{S}_\perp + \vec{S}_\Delta$$

com

$$\vec{S}_\perp = |\vec{S}_\perp| \hat{e}_y$$

$$\vec{S}_\Delta = |\vec{S}_\Delta| \hat{e}_z$$

e

$$\vec{\Delta} = |\vec{\Delta}| \hat{e}_z$$

onde $\hat{e}_i$ é um vetor unitário ao longo do eixo i (y, z), então

$$M_{\lambda'\lambda}(k'\gamma_5) = k_0 \bar{u}(p', \lambda') \gamma_0 \gamma_5 u(p, \lambda) -$$

$$- |\vec{S}_\perp| \bar{u}(p', \lambda') \gamma_y \gamma_5 u(p, \lambda) -$$

$$- |\vec{S}_\Delta + \vec{\Delta}|\bar{u}(p', \lambda')\ \gamma_z\gamma_5\ u(p, \lambda)$$

Por C.2.b e C.2.c

$$M_{\lambda',\lambda}(k'\gamma_5) = -|\vec{S}_\perp|\ \frac{p_0}{m}\ \chi^+_{\lambda'}\sigma_y\chi\ \ -|\vec{S}_\Delta+\vec{\Delta}|\chi^+_{\lambda'}\sigma_z\chi_\lambda$$

No caso das reações elásticas, $\vec{S}_\perp=\vec{S}$ e $\vec{S}_\Delta=0$.

c) Amplitude de spin para o diagrama $N\Delta$ com a amplitude de Dirac

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \bar{u}(N', n')(A+B\not{Q})(\not{P}+m)\ \gamma_5 u(N, n)$$

onde A e B já foram definidos anteriormente. Pela Fig.3.4.1.b

$$\not{Q} = 1/2(\not{k}' + \not{k}_i)$$

$$\not{P} = \not{k} + \not{N}$$

Expandindo o produto

$$F^{N\Delta}_{n'n} = A\bar{u}(N', n')\ \not{P}\gamma_5 u(N, n) +$$

$$+ mA\bar{u}(N', n')\ \gamma_5 u(N, n) +$$

$$+ B\bar{u}(N', n')\ \not{Q}\not{P}\ \gamma_5 u(N, n) +$$

$$+ mB\bar{u}(N', n')\ \not{Q}\ \gamma_5 u(N, n)$$

Vimos no Cap. III que as amplitudes de spin para os espalhamentos duplo e corrente de troca eram excluídas das integrais para $\vec{\delta}_{1,2} = 0$. Então, pela conservação do momentum-energia para a reação $\pi d \to \pi d$, temos

$$\not{k}_i = \not{N} - \not{N}'$$

$$\not{k}_P = \not{k}' + 2\not{N}' - \not{N}$$

logo

$$\not{q} = 1/2(\not{k}' + \not{N} - \not{N}')$$

e

$$\not{q}\,\not{P} = 1/2(\not{k}'\not{k}' + 2\not{k}'\not{N}' - \not{k}'\not{N} + \not{N}\not{k}' + 2\not{N}\,\not{N}' - $$
$$- \not{N}\,\not{N} - \not{N}'\not{k}' - 2\not{N}'\not{N}' + \not{N}'\not{N})$$

Depois das substituições e de aplicar a equação de Dirac para uma partícula livre

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \left[4mA + \left(\frac{3s_{\pi d} - \mu^2 - 12m^2}{4}\right)B\right]\chi_{n'n} + Ay_{n'n}$$

onde

$$\chi_{n'n} = \bar{u}(N', n')\,\gamma_5 u(N, n) \qquad (C.3.1)$$

$$y_{n'n} = \bar{u}(N', n')\,\not{k}'\gamma_5 u(N, n) \qquad (C.3.2)$$

As eqs. C.3.1 e C.3.2 já foram calculadas anterior-mente

Atribuindo valores $(\pm 1/2)$ às polarizações n e n', temos

$$F^{N\Delta}_{++} = 2|\vec{N}|A + \frac{|\vec{N}|}{4m}(3s_{\pi d} - \mu^2 - 12m^2)B$$

$$F^{N\Delta}_{+-} = i\,\frac{N_o}{m}\,|\vec{S}|A$$

$$F^{N\Delta}_{--} = -\,F^{N\Delta}_{++}$$

$$F^{N\Delta}_{-+} = -\,F^{N\Delta}_{+-}$$

d) Amplitude de spin para o diagrama ΔN com amplitude de Dirac

$$F^{\Delta N}_{n'n} = \bar{u}(N', n')\ \gamma_5(\not{p}' + m)(A + B\ \not{Q}')\ u(N, n)$$

onde, pela Fig. 3.4.c,

$$\not{Q}' = 1/2(\not{k} + \not{k}_i)$$

$$\not{p}' = \not{k}' + \not{N}'$$

Num desenvolvimento análogo àquele do diagrama $N\Delta$ obtemos

$$F^{\Delta N}_{++} = 2|\vec{N}|A + \frac{|\vec{N}|}{4m}(3s_{\pi d} - \mu^2 - 12m^2)B$$

$$F^{\Delta N}_{+-} = -i\frac{N_o}{m}|\vec{S}|A$$

$$F^{\Delta N}_{--} = -F_{++}$$

$$F^{\Delta N}_{-+} = -F_{+-}$$

e) Amplitude de spin para o diagrama $N\Delta$ com o propagador de Rarita-Schwinger

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \bar{u}(N', n')k'^{\nu}S_{\nu\mu}(q')k^{u}_{i}\ (\not{p}+m)\ \gamma_5 u(N, n)$$

onde

$$S_{\nu\mu}(q') = \frac{1}{3}(\not{q}'+M)\left[\frac{2}{M^2}q'_{\nu}q'_{\mu} - 3g_{\nu\mu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} + \frac{1}{M}(\gamma_{\nu}q'_{\mu} - \gamma_{\mu}q'_{\nu})\right] \qquad \text{C.3.3)}$$

e M é a massa da ressonância 3-3: 1232 MeV.

$$k'^{\nu} S_{\nu\mu}(q')\, k_i^{\mu} = \frac{1}{3}\,(\not{q}'+M)\left[\frac{2}{M^2}\,(k'.q')(q'.k_i) - 3k'.k_i + \right.$$

$$\left. + \not{k}'\not{k}_i + \frac{1}{M}(q'.k_i)\not{k}' - \frac{1}{M}(k'.q')\not{k}_i\right]$$

