

*TELMA AISENGART SANTOS*

REALIZAÇÕES NÃO LINEARES DE SIMETRIA  
E O MODELO  $CP^{n-1}$  GENERALIZADO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
Rio de Janeiro

-1982-

- Ao Alexandre

## AGRADECIMENTOS

– Ao Professor Prem P. Srivastava pela amizade, sugestão do tema e orientação;

– Ao Professor Henrique Lins de Barros pela amizade e apoio recebidos;

– Aos meus familiares, especialmente a Tiago e Natália – meus filhos, e a Malvina – minha mãe, pela força que de alguma forma me deram;

– À Helena de Souza Ferreira pelo esmerado trabalho datilográfico;

– Aos amigos do CBPF;

– À CAPES, ao CNPq e CBPF pelo apoio financeiro recebido.

## RESUMO

É apresentado o modelo  $CP^{n-1}$  generalizado que tem  $U(p)$  como grupo de Gauge, no espaço Euclideano a duas dimensões nas diversas formulações existentes. Tal modelo é descrito como uma realização não linear de simetria que se torna linear quando restrita a um determinado subgrupo, tratando-se portanto de campos que tomam valores no espaço quociente  $G/H$ .

São apresentadas soluções clássicas de instanton e meron para esse modelo e demonstra-se a existência de um mecanismo para gerar uma família de soluções não autoduais com ação finita, tomando-se como ponto de partida as soluções de Instanton.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
<u>CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2: ALGUNS ASPECTOS DE TEORIA DE GRUPOS E REALIZAÇÕES NÃO LINEARES DE SIMETRIA</u> .....	4
2.1 - Teoria de Grupos - Definições Básicas .....	4
2.2 - Álgebras de Lie dos Grupos Clássicos .....	14
2.3 - Propriedades dos Espaços Quocientes .....	21
2.4 - Realizações Não Lineares de Simetria .....	31
<u>CAPÍTULO 3: O MODELO <math>U(n,p)</math></u> .....	41
3.1 - Equações de Movimento .....	41
3.2 - Construção de um Número Infinito de Leis de Conservação.	56
3.3 - O Modelo $U(n,p)$ como uma Realização Não Linear de Simetria .....	58
<u>CAPÍTULO 4: SOLUÇÕES CLÁSSICAS PARA OS MODELOS <math>CP^{n-1}</math> E <math>U(n,p)</math></u> .....	67
4.1 - Soluções Tipo Instanton para o Modelo $CP^{n-1}$ .....	67
4.2 - Soluções Tipo Instanton para o Modelo $U(n,p)$ .....	71
4.3 - Soluções Não Autoduais .....	77
4.4 - Soluções Tipo Meron .....	88
<u>CAPÍTULO 5: CONCLUSÕES</u> .....	90
<u>APÊNDICE A - O MODELO <math>U(n,p)</math> ESCRITO EM TERMOS DE CAMPOS PROJETORES..</u>	91
<u>APÊNDICE B - CLASSIFICAÇÃO DE ALGUMAS SOLUÇÕES DO MODELO <math>U(n,p)</math></u> .....	96
<u>REFERÊNCIAS</u> .....	101

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A cromodinâmica quântica (QCD) tem se revelado cada vez mais útil para a compreensão das interações fortes, fornecendo diferentes e promissores métodos para problemas tais como os de confinamento, quebra de simetria quiral, espectro hadrônico etc., cujo tratamento não pode ser feito através de teorias de perturbação.

Considerável ajuda para essa situação provém de modelos bidimensionais tanto como um laboratório teórico para os métodos quanto como uma fonte de sugestão para os mecanismos físicos reais no estudo em questão. Esses modelos devem ser suficientemente complexos para imitar a estrutura teórica rica e sutil da Q.C.D. e para oferecerem soluções explícitas, pelo menos, em um limite conveniente que tenha significado físico.

O modelo  $\sigma$ , introduzido em 1960 por Gell-Mann e Lévy<sup>(1-3)</sup> é um modelo teórico de campo que realiza simetria quiral e conservação parcial da corrente axial (PCAC). O nome  $\sigma$  se origina de uma das suas notações.

O fato do modelo  $\sigma$  linear e seu limite de Goldstone verificar todos os vínculos da álgebra de corrente e PCAC mesmo no nível de termos de Born sugere o seu uso como uma lagrangeana fenomenológica no mesmo sentido que a teoria de Fermi para interações fracas. De fato, existem algumas interações fenomenológi-

cas com essa propriedade. O espírito dessa abordagem é ignorar os problemas de renormalização e usar em primeira ordem as relações que surgem nos processos.

Um exemplo desse uso é dado pelo modelo  $\sigma$  não linear. O nome se origina da realização não linear<sup>(4-7)</sup> do grupo quiral na variedade:

$$\sigma^2(x) + \pi^2(x) = f_\pi^2 . \quad (1.1)$$

Expressando  $\sigma$  em termos do campo do pion a lagrangeana resultante é escrita como:

$$L = \frac{1}{2} (\partial\pi)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\pi \cdot \partial\pi)^2}{\sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}} . \quad (1.2)$$

Apesar dessa teoria não ser renormalizável de acordo com o critério usual no espaço-tempo a quatro dimensões, ela despertou grande interesse por suas aplicações em mecânica estatística, onde ela descreve a versão contínua do modelo de Heisenberg. Além disso uma teoria como (1.2) é renormalizável em duas dimensões onde um campo escalar é adimensional. Ela então tem muitas propriedades em comum com as teorias de campo recentes para interações fortes, tais como: liberdade assintótica, topologia não trivial, existência de soluções de instantons, invariância conforme a nível clássico, etc.

Inicialmente, foram estudados modelos  $\sigma$  não lineares  $O(n)$ <sup>(8-11)</sup> mas, como esses modelos só possuem soluções de instanton para  $n = 3$ , fez-se uma generalização para modelos invariantes sob o grupo  $SU(n)$  ( $SU(3) = O(2)$ ) que além da simetria glo-

bal tem uma invariância de gauge local; esses modelos são chamados  $CP^{n-1}$  (12-18).

Neste trabalho estudamos uma generalização do modelo  $CP^{n-1}$  onde o grupo de gauge abeliano  $U(1)$  é substituído por um grupo não abeliano  $U(p)$  (19-23), sendo que  $U(n,1)$  é idêntico a  $CP^{n-1}$ .

O modelo  $U(n,p)$  pode ser descrito como uma realização do espaço quociente  $U(n)/[U(n-p) \otimes U(p)]$  nele mesmo (24-25); portanto, no Capítulo 2 introduzimos alguns conceitos de teoria de grupos, nos detendo particularmente no estudo das propriedades dos espaços quocientes; apresentamos também a teoria clássica de realizações não lineares de simetria.

No Capítulo 3 estudamos o modelo  $U(n,p)$ ; as equações de movimento, mostrando a relação entre as diversas formulações que aparecem na literatura, tensor energia-momento, corrente de Nöether e estudamos a construção de um número infinito de leis de conservação; finalmente escrevemos o modelo como uma realização não linear de simetria.

No Capítulo 4 apresentamos algumas soluções clássicas para os modelos  $CP^{n-1}$  e  $U(n,p)$ , soluções de instanton, soluções de meron e uma família de soluções não auto-duais com ação finita.

No Capítulo 5 apresentamos as conclusões deste trabalho.



## CAPÍTULO 2

### ALGUNS ASPECTOS DE TEORIA DE GRUPOS E REALIZAÇÕES NÃO LINEARES DE SIMETRIA

#### 2.1 - Teoria de Grupos - Definições Básicas

Esta seção bem como a seguinte, contêm algumas definições e teoremas da teoria de grupos que são apresentados sem demonstração, as quais podem ser encontradas nas refs. (26) a (29) que apresentam um estudo bem mais completo desse assunto. Tivemos como objetivo principal o fornecimento de subsídios para o estudo das propriedades de transformação dos espaços quocientes.

Um grupo  $G$  é um conjunto  $g_1, g_2, \dots, g_n \subset G$  com uma operação  $(*)$  denominada multiplicação de grupo que satisfaz às seguintes propriedades:

- (i)  $g_i \in G, g_j \in G \implies g_i * g_j \in G$       Fechamento
- (ii)  $g_i * (g_j * g_k) = (g_i * g_j) * g_k$       Associatividade
- (iii)  $g_i * g_1 = g_1 * g_i \quad \forall g_i$       Existência de Identidade
- (iv)  $g_k * g_\ell = g_\ell * g_k = g_1$       Existência de elemento inverso único  $g_\ell = g_k^{-1}$

Um grupo que satisfaz uma quinta propriedade além das quatro acima é chamado grupo abeliano ou comutativo.

- (v)  $g_i * g_j = g_j * g_i \quad \forall g_i, g_j \in G$       Comutatividade

Um subconjunto  $H \subset G$  é um sub grupo de  $G$  se, com a

mesma operação de  $G$  os elementos de  $H$  formam um grupo. Naturalmente o elemento neutro de  $G$  deve estar contido em um sub grupo  $H$ .

O mapeamento de uma estrutura algébrica em outra estrutura algébrica similar é chamado um homomorfismo se ele preserva todas as operações combinatórias associadas a essa estrutura. Se além disso, o mapeamento é fiel de modo que se defina um inverso, ele é chamado isomorfismo. Um isomorfismo de  $G$  em  $G$  é chamado um automorfismo.

Se o mapeamento é uma estrutura algébrica que possa ser escrita concretamente e descrita analiticamente é chamado uma realização; se é em um conjunto de matrizes é chamado uma representação.

Uma função métrica em um espaço vetorial  $V$  é um mapeamento de um par de vetores em um número no campo  $F$  associado com o espaço vetorial.

$$(v_1, v_2) = f \quad v_1, v_2 \in V, f \in F.$$

Este mapeamento obedece:

$$(v_1, \alpha v_2 + \beta v_3) = \alpha(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_3) \quad (2.1.1)$$

e

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, v_3) = (v_1, v_3)\alpha + (v_2, v_3)\beta \quad (2.1.2)$$

ou

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, v_3) = (v_1, v_3)\alpha^* + (v_2, v_3)\beta^* \quad (2.1.3)$$

As métricas que obedecem (2.1.1) e (2.1.2) são chamadas métricas bilineares e as que satisfazem (2.1.1) e (2.1.3) são chamadas sesquilineares.

Um espaço topológico  $T$  é um conjunto de pontos nos quais é inserida uma topologia  $\mathcal{T}$ .

Uma topologia  $\mathcal{T}$  é uma escolha de subconjuntos  $S_1, S_2, \dots$  de  $T$

$$S_i \subset T \quad , \quad S_i \in \mathcal{T} \quad .$$

A topologia  $\mathcal{T}$  obedece aos seguintes axiomas:

(i) O conjunto vazio  $\emptyset$  e o espaço  $T$  pertencem a  $\mathcal{T}$  .

$$\emptyset \in \mathcal{T} \quad , \quad T \in \mathcal{T}$$

(ii) Interseções finitas de elementos em  $\mathcal{T}$  são elementos em  $\mathcal{T}$ .

$$\bigcap_{i=1}^{\text{finito}} S_i \in \mathcal{T}$$

(iii) Uniões arbitrárias de elementos em  $\mathcal{T}$  são elementos em  $\mathcal{T}$  .

$$\bigcup_{i=1}^{\text{finito ou infinito}} S_i \in \mathcal{T}$$

Os elementos  $S_i$  na topologia  $\mathcal{T}$  são chamados conjuntos abertos.

Um espaço topológico que obedece ao seguinte axioma adicional é chamado um espaço de Hausdorff

(iv) Se  $p \in T$ ,  $q \in T$ ,  $p \neq q$  então existe  $S_p \in \mathcal{T}$ ,  $S_q \in \mathcal{T}$  com a propriedade  $p \in S_p$ ,  $q \in S_q$ ,  $S_p \cap S_q = \emptyset$ .

Um conjunto aberto  $S_p$  contendo  $p$  é chamado uma vizinhaça de  $p$ .

Um espaço  $T$  é compacto se toda sequência infinita de

contínuo e diferenciável.

(iv) Os mapeamentos  $\phi_p$  o  $\phi_q^{-1}$  e  $\phi_q$  o  $\phi_p^{-1}$ , descritos em (iii), são mapeamentos em  $\Phi$ .

Variedades são importantes e úteis porque elas são localmente Euclidianas em todos os pontos. Através dos axiomas (i) a (iii) todos os métodos e conceitos usados no estudo do espaço  $R_n$  podem ser transferidos para a variedade. Em particular, a dimensão da variedade  $\mu$  é igual a dimensão do espaço  $R^n$ , ou seja  $n$ .

Um grupo topológico ou grupo contínuo tem dois tipos diferentes de estrutura: ele tem uma estrutura topológica e uma estrutura algébrica. Algebricamente ele é um grupo, então obedece aos axiomas de um grupo; topologicamente é uma variedade. As propriedades algébricas e topológicas são combinadas por dois axiomas adicionais:

(a) o mapeamento  $\sigma \times \tau \rightarrow \sigma\tau$  é contínuo

(b) o mapeamento  $\tau \rightarrow \tau^{-1}$  é contínuo

Esses são os dois únicos axiomas necessários para conectar as propriedades algébricas com as propriedades topológicas de grupos contínuos. Da imposição desses axiomas resulta uma estrutura rica e bonita — a teoria dos grupos de Lie.

Um grupo topológico ou grupo contínuo consiste de

(i) uma variedade  $n$ -dimensional  $M$ ,

(ii) uma operação  $\phi$  que mapeia cada par de pontos  $(\beta, \alpha)$  na variedade em outro ponto  $\gamma$  na variedade,

(iii) Em termos do sistema de coordenadas nos pontos  $\gamma, \alpha, \beta$  escrevemos

pontos  $t_1, t_2, \dots$  ( $t_i \in T$ ) contém uma subsequência de pontos que:

- a) converge para um ponto  $e$
- b) esse ponto está em  $T$ .

Um conjunto  $T$  é fechado se ele contém todos os seus pontos limites.

Seja  $\phi$  um mapeamento do espaço  $T$  com topologia  $\mathcal{T}$ , no espaço  $U$  com topologia  $\mathcal{U}$ . Se  $t_i \in T$ , então a imagem de  $t_i$  é um ponto  $u_i \in U$

$$\phi(t_i) = u_i \quad .$$

Nem todo ponto em  $U$  é necessariamente a imagem de algum ponto em  $T$ . Além disso, muitos pontos diferentes em  $T$  podem ser mapeados em um ponto de  $U$ . O conjunto de todos os pontos  $t_1, t_2, \dots \in T$  que vão em um ponto particular  $u \in U$  é chamado a imagem inversa de  $u$ .

$\phi: (T, \mathcal{T}) \rightarrow (U, \mathcal{U})$  é contínua se a imagem inversa de qualquer conjunto aberto em  $U$  é um conjunto aberto em  $T$ .

