ERNESTO VON RÜCKERT

UM ESTUDO DO ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE A GRAVITAÇÃO E O ELETROMAGNETISMO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro
- 1982 -

À memória de meu pai, cuja expectativa de meu sucesso sempre foi o meu maior estímulo.

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas as equações para os campos gravitacional e eletromagnético, derivadas de uma densidade lagrangeana representando um acoplamento não mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo.

Resolve-se o sistema de equações não lineares, por meio de perturbações, para o caso esfericamente simétrico no vazio, com uma partícula sem carga na origem. Conclui-se que o acoplamento não mínimo gera um potencial eletrostático não nulo para uma partícula sem carga. Resolve-se, também, o mesmo sistema, exatamente, para um modelo de Universo anisotrópico, preenchido apenas pelos fótons não lineares, que admita uma métrica espacialmente homogênea. Mostra-se que a solução não admite a presença de um outro conteúdo energético e material, e que é estável.

AGRADECIMENTOS

À Neirimar Ádila, minha esposa, paciente e encorajadora;

A Mário Novello, orientador e descortinador de horizontes;

Aos mestres do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), que me fizeram físico, especialmente Marcelo Rebouças;

Ao Plano Institucional de Capacitação de Docentes (PICD), que prestou o apoio financeiro;

Ao Departamento de Física da Universidade Federal de Viçosa (U.F.V.), pela oportunidade concedida.

LISTA DE SÍMBOLOS
(Unidades gaussianas)

A - constante de integração

$\vec{A}$ - potencial-vetor magnético, stat-volt, $[\vec{A}] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$

$A_\mu \equiv (\phi, \vec{A})$ - quadrivetor potencial, stat-volt, $[A_\mu] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$

a - fator de escala espacial na métrica de Friedmann-Robertson-Walker, cm, $[a] = L$

a - coeficiente de dx^2 na métrica (3.3-1), adimensional

a_o - fator de escala a em $t = 0$, cm, $[a_o] = L$

B - constante de integração

b - constante de integração

b - coeficiente de dy^2 na métrica (3.3-1), adimensional

C - constante de integração

c - coeficiente de dz^2 na métrica (3.3-1), adimensional

$c \simeq 2{,}9979 \times 10^{10}$ cm/s - velocidade da luz no vácuo, $[c] = LT^{-1}$

D - constante de integração

$E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi c^2}\left(F_{\mu\alpha} F^{\alpha}{}_{\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}\right)$ - tensor momentum-energia do campo eletromagnético, g/cm^3, $[E_{\mu\nu}] = ML^{-3}$

$e \simeq 2{,}71828$ - base dos logaritmos neperianos, adimensional

$e \simeq 4{,}803 \times 10^{-10}$ stat-coulombs - carga do elétron, $[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$

$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu}$ - tensor eletromagnético, stat-volt/cm, $[F_{\mu\nu}] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$

$G \simeq 6{,}670 \times 10^{-8}$ $dyn.cm^2/g^2$ - constante da gravitação, $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ - tensor de Einstein, cm^{-2}, $[G_{\mu\nu}] = L^{-2}$

g - determinante da matriz do tensor métrico, adimensional

$g_{\mu\nu}$ - tensor métrico, adimensional ($ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$)

$g^{\mu\nu}$ - tensor métrico inverso, adimensional ($g^{\mu\nu}\, g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$)

$\hbar \equiv h/2\pi = 1{,}0545 \times 10^{-28}$ $erg.s$ - constante de Planck, $[\hbar] = ML^2\, T^{-1}$

I - ação, $erg.cm$, $[I] = M\, L^3 T^{-2}$

$J^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$ - quadrivetor densidade de corrente, stat-ampere/ /cm^2, $[J^\mu] = M^{1/2}\, L^{-1/2}\, T^{-2}$

$\vec{j}$ - densidade de corrente, stat-ampere/cm^2, $[\vec{j}] = M^{1/2} L^{-1/2}\, T^{-2}$

K - constante de integração da equação (3.2-14), adimensional

$K \equiv \xi + \eta + \zeta + 1$, na equação (3.6-10), adimensional

$\kappa \equiv \dfrac{8\pi G}{c^2} = 1{,}8653 \times 10^{-27}$ $dyn.s^2/g^2$ - constante de Einstein, $[\kappa] = M^{-1}\, L$

$\mathcal{L}$ - densidade lagrangeana, erg/cm^3, $[\mathcal{L}] = ML^{-1}\, T^{-2}$

$\mathcal{L}_{mat}$ - densidade lagrangeana da matéria

M - massa, g, $[M] = M$

$m = \dfrac{Mc}{\hbar}$ - massa geométrica, cm^{-1}, $[m] = L^{-1}$

$P^i{}_{jkl}$ - tensor de curvatura do tri-espaço, cm^{-2} $[P^i{}_{jkl}] = L^{-2}$

$P_{ij} \equiv P^k{}_{ikj}$ - tensor de Ricci do tri-espaço, cm^{-2}, $[P_{ij}] = L^{-2}$

$P \equiv \gamma^{ij}\, P_{ij}$ - escalar de curvatura do tri-espaço, cm^{-2}, $[P] = L^{-2}$

p - pressão isotrópica (hidrostática), dyn/cm^2, $[p] = ML^{-1}\, T^{-2}$

p - parâmetro da componente 0-0 da métrica esfericamente simétrica, $g_{00} = e^p$, adimensional

p_0 - parâmetro da componente 0-0 da solução de Reissner-Nordstrøn, adimensional

Q - carga elétrica, stat-coulombs, $[Q] = M^{1/2}\, L^{3/2}\, T^{-1}$

q - parâmetro da componente 1-1 da métrica esfericamente simétrica, $g_{11} = -e^q$, adimensional

$q_0 = -p_0$ - parâmetro da componente 1-1 da solução de Reissner-Nordstrøn, adimensional

$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\eta|\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\eta\gamma|\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\gamma}\,\Gamma^{\tau}{}_{\beta\eta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\beta}\,\Gamma^{\tau}{}_{\gamma\eta}$ - tensor de curvatura de Riemann, cm^{-2}, $[R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma}] = L^{-2}$

$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ - tensor de Ricci, cm^{-2}, $[R_{\mu\nu}] = L^{-2}$

$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ - escalar de curvatura, cm^{-2}, $[R] = L^{-2}$

$\vec{r}$ - posição, cm, $[\vec{r}] = L$

r - coordenada radial da métrica esfericamente simétrica, cm, $[r] = L$

s - intervalo no espaço-tempo, cm, $[s] = L$

$T_{\mu\nu} \equiv \dfrac{2}{c^2\sqrt{|g|}}\,\dfrac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$ - tensor momentum-energia da matéria, g/cm^3, $[T_{\mu\nu}] = ML^{-3}$

$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ - traço do tensor momentum-energia da matéria, g/cm^3, $[T] = ML^{-3}$

t - tempo, s, $[t] = T$

t_o - instante de referência, s, $[t_o] = T$

V - volume do Universo, cm^3, $[V] = L^3$

$V^{\mu} \equiv \dfrac{dx^{\mu}}{ds}$ - quadrivelocidade, adimensional

$W \equiv \dfrac{\dot{\Omega}}{\Omega}$ - referente à equação (3.1-8), cm^{-1}, $[W] = L^{-1}$

$X \equiv \dfrac{\dot{a}}{a}$ - referente à métrica (3.3-1), cm^{-1}, $[X] = L^{-1}$

x - coordenada espacial, cm, $[x] = L$

$\hat{x}$ - vetor unitário, segundo o eixo dos x, adimensional

$x^{\mu} \equiv (ct, \vec{r})$ - quadrivetor evento (ponto do espaço-tempo), cm, $[x^{\mu}] = L$

$Y \equiv \dfrac{\dot{b}}{b}$ - referente à métrica (3.3-1), cm^{-1}, $[Y] = L^{-1}$

y - coordenada espacial, cm, $[y] = L$

$\hat{y}$ - vetor unitário, segundo o eixo dos y, adimensional

$Z \equiv \dfrac{\dot{c}}{c}$ - referente à métrica (3.3-1), cm^{-1}, $[Z] = L^{-1}$

z - coordenada espacial, cm, $[z] = L$

α - espoente de t/t_0 na componente $1-1$ da métrica tipo Kasner, adimensional

β - constante de integração da equação (3.2-16), $[\beta] = L$

β - expoente de t/t_0 na componente $2-2$ da métrica tipo Kasner, adimensional

$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(g_{\kappa\mu|\nu} + g_{\kappa\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa} \right)$ - símbolos de Christoffel, cm^{-1}, $[\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa}] = L^{-1}$

γ - expoente de t/t_0 na componente $3-3$ da métrica tipo Kasner, adimensional

γ - constante de acoplamento para a densidade lagrangeana do tipo (i), adimensional

γ_{ij} - tensor métrico do tri-espaço, adimensional

$\delta^{\mu}{}_{\nu} \equiv \begin{Bmatrix} 1 \text{ se } \mu = \nu \\ 0 \text{ se } \mu \neq \nu \end{Bmatrix}$ - delta de Kronecker, adimensional

ε - constante de integração da equação (3.2-16), adimensional

$\varepsilon \equiv \frac{\mathcal{D}}{\lambda}$ - constante de integração de solução esfericamente simétrica, por perturbação, no caso $\mathcal{Q} = 0$, para a lagrangeana do tipo (i)

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \begin{Bmatrix} 1 \text{ se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação par de } 0123 \\ -1 \text{ se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação ímpar de } 0123 \\ 0 \text{ se algum índice for repetido} \end{Bmatrix}$ - símbolo de Levi-Civita, adimensional

ζ - constante de acoplamento para a densidade lagrangeana do tipo (ii), adimensional

ζ - coeficiente de proporcionalidade na equação (3.6-9), adimensional

$\eta_{\mu\nu} \equiv diag\ (+1, -1, -1, -1)$ - tensor métrico de Minkowsky, adimensional

$\eta \equiv \frac{\zeta \mathcal{D}}{c^4}$ - constante de acoplamento para a densidade lagrangeana do tipo (ii), dyn^{-1}, $[\eta] = M^{-1} L^{-1} T^2$

η - coeficiente de proporcionalidade na equação (3.6-9), adimensional

θ - coordenada angular polar da métrica esfericamente simétrica, adimensional

$\lambda \equiv \frac{\gamma G}{c^4}$ - constante de acoplamento para a densidade lagrangeana do tipo (ℓ), dyn^{-1}, $[\lambda] = M^{-1} L^{-1} T^2$

ξ - coeficiente de proporcionalidade na equação (3.6-9), adimensional

$\pi \simeq 3,141592654$ - constante matemática

ρ - densidade de cargas, stat-coulomb/cm^3, $[\rho] = M^{1/2} L^{-3/2} T^{-1}$

ρ - densidade de matéria-energia, g/cm^3, $[\rho] = ML^{-3}$

σ - fator de escala angular na métrica de Friedmann-Robertson-Walber, adimensional

ϕ - potencial escalar elétrico, stat-volt, $[\phi] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$

$\phi_0 = -\frac{Q}{r}$ - potencial coulombiano, stat-volt, $[\phi_0] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$

φ - coordenada angular azimutal da métrica esfericamente simétrica, adimensional

χ - coordenada radial na métrica de Friedmann-Robertson-Walker, adimensional

$\Omega \equiv (1 + \lambda A^2)$ - parâmetro de potencial, adimensional

ω - expoente de t/t_0 na expressão de Ω para a solução tipo Kasner

$\delta(\vec{r})$ - função delta de Dirac.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$=$ igual

$\equiv$ idêntico (definido como)

$\simeq$ aproximadamente igual a

$\sim$ da ordem de grandeza de

$\propto$ proporcional a

$\doteq$ equivalente a (a menos de uma divergência total)

$\phi_{|\nu} \equiv \dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$ - derivação parcial

$\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi}$ - derivação variacional

Índices gregos valem $0, 1, 2, 3$

Índices latinos valem $1, 2, 3$

Índices repetidos implicam somatório, $A^{\mu} B_{\mu} \equiv \sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu}$

$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$ - levantamento de índice

$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ - abaixamento de índice

$A^{2} \equiv A_{\mu} A^{\mu} \equiv g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} \equiv g^{\mu\nu} A_{\mu} A_{\nu}$

Derivada covariante:

$$V^{\mu}{}_{\|\lambda} \equiv V^{\mu}{}_{|\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}$$

$$V_{\mu\|\lambda} \equiv V_{\mu|\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} V_{\kappa}$$

$|a|$ - valor absoluto de a

$*F^{\mu\nu} \equiv \dfrac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ - tensor dual

$\bar{x}^{\mu}$ - coordenada em um novo sistema

$[a]$ - dimensão da grandeza a

Dimensões: L - comprimento
T - tempo
M - massa

Simetrização: $A_{(\alpha\beta)} \equiv \dfrac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$

Antissimetrização: $A_{[\alpha\beta]} \equiv \dfrac{1}{2} (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha})$

$\Box \phi \equiv g^{\mu\nu} \phi_{|\mu\|\nu}$ - operador d'Alembertiano

SUMÁRIO

Página

Página

Página

INTRODUÇÃO

No final dos anos 60 e início dos 70, HAWKING e PENROSE (1 e 2) propuseram uma série de teoremas que garantiam a existência de uma singularidade* no espaço-tempo, o mais poderoso dos quais, baseado nas seguintes hipóteses:

(i) validade das equações de Einstein;

(ii) inexistência de curvas tipo tempo fechadas;

(iii) positividade da energia;

(iv) generalidade do espaço-tempo**;

(v) existência de uma *superfície aprisionada fechada****.

Diversas tentativas foram feitas para elaborar uma teoria que evitasse a existência da singularidade - que se apresenta à comunidade científica como filosoficamente indesejável - dentre as quais a mais importante certamente é a quantização da gravitação (4).

Dentro do contexto clássico, todavia, é possível evitar a singularidade, desde que alguma das hipóteses do teorema de Hawking e Penrose não se verifique .

---

* De acordo com SCHMIDT (3), uma singularidade no espaço-tempo é um ponto terminal de alguma curva tipo tempo aberta ou alguma geodésica tipo espaço ou nula, num intervalo finito de comprimento próprio (ou parâmetro afim para as tipo nulo).

** Trata-se de um espaço-tempo em que cada geodésica tipo tempo ou nula passa pelo menos em um ponto (evento), no qual

$$V^{\mu} V^{\nu} V_{[\alpha} R_{\beta]\mu\nu[\gamma} V_{\delta]} \neq 0 .$$

*** Vem a ser a superfície para a qual as frentes de onda de luz dela emitida, quer para o exterior quer para o interior, possuem área menor que a superfície emissora.

A hipótese (iii) é muito dificilmente contestável, e as hipóteses (iv) e (v) razoavelmente devem ocorrer em um modelo real do Universo. A hipótese (ii) pode não ser verificada, como, por exemplo, no modelo de GÖDEL (5). Todavia, isto representa uma patologia talvez mais grave que a existência da singularidade por derrubar o *princípio da causalidade*, um dos pilares da ciência.

Resta modificar a hipótese (i). Teorias alternativas da gravitação já foram propostas, como, por exemplo, a de JORDAN, BRANS e DICKE (6 e 7), a qual considera a constante gravitacional G como uma variável de campo adicional (na realidade, o seu inverso). Outra possibilidade consiste em se acoplar os campos já existentes na natureza (eletromagnético e/ /ou o campo das partículas elementares) não minimalmente com a gravitação, introduzindo, por exemplo, produtos destes campos pelo tensor de curvatura, suas contrações ou seus invariantes, na densidade lagrangeana. Tais termos levam a equações de campo diferentes da de Einstein e, portanto, passíveis de não verificar a hipótese fundamental $R_{\mu\nu} \; V^{\mu} \; V^{\nu} \leqslant 0$.

Se se escolher o campo eletromagnético para acoplar-se não minimalmente com a gravitação, além de se poder evitar a singularidade, obtém-se uma teoria eletromagnética não linear, alternativa à de Maxwell, na qual o fóton possui uma massa de repouso não nula. Esta teoria, por si só, é de muito interesse*.

O orientador deste trabalho de tese, M. Novello,

---

* Não é necessário que o campo vetorial seja o do fóton, podendo ser qualquer outro campo vetorial.

juntamente com J.M.Salim, iniciaram um trabalho de pesquisa sobre o acoplamento não mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo, expresso por um termo na lagrangeana do tipo RA^2, onde R é o escalar de curvatura e A o quadripotencial. Em um artigo de 1978 (8), Novello e Salim expõem as linhas centrais deste tipo de acoplamento, o que é desenvolvido com detalhes no Capítulo 1 desta tese. É apresentada ali, também, uma solução cosmológica homogênea e isotrópica do sistema de equações (ítem 3.2 desta tese), bem como um caso particular da solução anisotrópica, no vazio.