Pela conservação do momento-energia nos vértices,Fig. 3.4.1.b,

$$\not{q}' = \not{k}' + \not{N}'$$

$$\not{k}_i = \not{N} - \not{N}'$$

$$\not{p} = \not{k}' + 2\not{N}' - \not{N}$$

e pela equação de Dirac para uma partícula livre

$$\bar{u}(N', n')\,\not{N}' = m\,\bar{u}(N', n')$$

$$\not{N}\,\gamma_5 u(N, n) = -\,m\,\gamma_5 u(N, n)$$

temos

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \frac{1}{3}\,\bar{u}(N', n')\,(\not{k}'+M')\,(a_0 + b_0\not{N} + c_0\not{N}' + d_0\not{k}' + e_0\not{N}'\not{N} + f_0\not{k}'\not{N} +$$

$$+ g_0\not{N}'\not{k}' + h_0\not{N}'\not{k}'\not{N})\;\gamma_5 u(N, n) \qquad \text{(C.3.4)}$$

onde

$$M' = m + M$$

$$a_0 = \frac{1}{M}(q'.k_i)\left[\mu^2 + 4(k'.N')\right] + \frac{2}{M}(k.q)\left[m^2 - 2(N.N') - \right.$$

$$\left. - (N.k')\right] + \frac{2m}{M^2}\left[2(k.q)(q'.k_i) - 3M^2(k'.k_i)\right] +$$

$$+ 4m \left[(k'.k_i) - (k'.N) \right]$$

$$b_o = - \frac{2m}{M} (k.q) - 4(k'.N') - \mu^2$$

$$c_o = \frac{4}{M^2} (k.q)(q'.k_i) + \frac{2m}{M}(k.q) - 6(k'.k_i) + \mu^2$$

$$d_o = \frac{2m}{M}(q'.k_i) + \frac{2}{M^2} (k.q)(q'.k_i) - 3(k'.k_i) + 2(N.k') -$$

$$- 2(k'.N') + 4(N'.N) - 2m^2$$

$$e_o = \frac{2}{M} (k.q)$$

$$f_o = 2m + \frac{e_o}{2}$$

$$g_o = - \frac{2}{M} (q'.k_i) + f_o$$

$$h_o = 2$$

O produto dos quadri-momentos nas expressões acima, e nas quese seguem,estã efetuados no Apêndice A.3.c.

Expandindo a eq. C.3.4

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \frac{1}{3} \bar{u}(N', n')(A_o+A_N\not{N}+A_{N'}\not{N}'+A_{k'}\not{k}'+A_{N'N}\not{N}'\not{N}+A_{k'N}\not{k}'\not{N} +$$

$$+ A_{N'k'}\not{N}'\not{k}'+A_{N'k'N'}\not{N}'\not{k}'\not{N}) \gamma_5 u(N, n)$$

onde

$$A_o = 2(k'N')\ c_o + \mu^2 d_o + M'a_o$$

$$A_N = 2(k'.N')\ e_o + \mu^2 f_o + M'b_o$$

$$A_{N'} = -\mu^2 g_o + M'c_o$$

$$A_{k'} = a_o + 2(k'.N')\ g_o + M'd_o$$

$$A_{N'N} = -\mu^2 h_o + M'e_o$$

$$A_{k'N} = b_o + 2(k'.N')\ h_o + M'f_o$$

$$A_{N'k'} = -c_o + M'g_o$$

$$A_{N'k'N} = -e_o + M'h_o$$

Aplicando novamente a equação de Dirac para uma partícula livre obtemos, finalmente,

$$F^{N\Delta}_{n'n} = \frac{1}{3}\Theta_1 \bar{u}(N',n')\not{k}'\gamma_5 u(N,n) + \frac{1}{3}\Theta_2\ \bar{u}(N',n')\ \gamma_5 u(N,n) \tag{C.3.5}$$

com

$$\Theta_1 = A_{k'} - mA_{k'N} + mA_{N'k'} - m^2 A_{N'k'N} \tag{C.3.6}$$

$$\Theta_2 = A_o - mA_N + mA_{N'} - m^2 A_{N'N} \tag{C.3.7}$$

As eqs. C.3.1 e C.3.2 completam a eq. C.3.5. Idem para os demais diagramas.

f) Amplitude de spin para o diagrama ΔN com o propagador de Rarita-Schwinger (RS)

$$F^{\Delta N}_{n'n} = \bar{u}(N', n')\ \gamma_5(\not{p}'+m)\ k_i^{\nu}\ S_{\nu\mu}(q)\ k^{\mu}\ u(N, n)$$

Pela conservação de momento-energia nos vértices, Fig. 3.4.1.c,

$$(\not{p}'+m)(\not{q}+M) = \mu^2 + 2m^2 + mM + 4(k'.N') + (m+M)\not{k}' + $$
$$+ (M+2m)\not{N}' - m\not{N} - \not{N}'\not{k}' - \not{k}'\not{N} - \not{N}'\not{N}$$

então, num raciocínio análogo ao cálculo anterior,

$$F^{N}_{n'n} = \frac{1}{3}\ \bar{u}(N', n')(a_0 - M'\not{k}' - \not{k}'\not{N})(b_0 + c_0\not{N}' + d_0\not{k}' + \not{N}'\not{k}')\ \gamma_5 u(N, n)$$

onde

$$a_0 = \mu^2 + 4(k'.N')$$

$$b_0 = \frac{2}{M^2}\ (q.k_i)\left[(k.q) + mM\right] - \frac{m}{M}\ (k.q) - 3(k.k_i) -$$
$$- 2(k'.N) - 4(N'.N) + 4m^2$$

$$c_0 = \frac{2}{M}\ (q.k_i) - \frac{1}{M}\ (k.q)$$

$$d_0 = \frac{1}{M}\ (q.k_i) - m \quad ; \quad M' = 2m + M$$

Finalmente,

$$F^{\Delta N}_{n'n} = \frac{1}{3}\ \Theta_1\ \bar{u}(N', n')\ \not{k}'\gamma_5\ u((N, n) + \frac{1}{3}\ \Theta_2\ \bar{u}(N', n')\gamma_5\ u(N, n)$$

com Θ_1 e Θ_2 dados pelas eqs. C.3.6 e C.3.7 porém com

$$A_o = a_o b_o - 2M'(k'.N')\ c_o - M'\mu^2 d_o - 2\mu^2 (N'.N) +$$

$$+ 4(k'.N)\ x\ (k'.N')$$

$$A_N = 2\ (k'.N')\ c_o + \mu^2 d_o$$

$$A_{N'} = a_o c_o + M'\mu^2$$

$$A_{k'} = a_o d_o - M' b_o - 2(N'.N)\ c_o - 2(k'.N)\ d_o - 2M'(k'.N')$$

$$A_{N'N} = \mu^2$$

$$A_{k'N} = -\ b_o - 2(k'.N')$$

$$A_{N'k'} = a_o + M' c_o - 2(k'.N)$$

$$A_{N'k'N} = -\ c_o$$

g) Amplitude de spin para o diagrama $\Delta\Delta$ com o propagador de Rarita-Schwinger (RS)

$$F^{\Delta\Delta}_{n'n} = \bar{u}(N', n')\ k'^{\nu}\ S_{\nu\alpha}(q')\ \gamma_5 S^{\alpha\mu}(q)\ k_{\mu} u(N, n)$$

