

VALDIR BARBOSA BEZERRA

O "LOOP" DE WILSON E ALGUMAS APLICAÇÕES

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, ABRIL de 1983

- a meus pais Celso e Inês
- à minha esposa Hílma
- a minhas filhas Inês Helena
e Tanne Helena.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. J.J. Giambiagi, figura humana extraordinária, pela orientação deste trabalho, por sua amizade e dedicação ao longo de todos esses anos de convivência amiga e fraterna.

Ao Prof. C.G. Bollini, mestre e amigo, pelas várias discussões sobre este trabalho.

A Hilma de A. Bezerra pelo incentivo.

Aos Profs. A.L. Brito e J.M. e Silva por terem assumido as minhas turmas durante minha ausência de um mês do DF-UFPb.

Aos amigos M.J. Rebouças e G.M.S.S. da Silva pela hospitalidade durante parte de minha estada no Rio.

Ao colega M.A.R. Monteiro por algumas discussões.

Ao colega C.A. Romero pelo incentivo e apoio nos momentos de desânimo.

A Myriam S. Coutinho pela prestimosidade e gentileza com que sempre me atendeu.

A Helena de S. Ferreira pelo eficiente trabalho de datilografia.

A Universidade Federal da Paraíba e à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho encontra-se uma relação simples entre o loop de Wilson Clássico e o desvio angular no deslocamento paralelo. Exibe-se um exemplo de potenciais que dão cópias de campos e que fornecem o mesmo loop de Wilson Clássico para uma trajetória particular. Discute-se, em seguida, o comportamento assintótico do loop de Wilson para o instanton BPST e o méron. Usando-se a técnica de regularização dimensional para calcular o termo de 2ª ordem do loop de Wilson Quântico, investiga-se a influência de fatores geométricos para o resíduo no pólo devido a pontos de contato, cúspides e interseções, em função da dimensão ν do espaço-tempo. Finalmente, calcula-se a renormalização da carga na Eletrodinâmica Quântica fazendo uso do loop de Wilson Quântico.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 1: TEORIAS DE GAUGE E O LOOP DE WILSON</u>	7
1.1. Eletromagnetismo como uma Teoria de Gauge	9
1.2. Teoria de Yang-Mills	14
1.3. Loop de Wilson	20
<u>CAPÍTULO 2: RELAÇÃO ENTRE O "LOOP" DE WILSON E O DESVIO ANGULAR NO</u> <u>TRANSPORTE PARALELO</u>	25
2.1. Cálculo do "Loop" de Wilson	26
2.2. Transporte de Vetores no Espaço Interno	32
<u>CAPÍTULO 3: EXEMPLO DE CÓPIAS DE CAMPO QUE DÃO O MESMO "LOOP" DE WILSON</u> <u>CLÁSSICO</u>	35
3.1. Exemplo de Potenciais que dão Cópias	36
3.2. Cálculo do "Loop" de Wilson para o Instanton	38
3.3. O Cálculo do "Loop" de Wilson Clássico	41
<u>CAPÍTULO 4: COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO "LOOP" DE WILSON PARA O INSTANTON</u> <u>BPST E O MÉRON</u>	44
4.1. O Instanton BPST e o Méron	45
4.2. Cálculo do "Loop" de Wilson para o Instanton e o Méron..	46
<u>CAPÍTULO 5: SINGULARIDADES DO "LOOP" DE WILSON E A DIMENSÃO DO ESPAÇO-TEMPO</u>	50
5.1. Formalismo para o Cálculo do "loop" de Wilson Quântico..	51

5.2. Singularidades do "Loop" de Wilson em Função da Dimensão ν do Espaço-Tempo	57
5.3. Interação Entre Dois Círculos	72
<u>CAPÍTULO 6: OBTENÇÃO DA RENORMALIZAÇÃO DA CARGA NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA USANDO O "LOOP" DE WILSON</u>	78
6.1. Série Perturbativa do "Loop" de Wilson Quântico	80
6.2. Correção do Propagador Fotônico	82
CONCLUSÕES	85
<u>APÊNDICE A: OBTENÇÃO DO RESÍDUO NO PÓLO PARA A INTERAÇÃO ENTRE DOIS SEGMENTOS QUE SE CRUZAM EM TERMOS DOS RESÍDUOS DAS INTERAÇÕES ENTRE OS PARES QUE OS COMPÕEM</u>	86
<u>APÊNDICE B: O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL</u>	88
REFERÊNCIAS	96

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
2.1.1 - Arco de circunferência com centro na origem e as diversas posições angulares	29
5.2.1 - Dois segmentos que se tocam	58
5.2.2 - Dois segmentos que se cruzam	62
5.2.3 - Segmento e semi-reta que se tocam	68
6.1 - Correções radiativas de 2ª ordem ao espalhamento de um elétron por um campo externo (indicado por x)	78
B.1 - Diagrama de polarização do vácuo	90

INTRODUÇÃO

As interações fundamentais da natureza são divididas em quatro categorias, a saber: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte (ou nuclear), sendo as duas primeiras de longo alcance e as duas últimas de curto alcance.

Atualmente, existem fortes evidências⁽¹⁾ de que estas interações fundamentais da natureza sejam descritas pelas chamadas Teorias de Gauge^(2,3). Esta universalidade do princípio de gauge, ou melhor, esta estrutura comum (estrutura de gauge) das interações fundamentais representa um passo significativo no sentido de se formular uma única teoria que incorpore todas estas interações, ou seja, de unificá-las, bem como no sentido de geometrizá-las, pois, as estruturas de gauge são essencialmente geométricas.

As teorias de gauge foram originalmente desenvolvidas por Weyl⁽⁴⁾, em 1919, como uma extensão da Teoria Geral da Relatividade com o objetivo de unificar a gravitação e o eletromagnetismo, no que não foi bem sucedido. Posteriormente, Weyl⁽⁵⁾ deu uma descrição do eletromagnetismo como uma teoria de gauge numa forma que se aproxima da atual teoria de gauge com grupo de simetria interna $U(1)^*$.

O princípio de invariância de gauge local para as interações entre cargas elétricas foi generalizado para o caso

* O Eletromagnetismo é descrito pela simetria de gauge local que é designada por $U(1)$, termo que vem da Teoria de Grupos. O grupo $U(1)$ é comutativo (ou abeliano), daí o Eletromagnetismo ser dito uma teoria de gauge abeliana.

não-abeliano por Yang e Mills⁽⁶⁾, em 1954. Neste caso o grupo de simetria interna é o $SU(2)^*$. Posteriormente, em 1956, foi construída por Utiyama⁽⁷⁾ uma teoria de gauge para um grupo de simetria interna (de Lie) arbitrário.

As teorias de gauge não-abelianas (tipo Yang-Mills) foram colocadas um pouco de lado até que foram feitos dois grandes avanços no final dos anos 60. O primeiro foi o desenvolvimento de uma técnica para quantizar tais teorias feito de modo simultâneo por Fadeev e Popov⁽⁸⁾ e De Witt⁽⁹⁾. O segundo foi a prova formal feita por 't Hooft⁽¹⁰⁾ e Lee e Zinn-Justin⁽¹¹⁾ de que as teorias de gauge não-abelianas são renormalizáveis. Com isto as teorias de gauge não-abelianas adquiriram, do ponto de vista teórico, o status da bem sucedida Eletrodinâmica Quântica (EDQ)** , aumentando a crença de que estas teorias são candidatas em potencial a descreverem as outras interações fundamentais da natureza, e com isto, naturalmente , despertando um maior interesse.

Além do sucesso da Eletrodinâmica Quântica, que é um caso particular de teoria de gauge, existem outros fatos que nos levam a crer que a teoria dos campos de gauge tem a grande chance de se tornar a teoria das partículas elementares, quais sejam: 1) o extraordinário sucesso do primeiro modelo realístico que unifica as interações fracas e eletromagnéticas^(12,13),

* O grupo $SU(2)$ que é isomorfo ao $SO(3)$ - rotações no espaço ordinário - possui três geradores que não comutam entre si, daí a teoria dos campos Yang-Mills ser dita não-abeliana.

** As previsões teóricas da Eletrodinâmica Quântica estão em absoluto acordo com a experiência. A grande precisão desta teoria de gauge abeliana renormalizável aumenta a crença nas teorias de gauge não-abelianas renormalizáveis.

atualmente conhecido como modelo de Weinberg-Salam^{*} (14) ;
2) As previsões da Cromodinâmica Quântica (CDQ)^{**} (15), particularmente a liberdade assintótica (16,17,18 e 19), e provavelmente, confinamento^{***} (20).

Um fato bem estabelecido é que a CDQ descreve a dinâmica das interações fortes para pequenas distâncias. A propriedade de liberdade assintótica é a responsável pelo sucesso da teoria para pequenas distâncias, onde se pode fazer teoria de perturbação usual (21). Existe uma descrição satisfatória das interações fortes baseada nas CDQ para propriedades como, por exemplo, confinamento, que é um fenômeno típico de grandes distâncias ? Não, é a resposta.

Recentemente 't Hooft (22) e Mandelstam (23) evidenciaram a importância das variáveis dependentes da trajetória (gauge-invariant path-ordered phase factors) no estudo das propriedades a grandes distâncias das teorias de gauge não-abelianas.

A formulação das teorias de gauge não-abelianas e da CDQ, em particular, em termos de variáveis que dependem da trajetória e invariantes de gauge (24,25,26,27,28,29 e 30) tem

* Estamos nos referindo ao modelo de Weinberg-Salam propriamente dito, isto é, o modelo que tem como base o grupo de gauge $SU(2) \times U(1)$. Existe um bom número de modelos análogos ao de Weinberg-Salam, diferindo do mesmo pela escolha do grupo de gauge ou dos multipletos envolvidos.

** Teoria de gauge não-abeliana renormalizável que pretende explicar as interações fortes. Seus constituintes fundamentais são os campos fermiônicos de spin 1/2 chamados quarks e os campos bariônicos não-abelianos de spin 1 chamados gluons. Estes são os mediadores das interações. A Cromodinâmica Quântica tem simetria de gauge local $SU(3)$ e simetria global $SU(N)$, $N = 2, 3, \dots$.

*** Não existe uma dedução analítica ou argumento físico convincente mostrando que o confinamento dos quarks e gluons realmente ocorre na Cromodinâmica Quântica (CDQ).

sido objeto de grande interesse. Esta formulação é adequada para se entender o comportamento de tais teorias para grandes distâncias, pois, as variáveis envolvidas são não-locais. Uma variável natural neste caso é o chamado Loop de Wilson⁽³¹⁾ que por ser não-local se presta ao estudo de propriedades como, por exemplo, o confinamento, e sendo invariante por transformações de gauge se constitui numa variável física. É o Loop de Wilson, que definiremos mais adiante (Cap. 1) o objetivo de nosso estudo tanto a nível clássico quanto ao nível quântico.

A abordagem analítica mais interessante, no momento, para se estudar a dinâmica das teorias de gauge não-abelianas é baseada na idéia de se escrever uma equação para o valor esperado no vácuo do loop de Wilson. Obtém-se, assim, para $SU(N)$, no limite $N \rightarrow \infty$, a equação de Makeenko-Migdal⁽³²⁾ que, diga-se de passagem, é bastante difícil de resolver.

A organização deste trabalho é a seguinte:

No Capítulo 1 fazemos uma breve revisão das teorias de gauge bem como algumas considerações sobre o loop de Wilson.

Cálculos envolvendo o loop de Wilson clássico podem ser úteis para se entender melhor a física envolvida, assim como para dar uma interpretação física adequada a esta variável. Foi com este objetivo que calculamos o loop de Wilson clássico na representação vetorial do grupo das rotações para o potencial tipo instanton⁽³³⁾, no Capítulo 2. Encontramos, neste capítulo, uma relação entre o loop de Wilson e os desvios angulares de vetores transportados ao longo de contornos fechados (círculos).

Em teorias de gauge abelianas, o tensor intensidade

de campo determina localmente o potencial, a menos de uma transformação de gauge arbitrária. O mesmo não é verdade nas teorias não-abelianas, como demonstraram, exibindo um exemplo, Wu e Yang⁽³⁴⁾. Dois ou mais potenciais que não são equivalentes de gauge podem dar o mesmo tensor intensidade de campo, isto é chamado cópias de campo. No Capítulo 3 calculamos os loops de Wilson para potenciais que são cópias e verificamos a relação entre eles.

No Capítulo 4 estudamos o comportamento assintótico do loop de Wilson correspondente às soluções BPST⁽³⁵⁾ e o méron⁽³⁶⁾, das equações de Yang-Mills, pois, tal comportamento pode servir de teste para detectar a presença de determinado tipo de partículas.

No Capítulo 5 fazemos o cálculo do termo de segunda ordem da série perturbativa do loop de Wilson com o uso da regularização dimensão. Para contornos não-suaves (com angulosidade) e para contornos que se interceptam, investigamos a influência de ângulos e outros fatores geométricos no resíduo da singularidade em função da dimensão ν do espaço-tempo.

Existem procedimentos trabalhosos para se calcular a renormalização da carga na Eletrodinâmica Quântica. No Capítulo 6, calculamos a renormalização da carga na EDQ, em ordem mais baixa, usando o loop de Wilson.

Finalmente, no Apêndice A obtemos a expressão (5.2.33) com o uso de (5.2.12) e (5.2.13) e no Apêndice B fazemos uma revisão do método de regularização dimensional.

Neste trabalho existem dois termos chaves usados em suas denominações originais, que são: loop (alça) e gauge (ca

libre). Além destes existem outros de menor importância dentro do contexto deste trabalho e que são usados também em suas denominações originais.

CAPÍTULO 1

TEORIAS DE GAUGE E O LOOP DE WILSON

Fisicamente, a busca de invariâncias ou simetrias é justificável pelo fato de a toda simetria contínua da lagrangeana corresponder uma lei de conservação (Teorema de Noether)⁽³⁷⁾.

Com a descoberta de que a partir da invariância por transformações gerais de coordenadas* pode-se construir a Relatividade Geral; de que a simetria de gauge abeliana local nos fornece o eletromagnetismo, e a não-abeliana os campos não-abelianos**; ou seja, de que a partir de princípios de simetria podemos construir teorias de campo, a invariância (ou simetria) de gauge, que é uma simetria dinâmica, foi reconhecida como sendo um princípio físico que governa as interações fundamentais da natureza.

Quais foram os fatos fundamentais que motivaram a construção das teorias de gauge não-abelianas ?

Dois importantes fatos foram motivos do desenvolvimento das teorias de gauge não-abelianas. O primeiro, foi a descoberta de que a força entre os nucleons possui curto al

*Na realidade, deve-se acrescentar o princípio de equivalência.

**Além destas simetrias, temos a supersimetria que nos fornece uma teoria onde fermions e bosons são simétricos e a simetria de supergravidade que nos fornece a teoria de supergravidade.

cance* ; o segundo, a independência da intensidade da força nuclear com as cargas dos nucleons, e que levou à formulação da simetria de spin isotópico, constituindo-se na motivação principal para a construção da primeira teoria de gauge (teoria de Yang-Mills), e um ponto chave no desenvolvimento da moderna teoria de gauge (não-abeliana).

As teorias de gauge não-abelianas são formuladas de modo direto usando-se os potenciais de gauge. Nesta formulação tem-se como desvantagem o fato de os potenciais se transformarem de maneira inhomogênea, ou seja, de dependerem da escolha de gauge, e assim sendo, não serem variáveis físicas, bem como o fato de eles serem objetos locais. Diante destes fatos, os potenciais não servem para descrever as teorias de gauge não-abelianas, devendo serem vistos tão somente como quantidades auxiliares.

Qual a variável não-local, invariante por transformações de gauge, e portanto, física, apropriada para descrever as teorias de gauge não-abelianas ? Uma variável natural e importante tem sido o chamado loop de Wilson, que parece bastante adequada (o seu valor esperado no vácuo) para procurar a estrutura não-perturbativa das teorias de gauge, bem como na abordagem do problema da quantização. Vale a pena salientar que o loop de Wilson tem servido como um importante critério de confinamento⁽³¹⁾ nas teorias de gauge não-abelianas puras (i.e. ,

* O campo de gauge que é adicionado à teoria sob a exigência de que a invariância da lagrangeana seja mantida quando uma simetria global é convertida em local, não tem massa, o que implica num alcance infinito da interação. Como a força entre os nucleons é de curto alcance, o campo de gauge mediador das interações deve ter massa. Como resolver este problema ? Usando-se o mecanismo de Higgs-Kibble^(38,39) consegue-se gerar partículas com massa — como campos de gauge — superando, então, esta dificuldade.

sem quarks nem antiquarks).

Alguns progressos têm sido obtidos na reformulação da dinâmica (24,25,26,30,32 e 40) das teorias de gauge não-abelianas em termos do loop de Wilson.

O conhecimento do loop de Wilson* como um funcional sobre todos os contornos fechados implica no conhecimento, em princípio, de todas as funções de Green da teoria para uma determinada lagrangeana. Este é o ponto de partida dos trabalhos de Migdal et al. (32) e Polyakov (25,41).

1.1 - Eletromagnetismo como Uma Teoria de Gauge (2,3)

Para introduzir o conceito de invariância de gauge local vamos tomar o exemplo do Eletromagnetismo tal como é descrito pela Eletrodinâmica Quântica (EDQ), escolha que se justifica pelo fato desta teoria servir de modelo para as demais teorias de gauge. Consideremos, então a densidade lagrangeana** correspondente a uma partícula de Dirac carregada, neste caso, um elétron, descrito pelo campo fermiônico $\psi(x)$, que é ($\hbar = c = 1$)

$$L_0 = \bar{\psi}(x) (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) \quad (1.1.1)$$

onde $\psi(x)$ é um espinor complexo de Dirac de quatro componentes; as γ^μ 's são as matrizes de Dirac e $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, sendo $\mu = 0, 1, 2, 3$ um índice de Lorentz; $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, com a adaga indicando o

*Valor esperado no vácuo.

**Iremos usar simplesmente lagrangeana em lugar de densidade lagrangeana.

hermitiano conjugado.

A lagrangeana L_0 é invariante pelas transformações de fase* seguintes

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

com α um parâmetro constante**. A razão da invariância de L_0 por (1.1.2) provém do fato de que, neste caso, a derivada de $\psi(x)$ se transforma da mesma maneira que $\psi(x)$, ou seja, $\partial_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha} \partial_\mu \psi$.

O significado físico da invariância*** de L_0 por (1.1.2) é que a fase do campo $\psi(x)$ não é um observável, e por tanto, pode ser escolhida arbitrariamente.

O fato de se escolher $\alpha = \text{cte}$ implica numa correlação entre diferentes pontos do espaço-tempo, inclusive para pontos que estão fora do cone de luz respectivo o que não é fisicamente desejável. É mais desejável que a teoria seja invariante com $\alpha = \alpha(x)$ **** (função do ponto), eliminando-se com isto, a crítica anterior.

Vejamos, então, que consequências trazem as seguintes transformações

* O conjunto das transformações de fase $e^{i\alpha}$ forma o grupo abeliano unitário de uma dimensão $U(1)$.

** Neste caso dizemos que a transformação de gauge é global ou de 1ª espécie.

*** Associada a esta invariância temos uma corrente conservada $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. O fato de $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, implica na conservação da carga. Portanto, uma transformação de gauge global $U(1)$ é inteiramente equivalente à conservação da carga elétrica.

**** A transformação de gauge, agora, é dita local ou de 2ª espécie.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (1.1.3)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{e}^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)$$

Com a transformação de simetria (1.1.3) encontramos um problema que consiste no fato de agora $\partial_\mu \psi(x)$ não se transformar da mesma maneira que $\psi(x)$, mas assim

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \psi(x) + ie^{i\alpha(x)}\psi(x)\partial_\mu \alpha(x) \quad (1.1.4)$$

o que resulta na não-invariância de L_0 por (1.1.3), devido ao surgimento do gradiente de $\alpha(x)$. Agora, L_0 se transforma da seguinte maneira

$$L_0 \rightarrow L'_0 = L_0 + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\left\{\partial_\mu \alpha(x)\right\} \quad (1.1.5)$$

Que procedimento adotar para restaurar a invariância da lagrangeana ? Existe um procedimento* para construir a nova lagrangeana invariante que consiste em agregar a L_0 um termo que corresponde à interação de $\psi(x)$ com um campo vetorial sem massa**, chamado campo "compensador" – campo de gauge – que é dado por

$$L_i = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (1.1.6)$$

onde e é a constante de acoplamento da teoria (carga elétrica).

* Em geometria diferencial existe um procedimento padrão para se restaurar a invariância da lagrangeana, e que consiste na introdução de uma nova derivada chamada derivada covariante. Aqui, podemos proceder assim definindo uma derivada covariante de gauge.

**O campo de gauge A_μ é introduzido de modo natural.

O campo de gauge A_μ se transforma assim*

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad . \quad (1.1.7)$$

Sob a transformação (1.1.7), o termo de interação se transforma em,

$$L_i \rightarrow L'_i = L_i - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \left[\partial_\mu \alpha(x) \right] \quad (1.1.8)$$

A nova lagrangeana L invariante de gauge** é a soma de L_0 e L_i . Então \tilde{L} é dada por

$$L = \bar{\psi}(x) (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad . \quad (1.1.9)$$

Podemos escrever L na seguinte forma:

$$L = \bar{\psi} [-i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi \equiv \bar{\psi} (-i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \quad (1.1.10)$$

onde definimos a derivada covariante de gauge por $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$. Então, comparando L_0 e L , podemos afirmar que para se construir L a partir da lagrangeana do campo livre L_0 , é bastante redefinir a derivada $\partial_\mu \psi$ de modo que $\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$.

Para completar a lagrangeana (1.1.10) devemos adicionar o termo correspondente à lagrangeana do campo de gauge livre (campo eletromagnético, no caso) que deve ser independente

* Esta transformação é conhecida da Eletrodinâmica Clássica. Ela representa a liberdade que temos de escolher A_μ sem afetar as quantidades físicas tais como os campos elétrico e magnético.

** A lagrangeana L dada por (1.1.9) é invariante pelo conjunto de transformações seguinte: $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}$ e $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$.

de ψ , invariante de Lorentz e invariante de gauge. Este termo é dado por

$$L_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (1.1.11)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Da definição da derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$, tem-se que

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu} \quad (1.1.12)$$

onde o tensor intensidade do campo eletromagnético aparece fazendo o papel de um "tensor de curvatura".