Dando prosseguimento a esta pesquisa, a presente tese, no Capítulo 2, estuda a solução do sistema de equações de Novello e Salim, no caso de uma partícula puntiforme circundada por um campo elétrico e gravitacional estáticos e esfericamente simétricos. As equações são explicitadas para este caso e um método de perturbações é desenvolvido para solucioná-las. Devido à extrema complexidade do sistema, uma solução analítica geral não foi obtida, mas, somente no caso particular de uma partícula de carga nula. A solução cosmológica homogênea e anisotrópica geral para o vazio é apresentada no Capítulo 3, onde também se faz um estudo da estabilidade do sistema.

CAPÍTULO I

MODALIDADES DE ACOPLAMENTO ENTRE A GRAVITAÇÃO E O ELETROMAGNETISMO

1.1 - *ACOPLAMENTO MÍNIMO*

A teoria da relatividade restrita surgiu da constatação de que as equações de Maxwell da eletrodinâmica não são invariantes sob uma transformação de Galileu. Einstein admitiu que as equações de Maxwell estão formuladas corretamente e são válidas em qualquer referencial inercial. A transformação correta entre os referenciais inerciais é que não é a de Galileu e sim a de Lorentz. Desta maneira, a mecânica newtoniana teve que ser reformulada para que suas equações, que são invariantes sob transformações de Galileu, passassem a sê-lo sob transformações de Lorentz. As equações de Maxwell, todavia, já são invariantes sob transformações de Lorentz (9).

Entretanto, quando se consideram transformações gerais de coordenadas, quer relacionando referenciais em movimento relativo acelerado, quer relacionando sistemas de coordenadas diferentes em espaços curvos, as equações de Maxwell precisam ser modificadas para se apresentarem manifestadamente covariantes.

Definindo-se o *quadrivetor potencial* no espaço-tempo de Minkowski

$$A^{\mu} \equiv (\phi, A_x, A_y, A_z), \tag{1.1-1}$$

onde ϕ é o potencial elétrico escalar e $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ é o potencial-vetor magnético, e ainda o *tensor eletromagnético*

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} , \tag{1.1-2}$$

onde $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ (soma implícita sobre o índice repetido), bem como definindo

$$J^\mu \equiv (c\rho, j_x, j_y, j_z) , \tag{1.1-3}$$

como o *quadrivetor densidade de corrente*, no qual ρ é a densidade de cargas, $\vec{j} = j_x \hat{x} + j_y \hat{y} + j_z \hat{z}$ é a densidade de corrente e c a velocidade da luz no vácuo, pode-se escrever as equações de Maxwell, em unidades gaussianas, como

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \tag{1.1-4}$$

e

$$*F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0 , \tag{1.1-4.a}$$

nas quais $*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o *símbolo de Levi--Civita* e a barra denota derivação parcial.

Em uma transformação geral de coordenadas

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu ,$$

os quadrivetores se transformam como

$$\bar{J}^{\mu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} J^{\alpha} \qquad (1.1\text{-}5)$$

e

$$\bar{J}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} J_{\alpha} \, . \qquad (1.1\text{-}5.a)$$

Todavia a transformação de $F^{\mu\nu}{}_{|\nu}$ é:

$$\bar{F}^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} +$$

$$+ \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{2} \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial^{2} \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta} \, . \qquad (1.1\text{-}6)$$

Sendo a transformação (1.1-6) diferente de (1.1-5), vê-se que a equação (1.1-4) não é covariante sob transformações gerais de coordenadas.

Para obedecerem ao princípio da covariancia geral, as equações da física devem ser expressas de modo a permanecerem com a mesma forma sob transformações gerais de coordenadas. Então elas devem obedecer ao seguinte (10): i) serem expressas na forma tensorial e portanto independerem do sistema de coordenadas*; ii) reduzirem-se às expressões válidas para a relatividade restrita quando a curvatura do espaço-tempo for nula.

Tal objetivo será alcançado se: iii) as equações forem escritas como valem na relatividade restrita; iv) o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ do espaço de Minkowski for substituído pelo ten

---

* ou senão na notação de formas diferenciais.

sor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço de Riemann; v) as derivadas ordinárias forem substituídas pelas derivadas covariantes.

A *derivada covariante* de um quadrivetor é definida como (6):

$$V^{\mu}{}_{\|\lambda} \equiv V^{\mu}{}_{|\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa} V^{\kappa} \tag{1.1-7}$$

e

$$V_{\mu\|\lambda} \equiv V_{\mu|\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} \cdot V_{\kappa} \, , \tag{1.1-7.a}$$

onde os *símbolos de Cristoffel* valem

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(g_{\kappa\mu|\nu} + g_{\kappa\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa} \right) . \tag{1.1-8}$$

Das equações (1.1-7) e (1.1-8) vê-se que no espaço de Minkowski, onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ = constante, a derivada covariante se reduz à ordinária.

Com base nestas considerações, a generalização das equações de Maxwell para um espaço riemanniano qualquer se torna

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu} \tag{1.1-9}$$

e

$$*F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \, , \tag{1.1-9.a}$$

onde agora $*F^{\mu\nu} \equiv \dfrac{1}{2\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, sendo $g = det\ (g_{\mu\nu})$.

As equações (1.1-9) e (1.1-10) são covariantes gerais, pois

$$\bar{F}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \bar{F}^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \bar{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\kappa}\, \bar{F}^{\kappa\nu} + \bar{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\kappa}\, \bar{F}^{\mu\kappa} = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} +$$

$$+ \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\bar{x}^{\nu}} \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{2}\bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}\, F^{\alpha\beta} + \frac{\partial^{2}\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\, F^{\alpha\beta} +$$

$$+ \bar{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\kappa} \frac{\partial\bar{x}^{\kappa}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial\bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\, F^{\gamma\beta} + \bar{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\kappa} \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\bar{x}^{\kappa}}{\partial x^{\gamma}}\, F^{\alpha\gamma} \qquad (1.1\text{-}10)$$

Impondo-se a $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ a equação de transformação

$$\bar{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\kappa} = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\bar{x}^{\kappa}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \frac{\partial^{2}\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\kappa}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\,, \qquad (1.1\text{-}11)$$

que é obedecida pela equação (1.1-8), a equação (1.1-10) fica

$$\bar{F}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \left(F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, F^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\beta\gamma}\, F^{\alpha\gamma} \right) =$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, F^{\alpha\beta}{}_{\|\beta}\,, \qquad (1.1\text{-}12)$$

mostrando que $\bar{F}^{\mu\nu}{}_{\|\nu}$ obedece à lei de transformação dos tensores gerais.

Todavia, a equação (1.1-9), construída pelos critérios iii, iv e v não é a única que obedece aos requisitos i e ii.

O *tensor de curvatura*:

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\eta|\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\eta\gamma|\beta} \pm \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\gamma}\, \Gamma^{\tau}{}_{\beta\eta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\beta}\, \Gamma^{\tau}{}_{\gamma\eta}\,, \qquad (1.1\text{-}13)$$

suas contrações e seus invariantes reduzem-se a zero no espaço de Minkowski. Assim, adicionando-se termos construídos com o tensor de curvatura ou multiplicados por invariantes de curvatura às equações da relatividade restrita, além de se seguir os critérios iii, iv e v, obtém-se equações que obedecem aos requisitos i e ii, e na verdade há uma infinidade delas.

Se as equações são construídas apenas obedecendo aos critérios iii, iv e v, sem termos de curvatura "desnecessários", diz-se que elas foram construídas pelo *Princípio de Acoplamento Mínimo* das outras partes da física com a gravitação. Na relatividade geral, a geometria passa a ser parte da física, contendo em si a gravitação.

As equações de Maxwell também podem ser derivadas via *Princípio da Ação Mínima*, a partir de uma densidade lagrangeana convenientemente construída.

Para a relatividade restrita, esta lagrangeana é (11):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\, J_{\mu}\, A^{\mu} \qquad (1.1\text{-}14)$$

As equações de Euler-Lagrange para campos, neste caso, ficam:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu|\nu}}\right)_{|\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} \qquad (1.1\text{-}15)$$

Escrevendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi}\, \eta^{\mu\alpha}\, \eta^{\nu\beta}\, (A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu})\, (A_{\alpha|\beta} - A_{\beta|\alpha}) +$$

$$+ \frac{1}{c}\, J_\mu A^\mu \; ,$$

tem-se:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\rho|\sigma}} = \frac{1}{16\pi}\, \eta^{\mu\alpha}\, \eta^{\nu\beta}\, (\delta^\rho{}_\mu\, \delta^\sigma{}_\nu\, F_{\alpha\beta} -$$

$$- \delta^\rho{}_\nu\, \delta^\sigma{}_\mu\, F_{\alpha\beta} + \delta^\rho{}_\alpha\, \delta^\sigma{}_\beta\, F_{\mu\nu} - \delta^\rho{}_\beta\, \delta^\sigma{}_\alpha\, F_{\mu\nu}) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\, (F^{\rho\sigma} - F^{\sigma\rho} + F^{\rho\sigma} - F^{\sigma\rho}) = \frac{1}{4\pi}\, F^{\rho\sigma} \; ,$$

donde

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu|\nu}}\right)_{|\nu} = \frac{1}{4\pi}\, F^{\mu\nu}{}_{|\nu} \qquad (1.1\text{-}16)$$

Como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c}\, J^\mu \; , \qquad (1.1\text{-}17)$$

levando as equações (1.1-16) e (1.1-17) na equação (1.1-15), obtém-se que

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \frac{4\pi}{c}\, J^\mu \; ,$$

que é a equação (1.1-4).

Da definição de tensor dual no espaço de Minkowski vem a relação

$$*F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \left(\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\,F_{\lambda\kappa}\right)_{|\nu} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\left(A_{\lambda|\kappa} - A_{\kappa|\lambda}\right)\right]_{|\nu} =$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\,A_{\lambda|\kappa|\nu} = 0\,,$$

pois, $A_{\lambda|\kappa|\nu}$ é simétrico em κ e ν, e $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ é antissimétrico, o que leva à equação (1.1-4.a).

Para se escrever a lagrangeana de Maxwell num espaço riemanniano geral é mister fazê-lo de tal maneira que a *ação*

$$I = \int d^4x\,\mathcal{L} \tag{1.1-16}$$

seja um invariante sob transformações gerais de coordenadas.

Uma vez que d^4x se transforma multiplicando-se pelo determinante jacobiano da transformação de coordenadas, pode-se multiplicar a lagrangeana da relatividade restrita por

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|det\ (g_{\mu\nu})|}\,,$$

cuja transformação é justamente

$$\sqrt{|det\ g_{\mu\nu}\ (\bar{x})|} = \sqrt{\left|det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\,g_{\alpha\beta}\ (x)\right)\right|} =$$

$$= det\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)\sqrt{|det\ g_{\alpha\beta}\ (x)|}\,,$$

o que compensa a transformação de d^4x, $d^4\bar{x} = \det\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right) d^4x$.

Além disso, aplicam-se os demais critérios de acoplamento mínimo e obtém-se a lagrangeana de Maxwell minimalmente acoplada com a gravitação, que é

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{|g|}}{c} J_\mu A^\mu . \qquad (1.1\text{-}17)$$

As equações de Euler-Lagrange são então

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu||\nu}}\right)_{||\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} . \qquad (1.1\text{-}18)$$

Como $A_{\mu||\nu} - A_{\nu||\mu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu}$, da equação (1.1-18), tira-se facilmente a equação (1.1-9).

Se se desejar que a lagrangeana também inclua a gravitação, basta adicionar o termo de Einstein, ficando então*

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} \left(\frac{c^4 R}{G} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{16\pi}{c} J_\mu A^\mu\right) \qquad (1.1\text{-}19)$$

onde R é o escalar de curvatura e G a constante gravitacional. A partir da equação (1.1-19), por variação de $g_{\mu\nu}$, acham-se as equações de Einstein para o caso do campo eletromagnético ser a fonte da curvatura do espaço-tempo, juntamente com as cargas. Como estas devem estar em um substrato material, necessi

* A lagrangeana de Maxwell foi aqui multiplicada por −1 por conveniência futura.

ta-se acrescentar um termo de matéria à lagrangeana, que fica, pois,

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi}\left[\frac{c^4 R}{G} - F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\right] + \mathcal{L}_{mat}\,, \qquad (1.1\text{-}20)$$

onde $\mathcal{L}_{mat}$ já inclui o termo de corrente.

Da equação (1.1-20), por variação de $g_{\mu\nu}$, vem que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G}\,\delta\left(\sqrt{|g|}\, R_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\,\delta\left(\sqrt{|g|}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\right) +$$

$$+ \delta\mathcal{L}_{mat} = \frac{c^4}{16\pi G}\left(\sqrt{|g|}\, R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} +\right.$$

$$\left. + R\,\delta\sqrt{|g|}\right) - \frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\,\left(g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\,\delta\sqrt{|g|} + \sqrt{|g|}\, g^{\mu\alpha}\,\delta g^{\nu\beta} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{|g|}\, g^{\nu\beta}\,\delta g^{\mu\alpha}\right) + \frac{c^2}{2}\, T_{\mu\nu}\,\sqrt{|g|}\,\delta g^{\mu\nu}\,, \qquad (1.1\text{-}21)$$

já que

$$\delta\mathcal{L}_{mat} \equiv \frac{c^2}{2}\,\sqrt{|g|}\; T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\,,$$

por definição.

Na referência (6), por exemplo, encontra-se que

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\,\sqrt{|g|}\; g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \qquad (1.1\text{-}22)$$

e

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{\|\nu} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right)_{\|\alpha}\,. \qquad (1.1\text{-}23)$$

Logo,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G}\left[\sqrt{|g|}\; R_{\mu\nu}\;\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}\quad g^{\mu\nu}\;\left((\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{\|\nu} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{\|\alpha}\right) - \frac{1}{2}\, R\, \sqrt{|g|}\; g_{\mu\nu}\;\delta g^{\mu\nu}\right] -$$

$$- \frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\left[g^{\mu\alpha}\; g^{\nu\beta}\;(-\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\; g_{\sigma\rho}\;\delta g^{\sigma\rho}) +\right.$$

$$\left. + \sqrt{|g|}\; g^{\mu\alpha}\;\delta g^{\nu\beta} + \sqrt{|g|}\; g^{\nu\beta}\;\delta g^{\mu\alpha}\right] + \frac{c^2}{2}\sqrt{|g|}\; T_{\mu\nu}\;\delta g^{\mu\nu} =$$

$$= \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\,(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, Rg_{\mu\nu})\;\delta g^{\mu\nu} + \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{\|\nu} -\right.$$

$$\left. - (g^{\mu\nu}\;\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{\|\alpha}\right] + \frac{\sqrt{|g|}}{8\pi}\,(\frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}\; g_{\mu\nu} -$$

$$- F^{\alpha}{}_{\mu}\; F_{\alpha\nu})\;\delta g^{\mu\nu} + \frac{c^2}{2}\sqrt{|g|}\; T_{\mu\nu}\;\delta g^{\mu\nu}\,. \tag{1.1-24}$$

Denominando

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, Rg_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}\;, \tag{1.1-25}$$

$$\frac{1}{4\pi c^2}\,(F_{\mu\alpha}\; F^{\alpha}{}_{\nu} + \frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta}\; F^{\alpha\beta}\; g_{\mu\nu}) = E_{\mu\nu} \tag{1.1-26}$$

e sabendo-se que

$$\sqrt{|g|}\left[\left(g^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{\|\nu} - \left(g^{\mu\alpha}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\right)_{\|\nu}\right] =$$

$$= \left(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{|\nu} - \left(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\alpha}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\right)_{|\nu} \qquad (1.1\text{-}27)$$

vê-se que, ao se levar a equação (1.1-27) na integral da ação, em todo o espaço-tempo, este termo se anula, donde

$$\delta\mathcal{L} \doteq \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\,\delta g^{\mu\nu}\left[G_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^2}\left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right)\right] \qquad (1.1\text{-}28)$$

onde o símbolo $\doteq$ significa equivalência quando levada à variação da ação $I = \int d^4x\mathcal{L}$.

Pelo *Princípio da Ação Mínima*

$$\delta\int\mathcal{L}\,d^4x = 0\ ,$$

donde $\delta\mathcal{L} = 0$, ou seja, para qualquer $\delta g^{\mu\nu}$ na equação (1.1-28), deve-se ter

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}\left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right)\ , \qquad (1.1\text{-}29)$$

que são as equações de Einstein para a gravitação, sendo $E_{\mu\nu}$ o tensor momentum-energia do campo eletromagnético, e $T_{\mu\nu}$ o da matéria.

A variação da lagrangeana (1.1-20), com relação a A_μ conduzirá novamente à equação (1.1-9).

1.2 - *ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO I*

Como foi mencionado no item anterior, termos adicionais contendo funções da curvatura podem ser adicionados à lagrangeana, preservando-se os critérios de covariancia geral.