Uma variedade diferenciável  $M$  consiste em um espaço de Hausdorff  $(T, \mathcal{T})$  e uma coleção  $\Phi$  de mapeamentos  $\phi_p$  e  $\psi$

$$\phi_p: T \rightarrow \mathbb{R}_n \quad , \quad p \in T$$

que obedece às seguintes propriedades:

- (i)  $\phi_p$  é um mapeamento 1-1 de um conjunto aberto  $T_p$  ( $p \in T_p$ ) em um conjunto aberto no  $\mathbb{R}_n$
- (ii)  $\cup T_p = T$
- (iii) Se  $T_p \cap T_q$  é não vazio, então  $\phi_p(T_p \cap T_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}_n$ , e  $\phi_q(T_p \cap T_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}_n$  diferente de  $\phi_p(T_p \cap T_q)$ . O mapeamento  $\phi_p$  o  $\phi_q^{-1}$  deve ser

(b) um espaço geométrico  $G_N$ , que é uma variedade N-dimensional, e um mapeamento

$$f: T \times G \rightarrow G$$

que obedecem

Postulado (a'):  $T_n, \phi$  obedecem aos postulados de grupo topológico.

Postulado (b'): A função

$$y^i = f^i (\alpha^1, \dots, \alpha^n, x^1, \dots, x^N)$$

é contínua e tem as seguintes propriedades:

(i) Fechamento

$$\begin{aligned} \alpha \in T, x \in G &\implies \alpha x \in G \\ &\Downarrow \\ y^i = f^i (\alpha^1, \dots, \alpha^n, x^1, \dots, x^N) &\in G_N \end{aligned}$$

(ii) Associatividade:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha.x) &= (\beta.\alpha) x \\ &\Downarrow \\ f^i(\beta, f(\alpha, x)) &= f^i(\phi(\beta, \alpha), x) \end{aligned}$$

(iii) Identidade

$$\begin{aligned} \epsilon x &= x \\ &\Downarrow \\ f^i(\epsilon, x) &= x^i \end{aligned}$$

$$\gamma^\mu = \phi^\mu (\beta^1, \dots, \beta^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) \quad \mu = 1, \dots, n$$

As funções

$$\phi: \beta \times \alpha \rightarrow \gamma = \beta\alpha$$

$$\psi: \alpha \rightarrow \alpha^{-1}$$

devem ser contínuas.

As propriedades de multiplicação de grupo podem ser transcritas como condições em  $\phi$ :

(i) Fechamento: 
$$\begin{array}{c} c = b.a \\ \downarrow \\ \gamma^\mu = \phi^\mu(\beta, \alpha) \quad \alpha, \beta, \gamma \in M \end{array}$$

(ii) Associatividade: 
$$\begin{array}{c} c.(b.a) = (c.b).a \\ \downarrow \\ \phi^\mu(\gamma, \phi(\beta, \alpha)) = \phi^\mu(\phi(\gamma, \beta), \alpha) \end{array}$$

(iii) Identidade: 
$$\begin{array}{c} e.a = a.e = a \\ \downarrow \\ \phi^\mu(\epsilon, \alpha) = \alpha^\mu = \phi^\mu(\alpha, \epsilon) \end{array}$$

(iv) Elemento Inverso: 
$$\begin{array}{c} a.a^{-1} = a^{-1}.a = e \\ \downarrow \\ \phi^\mu(\alpha, \alpha^{-1}) = \phi^\mu(\alpha^{-1}, \alpha) = \epsilon^\mu . \end{array}$$

Um grupo contínuo de transformações consiste em:

(a) um espaço topológico  $T_n$ , que é uma variedade n-dimensional ,  
juntamente com um mapeamento binário  $\phi$ :

$$\phi: T \times T \rightarrow T \quad ;$$

(iv) Elemento Inverso

$$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha(\alpha^{-1}x) = (\alpha\alpha^{-1})x = x$$

$$\Downarrow$$

$$f^i(\alpha^{-1}, f(\alpha, x)) = f^i(\alpha, f(\alpha^{-1}, x)) = f^i(\phi(\alpha, \alpha^{-1}), x) = x^i \quad .$$

Para distinguir entre o espaço topológico do grupo e o espaço geométrico no qual o grupo atua, indicaremos todas as propriedades do espaço topológico com letras gregas (os pontos  $\alpha, \beta, \dots$ ; o mapeamento  $\phi$ ; os índices das coordenadas  $\alpha^{\mu}, \dots$ ) e todas as propriedades do espaço geométrico serão indicadas por letras romanas (os pontos  $x, y, \dots$ ; o mapeamento  $f$ ; os índices das coordenadas  $i, \dots$ ).

Todo grupo contínuo pode ser considerado como um grupo contínuo de transformações se for permitido que ele atue nele mesmo. Então temos as identificações:

$$G = T \quad ; \quad f = \phi \quad .$$

De modo que grupos contínuos são casos especiais de grupos contínuos de transformações.

Um espaço é conexo se quaisquer dois pontos do espaço podem ser ligados por uma linha e todos os pontos da linha estiverem no espaço.

Pode-se demonstrar que a componente de um grupo contínuo que é conectada com a identidade é um grupo.

Um espaço é simplesmente conexo se uma curva conectando dois pontos do espaço pode ser continuamente deformada em qualquer outra curva conectando os mesmos pontos.

Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ . Então para qualquer  $g$  fixo  $e \in G$ ,



o conjunto de operações de grupo

$$gHg^{-1} = \{gh_i g^{-1}, h_i \in H\}$$

também forma um grupo. Esse grupo é conjugado a H

Subgrupos H que são autoconjugados para todos os elementos  $g \in G$  ( $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$ ) são chamados subgrupos normais ou invariantes.

Pode-se demonstrar que a componente conexa  $G_0$  de um grupo contínuo G é um subgrupo invariante de G.

Soma direta e produto direto são construções úteis para enriquecer a complexidade de um dado tipo de estrutura algébrica, mas quociente é a arma secreta do arsenal matemático para a construção de novos tipos de estruturas algébricas. Vamos olhar para as propriedades do quociente  $G/H$ , onde H é um subgrupo de G. Tais estruturas são chamadas classes laterais ou cosets. Uma classe lateral direita é o conjunto de operações de grupo  $c_0, c_1, \dots$ , e G com a seguinte propriedade  $Hc_0 + Hc_1 + \dots = G$ . Além disso, nenhum elemento g de G está contido mais de uma vez na soma à esquerda. Em outras palavras, os  $c_i$  são escolhidos de modo que todo elemento g e G pode ser escrito unicamente como

$$g = h_j c_j, \quad \begin{matrix} h_j \in H \\ c_j \in C_k \end{matrix} .$$

Analogamente, classes laterais esquerdas envolvem uma decomposição única

$$g = c_k h_\ell, \quad \begin{matrix} h_\ell \in H \\ c_k \in C_L \end{matrix} .$$

Pode-se demonstrar que classes laterais esquerdas e direitas de um grupo contínuo  $G$  por um subgrupo fechado  $H$  são variedades de dimensão

$$\dim G - \dim H \quad .$$

Além disso, demonstra-se também que se  $H$  é um subgrupo invariante de  $G$  então, os elementos da classe lateral  $C_0, C_1, \dots$  podem ser escolhidos de modo que eles sejam fechados sob multiplicação e formem um grupo chamado grupo quociente  $G/H$ .

Intuitivamente, podemos visualizar  $G/H$  do seguinte modo: como cada classe lateral formada com  $H$  define uma classe de equivalência em  $G$  (pois  $gH = Hg$ ), o conjunto de todas as classes laterais formadas com  $H$ , isto é, o grupo quociente  $G/H$  tem como elementos estas classes de equivalência. Como duas classes laterais distintas não podem ter um elemento comum então os elementos de  $G/H$  são subconjuntos separados (disjuntos) em  $G$ . Portanto  $G/H$  representa a divisão de  $G$  em distintas classes de equivalência de  $H$ .

O ponto crucial para o estudo de grupos contínuos é o seguinte teorema, que permite que se estude todos os grupos contínuos estudando separadamente os grupos contínuos conexos e os grupos discretos.

Teorema: o grupo quociente de um grupo contínuo  $G$  pela sua componente conexa  $G_0$ , é um grupo discreto,  $D$ , de dimensão zero:

$$\frac{G}{G_0} = D \quad .$$

## 2.2 - Álgebras de Lie dos Grupos Clássicos

Eventualmente, podemos descrever muitas das propriedades globais de um grupo contínuo conhecendo somente suas propriedades na vizinhança da origem; quando procedemos assim, linearizamos a estrutura do grupo e assim aparecem os grupos contínuos locais e grupos de Lie locais.

Um grupo de Lie é a componente conexa de um grupo contínuo na qual a função composição  $\phi$  é analítica no seu domínio de definição.

Estudando-se as propriedades infinitesimais de grupos de Lie, isto é, as propriedades do grupo próximas ao elemento identidade, chega-se de maneira natural aos conceitos de gerador infinitesimal e álgebra de Lie.

Associados a cada grupo de Lie de  $r$ -parâmetros existem  $r$  operadores infinitesimais que são caracterizados por suas propriedades de comutação. Podemos dizer que os  $r$  operadores infinitesimais  $x_\tau$  varrem um espaço vetorial  $r$ -dimensional real caracterizado pelas quantidades  $\sum a^\tau x_\tau$ , onde os  $a^\tau$  são números reais. A álgebra desse espaço vetorial  $r$ -dimensional é definida pelo requerimento que os operadores infinitesimais  $x_\tau$  satisfaçam às condições:

$$[x_\rho, x_\sigma] = c_{\rho\sigma}^\tau x_\tau$$

onde  $c_{\rho\sigma}^\tau = -c_{\sigma\rho}^\tau$ , constantes de estrutura

$$[x_\rho, x_\rho] = 0$$

e a identidade de Jacobi

$$\left[ x_\rho, [x_\sigma, x_\nu] \right] + \left[ x_\sigma, [x_\nu, x_\rho] \right] + \left[ x_\nu, [x_\rho, x_\sigma] \right] = 0$$

Sob as condições acima os  $r$  operadores infinitesimais  $x_\tau$  formam a álgebra de Lie do grupo de Lie correspondente. Para todo grupo de Lie existe uma álgebra de Lie e para todo subgrupo existe uma subálgebra.

Desse modo fica caracterizado um caminho entre grupos de Lie e álgebras de Lie. A álgebra de Lie é unicamente determinada, a menos de uma mudança de base, pelo grupo de Lie. Resta uma questão: Dada uma álgebra de Lie, podemos associar a ela um grupo de Lie? A resposta é a seguinte: Muitos grupos de Lie têm a mesma álgebra mas, entre todos os grupos com a mesma álgebra existe somente um que é simplesmente conexo. Esse grupo é chamado grupo de cobertura universal.

Todos os grupos com a mesma álgebra de Lie podem ser obtidos do grupo de cobertura universal de uma maneira simples. Se  $SG$  é um grupo de Lie simplesmente conexo e  $D$  é um de seus subgrupos invariantes discretos, tal que

$$g d_i g^{-1} = d_j, \quad \begin{array}{l} d_i, d_j \in D \\ g \in SG \end{array} \quad (2.2.1)$$

Então o grupo quociente

$$G \equiv \frac{SG}{D}$$

é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é isomórfica à álgebra de Lie de  $SG$ ;  $G$  é multiplamente conexo quando  $D$  contém mais de um elemento.

As constantes de estrutura de uma álgebra de Lie forne

com uma representação matricial para a álgebra. Em geral, essa representação é infiel. A representação, chamada adjunta ou regular, é obtida associando-se com  $X_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) uma matriz  $n \times n$   $M_\mu$  cujos elementos são dados por

$$(M_\mu)_\alpha^\beta = -c_{\mu\alpha}^\beta .$$

Além disso, existem teoremas que garantem que todos os elementos de um grupo de Lie compacto  $G$ , podem ser obtidos por exponenciação de algum elemento da álgebra de Lie.

Um elemento arbitrário na vizinhança da identidade de qualquer dos grupos matriciais clássicos pode ser escrito na forma

$$I + \delta M \tag{2.2.2}$$

onde  $\delta M$  é uma matriz infinitesimal. As condições que definem o grupo clássico podem ser transferidas para asserções sobre as propriedades de  $\delta M$ .

Fazemos isso escrevendo as condições na operação de grupo (2.2.2), expandindo e retendo termos de primeira ordem. Como  $\delta M$  descreve a operação algébrica perto da origem, um elemento arbitrário  $M$  da álgebra tem as mesmas propriedades que o elemento infinitesimal.

As álgebras de Lie calculadas dessa maneira estão definidas em um espaço vetorial linear real  $n$ -dimensional  $R_n$ . Mas, o campo dos números reais  $R_1$  não é fechado algebricamente. Permitindo que todos os parâmetros reais no espaço vetorial  $R_n$  se tornem complexos, formamos uma extensão complexa das álgebras sobre  $R_n$  para álgebras de Lie sobre  $C_n$ . Extensões complexas de ál-

gebras de Lie reais simplificam significativamente a classificação dessas álgebras.

Qualquer operador  $T$  que mapeia a álgebra de Lie nela mesmo é chamado um automorfismo. Tais automorfismos obedecem

$$(x,y) = (Tx,Ty) \quad .$$

Qualquer automorfismo com a propriedade

$$T^2 = I$$

é chamado um automorfismo involutivo. Tais automorfismos têm autovalores  $\pm 1$ , pois

$$(T-I)(T+I) = 0$$

Esses automorfismos separam a álgebra de Lie nos subespaços com autovalores  $\pm 1$ .

Seja  $g$  uma álgebra de Lie simples compacta. Decompomos  $g$  nos seus autosubespaços de  $T$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} g &= h \oplus p \\ T(g) &= T(h) \oplus T(p) && (2.2.3) \\ &= (+1)h \oplus (-1)p \quad . \end{aligned}$$

Além disso, mostramos que  $h$  é fechado sob comutação e portanto é uma subálgebra

$$\begin{aligned} ([H,H'],P) &= (T[\underline{H},H'],TP) = ([TH,TH'],TP) = \\ &= ([+H,+H'],-P) = -([\underline{H},H'],P) = 0 \end{aligned}$$

$$H,H' \in h \quad , \quad P \in p \quad .$$

Similarmente, todos os outros produtos internos da forma  $([\underline{A}, \underline{B}], C)$  se anulam quando um número ímpar de argumentos vêm do subespaço  $p$  de autovalor  $-1$ . Temos:

$$\begin{aligned} [\underline{h}, \underline{h}] \perp p &\implies [\underline{h}, \underline{h}] \subseteq h \\ [\underline{h}, \underline{p}] \perp h &\implies [\underline{h}, \underline{p}] = p \\ [\underline{p}, \underline{p}] \perp p &\implies [\underline{p}, \underline{p}] \subseteq h \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Então  $h$  forma uma subálgebra, e  $p$  forma o subespaço ortogonal complementar. Se agora aplicarmos o truque unitário de Weyl no subespaço  $p$ , construímos uma nova álgebra  $g^*$

$$g^* = h \oplus ip \tag{2.2.5}$$

Esse espaço é fechado sob comutação com constantes de estrutura reais porque  $g$  tem constantes de estrutura reais e

$$\begin{aligned} [\underline{h}, \underline{h}] &\subset h \\ [\underline{h}, \underline{ip}] &= ip \implies [\underline{g}^*, \underline{g}^*] = g^* \\ [\underline{ip}, \underline{ip}] &\subset (-)h \end{aligned}$$

Além disso, essa nova álgebra  $g^*$  é não compacta a menos que  $h = g$ :

$$\chi(g^*) = \dim(p) - \dim(h)$$

Essa decomposição ((2.2.3) e (2.2.5)) é chamada de decomposição de Cartan. O subespaço  $h$  é a subálgebra máxima compacta de  $g^*$ . Com relação a essa decomposição, a representação regular de  $g$  é:

$$R(h) = \left( \begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right) \begin{array}{l} \}h \\ \}p \end{array} \quad R(p) = \left( \begin{array}{c|c} O & C \\ \hline -C^\dagger & O \end{array} \right)$$

$$A^\dagger = -A$$

$$B^\dagger = -B$$

A, B, C reais

Como  $g$  é compacta, as matrizes  $R(h)$  e  $R(p)$  são antisimétricas e reais. Uma decomposição similar para  $g^*$  dá

$$R(h) = \left( \begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right) \quad R(ip) = \left( \begin{array}{c|c} O & C \\ \hline +C^\dagger & O \end{array} \right)$$

$$A^\dagger = -A$$

$$B^\dagger = -B$$

A, B, C reais

Novamente,  $R(h)$  é antisimétrica. Removendo-se o fator  $i$  das bases de  $ip$ , a matriz  $R(ip)$  se torna uma matriz real simétrica.