A lagrangeana completa* da teoria é portanto,

$$L_C = \bar{\Psi}(-i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.1.13)$$

Notemos que em (1.1.13) não aparece um termo proporcional a $A_\mu A^\mu$, pois, este termo não é invariante por (1.1.7). Em outras palavras, a invariância de gauge força o fóton a ter massa nula.

Vimos ao longo desta seção como construir a lagrangeana da EDQ partindo de uma lagrangeana L_0 que não contém o campo eletromagnético. Para isto, impusemos simplesmente que a nova lagrangeana construída a partir de L_0 (que é invariante por transformação de fase global) fosse invariante por transformação de fase local. Seguimos, para tanto, um caminho que formalmente é equivalente ao seguinte princípio, chamado prin-

* A equação (1.1.13) nada mais é do que a familiar lagrangeana da EDQ.

cípio de gauge: trocar em L_0 todas as derivadas ∂_μ por $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ (derivada covariante de gauge) e adicionar o termo $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ correspondente ao campo de gauge livre, pois, para que o mesmo tenha significado físico deve existir independentemente da matéria.

Em resumo, podemos afirmar que partindo da exigência de invariância de gauge local de uma lagrangeana não-eletromagnética, é possível deduzir a lagrangeana da EDQ, eq. (1.1.13), a qual nos fornece imediatamente as equações de Maxwell bem como toda a estrutura do eletromagnetismo.

1.2 - Teoria de Yang-Mills

A observação de que a intensidade da interação forte da matéria independe das cargas dos nucleons⁽⁴²⁾ foi formulada como um novo princípio de simetria através da introdução do spin isotópico. Em outras palavras, esta independência está associada à invariância da intensidade da interação forte por rotações no espaço abstrato de spin isotópico. Portanto, próton e neutron tornam-se meramente estados alternativos de uma única partícula, o nucleon, e transições* entre os estados podem ser feitas (ou imaginadas) ajustando a orientação de um indicador neste espaço de spin isotópico (espaço interno).

Em 1954, Yang-Mills⁽⁶⁾ propuseram estender a invariância de gauge local para além dos limites do eletromagnetismo. Mais exatamente, eles propuseram que a força interação for

*As transformações no espaço de spin isotópico formam o grupo SU(2), que é não-abeliano. Sua álgebra é a do momento angular.

te pode ser descrita por uma teoria de campo análoga à Eletrodinâmica. Para tanto eles postularam que o grupo de gauge local era o grupo de spin isotópico SU(2).

Queremos salientar que a teoria de Yang-Mills falhou na sua proposta original de estabelecer uma teoria das interações fortes, porém ela estabeleceu os fundamentos da moderna teoria de gauge não-abeliana.

Nesta seção desenvolvemos brevemente a teoria de gauge para a interação entre isospins (grupo de simetria local-SU(2)-não-abeliano) devida a Yang-Mills.

O nosso sistema é constituído por um próton e um neutrón. Estas partículas são diferentes estados do nucleon. A única diferença entre os dois estados é a "carga isotópica" (ou carga de spin isotópico), com o campo eletromagnético "desligado". Denotando por ψ_p e ψ_n os espinores associados ao próton e neutrón, respectivamente, pode-se escrever o espinor associado com o nucleon* sob a forma $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$.

A lagrangeana para os nucleons livres é:

$$L_0 = \bar{\psi}(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad (1.2.1)$$

L_0 tem invariância global por transformações isotópicas do tipo**

* O espaço tridimensional abstrato sobre o qual ψ é um espinor, é o espaço de spin isotópico associado com os nucleons.

** Podemos escrever $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}$ na forma $e^{i\alpha^k \sigma_k}$, onde $k = 1, 2, 3$ é um índice no espaço de spin isotópico; α^k são parâmetros reais e σ_k são os geradores do grupo SU(2) (a menos de constante), e que satisfazem à seguinte relação de comutação: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}}\end{aligned}\quad (1.2.2)$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli usuais e $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um parâmetro constante arbitrário.

A invariância de L_0 por tais transformações implica na existência de três correntes conservadas j_μ^k ($k = 1, 2, 3$) que são chamadas correntes isotópicas e são dadas por:

$$j_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\sigma^k\psi \quad . \quad (1.2.3)$$

Analogamente ao que foi feito na seção anterior podemos verificar quais as consequências de se transformar a invariância global por SU(2) da teoria de campos livres numa invariância local SU(2). Vejamos, então, que consequências trazem as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}}\end{aligned}\quad (1.2.4)$$

Sob (1.2.4), $\partial_\mu\psi$ se transforma da seguinte maneira,

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = [\partial_\mu(e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}})]\psi + e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}}\partial_\mu\psi \quad (1.2.5)$$

o que resulta na não invariância de L_0 por (1.2.4) devido ao termo $[\partial_\mu(e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}})]\psi$. Agora, L_0 se transforma em

$$L_0 \rightarrow L_0' = L_0 - i\bar{\psi}e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}}[\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}})]\psi \quad (1.2.6)$$

Em analogia com a seção 1.1 adicionaremos a L_0 um

termo que corresponde a interação de $\psi(x)$ com um campo vetorial sem massa (campo de gauge) a fim de construir uma lagrangeana invariante por (1.2.4). O termo de interação é dado por

$$L_i = -g\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma} \psi \equiv -g\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu \psi$$

onde g é a constante de acoplamento e definimos* $B_\mu \equiv \vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma} = b_\mu^k \sigma_k$ com \vec{b}_μ (b_μ^k , $k = 1, 2, 3$) o campo "compensador" (campo de Yang-Mills).

Agora, os b_μ^k 's ou B_μ 's não se transformam de maneira simples como em (1.1.7). A lei de transformação para B_μ (ou b_μ^k) é obtida impondo-se a invariância da nova lagrangeana $L_0 + L_i$ sob as transformações (1.2.4), ou seja,

$$L_0' + L_i' = L_0 - i\bar{\psi} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} [\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}})] \psi - g (\bar{\psi} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \gamma^\mu B'_\mu e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \psi) = L_0 + L_i \quad (1.2.7)$$

A eq. (1.2.7) implica que

$$L_i = -i\bar{\psi} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} [\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}})] \psi - g [\bar{\psi} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \gamma^\mu B'_\mu e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \psi] \quad (1.2.8)$$

o que após um pouco de álgebra nos fornece,

$$B'_\mu = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} B_\mu e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} + \frac{i}{g} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \partial_\mu (e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}) \quad (1.2.9)$$

Para construir a lagrangeana completa invariante de gauge local por SU(2) devemos acrescentar a $L_0 + L_i$ o seguinte

* Em alguns casos usaremos a notação matricial B_μ , e outros usaremos a notação com os índices do espaço isotópico b_μ^k .

termo, que corresponde ao campo de Yang-Mills livre*

$$L_B = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.2.10)$$

onde o traço (Tr) é tomado no espaço de isospin (interno) e $F_{\mu\nu}$ é definido como na Eletrodinâmica (ver eq.(1.1.12)) da seguinte maneira

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu} \quad (1.2.11)$$

o que dá para $F_{\mu\nu}$ a expressão,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - ig[B_\mu, B_\nu] \quad (1.2.12)$$

Observemos que agora aparece o comutador $[B_\mu, B_\nu]$ em $F_{\mu\nu}$ (comparar com o caso da Eletrodinâmica) e que é resultado do fato do grupo de simetria (SU(2)) ser não-abeliano.

A lagrangeana completa da teoria de Yang-Mills, invariante de gauge local por SU(2) é

$$L_C = \bar{\psi}(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi - g\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu \psi - \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.2.13)$$

Em L_C não aparece o termo de massa do campo B_μ . A invariância de gauge força B_μ a ter massa nula. Mas existe um mecanismo ^(38,39) para gerar massa para B_μ , superando esta dificuldade da teoria.

Podemos escrever L_C na forma seguinte

* Esta expressão é compatível com a exigência de que L_B deve ser invariante de Lorentz e invariante de gauge, além de não poder conter o campo ψ .

$$\begin{aligned}
 L_C &= \bar{\psi}[-i\gamma^\mu(\partial_\mu - igB_\mu) + m]\psi - \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\
 &= \bar{\psi}(-i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi - \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.2.14)
 \end{aligned}$$

onde $D_\mu \equiv \partial_\mu - igB_\mu = \partial_\mu - ig\vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma}$. Com esta definição de D_μ , vemos que o caminho seguido é formalmente equivalente ao chamado princípio de gauge (ver final da seção 1.1), onde agora, fizemos a substituição de ∂_μ por $\partial_\mu - ig\vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma}$.

Assim, partindo de uma teoria de campos livres, ao impormos a invariância de gauge local, somos levados à teoria com interação que não é colocada arbitrariamente na teoria, mas surge naturalmente como consequência da imposição desta invariância.

Seguindo estritamente os procedimentos adotados nesta seção é possível construir uma teoria de gauge para um grupo interno qualquer (grupo de Lie)⁽⁷⁾, G , cujos elementos são escritos na forma⁽⁴³⁾ $V(\alpha) = e^{i\alpha^a T_a}$, sendo α^a parâmetros reais e T_a os geradores de G e que satisfazem à relação $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$, onde f_{ab}^c são as constantes de estrutura do grupo.

Para construir a teoria geral, bem como as partículas (casos em que $G = U(1)$ e $G = SU(2)$) precisamos de três quantidades fundamentais que são: o potencial $A_\mu(x)^*$, que é um campo vetorial com valores na álgebra de Lie de G .

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a \quad (1.2.15)$$

* A lei de transformação para A_μ é análoga à eq. (1.2.9) com $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}$ substituída por uma $V(\alpha)$ arbitrária.

onde $A_\mu^a(x)$ é um conjunto de campos vetoriais ordinários* e T_a , como já dissemos, são os geradores de G ; a derivada D_μ e o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$, que são construídos a partir de A_μ . Com estes elementos, que são determinados a partir da imposição de que uma determinada lagrangeana da teoria livre e que é invariante com respeito à simetria global de um grupo de Lie qualquer, torne-se invariante com respeito à simetria local deste grupo, construímos uma teoria de gauge.

1.3 - Loop de Wilson

A descrição das teorias de gauge por intermédio do fator de fase** tem sua origem no tratamento quântico do eletromagnetismo feito por Dirac⁽⁴⁴⁾, que introduziu a integral de caminho do potencial para descrever a trajetória do elétron. A extensão desta técnica para teorias não-abelianas foi feita consistentemente por Mandelstam^(40,45) e Wu e Yang⁽⁴⁶⁾.

A quantidade fundamental para a formulação das teorias de gauge não-abelianas em termos de fator de fase é a matriz

$$U(c) = P \exp \left(i g \int_c A_\mu dx_\mu \right) \quad (1.3.1)$$

* O número de potenciais de gauge, para cada índice μ de Lorentz, é exatamente igual ao número de geradores, e portanto, é determinado completamente pelo grupo, independentemente da representação.

** Aqui, estamos chamando simplesmente de fator de fase à variável $U(c)$ (path dependent phase factor). Um exemplo particular de fator de fase é o operador de Wilson que corresponde a $U(c)$, sendo c uma trajetória fechada. Quando tomamos o traço do operador de Wilson obtemos, então, o chamado loop de Wilson.

onde P significa ordenamento nos índices do grupo ao longo do contorno C.

A matriz $U(c)$ (eq. (1.3.1)) toma valores no grupo de gauge G, e tem uma interpretação geométrica simples, qual seja: $U(c)$ representa o operador de transporte paralelo da teoria. Com ele podemos construir o invariante* que nos interessa, que é o loop de Wilson, tomando o seu traço e considerando a curva c fechada. Como proceder para calcular $U(c)$ para uma dada curva c ? A integral em $U(c)$ não é uma integral no sentido usual. Na realidade o símbolo $P \exp \int_c A_\mu dx_\mu$ representa uma integral multiplicativa, o que significa que para calculá-la devemos fazer o produto ordenado** ao longo da curva c de elementos do grupo de gauge em consideração. Precisamente, o que se faz é o seguinte: divide-se c em N partes limitadas por x_i e x_{i+1} . Calcula-se, então a exponencial em cada ponto x_i e faz-se o produto ordenado das exponenciais. Finalmente toma-se o limite $N \rightarrow \infty$, ou seja,

$$U(c) = P \exp \left(ig \int_c A_\mu dx_\mu \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=0}^{N-1} \exp \left((x_{i+1} - x_i)_\mu A_\mu(x_i) \right) \right] \quad (1.3.2)$$

* Além do invariante $\text{Tr} P \exp \left(\oint_c A_\mu dx_\mu \right)$, numa teoria de gauge pura podemos construir outros tais como $\text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$, $\text{Tr} F D^2 F$ (D é derivada covariante de gauge), assim como com qualquer quantidade X que se transforme assim: $X \rightarrow V X V^{-1}$ (V e G), bastando para isto tomar seu traço ou determinante. X pode ser, por exemplo, $F_{\mu\nu}$, $D_\mu F_{\rho\sigma}$, $D_\lambda P \exp \oint A_\mu dx_\mu$ e outros.

** A convenção de ordenamento é a seguinte: as exponenciais são arranjadas da direita para a esquerda com os argumentos dos A_μ 's indo do limite inferior ao superior de integração.

O loop de Wilson clássico é obtido tomando o traço de $U(c)$, ou seja,

$$W(c) = \text{Tr } P \exp\left(i g \oint_c A_\mu dx_\mu\right) \quad (1.3.3)$$

onde a integração agora é feita sobre uma curva fechada.

Consideremos, agora, o loop de Wilson quântico que é dado pelo valor esperado no vácuo do loop de Wilson clássico e que corresponde a uma média funcional sobre os campos de gauge. Em princípio esta média do loop de Wilson pode ser calculada via diagrama de Feynman ou por integração direta no grupo. Ambos os métodos, no entanto, estão associados a cálculos não-triviais que envolvem integrais de contorno que são divergentes.

Para calcular os casos não-triviais, fazemos a expansão perturbativa do valor esperado no vácuo do loop de Wilson ⁽³¹⁾, que é dado por,

$$\bar{W}(c) = \frac{1}{N} \langle W(c) \rangle_0 = \frac{1}{N} \langle \text{Tr } P \exp\left(i g \oint_c A_\mu dx_\mu\right) \rangle_0 \quad (1.3.4)$$

onde N é um fator de normalização e a média $\langle \rangle_0$ é definida ⁽³¹⁾ pela integral funcional euclideana seguinte:

$$\bar{W}(c) = \frac{1}{N} \langle W(c) \rangle_0 = \frac{1}{N} \int DA_\mu [\text{Tr } P \exp\left(i g \oint_c A_\mu dx_\mu\right)] e^{-S(A_\mu)} \quad (1.3.5)$$

onde S é a ação ($S = \int d^4x L$) do campo de gauge.

Expandindo o lado direito da definição (1.3.2) (para uma curva fechada) em série de potenciais de A_μ e tomando o limite $N \rightarrow \infty$, obtemos ⁽⁴⁷⁾,

$$U(c) = \sum_{n=0}^{\infty} (ig)^n \frac{1}{n} \oint_c dx_1^{\alpha_1} \dots \oint_c dx_n^{\alpha_n} \theta_c(x_1, \dots, x_n) \times \\ A_{\alpha_1}(x_1) \dots A_{\alpha_n}(x_n) \quad (1.3.6)$$

onde o aparecimento do fator $1/n$ se deve ao fato de existirem n equivalentes escolhas da origem x_0 para a parametrização do contorno c .

Colocando-se a expansão (1.3.6) em (1.3.4), a fim de construir uma série perturbativa para $\langle W(c) \rangle_0$, obtém-se,

$$\bar{W}(c) = \frac{1}{N} \langle W(c) \rangle_0 = \frac{1}{N} \langle \sum_n \bar{W}_n(c) \rangle_0 = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \sum_{n=0}^{\infty} (ig)^n \frac{1}{n} \oint dx_1^{\alpha_1} \dots \\ \dots \oint dx_n^{\alpha_n} \theta_c(x_1, \dots, x_n) A_{\alpha_1}(x_1) \dots A_{\alpha_n}(x_n) \rangle_0 = \\ = 1 + N^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (ig)^n \frac{1}{n} \oint dx_1^{\alpha_1} \dots \oint dx_n^{\alpha_n} \theta_c(x_1, \dots, x_n) \text{Tr} \langle A_{\alpha_1}(x_1) \dots \\ \dots A_{\alpha_n}(x_n) \rangle_0 \quad (1.3.7)$$

sendo $\langle A_{\alpha_1}(x_1) \dots A_{\alpha_n}(x_n) \rangle_0$ dada pela expansão de Wick para um produto de N campos de gauge e dada por,

$$\langle \prod_{m=1}^N A_{\alpha_m}(x_m) \rangle_0 = \sum_{\pi(N)} \prod_{m,n=1}^{N/2} D_{\alpha_m \alpha_n}(x_m - x_n) \text{ para } N \text{ par}, \quad (1.3.8)$$

e zero para N ímpar, onde $D_{\alpha_m \alpha_n}(x_m - x_n)$ é o propagador da teoria e $\pi(N)$ significa uma soma sobre todas as permutações distintas dos N índices entre as $N/2$ $D_{\alpha_m \alpha_n}$'s.

O termo de 2ª ordem em g da expansão (1.3.7) é ⁽⁴⁷⁾

$$W_2(c) = \text{Diagrama} = -\frac{1}{2} g^2 \oint dx_\alpha \oint dy_\beta D_{\alpha\beta}(x-y) \quad (1.3.9)$$

onde

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} - A \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \right) e^{ik(x-y)} \quad (1.3.10)$$

é o propagador do campo de gauge livre, sendo A uma constante que depende do gauge.

O diagrama de 2ª ordem (W_2) e também a expressão (1.3.9) são os mesmos para os casos abeliano e não-abeliano, pois, dois pontos estão sempre na mesma ordem ao longo do contorno c, e portanto, o problema do ordenamento não se põe aqui.

No termo de ordem g^4 , o caráter não-abeliano da teoria se manifesta. Neste caso, tem-se cinco diagramas que são (47),

$$W_4(c) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}$$

com os três últimos provenientes das correções de auto-energias dos propagadores dos campos de gauge livres.

CAPÍTULO 2

RELAÇÃO ENTRE O "LOOP" DE WILSON E O DESVIO ANGULAR NO TRANSPORTE PARALELO

As formulações da Cromodinâmica Quântica (CDQ) em termos dos potenciais A_μ 's tem sido criticadas pelo fato dos A_μ 's serem variáveis com cor, e portanto, não físicas. Ao contrário, o "loop" de Wilson⁽³¹⁾, que contém toda a informação dos A_μ 's^(46,48) (uma vez conhecidos para todas as trajetórias (loops) possíveis) se apresenta como um candidato apropriado a ser a variável fundamental da teoria*.

Existem, como já sabemos**, um loop de Wilson clássico,

$$W(c) = \text{Tr} P e^{ig \oint A_\mu dx_\mu}$$

e, um Quântico que é dado pelo valor esperado no vácuo $\langle W(c) \rangle_0$ do loop clássico, ou seja,

$$\langle W(c) \rangle_0 = \int DA_\mu \text{Tr} P e^{ig \oint A_\mu dx_\mu} e^{-S(A)}$$

* A formulação da CDQ em termos de loop de Wilson é motivada pelo desejo de se trabalhar com campos fundamentais invariantes de gauge, pois os presumíveis estados físicos da teoria são singletos na cor (descoloridos). O loop de Wilson também tem sido usado para caracterizar monopolos magnéticos dentro de um esquema que faz uso de grupos de homotopia.

** Ver Capítulo 1, Seção 3.

É claro que é este último o mais importante, porém pode ser muito útil, além de seguramente ser bem mais fácil, usar o loop clássico para entender melhor a física envolvida, bem como para dar uma interpretação física apropriada a esta variável.

Foi com este espírito que na ref. (49), Bollini, Giambiagi e Tiomno calcularam o loop de Wilson clássico para a configuração do instanton usando a representação espinorial do grupo de rotações.

Achamos interessante fazer o mesmo cálculo usando a representação vetorial do grupo de rotações e um potencial tipo instanton*. O cálculo nesta representação é justificado pelo fato de termos, neste caso, rotações reais, o que nos permite ter uma melhor visualização dos efeitos do transporte paralelo de um dado vetor no espaço interno, levando-nos a uma interpretação física simples do loop de Wilson.

A escolha do potencial tipo instanton é motivada pela importância do instanton e do méron como soluções da teoria de Yang-Mills (50) e nas discussões sobre confinamento (51, 52 e 53).

2.1 - Cálculo do "Loop" de Wilson

Consideremos o potencial tipo instanton dado por,

* Chamamos de potencial tipo instanton, ao potencial da forma

$$A_{\mu} = ia\sigma_{\mu\nu} \frac{x_{\nu} - x_{\nu}^0}{(x - x_0)^2 + \lambda^2},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Em particular, para $a = 1$, $X_0 = 0$ e $\lambda = 0$, temos o méron e para $a = 2$, X_0 e λ quaisquer, temos o instanton.

$$A_{\mu} = ia\eta_{\mu\nu} \frac{X_{\nu} - X_{\nu}^0}{(X - X_0)^2 + \lambda^2} \quad (2.1.1)$$

Para cada a (número real), temos um potencial tipo instanton. Por exemplo, para $a = 1$, temos o instanton e para $a = 1/2$, temos o méron* (36) na representação vetorial de SU(2).

As matrizes $\eta_{\mu\nu}$ que aparecem em (2.1.1), na representação vetorial SO(3) adjunta satisfazem às seguintes relações,

$$\eta_{ij} = \epsilon_{ijk}\eta_k \quad e \quad \eta_{i4} = \eta_i \quad (2.1.2)$$

com,

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

ou, compactamente, temos, $i(\eta_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$.

No caso específico em que os potenciais tipo instanton possuem centro em $X_1^0 = X_2^0 = 0$, temos que $A_{\mu}(X)$ para X no plano X_1X_2 , é dado por,

$$A_{\mu} = ia \frac{\eta_{\mu 1} X_1 + \eta_{\mu 2} X_2 - \eta_{\mu 3} X_3^0 - \eta_{\mu 4} X_4^0}{X^2 + \lambda^2} \quad (2.1.4)$$

com

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + (X_3^0)^2 + (X_4^0)^2 \quad (2.1.5)$$

*Na realidade $A_{\mu}(X)$ dado por (2.1.1) corresponderá ao méron para $a = 1/2$, com $\lambda = 0$ e $X_0 = 0$. Portanto, quando falamos em méron estamos tomando $\lambda = 0$.