No caso de acoplamento não-mínimo da gravitação com o eletromagnetismo, dois tipos de termos de primeira ordem na curvatura podem ser considerados (8), quais sejam

$$\text{i)} \quad \mathcal{L} = \sqrt{|g|}\; R g_{\mu\nu}\, A^{\mu} A^{\nu} \tag{1.2-1}$$

$$\text{ii)} \quad \mathcal{L} = \sqrt{|g|}\; R_{\mu\nu}\, A^{\mu} A^{\nu} \tag{1.2-2}$$

O caso (i) assemelha-se à Lagrangeana de Proca, que é (11):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_{\mu} A^{\mu} - \frac{m^2}{8\pi} A_{\mu} A^{\mu} \,. \tag{1.2-3}$$

Por variação de A_{μ}, na equação (1.2-3), ao invés da equação (1.1-4), obtém-se, na relatividade restrita,

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu} - m^2 A^{\mu} \tag{1.2-4}$$

Procedendo-se à escolha do calibre (gauge) de Lorentz, para o qual:

$$A^{\nu}{}_{|\nu} = 0 \,, \tag{1.2-5}$$

levando a equação (1.2-4), pela definição de $F^{\mu\nu}$, a ficar como

$$A^{\mu|\nu}{}_{|\nu} - A^{\nu|\mu}{}_{|\nu} = \square A^{\mu} - 0 = \frac{4\pi}{c} J^{\mu} - m^{2} A^{\mu} ,$$

ou

$$\square A^{\mu} + m^{2} A^{\mu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu} \qquad (1.2-6)$$

Se A^{μ} é estático, a equação (1.2-6) fica

$$\nabla^{2} A^{\mu} - m^{2} A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^{\mu} , \qquad (1.2-7)$$

pois,

$$\square A^{\mu} \equiv \frac{\partial^{2} A^{\mu}}{\partial (ct)^{2}} - \nabla^{2} A^{\mu} .$$

Sendo a fonte uma carga q fixa na origem, tem-se

$$J^{\mu} = (cq,\ 0,\ 0,\ 0)\ \delta(\vec{r})$$

e

$$A^{\mu} = (\phi,\ 0,\ 0,\ 0)$$

e logo,

$$\nabla^{2}\phi - m^{2}\phi = -\frac{4\pi}{c} q , \qquad (1.2-8)$$

equação cuja solução é o potencial de Yukawa (11):

$$\phi = q\frac{e^{-mr}}{r} \qquad (1.2-9)$$

O parâmetro m é interpretado como a massa do fóton, em unidades geométricas, $m = \frac{Mc}{\hbar}$, sendo uma constante. Na lagrangeana (i), todavia, este papel é representado pela "raiz quadrada" do escalar de curvatura.

Considerando-se a densidade lagrangeana completa com um termo do tipo (i) adicional, tem-se a expressão

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} \left[\frac{c^4 R}{G} + \gamma R A_\mu A^\mu - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right] , \qquad (1.2\text{-}10)$$

onde γ é uma constante de acoplamento adimensional.

As equações obtidas da lagrangeana (1.2-10), por variação de A_μ e $g_{\mu\nu}$ não serão respectivamente as equações de Maxwell e Einstein, e, sim, outras modificadas que deverão se reduzir àquelas quando $\gamma = 0$.

Para se aplicar uma variação de $g^{\mu\nu}$ à lagrangeana (1.2-10), escreve-se, primeiramente, fazendo

$$\lambda = \frac{\gamma G}{c^4} \qquad (1.2\text{-}11)$$

a lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G} \left(1 + \lambda A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}\right) R -$$

$$- \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + \mathcal{L}_{mat} . \qquad (1.2\text{-}12)$$

Daí vem:

$$\delta\mathcal{L} \doteq \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\left[(1+\lambda A^2)(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})+\right.$$

$$\left.+\lambda R A_\mu A_\nu\right]\delta g^{\mu\nu}+\frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}(1+\lambda A^2)\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})_{\|\nu}-\right.$$

$$\left.-(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu})_{\|\alpha}\right]+\frac{\sqrt{|g|}}{8\pi}(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-$$

$$-F_{\alpha\mu}F^\alpha{}_\nu)\delta g^{\mu\nu}+\frac{c^2}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\doteq$$

$$\doteq\frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\left[(1+\lambda A^2)G_{\mu\nu}+\lambda R A_\mu A_\nu+\right.$$

$$\left.+\frac{8\pi G}{c^2}(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu})\right]\delta g^{\mu\nu}+$$

$$+\frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\lambda A^2\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})_{\|\nu}-(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})_{\|\nu}\right] \qquad (1.2\text{-}13)$$

onde $\doteq$ novamente significa equivalência quando levada à variação da ação $\delta\int\mathcal{L}\,d^4x$, e $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$.

Como

$$V^\mu{}_{\|\mu}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\,V^\mu)_{|\mu}\ ,$$

a expressão

$$\sqrt{|g|}\,A^2\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})_{\|\nu}-(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})_{\|\nu}\right]$$

fica:

$$A^2 \left[(\sqrt{|g|}\ g^{\mu\nu}\, \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{|\nu} - (\sqrt{|g|}\ g^{\mu\alpha}\, \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha})_{|\nu} \right] =$$

$$= (A^2 \sqrt{|g|}\ (g^{\mu\nu}\, \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\, \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha})_{|\nu} -$$

$$- A^2{}_{|\nu} \sqrt{|g|}\ (g^{\mu\nu}\, \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\, \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}) \doteq$$

$$\doteq A^2{}_{|\nu} \sqrt{|g|}\ (g^{\mu\alpha}\, \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\nu}\, \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}) =$$

$$= \sqrt{|g|}\ (A^2{}_{|\nu}\, g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta}\, g^{\mu\beta}\, \delta^{\alpha}{}_{\nu})\, \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} = \psi\ . \qquad (1.2\text{-}14)$$

Mas,

$$\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\, \delta g^{\nu\rho}\ (g_{\rho\mu|\alpha} + g_{\rho\alpha|\mu} - g_{\mu\alpha|\rho}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, g^{\nu\rho}\ (\delta g_{\rho\mu|\alpha} + \delta g_{\rho\alpha|\mu} - \delta g_{\mu\alpha|\rho})\ . \qquad (1.2\text{-}15)$$

Como esta igualdade é tensorial, vale em qualquer referencial e, localmente, $g_{\mu\alpha|\rho} = 0$, logo

$$\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\, g^{\nu\rho}\ (\delta g_{\rho\mu|\alpha} + \delta g_{\rho\alpha|\mu} - \delta g_{\mu\alpha|\rho})\ . \qquad (1.2\text{-}16)$$

Assim, fica-se com

$$\psi = \sqrt{|g|}\ (A^2{}_{|\nu}\, g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta}\, g^{\mu\beta}\, \delta^{\alpha}{}_{\nu})\ \frac{1}{2}\, g^{\nu\rho}\ (\delta g_{\rho\mu|\alpha} +$$

$$+ \delta g_{\rho\alpha|\mu} - \delta g_{\mu\alpha|\rho})\ . \qquad (1.2\text{-}17)$$

Mas,

$$\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g^{\nu\rho}\ \delta g_{\rho\mu|\alpha}\left(A^2{}_{|\nu}\ g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta}\ g^{\mu\beta}\ \delta^{\alpha}{}_{\nu}\right) \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g^{\nu\rho}\ \delta g_{\rho\mu}\left(A^2{}_{|\nu|\alpha}\ g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta|\alpha}\ g^{\mu\beta}\ \delta^{\alpha}{}_{\nu}\right) \qquad (1.2\text{-}18)$$

pois, $g^{\mu\alpha}{}_{|\alpha} = 0$, localmente.

Como $g^{\nu\rho}\ \delta g_{\rho\mu} = -g_{\rho\mu}\ \delta g^{\nu\rho}$, tem-se:

$$\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g_{\rho\mu}\ \delta g^{\rho\nu}\left(A^2{}_{|\beta|\alpha}\ g^{\mu\beta}\ \delta^{\alpha}{}_{\nu} - A^2{}_{|\nu|\alpha}\ g^{\mu\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(A^2{}_{|\rho|\nu} - A^2{}_{|\nu|\rho}\right)\delta g^{\rho\nu} = 0\ . \qquad (1.2\text{-}19)$$

Outrossim,

$$\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g^{\nu\rho}\ \delta g_{\rho\alpha|\mu}\left(A^2{}_{|\nu}\ g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta}\ g^{\mu\beta}\ \delta^{\alpha}{}_{\nu}\right) \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g_{\rho\alpha}\ \delta g^{\nu\rho}\left(A^2{}_{|\beta|\mu}\ g^{\mu\beta}\ \delta^{\alpha}{}_{\nu} - A^2{}_{|\nu|\mu}\ g^{\mu\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ \delta g^{\nu\rho}\left(\Box A^2\ g_{\rho\nu} - A^2{}_{|\nu|\rho}\right)\ . \qquad (1.2\text{-}20)$$

E ainda:

$$\cdot\ -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g^{\nu\rho}\ \delta g_{\mu\alpha|\rho}\ \left(A^2{}_{|\nu}\ g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta}\ g^{\mu\beta}\ \delta^\alpha{}_\nu\right) =$$

$$= +\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g^{\nu\rho}\ \delta g_{\mu\alpha}\ \left(A^2{}_{|\nu|\rho}\ g^{\mu\alpha} - A^2{}_{|\beta|\rho}\ g^{\mu\beta}\ \delta^\alpha{}_\nu\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ \delta g_{\mu\alpha}\ \left(\Box A^2\, g^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta}\ g^{\alpha\rho}\ A^2{}_{|\beta|\rho}\right) = \Phi\ . \qquad (1.2\text{-}21)$$

De $g^{\nu\rho}\ \delta g_{\rho\mu} = -g_{\rho\mu}\delta g^{\nu\rho}$, multiplicando por $g_{\nu\alpha}$, vem

$$\delta g_{\alpha\mu} = -g_{\nu\alpha}\ g_{\rho\mu}\ \delta g^{\nu\rho}\ ,$$

daí,

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ g_{\nu\alpha}\ g_{\rho\mu}\ \delta g^{\nu\rho}\ \left(\Box A^2\, g^{\mu\alpha} -\right.$$

$$\left. - g^{\mu\beta}\ g^{\alpha\sigma}\ A^2{}_{|\beta|\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ \delta g^{\nu\rho}\ \left(\Box A^2\, g_{\nu\rho} -\right.$$

$$\left. - \delta^\beta{}_\rho\ \delta^\nu{}_\sigma\ A^2{}_{|\beta|\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\ \delta g^{\nu\rho}\ \left(\Box A^2\, g_{\nu\rho} - A^2{}_{|\rho|\nu}\right) \qquad (1.2\text{-}22)$$

Levando as equações (1.2-20) e (1.2-22) na equação (1.2-17), e esta por sua vez na equação (1.2-14), obtém-se:

$$\psi = -\sqrt{|g|}\ \left(\Box A^2\, g_{\nu\rho} - A^2{}_{|\rho|\nu}\right)\ \delta g^{\nu\rho}\ . \qquad (1.2\text{-}23)$$

Levando a equação (1.2-23) na equação (1.2-13), vem:

$$\delta\mathcal{L} \doteq \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\Big[(1 + \lambda A^2)\, G_{\mu\nu} + \lambda R A_\mu A_\nu +$$

$$+ \frac{8\pi G}{c^2}\,(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} +$$

$$+ \lambda A^2{}_{|\mu||\nu}\Big]\,\delta g^{\mu\nu}\,, \qquad (1.2\text{-}24)$$

onde a dupla barra $\|$ substituiu a simples barra $|$ para covariancia geral.

Para minimizar a ação, deve-se ter $\delta\mathcal{L} = 0$ para qualquer $\delta g^{\mu\nu}$. Assim,

$$\boxed{\begin{aligned}&(1 + \lambda A^2)\, G_{\mu\nu} + \lambda A_\mu A_\nu R - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} + \\ &+ \lambda A^2{}_{|\mu||\nu} = -\kappa\,(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})\end{aligned}} \qquad (1.2\text{-}25)$$

onde $\kappa = \dfrac{8\pi G}{c^2}$ é a constante gravitacional de Einstein.

Esta é, pois, a equação que generaliza a equação de Einstein para o modelo (i) de densidade lagrangeana de acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo. Vê-se que ela se reduz à equação de Einstein quando $\gamma = \lambda = 0$, qual seja,

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\,(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})\,. \qquad (1.1\text{-}29)$$

Para se obter a equação que generaliza a equação de Maxwell, tem-se que achar a derivada variacional de $\mathcal{L}$ com respeito a A_μ.

Considerando A_μ como independente de $g_{\mu\nu}$ (e não A^μ) da equação (1.2-12), obtêm-se:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_{\mu|\nu}} = -\frac{\sqrt{|g|}}{4\pi} F^{\mu\nu} \tag{1.2-26}$$

Ainda,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = \frac{c^4 \lambda \sqrt{|g|}\, R A^\mu}{8\pi G}\,, \tag{1.2-27}$$

já que

$$\frac{\partial A_\mu A^\mu}{\partial A_\mu} = 2 A^\mu\,.$$

Então as equações de Euler-Lagrange dão:

$$\boxed{F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{4\pi c^2 \lambda}{\kappa} R A^\mu + \frac{4\pi}{c} J^\mu} \tag{1.2-28}$$

onde o termo em J^μ é originário da parte da matéria lagrangeana.

Esta equação reduz-se à do acoplamento mínimo quando $\gamma = \lambda = 0$.

A equação da continuidade ou da conservação da carga pode ser obtida pela divergência da equação (1.2-28), ou seja, como

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\ F^{\mu\nu}\right)_{|\nu} \ ,$$

tem-se

$$\left(\sqrt{|g|}\ F^{\mu\nu}\right)_{|\nu} = \sqrt{|g|} \left[\frac{4\pi}{c} J^{\mu} - \frac{4\pi c^2 \lambda}{\kappa} R A^{\mu}\right] ,$$

donde

$$\left(\sqrt{|g|}\ F^{\mu\nu}\right)_{|\nu|\mu} = \frac{4\pi}{c} \left[\sqrt{|g|} \left(J^{\mu} - \frac{c^3\lambda}{\kappa} R A^{\mu}\right)\right]_{|\mu} \qquad (1.2\text{-}29)$$

Mas, $\left(\sqrt{|g|}\ F^{\mu\nu}\right)_{|\nu|\mu} = 0$, pois, $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico e $|\nu|\mu$ é simétrico em ν e μ. Assim,

$$\left[\sqrt{|g|} \left(J^{\mu} - \frac{c^3\lambda}{\kappa} R A^{\mu}\right)\right]_{|\mu} = \sqrt{|g|} \left(J^{\mu} - \frac{c^3\lambda}{\kappa} R A^{\mu}\right)_{\|\mu} = 0 \ ,$$

ou

$$\boxed{J^{\mu}{}_{\|\mu} = \frac{c^3\lambda}{\kappa} \left(R A^{\mu}\right)_{\|\mu}} \qquad (1.2\text{-}30)$$

Vê-se, da equação (1.2-30) que, ou se impõe a restrição de que $\left(R A^{\mu}\right)_{\|\mu} = 0$ para que a carga seja conservada ou se admite que possa haver *criação de cargas pelo campo gravitacional*.

Tomando-se o traço da equação (1.2-25), acha-se:

$$\left(1 + \lambda A^2\right)\left(R^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}{}_{\mu} R\right) + \lambda A_{\mu} A^{\mu} R - \lambda \Box A^2 \delta^{\mu}{}_{\mu} +$$

$$+ \lambda A^{2|\mu}{}_{\|\mu} = -\kappa \left(E^{\mu}{}_{\mu} + T^{\mu}{}_{\mu}\right) ,$$

ou $(1 + \lambda A^2)(R - 2R) + \lambda A^2 R - 4\lambda \Box A^2 + \lambda \Box A^2 = -\kappa T$, pois, $E^\mu{}_\mu = 0$ e $\delta^\mu{}_\mu = 4$, logo,

$$(1 + \lambda A^2)(-R) + \lambda A^2 R - 3\lambda \Box A^2 = -\kappa T ,$$

ou ainda

$$\boxed{R + 3\lambda \Box A^2 = \kappa T} \tag{1.2-31}$$

Levando a equação (1.2-31) na equação (1.2-28), tem-se

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{4\pi}{c}\left[J^\mu + \frac{3c^3\lambda^2}{\kappa}(\Box A^2)\, A^\mu - c^3\lambda\, T A^\mu\right] \tag{1.2-32}$$

Mas,

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = (A^{\mu\|\nu} - A^{\nu\|\mu})_{\|\nu} = (A^{\mu\|\nu})_{\|\nu} - (A^{\nu\|\mu})_{\|\nu} =$$

$$= \Box A^\mu - (g^{\mu\alpha} A^\nu{}_{\|\alpha\|\nu}) = \Box A^\mu - g^{\mu\alpha}(A^\nu{}_{\|\nu\|\alpha} -$$

$$- R^\nu{}_{\beta\nu\alpha} A^\beta) = \Box A^\mu - (A^\nu{}_{\|\nu})^{\|\mu} - R^\mu{}_\beta A^\beta \tag{1.2-33}$$

Daí, substituindo a equação (1.2-33) na equação (1.2-32), tem-se:

$$\boxed{\Box A^\mu - (A^\nu{}_{\|\nu})^{\|\mu} - R^\mu{}_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c}\left[\frac{3c^3\lambda^2}{\kappa}(\Box A^2)\, A^\mu - c^3\lambda\, T A^\mu + J^\mu\right]} \tag{1.2-34}$$

que é a "equação de onda" para o potencial A^μ (8).