Por essa construção é possível associar uma forma real não compacta  $g^*$  com a forma compacta  $g$  através do automorfismo involutivo  $T$ . Pode-se mostrar que esta é uma construção completa: a medida que  $T$  passa por todos os automorfismos que obedecem  $T^2 = I$ ,  $g^*$  passa por todas as formas reais associadas com a álgebra complexa semisimples da qual  $g$  é a forma real compacta conhecida.

A decomposição de Cartan para a álgebra de Lie  $gl(n, c)$  é dada por



$$\begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{arbitr\u00e1ria} \\ \text{complexa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{antihermitiana} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{hermitiana} \end{pmatrix}$$

Os elementos do grupo em  $Gl(n,c)$  podem ent\u00e3o ser escritos como

$$\text{Exp} \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{complexa} \\ \text{arbitr\u00e1ria} \end{pmatrix} = \text{Exp} \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{antihermitiana} \\ n \times n \end{pmatrix} \otimes \text{Exp} \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{hermitiana} \\ n \times n \end{pmatrix}$$

↓

↓

$$Gl(n,c) = \text{matriz unit\u00e1ria} \otimes \text{matriz hermitiana}$$

Esse \u00e9 um resultado bem conhecido: uma matriz arbitr\u00e1ria complexa pode ser sempre escrita como o produto de uma matriz unit\u00e1ria por uma matriz hermitiana. Sob a restri\u00e7\u00e3o de vari\u00e1veis reais, existe um resultado semelhante:

$$Gl(n,r) = (\text{ortogonal}) \otimes (\text{sim\u00e9trica}) \quad .$$

A decomposi\u00e7\u00e3o de Cartan da \u00e1lgebra de Lie tem uma contrapartida no grupo de Lie que \u00e9 a decomposi\u00e7\u00e3o em classes laterais. Se  $G^*$  descreve um grupo de Lie n\u00e3o compacto e  $H$  o subgrupo compacto m\u00e1ximo, ent\u00e3o podemos escrever

$$\begin{array}{ccc} G^* = P^*H & \text{ou} & G^* = HP^* \\ \text{Decomposi\u00e7\u00e3o em classe} & & \text{Decomposi\u00e7\u00e3o em classe} \\ \text{lateral esquerda} & & \text{lateral direita} \end{array}$$

$$G^* = \text{Exp } g^*$$

$$H = \text{Exp } h$$

$$P^* = \text{Exp } p^* \quad .$$

As decomposições em classes laterais esquerdas e direitas são únicas. Toda operação de grupo é unicamente escrita como o produto de um elemento do subgrupo por um elemento da classe lateral. Uma escolha natural para a representação das classes laterais é  $\text{Exp } \mathfrak{p}^*$ . O espaço definido por  $\text{Exp } \mathfrak{p}^*$  (espaço quociente) é não compacto.

### 2.3 - Propriedades dos Espaços Quocientes

A decomposição de Cartan das álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^*$  tem uma estrutura simples da forma de diagonal de bloco na representação regular ou adjunta.

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{repres. regular}} \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \oplus \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -B^\dagger & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dim \mathfrak{h} \\ \dim \mathfrak{p} \end{array} \quad (2.3.1)$$

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$$

$$\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h} + i\mathfrak{p}$$

$$\mathfrak{g}^* \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \oplus \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^\dagger & 0 \end{array} \right) \quad (2.3.2)$$

As matrizes  $A_1$  e  $A_2$  são antihermitianas, a representativa de  $\mathfrak{p}$  também é antihermitiana mas a representativa de  $i\mathfrak{p}$  é hermitiana. De fato, como a representação regular consiste de matrizes reais,  $A_1$  e  $A_2$  são antisimétricas,  $B$  é real e as representativas de  $\mathfrak{p}$  e  $i\mathfrak{p}$  são, respectivamente, simétricas e antisimétricas.

As matrizes representativas da álgebra  $\mathfrak{g}$ ,  $\Gamma(\mathfrak{g})$ , podem

ser exponenciadas nas representativas matriciais associadas,  $\Gamma$ , do grupo, da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\{\exp g\} & \Gamma\{\exp g^*\} & \text{representação do grupo} \\ \uparrow & \uparrow & \\ \Gamma(g) & \Gamma(g^*) & \text{representação da álgebra} \end{array}$$

A representação da álgebra  $\Gamma(g)$  dá origem às representações associadas  $\Gamma^*(g^*)$  da álgebra  $g^*$  da seguinte maneira:

$$\Gamma(g) = \Gamma(h \oplus p) = \Gamma(h) \oplus \Gamma(p) \longleftrightarrow \Gamma(h) \oplus i\Gamma(p) = \Gamma^*(g^*) .$$

Em geral, em qualquer representação  $\Gamma$  de dimensão finita, as matrizes representativas da subálgebra  $h$  são antihermitianas. As representativas  $\Gamma(p)$  são antihermitianas também pois a álgebra de um grupo compacto é formada de matrizes antihermitianas; as representativas  $\Gamma(ip) = i\Gamma(p)$  são então hermitianas. Matrizes antihermitianas ( $M^\dagger = -M$ ) e hermitianas ( $M^\dagger = M$ ) são mapeadas em matrizes unitárias e hermitianas, respectivamente:

$$(e^M)^\dagger = e^{(M)^\dagger} = e^{\pm M} \begin{cases} \xrightarrow{+} (e^{+M})^{+1} & \text{hermitiana} \\ \xrightarrow{-} (e^{+M})^{-1} & \text{unitária} \end{cases}$$

Existem dois casos em que a representação da subálgebra  $h$  permanece irreduzível, ou seja, não pode ser escrita na forma (2.3.1) de diagonal. Mas, esses casos serão deixados de lado.

As matrizes representativas do subgrupo  $\text{Exp } h$  e as representativas do quociente são dadas por

$$\text{Exp } h = \text{Exp} \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} e^{A_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_2} \end{array} \right) \quad (2.3.3)$$

$$\text{Exp } p = \text{Exp} \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -B^\dagger & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \cos \sqrt{BB^\dagger} & \frac{B \operatorname{sen} \sqrt{B^\dagger B}}{\sqrt{B^\dagger B}} \\ \hline -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{B^\dagger B} B^\dagger}{\sqrt{B^\dagger B}} & \cos \sqrt{B^\dagger B} \end{array} \right) \quad (2.3.4)$$

$$\text{Exp } ip = \text{Exp} \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^\dagger & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \cos h \sqrt{BB^\dagger} & \frac{B \operatorname{sen} h \sqrt{B^\dagger B}}{\sqrt{B^\dagger B}} \\ \hline \frac{B^\dagger \operatorname{sen} h \sqrt{BB^\dagger}}{\sqrt{BB^\dagger}} & \cos h \sqrt{B^\dagger B} \end{array} \right) \quad (2.3.5)$$

As matrizes  $B^\dagger B$  e  $BB^\dagger$  são hermitianas com autovalores não negativos. De fato, seus autovalores não nulos são idênticos. Então todas as raízes são bem definidas e podem ser calculadas explicitamente.

As identidades trigonométricas válidas para funções hiperbólicas são válidas também para as submatrizes que aparecem em (2.3.5). Se  $B$  é uma matriz  $m \times n$ :

$$\begin{aligned} \cosh^2 (B^\dagger B)^{1/2} - \left[ \frac{B \operatorname{senh} (B B)^{1/2}}{(B^\dagger B)^{1/2}} \right]^\dagger \left[ \frac{B \operatorname{senh} (B^\dagger B)^{1/2}}{(B^\dagger B)^{1/2}} \right] &= \\ &= \cosh^2 (B^\dagger B)^{1/2} - \operatorname{senh}^2 (B^\dagger B)^{1/2} = I_n \quad . \end{aligned}$$

Similarmente

$$\cosh^2 (BB^\dagger)^{1/2} - \left[ \frac{B \operatorname{senh} (BB^\dagger)^{1/2}}{(BB^\dagger)^{1/2}} \right] \left[ \frac{B \operatorname{senh} (BB^\dagger)^{1/2}}{(BB^\dagger)^{1/2}} \right]^\dagger = I_m \quad .$$

A relação (2.3.5) mostra que as propriedades da submatriz  $B$ , que caracterizam o subespaço complementar  $\mathfrak{p}$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}^*$  são transferidas diretamente para os representantes de quociente pelo mapeamento exponencial. Ou seja, um ponto  $B$  da álgebra  $\mathfrak{p}$  é representado através da exponenciação, no espaço quociente  $G^*/H$  por

$$B \xrightarrow{\text{Exp.}} \frac{B \sinh (B^\dagger B)^{1/2}}{(B^\dagger B)^{1/2}} .$$

Mas essa relação é muito inconveniente para descrever os pontos em  $G^*/H$  pois envolve uma função transcendental e raiz quadrada. Para evitar essas dificuldades, descrevemos os pontos em  $G^*/H$  pela submatriz  $m \times n$   $X$ :

$$X = \frac{B \sinh (B^\dagger B)^{1/2}}{(B^\dagger B)^{1/2}} \quad (2.3.6)$$

Então, a matriz representativa de quociente é dada em termos de  $X$  por:

$$G^*/H = \left( \begin{array}{c|c} (I_m + XX^\dagger)^{1/2} & X \\ \hline X^\dagger & (I_n + X^\dagger X)^{1/2} \end{array} \right) \quad (2.3.7)$$

Como  $X^\dagger X$  e  $XX^\dagger$  têm autovalores não negativos, as submatrizes da diagonal são bem definidas e nunca são singulares.

Para o espaço dual compacto de  $G^*/H$ ,  $G/H = \text{Exp } \mathfrak{p}$ , fazemos um cálculo similar onde a maior modificação é substituir as funções hiperbólicas por funções circulares. Os representantes de quociente são:

A relação (2.3.5) mostra que as propriedades de Lie  $g^*$  são transferidas diretamente para os espaços de quociente pelo mapeamento exponencial. Ou seja, um ponto B da álgebra  $ip$  é representado através da exponenciação, no espaço quociente  $G^*/H$  por

$$B \xrightarrow{\text{Exp.}} \frac{B \sinh \frac{(B^t B)^{1/2}}{(B^t B)^{1/2}}}{(B^t B)^{1/2}} .$$

Mas essa relação é muito inconveniente para descrever os pontos em  $G^*/H$  pois envolve uma função transcendental e raiz quadrada. Para evitar essas dificuldades, descrevemos os pontos em  $G^*/H$  pela submatriz  $m \times n$   $X$ :

$$X = \frac{B \sinh \frac{(B^t B)^{1/2}}{(B^t B)^{1/2}}}{(B^t B)^{1/2}} \quad (2.3.6)$$

Então, a matriz representativa de quociente é dada em termos de  $X$  por:

$$G^*/H = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{(I_m + XX^t)^{1/2}}{X^t} & X \\ \hline & \frac{(I_n + X^t X)^{1/2}}{} \end{array} \right] \quad (2.3.7)$$

Como  $X^t X$  e  $XX^t$  têm autovalores não negativos, as submatrizes da diagonal são bem definidas e nunca são singulares.

Para o espaço dual compacto de  $G^*/H$ ,  $G/H = \text{Exp } p$ , fazemos um cálculo similar onde a maior modificação é substituir as funções hiperbólicas por funções circulares. Os representativos de quociente são:

$$G/H = \left( \begin{array}{c|c} (I_m - XX^\dagger)^{1/2} & X \\ \hline -X^\dagger & (I_n - X^\dagger X)^{1/2} \end{array} \right) . \quad (2.3.8)$$

O domínio dos parâmetros que descrevem a submatriz  $X$  é determinado pelo requerimento que os representativos de quociente permaneçam elementos do grupo. Explicitamente:

$$0 \leq X^\dagger X \leq I_n .$$

A desigualdade se refere aos autovalores de  $X^\dagger X$ . Como  $X^\dagger X$  e  $XX^\dagger$  têm o mesmo conjunto não nulo de autovalores

$$0 \leq X^\dagger X \leq I_n \iff 0 \leq XX^\dagger \leq I_m .$$

O grupo  $G$  age no espaço de pontos  $G/H$  e mapeia ele nele mesmo. Em particular, os representativos de quociente  $c$  e  $G/H \subset G$  mapeiam a origem de  $G/H$  no ponto  $c$  de  $G/H$ . Se  $c$  é um ponto qualquer de  $G/H$ , ele pode ser mapeado em qualquer outro ponto  $c'$  de  $G/H$  por qualquer operação de grupo.

$$(c'c^{-1})c \rightarrow c$$

$$c'c^{-1} = g \in G$$

Além disso, a única operação do grupo que deixa todo ponto  $c$  fixo é a identidade

$$gc = c \quad \forall c \in G/H \implies g = I .$$

Um grupo  $G$  age transitivamente em um espaço  $M$  se, para todo par de pontos  $p, q \in M$ , existe uma operação de grupo  $g \in G$

com a propriedade  $g:p \rightarrow q$ .

$$P \xrightarrow{g} q = gp \quad \begin{array}{l} \forall \text{ par } p, q \text{ e } M \\ \text{para algum } g \text{ e } G \end{array} .$$

Um grupo  $G$  age efetivamente em um espaço  $M$  se a operação identidade é a única operação do grupo que deixa todo ponto  $p$  e  $M$  fixo:

$$gp = p \quad \forall p \text{ e } M \Rightarrow g = I \quad .$$

A órbita do ponto  $p$  e  $M$  sob o grupo  $G$  é o conjunto de todos os pontos  $q$  e  $M$  que podem ser atingidos aplicando-se alguma operação de grupo  $g$  e  $G$  ao ponto  $p$ .

A ação do grupo  $G$  no espaço  $G/H$  é dada simplesmente por

$$gc = c'h \quad \begin{cases} g \in G \\ c, c' \in G/H \\ h \in H \end{cases} \quad . \quad (2.3.9)$$

Como o produto de dois elementos em  $G$  ( $g$  e  $c$ ) é um elemento em  $G$ , esse elemento pode ser escrito unicamente em uma decomposição de classe lateral. Então, o mapeamento de  $G/H$  nele mesmo é dado por

$$\begin{array}{ccc} G: G/H & \longrightarrow & G/H \\ c & \longrightarrow & c' \quad c, c' \in G/H \end{array} \quad (2.3.10)$$

O subconjunto de elementos de  $G$  que deixa qualquer ponto fixo forma um grupo, chamado grupo de estabilidade  $H(c)$  de  $c$ :

$$h \in H(c)$$

$$hc = c \quad c \in G/H \quad .$$



Vamos agora determinar explicitamente a estrutura do mapeamento de  $G/H$  nele mesmo sob um elemento arbitrário do grupo  $G$ . Vamos fazer isso somente para os quocientes que são representados por matrizes fora da diagonal; além disso, vamos fazer o cálculo para a forma real não compacta  $G^*$ ; o cálculo para a forma compacta  $G$  está relacionado simplesmente por uma mudança de sinal.