Considerando, agora, coordenadas polares no plano X_1X_2 , encontramos,

$$A_\mu dX_\mu = (A_1 \cos\theta + A_2 \text{sen}\theta) dr + (-A_1 r \text{sen}\theta + A_2 r \cos\theta) d\theta \equiv A_r dr + A_\theta d\theta \quad (2.1.6)$$

com a identificação óbvia.

Para r constante, (2.1.6) fica simplesmente,

$$A_\mu dX_\mu = A_\theta d\theta \quad (2.1.7)$$

onde

$$A_\mu = -A_1 r \text{sen}\theta + A_2 r \cos\theta$$

Podemos escrever (2.1.7) da seguinte forma:

$$A_\mu dX_\mu = iB(\theta, r) d\theta \quad (2.1.8)$$

onde,

$$B(\theta, r) = -iA(\theta, r) = \frac{-ar^2}{X^2 + \lambda^2} \left[\eta_1 \left(\frac{X_3^0}{r} \cos\theta - \frac{X_4^0}{r} \text{sen}\theta \right) + \eta_2 \left(\frac{X_3^0}{r} \text{sen}\theta + \frac{X_4^0}{r} \cos\theta \right) + \eta_3 \right] \quad (2.1.9)$$

Analogamente ao que foi feito por Bollini, Giambiagi e Tiomno ⁽⁴⁹⁾, vamos considerar um intervalo angular $\theta_i \leq \theta \leq \theta_f$, dividi-lo em N partes iguais $\theta_f - \theta_i / N$ e calcular a exp. de $[iB(\theta_n) \Delta\theta]$ ou $\exp[A(\theta_n) \Delta\theta]$ para cada θ_n dado por $\theta_n = \frac{n}{N}(\theta_f - \theta_i)$, com $n = 1, 2, \dots, N$. Devemos, então, efetuar o seguinte produto ordenado, que denotaremos por $U_{\theta_f \theta_i}^*$

* Nos cálculos que se seguem iremos omitir o fator i na exponencial.

$$U_{\theta_f \theta_i} = P \exp \left\{ \int_{\theta_i}^{\theta_f} A(\theta) d\theta \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{A(\theta_f) \Delta\theta} e^{A(\theta_{N-1}) \Delta\theta} \dots e^{A(\theta_i) \Delta\theta} \right] \quad (2.1.10)$$

As posições angulares $\theta_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}, \theta_f$ estão indicadas na Fig. 2.1.1,

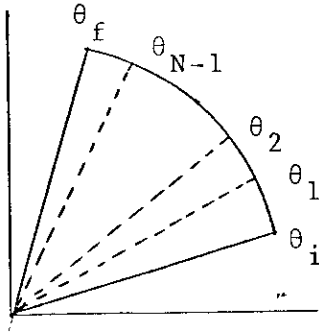


Figura 2.1.1 - Arco de circunferência com centro na origem e as diversas posições angulares.

onde

$$\theta_1 = \frac{\theta_f - \theta_i}{N}, \theta_2 = \frac{2(\theta_f - \theta_i)}{N}, \dots, \theta_{N-1} = \frac{N-1}{N} (\theta_f - \theta_i)$$

As soluções tipo instanton BPST⁽³⁵⁾ ou de uma maneira mais geral, potenciais do tipo dado por (2.1.1) possuem uma propriedade de simetria que nos permite calcular o produto ordenado (2.1.10) de modo relativamente simples. Tal propriedade é a seguinte:

$$e^{A(\theta) \Delta\theta} = e^{-i\theta \eta_3} e^{A(0) \Delta\theta} e^{i\theta \eta_3} \quad (2.1.11)$$

Usando a relação (2.1.11), podemos escrever os fatores do produto ordenado (2.1.10) da forma seguinte:

$$\begin{aligned} e^{A(\theta_i) \Delta\theta} &= e^{-i\theta_i \eta_3} e^{A(0) \Delta\theta} e^{i\theta_i \eta_3} \\ e^{A(\theta_1) \Delta\theta} &= e^{-i(\theta_i + \theta_f - \theta_i/N) \eta_3} e^{A(0) \Delta\theta} e^{i(\theta_i + \theta_f - \theta_i/N) \eta_3} \\ &\vdots \\ e^{A(\theta_f) \Delta\theta} &= e^{-i\theta_f \eta_3} e^{A(0) \Delta\theta} e^{i\theta_f \eta_3} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Substituindo (2.1.12) em (2.1.10), tem-se,

$$U_{\theta_f \theta_i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-i\theta_f \eta_3} e^{A(0) \frac{\theta_f - \theta_i}{N}} e^{i\theta_f \eta_3} e^{-i(\theta_i + \frac{N-1}{N}(\theta_f - \theta_i))\eta_3} \times \right. \\ \left. e^{A(0) \frac{\theta_f - \theta_i}{N}} e^{i(\theta_i + \frac{(N-1)(\theta_f - \theta_i)}{N})\eta_3} \times \dots \times e^{-i(\theta_i + \frac{\theta_f - \theta_i}{N})\eta_3} \times \right. \\ \left. e^{A(0) \frac{\theta_f - \theta_i}{N}} e^{i(\theta_i + \frac{\theta_f - \theta_i}{N})\eta_3} e^{-i\theta_i \eta_3} e^{A(0) \frac{\theta_f - \theta_i}{N}} e^{i\theta_i \eta_3} \right] \quad (2.1.13)$$

onde substituímos $\Delta\theta$ por $\theta_f - \theta_i/N$.

É fácil ver que $U_{\theta_f \theta_i}$ dado por (2.1.13) pode ser escrito assim,

$$U_{\theta_f \theta_i} = e^{-i\theta_f \eta_3} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{\theta_f - \theta_i}{N} A(0)} e^{i \frac{\theta_f - \theta_i}{N} \eta_3} \right]^N e^{i\theta_i \eta_3} \quad (2.1.14)$$

Apliquemos, agora, a fórmula de Baker-Hausdorff, qual seja, $e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]+\dots}$, a (2.1.14), o que resulta em,

$$U_{\theta_f \theta_i} = e^{-i\theta_f \eta_3} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{i \frac{\theta_f - \theta_i}{N} \eta_3 + \frac{\theta_f - \theta_i}{N} A(0) + 0(1/N^2) + \dots} \right]^N e^{i\theta_i \eta_3} \quad (2.1.15)$$

Desprezando-se no expoente, no limite $N \rightarrow \infty$, os termos de ordem igual ou superior a $1/N^2$, temos finalmente,

$$U_{\theta_f \theta_i} = e^{-i\theta_f \eta_3} e^{i(B(0) + \eta_3)(\theta_f - \theta_i)} e^{i\theta_i \eta_3} \quad (2.1.16)$$

Em (2.1.16) usamos a relação $B(\theta, r) \equiv -iA(\theta, r)$ (confira a relação (2.1.9)).

Podemos escrever (2.1.16) de outra forma, bastando para isto fazer o desenvolvimento em série de $\exp[i(B(0) + \eta_3)(\theta_f - \theta_i)]$ e usar a relação,

$$\eta_i^3 = \eta_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1.17)$$

(confira a eq.(2.1.3)),

o que resulta em,

$$U_{\theta_f \theta_i}(r) = \exp(-i\theta_f \eta_3) \left[1 + iM \operatorname{sen}(\theta_f - \theta_i)L + M^2(\cos(\theta_f - \theta_i)L - 1) \right] \exp(i\theta_i \eta_3) \quad (2.1.18)$$

$$L^2 = B_1^2 + B_2^2 + (B_3 + 1)^2, \quad B(0) = \vec{B}(0) \cdot \vec{n} \quad (2.1.19)$$

e

$$M = \vec{M} \cdot \vec{n} \quad ; \quad M_1 = \frac{B_1}{L} \quad ; \quad M_2 = \frac{B_2}{L} \quad \text{e} \quad M_3 = \frac{B_3 + 1}{L} \quad . \quad (2.1.20)$$

No caso particular de uma circunferência completa ($\theta_i = 0$ e $\theta_f = 2\pi$), a Eq. (2.1.18) fica,

$$U_{2\pi, 0}(r) = 1 + iM \operatorname{sen}(2\pi L) + M^2[\cos(2\pi L) - 1] \quad . \quad (2.1.21)$$

Tomando o traço de (2.1.21), tem-se, finalmente,

$$W = \operatorname{Tr} U_{2\pi, 0}(r) = 1 + 2\cos(2\pi L) \quad . \quad (2.1.22)$$

2.2 - Transporte de Vetores no Espaço Interno

O operador de deslocamento paralelo no espaço interno é o operador de Wilson, que estamos denotando por $U_{\theta_f \theta_i}$, e é dado por (2.1.18) no caso de um arco de circunferência. Para uma circunferência completa, tal operador é dado por (2.1.21).

Consideremos três vetores normalizados, $\phi_{(1)}$, $\phi_{(2)}$ e $\phi_{(3)}$, dados por,

$$\phi_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \phi_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \phi_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Se deslocarmos estes vetores ao longo de uma circunferência, os vetores resultantes serão dados por:

$$\phi'_{(i)} = U_{2\pi,0} \phi_{(i)} \quad (2.2.2)$$

onde

$$U_{2\pi,0} = P e^{i \int_0^{2\pi} B(\theta) d\theta} \quad (2.2.3)$$

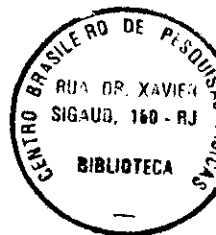
e é dado por (2.1.21).

Os vetores $\phi_{(i)}$ e $\phi'_{(i)}$ só possuem componentes reais, então, podemos definir os ângulos reais $\alpha_{(i)}$, por meio de

$$\cos \alpha_{(i)} = \tilde{\phi}_{(i)} U_{2\pi,0} \phi_{(i)} \quad (2.2.4)$$

Na Eq. (2.2.4) usamos o fato de que $\phi_{(i)}$ e $\phi'_{(i)}$ estão normalizados a um e que a métrica é diag(+,+,+).

Em nossa notação, $\tilde{\phi}_{(i)}$ é o transposto de $\phi_{(i)}$.



Usando as Eqs. (2.1.21) e (2.2.4), temos,

$$\cos\alpha_{(i)} = \tilde{\phi}_{(i)} \left[1 + i M \operatorname{sen}(2\pi L) + M^2 (\cos(2\pi L) - 1) \right] \phi_{(i)} \quad (2.2.5)$$

Os cálculos dos $\cos\alpha_{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) nos dão os seguintes resultados,

$$\cos\alpha_{(1)} = 1 + \frac{1}{L^2} \left[B_2^2 + (B_3 + 1)^2 \right] (\cos(2\pi L) - 1) \quad (2.2.6)$$

$$\cos\alpha_{(2)} = 1 + \frac{1}{L^2} \left[B_1^2 + (B_3 + 1)^2 \right] (\cos(2\pi L) - 1) \quad (2.2.7)$$

$$\cos\alpha_{(3)} = 1 + \frac{1}{L^2} (B_1^2 + B_2^2) (\cos(2\pi L) - 1) \quad (2.2.8)$$

Adicionando (2.2.6), (2.2.7) e (2.2.8), tem-se,

$$\sum_{i=1}^3 \cos\alpha_{(i)} = 1 + 2\cos(2\pi L) \quad (2.2.9)$$

Comparemos, agora, (2.2.9) com (2.1.22). Concluimos, então, que,

$$W = \operatorname{Tr} U_{2\pi, 0} = \sum_{i=1}^3 \cos\alpha_{(i)} \quad (2.2.10)$$

A equação (2.2.10) é a relação anunciada entre o "loop" de Wilson clássico e o desvio angular no deslocamento paralelo no espaço interno.

Queremos evidenciar que a Eq. (2.2.10) é válida independentemente do valor de a , isto é, para potenciais do tipo (2.1.1), quaisquer que sejam os valores assumidos por a . Obser-

vemos, por outro lado, que os valores dos ângulos são dependentes de a . Sabemos que os valores desses ângulos (desvios angulares) são uma medida da curvatura média do espaço. Portanto, para cada valor de a , temos um valor associado à curvatura do espaço interno devido à presença dos potenciais de gauge dados por (2.1.1). Assim, por exemplo, o instanton curva o espaço com diferente intensidade do méron.

Da Eq. (2.2.10) concluimos, então, que o "loop" de Wilson está associado à curvatura média do espaço interno.

CAPÍTULO 3

EXEMPLO DE CÓPIAS DE CAMPO QUE DÃO O MESMO "LOOP" DE WILSON CLÁSSICO

Na Eletrodinâmica, um fato bem conhecido é que se dois potenciais A_μ e A'_μ são equivalentes de gauge, ou seja, se eles diferem por uma transformação de gauge, que neste caso corresponde a um potencial ser igual ao outro a menos do gradiente de uma certa função, então, $F_{\mu\nu}$ é o mesmo para estes dois potenciais. Inversamente, dado um $F_{\mu\nu}$, todos os potenciais que geram este $F_{\mu\nu}$ diferem por uma transformação de gauge.

Em 1975, Wu e Yang ⁽³⁴⁾ mostraram, exibindo um exemplo, que o mesmo não ocorre em teorias não-abelianas. Ou seja, que é possível dois potenciais A_μ e A'_μ gerarem o mesmo campo $F_{\mu\nu}$ sem, no entanto, estarem ligados por uma transformação de gauge. Este fenômeno, peculiar às Teorias de Gauge não-abelianas, é conhecido como ambigüidades de Wu-Yang, ou também como cópias de campos de gauge, ou simplesmente, cópias de gauge.

A literatura existente sobre o assunto é relativamente extensa. Aqui, citaremos alguns dos trabalhos tais como os de Deser e Wilczek ⁽⁵⁴⁾; Calvo ⁽⁵⁵⁾; Roskies ⁽⁵⁶⁾; Coleman ⁽⁵⁷⁾; Halpern ⁽⁵⁸⁾; Bollini, Giambiagi e Tiomno ^(59,60); Solomon ⁽⁶¹⁾;

Weiss ⁽⁶²⁾ e Deser e Dreschsler ⁽⁶³⁾.

Sabemos que o "loop" de Wilson é um invariante de gauge, ou seja, ele não se altera por uma transformação de gauge do potencial. Por outro lado, podemos perguntar: será que existe alguma relação para os "loops" de Wilson correspondentes a potenciais que são cópias? Este ponto é interessante, pois, é sabido que não são os $F_{\mu\nu}$'s que contêm a física das Teorias de Gauge não-abelianas e portanto, a semelhança física das cópias de gauge deve ser procurada através de variáveis que sejam invariantes de gauge, tal como o "loop" de Wilson.

Neste Capítulo exibimos um exemplo de potenciais que são cópias e que dão o mesmo "loop" de Wilson clássico para uma trajetória particular (circunferência) e numa situação particular, qual seja, considerando os centros dos potenciais coincidentes com o centro da trajetória. Mostramos também que se colocarmos os centros dos potenciais ao longo do eixo perpendicular ao plano da trajetória e que passa pelo seu centro, os "loops" de Wilson já não terão mais os mesmos valores.

3.1 - Exemplo de Potenciais que dão Cópias

Vamos considerar os seguintes potenciais que são cópias de campos de gauge ⁽⁵⁹⁾,

$$A_{\mu}^{(a)} = - 2ia \sigma_{\mu\nu} \frac{X_{\nu}}{X^2} \quad (3.1.1)$$

e

$$A_{\mu}^{(1-a)} = - 2i(1-a) \sigma_{\mu\nu} \frac{X_{\nu}}{X^2} \quad , \quad (3.1.2)$$

onde $\sigma_{\mu\nu}$ obedecem às seguintes relações: $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k$ e $\sigma_{k4} = \frac{1}{2} \sigma_k$, com σ_k sendo as matrizes de Pauli.

É fácil verificar que os potenciais $A_\mu^{(a)}$ e $A_\mu^{(1-a)}$ dão os seguintes campos e correntes,

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = F_{\mu\nu}^{(1-a)} = \frac{4ia(1-a)}{X^4} (X_\mu \sigma_{\nu\rho} X_\rho - X_\nu \sigma_{\mu\rho} X_\rho + X^2 \sigma_{\mu\nu}) \quad (3.1.3)$$

e

$$J_\mu^{(a)} = - J_\mu^{(1-a)} = 8ia(1-a)(1-2a) \frac{\sigma_{\mu\rho} X_\rho}{X^4} \quad (3.1.4)$$

Também é fácil ver que os potenciais $A_\mu^{(a)}$ e $A_\mu^{(1-a)}$ dados por (3.1.1) e (3.1.2), respectivamente, não estão relacionados por uma transformação de gauge. Para ver isto, vamos nos utilizar da demonstração por redução ao absurdo. Admitamos, portanto, que os potenciais $A_\mu^{(a)}$ e $A_\mu^{(1-a)}$ estejam relacionados por uma transformação de gauge. Neste caso, $F_{\mu\nu}^{(1-a)}$ e $F_{\mu\nu}^{(a)}$ estão relacionados da seguinte maneira,

$$F_{\mu\nu}^{(1-a)} = V^{-1} F_{\mu\nu}^{(a)} V \quad (3.1.5)$$

pois, estamos admitindo que $A_\mu^{(1-a)} = V^{-1} A_\mu^{(a)} V + V^{-1} \partial_\mu V$, onde V é um elemento do grupo de gauge (grupo de simetria interna). Usando o fato de que $F_{\mu\nu}^{(1-a)} = F_{\mu\nu}^{(a)}$ (confira (3.1.3)) podemos escrever (3.1.5) da seguinte maneira,

$$VF_{\mu\nu}^{(a)} = F_{\mu\nu}^{(a)} V \quad (3.1.6)$$

o que implica, portanto, que V comuta com as matrizes de Pauli,

já que $F_{\mu\nu}^{(a)}$ contém estas matrizes.

Por outro lado, também é fácil ver que as correntes $J_{\mu}^{(1-a)}$ e $J_{\mu}^{(a)}$, com a hipótese de $A_{\mu}^{(1-a)}$ e $A_{\mu}^{(a)}$ estarem ligados pela transformação acima, se relacionam assim,

$$J_{\mu}^{(1-a)} = V^{-1} J_{\mu}^{(a)} V \quad . \quad (3.1.7)$$

Mas, como $J_{\mu}^{(1-a)} = -J_{\mu}^{(a)}$ (ver (3.1.4)), então, (3.1.7) fica,

$$V J_{\mu}^{(a)} = - J_{\mu}^{(a)} V \quad , \quad (3.1.8)$$

e portanto, V anticomuta com $J_{\mu}^{(a)}$, o que nos leva à conclusão de que V também anticomuta com as matrizes de Pauli, pois $J_{\mu}^{(a)}$ as contém. Mas isto nos leva a uma contradição. Logo, a hipótese assumida de que $A_{\mu}^{(a)}$ e $A_{\mu}^{(1-a)}$ estão relacionados por uma transformação de gauge, é falsa.

3.2 - Cálculo do "Loop" de Wilson para o Instanton

Neste parágrafo faremos uma revisão rápida para efeito de clareza do cálculo do "loop" de Wilson para o instanton⁽⁴⁹⁾, pois, os detalhes já foram dados no Capítulo 2.

Consideremos, então, o potencial do instanton, que é,

$$A_{\mu} = 2i \sigma_{\mu\nu} \frac{X_{\nu} - X_{\nu}^{(0)}}{(X - X^{(0)})^2 + \lambda^2} \quad . \quad (3.2.1)$$

Estamos interessados em obter uma expressão para o "loop" de Wilson do potencial do instanton, no caso particular de uma trajetória circular situada no plano $X_1 X_2$, com o

centro do instanton encontrando-se em um ponto qualquer do plano X_3X_4 . Portanto, necessitamos do valor de (3.2.1) no plano X_1X_2 , ou seja, $X_3 = X_4 = 0$. Por outro lado, o centro do instanton terá coordenadas $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = 0$. Teremos, então, que A_μ no plano X_1X_2 é dado por,

$$A_\mu = 2i \frac{\sigma_{\mu 1} X_2 + \sigma_{\mu 2} X_1 - \sigma_{\mu 3} X_3^0 - \sigma_{\mu 4} X_4^0}{X^2 + \lambda^2} \quad (3.2.2)$$

onde $X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^{(0)2} + X_4^{(0)2}$.

Considerando agora coordenadas polares no plano de integração e levando em conta que $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k$ e $\sigma_{k4} = \frac{1}{2} \sigma_k$, onde os σ_k 's são as matrizes de Pauli, tem-se,

$$A_\mu dX_\mu = A(\theta, r) d\theta \equiv iB(\theta, r) d\theta \quad (3.2.3)$$

com

$$B(\theta, r) = \frac{-r^2}{X^2 + \lambda^2} \left[\sigma_1 \left(\frac{X_3^0}{r} \cos\theta - \frac{X_4^0}{r} \sin\theta \right) + \right. \\ \left. + \sigma_2 \left(\frac{X_3^0}{r} \sin\theta + \frac{X_4^0}{r} \cos\theta \right) + \sigma_3 \right] \quad (3.2.4)$$

De (3.2.4) observamos que $B(\theta, r)$ pode ser escrito da seguinte maneira,

$$B(\theta, r) = e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_3} B(0, r) e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_3} \quad (3.2.5)$$

De (3.2.5) podemos escrever,

$$e^{iB(\theta) d\theta} = e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_3} e^{iB(0) d\theta} e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_3} \quad (3.2.6)$$

Agora, veremos qual o procedimento para se calcular o "loop" de Wilson clássico que é dado por $W = \text{Tr} P e^{\oint_C A_\mu dx^\mu}$, para uma circunferência*. Vamos considerar, inicialmente, o cálculo da seguinte integral ordenada,

$$U_{2\pi,0}(r) = P e^{i \int_0^{2\pi} B(\theta) d\theta} \quad (3.2.7)$$

onde fizemos uso de (3.2.3).