$\Box A^\mu - R^\mu{}_\nu A^\nu$ é denominado "operador de onda de Rahm" no espaço curvo.

1.3 - *ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO II*

Partindo-se de densidade lagrangeana do tipo (ii) do item anterior [equação (1.2-2)], constroi-se a lagrangeana completa

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi}\left[\frac{c^4 R}{G} + \zeta R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right] + \mathcal{L}_{mat} \qquad (1.3\text{-}1)$$

Para proceder ao cálculo da derivada variacional desta lagrangeana é melhor escrevê-la como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{c^4}{G}\left[R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\sqrt{|g|} + \eta R_{\mu\nu} A_\alpha A_\beta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \sqrt{|g|}\right] - F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{|g|}\right\} + \mathcal{L}_{mat} , \qquad (1.3\text{-}2)$$

onde

$$\eta = \frac{\zeta G}{c^4} . \qquad (1.3\text{-}3)$$

Proceder-se-á primeiramente ao cálculo da variação do segundo termo da lagrangeana (1.3-2), já que os demais já foram calculados. Novamente se considera que A_μ é independente de $g_{\mu\nu}$. Assim, por variação de $g^{\mu\nu}$, tem-se:

$$\delta\left[R_{\mu\nu}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta} \sqrt{|g|}\right] = \sqrt{|g|}\, R_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\alpha}\, \delta^{\mu}{}_{\beta}\, \delta g^{\mu\nu} +$$

$$+ \sqrt{|g|}\, R_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\beta}\, \delta^{\nu}{}_{\alpha}\, \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{|g|}\, R_{\sigma\rho}\, g^{\sigma\alpha}\, g^{\rho\beta} \times$$

$$\times\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, \delta R_{\mu\nu} . \qquad (1.3\text{-}4)$$

Levando este resultado na variação da equação (1.3-2), conforme a equação (1.1-24), tem-se:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G} \left\{\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \eta\left(2 R_{\alpha(\mu} A_{\nu)} A^{\alpha} -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta} g_{\mu\nu}\right)\right] \delta g^{\mu\nu} + \left[g^{\mu\nu} + \eta A^{\mu} A^{\nu}\right] \times$$

$$\left. \times\, \delta R_{\mu\nu}\right\} + \frac{\sqrt{|g|}}{8\pi} \left\{\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + F_{\mu\alpha} F^{\alpha}{}_{\nu}\right\} \times$$

$$\times\, \delta g^{\mu\nu} + \frac{c^2}{2} \sqrt{|g|}\, T_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} . \qquad (1.3\text{-}5)$$

Já foi visto na equação (1.1-27) que $\sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu}$ quando integrado em todo o espaço-tempo se anula, logo resta calcular

$$\Phi = \sqrt{|g|}\, A^{\mu} A^{\nu}\, \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\, A^{\mu} A_{\rho}\, g^{\nu\rho} \left[\left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{\|\nu} -\right.$$

$$- (\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{\|\alpha}\Big] = A^{\mu} A_{\rho} \Big[\sqrt{|g|}\,(g^{\nu\rho}\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - g^{\alpha\rho}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha})\Big]_{|\nu} \doteq$$

$$\doteq (A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu} \sqrt{|g|}\,(g^{\alpha\rho}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} - g^{\nu\rho}\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}) = \sqrt{|g|} \times$$

$$\times \Big[(A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu}\, g^{\alpha\rho} - (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta}\, g^{\beta\rho}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\Big]\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\,, \qquad (1.3\text{-}6)$$

devido à equação (1.1-23) e à anulação da divergência total quando integrada no espaço-tempo todo (note o significado de $\doteq$).

Considerando-se que localmente $g_{\mu\nu|\alpha} = 0$, pode-se escrever a equação (1.3-6) como

$$\sqrt{|g|}\,\Big[(A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu}\, g^{\alpha\rho} - (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta}\, g^{\beta\rho}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\Big] \times$$

$$\times \frac{1}{2}\, g^{\nu\cancel{\rho}\sigma}\,(\delta g_{\sigma\mu|\alpha} + \delta g_{\sigma\alpha|\mu} - \delta g_{\mu\alpha|\sigma}) \doteq -\frac{1}{2}\sqrt{|g|} \times$$

$$\times\, g^{\nu\sigma}\Big\{\delta g_{\sigma\mu}\,\Big[(A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu|\alpha}\, g^{\alpha\rho} - (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta|\alpha} \times$$

$$\times\, g^{\beta\rho}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\Big] + \delta g_{\sigma\alpha}\,\Big[(A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu|\mu}\, g^{\alpha\rho} -$$

$$- (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta|\mu}\, g^{\beta\rho}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\Big] - \delta g_{\mu\alpha}\,\Big[(A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu|\sigma}\, g^{\alpha\rho} -$$

$$- (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta|\sigma}\, g^{\beta\rho}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\Big]\Big\} = \Phi\,, \qquad (1.3\text{-}7)$$

a última passagem novamente devido à anulação da divergência total quando integrada em todo o espaço-tempo (note que os dois primeiros termos se cancelam).

Usando $g^{\mu\alpha}\, \delta g_{\alpha\nu} = -g_{\alpha\nu}\, \delta g^{\mu\alpha}$, pode-se desenvolver a equação (1.3-7) da seguinte maneira:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \left\{ (A^{\mu} A_{\rho})_{|\alpha|\mu}\, \delta g^{\alpha\rho} - g^{\beta\rho} (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta|\mu} \times \right.$$

$$\times\, g_{\sigma\alpha}\, \delta g^{\sigma\alpha} - g^{\nu\sigma} (A^{\mu} A_{\rho})_{|\nu|\sigma}\, g_{\mu\alpha}\, \delta g^{\alpha\rho} +$$

$$\left. +\, g^{\beta\rho} (A^{\mu} A_{\rho})_{|\beta|\sigma}\, g_{\mu\alpha}\, \delta g^{\alpha\sigma} \right\} . \qquad (1.3\text{-}8)$$

Rearranjando os nomes dos índices e passando à co variância geral, tem-se:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \left\{ (A^{\alpha} A_{\nu})_{\|\mu\|\alpha} - (A^{\alpha} A^{\beta})_{\|\alpha\|\beta}\, g_{\mu\nu} - \right.$$

$$\left. -\, \Box (A_{\mu} A_{\nu}) + (A^{\alpha} A_{\mu})_{\|\nu\|\alpha} \right\} \delta g^{\mu\nu} . \qquad (1.3\text{-}9)$$

Levando o resultado da equação (1.3-9) na equação (1.3-5), vem:

$$\delta \mathcal{L} \doteq \frac{c^4 \sqrt{|g|}}{16\pi G} \left\{ G_{\mu\nu} + 2\eta\, R_{\alpha(\mu} A_{\nu)} A^{\alpha} - \frac{1}{2} \eta R_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta} g_{\mu\nu} + \right.$$

$$+\, \eta\, (A^{\alpha} A_{(\nu})_{\|\mu)\|\alpha} - \frac{1}{2} \eta\, \Box (A_{\mu} A_{\nu}) + \frac{1}{2} \eta (A^{\alpha} A^{\beta})_{\|\alpha\|\beta} \times$$

$$\times\ g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^2}\left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right)\Big\}\ \delta g^{\mu\nu}\ . \tag{1.3-10}$$

A exigência de que $\delta \int \mathcal{L}\, d^4x = 0$ conduz às equações

$$\boxed{\begin{aligned} &G_{\mu\nu} + \eta\left[\frac{1}{2}\left(A^{\alpha} A^{\beta}\right)_{\|\alpha\|\beta}\, g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\Box\left(A_{\mu} A_{\nu}\right) + \right.\\ &+ \left(A^{\alpha} A_{(\nu}\right)_{\|\mu)\|\alpha} + 2R_{\alpha(\mu}A_{\nu)}\, A^{\alpha} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\ \times\\ &\left.\times\ A^{\alpha} A^{\beta}\, g_{\mu\nu}\right] = -\kappa\left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right)\ . \end{aligned}} \tag{1.3-11}$$

Por variação de A_{μ} na lagrangeana (1.3-2) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\eta c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\left\{2R_{\mu\nu}\, A_{\beta}\, \delta A_{\alpha}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\right\} + \\ &+ \frac{\sqrt{|g|}}{4\pi}\, F^{\mu\nu}{}_{\|\nu}\, \delta A_{\mu} - \frac{\sqrt{|g|}}{c}\, J^{\mu}\, \delta A_{\mu}\ , \end{aligned} \tag{1.3-12}$$

o que conduz às equações

$$\boxed{F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{4\pi}{c}\, J^{\mu} - \frac{4\pi\, c^2\, \eta}{\kappa}\, R^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\ .} \tag{1.3-13}$$

As equações (1.3-11) e (1.3-13) reduzem-se também às equações de Einstein e Maxwell, respectivamente, quando $\zeta = \eta = 0$.

Como $\left(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu}\right)_{|\nu} = \sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu}{}_{\|\nu}$, tem-se, da equação (1.3-13),

$$\left(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu}\right)_{|\nu} = \sqrt{|g|}\left\{\frac{4\pi}{c}\, J^{\mu} - \frac{4\pi\, c^{2}\eta}{\kappa}\, R^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\right\}.$$

Logo,

$$\left(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu}\right)_{|\nu|\mu} = \frac{4\pi}{c}\left\{\sqrt{|g|}\left(J^{\mu} - \frac{c^{3}\eta}{\kappa}\, R^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\right)\right\}_{|\mu} = 0$$

pela antissimetria de $F^{\mu\nu}$ e a simetria de $|\nu|\mu$.

Assim,

$$\left(J^{\mu} - \frac{c^{3}\eta}{\kappa}\, R^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\right)_{\|\mu} = 0$$

ou

$$\boxed{J^{\mu}{}_{\|\mu} = \frac{c^{3}\eta}{\kappa}\left(R^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\right)_{\|\mu}\,.} \qquad (1.3\text{-}14)$$

Novamente pode se ter a criação de carga pelo campo gravitacional.

Tomando-se o traço da equação (1.3-11), obtém-se:

$$R + \eta\left\{\frac{1}{2}\,\Box\, A^{2} + R_{\alpha\beta}\, A^{\alpha} A^{\beta} - 3\left(A^{\alpha} A^{\beta}\right)_{\|\alpha\|\beta}\right\} = \kappa T\,. \qquad (1.3\text{-}15)$$

As equações de movimento derivadas da lagrangea na (1.3-2) diferem substancialmente daquelas obtidas da lagrangeana (1.2-12), uma vez que aquelas, mesmo no caso de um Universo homogêneo e isotrópico, não admitem uma solução do tipo Friedmann, conforme mostrado por NOVELLO e SALIM (8).

Cumpre observar que as duas modalidades de acoplamento não-mínimo apresentadas conduzem a teorias que *não* são invariantes sob uma transformação de calibre (gauge). Tal fato deve-se à presença do termo que contém a constante de acoplamento na lagrangeana, correspondente ao termo de massa na lagrangeana de Proca. Esta constante de acoplamento deve ser tomada como positiva para se evitar a existência de partículas de massa negativa (táquions).

CAPÍTULO 2

SOLUÇÃO ESFERICAMENTE SIMÉTRICA

2.1 - FORMULAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES COM MÉTRICA ESFERICAMENTE SIMÉTRICA PARA A LAGRANGEANA DO TIPO (*i*)

Neste item se formula o sistema de equações (1.2-25) e (1.2-28), quais sejam

$$\left(1 + \lambda A^2\right) G_{\mu\nu} + \lambda A_\mu A_\nu R - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} +$$

$$+ \lambda A^2{}_{|\mu\|\nu} = -\kappa \left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right) \qquad (2.1\text{-}1)$$

e

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{4\pi c^2 \lambda}{\kappa} R A^\mu + \frac{4\pi}{c} J^\mu , \qquad (2.1\text{-}2)$$

para uma métrica e um potencial estáticos esfericamente simétricos, dados por

$$ds^2 = e^{p(r)} c^2 dt^2 - e^{q(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 -$$

$$- r^2 sen^2 \theta d\phi^2 \qquad (2.1\text{-}3)$$

e

$$A_\mu = \left(\phi(r), 0, 0, 0\right) . \qquad (2.1\text{-}4)$$

Da equação (2.1-3), vê-se que

$$g_{00} = e^{p}, \quad g_{11} = -e^{q}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 sen^2\theta \; . \qquad (2.1\text{-}5)$$

Como a métrica é diagonal, tira-se:

$$g^{00} = e^{-p}, \quad g^{11} = -e^{-q}, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2\, sen^2\theta} \qquad (2.1\text{-}6)$$

Da definição dos *Símbolos de Christoffel*,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\kappa}\left(g_{\kappa\mu|\nu} + g_{\kappa\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa}\right) , \qquad (2.1\text{-}7)$$

tiram-se os valores não nulos:

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma^{0}{}_{10} = \frac{1}{2}\, p' , & \Gamma^{1}{}_{00} = \frac{1}{2}\, p'\, e^{p-q} , & \Gamma^{1}{}_{11} = \frac{1}{2}\, q' \\ \Gamma^{1}{}_{22} = -e^{-q} r , & \Gamma^{1}{}_{33} = -r\, sen^2\theta\, e^{-q} , & \Gamma^{2}{}_{12} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^{2}{}_{33} = -sen\,\theta \cos\theta , & \Gamma^{3}{}_{13} = \frac{1}{r} , & \Gamma^{3}{}_{23} = \cot\theta \end{array}\right\} \qquad (2.1\text{-}8)$$

onde as plicas representam derivação com respeito a r.