Um elemento arbitrário de  $G^*$  tem a estrutura de bloco:

$$g \in G^* = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) . \quad (2.3.11)$$

Existem várias relações entre as submatrizes  $A, B, C, D$  dependendo de qual grupo clássico  $G^*$  está sendo investigado. Um representativo de quociente em  $G^*/H$  tem a forma:

$$c \in G^*/H = \left( \begin{array}{c|c} W & X \\ \hline X^\dagger & Y \end{array} \right) \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} W &= (I_m + XX^\dagger)^{1/2} \\ Y &= (I_n + X^\dagger X)^{1/2} . \end{aligned}$$

Como os autovalores de  $XX^\dagger$  são não negativos, as submatrizes quadradas  $W$  e  $Y$  são hermitianas e não singulares; suas inversas sempre existem.

A ação de  $G$  em  $G/H$ , dada abstratamente em (2.3.10) é dada concretamente para quocientes fora da diagonal, pela multiplicação matricial

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} W & X \\ \hline X^\dagger & Y \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} W' & X' \\ \hline X'^\dagger & Y' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} U(m) & 0 \\ \hline 0 & U(n) \end{array} \right) . \quad (2.3.13)$$

Como os representativos de quociente são as submatrizes  $X$ , é necessário resolver (2.3.13) para  $X'$  em termos de  $X, A, B, C, D$ . Isso é feito resolvendo-se a equação

$$\left( \begin{array}{c|c} * & AX+BY \\ \hline * & CX+DY \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} * & X'U(n) \\ \hline * & Y'U(n) \end{array} \right) \quad (2.3.14)$$

A solução de (2.3.14) é muito complicada devido à presença da operação de grupo  $U(n)$ . Para contornar essa dificuldade, observemos que existe uma correspondência 1-1 entre os representativos de quociente e as submatrizes  $Z$  definidas por

$$\begin{aligned} Z &= XY^{-1} = X (I_n + X^\dagger X)^{-1/2} \\ X &= Z (I_n - Z^\dagger Z)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Como a correspondência entre  $X$  e  $Z$  é 1-1, podemos tomar  $Z$  como representativo de quociente. Todos os cálculos podem ser feitos em termos das variáveis  $Z$  ao invés de  $X$ .

Para os quocientes não compactos  $G^*/H$ ,  $X$  é ilimitado e  $Z$  é limitado:

$$\begin{aligned} Y^\dagger Y - X^\dagger X &= I_n \\ I_n - (XY^{-1})^\dagger (XY^{-1}) &= (Y^{-1})^\dagger (Y^{-1}) \\ 0 \leq X^\dagger X < \infty & \quad e \quad 0 \leq Z^\dagger Z < 1 \end{aligned}$$

Para os quocientes compactos duais  $G/H$ ,  $X$  é limitado e, portanto,  $Z$  é ilimitado

$$0 \leq X^\dagger X < 1 \iff 0 \leq Z^\dagger Z < \infty$$

Os representativos de quociente estão relacionados projetivamente. Portanto, as coordenadas  $Z$  são chamadas coordenadas projetivas do quociente  $G/H$  ou  $G^*/H$ .

A razão para a introdução de representativos projetivos do quociente fica aparente olhando-se a expressão (2.3.14). As propriedades de transformação de  $Z$  podem ser calculadas explicitamente e além disso são surpreendentemente simples:

$$(AX+BY)(CX+DY)^{-1} = X'U(n) \left[ Y'U(n) \right]^{-1}$$

$$\left\{ (AXY^{-1} + B)Y \right\} \left\{ (CXY^{-1} + D)Y \right\}^{-1} = X' \left\{ U(n)U^{-1}(n) \right\} Y'^{-1}$$

$$(AZ+B)(CZ+D)^{-1} = Z' \tag{2.3.16}$$

Os representativos projetivos de quociente sofrem transformações fracionais lineares sob uma operação arbitrária de grupo. Essas propriedades de transformação projetivas valem para todos os quocientes fora da diagonal, isto é, elas valem para todos os espaços Riemannianos simétricos exceto dois.

Apesar da transformação (2.3.16) ser simples, ela é não linear. As propriedades de transformação de  $X$ , que podem ser obtidas de (2.3.15) e (2.3.16), são muito complicadas. É possível descrever os pontos em  $G^*/H$  de modo que eles tenham propriedades de transformação lineares sob a ação de  $G^*$ . No entanto, isso só pode ser feito às custas de uma relação 1-1 entre os representativos e os pontos em  $G/H$ .

Como cada ponto em  $G^*/H$  é descrito unicamente pela submatriz  $X$ , ele também é descrito unicamente pela matriz

$$T = \left\{ \frac{X}{Y} \right\} \quad (2.3.17)$$

onde

$$Y = (I_n + X^\dagger X)^{1/2} \quad \text{em } G^* \quad (2.3.18)$$

ou

$$Y = (I_n - X^\dagger X)^{1/2} \quad \text{em } G \quad (2.3.18')$$

A submatriz T obedece todas as condições que ela herda de  $G^*$  (ou de  $G$ ).

Se agora relaxarmos o vínculo (2.3.18), existe uma correspondência muitos  $\rightarrow 1$  entre a matriz T e os pontos em  $G^*/H$ ; em compensação por essa não unicidade as propriedades de transformação de T são lineares.

$$T = \left\{ \frac{X}{Y} \right\} \rightarrow T' = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left\{ \frac{X}{Y} \right\} = \left\{ \frac{X'}{Y'} \right\}$$

$$\left\{ \frac{X}{Y} \right\} = \begin{cases} X' = AX + BY \\ Y' = CX + DY \end{cases} \quad (2.3.19)$$

As coordenadas T são chamadas coordenadas homogêneas de um ponto em  $G^*/H$ . As coordenadas  $Z = XY^{-1}$  são às vezes chamadas coordenadas inhomogêneas.

Existe ainda um quarto mecanismo para classificar os pontos no espaço  $G^*/H$ ; quando aplicável ele é muito útil pois tem aplicação direta a problemas físicos. Para ver como é essa classificação é necessário apenas perceber que não precisamos nos restringir às submatrizes em forma de bloco para descrever os representantes de quociente.

Como as coordenadas T dão uma correspondência de muitos  $\rightarrow 1$  pontos em  $G^*/H$ , podemos encontrar uma correspondência

idades de transformação simples sob esse grupo. Então, no estudo de teorias de campo fenomenológicas, devemos observar as propriedades de transformação dos campos sob tais grupos.

Quando os campos se transformam linearmente, a classificação de todas as leis de transformação possíveis se reduz ao problema usual de teoria de representação. No entanto, para a maioria das teorias fenomenológicas, a situação é mais complicada: os campos se transformam linearmente somente sob um certo subgrupo. Então temos o problema de realizações não lineares que se tornam lineares quando restritas a um subgrupo.

Consideremos então um grupo de Lie  $G$  e um subgrupo  $H$ . Vamos chamar de  $T_m$  os geradores de  $H$ . Assumimos que os geradores remanescentes  $S_i$  podem ser escolhidos de modo que eles formem uma representação de  $H$ , ou seja, o comutador  $[T_m, S_i]$  deve ser uma combinação linear só dos  $S_i$ . Vimos na seção anterior que a decomposição de Cartan, por exemplo, atende a esses requisitos, mas agora não faremos nenhuma suposição sobre o comutador  $[S_i, S_j]$ .

Um elemento  $g$  do grupo  $G$  pode ser representado (unicamente) na forma

$$g = e^{\xi \cdot S} \cdot S_h \quad , \quad \begin{aligned} h &\in H \\ \xi \cdot S &= \xi^i S_i \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Como já vimos anteriormente,  $\xi^i$  parametriza o espaço quociente  $G/H$ ; essa parametrização exponencial é conveniente, mas qualquer outra pode ser usada. Não especificaremos aqui a parametrização de  $h$ . Definimos o efeito de um elemento do grupo  $g_0$  no espaço quociente por

$$g_0 g = e^{\xi' \cdot S} \cdot S_{h'} \quad (2.4.2)$$

1-1 escolhendo um subconjunto de elementos de  $T$ . Uma escolha óbvia é a submatriz  $X$ ; outras escolhas incluem algumas linhas  $(p)$  da submatriz  $X$  e as linhas adicionais  $(m-p)$  de  $Y$ . Essas linhas devem ser escolhidas de tal modo que seja preservada uma correspondência 1-1 entre as novas coordenadas e  $X$  ou  $Z$ .

Neste trabalho estamos particularmente interessados nas variedades Grassmanianas. As Grassmanianas de um espaço  $K$ -linear ( $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Q}$ ) de dimensão finita é o conjunto  $G_K(V)$  que consiste de todos os subespaços lineares de  $V$  de uma dada dimensão  $k$ , com  $k \leq V$ . Um exemplo importante é o Grassmaniano  $G_1(V)$  de linhas em  $V$  através da origem, também chamado de espaço projetivo do espaço linear  $V$ .

O espaço projetivo de um espaço linear  $(n+1)$  dimensional  $V$  é a união de um conjunto de espaços afins  $n$ -dimensionais, que se sobrepõe. Tal espaço é  $n$ -dimensional, o espaço projetivo  $G_1(K^{n+1})$  é também denotado por  $KP^n$  ou  $P^n(K)$ , ( $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Q}$ ).

Essas variedades Grassmanianas podem ser escritas como espaços quocientes <sup>(41)</sup>, aplicando-se portanto todos os resultados desta seção.

#### 2.4 - Realizações Não Lineares de Simetria

Em muitas teorias de campo fenomenológicas, a densidade Lagrangeana não é uma função arbitrária dos campos. Os campos se transformam de alguma maneira bem definida sob algum grupo de simetria interna e a densidade Lagrangeana consiste de uma parte principal que é invariante sob esse grupo e de uma parte de quebra de simetria que usualmente se assume como tendo propri



ou

$$g_0 e^{\xi \cdot S} = e^{\xi' \cdot S} h_1 \quad (2.4.3)$$

$$h_1 = h' h^{-1} \quad (2.4.4)$$

Vemos claramente que  $\xi'$  e  $h_1$  são funções de  $g_0$  e  $\xi$ .

Vamos olhar agora para a forma infinitesimal. Fazendo em (2.4.1),  $g = I$ , obtemos

$$I = e^{\xi \cdot S} h \Rightarrow \begin{cases} h = I \\ \xi = 0 \end{cases}$$

E para  $g$  próximo da identidade

$$g = I + dg \Rightarrow \begin{cases} h = I + dh \\ \xi^i = 0 + d\xi^i \end{cases}$$

$$g = I + dg = e^{d\xi^i \cdot S_i} (I + dh) \approx I + dh + (d\xi^i) S_i + \dots \quad (2.4.5)$$

Seja  $g_0$  infinitesimal

$$g_0 = I + d\xi_0^i \cdot S_i + dh_0 \quad (2.4.6)$$

Se  $g_0 = I$  de (2.4.3) segue que

$$e^{\xi \cdot S} = e^{\xi' \cdot S} h_1 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = I \\ \xi' = \xi \end{cases} .$$

Então, para  $g_0$  infinitesimal

$$(I + d\xi_0^i S_i + dh_0) e^{\xi \cdot S} = (e^{\xi \cdot S} + \delta(e^{\xi \cdot S})) (I + dh_1)$$

$$e^{\xi \cdot S} + (d\xi_0^i S_i + dh_0) e^{\xi \cdot S} = e^{\xi \cdot S} + \delta(e^{\xi \cdot S}) + e^{\xi \cdot S} dh_1 .$$

Substituindo a equação (2.4.6)

$$(g_0 - I)e^{\xi \cdot S} = \delta(e^{\xi \cdot S}) + e^{\xi \cdot S}(h_1 - I)$$

Multiplicando por  $e^{-\xi \cdot S}$ , obtemos

$$e^{-\xi \cdot S}(g_0 - I)e^{\xi \cdot S} - e^{-\xi \cdot S}\delta(e^{\xi \cdot S}) = h_1 - I \quad (2.4.7)$$

O lado direito da eq. (2.4.7) é um gerador de H pois se  $T_m$  são os geradores de H

$$h = e^{u \cdot T} \approx (I + du \cdot T) \quad .$$

Vamos considerar primeiro o caso no qual  $g_0 = h_0 \in H$ .

De (2.4.3)

$$\begin{aligned} h_0 e^{\xi \cdot S} &= e^{\xi' \cdot S} h_1 \\ h_0 e^{\xi \cdot S} h_0^{-1} h_0 &= e^{\xi' \cdot S} h_1 \\ e^{\xi \cdot h_0 S} h_0^{-1} h_0 &= e^{\xi' \cdot S} h_1 \quad . \end{aligned}$$

Como os  $S_i$  formam uma representação de H, isso implica que

$$e^{\xi' \cdot S} = h_0 e^{\xi \cdot S} h_0^{-1} \quad (2.4.8)$$

e

$$h_1 = h_0 \quad ; \quad h' = h_0 h \quad .$$

A transformação de  $\xi$  para  $\xi'$  dada por (2.4.8) é linear.

Consideremos agora  $g_0 \in G$ ,  $g_0 \notin H$ ; então

$$g_0 = e^{\xi_0 \cdot S} \quad . \quad (2.4.9)$$



Neste caso, a eq. (2.4.3) fica:

$$e^{\xi_0 \cdot S} e^{\xi \cdot S} = e^{\xi' \cdot S} h_1 \quad (2.4.10)$$

Como  $e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots}$  e  $[S_i, S_j]$  é, no caso geral, uma combinação linear de  $S_K$  e  $T_m$ , então a eq. (2.4.10) é uma equação não linear inhomogênea em  $\xi$ .

A forma infinitesimal (2.4.7) fica:

$$e^{-\xi \cdot S} (e^{\xi_0 \cdot S} - I) e^{\xi \cdot S} - e^{-\xi \cdot S} \delta(e^{\xi \cdot S}) = h_1 - I$$

Desenvolvendo  $e^{\xi_0 \cdot S}$

$$e^{-\xi \cdot S} \xi_0 \cdot S e^{\xi \cdot S} - e^{-\xi \cdot S} \delta(e^{\xi \cdot S}) = h_1 - I \quad (2.4.11)$$

O lado esquerdo da equação (2.4.11) pode ser calculado usando-se a álgebra do grupo; como o resultado deve ser um gerador de H, devemos igualar a zero o coeficiente de  $S_i$ ; dessa maneira, encontramos uma equação através da qual  $\delta\xi_i$  pode ser calculado.

Vamos agora estudar rapidamente o problema da construção de lagrangeanas fenomenológicas através da introdução de derivadas covariantes.

Supondo agora que fizemos uma decomposição de Cartan na álgebra de Lie  $g$  do grupo G, escrevemos qualquer elemento  $g_0$  do grupo G como

$$g_0 = e^{\xi \cdot S} e^{u \cdot V}$$

onde  $V_i$  são os geradores do subgrupo H.

Seja

$$h: \psi \rightarrow D(h)\psi \quad h \in H$$

uma representação linear (unitária) do subgrupo H.