Para se calcular a integral ordenada (3.2.7) procede-se da seguinte maneira: considera-se o intervalo angular 2π (para a circunferência), dividindo-se o mesmo em N partes iguais a $2\pi/N$. Faz-se uso, então, de (3.2.6) para expressar o valor de $\exp(B(\theta)d\theta)$ em cada $\theta_n = 2\pi n/N$ ($n = 1, 2, \dots, N$) e finalmente, toma-se o limite $N \rightarrow \infty$. Assim procedendo, chegaremos ao seguinte resultado⁽⁴⁹⁾:

$$U_{2\pi,0}(r) = -e^{2\pi i \left(\frac{\sigma_3}{2} + B(0) \right)} \quad (3.2.8)$$

Desenvolvendo-se (3.2.8) em série, tem-se a seguinte expressão alternativa,

$$U_{2\pi,0}(r) = -\cos(2L) - i \Sigma \text{sen}(2L) \quad (3.2.9)$$

onde

$$L^2 = B_1^2 + B_2^2 + \left(B_3 + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{com } B_i \sigma_i = B(0) \quad (3.2.10)$$

* Estamos interessados neste caso particular. Para um caso mais geral, ver, Bollini, Giombiagi e Tiomno⁽⁴⁹⁾.

e

$$\Sigma = \Sigma_i \sigma_i \quad (3.2.11)$$

com

$$\Sigma_1 = \frac{B_1}{L} ; \Sigma_2 = \frac{B_2}{L} , \text{ e } \Sigma_3 = \frac{B_3}{L} + \frac{1}{2}$$

Tomando-se o traço de (3.2.9), tem-se,

$$W(r) = \text{Tr } U_{2\pi,0}(r) = -2 \cos(2\pi L) \quad (3.2.12)$$

3.3 - O Cálculo do "Loop" de Wilson Clássico

O cálculo do "loop" de Wilson $W(r)$ para os potenciais $A_\mu^{(a)}$ e $A_\mu^{(1-a)}$ é feito usando-se a Eq. (3.2.12) juntamente com as identificações dadas por (3.2.10) e (3.2.11). Escrevendo a Eq. (3.2.12) separadamente para $A_\mu^{(a)}$ e $A_\mu^{(1-a)}$ tem-se

$$W^{(a)}(r) = -2 \cos(2\pi L^{(a)}) \quad (3.3.1)$$

e

$$W^{(1-a)}(r) = -2 \cos(2\pi L^{(1-a)}) \quad (3.3.2)$$

onde

$$L^{(a)} = \pm \left(a + \frac{1}{2} \right) \quad (3.3.3)$$

e

$$L^{(1-a)} = \pm \left(\frac{3}{2} - a \right) \quad (3.3.4)$$

Substituindo $L^{(a)}$ e $L^{(1-a)}$ dados por (3.3.3) e (3.3.4), respectivamente, em (3.3.1), temos,

$$W^{(a)}(r) = -2 \cos\left(\pm 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right)\right) \quad (3.3.5)$$

e

$$W^{(1-a)}(r) = -2 \cos\left(\pm 2\pi \left(\frac{3}{2} - a \right)\right) \quad (3.3.6)$$

É imediato verificar que (3.3.5) e (3.3.6) fornecem o mesmo resultado final, ou seja, $W^{(a)} = W^{(1-a)}$ para qualquer a . Portanto, neste caso particular, o "loop" de Wilson é o mesmo para os potenciais considerados.

Suponhamos, agora, que a curva (circunferência) seja deslocada* paralelamente ao plano X_1X_2 , e que seu centro esteja em $(0,0,z_0,t_0)$. É fácil verificar com o auxílio de (3.2.10) e lembrando que $A(\theta) = iB(\theta)$, que $W^{(a)}(r)$ e $W^{(1-a)}(r)$, neste caso serão dados por,

$$W^{(a)} = -2\cos \left[\pm 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{ar^2(a+1)}{r^2+t_0^2+z_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.3.7)$$

e

$$W^{(1-a)} = -2\cos \left[\pm 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{(1-a)(2-a)r^2}{r^2+t_0^2+z_0^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.3.8)$$

De (3.3.7) e (3.3.8) vemos que $W^{(a)}$ e $W^{(1-a)}$ só serão iguais para $a = 1/2$. Mas, neste caso, os potenciais são iguais, $A_\mu^{(a)} = A_\mu^{(1-a)}$, e portanto, não nos interessa. Outra possibilidade de termos a igualdade entre $W^{(a)}$ e $W^{(1-a)}$ é quando tomamos o limite $r \rightarrow \infty$, o que significa que para circunferência de raio muito grande, o "loop" de Wilson não detecta as cópias, ou seja, não distingue os potenciais que são cópias de campos gauge.

Concluimos, portanto, que é suficiente tirar o centro da trajetória da localização dos potenciais para que não

* Na realidade, do ponto de vista dos cálculos, o que fizemos foi calcular o "loop" de Wilson com a trajetória no plano X_1X_2 , e deslocar os centros dos potenciais para o ponto $(0,0,z_0,t_0)$, o que é equivalente do ponto de vista da informação que queremos obter, a deslocar a trajetória mantendo os centros dos potenciais na origem do sistema de coordenadas.

se tenha a igualdade entre $W^{(a)}$ e $W^{(1-a)}$, a menos que $r \rightarrow \infty$, ou $a = 1/2$, o que é o caso trivial.

CAPÍTULO 4

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO "LOOP" DE WILSON PARA O INSTANTON BPST E O MÉRON

Neste Capítulo, calcularemos o "loop" de Wilson clássico para o instanton BPST⁽³⁵⁾ com $\lambda = 0$ e para o méron⁽³⁶⁾. Os cálculos serão feitos para trajetórias circulares no plano $X_1 X_2$. Em seguida, estudaremos o comportamento assintótico do "loop" de Wilson para estas soluções das equações de Yang-Mills.

A razão de considerarmos essas soluções é que elas, juntamente com o monopólo de t'Hooft-Polyakov^(64,65) se constituem em interessantes soluções das equações de Yang-Mills.

Convém ressaltar que as soluções clássicas BPST com $\lambda = 0$ e o méron estão ligados ao fenômeno de tunelamento na correspondente teoria quântica de Yang-Mills, e daí, a importância destas soluções do ponto de vista físico.

O estudo que ora faremos do comportamento assintótico do "loop" de Wilson quando $|X| \rightarrow \infty$ reveste-se de especial interesse, pois, o seu comportamento neste limite pode nos conduzir a uma forma simples de detectar a presença de determinado tipo de partículas.

4.1 - O Instanton BPST e o Méron

Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin⁽³⁵⁾ encontraram uma solução particular do tipo instanton das equações de Yang-Mills cuja característica é minimizar localmente a ação dos campos. Tal solução ficou conhecida como solução BPST. Esta solução é chamada instanton ou pseudo-partícula.

O potencial BPST, é dado por,

$$A_{\mu} = -2i\sigma_{\mu\nu} \frac{x_{\nu}}{x^2 + \lambda^2} \quad (4.1.1)$$

com $\sigma_{\mu\nu}$ obedecendo às seguintes relações: $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k$ e $\sigma_{k4} = \frac{1}{2} \sigma_k$, sendo σ_k ($k = 1, 2, 3$) as matrizes de Pauli.

O potencial BPST, como vemos, é regular em todo o espaço-tempo euclídeo, sendo dependente de cinco parâmetros, quatro para especificar a posição e um para o tamanho λ .

No limite quando $|X| \rightarrow \infty$, (4.1.1) pode ser escrito como,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} A_{\mu}(x) = g(x) a_{\mu} g^{-1}(x) \quad (4.1.2)$$

onde

$$g(x) = \frac{x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{x^2}} \quad (4.1.3)$$

é um elemento do grupo de gauge SU(2).

Portanto, quando $|X| \rightarrow \infty$, $A_{\mu}(x)$ é um gauge puro ou seja,

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} F_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (4.1.4)$$

correspondendo, então, ao vácuo.

O resultado dado por (4.1.4) nos leva à conclusão de que os campos correspondentes à solução BPST não possuem fontes no infinito.

Um outro tipo de solução das equações de Yang-Mills no espaço-tempo euclídeano, é o méron. Solução esta, descoberta por De Alfaro, Fubini e Furlan⁽³⁶⁾. Um fato que torna um tanto obscura a relevância do méron do ponto de vista físico é a existência de singularidade na origem, bem como, o valor infinito para a ação correspondente a esta solução.

O potencial do méron é,

$$A_{\mu} = -i\sigma_{\mu\nu} \frac{x_{\nu}}{X^2} \quad (4.1.5)$$

ou ainda,

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{2} g^{-1}(x) \partial_{\mu} g(x) \quad (4.1.6)$$

com $g(x)$ dado por (4.1.3).

Observemos que devido ao fator 1/2 em (4.1.6), $F_{\mu\nu}(x)$ para o méron não será identicamente nulo, ou seja, o potencial do méron não corresponde a um gauge puro.

4.2 - Cálculo do "loop" de Wilson para o Instanton e o Méron

Vamos calcular o "loop" de Wilson para o instanton e o méron juntamente. Para isto, tomaremos em (4.1.1) $\lambda = 0$, o que nos permite condensar (4.1.5) e (4.1.1) com $\lambda = 0$, em uma única expressão, que é a seguinte,

$$A_{\mu} = -2ia\sigma_{\mu\nu} \frac{x_{\nu}}{X^2} \quad (4.2.1)$$

Vamos calcular o "loop" de Wilson clássico para os potenciais dados por (4.2.1), tomando como trajetória uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas e localizada no plano X_1X_2 . Fazendo uso de (3.2.12) juntamente com (3.2.10), chegamos facilmente ao seguinte resultado*,

$$W(r) = -2\cos\left(\pm 2\pi\left(a + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (4.2.2)$$

Para $a = 1$ (caso do instanton), $W(r)$ dado por (4.2.2) assume o valor,

$$W = + 2 \text{ (v\u00e1cuo)} \quad (4.2.3)$$

Fazendo $a = 1/2$ (caso do m\u00e9ron), teremos,

$$W = - 2 \quad (4.2.4)$$

De (4.2.4) vemos que neste caso o "loop" de Wilson n\u00e3o detecta a singularidade do m\u00e9ron, pois, o mesmo \u00e9 finito para qualquer r , inclusive no limite $r \rightarrow 0$.

Podemos agora perguntar o que deve ocorrer se deslocarmos a trajet\u00f3ria paralelamente ao plano X_1X_2 , permanecendo ao longo do eixo X_3 , o seu centro. Como no cap\u00edtulo anterior (confira (3.3.7)), o "loop" de Wilson \u00e9 dado por,

$$W = -2\cos \left\{ \pm 2\pi \left[\frac{1}{4} + \frac{ar^2(a+1)}{r^2+t_0^2+z_0^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (4.2.5)$$

com $(0,0,z_0,t_0)$ sendo a localiza\u00e7\u00e3o dos potenciais.

Tamb\u00e9m neste caso vemos que o "loop" de Wilson n\u00e3o

* O resultado \u00e9 an\u00e1logo ao do cap\u00edtulo anterior para o potencial $A_\mu^{(a)}$.

detecta a singularidade do méron.

Consideremos, agora, o limite assintótico $r \rightarrow \infty$. De (4.2.5), temos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} W &= +2 \text{ (para o instanton)} \\ W &= -2 \text{ (para o méron)} \end{aligned} ,$$

resultados estes, iguais aos do primeiro caso considerado.

Portanto, no caso do instanton, quando $r \rightarrow \infty$ obtém-se o "loop" de Wilson correspondente ao vácuo. Por isso dizemos que o "loop" de Wilson não "detecta" ou vê o instanton. Ao contrário, no caso do méron, o "loop" de Wilson o detecta, pois, seu valor é diferente do correspondente ao vácuo.

Consideremos, agora, uma trajetória também no plano $X_1 X_2$ e composta por segmentos radiais e um arco. Vamos tomar o segmento radial entre ϵ e r , e em seguida tomaremos o limite $\epsilon \rightarrow 0$ (ponto singular de A_μ dado por (4.2.1)). Neste caso teremos que calcular $U_{\epsilon r}(\theta)$, que é dado por,

$$U_{\epsilon r}(\theta) = P e^{\int_{\epsilon}^r A_r dr} \quad (4.2.6)$$

O produto ordenado (4.2.6) é abeliano e portanto, pode ser calculado da maneira usual fornecendo o seguinte resultado ⁽⁴⁹⁾,

$$U_{\epsilon r}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i}{\Lambda} \arctg\left\{\frac{(r-\epsilon)\Lambda}{\Lambda^2+r\epsilon}\right\}} (X_4^0\sigma_1 - X_3^0\sigma_2) e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_3} \quad (4.2.7)$$

onde $\Lambda^2 = (X_3^0)^2 + (X_4^0)^2$.

Para o potencial A_μ dado por (4.2.1), $X_3^0 = X_4^0 = 0$ e, portanto, a contribuição da parte radial é,

$$U_{\epsilon r}(\theta) = \mathbb{I} \text{ (matriz identidade)} \quad (4.2.8)$$

independentemente de ϵ ser ou não igual a zero. Logo, quando tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$, a Eq. (4.2.8) continua válida, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_{\epsilon r}(\theta) = \mathbb{I} \quad (4.2.9)$$

A contribuição angular, por outro lado, é dada por,

$$W(\theta) = \text{Tr } U_{\theta,0}(r) = -2\cos[\theta(a + \frac{1}{2})] \quad (4.2.10)$$

O "loop" de Wilson será dado por,

$$\begin{aligned} W &= \text{Tr}(U_{\epsilon,r}(0)U_{\theta,0}(r)U_{r,\epsilon}(\theta)) = \\ &= \text{Tr } U_{\theta,0}(r) = -2\cos[\theta(a + \frac{1}{2})] \quad (4.2.11) \end{aligned}$$

Portanto, neste caso em que a trajetória contém o ponto de singularidade de A_μ , o "loop" de Wilson não detecta esta singularidade, pois, ele é finito.

SINGULARIDADES DO "LOOP" DE WILSON
E A DIMENSÃO DO ESPAÇO-TEMPO

O valor esperado no vácuo do "loop" de Wilson ⁽³¹⁾ que é definido pela integral funcional* (veja Eq. (1.3.5)) está relacionado com o potencial estático. Para ver isto claramente, considera-se um contorno ("loop") retangular de lados R, numa direção espacial e T na direção temporal. A energia potencial necessária para separar um quark e um antiquark de uma distância R é dada pela bem conhecida fórmula ⁽⁶⁶⁾

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(c) \rangle_0 .$$

Se V(R) cresce com R, por exemplo, V(R) = R, então é necessária uma energia infinita para separar os quarks, e como V(R)T é a área do retângulo, obtêm-se, portanto, a lei das áreas, que é um critério para confinamento.

Os cálculos dos termos da série perturbativa** do

* Quando $\int DA e^{-S(A)}$ não está normalizada a 1, definimos o valor esperado no vácuo de W(c) como

$$\langle W(c) \rangle_0 = \frac{\int DA_{\mu} e^{-S(A)} \text{TrP} e^{i \int c_{\mu} dx^{\mu}}}{\int DA_{\mu} e^{-S(A)}}$$

** Neste capítulo calculamos somente o termo de 2ª ordem em g (constante de acoplamento) da série.

"loop" de Wilson nos leva a resultados divergentes ^(41,67,68,69) e conseqüentemente a um problema que é o de como tratar tais infinitos. Para atacar este problema faz-se necessário o uso de um método de regularização. Neste capítulo vamos usar o método de regularização dimensional ^(70,71).

Para contornos não suaves^{*}, isto é, com angulosidade, queremos ver qual a influência do ângulo e de outros fatores geométricos no resíduo da singularidade em função do número de dimensões v do espaço-tempo. O problema da renormalização para contornos não-suaves na dimensão do espaço-tempo físico ($v = 4$), foi discutido por Brandt, Neri e Sato ⁽⁶⁸⁾.

Neste capítulo faremos, na seção 5.1 uma revisão do formalismo desenvolvido por Abud, Bollini e Giambiagi ⁽⁷²⁾ para calcular o "loop" de Wilson Quântico^{**}. Na seção 5.2 investigamos a dependência do resíduo no pólo com a dimensão v , do espaço-tempo, nos seguintes casos: i) segmentos que se tocam; ii) segmentos que se cruzam; e iii) segmento e semi-reta que se tocam. Na seção 5.3, calculamos o "loop" de Wilson para dois círculos que interagem. Investigamos, então, as divergências que surgem em função da dimensão do espaço-tempo.

5.1 - Formalismo para o Cálculo do "loop" de Wilson Quântico

Nesta seção faremos uma apresentação do formalismo desenvolvido por Abud, Bollini e Giambiagi ⁽⁷²⁾ para calcular o

^{*} Para contornos suaves tem-se mostrado ⁽⁴¹⁾ que as divergências logarítmicas podem ser absorvidas através da renormalização da carga do campo não-abeliano.

^{**} Corresponde ao valor esperado no vácuo do "loop" de Wilson Clássico.

"loop" de Wilson Quântico usando o método de regularização dimensional.

O "loop" de Wilson Quântico \tilde{c} é definido como ⁽³¹⁾,

$$\langle W(c) \rangle = \text{Tr} \int DA_\mu \tilde{c}^S(A) P e^{ig \oint_c A_\mu dx^\mu} \quad (5.1.1)$$

Desenvolvendo (5.1.1) em série, tem-se que o termo de ordem mais baixa é dado por*,

$$W^{(2)}(c) = -\frac{1}{2} \int dx^\alpha \int dy^\beta D_{\alpha\beta}(x-y) \quad (5.1.2)$$

com

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} - A \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \right\} e^{ik(x-y)}$$

sendo A uma constante que depende do gauge.

Para simplificar os cálculos nos restringiremos a curvas no plano no espaço de v dimensões. Iremos considerar também curvas abertas, e nestes casos denotaremos $W^{(2)}(c)$ por $V^{(2)}(c)$.

O propagador do glúon livre que aparece em (5.1.2) é, em v dimensões, dado por,

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} - A \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \right\} e^{ik \cdot (x-y)} \quad (5.1.3)$$

Para calcular $W^{(2)}(c)$ ou $V^{(2)}(c)$ no espaço dos momentos, vamos definir um funcional linear sobre a curva c , da seguinte maneira,

$$f_c^\alpha(k) = \int_c e^{ik \cdot x} dx^\alpha \quad (5.1.4)$$

* Estamos tomando $g = 1$.

Colocando (5.1.4) em (5.1.2), com $W^{(2)}(c)$ substituindo por $V^{(2)}(c)$, já que vamos considerar curvas abertas, temos,

$$\begin{aligned} V^{(2)}(c) &= - \frac{1}{2(2\pi)^v} \int d^v k \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} - \frac{2k_\alpha k_\beta}{(3-v)k^4} \right\} \int_c dx^\alpha e^{ik \cdot x} \int_c dy^\beta e^{-ik \cdot y} \\ &= - \frac{1}{2(2\pi)^v} \int d^v k \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} - \frac{2k_\alpha k_\beta}{(3-v)k^4} \right] f_c^\alpha(k) f_c^{\beta*}(k) . \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Em (5.1.5) estamos considerando $A = 2/3-v$ (gauge dimensional). A razão para esta escolha será justificada posteriormente.

Suponhamos que a curva c esteja contida em um subespaço de n dimensões. Vamos, então, decompor o vetor k_μ , que está no espaço de v dimensões ($v > n$), nas duas componentes seguintes: \hat{k}_μ , que é a componente de k_μ no subespaço n -dimensional que contém a curva c ; e k_μ^\perp que é a componente de k_μ no subespaço de $(v-n)$ -dimensões perpendicular ao subespaço que contém c . É claro que a seguinte relação é satisfeita,

$$k^2 = k_\perp^2 + \hat{k}^2 . \quad (5.1.6)$$

Podemos escrever, portanto, a Eq. (5.1.5) da seguinte maneira,

$$V^{(2)}(c) = - \frac{1}{2(2\pi)^v} \int d^{v-n} k_\perp \int d^n \hat{k} \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{k_\perp^2 + \hat{k}^2} - \frac{2\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta}{(3-v)(k_\perp^2 + \hat{k}^2)^2} \right] f_c^\alpha(\hat{k}) f_c^{\beta*}(\hat{k}) \quad (5.1.7)$$

Em (5.1.7) usamos o fato de que $f_c^\alpha(k)$ e $f_c^{\beta*}(k)$ só dependem de \hat{k}_μ , que é a projeção de k_μ no subespaço onde c está contida. Em consequência disto, o termo $k_\alpha^\perp k_\beta^\perp f_c^\alpha(\hat{k}) f_c^{\beta*}(\hat{k})$ é nulo.

Podemos fazer a integração em k^\perp em (5.1.7). Para is-

to vamos transformar $d^{v-n} k^1$ em $(K_1^2)^{v-n-1/2} dk_1 d\Omega(v-n)$. A integração angular $\int d\Omega(v-n)$ nos dá a contribuição $\frac{\pi^{v-n/2}}{\Gamma(v-n/2)}$. Para calcular a integral em dk_1 , usamos a seguinte fórmula,

$$\int_0^\infty d^v k_1 \frac{(k_1^2)^n}{(k_1^2 + \hat{k}^2)^m} = \frac{\pi^{v/2}}{\Gamma(v/2)} \frac{\Gamma(\frac{v}{2}+n) \Gamma(m-n-\frac{v}{2})}{\Gamma(m) (\hat{k}^2)^{m-n-\frac{v}{2}}} \quad (5.1.8)$$

Fazendo uso de (5.1.8) e do resultado da integração angular, obtemos o seguinte resultado para a integração em $d^{v-n} k_1$,

$$\begin{aligned} & \int d^{v-n} k_1 \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{k_1^2 + \hat{k}^2} - \frac{2\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta}{(3-v)(k_1^2 + \hat{k}^2)^2} \right] = \int d\Omega(v-n) \int_0^\infty dk_1 (k_1^2)^{\frac{v-n-1}{2}} \times \\ & \times \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{k_1^2 + \hat{k}^2} - \frac{2\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta}{(3-v)(k_1^2 + \hat{k}^2)^2} \right] = \\ & = \frac{\pi^{\frac{v-n}{2}}}{\Gamma(\frac{v-n}{2})} \left\{ \Gamma(\frac{v-n}{2}) \Gamma(1-\frac{v-n}{2}) (\hat{k}^2)^{\frac{v-n}{2}-1} g_{\alpha\beta} - \right. \\ & \left. - \frac{2\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta}{(3-v)} \Gamma(\frac{v-n}{2}) \Gamma(2-\frac{v-n}{2}) (\hat{k}^2)^{2-\frac{v-n}{2}} \right\}. \quad (5.1.9) \end{aligned}$$

Usando a relação $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ em (5.1.9) e colocando o resultado em (5.1.7), tem-se,

$$V^{(2)}(c) = - \frac{\Gamma(1-\frac{v-n}{2})}{2^{v+1} \pi^{\frac{v+n}{2}}} \int d^n \hat{k} (\hat{k}^2)^{\frac{v-n}{2}-1} \left[g_{\alpha\beta} - \frac{2-v+n}{3-v} \frac{\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta}{\hat{k}^2} \right] f_c^\alpha(\hat{k}) f_c^{\beta*}(\hat{k}) \quad (5.1.10)$$

Em (5.1.10), se tomarmos $n = 1$, o integrando será zero. Este resultado é esperado, pois, no gauge dimensional a auto-interação de um segmento é nula. Isto justifica, portanto, a escolha de A como sendo igual a $2/3-v$.