Reescreveremos aqui $S(q)$ da seguinte forma:

$$S^{\alpha\mu}(q) = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{M^2} q^{\alpha}\ q^{\mu} - 3g^{\alpha\mu} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{M} (\gamma^{\alpha} q^{\mu} - \gamma^{\mu} q^{\alpha}) \right] x$$

$$x\ (\not{q}+M)\ +\ \frac{2}{3}\ (\gamma^{\mu}q^{\alpha}\ -\ \gamma^{\alpha}q^{\mu})$$

enquanto que o $S(q')$ continua aquele da eq. C.3.3. Então

$$F^{\Delta\Delta}_{n'n} = \frac{1}{9}\ \bar{u}(N',n')(\not{q}'+M)\left[\frac{2}{M^2}\ (k'.q')q'_{\alpha}\ -\ 3k'_{\alpha}\ +\ \not{k}'\gamma_{\alpha}\ +\right.$$

$$\left.+\ \frac{1}{M}\not{k}'q'_{\alpha}\ -\ \frac{1}{M}(k'.q')\gamma_{\alpha}\right]\left[\frac{2}{M^2}(k.q)q^{\alpha}\ -\ 3k^{\alpha}\ +\ \gamma^{\alpha}\not{k}\ +\right.$$

$$\left.+\ \frac{1}{M}(k.q)\gamma^{\alpha}\ -\ \frac{1}{M}\ \not{k}q^{\alpha}\right](-\not{q}+M)\gamma_5 u(N,n)\ +$$

$$+\ \frac{1}{3}\ \bar{u}(N',n')k'^{\nu}\ S_{\nu\alpha}(q')R^{\alpha}\ \gamma_5 u(N\ ,\ n)$$

onde

$$R^{\alpha}\ =\ -\ 2\left[\not{k}q^{\alpha}\ -\ (k.q)\gamma^{\alpha}\right]$$

Seguindo o raciocínio dos $F_{n'n}$ anteriores e isolando o termo em R^{α} obtemos

$$F^{\Delta\Delta}_{n'n} = \frac{1}{9}\ \bar{u}(N',n')(\not{k}'+M')\left[a_o+b_o\not{N}+c_o\not{N}'+d_o\not{k}'+e_o\not{N}'\not{N}+f_o\not{k}'\not{N}\ +\right.$$

$$\left.+\ g_o\not{N}'\not{k}'\right](-\not{k}+M')\ \ \gamma_5 u(N,n)$$

onde

$$a_o\ =\ \frac{4}{M^4}(k.q)^2(q'.q)\ -\ \frac{2}{M^2}\ (k.q)\left[2(q'.k)\ +\ 2(k.q)\ -\right.$$

$$\left.-\ (k'.N')\ -\ 5(k'.N)\ -\ 2(N'.N)\ +\ \mu^2-m^2\right]\ +$$

$$+\ \frac{1}{M^2}\ \left[(q'.q)\ +\ 2M^2\right]\left[\mu^2\ -\ 4(k'.N')\right]\ +\ 5(k'.k)\ -$$

$$- \frac{2}{M^2} (q'.q)(k'.k)$$

$$b_o = \frac{2}{M^3}(k.q)^2 + \frac{2}{M^3}\Big[2(k.q)(q'.q) - M^2(k'.q) + M^2(k.q) \Big] +$$

$$+ \frac{1}{M}\Big[4(k'.N) - 8(k'.N') - 5\mu^2 \Big]$$

$$c_o = - b_o$$

$$d_o = \frac{2}{M} \Big[4(N'.N) + 2(k'.N) - 2(k'.N') - 4m^2 \Big]$$

$$e_o = - \frac{6}{M^2} (k.q)$$

$$f_o = \frac{2}{M^2} (q'.q) - \frac{7}{M} (k.q) + 4$$

$$g_o = f_o$$

Efetuando o produto da direita

$$F^{\Delta\Delta}_{n'n} = \frac{1}{9} \bar{u}(N',n')(\not{k}'+M')(i_o+j_o\not{N}+\ell_o\not{N}'+m_o\not{k}'+n_o\not{N}'\not{N}+p_o\not{k}'\not{N} +$$

$$+ q_o\not{N}'\not{k}'+r_o\not{N}'\not{k}'\not{N}) \gamma_5 u(N,n)$$

com

$$i_o = - \Big[2(k'.N) + 4(N'.N) - 2m^2 \Big] b_o - 2m^2 c_o -$$

$$- \Big[\mu^2 + 4(k'.N') \Big] d_o + M'a_o$$

$$j_o = 2a_o + 2m^2 e_o + \Big[\mu^2 + 4(k'.N') \Big] f_o + M'b_o$$

$$\ell_o = - 2a_o - \left[2(k'.N) + 4(N'.N) - 2m^2 \right] e_o - \left[\mu^2 + \right.$$

$$\left. + 4(k'.N') \right] g_o + M'c_o$$

$$m_o = - a_o - \left[2(k'.N) + 4(N'.N) - 2m^2 \right] f_o + 2m^2 g_o + M'd_o$$

$$n_o = 2b_o + 2c_o + Me_o$$

$$p_o = b_o + 2d_o + M'f_o$$

$$q_o = - c_o + 2d_o + Mg_o$$

$$r_o = e_o - 2f_o + 2g_o$$

Finalmente,

$$F^{\Delta\Delta}_{n,n} = \frac{1}{9} \Theta_1 \; \bar{u}(N',n') \not{k}' \gamma_5 u(N,n) + \frac{1}{9} \Theta_2 \; \bar{u}(N',n') \gamma_5 \; u(N,n)$$

com Θ_1 e Θ_2 dados pelas eqs. C.3.6 e C.3.7 onde devemos substituir o a_o, b_o, c_o, d_o, e_o, f_o, g_o e j_o por, respectivamente, i_o, j_o, ℓ_o, m_o, n_o, p_o, q_o e r_o nos A_i ($i = 0, N, N', k', \ldots$) correspondentes.

Consideremos agora o termo isolado (termo em R^α) e o rotulemos por F_I .

$$F_I = - \frac{2}{3} \bar{u}(N',n') k'^{\nu} S_{\nu\alpha}(q') \left[\not{k} q^\alpha - (k.q) \gamma^\alpha \right] \gamma_5 \; u(N,n)$$

Num raciocínio análogo aos anteriores

$$F_I = -\frac{2}{9}\,\bar{u}(N',n')(\not{k}'+M')(a_0'+b_0'\not{N}+c_0'\not{N}'+d_0'\not{k}'+e_0'\not{N}'\not{N}+f_0'\not{k}'\not{N}+$$

$$+\,g_0'\not{N}'\not{k}'+h_0'\not{N}'\not{k}'\not{N})\ \gamma_5\ u(N,n)$$

onde

$$a_0' = \frac{4}{M}(k.q)^2 - \frac{2}{M}(k.q)\Big[3(k'.N') - (k'.N) - 2(N'.N) +$$

$$+\,\mu^2 + 3m^2\Big] + \frac{1}{M}\,(q'.q)\Big[\mu^2 + 4(k'.N')\Big]$$

$$b_0' = -\frac{4}{M^2}\,(k.q)(q'.q) + 6(k'.q) - 4(k'.N') - \mu^2$$

$$c_0' = \frac{4}{M^2}\,(k.q)(q'.q) - \frac{2}{M^2}(k.q)^2 - 6(k'.q)$$

$$d_0' = \frac{2}{M^2}(k.q)(q'.q) - \frac{2}{M^2}(k.q)^2 - (k'.q) - (k.q) - 4(N'.N) +$$

$$+\,6m^2 - \mu^2$$

$$e_0' = \frac{2}{M}\,(k.q)$$

$$f_0' = -\frac{2}{M}(q'.q) + \frac{1}{M}\,(k.q)$$

$$g_0' = f_0'$$

$$h_0' = 2$$

Ou seja,

$$F_I = -\frac{2}{9}\,\Theta_1'\ \bar{u}(N',n')\not{k}'\gamma_5\ u(N,n) - \frac{2}{9}\,\Theta_2'\ \bar{u}(N',n')\ \gamma_5 u(N,n)$$

onde Θ_1' e Θ_2' são dados pelas eqs. C.3.6 e C.3.7 porém substituindo nas definições dos A_i ($i = 0, N, N', k'$ ...) correspondentes os a_0, b_0, c_0, d_0, ... por, respectivamente, a_0', b_0', c_0', d_0', ...