Uma realização não linear de G que se torna uma representação linear quando restrita ao subgrupo H é dada em coordenadas  $(\xi, \psi)$  por

$$(\xi, \psi) \rightarrow (\xi', \psi') = g(\xi, \psi) \quad (2.4.12)$$

onde

$$ge^{\xi \cdot S} = e^{\xi' \cdot S} e^{u' \cdot V} \quad (2.4.13)$$

e

$$\psi' = D(e^{u' \cdot V})\psi \quad (2.4.14)$$

onde  $D(h)$  é qualquer representação linear do subgrupo H que, se for redutível, assumimos estar escrita em forma totalmente reduzida. O resultado principal do trabalho de Coleman et al. <sup>(4)</sup> é que, por uma redefinição de coordenadas, qualquer realização não linear de G que é linear em H pode ser escrita na forma acima. A eq. (2.4.14) também pode ser escrita como

$$\psi' = e^{u' \cdot T} \xi \quad (2.4.15)$$

onde  $T_i$  são as matrizes que representam os geradores  $V_i$  na representação  $D(h)$ . Se  $g = h \in H$ , então a transformação dada pelas equações (2.4.12)-(2.4.14) é linear

$$(\xi, \psi) \rightarrow (\xi', \psi') = (D^{(b)}(h)\xi, D(h)\psi) \quad (2.4.16)$$

onde  $D^{(b)}(h)$  é a representação linear de H induzida em  $\xi$  por

$$h e^{\xi \cdot S} h^{-1} = e^{\xi' \cdot S} .$$

Agora vamos mostrar como as coordenadas padrão  $(\xi, \psi)$  podem ser introduzidas na variedade na qual o grupo opera. Primeiro encontramos um conjunto de coordenadas  $(\xi, \Psi)$  que se transforma linearmente sob o subgrupo H como na equação (2.4.16), isto é

$$h: (\xi, \Psi) \rightarrow (D^{(b)}(h)\xi, D(h)\Psi) .$$

As coordenadas padrão do ponto  $(\xi, \Psi)$  são então definidas como  $(\xi, \psi)$ , onde  $\psi$  é definida por:

$$e^{-\xi \cdot S}(\xi, \psi) = (0, \psi) . \quad (2.4.17)$$

Pode-se mostrar que essas coordenadas padrão se transformam sob G de acordo com as equações (2.4.12)-(2.4.14); em particular elas satisfazem à equação (2.4.17).

A densidade Lagrangeana é uma função dos campos e seus gradientes. As propriedades de transformação dos gradientes  $\partial_\mu \psi$  e  $\partial_\mu \xi$  são naturalmente determinadas pelas propriedades de transformação dos campos; portanto, o grupo pode ser realizado por transformações na variedade  $(\xi, \psi, \partial_\mu \xi, \partial_\mu \psi)$ . Essas transformações não estão em forma padrão mas como os gradientes se transformam linearmente sob o subgrupo H, eles podem ser escritos em forma padrão por uma mudança de coordenadas. Vamos chamar essas novas coordenadas que se transformam de forma padrão de  $(\xi, \psi, D_\mu \xi, D_\mu \psi)$ . Pela equação (2.4.17) elas são dadas por

$$e^{-\xi \cdot S}(\xi, \psi, \partial_\mu \xi, \partial_\mu \psi) = (0, \psi, D_\mu \xi, D_\mu \psi) . \quad (2.4.18)$$

Essas novas coordenadas  $D_\mu \xi$ ,  $D_\mu \psi$  são uma espécie de "derivadas covariantes". Elas foram construídas de modo que sua transformação sob o grupo G seja análoga à equação (2.4.14), isto é,

$$(D_\mu \xi)' = D^{(b)}(e^{u' \cdot V})(D_\mu \xi) \quad (2.4.19)$$

$$(D_\mu \psi)' = D(e^{u' \cdot V})(D_\mu \psi) \quad (2.4.20)$$

Vamos agora procurar expressões explícitas para as derivadas covariantes. Precisamos primeiro verificar como os gradientes dos campos se transformam. Observamos que, correspondendo a um deslocamento infinitesimal  $dx_\mu$  no espaço-tempo temos, pela equação (2.4.13)

$$g(de^{\xi \cdot S}) = (de^{\xi' \cdot S}) e^{u' \cdot V} + e^{\xi' \cdot S} d(e^{u' \cdot V}) \quad (2.4.21)$$

e, de acordo com a equação (2.4.15)

$$d\psi' = e^{u' \cdot T} d\psi + (d e^{u' \cdot T})\psi \quad (2.4.22)$$

Essas equações podem ser usadas para a obtenção explícita das leis de transformação dos gradientes dos campos. Pela eq. (2.4.18) pegamos agora para  $g$  a transformação dependente de  $\xi$

$$g = e^{-\xi \cdot S} \quad , \quad (2.4.23)$$

cujo efeito é

$$\xi' = 0, \quad u' = 0, \quad \psi' = \psi .$$

Neste caso

$$d e^{\xi'.S} = e^{(\xi'+d\xi').S} - e^{\xi'.S} = e^{d\xi'.S-1} = d\xi'.S$$

e similarmente

$$d e^{u'.V} = du'.V \quad .$$

A equação (2.4.21) agora toma a seguinte forma

$$e^{-\xi.S} d e^{\xi.S} = du'.V + d\xi'.S \quad ,$$

que pode ser usada para calcular  $du'$  e  $d\xi'$ ; a equação (2.4.22) fica:

$$d\psi' = d\psi + du'.T \psi \quad .$$

Então, as derivadas covariantes são

$$D_{\mu} \xi = P_{\mu} \quad (2.4.24)$$

e

$$D_{\mu} \psi = \partial_{\mu} \psi + v_{\mu}.T\psi \quad (2.4.25)$$

onde  $P_{\mu}$  e  $v_{\mu}$  são definidos por

$$e^{-\xi.S} \partial_{\mu} e^{\xi.S} = v_{\mu}.V + P_{\mu}.S \quad . \quad (2.4.26)$$

Pode-se ver claramente que  $D_{\mu} \xi$  e  $D_{\mu} \psi$  não são gradientes.

Agora pode-se encontrar uma forma geral para uma Lagrangeana invariante. Primeiro observamos, usando o elemento de grupo (2.4.23), que uma Lagrangeana invariante deve satisfazer

$$L(\xi, \psi, \partial_{\mu} \xi, \partial_{\mu} \psi) = L(0, \psi, D_{\mu} \xi, D_{\mu} \psi) \quad .$$

Por outro lado, das leis de transformação para o campo  $\psi$  e para

as derivadas covariantes segue-se imediatamente que uma função de  $\psi$ ,  $D_\mu \xi$  e  $D_\mu \psi$  é invariante sob  $G$ , se e só se ela for construída como sendo superficialmente invariante sob o subgrupo  $H$ .

## CAPÍTULO 3

### O MODELO $U(n,p)$

#### 3.1 - Equações de Movimento

Escrevemos a ação para o modelo  $\sigma$  não linear  $U(n,p)$  em termos de campos escalares complexos  $Z_a^\alpha(x^0, x^1)$  ( $(a=1, \dots, n); (\alpha=1, \dots, p)$ ), no espaço Euclideano a duas dimensões, que tomam valores na variedade de Grassman  $U(n,p) = U(n) / [U(p) \times U(n-p)]$ . No caso  $n=1$ ,  $U(n,1)$  é o espaço projetivo complexo de dimensão  $n-1$  ( $cp^{n-1}$ ).

Os campos estão sujeitos a vínculos

$$Z^\dagger Z = I_p \quad (3.1.1)$$

onde  $I_p$  é a matriz identidade  $p \times p$  e  $Z$  e  $Z^\dagger$  são matrizes retangulares

$$(Z)_{a\alpha} \equiv Z_a^\alpha \quad (3.1.2)$$

e

$$(Z^\dagger)_{\alpha a} \equiv Z_a^{\alpha*}$$

$$S = \int L d^2x \quad (3.1.3)$$

A densidade Lagrangeana é definida como

$$L = \text{Tr} \left[ \overline{(\partial_\mu Z)^\dagger} (\partial_\mu Z) + (Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 \right] = \text{Tr} (D_\mu Z)^\dagger (D_\mu Z) \quad (3.1.4)$$

onde introduzimos um potencial de Gauge matricial  $(A_\mu)_{\alpha\beta}$  através de

$$D_\mu Z \equiv \partial_\mu Z + iZA_\mu \quad (3.1.5)$$

$$A_\mu = iZ^\dagger \partial_\mu Z = A_\mu^\dagger \quad (3.1.6)$$

A Lagrangeana é invariante sob a transformação local

$$Z \rightarrow ZU \quad U = U(x_\mu) \text{ e } U(p)$$

$$A_\mu \rightarrow U^\dagger A_\mu U + i U^\dagger \partial_\mu U$$

$$D_\mu Z \rightarrow (D_\mu Z)U$$

$$D_\mu D_\nu Z = \partial_\mu (D_\nu Z) + i(D_\nu Z)A_\mu \rightarrow (D_\mu D_\nu Z)U$$

e a Lagrangeana também é invariante sob a transformação global

$$Z \rightarrow VZ \quad V \in U(n)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu$$

$$D_\mu Z \rightarrow V D_\mu Z$$

Vamos agora derivar as equações de movimento . Devido aos vínculos aos quais os campos estão sujeitos devemos introduzir campos multiplicadores de Lagrange; escrevendo a equação (3.1.4) em termos das componentes, fica

$$L = (\partial_\mu Z_a^{\alpha*}) (\partial_\mu Z_a^\alpha) + Z_b^{\alpha*} (\partial_\mu Z_b^\gamma) Z_c^{\gamma*} (\partial_\mu Z_c^\alpha) \quad ; \quad (3.1.7)$$

$$Z_a^{\alpha*} Z_a^\beta = \delta^{\alpha\beta} \quad ; \quad (3.1.8)$$

$$L' = L + \lambda_{\alpha\beta} (Z_a^{\alpha*} Z_a^\beta - \delta^{\alpha\beta}) \quad . \quad (3.1.9)$$



Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} - \partial_{\mu} \frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\mu} \lambda_{\alpha\beta})} = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial Z_e^{\sigma}} - \partial_{\mu} \frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma})} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial Z_e^{\sigma^*}} - \partial_{\mu} \frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma^*})} = 0 \quad (3.1.12)$$

Da equação (3.1.10) reobtemos a equação (3.1.8)

$$\frac{\partial L'}{\partial Z_e^{\sigma}} = \lambda_{\alpha\sigma} Z_e^{\alpha^*}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma})} = \partial_{\mu} Z_e^{\sigma^*} + Z_e^{\alpha^*} Z_c^{\sigma^*} (\partial_{\mu} Z_c^{\alpha}) + Z_b^{\sigma^*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_e^{\gamma^*}$$

Substituindo na equação (3.1.11)

$$\lambda_{\alpha\sigma} Z_e^{\alpha^*} - \partial_{\mu} \left[ \partial_{\mu} Z_e^{\sigma^*} + Z_e^{\alpha^*} Z_c^{\sigma^*} (\partial_{\mu} Z_c^{\alpha}) + Z_b^{\sigma^*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_e^{\gamma^*} \right] = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial Z_e^{\sigma^*}} = (\partial_{\mu} Z_e^{\gamma}) Z_c^{\gamma^*} \partial_{\mu} Z_c^{\sigma} + Z_b^{\alpha^*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) (\partial_{\mu} Z_e^{\alpha}) + \lambda_{\sigma\beta} Z_e^{\beta}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma^*})} = \partial_{\mu} Z_e^{\sigma}$$

Substituindo na equação (3.1.12)

$$(\partial_{\mu} Z_e^{\gamma}) Z_c^{\gamma^*} (\partial_{\mu} Z_c^{\sigma}) + Z_b^{\alpha^*} (\partial_{\mu} Z_b^{\sigma}) (\partial_{\mu} Z_e^{\alpha}) + \lambda_{\sigma\beta} Z_e^{\beta} - \partial_{\mu} (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma}) = 0 \quad (3.1.14)$$

Multiplicando a equação (3.1.13) por  $Z_e^{\delta}$  à direita e a

equação (3.1.14) por  $Z_e^{\delta*}$  à esquerda

$$\lambda_{\alpha\sigma} Z_e^{\alpha*} Z_e^{\delta} - \left[ \partial_{\mu} (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma*} + Z_e^{\alpha*} Z_c^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\alpha})) + Z_b^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_e^{\gamma*} \right] Z_e^{\delta} = 0 \quad (3.1.15)$$

$$Z_e^{\delta*} (\partial_{\mu} Z_e^{\gamma}) Z_c^{\gamma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\sigma}) + Z_e^{\delta*} Z_b^{\alpha*} (\partial_{\mu} Z_b^{\sigma}) (\partial_{\mu} Z_e^{\alpha}) + Z_e^{\delta*} Z_e^{\beta} \lambda_{\sigma\beta} - \\ - Z_e^{\delta*} (\partial_{\mu} \partial_{\mu} Z_e^{\sigma}) = 0 \quad (3.1.16)$$

Da equação (3.1.15) segue que:

$$\lambda_{\alpha\sigma} \delta_{\alpha\delta} - \left[ \partial_{\mu} (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma*} + Z_e^{\alpha*} Z_c^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\alpha})) + Z_b^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_e^{\gamma*} \right] Z_e^{\delta} = 0$$

$$\lambda_{\delta\sigma} = \left[ \partial_{\mu} (\partial_{\mu} Z_e^{\sigma*} + Z_e^{\alpha*} Z_c^{\gamma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\alpha})) + Z_b^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_e^{\gamma*} \right] Z_e^{\delta} \quad (3.1.17)$$

E da equação (3.1.16)

$$\lambda_{\sigma\beta} \delta_{\delta\beta} - Z_e^{\delta*} (\partial_{\mu} \partial_{\mu} Z_e^{\sigma}) + Z_e^{\delta*} (\partial_{\mu} Z_e^{\gamma}) Z_c^{\gamma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\sigma}) + Z_e^{\delta*} Z_b^{\alpha*} \cdot \\ \cdot (\partial_{\mu} Z_b^{\sigma}) (\partial_{\mu} Z_e^{\alpha}) = 0$$

$$\lambda_{\delta\sigma} = Z_e^{\sigma*} (\partial_{\mu} \partial_{\mu} Z_e^{\delta}) - Z_e^{\sigma*} (\partial_{\mu} Z_e^{\gamma}) Z_c^{\gamma*} (\partial_{\mu} Z_c^{\delta}) - Z_e^{\sigma*} Z_b^{\alpha*} \cdot \\ \cdot (\partial_{\mu} Z_b^{\delta}) (\partial_{\mu} Z_e^{\alpha}) \quad (3.1.18)$$

Voltando à notação matricial as equações (3.1.17) e (3.1.18) ficam:

$$\lambda = (\square Z^{\dagger}) Z + 2 \left[ \partial_{\mu} (Z^{\dagger} (\partial_{\mu} Z) Z^{\dagger}) \right] Z \quad ,$$

$$\lambda = (\square Z^\dagger)Z + 2(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z) + 2Z^\dagger(\square Z) + 2Z^\dagger(\partial_\mu Z)(\partial_\mu Z^\dagger)Z \quad , \quad (3.1.19)$$

$$\lambda = Z^\dagger \square Z - 2Z^\dagger(\partial_\mu Z)Z^\dagger(\partial_\mu Z) \quad (3.1.20)$$