De (5.1.10) vemos que para calcular $V^{(2)}(c)$ precisamos conhecer o funcional linear f^α sobre c . Da definição do

funcional linear $f_c^\alpha(k)$ (confira Eq. (5.1.4)), podemos escrever a seguinte relação,

$$k_\alpha f^\alpha = \frac{1}{i} \int_a^b dx^\alpha \partial_\alpha e^{ik \cdot x} = \frac{1}{i} (e^{ikb} - e^{ika}) \quad (5.1.11)$$

De (5.1.11) é fácil verificar que,

$$|k_\alpha f^\alpha|^2 = 4 \text{sen}^2 \frac{k \cdot (b-a)}{2} \quad (5.1.12)$$

o que implica que para qualquer curva fechada ($a=b$), $k \cdot f = 0$.

Usando (5.1.12) em (5.1.10) para $n = 2$, e considerando a hipótese simplificadora seguinte: $\vec{k}_2 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, tem-se o seguinte resultado,

$$V^{(2)}(c) = - \frac{\Gamma(\frac{4-\nu}{2})}{2^{\nu+1} \pi^{\nu+2/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} \left[|f|^2 - \frac{4(4-\nu)}{3-\nu} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2)} \text{sen}^2 \frac{k_1(b-a)}{2} \right] \quad (5.1.13)$$

A integração do termo $(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-6}{2}} \text{sen}^2 \frac{k_1(b-a)}{2}$ pode ser feita com o auxílio das seguintes fórmulas integrais ⁽⁷³⁾,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-6}{2}} = (k_1^2)^{\frac{\nu-5}{2}} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\frac{5-\nu}{2})}{\Gamma(\frac{6-\nu}{2})} \quad (5.1.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 (k_1^2)^{\frac{\nu-5}{2}} \text{sen}^2 \frac{k_1(a-b)}{2} = - \frac{\Gamma(\nu-4) \cos(\frac{\nu-4}{2} \pi)}{(b-a)^{\nu-4}} \quad (5.1.15)$$

Usando (5.1.14) e (5.1.15) e as relações $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e

$\Gamma(\frac{1}{2}+x)\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$, $V^{(2)}(c)$ dado por (5.2.13), fica,

$$V^{(2)}(c) = \frac{-2\Gamma(\frac{4-\nu}{2})}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} |f|^2 +$$

$$+ \frac{\Gamma(\nu-4) |a-b|^{4-\nu}}{(4\pi)^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \quad (5.1.16)$$

Para realizarmos o cálculo de (5.1.16), precisamos conhecer $f_c^\alpha(k)$ para cada curva c . No caso de curvas planares* fechadas, $k \cdot f = 0$, e portanto, $f_c^\alpha(k)$ pode ser escrita na forma,

$$f^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} k_\beta f \quad (5.1.17)$$

De (5.1.17), temos,

$$\epsilon^{\alpha\beta} k_\beta f^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} k_\beta \epsilon^{\alpha\sigma} k_\sigma f = k^2 f \quad (5.1.18)$$

Mas, da definição de f^α , podemos escrever (5.1.18) da seguinte maneira,

$$\epsilon^{\alpha\beta} k_\beta f^\alpha = \oint_c dx^\alpha \epsilon^{\alpha\beta} k_\beta e^{ik \cdot x} \quad (5.1.19)$$

Comparando (5.1.18) e (5.1.19), temos,

$$k^2 f = \oint_c dx^\alpha \epsilon^{\alpha\beta} k_\beta e^{ik \cdot x} \quad (5.1.20)$$

Usando, agora, o teorema de Stokes no 2º membro de (5.1.20), obtemos,

* Consideraremos somente curvas no plano.

$$k^2 f = \iint_{\Sigma} d\sigma \partial_{\alpha} (k_{\alpha} e^{ik \cdot x}) = ik^2 \iint_{\Sigma} d\sigma e^{ik \cdot x} \quad (5.1.21)$$

onde Σ é a superfície limitada por c .

De (5.1.21) concluimos que,

$$f = i \iint_{\Sigma} d\sigma e^{ik \cdot x} \quad (5.1.22)$$

Sabendo-se, então, f para cada curva c , coloca-se em (5.1.16) e obtêm-se $V^{(2)}(c)$. Este é o procedimento para calcular o loop de Wilson Quântico usando a transformada de Fourier do propagador $D_{\alpha\beta}(x-y)$.

Em alguns casos é mais conveniente calcular $V^{(2)}(c)$ no espaço de configurações. Neste caso, toma-se $D_{\alpha\beta}(x-y)$, neste espaço, que é dado por ⁽⁷²⁾,

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{4\pi^{\nu/2}} \left\{ g_{\alpha\beta} |x-y|^{2-\nu} - \frac{1}{(3-\nu)(4-\nu)} \partial_{\alpha}^x \partial_{\beta}^y |x-y|^{4-\nu} \right\} \quad (5.1.23)$$

e $V^{(2)}$ fica então dado por,

$$V^{(2)}(c) = - \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \left\{ \iint_c dx^{\alpha} dy^{\alpha} |x-y|^{2-\nu} + \frac{1}{(\nu-3)(\nu-4)} |a-b|^{4-\nu} \right\} \quad (5.1.24)$$

com a escolha anterior de gauge.

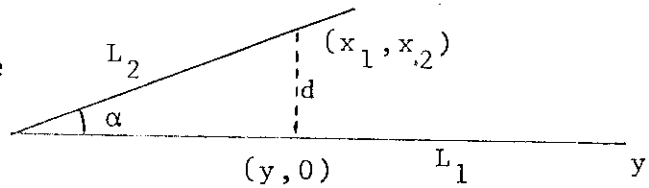
5.2 - Singularidades do "Loop" de Wilson em Função da Dimensão ν do Espaço-Tempo

1) Interação de dois segmentos que se tocam formando um ângulo α (ver Fig. 5.2.1)

Nesta seção iremos determinar o tipo de singularidade que traz um contorno não suave, ou seja, com angulosidade. Em particular queremos determinar o resíduo no pólo.

Consideremos, então, a interação entre dois segmentos de comprimentos L_1 e L_2 , que se tocam formando um ângulo α (ver Fig. 5.2.1).

Figura 5.2.1 - Dois segmentos que se tocam.



A distância d é dada por,

$$d^2 = (y-x_1)^2 + x_2^2 \quad (5.2.1)$$

De acordo com o formalismo geral, V_{int} , no gauge dimensional, é dado por,

$$V_{int} = \frac{-2\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \int dx^\beta \int dy^\beta |x-y|^{2-\nu} - \frac{2}{(3-\nu)(4-\nu)} |a-b|^{4-\nu} \quad (5.2.2)$$

No caso que estamos tratando, (5.2.2) fica dada por ⁽⁷²⁾,

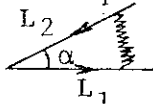
$$V_{int} = \frac{-2\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \int_{seg(1)} dx^\beta \int_{seg(2)} dy^\beta [(y-x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{2-\nu}{2}} - \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(L_1^{4-\nu} + L_2^{4-\nu} - |\vec{L}_1 - \vec{L}_2|^{4-\nu})}{4\pi^{\nu/2}(3-\nu)(4-\nu)} \quad (5.2.3)$$

As integrais $\int_{seg(1)} \int_{seg(2)}$ podem ser calculadas mediante uma mudança de variáveis, qual seja,

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi \cos \alpha \\ x_2 &= \xi \sin \alpha \\ \eta &= (y-x_1) = \lambda x_1 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

De (5.2.4) obtemos que $dx^\beta dy^\beta = \cos \alpha \xi d\xi d\lambda = -x_1 \cos \alpha d\xi d\lambda$,

que quando substituída em (5.2.3), nos leva a *

*Estamos considerando o caso em que os sentidos das setas implicam "conservação da corrente, ou seja, L_2 . Em (5.2.5) a abreviatura $\sin(\cos \alpha)$ significa sinal do $\cos \alpha$.

$$V_{int} = - \frac{2\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \int_{L_2}^0 d\xi \int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos\alpha)}{\xi^{3-\nu} \cos^2\alpha (\text{sen}\alpha)^{2-\nu} (1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{2-\nu}{2}}} d\lambda$$

$$- \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2}) (L_1^{4-\nu} + L_2^{4-\nu} - |\vec{L}_1 - \vec{L}_2|^{4-\nu})}{4\pi^{\nu/2} (3-\nu)(4-\nu)} \quad (5.2.5)$$

Integrando (5.2.5) com relação a ξ , obtemos o seguinte resultado,

$$V_{int} = \frac{2\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \frac{L_2^{4-\nu}}{(4-\nu)} \cos^2\alpha (\text{sen}\alpha)^{2-\nu} \int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos\alpha)}{d\lambda (1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{\nu-2}{2}}}$$

$$- \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2}) (L_1^{4-\nu} + L_2^{4-\nu} - |\vec{L}_1 - \vec{L}_2|^{4-\nu})}{4\pi^{\nu/2} (3-\nu)(4-\nu)} \quad (5.2.6)$$

Em (5.2.6) não há pólo explícito para $\nu = 5, 6$, e outros valores subsequentes de ν^* .

Analisemos o caso particular em que $\nu = 2$. Neste caso

V_{int} é dado por**

$$V_{int}(\nu=2) = \left\{ \frac{d}{d\nu} \left[- \frac{2(\nu-2)\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \frac{L_2^{4-\nu}}{(4-\nu)} \cos^2\alpha (\text{sen}\alpha)^{2-\nu} \int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos\alpha)}{d\lambda (1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{\nu-2}{2}}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(\nu-2)\Gamma(\frac{\nu-2}{2}) (L_1^{4-\nu} + L_2^{4-\nu} - |\vec{L}_1 - \vec{L}_2|^{4-\nu})}{4\pi^{\nu/2} (3-\nu)(4-\nu)} \right] \right\}_{\nu=2} \quad (5.2.7)$$

* Para $\nu = 3$, V_{int} possui um pólo que está associado à escolha do gauge, e portanto, pode ser eliminado.

** Sendo $\Gamma(\nu-2/2)r^{2-\nu}$ o potencial na dimensão ν , o potencial em duas dimensões que é $\ln r$ resulta de $\frac{d}{d\nu}(\nu-2)\Gamma(\frac{\nu-2}{2})r^{2-\nu} \Big|_{\nu=2} = \text{const.} \times \ln r$.

O segundo termo de (5.2.7) é finito, em $\nu = 2$, como é imediato ver, assim como todos os termos em que aparece a derivada de uma função de ν vezes

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos\alpha)}{d\lambda(1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{\nu-2}{2}}}$$

Resta-nos, então, determinar o termo em que aparece

$$\frac{d}{d\nu} \left[\int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos\alpha)}{d\lambda(1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{\nu-2}{2}}} \right]$$

Para isto vamos tomar $0 < \alpha < \frac{\pi^*}{4}$, e portanto, $\sin(\cos\alpha) = +1$. Fazendo uso das seguintes fórmulas integrais (73)

$$\int_0^1 (1+bx^m)^{\ell} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell}{k} \frac{b^k \Gamma(1+km)}{\Gamma(2+km)}, \text{ com } b^2 > 1 \quad (5.2.8)$$

$$e \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (k+\alpha x^p)^{-\mu-\nu} dx = \frac{1}{p} \alpha^{-1/p} B\left(\frac{\lambda}{p}, \mu+\nu-\frac{\lambda}{p}\right) \quad (5.2.9)$$

tem-se que,

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{d\lambda(1+\lambda^2 \cotg^2\alpha)^{\frac{\nu-2}{2}}}{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu-2/2}{k} \frac{(\cotg^2\alpha)^k}{2k+1} + \frac{1}{2} \frac{B(\frac{1}{2}, \frac{1-\nu}{2})}{\cotg\alpha} \quad (5.2.10)$$

Calculando-se, agora, $d/d\nu$ de (5.2.10) e tomando em seguida $\nu = 2$, vê-se que o resultado é finito, pois, para $\nu = 2$ o termo $B(1/2, 1-\nu/2)$, como se pode ver facilmente, não tem problema. Portanto, para $\nu = 2$, V_{int} é finito.

* Nos restringiremos a este intervalo de variação de α devido à condição de aplicabilidade de (5.2.8).

Consideremos a dimensão do espaço-tempo físico, isto é, $\nu = 4$. Para este valor de ν , V_{int} dado por (5.2.6), possui um pólo, cujo resíduo no mesmo é dado por,

$$R_{12} = \frac{1}{4\pi^2} \cotg^2 \alpha \int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(\cos \alpha)}{d\lambda (1 + \lambda^2 \cotg^2 \alpha)^{-1}} + \frac{1}{4\pi^2} \quad . \quad (5.2.11)$$

Resolvendo a integral em (5.2.11) para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (e portanto, $\sin(\cos \alpha) = +1$), teremos o seguinte resultado ⁽⁷²⁾ para o resíduo da interação,

$$R_{12} = \frac{(\pi - \alpha) \cotg \alpha + 1}{4\pi^2} \quad , \quad (5.2.12)$$

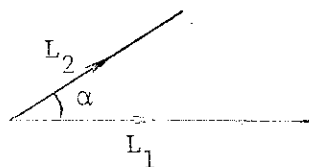
onde o termo $1/4\pi^2$ vem da escolha de gauge, e portanto, depende dele.

Cálculo análogo pode ser feito no caso em que os sentidos das setas não implicam* "conservação da corrente". Neste caso, basta inverter os limites de integração de ξ em (5.2.5), obtendo-se o seguinte resultado,

$$R_{12} = - \frac{(\pi - \alpha) \cotg \alpha + 1}{4\pi^2} \quad (5.2.13)$$

Do que foi visto, conclui-se então que, neste caso particular da interação de dois segmentos que se tocam, V_{int} só possui pólo na dimensão do espaço-tempo físico, com o resíduo no pólo dependendo do ângulo α entre os segmentos.

*Este caso corresponde à seguinte situação:



II) Interação entre dois segmentos que se cruzam.

Chamaremos de 2α o ângulo que eles formam.

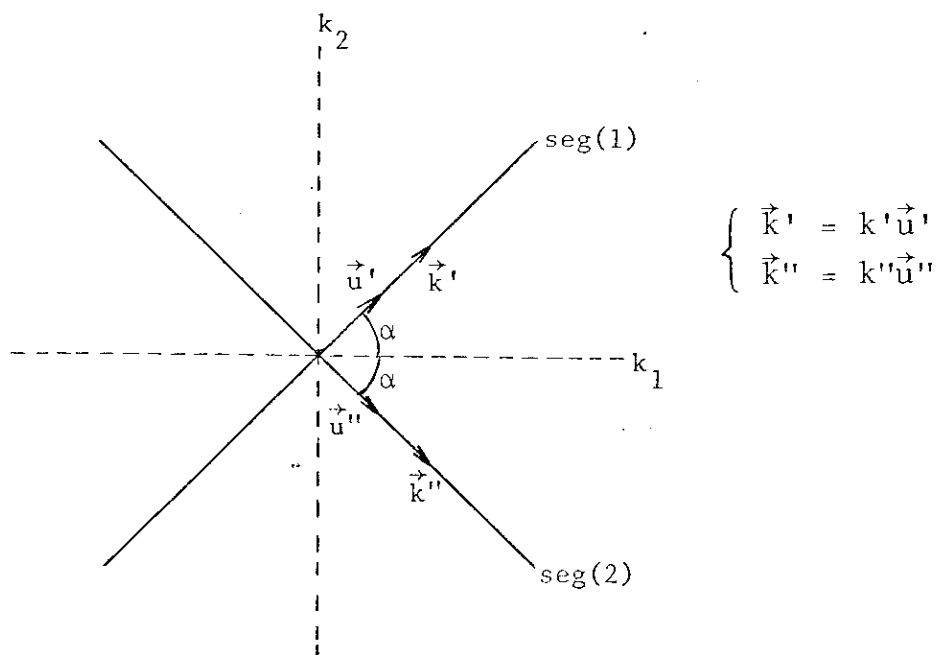


Figura 5.2.2 - Dois segmentos que se cruzam.

Vamos considerar, para efeito de simplificação, o comprimento do segmento (1) = comprimento do segmento (2) = L .

Usando (5.1.4) podemos calcular f_{seg} . Teremos, então, para um segmento ao longo do eixo k_1 ,

$$f_{\text{seg}} = \int_{-L/2}^{L/2} e^{ik_1 x_1} dk_1 = \frac{2}{k_1} \text{sen}(k_1 \frac{L}{2}) \quad (5.2.14)$$

A expressão (5.2.14) para os segmentos (1) e (2) que estamos a considerar, fica,

$$\begin{aligned} f_{\text{seg}(1)} &= \frac{2}{k'} \text{sen}(k' \frac{L}{2}) \\ f_{\text{seg}(2)} &= \frac{2}{k''} \text{sen}(k'' \frac{L}{2}) \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Ou, usando a notação vetorial, tem-se,

$$\begin{aligned}\vec{f}_{\text{seg}(1)} &= \frac{2}{k'} \text{sen}(k' \frac{L}{2}) \vec{u}' \\ \vec{f}_{\text{seg}(2)} &= \frac{2}{k''} \text{sen}(k'' \frac{L}{2}) \vec{u}''\end{aligned}\tag{5.2.16}$$

onde \vec{u}' e \vec{u}'' são os vetores unitários nas direções de \vec{k}' e \vec{k}'' , respectivamente.

É fácil ver que k' , k'' , k_1 e k_2 estão relacionados da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}k' &= k_1 \text{cos}\alpha + k_2 \text{sen}\alpha \\ k'' &= k_1 \text{cos}\alpha - k_2 \text{sen}\alpha\end{aligned}\tag{5.2.17}$$

e portanto,

$$k'k'' = k_1^2 \text{cos}^2\alpha - k_2^2 \text{sen}^2\alpha\tag{5.2.18}$$

De acordo com o formalismo geral desenvolvido no parágrafo anterior, no espaço de Fourier, V_{int} é dado por,

$$V_{\text{int}} = - \frac{2\Gamma(\frac{4-\nu}{2})}{(4\pi)^{\nu+2/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} |f|^2 + \text{termo de gauge}\tag{5.2.19}$$

(confira (5.1.16)).

onde no presente caso $|f|^2$ é substituído por $2\vec{f}_{\text{seg}(1)} \cdot \vec{f}_{\text{seg}(2)}$, já que devemos levar em consideração a interação nos dois ramos.

Com o auxílio de (5.2.15), tem-se a seguinte expressão para $2\vec{f}_{\text{seg}(1)} \cdot \vec{f}_{\text{seg}(2)}$,

$$2\vec{f}_{\text{seg}(1)} \cdot \vec{f}_{\text{seg}(2)} = \frac{8}{k'k''} \text{cos}(2\alpha) \text{sen}(\frac{k'L}{2}) \text{sen}(\frac{k''L}{2})\tag{5.2.20}$$

Substituindo (5.2.20) em (5.2.19), com o uso simultâneo de (5.2.17) e (5.2.18), e considerando o termo de gauge identicamente nulo, tem-se,

$$V_{\text{int}} = \frac{-16\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \cos(2\alpha) \frac{\text{sen}\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha + k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right) \text{sen}\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha - k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right)}{k_1^2 \cos^2 \alpha - k_2^2 \text{sen}^2 \alpha} \times$$

$$\times (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} \quad (5.2.21)$$

mas,

$$\text{sen}\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha + k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right) \text{sen}\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha - k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right) =$$

$$= \text{sen}^2\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha\right) - \text{sen}^2\left(k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right) \quad (5.2.22)$$

Colocando-se (5.2.22) em (5.2.21), tem-se,

$$V_{\text{int}} = \frac{-16\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} \cos(2\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \times$$

$$\times \frac{\text{sen}^2\left(k_1 \frac{L}{2} \cos\alpha\right) - \text{sen}^2\left(k_2 \frac{L}{2} \text{sen}\alpha\right)}{k_1^2 \cos^2 \alpha - k_2^2 \text{sen}^2 \alpha} (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} \quad (5.2.23)$$

Usando as seguintes fórmulas integrais ⁽⁷³⁾

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (1+\alpha x^p)^{-\mu} (1+\beta x^p)^{-\nu} dx =$$

$$= \frac{1}{p} \alpha^{-\lambda/p} B\left(\frac{\lambda}{p}, \mu+\nu - \frac{\lambda}{p}\right) {}_2F_1\left(\nu, \frac{\lambda}{p}; \mu+\nu; 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (5.2.24)$$

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \text{sen}^2(ax) dx = - \frac{\Gamma(\mu) \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{2^{\mu+1} a^{\mu}} \quad (5.2.25)$$

para integrar com respeito a k_1 e k_2 , tem-se,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \frac{\text{sen}^2(k_1 \frac{L}{2} \cos \alpha)}{k_1^2 \cos^2 \alpha - k_2^2 \text{sen}^2 \alpha} (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2(k_1 \frac{L}{2} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} (k_1^2)^{\frac{\nu-5}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\nu}{2}\right) {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-\nu}{2}; \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)$$

(5.2.26)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \frac{\text{sen}^2(k_2 \frac{L}{2} \text{sen} \alpha)}{k_1^2 \cos^2 \alpha - k_2^2 \text{sen}^2 \alpha} (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2(k_2 \frac{L}{2} \text{sen} \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha} (k_2^2)^{\frac{\nu-5}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\nu}{2}\right) {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-\nu}{2}; \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}\right)$$

(5.2.27)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2(k_2 \frac{L}{2} \text{sen} \alpha) (k_2)^{\nu-5} dk_2 = - \frac{\Gamma(\nu-4) \cos\left(-\frac{\nu-4}{2}\pi\right)}{2^{\nu-4} \left(\frac{L}{2} \text{sen} \alpha\right)^{\nu-4}}$$

(5.2.28)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2(k_1 \frac{L}{2} \cos \alpha) (k_1)^{\nu-5} dk_1 = - \frac{\Gamma(\nu-4) \cos\left(-\frac{\nu-4}{2}\pi\right)}{2^{\nu-4} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha\right)^{\nu-4}}$$

(5.2.29)

Colocando (5.2.26), (5.2.27), (5.2.28) e (5.2.29) em (5.2.23), tem-se,

$$V_{\text{int}} = \frac{16\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\nu}{2}\right) \cos(2\alpha) \frac{\Gamma(\nu-4) \cos\left(-\frac{\nu-4}{2}\pi\right)}{L^{\nu-4}} \left\{ (\text{sen}^2 \alpha)^{\frac{2-\nu}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-\nu}{2}; \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}\right) + (\cos^2 \alpha)^{\frac{2-\nu}{2}} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-\nu}{2}; \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \right\}$$

(5.2.30)

E agora, com o uso das relações,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{e} \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (5.2.31)$$

podemos escrever V_{int} dado por (5.2.31), da seguinte maneira,

$$V_{int} = \frac{16\cos(2\alpha)\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-v}{2}\right)\Gamma(v-4)}{(4\pi)^{\frac{v+1}{2}} L^{v-4} (4-v)} \left\{ \frac{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-v}{2}; \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)}{(\sin^2\alpha)^{\frac{v-2}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{6-v}{2}; \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{(\cos^2\alpha)^{\frac{v-2}{2}}} \right\} \quad (5.2.32)$$

De (5.2.32), vemos que V_{int} possui um pólo para $v = 4$ cujo resíduo é dado por $(72)^*$

$$R = -\frac{\cotg(2\alpha)}{2\pi} \quad (5.2.33)$$

e que depende, portanto, do ângulo 2α entre os segmentos.