Concluindo, o $F^{\Delta\Delta}_{n'n}$ completo é

$$F^{\Delta\Delta}_{n'n} = \frac{1}{9}\,(\Theta_1 - 2\Theta_1')\;\bar{u}(N',n')\,\not{k}'\gamma_5\;u(N,n) + \frac{1}{9}\,(\Theta_2 -$$

$$- 2\Theta_2')\;\bar{u}(N',n')\;\gamma_5 u(N,n)$$

APÊNDICE D

OUTROS CÁLCULOS

D.1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice apresentamos alguns cálculos mais, à parte, que têm o objetivo de clarear, estender ou justificar determinadas afirmações feitas nos Capítulos e Apêndices anteriores. A ordem dos assuntos aqui abordados segue as indicações a partir do Capítulo III.

D.2 - SOBRE A AMPLITUDE πN

a) Extrapolação e Parametrização

Seja $F_{n'n}$ a amplitude de spin da reação elástica πN ilustrada na Fig. C.3.1

$$F_{n'n} = \bar{u}\ (N',\ n')\ A_{\pi N}\ u\ (N\ ,\ n)$$

onde $\bar{u}$ e u são os spinores de Dirac nos núcleons inicial e final (Apêndice C) e $A_{\pi N}$ é a amplitude de espalhamento de Dirac:

$$A_{\pi N} = A + B\ (\not{k} + \not{k}')\ /2$$

onde A e B são funções invariantes (escalares) das quantidades

$$A = A(s_{\pi N}\ ,\ t_{\pi N}\ ,\ m_1^2\ ,\ m_2^2\ ,\ m_3^2\ ,\ m_4^2)$$

$$B = B(s_{\pi N}\ ,\ t_{\pi N}\ ,\ m_1^2\ ,\ m_2^2\ .\ m_3^2\ ,\ m_4^2)$$

$t_{\pi N}$ é o momento transferido, $s_{\pi N}$ é a energia ao quadrado (no referencial do centro de massa da reação πN) e m_i^2 $(i=1,2,3$ e $4)$ é a massa ao quadrado da partícula i.

Em termos das amplitudes de Pauli f_1 e f_2 (Apêndice C.3.a)

$$F_{n',n} = \chi^+_{n'}(f_1 + i\,\hat{n}\ .\ \vec{\sigma}\ f_2)\ \chi_n$$

onde χ , χ^+ são espinores de Pauli, $\hat{n}$ um vetor unitário perpendicular ao plano de reação e $\vec{\sigma} = (\sigma_x\ ,\ \sigma_y\ ,\ \sigma_z)$ as matrizes de Pauli.

Em termos das amplitudes de ondas parciais $f_\ell^\pm$

$$f_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[f_\ell^+\ P'_{\ell+1}\ (\cos\,\theta) - f_\ell^-\ P'_{\ell-1}\ (\cos\,\theta) \right] \qquad \text{(D.2.1)}$$

$$f_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} (f_\ell^- - f_\ell^+)\ P'_\ell\ (\cos\,\theta) \qquad \text{(D.2.2)}$$

onde

$$f_\ell^\pm = \frac{e^{i\delta_\ell^\pm}\ \operatorname{sen}\,\delta_\ell^\pm}{q^*}$$

O índice $+(-)$ refere-se ao spin $J = \ell \pm 1/2$, o ℓ ao momento orbital, $\delta_\ell^\pm$ são as defasagens e q^* é o módulo do tri-momento no referencial do centro de massa. $P'_\ell(x)$ é a derivada do polinômio de Legendre de ordem ℓ.

As relações entre as amplitudes invariantes e as amplitudes de Pauli são

$$A = 4\pi\left(\frac{\sqrt{s_{\pi N}} + m}{E + m}\right) f_1 - 4\pi\left(\frac{\sqrt{s_{\pi N}} - m}{E - m}\right) f_2 \qquad \text{(D.2.3)}$$

$$B = 4\pi\left(\frac{1}{E + m}\right) f_1 + 4\pi\left(\frac{1}{E - m}\right) f_2 \qquad \text{(D.2.4)}$$

onde E é a energia do núcleon no centro de massa πN:

$$E = \frac{s_{\pi N} + m^2 - \mu^2}{2\sqrt{s_{\pi N}}}$$

e $m(\mu)$ é a massa do núcleon (pion).

As eqs. D.2.3 e D.2.4 são válidas se as partículas envolvidas na reação estiverem na camada de massa. Se pelos menos uma não estiver, teremos de extrapolar as amplitudes A e B para a camada de massa através de uma prescrição a escolher pois tal problema de extrapolação não tem solução única e é tratado de diferentes maneiras na literatura, Levy (81).

Num cálculo teórico onde a reação πN aparece como uma sub-reação intermediária, pelos menos duas partículas estão fora da camada de massa.

A nossa prescrição, Anjos (46), consiste em fazer a correspondência (análoga para B)

$$A(s_{\pi N}\ ,\ t_{\pi N}\ ,\ m_1^2\ ,\ m_2^2\ ,\ m_3^2\ ,\ m_4^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow A(s_{\pi N}\ ,\ t'_{\pi N}\ ,\ m^2\ ,\ \mu^2\ ,\ m^2\ ,\ \mu^2)$$

onde

$$t'_{\pi N} = -\ 2\ q^{*2}\ (1 - \cos\theta)$$

com

$$\cos\theta = \frac{2s_{\pi N}t_{\pi N} + s^2_{\pi N} - s_{\pi N}\ \Sigma\ mi^2}{F_1(s_{\pi N}, t_{\pi N}, mi^2)\,F_2(s_{\pi N}, t_{\pi N}, mi^2)} +$$

$$+ \frac{(m_1 - m_2)^2\ (m_3 - m_4)^2}{F_1(s_{\pi N}, t_{\pi N}, mi^2)\,F_2(s_{\pi N}, t_{\pi N}, mi^2)}$$

onde

$$F_1(s_{\pi N}\ ,\ t_{\pi N}\ ,\ mi^2) = \{[s_{\pi N} - (m_1 + m_2)^2][s_{\pi N} - (m_1 - m_2)^2]\}^{1/2}$$

$$F_2(s_{\pi N}\ ,\ t_{\pi N}\ ,\ mi^2) = \{[s_{\pi N} - (m_3 + m_4)^2][s_{\pi N} - (m_3 - m_4)^2]\}^{1/2}$$

θ é o novo ângulo de espalhamento no referencial do centro de massa da reação πN. A vantagem dessa prescrição é que temos sempre

$$-\ 1 \leq \cos\theta \leq 1$$

Explicitaremos agora as ondas que consideramos no cálculo das amplitudes de Pauli. Como estamos trabalhando numa região de energia onde $s_{\pi N} \leq 1.9$ Gev só guardaremos as ondas $\ell = 0\ ,\ 1$ nas eqs. D.2.1 e D.2.2. Estas ondas são as denominantes nesta região:

$$f_1(I) = f_0^+ + 3\cos\theta\ f_1^-$$

$$f_2(I) = f_1^- - f_1^+$$

onde I se refere ao isospin $(I=1/2\ ,\ 3/2)$.