Sendo

$$R_{\eta\gamma} = R^{\alpha}{}_{\eta\alpha\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\eta|\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\eta\gamma|\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\gamma}\,\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\eta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\alpha}\,\Gamma^{\tau}{}_{\gamma\eta} \qquad (2.1\text{-}9)$$

a partir das equações (2.1-8) obtêm-se:

$$R_{00} = e^{p-q} \left(-\frac{p''}{2} + \frac{p'q'}{4} - \frac{p'^2}{4} - \frac{p'}{r}\right) \qquad (2.1\text{-}10.a)$$

$$R_{11} = \frac{p''}{2} - \frac{p'q'}{4} + \frac{p'^2}{4} - \frac{q'}{r} \qquad (2.1\text{-}10.b)$$

$$R_{22} = e^{-q} \left(1 + \frac{rp'}{2} - \frac{rq'}{2}\right) - 1 \qquad (2.1\text{-}10.c)$$

$$R_{33} = R_{22}\, sen^2\,\theta \qquad (2.1\text{-}10.d)$$

A partir das equações (2.1-10), calcula-se

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = e^{-q} \left(-p'' + \frac{p'q'}{2} - \frac{p'^2}{2} - \frac{2p'}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2q'}{r} + \frac{2e^{q}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\right). \qquad (2.1\text{-}11)$$

Como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, de (2.1-10) e (2.1-11) vem:

$$G_{00} = e^{p-q} \left(\frac{1-e^{q}}{r^2} - \frac{q'}{r}\right) \qquad (2.1\text{-}12.a)$$

$$G_{11} = -\frac{1-e^{q}}{r^2} - \frac{p'}{r} \qquad (2.1\text{-}12.b)$$

$$G_{22} = -\frac{r^2 e^{-q}}{2} \left(p'' + \frac{p'^2}{2} - \frac{p'q'}{2} + \frac{p'-q'}{r}\right) \qquad (2.1\text{-}12.c)$$

$$G_{33} = G_{22}\, sen^2\theta \qquad (2.1\text{-}12.d)$$

Da equação (2.1-4) tira-se

$$A_0 = \phi(r) \quad \text{e} \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0 \, . \tag{2.1-13}$$

Das equações (2.1-6) e (2.1-13) vem:

$$A^0 = g^{00} A_0 = e^{-p}\phi \tag{2.1-14.a}$$

$$A^1 = A^2 = A^3 = 0 \tag{2.1-14.b}$$

Logo,

$$A^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = e^{-p} \phi^2 \tag{2.1-15}$$

e

$$A^2{}_{|1} = e^{-p} \left(2\phi\phi' - p' \phi^2\right) \tag{2.1-16}$$

e ainda

$$A^2{}_{|1|1} = e^{-p} \left(2(\phi\phi')' - 4p'\phi\phi' - (p'' - p'^2)\, \phi^2\right) \, . \tag{2.1-17}$$

Sabendo-se que

$$\Box A^2 = g^{\mu\nu} A^2{}_{|\mu||\nu} = g^{\mu\nu} A^2{}_{|\mu|\nu} - g^{\mu\nu} A^2{}_{|\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} =$$

$$= -g^{00} A^2{}_{|1} \Gamma^1{}_{00} + g^{11} A^2{}_{|1|1} - g^{11} A^2{}_{|1}\Gamma^1{}_{11} -$$

$$- g^{22} A^2{}_{|1} \Gamma^1{}_{22} - g^{33} A^2{}_{|1} \Gamma^1{}_{33} \tag{2.1-18}$$

e usando-se os resultados anteriormente obtidos, chega-se a

$$\Box A^2 = -e^{-(p+q)} \left[2(\phi\phi')' - \left(3p' + q' - \frac{4}{r}\right) \phi\phi' - \right.$$

$$\left. - \left(p'' - \frac{p'^2}{2} - \frac{p'\dot{q}'}{2} + \frac{2p'}{r}\right) \phi^2 \right] . \qquad (2.1\text{-}19)$$

Da definição

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu\|\nu} - A_{\nu\|\mu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} , \qquad (2.1\text{-}20)$$

tira-se:

$$F_{01} = A_{0|1} - A_{1|0} = \phi'(r) \qquad (2.1\text{-}21.a)$$

e

$$F_{10} = A_{1|0} - A_{0|1} = -\phi'(r) . \qquad (2.1\text{-}21.b)$$

Como $F^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$, tem-se:

$$F^{0}{}_{1} = g^{00} F_{01} = e^{-p} \phi' \qquad (2.1\text{-}22.a)$$

e

$$F^{1}{}_{0} = g^{11} F_{10} = e^{-q} \phi' . \qquad (2.1\text{-}22.b)$$

E como $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$, tem-se:

$$F^{01} = g^{00} g^{11} F_{01} = -e^{-(p+q)} \phi' \qquad (2.1\text{-}23.a)$$

e

$$F^{10} = g^{11}\, g^{00}\, F_{10} = e^{-(p+q)}\, \phi' . \qquad (2.1\text{-}23.b)$$

Assim,

$$F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} = F_{01}\, F^{01} + F_{10}\, F^{10} = -2\phi'^{2}\, e^{-(p+q)} . \qquad (2.1\text{-}24)$$

De posse destes valores pode-se obter o tensor momento-energia do campo eletromagnético

$$E_{\mu\nu} = \left(F_{\mu\alpha}\, F^{\alpha}{}_{\nu} + \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} \right) \frac{1}{4\pi c^{2}} . \qquad (2.1\text{-}25)$$

Assim:

$$E_{00} = \frac{1}{4\pi c^{2}} \left(F_{01}\, F^{1}{}_{0} + \frac{1}{4}\, g_{00}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} \right) = \frac{\phi' e^{-q}}{4\pi c^{2}} -$$

$$- \frac{1}{8\pi c^{2}}\, \phi'^{2}\, e^{-q} = \frac{1}{8\pi c^{2}}\, e^{-q}\, \phi'^{2} ; \qquad (2.1\text{-}26.a)$$

$$E_{11} = \frac{1}{4\pi c^{2}} \left(F_{10}\, F^{0}{}_{1} + \frac{1}{4}\, g_{11}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} \right) = \frac{-\phi'^{2}}{4\pi c^{2}}\, e^{-p} +$$

$$+ \frac{\phi'^{2}}{8\pi c^{2}}\, e^{-p} = -\frac{1}{8\pi c^{2}}\, e^{-p}\, \phi'^{2} ; \qquad (2.1\text{-}26.b)$$

$$E_{22} = \frac{1}{16\pi c^{2}}\, g_{22}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi c^{2}}\, r^{2}\, e^{-(p+q)}\, \phi'^{2} \qquad (2.1\text{-}26.c)$$

e

$$E_{33} = \frac{1}{16\pi c^2} g_{33} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = sen^2\theta \, E_{22} \, . \qquad \text{-.d)}$$

Ainda,

$$\sqrt{|g|} = r^2 \, sen\theta \, e^{\frac{p+q}{2}} \qquad (2.1\text{-}27)$$

e

$$\left(\sqrt{|g|}\right)_{|1} = 2r \, sen\theta \, e^{\frac{p+q}{2}} + r^2 \, sen\theta \frac{p'+q'}{2} \, e^{\frac{p+q}{2}} \, . \qquad (2.1\text{-}28)$$

Baseado nestas relações, tira-se:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu} F^{\kappa\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\kappa\nu} F^{\mu\kappa} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} +$$

$$+ \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu} F^{\kappa\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\right)_{|\kappa} F^{\mu\kappa} \, . \qquad (2.1\text{-}29)$$

Então

$$F^{0\nu}{}_{\|\nu} = F^{01}{}_{|1} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\right)_{|1} F^{01} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \times$$

$$\times \left(\sqrt{|g|} \, F^{01}\right)_{|1} = \frac{1}{r^2 \, sen\theta} \, e^{-\frac{p+q}{2}} \left[r^2 \, sen\theta \, e^{\frac{p+q}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times \left(-e^{-(p+q)} \, \phi'\right)\right]' = -\frac{e^{-\frac{p+q}{2}}}{r^2} \left[r^2 \, e^{-\frac{p+q}{2}} \, \phi'\right]' =$$

e

$$E_{33} = \frac{1}{16\pi c^2}\, g_{33}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} = sen^2\theta\, E_{22}\ . \qquad (2.1\text{-}26.d)$$

Ainda,

$$\sqrt{|g|} = r^2\, sen\,\theta\, e^{\frac{p+q}{2}} \qquad (2.1\text{-}27)$$

e

$$\left(\sqrt{|g|}\right)_{|1} = 2r\, sen\,\theta\, e^{\frac{p+q}{2}} + r^2\, sen\,\theta\, \frac{p'+q'}{2}\, e^{\frac{p+q}{2}}\ . \qquad (2.1\text{-}28)$$

Baseado nestas relações, tira-se:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}\, F^{\kappa\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\kappa\nu}\, F^{\mu\kappa} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} +$$

$$+ \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}\, F^{\kappa\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\right)_{|\kappa} F^{\mu\kappa}\ . \qquad (2.1\text{-}29)$$

Então

$$F^{0\nu}{}_{\|\nu} = F^{01}{}_{|1} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\right)_{|1} F^{01} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \times$$

$$\times \left(\sqrt{|g|}\, F^{01}\right)_{|1} = \frac{1}{r^2\, sen\,\theta}\, e^{-\frac{p+q}{2}} \left\{r^2\, sen\,\theta\, e^{\frac{p+q}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times \left(-e^{-(p+q)}\, \phi'\right)\right\}' = -\frac{e^{-\frac{p+q}{2}}}{r^2}\left\{r^2\, e^{-\frac{p+q}{2}}\, \phi'\right\}' =$$

$$= -e^{-(p+q)} \left\{ \phi'' - \left(\frac{p'+q'}{2} - \frac{2}{r} \right) \phi' \right\} . \qquad (2.1\text{-}30)$$

Desta maneira, a equação (1.2-28) fica:

$$F^{o\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{4\pi c^2 \lambda}{\kappa} R A^o + \frac{4\pi}{c} J^o .$$

Supondo $J^o = 0$ (caso do espaço vazio), passa-se a ter

$$F^{o\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{e^{-\frac{p+q}{2}}}{r^2} \left\{ r^2 \, e^{-\frac{p+q}{2}} \phi' \right\}' = -\frac{8\pi c^2 \lambda}{\kappa} e^{-q} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{p''}{2} + \frac{p'q'}{4} - \frac{p'^2}{4} - \frac{p'}{r} + \frac{q'}{r} + \frac{e^q}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right\} e^{-p} \phi ,$$

ou ainda

$$\boxed{\begin{aligned} \left\{ \phi'' - \left(\frac{p'+q'}{2} - \frac{2}{r} \right) \phi' \right\} &= \frac{8\pi c^2 \lambda}{\kappa} \left\{ -\frac{p''}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{p'q'}{4} - \frac{p'^2}{4} - \frac{p'-q'}{r} - \frac{1-e^q}{r^2} \right\} \phi . \end{aligned}} \qquad (2.1\text{-}31)$$

Esta é a primeira equação do sistema a ser solucionado.

A equação (1.2-25) para a componente 0-0 fica:

$$G_{00} + \kappa E_{00} = \lambda \left\{ g_{00} \, \Box A^2 - A^2 G_{00} + A^2{}_{|1} \Gamma^1{}_{00} - R (A_0)^2 \right\} \quad (2.1\text{-}32)$$

se se escrever a equação (1.2-25) como

$$G_{\mu\nu} + \kappa E_{\mu\nu} = \lambda \left(g_{\mu\nu} \Box A^2 - A^2 G_{\mu\nu} - A^2{}_{|\mu|\nu} + \right.$$

$$\left. + A^2{}_{|\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - R A_\mu A_\nu \right) \tag{2.1-33}$$

e se supor $T_{\mu\nu} = 0$ (espaço vazio).

Substituindo na equação (2.1-32) os valores previamente calculados, obtêm-se a segunda equação do sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} & e^p \left(\frac{1-e^q}{r^2} - \frac{q'}{r} \right) + \frac{\kappa}{8\pi c^2} \phi'^2 = \lambda \left[-2(\phi\phi')' + \left(4p' + \right. \right. \\ & \left. + q' - \frac{4}{r} \right) \phi\phi' + \left(2p'' - \frac{p'^2}{2} - q'p' + \frac{4p'}{r} - \frac{3q'}{r} + \right. \\ & \left. \left. + 3 \left(\frac{1-e^q}{r^2} \right) \right) \phi^2 \right] . \end{aligned}} \tag{2.1-34}$$

A equação (1.2-25), na forma (2.1-33), para a componente 1-1, fica:

$$G_{11} + \kappa E_{11} = \lambda \left(g_{11} \Box A^2 - A^2 G_{11} - A^2{}_{|1|1} + \right.$$

$$\left. + A^2{}_{|1} \Gamma^1{}_{11} \right) \tag{2.1-35}$$

ou, de acordo com os valores calculados:

$$\boxed{e^{p}\left(\frac{1-e^{q}}{r^{2}}+\frac{p'}{r}\right)+\frac{\kappa}{8\pi c^{2}}\phi'^{2}=-\lambda\left[\left(p'+\frac{4}{r}\right)\phi\phi'-\left(\frac{p'^{2}}{2}+\frac{p'}{r}-\frac{1-e^{q}}{r^{2}}\right)\phi^{2}\right].} \qquad (2.1\text{-}36)$$

Finalmente, a última equação independente é a componente 2-2 da equação (2.1-33),

$$G_{22}+\kappa E_{22}=\lambda\left[g_{22}\Box A^{2}-A^{2}G_{22}+A^{2}{}_{|1}\Gamma^{1}{}_{22}\right] \qquad (2.1\text{-}37)$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{e^{p}}{2}\left[p''+\frac{p'^{2}}{2}-\frac{p'q'}{2}+\frac{p'-q'}{r}\right]-\frac{\kappa}{8\pi c^{2}}\phi'^{2}=\\&=\lambda\left[-2(\phi\phi')'+\left(3p'+q'-\frac{2}{r}\right)\phi\phi'+\frac{1}{2}\times\right.\\&\left.\times\left(p''+\frac{3p'^{2}}{2}-\frac{p'q'}{2}+\frac{p'+q'}{r}\right)\phi^{2}\right].\end{aligned}} \qquad (2.1\text{-}38)$$

As equações (2.1-31), (2.1-34), (2.1-36) e (2.1-38) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem na variável independente r, *não lineares*. Como se tem três funções desconhecidas, $\phi(r)$, $p(r)$ e $q(r)$ e quatro equações, o sistema é sobredeterminado, havendo vínculos entre as funções. A solução direta deste sistema por métodos analíticos é praticamente impossível. Será tentada uma solução por métodos de perturbação.

2.2 - *SOLUÇÃO NO CASO* $\lambda = 0$

Para o caso $\lambda = 0$ todavia o sistema se reduz a

$$\phi'' - \left(\frac{p'+q'}{2} - \frac{2}{r}\right)\phi' = 0 \; ; \qquad (2.2\text{-}1)$$

$$e^{p}\left(\frac{1-e^{q}}{r^{2}} - \frac{q'}{r}\right) + \frac{\kappa}{8\pi c^{2}}\phi'^{2} = 0 \; ; \qquad (2.2\text{-}2)$$

$$e^{p}\left(\frac{1-e^{q}}{r^{2}} + \frac{p'}{r}\right) + \frac{\kappa}{8\pi c^{2}}\phi'^{2} = 0 \qquad (2.2\text{-}3)$$

e

$$e^{p}\left(p'' + \frac{p'^{2}}{2} - \frac{p'q'}{2} + \frac{p'-q'}{r}\right) - \frac{\kappa}{4\pi c^{2}}\phi'^{2} = 0 \, . \qquad (2.2\text{-}4)$$

Das equações (2.2-2) e (2.2-3) vê-se que

$$p' = -q' \, . \qquad (2.2\text{-}5)$$

Logo

$$p = -q + C \, . \qquad (2.2\text{-}6)$$

É razoável impor a condição da métrica se reduzir à de Minkowsky (espaço-plano) quando r tende ao infinito, onde se deve ter, pois, $p = q = 0$ e portanto $C = 0$, daí,

$$p = -q \; . \tag{2.2-7}$$

Levando este resultado na equação (2.2-1) tem-se:

$$\phi'' + \frac{2}{r}\,\phi' = 0 \; . \tag{2.2-8}$$

Dividindo por ϕ' vem:

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{2}{r} \; ,$$

que integrando dá

$$\ell n\, \phi' = -2\,\ell n r + C = \ell n\, \frac{Q}{r^2} \; ,$$

donde $\phi' = Q/r^2$, que integrando novamente, dá:

$$\phi = -\frac{Q}{r} + C \; . \tag{2.2-9}$$

Se novamente se impuser que $\phi = 0$ quando $r \to \infty$, tem-se $C = 0$ e, pois,

$$\boxed{\phi = -\frac{Q}{r} \; .} \tag{2.2-10}$$

Levando as equações (2.2-7) e (2.2-10) na equação (2.2-4), vem:

$$e^{p}\left(p'' + p'^{2} + \frac{2p'}{r}\right) = \frac{\kappa}{4\pi c^2}\;\frac{Q^2}{r^4}$$

ou

$$(e^{\rho})'' + \frac{2}{r}\,(e^{\rho})' = \frac{\kappa}{4\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r^4}\,. \tag{2.2-11}$$

Multiplicando por r^2 vem:

$$r^2\,(e^{\rho})'' + 2r\,(e^{\rho})' = \frac{\kappa}{4\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r^2}\,,$$

ou

$$\left[r^2\,(e^{\rho})'\right]' = \frac{\kappa}{4\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r^2}\,. \tag{2.2-12}$$

Integrando uma vez obtêm-se

$$r^2\,(e^{\rho})' = -\frac{\kappa}{4\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r} + A\,,$$

ou seja,

$$(e^{\rho})' = -\frac{\kappa}{4\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r^3} + \frac{A}{r^2}\,.$$

Integrando novamente acha-se:

$$e^{\rho} = \frac{\kappa}{8\pi c^2}\,\frac{Q^2}{r^2} - \frac{A}{r} + B \tag{2.2-13}$$

Se $e^{\rho} = 1$, quando $r \to \infty$ deve-se ter $B = 1$, e se quando $Q = 0$ $(\phi = 0)$ a solução é a de Schwarszchild, então

$$A = \frac{2\,GM}{c^2} = \frac{\kappa M}{4\pi} \tag{2.2-14}$$

onde M é a massa localizada na origem.

Conseqüentemente:

$$e^{p} = 1 - \frac{\kappa M}{4\pi r} + \frac{\kappa Q^2}{8\pi c^2 r^2} \qquad (2.2\text{-}15)$$

ou

$$\boxed{e^{p} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}} \qquad (2.2\text{-}15.a)$$

onde Q é a carga elétrica localizada na origem.

Esta solução é conhecida como de "Reissner-Nordstrøn" (6).