Para fazer uma análise dos demais casos, quais sejam $v = 2, 3, 5, 6, \dots$, vamos usar as seguintes relações (73)

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z) + \\ + (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z) \quad (5.2.34)$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta; \alpha-\beta+1; \frac{1}{1-z}) +$$

* Na equação (47) da referência (72) devemos trocar α pelo suplementar de 2α , pois, no nosso caso os sentidos das setas não implicam "conservação de corrente" se o ângulo considerado for 2α .
O resultado dado por (5.2.33) pode ser obtido de outra maneira (ver Apêndice A).

$$+ (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\beta, \gamma-\alpha; \beta-\alpha+1; \frac{1}{1-z}) \quad (5.2.35)$$

Usando (5.2.34) e (5.2.35), ${}_2F_1(1, 1/2; \frac{6-v}{2}; 1/\cos^2\alpha)$ e ${}_2F_1(1, 1/2; \frac{6-v}{2}; 1/\sin^2\alpha)$ ficam dadas por,

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1/2; \frac{6-v}{2}; 1/\cos^2\alpha) &= \frac{\Gamma(\frac{6-v}{2})\Gamma(\frac{3-v}{2})}{\Gamma(\frac{4-v}{2})\Gamma(\frac{5-v}{2})} {}_2F_1(1, 1/2; \frac{v-1}{2}; -\text{tg}^2\alpha) + \\ &+ (-\text{tg}^2\alpha)^{\frac{3-v}{2}} \frac{\Gamma(\frac{6-v}{2})\Gamma(\frac{v-3}{2})}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1(\frac{4-v}{2}, \frac{5-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -\text{tg}^2\alpha) \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

e

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1/2; \frac{6-v}{2}; 1/\sin^2\alpha) &= (-\text{tg}^2\alpha)^{\frac{6-v}{2}} \frac{\Gamma(\frac{6-v}{2})\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{4-v}{2})} {}_2F_1(1, \frac{5-v}{2}; \frac{3}{2}; -\text{tg}^2\alpha) + \\ &+ (-\text{tg}^2\alpha)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{6-v}{2})\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{5-v}{2})} {}_2F_1(1/2, \frac{4-v}{2}; 1/2; -\text{tg}^2\alpha) \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

Com (5.2.36) e (5.2.37) em (5.2.32), e usando simultaneamente a relação $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \pi/\text{sen}(\pi x)$, tem-se,

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= \frac{16\cos(2\alpha)\cos(\frac{v\pi}{2})\Gamma(\frac{5-v}{2})\Gamma(\frac{6-v}{2})\Gamma(v-4)}{(4\pi)^{\frac{v+1}{2}} L^{v-4}(4-v)} \times \\ &\times \left\{ \frac{-\text{tg}^2\alpha}{(\text{sen}^2\alpha)^{\frac{v-2}{2}}} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{4-v}{2})} {}_2F_1(1, \frac{5-v}{2}; \frac{3}{2}; -\text{tg}^2\alpha) + \right. \\ &+ \frac{(-\text{tg}^2\alpha)^{1/2}}{(\text{sen}^2\alpha)^{\frac{v-2}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{v-3}{2})\text{sen}[\frac{\pi}{2}(v-3)]}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1(1/2, \frac{4-v}{2}; 1/2; -\text{tg}^2\alpha) + \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{3-v}{2})}{(\cos^2\alpha)^{\frac{v-2}{2}} \Gamma(\frac{4-v}{2})\Gamma(\frac{5-v}{2})} {}_2F_1(1, 1/2; \frac{v-1}{2}; -\text{tg}^2\alpha) + \end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{(-\operatorname{tg}^2 \alpha)^{\frac{3-\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{(\cos^2 \alpha)^{\frac{\nu-2}{2}} \Gamma(1/2)} {}_2F_1 \left(\frac{4-\nu}{2}, \frac{5-\nu}{2}; \frac{5-\nu}{2}; -\operatorname{tg}^2 \alpha \right) \right\} \quad (5.2.38)$$

Observamos em (5.2.38) que para $\nu = 5$ e $\nu = 2$ não existem pólos*. Por outro lado para ν par ($\nu \geq 8$) existe um pólo associado a $\Gamma(\frac{6-\nu}{2})$. Para $\nu = 3$, V_{int} possui um pólo cujo resíduo é dado por,

$$R = -\frac{L}{\pi} \cos(2\alpha) \quad (5.2.39)$$

Portanto, para $\nu = 3$, assim como para $\nu = 4$, V_{int} dado por (5.2.38) possui pólos, cujos resíduos nos mesmos depende do ângulo 2α .

III) Interação entre um segmento e uma semi-reta

Vamos considerar o caso em que o sentido das setas implica "conservação de corrente", o que corresponde à Fig.5.2.3.

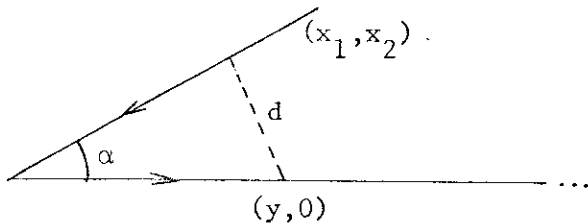


Figura 5.2.3 - Segmento e semi-reta que se tocam.

A distância d é dada por,

$$|y-x|^2 = (y-|x_1|)^2 + x_2^2 \quad (5.2.40)$$

mas, $V_{\text{int}}(c)$ é dado por,

*No caso $\nu = 5$, o pólo da $\Gamma(\frac{5-\nu}{2})$ é compensado pelo zero de $\cos(\frac{\nu\pi}{2})$.

$$V_{\text{int}}^{(c)} = \frac{-\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \iint dx^\alpha dy^\alpha |x-y|^{2-\nu} + \text{termo de gauge} \quad (5.2.41)$$

A substituição de (5.2.40) em (5.2.41), com o termo de gauge indenticamente nulo, nos dá,

$$V_{\text{int}}^{(c)} = - \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \int_L^0 \int_0^\infty dx dy [(y-|x_1|^2+x_2^2)^{\frac{2-\nu}{2}}] \quad (5.2.42)$$

Com o auxílio da seguinte mudança de variáveis:

$y' = y - |x_1|^2$, a integral em y fica,

$$I_1 = \int_{-|x_1|^2}^\infty dy' (y'^2 + x_2^2)^{\frac{2-\nu}{2}} \quad (5.2.43)$$

a qual pode ser resolvida com o uso das seguintes fórmulas integrais ⁽⁷³⁾,

$$\int_0^u (x^2 + \beta^2)^\nu dx = \beta^{2\nu} u F(-\nu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{u^2}{\beta^2}) \quad (5.2.44)$$

e

$$\int_u^\infty (x^2 + \beta^2)^\nu dx = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \beta^{2\nu+1} \quad (5.2.45)$$

Com o uso de (5.2.44) e (5.2.45), a expressão (5.2.43) fica,

$$I_1 = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})} x_2^{3-\nu} + |x_1|^2 x_2^{2-\nu} F(\frac{\nu-2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x_1^2}{x_2^2}) \quad (5.2.46)$$

Colocando (5.2.46) em (5.2.42) e considerando a seguinte mudança de variáveis: $x_1 = \xi \cos \alpha$ e $x_2 = \xi \sin \alpha$, tem-se,

$$V(c) = - \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})}{8\pi^{\nu/2}} \int_L^0 d\xi \left\{ \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})} \xi^{3-\nu} (\text{sen}\alpha)^{3-\nu} + \right. \\ \left. + \xi^{3-\nu} |\text{cos}\alpha| (\text{sen}\alpha)^{2-\nu} F(\frac{\nu-2}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\text{cotg}^2\alpha) \right\} \text{cos}\alpha \quad (5.2.47)$$

A integração em ξ nos fornece o seguinte resultado final,

$$V(c) = \frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})L^{4-\nu}\text{cos}\alpha}{8\pi^{\nu/2}(4-\nu)} \left\{ \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})} (\text{sen}\alpha)^{3-\nu} + \right. \\ \left. + |\text{cos}\alpha| (\text{sen}\alpha)^{2-\nu} F(\frac{\nu-2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\text{cotg}^2\alpha) \right\} \quad (5.2.48)$$

Vemos em (5.2.48) que existe um pólo para $\nu = 4$, cujo resíduo é dado por,

$$R = \frac{\text{cos}\alpha}{8\pi^2} \left\{ \Gamma(3/2)\Gamma(1/2)(\text{sen}\alpha)^{-1} + |\text{cos}\alpha| (\text{sen}\alpha)^{-2} F(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\text{cotg}^2\alpha) \right\} \quad (5.2.49)$$

mas, sabemos que $F(1, 1/2; 3/2; -z^2) = \text{arctg}z/z$, e portanto,

$$F(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\text{cotg}^2\alpha) = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\text{cotg}\alpha} & , \quad \text{para } \alpha < \pi \\ -\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\text{cotg}\alpha} & , \quad \text{para } \alpha > \pi \end{cases} \quad (5.2.50)$$

Usando o resultado (5.2.50) em (5.2.49), obtêm-se os resíduos para os vários intervalos de variação de α ,

$$R = \frac{(\pi-\alpha)\text{cotg}(\pi-\alpha)}{8\pi^2} \quad , \quad \text{para } 0 < \alpha < \pi/2 \\ R = \frac{\alpha\text{cotg}\alpha}{8\pi^2} \quad , \quad \text{para } \pi/2 < \alpha < \pi \\ R = \frac{\alpha\text{cotg}\alpha}{8\pi^2} \quad , \quad \text{para } \pi < \alpha < 3\pi/2 \quad (5.2.51)$$

$$R = \frac{(\pi+\alpha)\cotg(\pi+\alpha)}{8\pi^2}, \quad \text{para } 3\pi/2 < \alpha < 2\pi$$

Logo, para $\nu = 4$, espaço-tempo físico, o resíduo no pólo depende do ângulo α entre o segmento e a semi-reta.

Também existe um pólo em (5.2.48), para $\nu = 3$, cujo resíduo é dado por,

$$R = \frac{L\cos\alpha}{8\pi} \quad (5.2.52)$$

e que portanto, depende tanto do ângulo α quanto do comprimento do segmento.

Para $\nu = 5, 6, \dots$, não existem pólos, já que as F 's não os possuem.

Examinemos agora o caso $\nu = 2$. Bem, para $\nu = 2$, não podemos tomar diretamente a expressão (5.2.48) e tomar $\nu = 2$. A razão para isto é que o propagador que usamos e que é proporcional a $|y-x|^{2-\nu}$ só é válido para $\nu \neq 2$. Para $\nu = 2$, o propagador é proporcional a $\ln|y-x|$, mas o cálculo direto nos leva a resultados divergentes. Portanto, precisamos regularizar o resultado obtido e para isto vamos fazer uso da seguinte fórmula⁽⁷⁴⁾,

$$V(c) = -\frac{1}{2} \int dx^\alpha \int dy^\alpha \left\{ \frac{d}{d\nu} [(\nu-2)\Gamma(\frac{\nu-2}{2})|y-x|^{2-\nu}] \right\}_{\nu=2} \quad (5.2.53)$$

o que pode ser escrito assim,

$$V(c) = \left\{ \frac{d}{d\nu} \left[-\frac{1}{2}(\nu-2)\Gamma(\frac{\nu-2}{2}) \int dx^\alpha \int dy^\alpha |y-x|^{2-\nu} \right] \right\}_{\nu=2} \quad (5.2.54)$$

A integral $\int dx^\alpha \int dy^\alpha |y-x|^{2-\nu}$ já foi calculada e é dada por,

$$\int dx^\alpha \int dy^\alpha |y-x|^{2-\nu} = \frac{L^{4-\nu}}{4-\nu} \cos\alpha \left\{ \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})} (\text{sen}\alpha)^{3-\nu} + \right. \\ \left. + |\text{sen}\alpha|^{2-\nu} \cos\alpha F\left(\frac{\nu-2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\cot^2\alpha\right) \right\} \quad (5.2.55)$$

Calocando (5.2.55) em (5.2.54) tem-se,

$$V(c) = \left\{ \frac{d}{d\nu} \left[-\frac{1}{2}(\nu-2)\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) \frac{L^{4-\nu}}{4-\nu} \cos\alpha \left\{ \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\frac{\nu-3}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})} |\text{sen}\alpha|^{3-\nu} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + |\text{sen}\alpha|^{2-\nu} \cos\alpha F\left(\frac{\nu-2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\cot^2\alpha\right) \right] \right\}_{\nu=2} \quad (5.2.56)$$

forma esta que nos permite ver que para $\nu = 2$, $V(c)$ não possui pólo.

Nos três casos abordados os resíduos nos pólos, para $\nu = 4$, dependem somente de uma característica geométrica das curvas, que é o ângulo α . Para $\nu \neq 4$, os resíduos nos pólos (nos casos em que existem, naturalmente) dependem não só do ângulo α , mas também de outra característica geométrica, qual seja, os comprimentos dos segmentos.

Vale salientar também que de certa forma os resíduos dependem (mudam de sinal) dos sentidos das setas. Os casos que implicam "conservação da corrente" tem-se sinal positivo e os casos que não implicam "conservação da corrente" tem-se sinal negativo.

5.3 - Interação Entre Dois Círculos

Nesta seção vamos calcular $W^{(2)}(c)$ para dois círculos cujos centros estão separados por uma distância D e que não

se interceptam. Veremos, então, como surgem as divergências em função da dimensão ν do espaço-tempo.

Da seção 5.1 (conferir (5.1.16)), $W^{(2)}(c)^*$ é dado por,

$$W^{(2)}(c) = - \frac{2\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} |f|^2 \quad (5.3.1)$$

No caso de uma curva fechada, $a = b$, e o termo de gauge é identicamente nulo.

Bem, o nosso problema restringe-se em boa parte ao cálculo de $|f|^2$. De acordo com (5.1.22), f para um círculo de raio R é dada por,

$$f = i \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos\phi} = i \frac{2\pi R}{k} J_1(kR) \quad (5.3.2)$$

Este resultado foi obtido com o auxílio das seguintes fórmulas integrais ⁽⁷³⁾,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(z \cos x) \cos(nx) dx = 2\pi \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) J_n(z) \quad (5.3.3)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(z \cos x) \cos(nx) dx = 2\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) J_n(z) \quad (5.3.4)$$

$$\int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(ax) dx = a^{-1} J_{\nu+1}(a) \quad (5.3.5)$$

Para dois círculos de raios R e r , separados centro a

* Estamos usando a notação $W^{(2)}(c)$ em lugar de $V^{(2)}(c)$, pois, agora, estamos tratando de curvas fechadas.

centro por uma distância D, o f total é,

$$f = \frac{2i\pi}{k} [R J_1(kR) + e^{ik_1 D} r J_1(kr)] \quad (5.3.6)$$

e portanto, f^α dado por (5.1.17) fica,

$$f^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} k_\beta \frac{2i\pi}{k} [R J_1(kR) + e^{ik_1 D} r J_1(kr)] \quad (5.3.7)$$

Colocando f^α dado por (5.3.7) em $|f|^2 = g_{\alpha\beta} f^\alpha f^{\beta\dagger}$, tem-se o seguinte resultado,

$$|f|^2 = 4\pi^2 [R^2 J_1^2(kR) + r^2 J_1^2(kr) + 2Rr \cos(k_1 D) J_1(kR) J_1(kr)] \quad (5.3.8)$$

Agora, coloquemos (5.3.8) em (5.3.1), o que nos fornece o seguinte resultado,

$$W^{(2)}(c) = \frac{-2\Gamma(\frac{4-\nu}{2})}{(4\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{\nu-4}{2}} \left\{ 4\pi^2 [R^2 J_1^2(kR) + r^2 J_1^2(kr) + 2Rr \cos(k_1 D) J_1(kR) J_1(kr)] \right\} \quad (5.3.9)$$

Os termos que contêm $J_1^2(kR)$ e $J_1^2(kr)$, em (5.3.9), correspondem às autointerações dos dois círculos e são dados por (72),

$$W_R^{(2)} = - \frac{R^{4-\nu} \Gamma(\frac{3-\nu}{2}) \Gamma(\nu/2)}{2^{\nu-1} \pi^{\frac{\nu-3}{2}} \Gamma(\frac{6-\nu}{2})} \quad (5.3.10)$$

$$W_r^{(2)} = - \frac{r^{4-\nu} \Gamma(\frac{3-\nu}{2}) \Gamma(\nu/2)}{2^{\nu-1} \pi^{\frac{\nu-3}{2}} \Gamma(\frac{6-\nu}{2})} \quad (5.3.11)$$

O termo que contém $J_1(kR)J_1(kr)$, em (5.3.9) corresponde à interação entre os círculos. Para calculá-lo vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: $k_1 = k\cos\theta$ e $k_2 = k\sin\theta$. O elemento dk_1dk_2 se transforma em $kdkd\theta$. Com estas mudanças escrevemos o termo de interação entre os círculos da seguinte maneira,

$$W_{\text{int}}^{(2)} = \frac{-16\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)\pi^2}{(4\pi)\frac{\nu+2}{2}} \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\theta k^{\nu-3} Rr\cos((k\cos\theta)D)J_1(kR)J_1(kr) \quad (5.3.12)$$

Usando (5.3.4) para fazer a integração em θ , tem-se,

$$W_{\text{int}}^{(2)} = \frac{-32\pi^3\Gamma\left(\frac{4-\nu}{2}\right)Rr}{(4\pi)\frac{\nu+2}{2}} \int_0^\infty dk k^{\nu-3} J_0(kD)J_1(kR)J_1(kr) \quad (5.3.13)$$

Podemos resolver (5.3.13) com o auxílio da seguinte fórmula ⁽⁷³⁾,

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} J_\lambda(ax)J_\mu(bx)J_\nu(cx)dx = \frac{2^{\rho-1}a^\lambda b^\mu c^{-\lambda-\mu-\rho}\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(1-\frac{\lambda+\mu-\nu+\rho}{2}\right)} \times \\ \times F_4\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+\rho}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}; \lambda+1, \mu+1; \frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{c}\right) \quad (5.3.14)$$

onde a , b e c satisfazem a seguinte relação: $c > a+b$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Obtêm-se, então, os seguintes resultados,

$$W_{\text{int}}^{(2)} = \frac{(\nu-2)R^2r^2\Gamma(\nu/2)}{2\pi\frac{\nu-4}{2}D^\nu} F_4\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 2, 2; \frac{R^2}{D}, \frac{r^2}{D}\right) \quad (5.3.15)$$

com a escolha: $c = D$, $a = R$ e $b = r$, e portanto, $D > R+r$, e

$$W_{\text{int}}^{(2)} = \frac{-r^2 R^{2-\nu} \Gamma(\nu/2)}{\pi \frac{\nu-4}{2}} F_4\left(\frac{\nu-2}{2}, \frac{\nu}{2}; 1, 2; \frac{D^2}{R^2}; \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (5.3.16)$$

com a escolha: $c = R$, $a = r$ e $b = D$, e portanto $D < R-r$.

Adicionando-se $W_{\text{int}}^{(2)}$, nos casos em que $D > R+r$ e

$D < R-r$, a $W_R^{(2)}$ e $W_r^{(2)}$, tem-se finalmente que,

$$W^{(2)} = -(R^{4-\nu} + r^{4-\nu}) \frac{\Gamma(\frac{3-\nu}{2})\Gamma(\nu/2)}{2^{\nu-1} \pi \frac{\nu-3}{2} \Gamma(\frac{6-\nu}{2})} + \frac{(\nu-2)R^2 r^2 \Gamma(\nu/2)}{2\pi \frac{\nu-4}{2} D^\nu} F_4\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 2, 2; \frac{R^2}{D^2}; \frac{r^2}{D^2}\right), \quad D > R+r \quad (5.3.17)$$

e

$$W^{(2)} = -(R^{4-\nu} + r^{4-\nu}) \frac{\Gamma(\frac{3-\nu}{2})\Gamma(\nu/2)}{2^{\nu-1} \pi \frac{\nu-3}{2} \Gamma(\frac{6-\nu}{2})} - \frac{r^2 R^{2-\nu} \Gamma(\nu/2)}{\pi \frac{\nu-4}{2}} F_4\left(\frac{\nu-2}{2}, \frac{\nu}{2}; 1, 2; \frac{D^2}{R^2}; \frac{r^2}{R^2}\right), \quad D < R-r \quad (5.3.18)$$

Tanto (5.3.17) quanto (5.3.18) são finitas na dimensão do espaço-tempo físico, ou seja, $\nu = 4$. Para $\nu = 2$, os $W^{(2)}$, nos casos em que $D > R+r$ e $D < R-r$, são finitos, e dados por,

$$W^{(2)} = -\frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi r^2, \quad D > R+r \quad (5.3.19)$$

$$W^{(2)} = -\frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{3}{2} \pi r^2, \quad D < R-r$$

Estas contribuições vêm das partes de auto-interação.