É fácil verificar que as equações (3.1.19) e (3.1.20) são consistentes; assim sendo, substituímos o valor de  $\lambda$  (equação (3.1.17)) na equação (3.1.14) e obtemos as equações de movimento para  $Z$ :

$$\begin{aligned} & (\partial_\mu Z_a^\gamma)Z_c^{\gamma*}(\partial_\mu Z_c^\sigma) + Z_b^{\alpha*}(\partial_\mu Z_b^\sigma)\partial_\mu Z_a^\alpha + \left[ Z_e^{\beta*}\partial_\mu(\partial_\mu Z_e^\sigma) - Z_e^{\beta*}(\partial_\mu Z_c^\gamma) \right. \\ & \left. - Z_c^{\gamma*}(\partial_\mu Z_c^\sigma) - Z_e^{\beta*}Z_b^{\alpha*}(\partial_\mu Z_b^\sigma)(\partial_\mu Z_e^\alpha) \right] Z_a^\beta - \partial_\mu \partial_\mu Z_a^\sigma = 0 \quad (3.1.21) \end{aligned}$$

Escrevendo em termos das matrizes

$$\square Z + 2Z(Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 - 2(\partial_\mu Z)Z^\dagger(\partial_\mu Z) - 2Z^\dagger \square Z = 0 \quad (3.1.22)$$

Essa equação ainda pode ser escrita como

$$D^2 Z + Z(D_\mu Z)^\dagger(D_\mu Z) = 0 \quad , \quad (3.1.23)$$

onde

$$\begin{aligned} D^2 Z &= D_\mu D_\mu Z = \partial_\mu(D_\mu Z) + iD_\mu Z A_\mu = \square Z - 2(\partial_\mu Z)Z^\dagger(\partial_\mu Z) - \\ & - Z(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z) - 2Z^\dagger \square Z + Z(Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

Como a Lagrangeana é invariante sob transformações locais  $U(p)$  e globais  $U(n)$ , a cada uma dessas invariâncias estão associadas correntes conservadas de acordo com o teorema de Noether

$$\delta L = \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha})} \delta Z_a^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha*})} \delta Z_a^{\alpha*} \right] = 0 \quad (3.1.25)$$

$$J_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha})} \delta Z_a^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha*})} \delta Z_a^{\alpha*} \quad (3.1.26)$$

Primeiramente vamos obter as correntes que resultam da simetria global. Escrevemos um elemento  $V$  pertencente ao grupo  $U(n)$  como:

$$V = e^{i T_{\rho} \epsilon_{\rho}} \in U(n) \quad \rho = 1, \dots, n^2 \quad (3.1.27)$$

onde  $T_{\rho}$  são os  $n^2$  geradores hermitianos do grupo  $U(n)$  e  $\epsilon_{\rho}$  são parâmetros infinitesimais independentes das coordenadas.

$$V_n = I_n + i T_{\rho} \epsilon_{\rho} + \dots \quad (3.1.28)$$

$$V_{ab} \approx (I_n)_{ab} + i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab} \quad (3.1.29)$$

$$Z'_a{}^{\alpha} = \left[ I_{ab} + i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab} \right] Z_b^{\alpha} \quad (3.1.30)$$

$$\delta Z_a^{\alpha} = i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab} Z_b^{\alpha} \quad (3.1.31)$$

$$\delta Z_a^{\alpha*} = - i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab} Z_b^{\alpha*} \quad (3.1.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha})} = \partial_{\mu} Z_a^{\alpha*} + Z_a^{\sigma*} Z_c^{\alpha*} (\partial_{\mu} Z_c^{\sigma}) + Z_b^{\alpha*} (\partial_{\mu} Z_b^{\gamma}) Z_a^{\gamma*} \quad (3.1.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Z_a^{\alpha*})} = \partial_{\mu} Z_a^{\alpha} \quad (3.1.34)$$

$$\epsilon_{\rho} J_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} Z_a^{\alpha})} \delta Z_a^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} Z_a^{\alpha*})} \delta Z_a^{\alpha*} \quad (3.1.35)$$

Substituindo (3.1.31)-(3.1.34) em (3.1.35)

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho} J_{\mu} = & \left[ \bar{\partial}_{\mu} Z_a^{\alpha*} + Z_a^{\sigma*} Z_c^{\alpha*} (\partial_{\mu} Z_c^{\sigma}) + Z_c^{\alpha*} (\partial_{\mu} Z_c^{\gamma}) Z_a^{\gamma*} \right] i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab} Z_b^{\alpha} + \\ & + \partial_{\mu} Z_a^{\alpha} (-i \epsilon_{\rho} (T_{\rho})_{ab}^* Z_b^{\alpha*}) \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Como essa expressão deve valer para um parâmetro  $\epsilon_{\rho}$  arbitrário e, lembrando que as matrizes  $T_{\rho}$  são hermitianas

$$J_{\mu} = i \text{Tr} \left\{ \left[ \bar{Z} \partial_{\mu} Z^{\dagger} + Z Z^{\dagger} (\partial_{\mu} Z) Z^{\dagger} - (\partial_{\mu} Z) Z^{\dagger} \right] T_{\rho} \right\} \quad (3.1.37)$$

Podemos ainda escrever  $J_{\mu}$  em termos das derivadas covariantes

$$J_{\mu} = \text{Tr} \left[ \bar{Z} (D_{\mu} Z)^{\dagger} - (D_{\mu} Z) Z^{\dagger} \right] i T_{\rho} \quad (3.1.38)$$

Escrevemos  $J_{\mu}$  dessa maneira apenas para enfatizar o fato de que associada a cada gerador existe uma corrente que é conservada ; de um modo geral, escrevemos simplesmente

$$J_{\mu} = \text{Tr} \left[ \bar{Z} (D_{\mu} Z)^{\dagger} - (D_{\mu} Z) Z^{\dagger} \right] \quad (3.1.39)$$

Por construção  $\partial_{\mu} J_{\mu} \stackrel{\cdot}{=} 0$ , o que pode facilmente ser verificado.

Como a Lagrangeana também é invariante sob transformações locais, aplicamos o 2º Teorema de Noether para a obtenção

das identidades resultantes dessa simetria. Escrevemos um elemento  $V(x_\mu)$  pertencente ao grupo  $U(p)$  como:

$$U(x_\mu) = e^{i\lambda_\xi \omega_\xi(x_\mu)} \in U(p) \quad \xi = 1, \dots, p^2 \quad (3.1.40)$$

onde  $\lambda_\xi$  são os  $p^2$  geradores hermitianos do grupo  $U(p)$  e  $\omega_\xi(x_\mu)$  são parâmetros infinitesimais funções das coordenadas

$$U_p(x_\mu) \approx I_p + i \lambda_\xi \omega_\xi(x_\mu) \quad (3.1.41)$$

$$Z'_a{}^\alpha = Z_a{}^\beta (I_k{}^{\beta\alpha} + i \lambda_\xi{}^{\beta\alpha} \omega_\xi(x_\mu)) \quad (3.1.42)$$

$$\delta Z_a{}^\alpha = i Z_a{}^\beta (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} \omega_\xi(x) \quad (3.1.43)$$

$$\delta Z_a{}^{\alpha*} = -i Z_a{}^{\beta*} (\lambda_\xi^*)_{\beta\alpha} \omega_\xi(x) \quad (3.1.44)$$

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Z_a{}^\alpha)} \delta Z_a{}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Z_a{}^{\alpha*})} \delta Z_a{}^{\alpha*} \right] = 0 \quad (3.1.45)$$

Substituindo (3.1.33), (3.1.34), (3.1.43), (3.1.44) em (3.1.45) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[ (\partial_\mu \partial_\mu Z_a{}^{\alpha*}) Z_a{}^\beta (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} + Z_b{}^{\alpha*} (\partial_\mu \partial_\mu Z_b{}^\beta) (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} + 2(\partial_\mu Z_a{}^{\alpha*}) (\partial_\mu Z_a{}^\beta) \cdot \right. \\ & \cdot (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} \left. \right] \omega_\xi(x) + \left[ (\partial_\mu Z_a{}^{\alpha*}) Z_a{}^\beta (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} + 2Z_b{}^{\alpha*} (\partial_\mu Z_b{}^\beta) (\lambda_\xi)_{\beta\alpha} - \right. \\ & \left. - (\partial_\mu Z_a{}^\alpha) Z_a{}^{\beta*} (\lambda_\xi)_{\alpha\beta} \right] \partial_\mu \omega_\xi(x) = 0 \quad (3.1.46) \end{aligned}$$

Como esta expressão deve ser válida para qualquer valor de  $\omega_\xi(x)$ , os coeficientes de  $\omega_\xi(x)$  e de  $\partial_\mu \omega_\xi(x)$  devem

se anular independentemente; escrevendo em notação matricial fica:

$$\text{Tr} \left\{ \left[ (\square Z^\dagger) Z + 2(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z) + Z^\dagger \square Z \right] \lambda_\xi \right\} = 0 \quad (3.1.47)$$

$$\text{Tr} \left\{ \left[ (\partial_\mu Z^\dagger) Z + Z^\dagger (\partial_\mu Z) \right] \lambda_\xi \right\} = 0 \quad (3.1.48)$$

Essas identidades podem ser verificadas a partir da equação (3.1.1)

$$Z^\dagger Z = I_p$$

$$\partial_\mu (Z^\dagger Z) = 0 = (\partial_\mu Z^\dagger) Z + Z^\dagger (\partial_\mu Z) \quad (3.1.47')$$

$$\partial_\mu \partial_\mu (Z^\dagger Z) = 0 = (\square Z^\dagger) Z + 2(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z) + Z^\dagger \square Z \quad (3.1.48')$$

Podemos ainda escrever o tensor momento-energia que por construção é conservado; ele é definido como:

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Z_a^\alpha)} \partial_\nu Z_a^\alpha + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Z_a^{\alpha*})} \partial_\nu Z_a^{\alpha*} - \delta_{\mu\nu} L \quad (3.1.49)$$

Substituindo as equações (3.1.33) e (3.1.34)

$$\tau_{\mu\nu} = \left[ \partial_\mu Z_a^{\alpha*} + 2Z_c^{\alpha*} (\partial_\mu Z_c^\sigma) Z_a^{\sigma*} \right] \partial_\nu Z_a^\alpha + (\partial_\mu Z_a^\alpha) (\partial_\nu Z_a^{\alpha*}) - \delta_{\mu\nu} L \quad (3.1.50)$$

Escrevendo em notação matricial em função das derivadas covariantes

$$\tau_{\mu\nu} = \text{Tr} \left\{ (D_\mu Z^\dagger) (D_\nu Z) + (D_\nu Z^\dagger) (D_\mu Z) - \delta_{\mu\nu} (D_\mu Z)^\dagger (D_\mu Z) \right\} \quad (3.1.51)$$

Definimos a carga topológica de uma solução como

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \int Q(x) d^2x \quad (3.1.52)$$

onde a densidade de carga topológica é dada por

$$Q(x) = i \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} (D_\mu Z)^\dagger (D_\nu Z) \quad (3.1.53)$$

Mas

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} (D_\mu Z)^\dagger (D_\nu Z) &= \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu} (D_\mu Z)^\dagger (D_\nu Z) = \\ &= \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu Z^\dagger - i A_\mu Z^\dagger) (\partial_\nu Z + i Z A_\nu) = \\ &= \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu} \left[ (\partial_\mu Z^\dagger) (\partial_\nu Z) - A_\mu A_\nu \right] = \\ &= \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu Z^\dagger) (\partial_\nu Z) = \text{Tr} \partial_\mu \epsilon_{\mu\nu} A_\nu . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{Q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int \text{Tr} \partial_\mu (\epsilon_{\mu\nu} A_\nu) d^2x \quad (3.1.54)$$

$\tilde{Q}$  sendo a integral de uma divergência é uma carga topológica.

Aplicando o teorema de Green na equação (3.1.54), obtemos

$$\tilde{Q}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{Tr} \oint_\Gamma A_\mu dx_\mu . \quad (3.1.55)$$

É interessante se notar que a teoria pode ser reformulada em termos de campos projetores complexos <sup>(30)</sup>



$$\begin{aligned}
 P &= ZZ^\dagger \quad ; \quad P^2 = p & (3.1.56) \\
 P_{ab} &= Z_a^\alpha Z_b^{\alpha*} & \begin{array}{l} a=1,\dots,n \\ \alpha=1,\dots,P \end{array}
 \end{aligned}$$

Essa formulação tem algumas vantagens tais como:  $P$  é uma matriz quadrada ( $P = P_{ab}$   $n \times n$ ; ordem de  $P = p$ ),  $P$  é um invariante de Gauge,  $P$  é hermitiano ( $P = P^\dagger$ ) etc., além disso, a formulação em termos de  $P$  é conveniente para a renormalização da teoria<sup>(21)</sup>.

Como  $P$  é um invariante de Gauge, a lei de transformação para  $P$  é :

$$P \rightarrow P' = VPV^\dagger \quad . \quad (3.1.57)$$

A densidade Lagrangeana é escrita em termos de  $P$  como:  
(ver Apêndice A)

$$L = \text{Tr } P(\partial_\mu P)(\partial_\mu P) = \frac{1}{2} \text{Tr } (\partial_\mu P)(\partial_\mu P) \quad (3.1.58)$$

E as equações de movimento são:

$$[\square P, [\square P]] = \partial_\mu [\underline{P}, \partial_\mu P] = 0 \quad (3.1.59)$$

As equações de movimento escritas dessa forma nos permitem a identificação das correntes de Noether:

$$J_\mu = [\underline{P}, \partial_\mu P] \quad (3.1.60)$$

Finalmente, escrevemos também a expressão para o tensor momento-energia e a densidade de carga topológica

$$\tau_{\mu\nu} = (\partial_\mu P_{ba})(\partial_\nu P_{ab}) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\partial_\mu P_{ab})(\partial_\mu P_{ba}) \quad (3.1.61)$$

$$Q(x) = i \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr } P(\partial_\mu P)(\partial_\nu P) \quad . \quad (3.1.62)$$

Em muitas referências ((13) a(15) e (22)) encontramos o modelo  $\sigma$  não linear  $U(n,p)$  escrito em termos de campos  $g$  que tomam valores no grupo  $U(n)$ .