2.3 - *SOLUÇÃO POR PERTURBAÇÃO*

No caso de se ter $\lambda \neq 0$ mas $\lambda^2 << \lambda$, pode-se expressar:

$$\phi = \phi_o + \delta\phi, \quad p = p_o + \delta p \quad e \quad q = q_o + \delta q \qquad (2.3\text{-}1)$$

onde ϕ_o, p_o e $q_o = -p_o$ são as soluções para $\lambda = 0$ (Reissner-Nordstrøn) e os δ's são pequenos de modo que todo produto de δ's pode ser desprezado, bem como os produtos de λ por δ's.

A equação (1.2-28), no caso $J^{\mu} = 0$, pode ser expressa como:

$$F^{o\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{4\pi c^2 \lambda}{\kappa} R A^o ,$$

ou, pela equação (2.1-30):

$$-\frac{1}{r^2}\, e^{-\frac{p+q}{2}} \left(r^2\, e^{-\frac{p+q}{2}}\, \phi' \right)' = -\frac{4\pi c^2 \lambda}{K}\, R\phi\ ,$$

ou ainda,

$$\left(r^2\, e^{-\frac{p+q}{2}}\, \phi' \right)' = \frac{4\pi c^2 \lambda}{K}\, r^2\, R\phi\, e^{\frac{p+q}{2}} \qquad (2.3\text{-}2)$$

Usando as perturbações (2.3-1), a equação (2.3-2) fica:

$$\left(r^2 \left(1 - \frac{\delta p + \delta q}{2}\right) \phi_0' + r^2\, \delta\phi' \right)' = \frac{4\pi c^2 \lambda}{K}\, r^2\ \times$$

$$\times \left(R_0\, \phi_0 \left(1 + \frac{\delta p + \delta q}{2}\right) + R_0\, \delta\phi + \phi_0\, \delta R \right)\ , \qquad (2.3\text{-}3)$$

onde se expressou $R = R_0 + \delta R$.

Da equação (1.2-31) vê-se que $R_0 = 0$, quando $\lambda = 0$ e $T = 0$ (ausência de matéria), donde:

$$\left(r^2 \left(1 - \frac{\delta p + \delta q}{2}\right) \phi_0' + r^2\, \delta\phi' \right)' = \frac{4\pi c^2 \lambda}{K}\, r^2 \phi_0\, \delta R\ , \qquad (2.3\text{-}4)$$

ou ainda

$$\boxed{\left(r^2 \left(1 - \frac{\delta p + \delta q}{2}\right) \phi_0' + r^2\, \delta\phi' \right)' = 0} \qquad (2.3\text{-}4.a)$$

pois, o produto $\lambda\, \delta R \to 0$.

A equação (2.1-34) com as perturbações (2.3-1) fica:

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(e^{p_o}-1\right)(1+\delta p)-\delta q\right]+\frac{e^{p_o}}{r}\left[p_o'(1+\delta p)-\delta q'\right]+$$
$$+\frac{\kappa}{8\pi c^2}\left(\phi_o'^2+2\phi_o'\,\delta\phi'\right)=\lambda\left\{-2\left(\phi_o\phi_o''+\phi_o'^2\right)+\right.$$
$$+\left[3p_o'+\frac{4}{r}\right]\phi_o\phi_o'+\left[2p_o''+\frac{p_o'^2}{2}+\frac{7p_o'}{r}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{r^2}\left(1-e^{-p_o}\right)\right]\phi_o^2\right\}. \tag{2.3-5}$$

Da mesma maneira, a equação (2.1-36) fica:

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(e^{p_o}-1\right)(1+\delta p)-\delta q\right]+\frac{e^{p_o}}{r}\left[p_o'(1+\delta p)+\delta p'\right]+$$
$$+\frac{\kappa}{8\pi c^2}\left[\phi_o'^2+2\phi_o'\,\delta\phi'\right]=-\lambda\left\{p_o'\phi_o\left[\phi_o'-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{p_o'\phi_o}{2}-\frac{\phi_o}{r}\right]+\frac{\phi_o^2}{r^2}\left[1-e^{-p_o}\right]\right\}. \tag{2.3-6}$$

Analogamente, a equação (2.1-38) fica:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{e^{p_o}}{2}\left[\delta p'' + \left(\frac{3}{2}\,p_o' + \frac{1}{r}\right)\delta p' - \left(\frac{p_o'}{2} + \frac{1}{r}\right)\delta q' + \right.\\
&\left. + \left(p_o'' + p_o'^2 + \frac{2p_o'}{r}\right)(1+\delta p)\right] + \frac{\kappa}{8\pi c^2}\left(\phi_o'^2 + \right.\\
&\left. + 2\phi_o'\,\delta\phi'\right) = -\lambda\left\{2\left(\phi_o\phi_o'' + \phi_o'^2 + \right.\right.\\
&\left.\left. + \phi_o\phi_o' p_o'\right) - \left(\frac{p_o''}{2} + p_o'^2\right)\phi_o^2\right\}.
\end{aligned}} \qquad (2.3\text{-}7)$$

As equações (2.3-4), (2.3-5), (2.3-6) e (2.3-7) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias, agora tornado *linear*, que devem ser resolvidas para se achar $\phi(r)$, $p(r)$ e $q(r)$.

2.4 - CASO EM QUE $\phi_o\ (r) \equiv 0$

Se a partícula que cria o campo esfericamente simétrico não possuir carga elétrica, tem-se $\phi_o\ (r) \equiv 0$ e portanto as equações (2.3-4), (2.3-5), (2.3-6) e (2.3-7), respectivamente, ficam:

$$\left(r^2\,\delta\phi'\right)' = 0\ ; \qquad (2.4\text{-}1)$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(e^{p_o} - 1\right)(1+\delta p) - \delta q\right] + \frac{e^{p_o}}{r}\left[p_o'\,(1+\delta p) - \delta q'\right] = 0\ ; \qquad (2.4\text{-}2)$$

$$\frac{1}{r^2}\left\{\left(e^{p_o}-1\right)(1+\delta p)-\delta q\right\}+\frac{e^{p_o}}{r}\left\{p_o'\,(1+\delta p)+\delta p'\right\}=0 \qquad (2.4\text{-}3)$$

e

$$\frac{e^{p_o}}{2}\left[\delta p''+\left(\frac{3}{2}\,p_o'+\frac{1}{r}\right)\delta p'-\left(\frac{p_o'}{2}+\frac{1}{r}\right)\delta q'+\right.$$

$$\left.+\left(p_o''+p_o'^{\,2}+\frac{2p_o'}{r}\right)(1+\delta p)\right]=0\,. \qquad (2.4\text{-}4)$$

Cumpre ressaltar a feitura interessante do sistema de equações (2.4-1), (2.4-2), (2.4-3) e (2.4-4), as quais se tornaram inteiramente desacopladas do parâmetro "λ". Isto significa que estas equações, apesar de serem originárias da existência de "λ" na equação original, não dependem do seu valor.

A equação (2.4-1) possui a solução:

$$\delta\phi = -\frac{A}{r} + B \qquad (2.4\text{-}5)$$

Considerando-se $\delta\phi = 0$ para $r \to \infty$, tem-se $B = 0$, de modo que A se comporta como uma "carga efetiva" *originando um potencial eletrostático para uma partícula sem carga real*, no caso de valerem as equações de acoplamento não-mínimo do tipo I (vide seção 1.2).

As equações (2.4-2) e (2.4-3) conduzem ao fato de que

$$\delta q' = -\delta p'\,. \qquad (2.4\text{-}6)$$

Levando esta informação à equação (2.4-4) e sabendo que, para o caso $\phi_o = 0$, tem-se $Q = 0$ e logo, da equação (2.2-14):

$$e^{p_o} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} ; \qquad (2.4\text{-}7)$$

$$e^{p_o} p_o' = \frac{2GM}{c^2 r^2} \qquad (2.4\text{-}8)$$

e

$$e^{p_o} \left[p_o'' + p_o'^2 \right] = -\frac{4GM}{c^2 r^3} , \qquad (2.4\text{-}9)$$

obtém-se:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{GM}{c^2 r} \right) \delta p'' + \frac{1}{r} \delta p' = 0 , \qquad (2.4\text{-}10)$$

donde tira-se:

$$\frac{\delta p''}{\delta p'} = - \frac{2}{r - \frac{2GM}{c^2}} , \qquad (2.4\text{-}11)$$

que integrando dá:

$$\delta p' = \frac{D}{\left[r - \frac{2GM}{c^2} \right]^2} , \qquad (2.4\text{-}12)$$

Logo,

$$\delta p = - \frac{D}{r - \frac{2GM}{c^2}} + const. \qquad (2.4\text{-}13)$$

Uma vez que se espera que $\delta p \to 0$ quando $r \to \infty$, de ve-se ter a *const.* = 0.

Como $e^{p} = e^{p_0 + \delta p} \cong e^{p_0}\,(1 + \delta p)$, tem-se:

$$e^{p} = 1 - \frac{\dfrac{2GM}{c^2} + \mathcal{D}}{r} \; . \qquad (2.4\text{-}14)$$

Da equação (2.4-6) tira-se $\delta q = -\delta p + const.$, mas, como ambos δq e δp devem se anular no infinito, a constante deve ser nula, e como $p_o = -q_o$, tem-se

$$e^{q} = e^{-p} \; . \qquad (2.4\text{-}15)$$

Na equação (2.4-14) nota-se que se $M = 0$ a solução é semelhante à de Schwarzschild, com "$\mathcal{D}$" fazendo o papel de uma *massa efetiva* criada pelo acoplamento não-mínimo.

Se $\lambda = 0$ e $Q = 0$ tem-se a Solução de Schwarzschild que é a solução (2.4-14), com $\mathcal{D} = 0$. Isto significa que $\mathcal{D}$ é uma função de λ, tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{D}\,(\lambda) = 0 \qquad (2.4\text{-}16)$$

Dimensionalmente, tem-se $[\mathcal{D}] = L$ e $[\lambda] = M^{-1}L^{-1}T^{2}$. Assim,

$$[\mathcal{D}] = [\lambda]\;\frac{ML^2}{T^2} \; . \qquad (2.4\text{-}17)$$

Assim sendo, pode-se considerar

$$\mathcal{D} = \lambda \varepsilon \,, \tag{2.4-18}$$

onde ε é uma constante com a dimensão de energia.

Por um raciocínio análogo vê-se que a constante A da equação (2.4-5) deve também ser uma função de λ tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = 0 \tag{2.4-19}$$

Dimensionalmente, uma vez que A é uma carga "efetiva", tem-se $[A] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$.

Assim a relação mais simples que se pode achar entre A e λ fica como

$$[A] = [\lambda]^{1/2} \frac{ML^2}{T^2} \,. \tag{2.4-20}$$

Desta maneira pode-se considerar

$$A = \sqrt{\lambda}\, \varepsilon' , \tag{2.4-21}$$

onde ε' é novamente uma constante com a dimensão de energia.

O resultado final, portanto, fica:

$$\boxed{\phi = \frac{\sqrt{\lambda}\, \varepsilon'}{r}} \tag{2.4-22}$$

e

$$\boxed{e^{p} = e^{-p} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\lambda \varepsilon}{r}} \,. \tag{2.4-23}$$

como solução das equações (1.2-25) e (1.2-28), no caso estático esfericamente simétrico no vazio para um corpo sem carga na origem.

Uma solução do tipo $\phi = -\frac{b}{r}$ $e^{p} = e^{-q} = 1 - \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}$ só é admissível para o sistema de equações não perturbadas do item 2.1 no caso de se ter o espaço de Minkowsky $e^{p} = e^{-q} = 1$.

SOLUÇÃO COSMOLÓGICA

3.1 - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO COSMOLÓGICA

O sistema de equações derivadas da lagrangeana com acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo do tipo I, qual seja

$$\mathcal{L} = \frac{c^4\sqrt{|g|}}{16\pi G}\left(1 + \lambda A_\mu A^\mu\right) R - \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{mat} , \qquad (1.2\text{-}12)$$

é:

$$\left(1 + \lambda A^2\right) G_{\mu\nu} + \lambda A_\mu A_\nu R - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} +$$

$$+ \lambda A^2{}_{|\mu\|\nu} = -\kappa \left(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right) \qquad (1.2\text{-}25)$$

e

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{4\pi c^2\lambda}{\kappa} R A^\mu + \frac{4\pi}{c} J^\mu . \qquad (1.2\text{-}28)$$

O objetivo deste capítulo é encontrar uma solução deste sistema no caso cosmológico, admitindo-se a presença de anisotropias e de um conteúdo material.

O tensor momento-energia da matéria, neste caso, é (6):

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) V_\mu V_\nu - \frac{p}{c^2} g_{\mu\nu} , \qquad (3.1\text{-}1)$$

onde p é a pressão isotrópica (hidrostática) e ρ a densidade de energia e matéria.

De (3.1-1) vem:

$$T = T^\mu{}_\mu = \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) V^\mu V_\mu - \frac{p}{c^2} \delta^\mu{}_\mu = \rho - \frac{3p}{c^2} , \qquad (3.1\text{-}2)$$

onde se convencionou que a quadrivelocidade seja normalizada à unidade,

$$V^\mu V_\mu = 1 .$$

Pode-se considerar que no Universo como um todo os campos elétrico e magnético médio se anulam, mas, não necessariamente os potenciais escalar e vetor, de modo que

$$F^{\mu\nu} = 0 . \qquad (3.1\text{-}3)$$

Conseqüentemente, de (1.2-28) e (1.1-26), tem-se:

$$\frac{\lambda}{\kappa} R A^\mu = \frac{1}{c^3} J^\mu \qquad (3.1\text{-}4)$$

e

$$E_{\mu\nu} = 0 . \qquad (3.1\text{-}5)$$

É razoável supor a densidade de carga e de corrente no Universo como nulas, isto é,

$$J^{\mu} = 0 \, , \qquad \text{donde} \qquad R = 0 \, . \tag{3.1-6}$$

Pela equação (1.2-31),

$$R + 3\lambda \, \Box \, A^2 = \kappa T \, . \tag{1.2-31}$$

Usando (3.1-6), a equação (1.2-31) fica:

$$\lambda \, \Box \, A^2 = \frac{\kappa T}{3} \, . \tag{3.1-7}$$

Definindo, segundo NOVELLO e SALIM (8),

$$\Omega \equiv \left(1 + \lambda A^2\right) \, , \tag{3.1-8}$$

a equação (1.2-25) fica:

$$\Omega \, R_{\mu\nu} - \frac{\kappa T}{3} \, g_{\mu\nu} + \Omega_{|\mu||\nu} = -\kappa \, T_{\mu\nu} \, . \tag{3.1-9}$$

Usando (3.1-1) e (3.1-2), a equação (3.1-9) fica:

$$\Omega \, R_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{3} \left(\rho - 3\frac{p}{c^2}\right) g_{\mu\nu} + \Omega_{|\mu||\nu} = -\kappa \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \times$$

$$\times \, V_{\mu} \, V_{\nu} + \kappa \frac{p}{c^2} \, g_{\mu\nu}$$

ou

$$\boxed{\Omega \, R_{\mu\nu} - \frac{\kappa\rho}{3} \, g_{\mu\nu} + \Omega_{|\mu||\nu} = -\kappa \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) V_{\mu} \, V_{\nu}} \tag{3.1-10}$$

Por outro lado,

$$\boxed{\Box\, \Omega = \lambda\, \Box A^2 = \frac{\kappa T}{3}\ .} \qquad (3.1\text{-}11)$$

A equação (3.1-10) com a condição (3.1-11) pode ser resolvida em vários contextos.

3.2 - *CASO ISOTRÓPICO NO VAZIO*

No caso $\rho = p = 0$, tem-se $T_{\mu\nu} = 0$ e então as equações (3.1-10) e (3.1-11) ficam

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\Omega_{|\mu\|\nu}}{\Omega} \qquad (3.2\text{-}1)$$

e

$$\Box\, \Omega = 0 \qquad (3.2\text{-}2)$$

Seja achar a solução para este sistema em uma métrica do tipo *Friedmann-Robertson-Walker*, qual seja (12):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2\ (ct)\ \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi)\ \ (d\theta^2 + sen^2\,\theta\, d\phi^2)\right] \qquad (3.2\text{-}3)$$

As conexões métricas não nulas neste caso valem (note que $x^0 = ct$):

$$\left.\begin{array}{llll} \Gamma^0_{11} = a\dot{a}; & \Gamma^0_{22} = a\dot{a}\sigma^2; & \Gamma^0_{33} = a\dot{a}\sigma^2 sen^2\theta; & \Gamma^1_{01} = \dot{a}/a; \\ \Gamma^1_{22} = -\sigma\sigma'; & \Gamma^1_{33} = -\sigma\sigma' sen^2\theta; & \Gamma^2_{02} = \dot{a}/a; & \Gamma^2_{12} = \sigma'/\sigma; \\ \Gamma^2_{33} = -sen\theta cos\theta; & \Gamma^3_{03} = \dot{a}/a; & \Gamma^3_{13} = \sigma'/\sigma; & \Gamma^3_{23} = cot\,\theta. \end{array}\right\} (3.2\text{-}4)$$

onde os pontos denotam derivação com relação a χ^0 e as plicas com relação a χ.