Então, na notação $L_{2I\ ,\ 2J}$,

$$f_1(1/2 = S_{11} + 3\cos\theta'\ P_{13}$$

$$f_2(1/2) = P_{11} - P_{13}$$

$$f_1(3/2) = S_{31} + 3\cos\theta'\ P_{33}$$

$$f_2(3/2) = P_{31} - P_{33}$$

Na região da ressonância 3-3 onde a onda P_{33} é denominante, e parametrizando-a por uma Breit-Wigner, teremos

$$f_1^+ = \frac{M_\Delta \Gamma}{s_{\pi N} - M_\Delta^2 - iM_\Delta\Gamma} \cdot \frac{1}{q^*}$$

onde $M_\Delta = 1{,}232$ Gev.

b) Largura de ressonância 3-3.

Usando a parametrização de Wolf (73)

$$\Gamma(s_{\pi N}) = \frac{\Gamma_\Delta M_\Delta}{s_{\pi N}^{1/2} q_\Delta} \frac{q_{\pi N} u_1(R_\Delta q_{\pi N})}{u_1(R_\Delta q_\Delta)}$$

onde

$$q_{\pi N} = P(\mu^2 , m^2 , s_{\pi N})$$

$$q_\Delta = P(\mu^2 , m^2 , M_\Delta^2)$$

com

$$P(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \left[\frac{m_1^4 - 2m_1^2(m_2^2 + m_3^2) + (m_2^2 - m_3^2)}{4m_3^2}\right]^{1/2}$$

e

$$u_1(x) = \frac{1}{2x^2}\left[\frac{2x^2+1}{4x^2} \ln(4x^2+1) - 1\right]$$

$$\Gamma_\Delta = 0,114 \ Gev \ ; \ R_\Delta = 2,2 \ Gev^{-1}$$

c) Fatores de forma para os vértices πNN e $\pi N\Delta$.

Ainda pela parametrização de Wolf (73), os fatores de forma para os vértices πNN e $\pi N\Delta$ são

$$F_{\pi NN} = \left[\frac{1 + R_N^2 \, q_N^2}{1 + R_N^2 \, q_N'^2} \right]^{1/2}$$

$$F_{\pi N\Delta} = \left(\frac{q_\Delta}{q_{\pi N}} \right) \left[\frac{u_1(q_{\pi N} R'_\Delta)}{u_1(q_\Delta R'_\Delta)} \right]^{1/2}$$

onde

$$q_N = P(\mu^2 \; , \; m^2 \; , \; m^2)$$

$$q'_N = P(- \vec{\Delta}^2 \; , \; m^2 \; , \; m^2)$$

e

$$R'_\Delta = 1{,}76 \; Gev^{-1}$$

D.3 - SOBRE O VÉRTICE dNM

Seja $f = (f_0 \; , \; \vec{f})$ o quadri-momento associado ao movimento interno (movimento de Fermi) dos núcleons N e M num dêuteron em repouso. O vértice relativístico dNM é uma função de f_0 e $|\vec{f}|$ através dos invariantes N^2 e M^2 enquanto que a função de onda não relativística do dêuteron, única informação fenomenológica de que dispomos para este vértice, é função somente de $|\vec{f}|$ através do módulo do tri-momento relativo do dêuteron $\vec{f}_r = 1/2(\vec{N} - \vec{M})$. Então se faz necessário que estabeleçamos uma relação suplementar entre f_0 e $|\vec{f}|$ e com isso tenhamos condições de fazer a passagem relativística → não-relativística para o vértice dNM.

As escolhas comumente utilizadas de tal relação ou correspondem a uma função δ de Dirac proveniente da condição de camada de massa para um dos núcleons do vértice, Alberi e Bertocchi (45);Gourdin et al. (76) e Gross (74), ou correspondem à igualdade entre as massas ao quadrado dos dois núcleons, Blankenbecler e Sugar (83) e Alessandrini e Omnès (66). Escolheremos a primeira opção.

Partindo da aproximação de Gross (74), como descrito no Capítulo III,

$$\frac{1}{M^2-m^2+i\xi} \to -\frac{i\pi}{M_0}\,\delta\left(M_0-\sqrt{m^2+\vec{M}^2}\right) \tag{D.3.1}$$

Pelo Apêndice A.3.a

$$M=\frac{d}{2}-\delta \tag{D.3.2}$$

então

$$\delta_0=\frac{d_0}{2}-M_0$$

e

$$\vec{M}=\frac{\vec{d}}{2}-\vec{\delta}$$

Logo, em vista da eq. D.3.1,

$$f_0 = \frac{d_0}{2} - \left[m^2 + \left(\frac{\vec{d}}{2} - \vec{f} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(D.3.3)}$$

Fixamos então a componente de energia f_0 do quadri-momento de Fermi f. No limite onde

$$\frac{4}{d_0^{\,2}} \, (\vec{f} - \vec{d}) \cdot \vec{f} << 1$$

temos

$$f_0 = \frac{1}{d_0} \, (\vec{d} - \vec{f}) \cdot \vec{f}$$

A eq. D.3.3 também pode ser obtida a partir da eq. D.3.2

$$\left(\frac{d}{2} - f \right)^2 = m^2$$

o que nos leva a

$$f^2 = d \cdot f$$

Partindo daí chegamos a eq. D.3.3

D.4 - SOBRE A DECOMPOSIÇÃO DE ISOSPIN

Usaremos aqui a seguinte notação:

V → *vértice*

F → *amplitude* πN

ΣF → *composição de isospin*

I → *isospin*

a) ESPALHAMENTO SIMPLES

Pela fig. 3.2.1

$$\Sigma F = V_{dpn} F_{\pi^+ p \to \pi^+ p} V_{dpn} + V_{dnp} F_{\pi^+ n \to \pi^+ n} V_{dnp}$$

Como

$$V_{dpn} = - V_{dnp} = 1$$

$$|\pi^+ p> = |3/2 \ , \ 3/2>$$

$$|\pi^+ n> = \sqrt{1/3} \ | \ 3/2 \ , \ 1/3> + \sqrt{2/3} \ | \ 1/2 \ , \ 1/2>$$

então

$$F_{\pi^+ p \to \pi^+ p} = F^{I=3/2}$$

$$F_{\pi^+ n \to \pi n} = \frac{1}{3} F^{I=3/2} + \frac{2}{3} F^{I=1/2}$$

daí

$$\Sigma F = \frac{4}{3} F^{I=3/2} + \frac{2}{3} F^{I=1/2}$$

b) *ESPALHAMENTO DUPLO*

De acordo com a Fig. 3.3.1

$$\Sigma F = V_{dnp}\, F_{\pi^+ p\to\pi^+ p}\, V_{dnp}\, F_{\pi^+ n\to\pi^+ n} + V_{dpn}\, F_{\pi^+ n\to\pi^+ n}\, x$$

$$x\, V_{dpn}\, F_{\pi^+ p\to\pi^+ p} + V_{dnp}\, F_{\pi^o p\to\pi n}\, V_{dpn}\, F_{\pi^+ n\to\pi^o p}$$

$$|\pi^o p > = \sqrt{2/3}\ |\ 3/2\ ,\ 1/2 > - \sqrt{1/3}\ |\ 1/2\ ,\ 1/2 >$$

$$F_{\pi^o p\to\pi^+ n} = \frac{\sqrt{2}}{3} F^{I=3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} F^{I=1/2}$$