Para $\nu = 2n+1$ ($n = 1, 2, \dots$), temos pólos associados a $\Gamma(\frac{3-\nu}{2})$,

cujos resíduos para $\nu = 3$ e $\nu = 5$, são, respectivamente,

$$R_{es.} = -\frac{1}{2} (R+r) \quad , \quad \text{nos casos } D > R+r \quad \text{e} \quad D < R-r \quad (5.3.20)$$

e

$$R_{es.} = \frac{3}{64} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \quad , \quad \text{para} \quad D > R+r \quad \text{e} \quad D < R-r \quad (5.3.21)$$

Observemos que estes pólos provêm das partes correspondentes às auto-interações, não havendo contribuição da parte que corresponde à interação mútua entre os círculos.

Para $\nu = 2n+1$ ($n = 1, 2, \dots$) existem, portanto, pólos associados a $\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)$ provenientes das partes de auto-interação (para $D > R+r$ e $D < R-r$) e cujos resíduos dependem dos raios dos círculos (veja explicitamente para $\nu = 3$ e $\nu = 5$), que são características geométricas.

CAPÍTULO 6

OBTENÇÃO DA RENORMALIZAÇÃO DA CARGA NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA USANDO O "LOOP" DE WILSON

É bem conhecido que podemos calcular a renormalização da carga na Eletrodinâmica Quântica calculando o espalhamento de um elétron por um campo externo. O método consiste em considerar sistematicamente ⁽⁷⁵⁾ todos os possíveis diagramas (na Fig. 6.1, mostramos os diagramas de 2ª ordem) que contribuem com correções (chamadas correções radiativas) ao processo em conside -
ração.

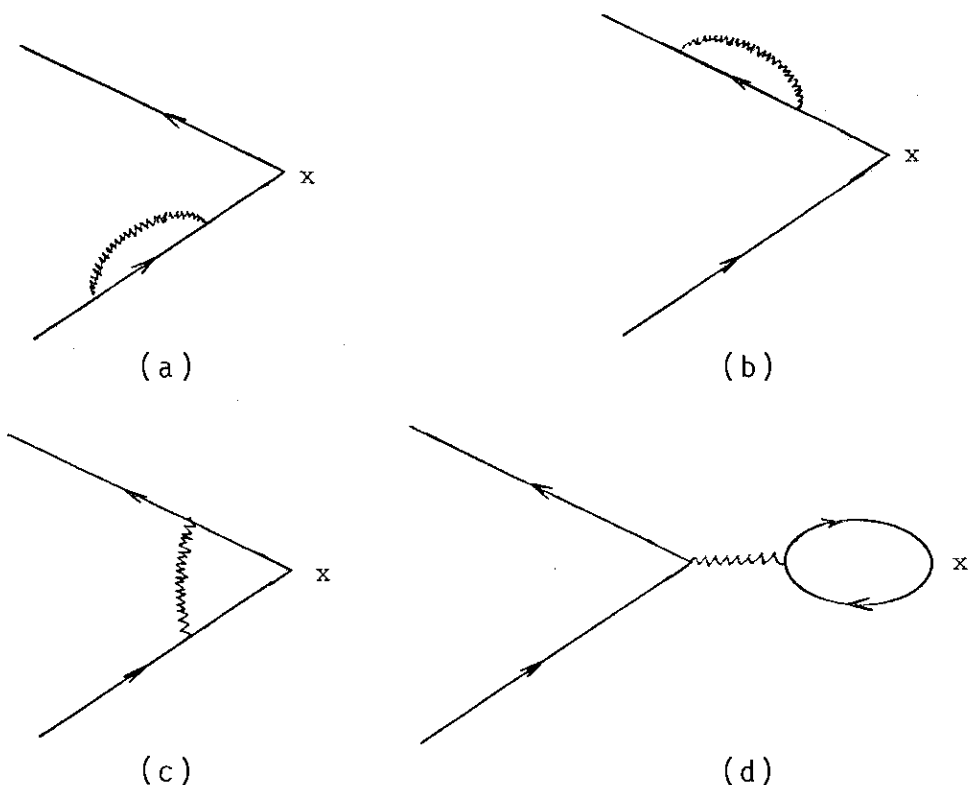


Figura 6.1 - Correções radiativas de 2ª ordem ao espalhamento de um elétron por um campo externo (indicado por x).

As integrais correspondentes aos diagramas (a), (b) e (c) da Figura 6.1 apresentam divergência infravermelha, que surge artificialmente devido à aplicação da teoria de perturbação a fótons com frequência extremamente pequena. Para superar este problema (divergência infravermelha) faz-se necessário o uso do método funcional desenvolvido por Bloch e Nordsieck⁽⁷⁶⁾, que trataram pela primeira vez tal divergência. Vale a pena ressaltar que tal método envolve cálculos não-triviais.

O diagrama (d), que corresponde à polarização do vácuo, por sua vez, apresenta divergência ultravioleta. A integral de polarização do vácuo é calculada introduzindo-se um ou mais parâmetros de corte ("cut-off parameters"). Com a introdução do parâmetro de corte, a integral se decompõe em uma parte que depende do parâmetro de corte, e portanto, é infinita e outras partes finitas que não dependem do parâmetro de corte. A parte que depende do parâmetro e que tende a infinito com ele, é eliminada, incorporando-se à carga.

Após os cálculos dos diagramas da Fig. 6.1 correspondentes à auto-energia do elétron, à modificação do vértice e à auto-energia do fóton (polarização do vácuo), combinam-se as contribuições de cada um deles à renormalização da carga. Finalmente, investiga-se qual a contribuição global líquida à renormalização da carga. Verifica-se, então, tendo em vista a invariância sob $U(1)$ da Eletrodinâmica Quântica que somente o diagrama de polarização do vácuo distribui para a renormalização da carga. Este resultado pode ser generalizado para todas as ordens da teoria de perturbação conforme foi demonstrado por Ward⁽⁷⁷⁾.

O nosso objetivo ao relatarmos as etapas do método mencionado é para termos uma idéia da quantidade de cálculos envolvidos, que são muitos e em alguns casos, não-triviais.

Neste capítulo mostraremos como se pode obter a renormalização da carga de maneira simples, sem praticamente nenhum cálculo. Na realidade, o único cálculo a ser feito (admitindo que ainda não tivesse sido feito) é o do propagador fotônico com a correção associada ao "loop" fermiônico. Para determinar a renormalização da carga da maneira simples mencionada, vamos fazer uso da série perturbativa do "loop" de Wilson Quântico, da qual tomaremos apenas o termo de segunda ordem.

6.1 - Série Perturbativa do "Loop" de Wilson Quântico

Consideremos a definição do "loop" de Wilson Quântico, que é,

$$\bar{W}(c) = \frac{1}{N} \langle W(c) \rangle_0 = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} P \exp(i g \oint A_\mu(x) dx_\mu) \rangle_0 \quad (6.1.1)$$

onde $\langle \rangle$ indica uma média funcional que é tomada sobre todas as configurações dos campos de gauge; $A_\mu(x) = A_\mu^a T_a$, sendo $A_\mu^a(x)$'s os campos de gauge na representação adjunta e T_a as $N \times N$ matrizes geradoras de $SU(N)$ ou $U(N)$. No caso que nos interessa, isto é, na Eletrodinâmica Quântica, $N=1$, e $g = e$ (carga elétrica, que é a constante de acoplamento da teoria). Neste caso, como a teoria é abeliana (grupo de gauge $U(1)$) não é necessário o P (ordenamento) nem o traço pois o operador $\exp \oint A_\mu dx_\mu$ é uma matriz 1×1 . A série correspondente a (6.1.1) é

6.2 - Correção do Propagador Fotônico

Interessa-nos, agora, uma expressão para o propagador fotônico com a correção de 2ª ordem do propagador do fóton livre, que é,

$$\text{diagrama} = D_{\alpha\beta}(k) = - \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} \quad (6.2.1)$$

no espaço dos momenta.

Com a correção de 2ª ordem, o propagador fica,

$$\text{diagrama} + \text{diagrama} = \bar{D}_{\alpha\beta}(k) = - \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} + \left(- \frac{g_{\mu\lambda}}{k^2}\right) I_{\lambda\eta}^R(k^2) \left(- \frac{g_{\eta\nu}}{k^2}\right) \quad (6.2.2)$$

onde $I_{\lambda\eta}^R(k^2)$ é o tensor de polarização do vácuo, renormalizado ⁽⁷⁸⁾, e é dado pela seguinte expressão:

$$I_{\lambda\eta}^R(k^2) = (k^2 g_{\lambda\eta} - k_\lambda k_\eta) \left\{ \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - 6 \int_0^1 du(1-u)u \log \left(1 - \frac{k^2}{m^2} u(1-u) \right) \right] \right\} \quad (6.2.3)$$

com M^2 sendo o parâmetro de corte e tal que $M^2 \gg k^2$.

Colocando (6.2.3) em (6.2.2), tem-se,

$$\bar{D}_{\alpha\beta}(k) = - \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} + \left(- \frac{g_{\mu\lambda}}{k^2}\right) \left[\frac{e^2}{12\pi^2} (k^2 g_{\lambda\eta} - k_\lambda k_\eta) \left(\log \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - 6 \int_0^1 du(1-u)u \log \left(1 - \frac{k^2}{m^2} u(1-u) \right) \right) \left(- \frac{g_{\eta\nu}}{k^2}\right) \right] \quad (6.2.4)$$

Como na Eletrodinâmica a corrente se conserva e como

o propagador fotônico está entre duas correntes (vértices), então, o termo em $k_\lambda k_\eta$ se anula. Levando em conta este fato e admitindo que a variação do momentum seja muito pequena, isto é,

$$k^2 \approx 0 \quad (6.2.5)$$

a expressão (6.2.4), torna-se,

$$\bar{D}_{\alpha\beta}(k) = -\frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{m^2}\right) \right] \quad (6.2.6)$$

6.3 - Renormalização da Carga

Comparando as expressões para os propagadores $D_{\alpha\beta}(k)$ e $\bar{D}_{\alpha\beta}(k)$, i.é, (6.2.1) e (6.2.6), respectivamente, e tomando a transformada inversa de Fourier, tem-se,

$$\bar{D}_{\alpha\beta}(x-y) = D_{\alpha\beta}(x-y) \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{m^2}\right) \right] \quad (6.3.1)$$

Colocando (6.3.1) em (6.1.5), temos,

$$\bar{W}^{(2)} = -\frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{m^2}\right) \right) \oint dx_\alpha \oint dy_\beta D_{\alpha\beta}(x-y) \quad (6.3.2)$$

Comparando (6.3.2) com (6.1.3), concluímos que elas nos fornecerão o mesmo resultado se no lugar da carga e em (6.1.3) colocarmos e_R dada por,

$$e_R^2 = e^2 \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{m^2}\right) \right] \quad (6.3.3)$$

que é a expressão conhecida ⁽⁷⁸⁾ para a renormalização da carga

na Eletrodinâmica Quântica, na aproximação de ordem mais baixa, obtida sem a necessidade de se calcular as contribuições à renormalização da carga devido à modificação do vértice e à auto-energia do elétron (que se compensam), e portanto, de usar o método de Bloch-Nordsieck⁽⁷⁶⁾, pois, tais processos não aparecem no formalismo dos fatores de fase dependentes da trajetória ("loop" de Wilson).

É, pois, bem provável, que também nas ordens superiores, seja mais simples o cálculo com o "loop" de Wilson do que com os métodos tradicionais.

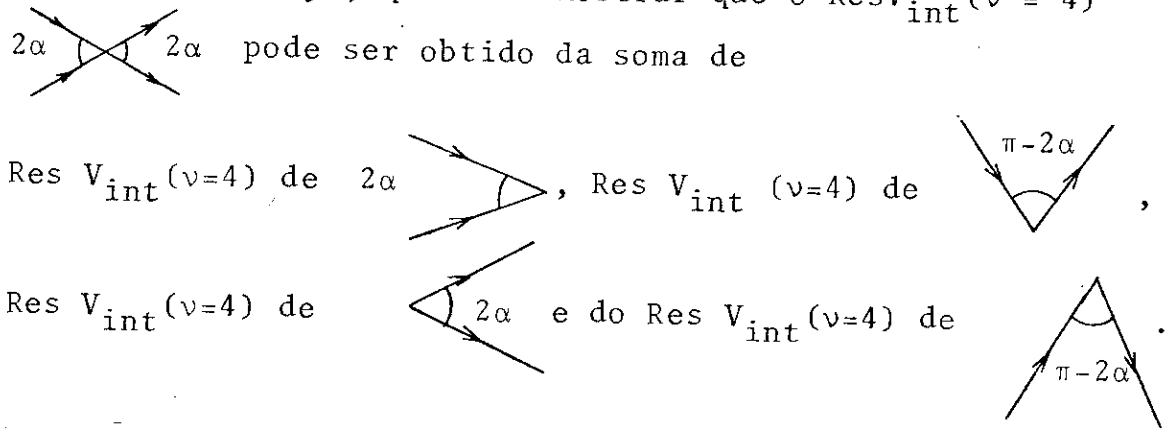
CONCLUSÕES

O Loop de Wilson Clássico está relacionado com o desvio angular no deslocamento paralelo no caso em que os vetores transportados são paralelos aos eixos do espaço interno e usando-se um potencial tipo instanton. O loop de Wilson não discrimina, para alguma classe de trajetória, diferentes potenciais que dão cópias de campo. O comportamento assintótico do loop de Wilson permite que se detecte a presença de mérons e não de instantons. A singularidade do méron não é detectada pelo loop de Wilson. Para dois segmentos que se tocam ou se cruzam, ou para um segmento e uma semi-reta que se tocam, as interações mútuas possuem pólos na dimensão do espaço-tempo físico cujos resíduos só dependem do ângulo entre eles. Para outras dimensões em que há pólos os resíduos dependem de mais um fator geométrico que são os comprimentos dos segmentos envolvidos. As auto-interações e interações mútuas para dois círculos não possuem pólos para $v = 2$ e $v = 4$. Para v ímpar, as partes correspondentes às auto-interações possuem pólos cujos resíduos dependem dos raios dos círculos. As interações mútuas não possuem pólos em nenhuma dimensão v do espaço-tempo. É possível obter-se a renormalização da carga na Eletrodinâmica Quântica por intermédio do loop de Wilson na aproximação de ordem mais baixa, e provavelmente, em outras ordens.

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DO RESÍDUO NO PÓLO PARA A INTERAÇÃO ENTRE DOIS SEGMENTOS QUE SE CRUZAM EM TERMOS DOS RESÍDUOS DAS INTERAÇÕES ENTRE OS PARES QUE OS COMPÕEM

Neste Apêndice fazemos um breve cálculo para obter - mos a expressão (5.2.33) a partir das expressões (5.2.12) e (5.2.13), ou seja, queremos mostrar que o $\text{Res} V_{\text{int}}(\nu = 4)$ de 2α pode ser obtido da soma de



Das expressões (5.2.12) e (5.2.13) tem-se,

$$\text{Res } V_{\text{int}}(\nu=4) \text{ de } 2\alpha = - \frac{(\pi-2\alpha)\cotg(2\alpha)+1}{4\pi^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Res } V_{\text{int}}(\nu=4) \text{ de } \pi-2\alpha = \frac{2\alpha\cotg(\pi-2\alpha)+1}{4\pi^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Res } V_{\text{int}}(\nu=4) \text{ de } 2\alpha = - \frac{(\pi-2\alpha)\cotg(2\alpha)+1}{4\pi^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Res } V_{\text{int}}(\nu=4) \text{ de } \pi-2\alpha = \frac{2\alpha\cotg(\pi-2\alpha)+1}{4\pi^2} \quad (\text{A.4})$$

Somando $V_{\text{int}} (v=4)$ de $(\rightarrow + \swarrow + \nwarrow + \searrow) = - \frac{\cotg 2\alpha}{2\pi} =$

$= \text{Res } V_{\text{int}} (v=4)$ de $2\alpha \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \searrow \end{array} \right) 2\alpha .$

APÊNDICE B

O MÉTODD DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Um fato conhecido é que a solução da equação das ondas possui propriedades físicas bastante diferentes dependendo da dimensão do espaço ser par ou ímpar. Por exemplo, uma propriedade física muito importante que depende da paridade da dimensão do espaço é o princípio de Huygens, que só é válido quando o número de dimensões espacio-temporal for par.

Em 1972, Bollini e Giambiagi⁽⁷⁰⁾ tomando como base o fato de algumas propriedades físicas dependerem da paridade da dimensão do espaço-tempo, acharam interessante investigar o comportamento da teoria quântica de campos com respeito ao número de dimensões do espaço-tempo euclideano, particularmente, a relação entre as divergências que aparecem na teoria e a dimensão espacio-temporal. Destas investigações, surgiu, então, um método de regularização no qual a dimensão v do espaço-tempo é o parâmetro regularizador. Tal método, chamado regularização dimensional, foi desenvolvido independentemente por t'Hooft e Veltman⁽⁷¹⁾.

As integrais de Feynman são calculadas, neste método, para um número inteiro e arbitrário de dimensões v . Nos cálculos, os vetores, as matrizes de Dirac e o tensor métrico

são generalizados* naturalmente para ν dimensões (ν inteiro) , ou seja, eles são manipulados como em 4 dimensões. No resultado da integração, as divergências ultravioletas usuais aparecem como pólos para alguns valores inteiros de ν . No caso do espaço-tempo físico, as divergências aparecem como pólos simples ou múltiplos quando fazemos $\nu = 4$ ** . As partes finitas podem ser, portanto, extraídas, e as partes divergentes podem ser isoladas e incorporadas a alguns parâmetros da teoria, tais como massa e constante de acoplamento.

Uma das características deste método é manter a covariância relativística, bem como a invariância de gauge em todos os estágios dos cálculos. Este último fato, torna este método o mais adequado na renormalização de tais teorias, pois , a invariância de gauge é mantida para cada valor de ν , e não só no limite $\nu \rightarrow 4$.

A regularização dimensional é aplicável ao modelo σ , é Eletrodinâmica Quântica e a teorias de gauge não-abelianas.

Como exemplo de aplicação do método de regularização dimensional, vamos calcular o diagrama de polarização do vácuo na Eletrodinâmica Quântica, como uma função analítica de ν , na aproximação de ordem mais baixa.

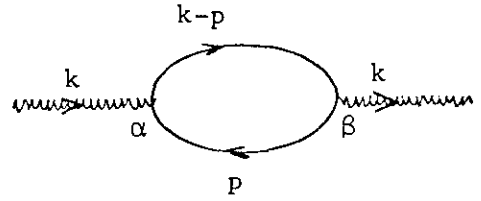
A integral de polarização do vácuo (energia própria do fóton) corresponde ao diagrama (Fig. B.1),

*Os espinores, no entanto, não são generalizados naturalmente para ν dimensões, porém, nos cálculos efetivos eles aparecem como traços das matrizes de Dirac, ao fazer-se uso do operador de projeção de energia.

Para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, tomamos a forma diagonal com valores de +1 e um valor -1.

**Partir de ν dimensões para 4 dimensões é um processo natural se a teoria não contiver a matriz γ_5 , que assume uma forma particular para $\nu = 4$, ou seja, esta passagem é natural se a teoria não contiver acoplamento axial. A definição de γ_5 não é unívoca para dimensões maiores do que quatro.

Figura B.1 - Diagrama de polarização do vácuo.



De acordo com as regras de Feynman da Eletrodinâmica Quântica, o diagrama de polarização do vácuo (ver Figura B.1) corresponde à seguinte integral

$$\pi_{\alpha\beta}(k) = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\beta \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2} \gamma_\alpha \frac{\gamma \cdot (p-k) + m}{(p-k)^2 - m^2} \right\} . \quad (\text{B.1})$$

A equação (B.1) define o chamado tensor de polarização do vácuo.

Admitamos que a Equação de Dirac em ν dimensões seja,

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)\psi = 0 , \quad (\text{B.2})$$

onde ψ é um espinor em dimensões ν (inteiro) e γ_μ são as matrizes de Dirac generalizadas de maneira natural para uma representação de dimensão $d(\nu)$. Então, os γ_μ 's satisfazem à seguinte relação,

$$\gamma_\mu \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\mu = 2g_{\mu\rho} \mathbb{I}_{\nu \times \nu} \quad (\text{B.3})$$

imposta pela validade da Equação de Klein-Gordon a cada componente do espinor ψ . Podemos, então, generalizar a Eq. (B.1) para ν -dimensões como segue,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, \nu) = e^2 \int \frac{d^\nu p}{(2\pi)^\nu} \text{Tr} \left\{ \gamma_\beta \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2} \gamma_\alpha \frac{\gamma \cdot (p-k) + m}{(p-k)^2 - m^2} \right\} \quad (\text{B.4})$$

Fazendo uso, em (B.4), do fato do traço do produto

de um número ímpar de matrizes γ ser nulo e das seguintes relações,

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\rho) = d(v) g_{\mu\rho} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\rho) = d(v) (g_{\alpha\mu} g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\rho}) \quad (\text{B.6})$$

$$g_{\mu\rho} g^\rho{}_\lambda = g_{\mu\lambda} \quad ; \quad g_{\mu\rho} p^\rho = p_\mu \quad (\text{B.7})$$

$$g_\mu{}^\mu = v \quad ; \quad g_{\mu\rho} = g_{\rho\mu} \quad \text{e} \quad g_{\mu\rho} \gamma^\rho = \gamma_\mu$$

tem-se,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, v) = e^2 d(v) \int \frac{d^v p}{(2\pi)^v} \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + p_\beta (p_\alpha - k_\alpha) + p_\alpha (p_\beta - k_\beta) - g_{\alpha\beta} p \cdot (p-k)}{(p^2 - m^2) [(p-k)^2 - m^2]} \quad (\text{B.8})$$

Em (B.8), $d(v)$ é uma função analítica de v . Para v inteiro $d(v)$ coincide com o número de componentes do espinor no espaço de v -dimensões.