Definimos uma matriz  $n \times n$  inversível

$$g(x) = e^{i\pi P(x)} \quad (3.1.63)$$

A lei de transformação para  $g$  é a mesma que para  $P$ , ou seja:

$$g \rightarrow VgV^\dagger \quad (3.1.64)$$

Como  $P^\dagger = P$ , demonstra-se facilmente que

$$g^\dagger = g^{-1} = g \quad \text{e } U(n) \quad (3.1.65)$$

$$g(x) = g^{-1}(x) = (I - 2P(x)) \quad (3.1.66)$$

Utilizando-nos da equação (3.1.66) podemos escrever todas as relações encontradas em termos de  $g$ ; em particular, temos:

$$L = \frac{1}{8} \text{Tr} \left[ (g^{-1} \partial_\mu g) (g^{-1} \partial_\mu g) \right] \quad (3.1.67)$$

$$J_\mu = \frac{1}{2} g^{-1} \partial_\mu g \quad (3.1.68)$$

$$Q(x) = \frac{i}{8} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr } g (\partial_\mu g) (\partial_\nu g) \quad (3.1.69)$$

Para o estudo das soluções das equações de movimento é conveniente se fazer uma transformação de coordenadas. Definimos as variáveis complexas:

$$X_\pm = X_1 \pm iX_2 \quad ; \quad \partial_\pm = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \mp i \frac{\partial}{\partial X_2} \right) = \frac{1}{2} (\partial_1 \mp i \partial_2) \quad (3.1.70)$$

Existem algumas vantagens de escrever dessa maneira ,  
por exemplo

$$\partial_+ X_+ = \partial_- X_- = 1$$

$$\partial_- X_- = \partial_+ X_+ = 0$$

Vamos agora reescrever as equações, tendo em vista que

$$D_{\pm} = \frac{1}{2} (D_1 \mp iD_2) \tag{3.1.71}$$

$$(D_+)^{\dagger} = D_-$$

Então

$$L = 2\text{Tr} (|D_- Z|^2 + |D_+ Z|^2) \tag{3.1.72}$$

$$Q = 2\text{Tr} (|D_- Z|^2 - |D_+ Z|^2) \tag{3.1.73}$$

e as equações de movimento ficam

$$D_+ D_- Z + Z |D_- Z|^2 = 0 \tag{3.1.74}$$

$$D_- D_+ Z + Z |D_+ Z|^2 = 0$$

onde utilizamos a seguinte identidade:

$$(D_- D_+ - D_+ D_-) Z + Z (|D_+ Z|^2 - |D_- Z|^2) = 0 \tag{3.1.75}$$

Podemos escrever também o tensor momento-energia

$$\tau_{11} = -\tau_{22} = 2\text{Tr} \left[ \overline{(D_+ Z)^{\dagger}} (D_- Z) + (D_- Z)^{\dagger} (D_+ Z) \right] \tag{3.1.76}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = 2i\text{Tr} \left[ \overline{(D_- Z)^{\dagger}} (D_+ Z) - (D_+ Z)^{\dagger} (D_- Z) \right]$$

cuja conservação nos leva a

$$\partial_{\pm} \left[ \overline{\text{Tr}}(D_{\pm}Z)^{\dagger}(D_{\pm}Z) \right] = 0 \quad (3.1.77)$$

Assim como nos modelos sigma  $O(3)$  e  $CP^{n-1}$  e na cromodinâmica quântica a quatro dimensões, no modelo  $U(n,p)$  existe uma desigualdade entre a ação e a carga topológica. Das equações (3.1.72) e (3.1.73)

$$S = \int L d^2x = 2\text{Tr} \int \left[ \overline{|D_-Z|^2} + |D_+Z|^2 \right] d^2x \quad (3.1.78)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi} 2\text{Tr} \int \left[ \overline{|D_-Z|^2} - |D_+Z|^2 \right] d^2x \quad (3.1.79)$$

Multiplicando a equação (3.1.79) por  $2\pi$ , somando com a equação (3.1.78) e em seguida diminuindo, obtemos:

$$2\pi\mathcal{Q} + S = 4 \text{Tr} \int |D_-Z|^2 d^2x \geq 0$$

$$S - 2\pi\mathcal{Q} = 4\text{Tr} \int |D_+Z|^2 d^2x \geq 0$$

Portanto:

$$S \geq 2\pi|\mathcal{Q}| \quad . \quad (3.1.80)$$

O sinal de igualdade valendo se e somente se

$$D_{\pm}Z = 0 \quad (3.1.81)$$

Soluções com ação finita dessas equações de primeira ordem são chamadas instantons (anti-instantons). Instantons são mínimos absolutos da ação em um setor com carga topológica definida e são automaticamente soluções das equações de campo de segunda ordem (eqs. (3.1.74)).

Antes de estudarmos as soluções de instantons para o

modelo  $U(n,p)$  vamos mostrar como se escrevem as equações de movimento para campos sem vínculo  $\hat{Z}$ .

$$Z = \hat{Z} |\hat{Z}|^{-1} \quad (3.1.82)$$

onde  $|\hat{Z}|^2 = \hat{Z}^\dagger \hat{Z}$  é uma matriz  $p \times p$  hermitiana

$$D_\pm Z = (I-P) \partial_\pm Z \quad (3.1.83)$$

Então

$$D_\pm Z = (I-P) \partial_\pm (\hat{Z} |\hat{Z}|^{-1}) \quad (3.1.84)$$

Notemos que, se  $A$  é uma matriz inversível

$$\partial \left( \frac{1}{A} \right) = - \frac{1}{A} (\partial A) \frac{1}{A} \quad (3.1.85)$$

e que

$$(I-P)Z = 0 \quad (3.1.86)$$

Então

$$D_\pm Z = (I-P) (\partial_\pm \hat{Z}) |\hat{Z}|^{-1} \quad (3.1.87)$$

Substituindo na eq. (3.1.74) pode-se facilmente escrever as equações de uma forma mais simétrica

$$(I-P) \left[ \overline{\partial_+ \partial_- \hat{Z}} - (\partial_- \hat{Z}) \frac{1}{|\hat{Z}|^2} \hat{Z}^\dagger (\partial_+ \hat{Z}) - (\partial_+ \hat{Z}) \frac{1}{|\hat{Z}|^2} \hat{Z}^\dagger (\partial_- \hat{Z}) \right] = 0 \quad (3.1.88)$$

Se

$$\left[ \overline{\partial_+ \partial_- \hat{Z}} - (\partial_- \hat{Z}) \frac{1}{|\hat{Z}|^2} \hat{Z}^\dagger (\partial_+ \hat{Z}) - (\partial_+ \hat{Z}) \frac{1}{|\hat{Z}|^2} \hat{Z}^\dagger (\partial_- \hat{Z}) \right] \propto \hat{Z} \quad (3.1.89)$$

A equação (3.1.88) é satisfeita. Escrevemos o potencial de Gauge como

$$A_\mu = i \frac{1}{|\hat{Z}|} \left[ \overline{\hat{Z}^\dagger \partial_\mu \hat{Z}} - |\hat{Z}| \partial_\mu |\hat{Z}| \right] \frac{1}{|\hat{Z}|} \quad (3.1.90)$$

### 3.2 - Construção de um Número Infinito de Leis de Conservação

Uma das propriedades mais interessantes desse modelo que estamos estudando é a existência de um conjunto infinito de cargas não locais conservadas; essa descoberta foi feita em 1975 por Pohlmeyer<sup>(42)</sup> para o modelo  $\sigma$  não linear  $O(N)$  clássico a duas dimensões e, mais tarde, foi feita a generalização para os modelos  $CP^{N-1}$  e  $U(n,p)$ <sup>(9,12,16,22)</sup>. Vamos fazer aqui a derivação dessas cargas seguindo a dedução feita por Brézin et al.<sup>(31)</sup>.

Com  $j_\mu(x)$  definido na eq. (3.1.68) e, como  $j_\mu(x)$  é conservado como uma consequência das equações de movimento do modelo

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2} g^{-1} \partial_\mu g \quad (3.2.1)$$

$$\partial_\mu j_\mu(x) \doteq 0 \quad .$$

Podemos construir um conjunto infinito de correntes não locais conservadas usando o seguinte procedimento indutivo. Definiremos um operador matricial  $n \times n$  como:

$$ID_\mu = \partial_\mu + j_\mu \quad (3.2.2)$$

$$(ID)_\mu{}_{ab} = \delta_{ab} \partial_\mu + (j_\mu)_{ab}$$

Da definição de  $ID_\mu$ , equação (3.2.2)

$$[ID_\mu, ID_\nu] = 0 \quad (3.2.3)$$

pois

$$ID_\mu ID_\nu - ID_\nu ID_\mu = \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu \quad (3.2.4)$$

e

$$\partial_{\mu} j_{\nu} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} (g \partial_{\nu} g) = \frac{1}{2} ((\partial_{\mu} g)(\partial_{\nu} g) + g \partial_{\mu} \partial_{\nu} g) \quad (3.2.5)$$

$$\partial_{\nu} j_{\mu} = \frac{1}{2} ((\partial_{\nu} g)(\partial_{\mu} g) + g \partial_{\nu} \partial_{\mu} g) \quad (3.2.6)$$

Além disso,

$$\partial_{\mu} \mathbb{D}_{\mu} = \mathbb{D}_{\mu} \partial_{\mu} \quad (3.2.7)$$

pois

$$\partial_{\mu} \mathbb{D}_{\mu} = \partial_{\mu} \partial_{\mu} + \partial_{\mu} j_{\mu} + j_{\mu} \partial_{\mu} \stackrel{\cdot}{=} \square + j_{\mu} \partial_{\mu} = \mathbb{D}_{\mu} \partial_{\mu}$$

Vamos assumir agora que construímos a n-ésima corrente de Noether conservada. Então, existe uma função escalar  $\chi^n(x)$  tal que

$$J_{\mu}^{(n)} = \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \chi^{(n)} \quad n \geq 1 \quad (3.2.8)$$

Definimos a (n+1)-ésima corrente como

$$J_{\mu}^{(n+1)} = \mathbb{D}_{\mu} \chi^{(n)} \quad n \geq 0 \quad (3.2.9)$$

Começamos a indução com  $J_{\mu}^{(0)} = 0$  e  $\chi^{(0)} = 1$ , então  $J_{\mu}^{(1)} = j_{\mu}$ , que é conservada. Para mostrar que  $J_{\mu}^{(n+1)}$  é conservada, notamos que da eq. (3.2.7)

$$\partial_{\mu} J_{\mu}^{(n+1)} = \mathbb{D}_{\mu} \partial_{\mu} \chi^{(n)} \quad n \geq 1 \quad (3.2.10)$$

e, da equação (3.2.8)

$$\partial_{\mu} \chi^{(n)} = - \epsilon_{\mu\nu} J_{\nu}^{(n)} \quad (3.2.11)$$

Substituindo na eq. (3.2.10)

$$\partial_{\mu} J_{\mu}^{(n+1)} = -\epsilon_{\mu\nu} D_{\mu} J_{\nu}^{(n)} \quad n \geq 1 \quad (3.2.12)$$

obtemos então:

$$\partial_{\mu} J_{\mu}^{(n+1)} = -\epsilon_{\mu\nu} D_{\mu} D_{\nu} \chi^{(n-1)} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} [D_{\mu}, D_{\nu}] \chi^{(n-1)} = 0, \quad n \geq 1$$

E, dessa forma, completamos a indução.

Temos então um número infinito de cargas conservadas

$$Q^{(n)}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} J^{(n)}(x_0, x_1) dx_1. \quad (3.2.13)$$

### 3.3 - O Modelo $U(n, p)$ Como Uma Realização Não Linear de Simetria

É possível se fazer uso da invariância de Gauge da teoria e eliminar  $P^2$  campos fazendo uma escolha de Gauge. Escrevemos  $Z$  como

$$Z = \left\{ \frac{P}{Q} \right\} \quad (3.3.1)$$

onde  $P$  e  $Q$  são matrizes  $(n-p) \times p$  e  $p \times p$  respectivamente. Vamos agora olhar para a matriz  $Q$ ; lembrando que uma matriz complexa arbitrária pode sempre ser escrita como o produto de uma matriz unitária por uma matriz hermitiana, escrevemos

$$Q = LU \quad (3.3.2)$$

onde

$$L = L^{\dagger} \quad e \quad U^{\dagger} = U^{-1}$$



Como  $U$  é uma matriz unitária, podemos escrever

$$U = e^{i\lambda_i B_i} \quad (3.3.3)$$

onde  $\lambda_i$  é um conjunto de matrizes  $\lambda$  e  $U(p)$ .

Então escrevemos  $Z$  como

$$Z = \begin{pmatrix} MU \\ LU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix} e^{i\lambda_i B_i} \quad (3.3.4)$$

onde  $M$  e  $L$  são matrizes  $(n-p) \times p$  e  $p \times p$  respectivamente.

Fazemos então a nossa escolha de Gauge anulando os  $p^2$  campos  $B_i$

$$B_i = 0 \quad (3.3.5)$$

Usando a equação (3.1.1) para eliminar outros  $p^2$  campos, ficamos com  $2np - 2p^2 = 2p(n-p)$  campos reais independentes; os campos de Goldstone do modelo<sup>(7)</sup>.

Uma parametrização conveniente do espaço quociente  $U(n)/[U(n-p) \times U(p)]$  é

$$Z(K) = \begin{pmatrix} KL \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} L \quad (3.3.6)$$

que corresponde às coordenadas homogêneas  $T$  (eq. (2.3.17)); da equação (2.3.18') obtemos:

$$L^2 = I_p - L^\dagger (K^\dagger K) L \quad (3.3.7)$$

que corresponde ao vínculo dado pela eq. (3.1.1).

A relação de dualidade para instanton é

$$D_Z = 0 \iff \partial_Z = (ZZ^\dagger) \partial_Z \quad (3.3.8)$$

Substituindo (3.3.4) em (3.3.8), obtemos:

$$\partial_{(KL)} = KL^2 K^\dagger (\partial_{KL}) + KL^2 \partial_L \quad (3.3.9)$$

$$\partial_L = L^2 K^\dagger (\partial_{KL}) + L^2 \partial_L \quad (3.3.10)$$

Multiplicando (3.3.10) por K e comparando com (3.3.9) vemos que

$$(\partial_K)L = 0$$

e como L é uma matriz não singular

$$\partial_K = 0 \quad (3.3.11)$$

Chamamos K de coordenada de instanton para o modelo  $\sigma$  U(n,p).

Substituindo na eq. (3.3.10), obtemos

$$\partial_L = L^2 K^\dagger K (\partial_L) + L^2 (\partial_L)$$

ou

$$L^2 (K^\dagger K + I_p) = I_p \quad (3.3.12)$$

Comparando as eqs. (3.3.7) e (3.3.12) vemos que, para que haja consistência, a seguinte relação deve valer

$$[L, K^\dagger K] = 0 \quad (3.3.13)$$

Vamos agora estudar as propriedades de transformação de  $Z(K)$ ;  $Z(K)$  dado pela expressão (3.3.6) ou seja, com o Gauge fixado acima e  $L^\dagger = L$  determinado pelas eqs. (3.3.12) e (3.3.13).

Consideremos primeiramente

$$V = \left\{ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right\} \quad (3.3.14)$$

$$V \in U(n-p) \times U(p) \subset U(n)$$

$$A \in U(n-p) \quad e \quad B \in U(p)$$

$$V^\dagger V = I \quad (3.3.15)$$

Não podemos realizar uma transformação global  $U(n-p) \times U(p) \subset U(n)$ , postulando simplesmente  $Z \rightarrow VZ$  pois, pela equação (2.3.9) as coordenadas homogêneas se transformam de acordo com

$$Z(K) \rightarrow VZ(K) G \quad (3.3.16)$$

onde  $G \in U(p)$ .

De (3.3.15), temos que  $A^\dagger A = I_{n-p}$  e  $B^\dagger B = I_p$ . Substituindo (3.3.6) e (3.3.14) em (3.3.16), obtemos

$$\left[ \begin{array}{c} K \\ L \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} AKLG \\ BLG \end{array} \right] \quad (3.3.17)$$

Para que a hermiticidade de  $L$  seja preservada, devemos ter

$$(BLG)^\dagger = BLG \Rightarrow G = \pm B^\dagger \quad (3.3.18)$$

a menos de um fator de fase.