As componentes do Tensor de Ricci para a métrica (3.2-3) são:

$$R^0{}_0 = \frac{3\ddot{a}}{a} \tag{3.2-5.a}$$

$$R^1{}_1 = +\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\sigma''}{a^2\sigma} \tag{3.2-5.b}$$

$$R^2{}_2 = R^3{}_3 = +\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2}\right) \tag{3.2-5.c}$$

Então as derivadas covariantes de Ω ficam:

$$\Omega^{|0}{}_{\|0} = \ddot{\Omega} \tag{3.2-6.a}$$

$$\Omega^{|1}{}_{\|1} = \Omega^{|2}{}_{\|2} = \Omega^{|3}{}_{\|3} = +\frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a} \tag{3.2-6.b}$$

As equações (3.2-1) e (3.2-2), portanto, lêem-se:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} ; \tag{3.2-7}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\sigma''}{a^2\sigma} = -\frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a\Omega} ; \tag{3.2-8}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2}\right) = -\frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a\Omega} ; \tag{3.2-9}$$

$$\frac{3\dot{a}}{a} = -\frac{\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}} . \tag{3.2-10}$$

Das equações (3.2-8) e (3.2-9) sai a equação

$$\sigma'^2 - \sigma\sigma'' = 1 \tag{3.2-11}$$

que admite as soluções

$$\sigma(\chi) = \chi , \tag{3.2-12.a}$$

$$\sigma(\chi) = sen\ \chi \tag{3.2-12.b}$$

e

$$\sigma(\chi) = senh\ \chi . \tag{3.2-12.c}$$

Dividindo-se a equação (3.2-7), membro a membro, pela equação (3.2-10), obtém-se a equação

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} , \tag{3.2-13}$$

que integrada dá

$$\dot{a} = \kappa\Omega . \tag{3.2-14}$$

Levando a equação (3.2-14) na equação (3.2-10), obtém-se

$$\frac{3\dot{a}}{a} = -\frac{\dddot{a}}{\ddot{a}} . \tag{3.2-15}$$

A integração desta equação leva à equação

$$\ddot{a} = b\, a^{-3}\,, \tag{3.2-16}$$

cuja solução é

$$\boxed{a(ct) = \left[\varepsilon c^2 t^2 + \beta ct + a_0^2\right]^{1/2}} \tag{3.2-16}$$

Levando este resultado na equação (3.2-14), verifica-se que

$$\boxed{\Omega\,(ct) = \frac{(2\varepsilon ct + \beta)}{2\kappa\, a(ct)}} \tag{3.2-17}$$

Considerando-se a métrica (3.2-3) como sendo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(ct)\, d\ell^2\,, \tag{3.2-18}$$

onde $d\ell^2$ é o elemento de distância do tri-espaço, qual seja,

$$d\ell^2 = d\chi^2 + \sigma^2(\chi)\, d\theta^2 + \sigma^2(\chi)\, sen^2\theta\, d\varphi^2\;, \tag{3.2-19}$$

pode-se calcular o tensor de Ricci do tri-espaço, cujas componentes não nulas, são:

$$P^1{}_1 = 2\sigma''/\sigma$$

e

$$P^2{}_2 = P^3{}_3 = \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{2} . \qquad (3.2\text{-}20)$$

Daí o escalar de curvatura do tri-espaço vale:

$$P = P^1{}_1 + P^2{}_2 + P^3{}_3 = \frac{4\sigma''}{\sigma} + 2\,\frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2} . \qquad (3.2\text{-}21)$$

Conforme seja $\sigma = \chi$, $\sigma = sen\,\chi$ ou $\sigma = senh\,\chi$, tem-se, respectivamente

$$P = 0, \qquad P = -6 \qquad \text{e} \qquad P = +6 ,$$

correspondentes aos casos de espaços planos, positivamente curvos e negativamente curvos.

Das equações (3.2-5), tira-se

$$R = R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3 = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{P}{a^2} . \qquad (3.2\text{-}22)$$

Como $R = 0$, a equação (3.2-22) fica

$$P = 6\,(a\,\dot{a})^{\cdot} . \qquad (3.2\text{-}23)$$

Levando a equação (3.2-16) na equação (3.2-23) vem que

$$P = 6\,\varepsilon . \qquad (3.2\text{-}24)$$

Daí, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$, respectivamente, para $\sigma = \chi$,

$\sigma = sen\,\chi$ ou $\sigma = senh\,\chi$.

A solução $a(ct) = \left[\varepsilon c^2 t^2 + \beta c t + a_0^2\right]^{1/2}$ somente será real no intervalo de validade da inequação

$$\varepsilon c^2 t^2 + \beta c t + a_0^2 \geqslant 0 . \qquad (3.2\text{-}25)$$

O discriminante,

$$\Delta \equiv \beta^2 - 4\varepsilon a_0^2 , \qquad (3.2\text{-}26)$$

será positivo no caso de um Universo positivamente curvo ($\varepsilon=-1$), supondo-se que a_0^2 seja uma constante positiva. Isto significa que, como $\varepsilon = -1$, existem duas raízes reais, t_1 e t_2, entre as quais $a(ct)$ é real, isto é, há um início e um fim para tal Universo positivamente curvo.

Para $\varepsilon = 0$, $a(ct)$ será real a partir de um tempo t_1, se $\beta > 0$, ou até um tempo t_2, se $\beta < 0$; existindo indefinidamente desde t_1 ou, até t_2. Isto é, não tem começo ou não tem fim.

Para $\varepsilon = +1$, se $\Delta < 0$, o Universo não terá começo e nem fim. Se $\Delta > 0$ existem duas raízes reais, t_1 e t_2. O Universo só existirá para $t \leqslant t_1$ ou para $t \geqslant t_2$, supondo $t_2 > t_1$.

3.3 - *CASO ANISOTRÓPICO NO VAZIO*

De uma maneira geral, a métrica para um Universo no qual a taxa de expansão varie com a direção, em coordenadas comoventes retangulares, é a seguinte (12):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(ct)\,dx^2 - b^2(ct)\,dy^2 - c^2(ct)\,dz^2 \quad (3.3\text{-}1)$$

As conexões métricas não nulas, neste caso, são (note que $x^0 = ct$):

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma^0{}_{11} = a\dot{a}, & \Gamma^0{}_{22} = b\dot{b}, & \Gamma^0{}_{33} = c\dot{c}, \\ \Gamma^1{}_{10} = \dfrac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2{}_{20} = \dfrac{\dot{b}}{b}, & \Gamma^3{}_{30} = \dfrac{\dot{c}}{c}. \end{array}\right\} \quad (3.3\text{-}2)$$

As derivadas covariantes de Ω ficam:

$$\Omega^{|0}{}_{\|0} = \left(g^{00}\,\Omega_{|0}\right)_{|0} = \ddot{\Omega}\,, \quad (3.3\text{-}3.a)$$

$$\Omega^{|1}{}_{\|1} = \left(g^{11}\,\Omega_{|1}\right)_{|1} + \Gamma^1{}_{10}\left(g^{00}\,\Omega_{|0}\right) = \quad (3.3\text{-}3.b)$$

$$= -\frac{\Omega_{|1|1}}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a} = \frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a}\,,$$

$$\Omega^{|2}{}_{\|2} = \frac{\dot{b}\dot{\Omega}}{b} \quad (3.3\text{-}3.c)$$

e

$$\Omega^{|3}{}_{\|3} = \frac{\dot{c}\dot{\Omega}}{c}\,, \quad (3.3\text{-}3.d)$$

pois, $\Omega_{|1|1} = \Omega_{|2|2} = \Omega_{|3|3} = 0$ já que está se supondo $F_{\mu\nu} = 0$.

As componentes do tensor de curvatura de Ricci, não nulas, são:

$$R^0{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\,, \quad (3.3\text{-}4.a)$$

$$R^1{}_1 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) , \qquad (3.3\text{-}4.b)$$

$$R^2{}_2 = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right) , \qquad (3.3\text{-}4.c)$$

$$R^3{}_3 = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) . \qquad (3.3\text{-}4.d)$$

Desta maneira as equações (3.1-10) ficam:

$$\Omega R^0{}_0 + \Omega^{|0}{}_{||0} = -\kappa\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)V^0 V_0 + \frac{\kappa\rho}{3}\,\delta^0{}_0 . \qquad (3.3\text{-}5)$$

Em coordenadas comoventes, $V^\mu = \delta^\mu{}_0$, então

$$V^0\ V_0 = g_{\mu 0}\ V^0\ V^\mu = 1 .$$

Usando as equações (3.3-3) e (3.3-4) tem-se

$$\Omega\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\right) + \ddot{\Omega} = -\frac{2}{3}\kappa\rho - \frac{\kappa p}{c^2} . \qquad (3.3\text{-}6)$$

Da mesma maneira,

$$\Omega R^1{}_1 + \Omega^{|1}{}_{||1} = 0 + \frac{\kappa\rho}{3}\,\delta^1{}_1 ,$$

ou

$$\Omega\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\right) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\Omega} = \frac{\kappa\rho}{3} . \qquad (3.3\text{-}7)$$

Bem como

$$\Omega\left[\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{c}}{c}\right)\right]+\frac{\dot{b}}{b}\dot{\Omega}=\frac{\kappa\rho}{3} \qquad (3.3\text{-}8)$$

e

$$\Omega\left[\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}\right)\right]+\frac{\dot{c}}{c}\dot{\Omega}=\frac{\kappa\rho}{3}\,. \qquad (3.3\text{-}9)$$

A equação (3.1-11), usando a equação (3.1-2), fica:

$$\Box\,\Omega=\Omega^{|0}{}_{\|0}+\Omega^{|1}{}_{\|1}+\Omega^{|2}{}_{\|2}+\Omega^{|3}{}_{\|3}=$$

$$=\ddot{\Omega}+\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)\dot{\Omega}=\frac{\kappa}{3}\left(\rho-\frac{3p}{c^2}\right). \qquad (3.3\text{-}10)$$

As equações (3.3-6), (3.3-7), (3.3-8), (3.3-9) e (3.3-10), juntamente com a "equação de estado" $p = p(\rho)$, constituem um sistema de seis equações diferenciais nas seis funções a, b, c, Ω, p e ρ, do tempo cosmológico t.

No caso do vazio, $p = \rho = 0$. Assim sendo, as equações (3.3-6) a (3.3-10) ficam:

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}=0\,, \qquad (3.3\text{-}11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)=0, \qquad (3.3\text{-}12)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)=0\,, \qquad (3.3\text{-}13)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)=0\,, \qquad (3.3\text{-}14)$$

$$\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = 0 \,. \qquad (3.3\text{-}15)$$

Seguindo KASNER (13), pode-se fazer

$$a = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\alpha}, \quad b = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\beta}, \quad c = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\gamma} \quad \text{e} \quad \Omega = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\omega} . \qquad (3.3\text{-}16)$$

Utilizando estas relações nas equações (3.3-11), acha-se que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \omega^2 = \alpha + \beta + \gamma + \omega \,. \qquad (3.3\text{-}17)$$

Adicionando-se as equações (3.3-12) a (3.3-15) e levando-se em conta a equação (3.3-11), vem:

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{a}\dot{\Omega}}{a\Omega} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{b}\dot{\Omega}}{b\Omega} + \frac{\dot{c}\dot{\Omega}}{c\Omega} = 0 \,,$$

o que, de acordo com as equações (3.3-16), fica

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\omega + \beta\gamma + \beta\omega + \gamma\omega = 0 \,. \qquad (3.3\text{-}18)$$

Tomando-se o quadrado de $\alpha + \beta + \gamma + \omega$, obtém-se

$$(\alpha + \beta + \gamma + \omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \omega^2 + 2\,(\alpha\beta + \alpha\gamma +$$

$$+ \alpha\omega + \beta\gamma + \beta\omega + \gamma\omega) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \omega^2 \,,$$

de acordo com (3.3-18).

Assim, conforme a equação (3.3-17),

$$(\alpha + \beta + \gamma + \omega)^2 = \alpha + \beta + \gamma + \omega = 1 \ . \qquad (3.3\text{-}19)$$

Daí a condição imposta a α, β, γ e ω ser

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \omega^2 = \alpha + \beta + \gamma + \omega = 1 \ . \qquad (3.3\text{-}20)$$

A primeira possibilidade para os valores de α, β, γ e ω é um deles valer 1 e os outros 0. Se $\Omega = t/t_0$ então tem-se uma métrica estática. De outra maneira, o quadripotencial é estático, mas o volume do Universo varia com o tempo pela variação de uma das dimensões.

Outra possibilidade é se ter três valores iguais a $\frac{1}{2}$ e o outro igual a $-\frac{1}{2}$.

Se $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ e $\omega = -\frac{1}{2}$, o Universo é isotrópico, seu volume aumentando indefinidamente com o tempo, enquanto Ω decai potencialmente. De outra maneira haverá um eixo de anisotropia.

Em geral, como as quatro variáveis α, β, γ e ω devem satisfazer às duas equações (3.3-20), tem-se dois graus de liberdade. Se se considerar α e ω como independentes, então a expressão para β e γ, a partir das equações (3.3-20) é:

$$\beta = \frac{1}{2}\left[S + \sqrt{2Q - S^2}\right] \qquad (3.3\text{-}21)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[S - \sqrt{2Q - S^2}\right] , \qquad (3.3\text{-}22)$$

onde $S = 1 - \alpha - \omega$ e $Q = 1 - \alpha^2 - \omega^2$.

As equações (3.3-20) também são preenchidas no caso restrito de se ter as condições adicionais

$$\alpha + \beta = 0 \tag{3.3-23}$$

e

$$\gamma + \omega = 1 . \tag{3.3-24}$$

Então perde-se um grau de liberdade e pode-se expressar α, β e γ em função de ω como:

$$\alpha = \sqrt{\omega (1 - \omega)} , \tag{3.3-25}$$

$$\beta = - \sqrt{\omega (1 - \omega)} \tag{3.3-26}$$

$$\gamma = 1 - \omega . \tag{3.3-27}$$

O volume deste Universo é dado por

$$V = \iiint \sqrt{|det\, g_{ij}|}\; dx\; dy\; dz =$$

$$= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha+\beta+\gamma} \iiint dx\; dy\; dz =$$

$$= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\omega} \iiint dx\; dy\; dz . \tag{3.3-28}$$

A taxa de variação do volume é pois:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{1-\omega}{(t/t_0)} \ . \tag{3.3-29}$$

3.4 - *CASO ANISOTRÓPICO COM PARTÍCULAS ULTRA-RELATIVÍSTICAS*

Se, além dos fótons não lineares, originários do acoplamento não-mínimo, existir no Universo um fluído de partículas ultra-relativísticas de densidade ρ, não interagentes com os fótons (por exemplo, neutrinos), a equação de estado será

$$p = \frac{c^2 \rho}{3} \tag{3.4-1}$$

Então as equações (3.3-6) a (3.3-10) ficam como

$$\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = -\frac{\kappa\rho}{\Omega} \ , \tag{3.4-2}$$

$$\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0 \ , \tag{3.4-3}$$

$$\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa\rho}{3\Omega} \ , \tag{3.4-4}$$

$$\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\ddot{b}}{b} = \frac{\kappa\rho}{3\Omega} \ , \tag{3.4-5}$$

$$\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\ddot{c}}{c} = \frac{\kappa\rho}{3\Omega} \ . \tag{3.4-6}$$

Somando as três últimas equações, vem:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)+2\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right)+\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}=\frac{\kappa\rho}{\Omega}. \quad (3.4\text{-}7)$$

Levando (3.4-2) e (3.4-3) a (3.4-7), obtém-se:

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}=\frac{\kappa\rho}{\Omega} \quad (3.4\text{-}8)$$

Quadrando-se a equação (3.4-3), tira-se:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{\dot{c}^2}{c^2}+2\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right)=\frac{\ddot{\Omega}^2}{\dot{\Omega}^2}. \quad (3.4\text{-}9)$$

Substituindo a equação (3.4-8) em (3.4-9), fica-se com:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{\dot{c}^2}{c^2}-\frac{\ddot{\Omega}^2}{\dot{\Omega}^2}=-\frac{2\kappa\rho}{\Omega}. \quad (3.4\text{-}10)$$

Levando a equação (3.4-2) na equação (3.4-10), vem:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{\dot{c}^2}{c^2}-\frac{\ddot{\Omega}^2}{\dot{\Omega}^2}=2\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}\right). \quad (3.4\text{-}11)$$

Supondo novamente uma solução do tipo KASNER, qual seja,

$$a=\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\alpha},\quad b=\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\beta},\quad c=\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\gamma}\ \text{e}\ \Omega=\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\omega}, \quad (3.4\text{-}12)$$

a equação (3.4-3) conduz a que

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega = 1 . \tag{3.4-13}$$

Igualmente, a equação (3.4-11) conduz a que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3\omega^2 - 2\omega = 1 . \tag{3.4-14}$$

Levando os resultados (3.4-12), (3.4-13) e (3.4-14) na equação (3.4-2), obtém-se:

$$\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-2} \Big[\omega(\omega - 1) + \alpha\ (\alpha - 1) + \beta\ (\beta - 1) +$$

$$+ \gamma\ (\gamma - 1)\Big] = -\kappa\rho \left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\omega}$$

ou

$$\kappa\rho = 2\omega\ (\omega - 1) \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\omega - 2},$$

ou ainda

$$\rho = \frac{2}{\kappa}\, \ddot{\Omega} . \tag{3.4-15}$$

Levando este valor na equação (3.4-6) chega-se a

$$(\omega + \beta + \alpha)\ \gamma + \gamma\ (\gamma - 1) = \frac{2}{3}\ \omega\ (\omega - 1) . \tag{3.4-16}$$

Considerando a equação (3.4-13), a equação (3.4-16) mostra que $\omega(\omega - 1) = 0$, donde

$$\text{ou} \quad \omega = 0 \qquad \text{ou} \quad \omega = 1 . \tag{3.4-17}$$

Conseqüentemente, tem-se que

$$\ddot{\Omega} = \omega\,(\omega - 1)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\omega-2} = 0 \tag{3.4-18}$$

e daí que

$$\rho \equiv 0\ . \tag{3.4-19}$$

Este resultado seria esperado uma vez que as equações (3.1-10) e (3.1-11) poderiam, juntamente com a equação de estado, determinar seis funções, a saber: α, β, γ, ω, ρ e p. A restrição $R = 0$ tira a liberdade de se considerar uma função ρ (e logo p), uma vez que se considerou livres α, β, γ e ω.