Usando, agora, a parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[D_1 x + D_2 (1-x)]^2} \quad (\text{B.9})$$

e fazendo a seguinte identificação: $D_1 = (p-k)^2 - m^2$ e $D_2 = p^2 - m^2$, à Eq. (B.8) fica,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, v) = e^2 d(v) \int_0^1 dx \int \frac{d^v p}{(2\pi)^v} \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + p_\alpha (p_\beta - k_\beta) + p_\beta (p_\alpha - k_\alpha) - g_{\alpha\beta} p \cdot (p-k)}{[(p-kx)^2 + k^2 x (1-x) - m^2]^2} \quad (\text{B.10})$$

Calculando a integral dada por (B.10) com métrica

euclideana* e fazendo uma mudança de variáveis $p \rightarrow p+kx$, a Eq. (B.10) fica,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, \nu) = ie^2 d(\nu) \int_0^1 dx \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \times$$

$$\times \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + 2p_{\alpha} p_{\beta} + 2x(x-1)k_{\alpha} k_{\beta} + g_{\alpha\beta} [p^2 - x(x-1)k^2]}{[p^2 + x(x-1)k^2 + m^2]^2} \quad (B.11)$$

onde eliminamos os termos lineares em p , porque aparecem multiplicados por funções de p^2 .

Fazendo, agora, a seguinte substituição,

$$p_{\alpha} p_{\beta} \rightarrow -\frac{1}{\nu} g_{\alpha\beta} p^2 \quad (B.12)$$

chega-se a uma nova expressão para (B.11), que é,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, \nu) = id(\nu) e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \times$$

$$\times \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + (1 - \frac{2}{\nu}) g_{\alpha\beta} p^2 + 2x(x-1)(k_{\alpha} k_{\beta} - k^2 g_{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} x(x-1)k^2}{[p^2 + k^2 x(x-1) + m^2]^2} \quad (B.13)$$

* Com a finalidade de evitar a discussão da convergência da integral (B.10) em relação ao sinal de p^2 , podemos deformar o caminho de integração até fazê-lo coincidir com o eixo imaginário de p_0 , já que o integrando é uma função analítica. Esta operação, que se chama rotação de Wick, é equivalente a transformar a métrica em euclideana, ou seja $p^2 \rightarrow -p_E^2$. Em consequência, teremos que $\int d^{\nu} p \rightarrow i \int d^{\nu} p_E$.

Utilizando-se a seguinte fórmula*

$$\int d^{\nu} p \frac{(p^2)^n}{(p^2+a)^m} = \frac{\pi^{\nu/2}}{i\Gamma(\nu/2)} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + n)\Gamma(m-n-\frac{\nu}{2})}{\Gamma(m) a^{m-n-\frac{\nu}{2}}} \quad (\text{B.14})$$

e a propriedade da função de Euler,

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \quad (\text{B.15})$$

vê-se facilmente que,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \frac{[m^2+x(x-1)k^2] g_{\alpha\beta}}{[p^2+x(x-1)k^2+m^2]^2} &= - \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \frac{(1-\frac{2}{\nu})p^2 g_{\alpha\beta}}{[p^2+x(x-1)k^2+m^2]^2} = \\ &= -i(1-\frac{\nu}{2}) \frac{\Gamma(1-\frac{\nu}{2}) g_{\alpha\beta}}{[m^2+(x-1)xk^2]^{1-\nu/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

e portanto, se cancelam mutuamente, restando somente o seguinte termo,

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}(k, \nu) &= e^2 \frac{d(\nu)}{(4\pi)^{\nu/2}} \Gamma(2-\frac{\nu}{2}) (k_{\alpha} k_{\beta} - k^2 g_{\alpha\beta}) \times \\ &\times \int_0^1 dx 2x(x-1) [x(x-1)k^2+m^2]^{\frac{\nu}{2}-2} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Na obtenção de (B.16) e (B.17) identificamos o a que aparece na fórmula (B.14) como sendo igual a $m^2+x(x-1)k^2$.

Observemos em (B.17) que o fator invariante de gauge

* O fator i vem do fato da integral ser calculada com métrica euclídeana.

$(k_\alpha k_\beta - k^2 g_{\alpha\beta})$ aparece para qualquer ν , o que não acontece no método tradicional de regularização analítica.

Escrevamos (B.17) numa forma diferente, qual seja,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, \nu) = e^2 \frac{d(\nu)}{(4\pi)^{\nu/2}} (k_\alpha k_\beta - k^2 g_{\alpha\beta}) \bar{\pi}(k^2, \nu) \quad (\text{B.18})$$

onde,

$$\bar{\pi}(k^2, \nu) = \Gamma(2 - \frac{\nu}{2}) \int_0^1 dx 2x(x-1) [x(x-1)k^2 + m^2]^{\frac{\nu}{2}-2} \quad (\text{B.19})$$

Para um fóton real ou físico, devemos ter $k^2 = 0$, e portanto, a Eq. (B.19) fica,

$$\bar{\pi}(0, \nu) = \Gamma(2 - \frac{\nu}{2}) (m^2)^{\frac{\nu}{2}-2} \int_0^1 dx 2x(x-1) = -\frac{1}{3} m^{\nu-4} \Gamma(2 - \frac{\nu}{2}) \quad (\text{B.20})$$

Tomemos, agora, a seguinte identidade ⁽⁷⁹⁾,

$$\bar{\pi}(k^2, \nu) = \bar{\pi}(0, \nu) + [\bar{\pi}(k^2, \nu) - \bar{\pi}(0, \nu)] \quad (\text{B.21})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(k^2, \nu) = & -\frac{1}{3} \Gamma(2 - \frac{\nu}{2}) m^{\nu-4} + \Gamma(2 - \frac{\nu}{2}) \int_0^1 dx 2x(x-1) \left\{ [x(x-1)k^2 + \right. \\ & \left. + m^2]^{\frac{\nu}{2}-2} - (m^2)^{\frac{\nu}{2}-2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

onde fizemos uso de (B.19) no 2º membro de (B.22).

É fácil ver ⁽⁷⁹⁾ que a integral em (B.22) dará uma contribuição proporcional a $(\frac{\nu}{2}-2)$. Para isto, basta fazer $f(z) = (z+m^2 x^2)^{\nu/2-2}$, desenvolver em série de Taylor e observar

que escolhendo-se $z = x(x-1)k^2$, o termo entre chaves que aparece no integrando de (B.22) é,

$$\left(\frac{\nu}{2}-2\right) [x(x-1)k^2+m^2] [(m^2x^2)^{\frac{\nu}{2}-3} + \frac{x(x-1)k^2}{2!} (\frac{\nu}{2}-3) (m^2x^2)^{\frac{\nu}{2}-4} + \dots] \quad (B.23)$$

Usando-se este resultado em (B.22) (2º termo do 2º membro) e a relação (B.15), conclui-se que,

$$\Gamma(2-\frac{\nu}{2}) \int_0^1 dx 2x(x-1) \left\{ [x(x-1)k^2+m^2]^{\frac{\nu}{2}-2} - (m^2)^{\frac{\nu}{2}-2} \right\}$$

é finita para $\nu = 4$, parte esta que denotaremos por $\pi_{\alpha\beta}^f(k^2, \nu)$. A Equação (B.22) fica dada por,

$$\bar{\pi}(k^2, \nu) = -\frac{1}{3} \Gamma(2-\frac{\nu}{2}) (m^2)^{\frac{\nu}{2}-2} + \pi_{\alpha\beta}^f(k^2, \nu) \quad (B.24)$$

Colocando (B.24) em (B.18), tem-se,

$$\pi_{\alpha\beta}(k, \nu) = \frac{e^2 d(\nu)}{(4\pi)^{\nu/2}} (k_\alpha k_\beta - k^2 g_{\alpha\beta}) \left[-\frac{1}{3} (2-\frac{\nu}{2}) m^{\nu-4} + \pi_{\alpha\beta}^f(k^2, \nu) \right] \quad (B.25)$$

O termo $-\frac{1}{3} \Gamma(2-\frac{\nu}{2}) m^{\nu-4}$ é divergente quando tomamos $\nu=4$, pois $\Gamma(2-\frac{\nu}{2})$ possui um pólo para este valor de ν . Portanto, em (B.25) as partes finita e infinita estão separadas e podem ser extraídas, sendo a parte divergente absorvida, neste caso, pela constante fenomenológica e (carga), renormalizando-a. Com esta operação, o tensor de polarização do vácuo fica finito, podendo ser calculado com a precisão que desejarmos.

REFERÊNCIAS

- (1) - J. Ellis, "Status of Gauge Theories", preprint CERN TH 2701 (1979); L. O'Raiheartaigh, "Hidden Gauge Symmetry", Rep. Prog. Phys. 42, (1979), 159; G.G. Ross, "Unified Field Theories", Rep. Prog. Phys. 44, (1981), 655.
- (2) - Ver, por exemplo, E.S. Abers e B.W. Lee, "Gauge Theories", Phys. Rep. 9c, (1973), 1; G.G. Bollini, "Teoria General de Campos de Medida", Universidade Federal de São Carlos, Curso de Verão, (1978).
- (3) - J. Bernstein, "Spontaneous Symmetry Breaking, Gauge Theories, the Higgs Mechanism and all that", Rev. Mod. Phys. 46, (1974), 7; H. Pietschmann, "Elementary Introduction to Gauge Theories", Acta Phys. Aust. Suppl. XIX, (1978), 5.
- (4) - H. Weyl, "Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie", Ann. Physik 59, (1919), 101.
- (5) - H. Weyl, "Elektron und Gravitation", Zeit. Phys. 56, (1929), 330.
- (6) - C.N. Yang e R. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", Phys. Rev. 96, (1954), 191.
- (7) - R. Utiyama, "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction", Phys. Rev. 101, (1956), 1597.
Ver também S. Glashow e M. Gell-Mann, "Gauge Theories of Vector Particles", Ann. Phys. (NY) 15, (1961), 437.
- (8) - L.D. Fadeev e V.N. Popov, "Feynman diagrams for the Yang-Mills Fields", Phys. Lett. B25, (1967), 29.
- (9) - B. De Witt, "Quantum Theory of Gravity I - The Canonical Theory", Phys. Rev. 160, (1967), 1113; "Quantum Theory of Gravity II - The Manifestly Covariant Theory", Phys. Rev. 162, (1967), 1195.

- (10) - G.'t Hooft, "Renormalization of massless Yang-Mills Fields", Nucl. Phys. B33, (1971), 173.
- (11) - B.W. Lee e J.Zinn-Justin, "Spontaneously Broken Gauge Symmetries I - Preliminaries", Phys. Rev. D5, (1972), 3121; "Spontaneously Broken Gauge Symmetries II - Perturbation Theory and Renormalization, Phys.Rev.D5, (1972), 3137.
- (12) - S. Weinberg, "A Model of Leptons", Phys.Rev.Lett. 19, (1967), 1264.
- (13) - A. Salam, "Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analiticity", Proceedings of the 8th Nobel Symposium, editado por N.Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm), (1968).
- (14) - Ver, por exemplo, J.J. Giambiagi, "Teoria Unificada de Interacciones Debiles y Electromagneticas", Universidade Federal de São Carlos, Curso de Verão (1978); J. Iliopoulos "Unified Theories of Elementary Particle Interactions", Contemp. Phys. 21, (1980), 159.
- (15) - H. Fritzsch, M. Gell-Mann e H. Leutwyller, "Advances of the Color Octet Picture", Phys.Lett. B47, (1973), 365; S. Weinberg, "Non-Abelian Gauge Theories of Strong Interactions", Phys. Rev.Lett. 31, (1973), 494.
Para uma revisão da Cromodinâmica Quântica ver, por exemplo, W. Marciano e H. Pagels, "Quantum Chromodynamics", Phys. Rep. 36c, (1978), 137.
- (16) - D. Gross e F. Wilckez, "Ultraviolet Behaviour of Non-Abelian Gauge Theories", Phys. Rev. Lett.30, (1973), 1343.
- (17) - H.D. Politzer, "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions ?", Phys. Rev.Lett. 30, (1973), 1346.
- (18) - H.D. Politzer, "Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions", Phys. Rep. 14c, (1974), 129.
- (19) - O fato de que a liberdade assintótica só ocorre em teorias de gauge não-Abelianas foi evidenciado por Coleman e

Gross em: S.Coleman e D. Gross, "The Price of Asymptotic Freedom", Phys. Rev. Lett. 31, (1973), 851.

- (20) - A.M. Polyakov, "Compact Gauge Fields and the Infrared Catastrophe", Phys. Lett. B59(1975), 82.
- (21) - E. Reya, "Perturbative Quantum Chromodynamics", Phys.Rep 69c, (1981), 195.
- (22) - G.'t Hooft, "On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement", Nucl. Phys. B138, (1978), 1.
- (23) - S. Mandelstam, "Charge-Monopole Duality and the Phases of Non-Abelian Gauge Theories", Phys. Rev. D19, (1979), 239
- (24) - Y. Nambu, "QCD and the String Model", Phys.Lett. B80, (1979), 372.
- (25) - A.M. Polyakov, "String Representations and Hidden Symmetries for Gauge Fields", Phys.Lett. 82B, (1979), 247.
- (26) - J.L. Gervais e A. Neveu, "The Quantum Dual String wave Functional in Yang-Mills Theories", Phys. Lett. 80B, (1979), 255.
- (27) - S. Sakita, "Field Theory of Strings as a Collective Field Theory of U(N) Gauge Fields", Phys.Rev. D21, (1980), 1067.
- (28) - M. Lüscher, "The Area Law as a consequence of the Loop Wave Equation", Phys.Lett. 90B, (1980), 277.
- (29) - D. Foerster, "Yang-Mills Theory - a String Theory in Disguise", Phys. Lett. 87B, (1979), 87.
- (30) - B. Hasslacher e E. Corrigan, "A Functional Equation for Exponential Loop Integrals in Gauge Theories", Phys.Lett 81B, (1979), 181.
- (31) - K.G. Wilson, "Quark Confinement", Phys. Rev. D10, (1974) 2445.
- (32) - Yu. Makeenko e A.A. Migdal, "Exact Equation for the Loop

Average in Multicolor QCD", Phys. Lett. 88B, (1979), 135;
"Quantum Chromodynamics as Dynamics of Loops", preprint
ITEP-23(1980).

- (33) - Ver também V.B. Bezerra, "Relation Between the Classical Wilson Loop and the Angular Parallel Displacement", Rev. Bras. Fís. 12, (1982), 67.
- (34) - T.T. Wu e C.N. Yang, "Some Remarks About Unquantized Non-Abelian Gauge Fields", Phys. Rev. D12, (1975), 3843.
- (35) - A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz e Yu. S. Tyupkin, "Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills Equations", Phys. Lett. B59, (1975), 85.
- (36) - V. de Alfonsio, S. Fubini e G. Furlan, "A New Classical Solution of the Yang-Mills Field Equations", Phys. Lett. B65, (1976), 163.
- (37) - J.D. Bjorken e S.D. Drell, "Relativistic Quantum Fields", McGraw-Hill, New York, (1965).
Para uma discussão detalhada do teorema de Noether, ver E.L. Hill, "Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics", Rev. Mod. Phys. 23, (1951), 253.
- (38) - P.W. Higgs, "Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields", Phys. Lett. 12, (1964), 132; "Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons", Phys. Rev. Lett. 13, (1964), 508; "Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons", Phys. Rev. 145, (1966), 1156.
- (39) - T.W. Kibble, "Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories", Phys. Rev. 155, (1967), 1554.
- (40) - S. Mandelstam, "Feynman Rules for Electromagnetic and Yang-Mills Fields from the Gauge-Independent Field Theoretic Formalism", Phys. Rev. 175, (1968), 1580. Neste trabalho é construída uma teoria de perturbação para o valor esperado no vácuo do loop de Wilson, sem especificação do gauge.

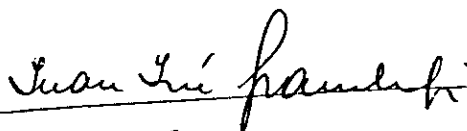
- (41) - A.M. Polyakov, "Gauge Fields as Rings of Glue", Nucl.Phys. B164, (1980), 171.
- (42) - J.J. Sakurai, "Invariance Principles and Elementary Particles", Princeton University Press, New Jersey, (1964).
- (43) - B.G. Wybourne, "Classical Groups for Physicists", John Wiley and Sons, Inc., New York, (1974).
- (44) - P.A.M. Dirac, "Quantised Singularities in the Eletromagnetic Field", Proc. Royal Soc. A133, (1931), 60.
- (45) - S. Mandelstam, "Quantum Electrodynamics without Potentials", Ann. of Phys. (NY) 19, (1962), 1.
- (46) - T.T. Wu e C.N. Yang, "Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields", Phys. Rev. D12, (1975), 3845.
Ver também, C.N. Yang, "Integrals Formalism for Gauge Fields", Phys. Rev. Lett. 33, (1974), 445.
- (47) - Yu. Makeenko, "Loop Equations of Motion in Quantum Chromodynamics - Perturbative Analysis", Sov.Journ.Nucl.Phys. 33, (1981), 274.
- (48) - A.A. Migdal, "Properties of Loop Average in QCD", Ann.Phys. (NY) 126, (1980), 279.
- (49) - C.G. Bollini, J.J. Giambiagi e J.Tiomno, "Wilson Loop and Related Strings for the Instanton and their Variational Derivatives", Nuovo Cim. 59A, (1980), 214.
- (50) - Uma excelente revisão das soluções clássicas da teoria de Yang-Mills e que contém uma boa discussão sobre instantons e mérons é: A. Actor, "Classical Solutions of SU(2) Yang-Mills Theories", Rev. Mod. Phys. 51, (1979), 461.
- (51) - C.G. Callan, R. Dashen e D.J. Gross, "Toward a Theory of the Strong Interaction", Phys. Rev. D17 (1978), 2717; "A Theory of Hadronic Structure", Phys. Rev. D19, (1979), 1826; "Instantons as a Bridge Between Weak and Strong Coupling

- in Quantum Chromodynamics", Phys. Rev. D20, (1979), 3279.
- (52) - A.M. Polyakov, "Quark Confinement and Topology of Gauge Theories", Nucl. Phys. B120, (1977), 429.
- (53) - E. Witten, "Instantons, the Quark Model and the $1/N$ Expansion", Nucl. Phys. B149, (1979), 285.
- (54) - S. Deser e F. Wilczek, "Non-Uniqueness of Gauge-Field Potentials", Phys. Lett. B65, (1976), 391.
- (55) - M. Calvo, "Connection Between Yang-Mills Potentials and their Field Strengths", Phys. Rev. D15, (1977), 1733.
- (56) - R. Roskies, "Uniqueness of Yang-Mills Potentials", Phys. Rev. D15, (1977), 1731.
- (57) - S. Coleman, "Non-Abelian Plane Waves", Phys. Lett. B70, (1977), 59.
- (58) - M.B. Halpern, "Field-Strength Copies and Action Copies in Quantum Chromodynamics", Nucl. Phys. B139, (1978), 477.
- (59) - C.G. Bollini, J.J. Giambiagi e J. Tiomno, "On the Relation Between Fields and Potentials in Non-Abelian Gauge Theories", Rev. Bras. Fis. 9, (1979), 22.
- (60) - C.G. Bollini, J.J. Giambiagi e J. Tiomno, "Gauge Field Copies", Phys. Lett. B83, (1979), 185.
- (61) - S. Solomon, "On the Field-Strength Potential Connection in Non-Abelian Gauge Theory", Nucl. Phys. B147, (1979), 174.
- (62) - N. Weiss, "On the Determination of Yang-Mills Potentials from the Field Strengths", preprint Univ. of Illinois (1979).
- (63) - S. Deser e W. Dreschler, "Generalized Gauge Field Copies", Phys. Lett. B86, (1979), 189.
- (64) - G. 't hooft, "Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories", Nucl. Phys. B79, (1974), 276.

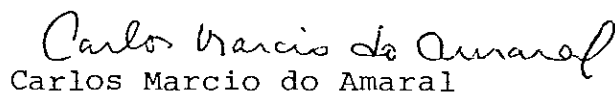
- (65) - A.M. Polyakov, "Isomeric States of Quantum-Fields", Sov. Phys.-JETP 41,(1975),988. Ver também ref. (20).
- (66) - M. Bander, "Theories of Quark Confinement", Phys. Rep., 75c,(1981),205.
- (67) - V.S. Dotsenko e S.N. Vergeles, "Renormalizability of Phase Factors in Non-Abelian Gauge Theory", Nucl. Phys. B169,(1980),527.
- (68) - R.A. Brandt, F. Neri e M. Sato, "Renormalization of Loop Functions for all Loops", Phys.Rev. D24,(1981),879.
- (69) - N.S. Craig e H. Dorn, "On the Renormalization and Short-Distance Properties of Hadronic Operators in QCD", Nucl. Phys. B185,(1981),204.
- (70) - C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, "Lowest Order Divergent Graphs in ν -Dimensional Space", Phys. Lett. 40B,(1972),566
"Dimensional Renormalization: the Number of Dimensions as a Regularizing Parameter", Nuovo Cim. 12B,(1972),20.
- (71) - G't Hooft e M. Veltman, "Combinatorics of Gauge Fields", Nucl.Phys. B50,(1972),318.
- (72) - M. Abud, C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, "Quantized Wilson Loop with Dimensional Regularization", Nucl. Phys. B204, (1982), 109.
- (73) - I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, (1965).
- (74) - I.M. Guelfand e G.E. Chilov, "Les Distributions", DUNOD, Paris, (1962).
- (75) - J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Addison-Wesley Publishing Company, California, (1967).
- (76) - F. Bloch e A. Nordsieck, "Notes on the Radiation Field of the Electron", Phys. Rev. 52,(1937),54.

- (77) - J.C. Ward, "Renormalization Theory of the Interactions of Nucleons, Mesons and Photons", Phys. Rev. 84, (1951), 897.
- (78) - J.L. Lopes, "Introducción a la Electrodinámica Cuántica", Editorial Trillas, México (1977).
- (79) - C.G. Bollini, "Introdução à Teoria Quântica de Campos", Notas de Aula, CBPF, Rio (1979).

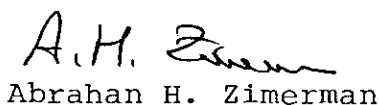
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



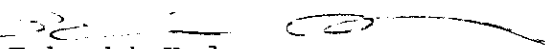
Juan José Giambiagi - Presidente



Carlos Marcio do Amaral



Abrahan H. Zimmerman



Takeshi Kodama



João Carlos Costa dos Anjos

Rio de Janeiro, 14 de abril de 1983