logo

$$\Sigma F = \frac{4}{9} F^{I=3/2}\, F^{I=3/2} + \frac{16}{9} F^{I=3/2}\, F^{I=1/2} - \frac{2}{9} F^{I=1/2}\, F^{I=1/2}$$

c) *CORRENTE DE TROCA*

c.1) *Diagrama NΔ*

Pela Fig. 3.4.3

$$\Sigma F = V_{dnp}\, V_{\pi^o p\to p}\, V_{dnp}\, F_{\pi^o p\to\pi^+ n}\, V_{\pi^+ n\to p} +$$

$$+ V_{dnp}\, V_{\pi^+ n\to p}\, V_{dpn}\, F_{\pi^+ p\to\pi^+ p}\, V_{\pi^+ n\to p} \qquad (D.4.1)$$

$$V_{\pi^o p\to p} = < 1/2\ ,\ 1/2\ |\ 1,0 >\ |\ 1/2\ ,\ 1/2 > = -1 \qquad (D.4.2)$$

$$V_{\pi^+ n \to p} = \langle 1/2\ ,\ 1/2 \mid 1,1 \rangle \mid 1/2\ ,\ -1/2 \rangle = \sqrt{2} \qquad \text{(D.4.3)}$$

Obs.: Nas eqs. D.4.2 e D.4.3 jā apresentamos o resultado dividido pelo fator $\sqrt{1/3}$ que estā contido na constante de acoplamento do vērtice πNN.

Portanto

$$\Sigma F^{N\Delta} = -\frac{8}{3} F^{I=3/2} + \frac{2}{3} F^{I=1/2}$$

c.2) Diagrama ΔN

Pela Fig. 3.4.1.c

$$\Sigma F^{\Delta N} = F_{dnp}\, V_{\pi^o p\to p}\, V_{dnp}\, V_{\pi^+ n\to p}\, F_{\pi^+ n\to\pi^o p} + V_{dpn}\, V_{\pi^+ p\to n}\, V_{dnp}\, V_{\pi^+ n\to p}\, F_{\pi^+ p\to\pi^+ p} \qquad \text{(D.4.4)}$$

Comparando a eq. D.4.4 com a eq. D.4.1, temos

$$\Sigma F^{\Delta N} = \Sigma F^{N\Delta}$$

c.3) Diagrama $\Delta\Delta$

Pela Fig. 3.4.4

$$\Sigma F^{\Delta\Delta} = V_{dnp}\, V_{\pi^o p\to p}\, V_{dnp}\, V_{\pi^+ n\to\Delta^+}\, V_{\pi^o \Delta^+\to\Delta^+}\ \times$$
$$\times\ V_{\pi^+ n\to\Delta^+} + V_{dpn}\, V_{\pi^o n\to n}\, V_{dpn}\, V_{\pi^+ p\to\Delta^{++}}\ \times$$
$$\times\ V_{\pi^o \Delta^{++}\to\Delta^{++}}\, V_{\pi^+ p\to\Delta^{++}} + V_{dnp}\, V_{\pi^+ n\to p}\, V_{dpn}\ \times$$

$$\times\ V_{\pi^+ p\to\Delta^{++}}\ V_{\pi^+\Delta^+\to\Delta^{++}}\ V_{\pi^+ n\to\Delta^+} + V_{dpn}\ V_{\pi^- p\to n}\ \times$$

$$\times\ V_{dnp}\ V_{\pi^+ n\to\Delta^+}\ V_{\pi^-\Delta^{++}\to\Delta^+}\ V_{\pi^+ p\to\Delta^{++}}\ .$$

$$V_{\pi^+ n\to\Delta^+} = \langle 1/2\ ,\ 3/2\ |1,1\rangle|\ 1/2\ ,\ -1/2\rangle = \sqrt{1/3}$$

$$V_{\pi^0\Delta^+\to\Delta^+} = \langle 1/2\ ,\ 3/2\ |\ 1,0\ \rangle|\ 3/2\ ,\ 1/2\rangle = \sqrt{1/15}$$

$$V_{\pi^0 n\to n} = \langle -1/2\ ,\ 1/2\ |\ 1,0\rangle|\ 1/2\ ,\ -1/2\rangle = 1$$

$$V_{\pi^+ p\to\Delta^{++}} = \langle 3/2\ ,\ 3/2\ |\ 1,1\rangle\ |\ 1/2\ ,\ 1/2\rangle = 1$$

$$V_{\pi^0\Delta^{++}\to\Delta^{++}} = \langle 3/2\ ,\ 3/2\ |\ 1,0\rangle\ |\ 3/2\ ,\ 3/2\rangle = \sqrt{3/5}$$

$$V_{\pi^+\Delta^+\to\Delta^{++}} = \langle 3/2\ ,\ 3/2\ |1,1\rangle\ |\ 3/2\ ,\ 1/2\rangle = -\sqrt{2/5}$$

$$V_{\pi^- p\to n} = \langle -1/2\ ,\ 1/2\ |\ 1\ ,\ -1\rangle\ |\ 1/2\ ,\ 1/2\rangle = -\sqrt{2}$$

$$V_{\pi^-\Delta^{++}\to\Delta^+} = \langle 1/2\ ,\ 3/2\ |\ 1\ ,\ -1\rangle\ |\ 3/2\ ,\ 3/2\rangle = \sqrt{2/5}$$

Aplicando a observação que vem logo após a eq. D.3.3 aos vértices $V_{\pi N\to N}$

$$\Sigma F^{\Delta\Delta} = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}\ F^{\Delta\Delta}$$

D.5 - SOBRE A FUNÇÃO DE ONDA DO DÊUTERON

No presente trabalho utilizamos as ondas *S* e *D* de Ian J. McGee (82) para escrever a função de onda do dêuteron a qual está parametrizada pela eq. B.2.3

Onda S

$$u(r) = N \sum_{i=1}^{5} c_i e^{-\alpha_i r}$$

Onda D

$$w(r) = \rho N \sum_{i=1}^{6} d_i \alpha'_i r h_2(i\alpha'_i r)$$

$h_2(ix)$ é a função de Hankel esférica definida por

$$x h_2(ix) = e^{-x} (1 + 3/x + 3/x^2)$$

As funções de onda não normalizadas como segue

$$\int_0^{\infty} \left[u^2(r) + w^2(r) \right] dr = 1$$

Para os parâmetros temos os seguintes valores:

$$N = 0.8896\ F^{-1/2}$$

$$\rho = 0.0269$$

$\alpha_1 = 0.2338F^{-1}$ $\qquad c_1 = 1.0$

$\alpha_2 = 5.733\alpha_1$ $\qquad c_2 = -\ 6.6150$

$\alpha_3 = 12.844\alpha_1$ $\qquad c_3 = -\ 6.6150$

$\alpha_4 = 17.331\alpha_1$ $\qquad c_4 = 15.2162$

$\alpha_5 = 19.643\alpha_1$ $\qquad c_5 = -\ 8.9651$

$\alpha_1' = \alpha_1$ $\qquad d_1 = 1.0$

$\alpha_2' = 4.833\alpha_1$ $\qquad d_2 = -\ 20.34$

$\alpha_3' = 10.477\alpha_1$ $\qquad d_3 = -\ 36.60$

$\alpha_4' = 14.506\alpha_1$ $\qquad d_4 = -123.02$

$\alpha_5' = 16.868\alpha_1$ $\qquad d_5 = 305.11$

$\alpha_6' = 21.154\alpha_1$ $\qquad d_6 = -126.16$

Aqui, o momento de quadripolo $Q = 0.282F^2$, a probabilidade estado $D = 7\%$ e o range efetivo $\rho(-\xi, -\xi) = 1.749F$.