3.5 - *CASO ANISOTRÓPICO COM POEIRA*

Se o Universo for considerado preenchido por poeira incoerente, isto é, $p = 0$, então as equações (3.3-6) a (3.3-10) ficam como

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{2}{3}\ \frac{\kappa\rho}{\Omega}\ , \tag{3.5-1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) = \frac{1}{3}\ \frac{\kappa\rho}{\Omega}\ , \tag{3.5-2}$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) = \frac{1}{3}\ \frac{\kappa\rho}{\Omega}\ , \tag{3.5-3}$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\kappa\rho}{\Omega}\,, \tag{3.5-4}$$

$$\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\kappa\rho}{\Omega}\,. \tag{3.5-5}$$

Adicionando-se (3.5-2) a (3.5-5), levando em conta a equação (3.5-1), se obtém que

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{\kappa\rho}{\Omega}\,. \tag{3.5-6}$$

Subtraindo-se a equação (3.5-5) da equação (3.5-6) tira-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = -\frac{\kappa\rho}{\Omega}\,. \tag{3.5-7}$$

Adicionando-se as equações (3.5-6) e (3.5-7), vem:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = 0\,. \tag{3.5-8}$$

Novamente, pode-se considerar

$$a = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\alpha}, \quad b = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\beta}, \quad c = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\gamma}, \quad \Omega = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\omega}. \tag{3.5-9}$$

Levando (3.5-9) a (3.5-8), acha-se:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\,. \tag{3.5-10}$$

Adicionando-se a equação (3.5-1) com o dobro da equação (3.5-5), obtêm-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{3\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{2\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = 0 \qquad (3.5\text{-}11)$$

Levando (3.5-9) a (3.5-11), acha-se:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3\omega^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(1 - 2\omega) + 3\omega . \qquad (3.5\text{-}12)$$

Subtraindo-se a equação (3.5.4) da equação (3.5-3), vem:

$$\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} + \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)\left(\frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\right) = 0 . \qquad (3.5\text{-}13)$$

Levando (3.5-9) a (3.5-13), obtêm-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega = 1 . \qquad (3.5\text{-}14)$$

Levando (3.5-14) a (3.5-12), acha-se ainda:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \omega^2 = 1 . \qquad (3.5\text{-}15)$$

Conseqüentemente, esta solução é exatamente igual à do caso no vazio, podendo os valores α, β, γ e ω serem dados pelas relações das equações (3.3-21).

Inclusive, levando-se os resultados (3.5-14) e (3.5-15) na equação (3.5-1), vê-se imediatamente que

$$\rho \equiv 0 \ , \qquad (3.5\text{-}16)$$

em corroboração ao exposto no final do item 3.4 [vide a referência (8)].

Conclui-se, daí, que o sistema só é compatível para $p = \rho = 0$, isto é, um Universo preenchido pelos fótons correspondentes ao acoplamento não-mínimo em questão somente admite uma métrica homogênea (anisotrópica ou isotrópica) quando não possuir outro conteúdo material ou energético, além desses fótons e da gravitação.

3.6 - *ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO COSMOLÓGICA*

Conforme exposto no último parágrafo do item anterior, a única solução homogênea admissível é a do sistema de equações (3.3-11) a (3.3-15). Para se analisar a estabilidade de sua solução, convém definir

$$X \equiv \frac{\dot{a}}{a} \ , \quad Y \equiv \frac{\dot{b}}{b} \ , \quad Z \equiv \frac{\dot{c}}{c} \quad \text{e} \quad W \equiv \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \ . \qquad (3.6\text{-}1)$$

Assim sendo, tem-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{X} + X^2 \ , \quad \frac{\ddot{b}}{b} = \dot{Y} + Y^2 \ , \quad \frac{\ddot{c}}{c} = \dot{Z} + Z^2 \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} = \dot{W} + W^2 \ . \qquad (3.6\text{-}2)$$

Desta maneira, as equações (3.3-11) a (3.3-15), respectivamente, ficam como:

$$\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z} + \dot{W} = -(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2) \ , \qquad (3.6\text{-}3)$$

$$\dot{X} + X\ (X + Y + Z + W) = 0 \ , \qquad (3.6\text{-}4)$$

$$\dot{Y} + Y\ (X + Y + Z + W) = 0 \ , \qquad (3.6\text{-}5)$$

$$\dot{Z} + Z\ (X + Y + Z + W) = 0 \ , \qquad (3.6\text{-}6)$$

$$\dot{W} + W\ (X + Y + Z + W) = 0 \ . \qquad (3.6\text{-}7)$$

Das equações (3.6-4) a (3.6-7), conclui-se que

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{W}}{W} = -(X + Y + Z + W) \ . \qquad (3.6\text{-}8)$$

Conseqüentemente, pode-se expressar X, Y e Z como

$$X = \xi W \ , \quad Y = \eta W \quad \text{e} \quad Z = \zeta W \ . \qquad (3.6\text{-}9)$$

Assim, a equação (3.6-7) fica

$$\dot{W} = -W^2\ (\xi + \eta + \zeta + 1) = -KW^2 \ , \qquad (3.6\text{-}10)$$

onde

$$K = \xi + \eta + \zeta + 1 \ . \qquad (3.6\text{-}11)$$

A solução da equação (3.6-10) é:

$$W = \frac{1}{Kt + C} \tag{3.6-12}$$

Portanto, X, Y e Z valem

$$X = \frac{\xi}{Kt + C}, \quad Y = \frac{\eta}{Kt + C} \quad \text{e} \quad Z = \frac{\zeta}{Kt + C}. \tag{3.6-13}$$

Levando-se estes resultados em (3.6-1), obtém-se

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{Kt + C},$$

donde, integrando,

$$\ln \Omega = \frac{1}{K} \ln C' (Kt + C),$$

ou, exponenciando,

$$\Omega = \left(\frac{t}{t_0} + C''\right)^{1/K}, \tag{3.6-14}$$

onde

$$t_0 = \frac{1}{KC'} \quad \text{e} \quad C'' = CC'.$$

Fazendo uma translação no eixo dos tempos, definida por

$$t' = t + t_0 C'',$$

e suprimindo as plicas, obtém-se finalmente

$$\Omega = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{1/K} . \qquad (3.6\text{-}15)$$

De maneira análoga, chega-se que

$$a = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\xi/K} , \quad b = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\eta/K} \quad \text{e} \quad c = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\zeta/K} \qquad (3.6\text{-}16)$$

identificando, portanto, os parâmetros das equações (3.3-16) como

$$\alpha = \frac{\xi}{K} , \quad \beta = \frac{\eta}{K} , \quad \gamma = \frac{\zeta}{K} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{1}{K} . \qquad (3.6\text{-}17)$$

Vê-se, então, que

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega = \frac{\xi + \eta + \zeta + 1}{K} = 1 . \qquad (3.6\text{-}18)$$

E, ainda, levando (3.6-9) em (3.6-3), vem:

$$(\xi + \eta + \zeta + 1)\, \dot{W} = -(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1)\, W^2 . \qquad (3.6\text{-}19)$$

Levando (3.6-10) em (3.6-19), acha-se

$$(\xi + \eta + \zeta + 1)(-KW^2) = -(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1)\, W^2$$

ou

$$\frac{\xi}{K} + \frac{\eta}{K} + \frac{\zeta}{K} + \frac{1}{K} = \frac{\xi^2}{K^2} + \frac{\eta^2}{K^2} + \frac{\zeta^2}{K^2} + \frac{1}{K^2} , \qquad (3.6\text{-}20)$$

em concordância com a equação (3.3-17).

Isto significa que a solução tipo Kasner é a única possível para o sistema proposto.

A solução anisotrópica possivelmente seria válida em estágios primitivos do Universo, gradativamente cedendo lugar a uma solução tipo Friedmann. Tal acontece quando $\alpha = \beta = \gamma$ [isto é, $a = b = c$, na métrica (3.3-1)].

Neste caso, as equações (3.3-20) dão

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + \omega &= 1 \\ 3\alpha^2 + \omega^2 &= 1 \,. \end{aligned}\right\} \tag{3.6-21}$$

e

A solução deste sistema é

$$\alpha = 0 \,, \quad \omega = 1 \tag{3.6-22}$$

ou

$$\alpha = 1/2 \,, \quad \omega = -1/2 \,. \tag{3.6-23}$$

O caso (3.6-22) corresponde ao espaço de Minkowsky e o (3.6-23) ao de Friedmann.

Em termos de X e W, tem-se:

$$\textit{Minkowsky:} \quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{t} = 0 = Y = Z \\ W &= \frac{\omega}{t} = \frac{1}{t} \end{aligned}\right. \tag{3.6-24}$$

$$\textit{Friedmann:}\quad \begin{cases} X = \dfrac{\alpha}{t} = \dfrac{1}{2t} = Y = Z \\ \\ W = \dfrac{\omega}{t} = -\dfrac{1}{2t} \end{cases} \qquad (3.6\text{-}25)$$

Num diagrama representativo de X em função de W, onde X faz o papel dos três eixos espaciais X, Y e Z, pode-se observar a evolução temporal das geometrias tipo Kasner, todas tendendo à origem, quando t tende para o infinito (Figura 1).

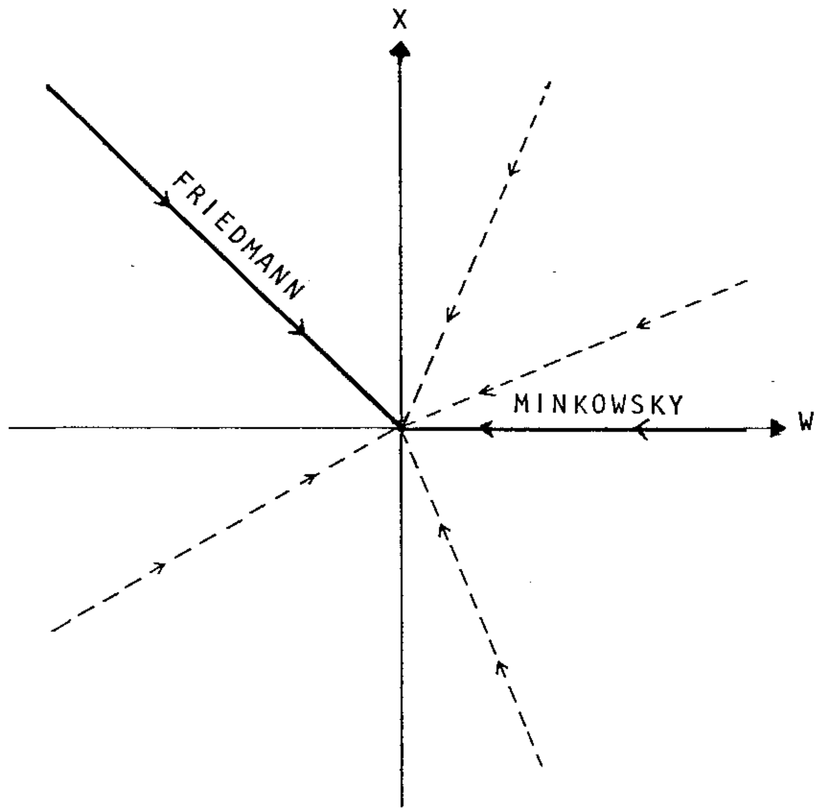

FIGURA 1 - Evolução das geometrias de Friedmann e Minkowsky, com o passar do tempo.

Isto significa que o sistema de equações diferenciais autônomas, (3.6-4) a (3.6-7), é altamente estável no espaço quadridimensional dos X, Y, Z e W, sendo a origem um *ponto de estrela assintoticamente estável* (14).

Note-se que a equação (3.6-3) representa apenas um *vínculo* do sistema, pois, usando as equações (3.6-4) a (3.6-7), pode-se escrevê-la como

$$XY + XZ + XW + YZ + YW + ZW = 0 \,. \qquad (3.6\text{-}26)$$

CONCLUSÕES

Neste trabalho ficou mostrado que existe uma solução para as equações de campo gravitacional e eletromagnético, derivadas de uma lagrangeana com acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo do tipo $\lambda R A_{\mu} A^{\mu}$, no caso cosmológico, homogêneo e anisotrópico, exata e estável, conquanto o Universo seja preenchido apenas pelos fótons não-lineares, tendo origem do dito acoplamento. No caso de métrica estática esfericamente simétrica, achou-se uma solução por perturbação para o caso $Q = 0$ que implicou na existência de um potencial não-nulo, significando uma *carga efetiva*, criada pelo acoplamento não-mínimo.

Futuros trabalhos poderão ser dedicados à solução exata da métrica estática esfericamente simétrica, o que envolve extensa quantidade de cálculo.

Testes experimentais também poderiam ser planejados em futuras pesquisas para a detecção de tal acoplamento não-mínimo, ou pelo menos para o estabelecimento de um limite superior para o valor da constante de acoplamento.

Outro tópico de interesse a merecer investigação mais detalhada é o mecanismo de criação de carga devido à não invariância de calibre (gauge) da teoria apresentada.

BIBLIOGRAFIA

1) HAWKING, S.W. & PENROSE, R. *The singularities of gravitacional collapse and cosmology.* Prod.R.Soc., London A 314, 529 (1969).

2) HAWKING, S.W. & ELLIS, G.F.R. *The Large Scale Structure of Space-time.* Cambridge U.P., Cambridge (1973).

3) MISNER, C.W.; THORNE, K.S. & WHEELER, J.A. *Gravitation.* Freeman, San Francisco (1973).

4) DE WITT, B.S. *Quantum Gravity: the New Synthesis.* In "General Relativity: An Einstein Centenary Survey", eds. S. W.Hawking & W.Israel. Cambridge U.P., Cambridge (1979).

5) RYAN Jr., M.P. & SHEPLEY, L.C. *Homogeneous Relativistic Cosmologies.* Princeton U.P., Princeton (1975).

6) ADLER, R.; BAZIN, M. & SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity,* 2nd ed. McGraw-Hill, New York (1975).

7) WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology.* Wiley, New York (1972).

8) NOVELLO, M. & SALIM, J.M. *Non-linear Photons in the Universe.* Phys.Rev. 20D/2 (1979), 377.

9) LORENTZ, H.A. *Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity less than that of Light.* In "The Principle of Relativity". Dover, New York (1952).

10) RINDLER, W. *Essential Relativity,* 2nd ed. Springer-Verlag, New York (1977).

11) JACKSON, J.D. *Classical Electrodynamics,* 2nd ed. Wiley, New York (1975).

12) NOVELLO, M. *Tópicos de Cosmologia Relativista.* Monografias CBPF n.º 34, Rio de Janeiro (1974).

13) LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields,* 4th ed. Pergamon, Oxford (1975).

14) SANSONE, G. & CONTI, R. *Non-linear Differential Equations.* MacMillan, New York (1964).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Mario Novello
Presidente

Ivano Damião Soares

Murari Mohan Som

Carlos Guido Bollini
Suplente

Rio de Janeiro, 03 de agosto de 1982