D.6 - SOBRE O ACOPLAMENTO ONDA S DO DÊUTERON

Mostraremos aqui como partindo do formalismo de Dirac obtemos o acoplamento usual em termos dos espinores de Pauli.

Definimos no Cap. III o vértice relativístico *dNM* por

$$\Psi_{\lambda,m,n}(N^2,m^2) = \frac{G}{N^2-m^2}\,\bar{u}(N,n)\,\frac{\Gamma.\xi_\lambda}{\sqrt{2}}\,v(-M,m)$$

Considerando só a onda S do dêuteron guardamos só o acoplamento vetorial

$$\Gamma\,.\,\xi_\lambda = \gamma_\mu\,\xi^\mu_\lambda = \xi_\lambda$$

No sistema de repouso do dêuteron $\xi_o = 0$. Seja

$$V(\lambda\,,\,n\,,\,m) = -\bar{u}(N\,,\,n)\,\frac{\vec{\gamma}\,.\,\vec{\xi}}{\sqrt{2}}\,(\lambda)\;v(-M\,,\,m)$$

como

$$\vec{\gamma}\,.\,\vec{\xi}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\,.\,\vec{\xi}_\lambda \\ -\vec{\sigma}\,.\,\vec{\xi}_\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x\,,\,\sigma_y\,,\,\sigma_z)$ são as matrizes de Pauli, temos

$$V(\lambda\,,\,n\,,\,m) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi^+_n\,\vec{\sigma}\,.\,\vec{\xi}_\lambda\,{}^c\chi_m$$

Por Pilkuhn (78)

$$\xi^{\mu}_{\lambda} = \begin{cases} \xi^{\mu}_{\pm} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\,(0,\ \pm 1,\ -i, 0) \\ \xi^{\mu}_{0} = (0,\ 0,\ 0,\ 1) \end{cases}$$

logo

$$\vec{\sigma}.\vec{\xi}_{1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(-\sigma_{x} - i\sigma_{y})$$

$$\vec{\sigma}.\vec{\xi}_{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\sigma_{x} - i\sigma_{y})$$

$$\vec{\sigma}.\vec{\xi}_{0} = \sigma_{z}$$

daí

$$V(\lambda\ ,\ m\ ,\ n) = -<\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ m\ n\ |\ 1\ ,\ \lambda>$$

D.7 - CÁLCULO DE INTEGRAIS PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS

a) Para o espalhamento duplo

$$I = -\frac{2\pi}{i|\vec{r}|}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{k}_{i}|\ e^{-i|\vec{k}_{i}||\vec{r}|}}{\vec{k}_{i}^{2} - \vec{k}^{2} - i\xi}\, d|\vec{k}i|$$

com $\vec{k}^{2} > 0$ e $\xi > 0$ porém infinitesimal.

Reescrevendo

$$I = -\frac{2\pi}{r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_i r}}{\left[k_i + (k+i\xi')\right]\left[k_i - (k+i\xi')\right]}\,dk_i$$

onde fizemos $A = |\vec{A}|$ e $\xi' = \dfrac{\xi}{2k}$

No plano k_i complexo, o contorno de integração apropriado para I é aquele que envolve o polo simples em $k_i = -(k+i\xi')$ ou seja, o contorno é aquele do semi-plano inferior, Fig. D.7.1. Logo

$$I = \frac{2\pi^2}{r}\, e^{ikr}$$

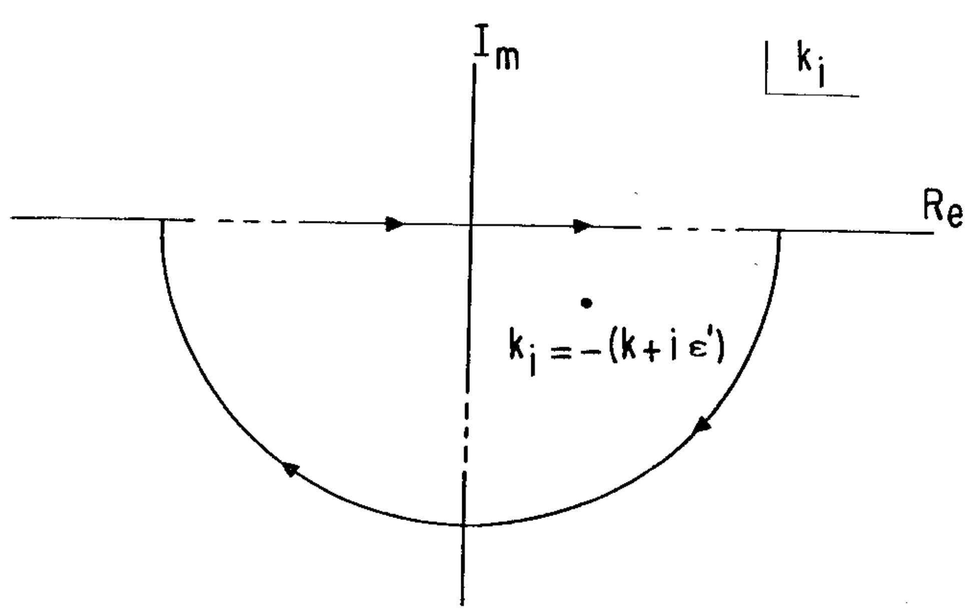


Figura D.7.1 - Contorno de integração para o polo em $k_i = -(k+i\xi')$

b) *Para a corrente de troca*

$$I = -\frac{2\pi}{r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iFr}}{F^2+D^2-i\xi}\,dF$$

onde D^2 pode ser positivo, negativo ou complexo.

Independentemente do sinal de D^2, o contorno de integração, como no caso de espalhamento duplo, será através do semi-plano inferior de plano F complexo e envolverá um polo simplem em $F = -(iD+\xi')$ onde $\xi' = \xi/2D$. Então

$$I = \frac{2\pi^2}{r}\,e^{-Dr}$$

REFERÊNCIAS

(1) - L.D.Faddeev, JETP (Sov.Phys.) 12 (1961) 1014

(2) - M.L.Goldberger and K.M.Watson, Collision Theory (1964), John Wiley and Sons (N.Y.)

(3) - Proc. of the Banff. Summer School on Intermediate Energy Physics (U.Alberta, 1970)

(4) - Proc. of early Conferences on High Energy Physics and Nuclear Structure, e.g.Uppsala (North-Holland, 1974)and Dubna (1972)

(5) - J.Hüfner, Phys. Rep. 21 (1975) 1

(6) - Proc. of the Topical Meeting on Intermediate Energy Physics (Zuoz, 1976)

(7) - Nuclear and Particle Physics at Intermediate Energy (NATO Adv. Study Institute Series), ed. J.B.Warren (Plenum, N.Y. 1976)

(8) - A.W. Thomas and R.H.Landau, Phys. Rep. 58 (1980) 121

(9) - Proc. 8th Int. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure, eds. D.F. Measday and A.W.Thomas (Vancouver, August 1979)

(10) - E.Arase et al., Phys. Rev. 90 (1953) 160

(11) - K.C.Rogers and L.M.Lederman, Phys. Rev. 1D5 (1957) 247

(12) - E.G.Pewitt et al., Phys. Rev. 131 (1963) 1826

(13) - G.Brunhart et al. Nuovo Cimento 29 (1963) 1162

(14) - A.A.Carter et al., Phys. Rev. 168 (1968) 1457

(15) - J.A.Norem, Nucl. Phys. B33 (1971) 512

(16) - L.S.Schroeder et al., Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 1813

(17) - K.Gabathuler et al., Nucl. Phys. B55 (1973) 397

(18) - R.H.Cole et al., Phys. Rev. C17 (1978) 681

(19) - A.Stanovnik et al., Phys. Lett. 94B (1980) 323

(20) - K.Gabathuler et al., Nucl. Phys. A350 (1980) 253

(21) - N.Giraud et al., Phys. Rev. C21 (1980) 1959

(22) - A.S.Rinat et al., Nucl. Phys. A329 (1979) 285

(23) - C.Fayard et al., Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 524

(24) - R.Frascaria et al., Phys. Lett. 91B (1980) 345

(25) - E.Ferreira and G.A.P.Munguîa Rev. Bras. Fis. Vol. Especial, Fis. Energias Intermediárias, Maio de 1980

(26) - K.Kanaî and A. Minaka, Prog. Theor. Phys. 65 (1981) 266

(27) - A.Matsuyama and K.Yazaki, Nucl. Phys. A364 (1981) 477

(28) - E.Ferreira e G.A.P.Munguia, Nota Científica 05/81- PUC/RJ (Brasil)

(29) - Mesons and Nuclei (1979) Vol. II, Eds. M.Rho and D. Wilkinson

(30) - Progress in Particle and Nucleon Physics (1976) Vols. I e II, Ed. D.Wilkinson

(31) - M.Chemtob and M.Rho, Nucl. Phys. A163 (1971) 1

(32) - W.M.Kloet and J.A.Tjon, Phys. Lett. 49B (1974) 419

(33) - J.L.Friar, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 510

(34) - D.R.Harrington, Phys. Rev. 176 (1968) 1982

(35) - L.L.Foldy and J.A.Lock, Ref. (29) pãg. 465

(36) - D.O.Riska, Proc. of the Int. Conf. on Photonuclear Reactions and Applications, vol. 1, Asilemar 1973 (Ed. B.L.Berman)

(37) - R.G.Vickson, Nucl. Phys. B26 (1971) 349

(38) - D.S.Butterworth et al., J.Phys. G: Nucl. Phys. 2 (1976) 657

(39) - M.R.Robilotta and C.Wilkin, J.Phys. G: Nucl. Phys. 4 (1978) L115

(40) - M.R.Robilotta, Phys. Lett. 92B (1980) 26

(41) - M.R.Robilotta, Tese de Doutorado (University College London - England) 1979

(42) - D.H.Harrington, Phys. Rev. B135 (1964) 358

(43) - E.S.Abers et al., Nuovo Cimento 42A (1966) 365

(44) - L.Bertocchi and A.Capella, Nuovo Cimento 51A (1967) 369

(45) - G.Alberi and L.Bertocchi, Nuovo Cimento 43A (1969) 285

(46) - J.C.Anjos et al., Nucl. Phys. A356 (1981) 383

(47) - G.F.Chew, Phys. Rev. 80 (1950) 196

(48) - G.F.Chew and M.L.Goldberger, Phys. Rev. 87 (1952) 778

(49) - R.M.Rockmore, Phys. Rev. 105 (1957) 256

(50) - C.Carlson, Phys. Rev., C2 (1970) 1224

(51) - E.Ferreira et al., Nuovo Cimento, 20A (1974) 277

(52) - V.B.Mandelzweig et al., Nucl. Phys., A256 (1976) 461

(53) - K.A.Brueckner, Phys. Rev., 89 (1953) 834

(54) - S.D.Drell and L.Verlet, Phys. Rev., 99 (1955) 849

(55) - K.Gabathuler and C.Wilkin, Nucl. Phys., B70 (1974) 215

(56) - R.J.Glauber, Phys. Rev., 100 (1955) 242

(57) - Fernbach, Serber and Taylor, Phys. Rev., 75 (1949) 1352

(58) - V.Franco and R.J.Glauber, Phys. Rev. 142 (1966) 1195

(59) - M.L.Perl, High Energy Hadron Physics (1974) John Wiley and Sons (N.Y.)

(60) - D.R.Harrington, Phys. Rev. Lett., 21 (1968) 1496

(61) - G.Fäldt and T.E.O.Ericson, Nucl. Phys., B8 (1968) 1

(62) - R.H.Landau, Nucl. Phys., B35 (1971) 390

(63) - B.A.Lippmann and J.Schwinger, Phys. Rev., 79 (1950) 469

(64) - E.Ferreira et al., Phys. Rev., C16 (1977) 2353

(65) - K.M.Watson and J.Nuttal, Topics in Several Particles Dynamics (1967), Holden-Day (S.Francisco)

(66) - V.A.Alessandrini and R.L.Omnes, Phys. Rev., 139B (1965) 167

(67) - A.W.Thomas and I.R.Afnan, Phys. Lett., 45B (1973) 437

(68) - A.W.Thomas, Nucl. Phys., A258 (1976) 417

(69) - N.Giraud et al., Phys. Rev., C19 (1979) 465

(70) - K.M.Watson, Phys. Rev., 89 (1953) 575

(71) - F.Myhrer and A.W.Thomas, Nucl. Phys., A326 (1979) 497

(72) - C.E.M.Aguiar, Tese de Mestrado (Universidade Federal do Rio de Janeiro - Brasil) 1981

(73) - G.Wolf, Phys. Rev., 182 (1966) 1538

(74) - F.Gross, Phys. Rev., 186 (1969) 1448

(75) - R.Blankenbecler and L.F.Cook, Jr., Phys. Rev., 119 (1960) 1745

(76) - M.Gourdin et al., Nuovo Cimento, 37 (1965) 524

(77) - G.W.Barry, Ann. of Phys., 73 (1972) 482

(78) - H.Pilkhun, The Interactions of Hadrons (1967), North-Holland Publishing Company

(79) - R.A.Arndt et al., Phys. Rev., D20 (1979) 651

(80) - C.Alvear, Tese de Mestrado (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - Brasil) 1977

(81) - D.Levy, Tese de Doutorado (Université de Paris VII - France) 1977

(82) - I.J.McGee, Phys. Rev., 151 (1966) 772

(83) - R.Blankenbecler and R.Sugar, Phys. Rev. 142 (1962) 1051

“ESTUDO DE CONTRIBUIÇÕES DE CORRENTE DE TROCA PARA O ESPALHAMENTO PÍON-DÉUTERON A ENERGIAS INTERMEDIÁRIAS ”

STENIO WULK ALVES DE MELO

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

João Carlos Costa dos Anjos/CBPF

Fernando Raimundo Aranha Simão/CBPF

Zieli Dutra Thome Filho/CBPF

Rio de Janeiro, 22 de março de 1983