Então, sob transformações  $U(n-p) \times U(p) \subset U(n)$ , temos

$$\begin{aligned} L &\rightarrow \pm BLB^\dagger \\ KL &\rightarrow \pm AKLB^\dagger = \pm AKB^\dagger (BLB^\dagger) \\ K &\rightarrow AKB^\dagger = AKB^{-1} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Como  $B$  é uma matriz constante e  $G = \pm B^\dagger$  as relações (3.3.19) dão as leis de transformações lineares globais para  $[\underline{U}(n-p) \times U(p)] \subset U(n)$  com  $Z(K)$  parametrizado como descrito acima.

Podemos mostrar de uma maneira alternativa que transformações globais  $U(n)$  devem ser realizadas em  $Z(K)$  na forma

(3.3.16), lembrando que  $P = ZZ^\dagger$  é um invariante de Gauge,

$$Z(K) Z(K)^\dagger \rightarrow VZ(K) Z(K)^\dagger V^\dagger \quad (3.3.20)$$

Substituindo (3.3.6) e (3.3.14) em (3.3.20) obtemos

$$\left( \begin{array}{c|c} KL^2 K^\dagger & KL^2 \\ \hline L^2 K^\dagger & L^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} AKL^2 K^\dagger A^\dagger & AKL^2 B^\dagger \\ \hline BL^2 K^\dagger A^\dagger & BL^2 B^\dagger \end{array} \right) \quad (3.3.21)$$

ou seja

$$K \rightarrow AKB^\dagger$$

$$L \rightarrow BLB^\dagger$$

e como

$$G = \pm B^\dagger$$

$$Z(K) \rightarrow V Z(K)G$$

Consideremos agora uma transformação  $U(n)$  gerada pelos elementos da álgebra de Lie  $[u(n)-u(n-p)-u(p)]$ , onde  $u(n)$  é a álgebra de Lie de  $U(n)$  e assim por diante.

Seja então

$$V = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-p} & \frac{1}{2} i\epsilon \\ \hline \frac{1}{2} i\epsilon^\dagger & I_p \end{array} \right) \in U(n) \quad (3.3.22)$$

onde  $\epsilon$  é uma matriz infinitesimal  $(n-p) \times p$  independente das coordenadas

$$V^\dagger V = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-p} - \frac{1}{4} \epsilon^\dagger \epsilon & 0 \\ \hline 0 & I_p + \frac{1}{4} \epsilon^\dagger \epsilon \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-p} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right) \quad (3.3.23)$$

ou seja

$$\epsilon^\dagger \epsilon = \epsilon \epsilon^\dagger = 0 \quad (3.3.24)$$

Vamos escrever também

$$G = (I_p - \frac{1}{2} i\xi) \in U(p) \quad (3.3.25)$$

para algum  $\xi$  linear em  $\epsilon$  que será determinado mais adiante.

Substituindo (3.3.22) e (3.3.25) em (3.3.16), obtemos

$$\begin{pmatrix} KL \\ L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} KL + \frac{1}{2} i\epsilon L - \frac{1}{2} iKL\xi + \dots \\ L + \frac{1}{2} i\epsilon^\dagger KL - \frac{1}{2} iL\xi + \dots \end{pmatrix} \quad (3.3.26)$$

Então

$$\delta L = \frac{i}{2} (\epsilon^\dagger KL - L\xi) \quad (3.3.27)$$

$$\delta(KL) = \frac{i}{2} (\epsilon L - KL\xi) \quad (3.3.28)$$

mas

$$\delta(KL) = (\delta K)L + K\delta L \quad (3.3.29)$$

Substituindo (3.3.28) e (3.3.27) multiplicado por K em (3.3.29), obtemos:

$$\delta K = \frac{i}{2} (\epsilon - K\epsilon^\dagger K) \quad (3.3.30)$$

independente de  $\xi$ .

A equação (3.3.30) que dá a lei de transformação de K é não linear, ou seja, o grupo de transformação global  $U(n)$  é realizado não linearmente em  $K_a^\alpha$  ( $a = 1, \dots, (n-p)$ ;  $\alpha = 1, \dots, p$ ).

Vamos agora determinar a função  $\xi$ ; para isso usamos o fato de que devemos preservar a hermiticidade de L

$$(L + \frac{i}{2} \epsilon^\dagger KL - \frac{i}{2} L\xi)^\dagger = L + \frac{i}{2} \epsilon^\dagger KL - \frac{i}{2} L\xi$$

então

$$\epsilon^\dagger KL + LK^\dagger \epsilon = L\xi + \xi^\dagger L$$

ou seja

$$\xi = K^\dagger \epsilon \quad (3.3.31)$$

Substituindo o valor encontrado para  $\xi = \xi(K, \epsilon)$  na eq. (3.3.25):

$$G = I_p - \frac{1}{2} iK^\dagger \epsilon + \dots \quad (3.3.32)$$

Então, embora  $\epsilon$  seja uma matriz constante,  $G$  com  $V$  definido na eq. (3.3.22), é uma transformação de Gauge pois  $K$  é um campo que depende das coordenadas;  $G = G(x) \in U(p)$ .

Ao invés de verificar se a equação (3.3.30) satisfaz às identidades de Jacobi apropriadas a uma realização consistente do grupo de simetria é mais fácil mostrar que a expressão de  $\delta K$  acima é obtida através de uma representação linear para a qual as propriedades de grupo são evidentes.

Substituindo (3.3.22) em (3.3.20), obtemos:

$$\left( \begin{array}{c|c} KL^2 K^\dagger & KL^2 \\ \hline L^2 K^\dagger & L^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} KL^2 K^\dagger - \frac{i}{2} KL^2 \epsilon^\dagger + \frac{i}{2} \epsilon L^2 K^\dagger & KL^2 - \frac{i}{2} KL^2 K^\dagger \epsilon + \frac{i}{2} \epsilon L^2 \\ \hline \frac{i}{2} \epsilon^\dagger KL^2 K^\dagger + L^2 K & \frac{i}{2} \epsilon^\dagger KL^2 - \frac{i}{2} L^2 K^\dagger \epsilon \end{array} \right)$$

ou seja:

$$\delta(KL^2 K^\dagger) = \frac{i}{2} (\epsilon L^2 K^\dagger - KL^2 \epsilon^\dagger) \quad (3.3.33)$$

$$\delta(KL^2) = \frac{i}{2} (\epsilon L^2 - KL^2 K^\dagger \epsilon) \quad (3.3.34)$$

$$\delta(L^2 K^\dagger) = \frac{i}{2} (\epsilon^\dagger KL^2 K^\dagger - L^2 \epsilon^\dagger)$$

$$\delta L^2 = \frac{i}{2} (\epsilon^\dagger K L^2 - L^2 K^\dagger \epsilon) \quad (3.3.35)$$

Como  $\delta(KL^2) = (\delta K)L^2 + K\delta L^2$ , as expressões obtidas nos levam novamente à equação (3.3.30).

Para discutir o modelo  $\sigma$   $U(n,p)$  como uma realização não linear de  $U(n)$  na qual  $U(n-p) \times U(p)$  é realizada linearmente, é conveniente usarmos como representativo de quociente a matriz  $\mathbb{L}(K)^\dagger$  que é da forma da equação (2.3.9)

$$\mathbb{L}(K)^\dagger = \left( \begin{array}{c|c} H & KL \\ \hline -LK^\dagger & L \end{array} \right) \in U(n) \quad (3.3.36)$$

onde  $L^\dagger = L$  e

$$H = \sqrt{I_{n-p} - KL^2 K^\dagger} \quad (3.3.37)$$

Podemos então usar (3.3.36) para construir a derivada covariante de  $K$  no sentido de realizações não lineares; impondo que  $\mathbb{L}(K)$  seja uma matriz unitária, obtemos além de (3.3.37) e (3.3.12) que

$$HK = KL \quad (3.3.38)$$

Utilizando-nos dessa equação, obtemos

$$D_\mu K = H \partial_\mu (KL) - KL \partial_\mu L = H(\partial_\mu K)L \quad (3.3.39)$$

Então, a Lagrangeana para os campos de Goldstone  $K^{(7)}$  fica:

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} (D_\mu K)^\dagger (D_\mu K) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu K^\dagger) H^2 (\partial_\mu K) L^2, \quad (3.3.40)$$

que corresponde à equação (3.1.4).

Poderíamos ter obtido essa Lagrangeana de maneira alternativa usando o fato de que os campos projetores  $P = ZZ^\dagger$  são invariantes de Gauge e se transformam linearmente sob transformações globais  $U(n)$  e, através do termo cinético da Lagrangeana deduzir a forma da derivada covariante. ·



## CAPÍTULO 4

### SOLUÇÕES CLÁSSICAS PARA OS MODELOS

$$CP^{n-1} \text{ E } U(n,p)$$

#### 4.1 - Soluções Tipo Instanton para o Modelo $CP^{n-1}$

Para maior clareza na obtenção das soluções tipo instanton para o modelo  $U(n,p)$  estudaremos primeiro as soluções para o modelo  $CP^{n-1} \cong U(n,1)$ .

Assim como o modelo  $U(n,p)$  é uma generalização de  $CP^{n-1}$ , esse modelo surgiu como uma generalização do modelo  $O(n)$ ; o modelo  $CP^{n-1}$  tem  $SU(n)$  como grupo de simetria e por isso é às vezes chamado de modelo  $\sigma$   $SU(n)$ . Para  $n = 2$  o grupo de simetria  $SU(2)$  coincide com  $O(3)$  e existe uma maneira muito simples de reescrever  $CP^1$  como uma teoria invariante sob o grupo  $O(3)$ . Introduzimos o vetor

$$\vec{q} = Z^\dagger \vec{\sigma} Z \quad (4.1.1)$$

onde  $\vec{\sigma}$  são as matrizes de Pauli  $2 \times 2$  usuais.

Em termos de  $\vec{q}$  o vínculo (eq. (3.1.1)) se escreve como:

$$\vec{q}^2 = 1 \quad (4.1.2)$$

e a densidade Lagrangeana (eq. (3.1.4)) fica:

$$L = (\partial_\mu \vec{q})^2 \quad (4.1.3)$$

que é a densidade Lagrangeana usual para o modelo  $\sigma$  não linear  $O(3)$ . O problema com o modelo  $O(n)$  é que só existem soluções de instanton para o caso  $n = 3$  enquanto que no modelo  $CP^{n-1}$  classicamente existem soluções de instanton para qualquer valor de  $n$ .

Os instantons (anti-instantons) são soluções das equações auto-duais:

$$(I - ZZ^\dagger) \partial_\pm Z = 0 \quad (4.1.4)$$

Segue de teoremas gerais em equações diferenciais parciais não lineares elípticas que as soluções clássicas  $Z$  com ação  $S$  finita e que pertencem à classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  são funções reais analíticas dos argumentos  $x_1$  e  $x_2$ . Vamos considerar aqui que  $Z \in C^2(\mathbb{R}^2)$  (a menos de um fator de fase).

Isso pode ser visto de outra maneira, se considerarmos as coordenadas de instanton; nesse caso, as equações auto-duais são (eq. (3.3.11)) <sup>(18)</sup>

$$\partial_\pm K = 0 \quad (4.1.5)$$

Então a solução tem a forma  $K_\alpha = f_\alpha(Z)$ , onde  $f_\alpha(Z)$  são funções analíticas. Além disso, devemos satisfazer a condição  $Z(x) \rightarrow Z_0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , como o espaço  $CP^{n-1}$  é homogêneo,  $Z_0$  pode ser qualquer ponto do espaço  $CP^{n-1}$ , como por exemplo, o ponto com coordenadas  $K = (0, \dots, 0)$ . Nesse caso particular, a nossa condição toma a forma:  $f_\alpha(Z) \rightarrow 0$  quando  $|Z| \rightarrow \infty$ . Então, podemos inferir que  $f_\alpha(Z)$  é uma função racional de  $Z$ .

Portanto, a solução mais geral para 1-instanton é dada por

$$Z_a(x_\mu) = \frac{\lambda u_a + (x_- - a_-) v_a}{\left[ \lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2 \right]^{1/2}} \quad a = 1, \dots, n \quad (4.1.6)$$

onde podemos interpretar  $a_\mu$  como a posição do instanton,  $\lambda > 0$  como a escala e os dois vetores  $u$  e  $v$  sujeitos aos vínculos

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= v^\dagger v = 1 \\ u^\dagger v &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

como a orientação do instanton no espaço colorido.

Vamos agora calcular a ação e a carga topológica para a solução de 1-instanton. Como a equação autodual é satisfeita, temos agora uma igualdade entre a ação e a carga topológica (eq. (3.1.80))

$$S = 2\pi \tilde{Q} \quad (4.1.8)$$

Pela eq. (3.1.55)

$$S = 2\pi \tilde{Q} = \oint_{\Gamma} A_\mu dx_\mu \quad (4.1.9)$$

Escrevendo  $A_\mu$  em função de  $x_+$  e  $x_-$

$$\begin{aligned} A_1 &= iZ^\dagger (\partial_- Z + \partial_+ Z) \\ A_2 &= Z^\dagger (\partial_- Z - \partial_+ Z) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

As derivadas de  $Z$  são

$$\begin{aligned} \partial_\pm Z &= - \frac{\lambda u (x_- - a_-) + (x_- - a_-)^2 v}{2 \left[ \lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2 \right]^{3/2}} \\ \partial_- Z &= \frac{v}{2 \left[ \lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Substituindo as expressões (4.1.11) em (4.1.10) obtemos

$$A_1 = \frac{(x_2 - a_2)}{[\lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2]}$$

$$A_2 = \frac{(x_1 - a_1)}{[\lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2]}$$

Então:

$$S = 2\pi\tilde{Q} = \oint_{\Gamma} \frac{(x_2 - a_2)}{[\lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2]} dx_1 + \oint_{\Gamma} \frac{(x_1 - a_1)}{[\lambda^2 + (x_\mu - a_\mu)^2]} dx_2$$

Fazendo o raio da curva  $\Gamma$  ir a infinito

$$S = 2\pi\tilde{Q} = \oint_{R \rightarrow \infty} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

De modo que

$$S = 2\pi \tag{4.1.12}$$

$$\tilde{Q} = 1$$

A solução para l-antiinstanton é obtida tomando-se o transposto conjugado da eq. (4.1.6). Nesse caso obtêm-se

$$S = 2\pi \tag{4.1.3}$$

e

$$\tilde{Q} = -1$$

Para K-instantons escrevemos a solução como:

$$Z_a(x_\mu) = \frac{\lambda u_a + \prod_{i=1}^K (x_\mu - a_{\mu i}) v_a}{\left[ \lambda^2 + \prod_{i=1}^K (x_\mu - a_{\mu i})^2 \right]^{1/2}} \quad a = 1, \dots, n \quad (4.1.14)$$

onde

$$u^\dagger u = v^\dagger v = 1 \quad e \quad u^\dagger v = 0$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos

$$S = 2\pi K \quad e \quad \tilde{Q} = K \quad (4.1.15)$$

para K-instantons e, tomando-se o transposto conjugado da equação (4.1.14) obtemos

$$S = 2\pi K \quad e \quad \tilde{Q} = -K \quad (4.1.16)$$

para K-antiinstantons.

#### 4.2 - Soluções Tipo Instanton para o Modelo U(n,p)

Para a obtenção de soluções do modelo U(n,p) é conveniente escrevermos a matriz  $n \times p$   $Z$  como  $p$  colunas de  $n$ -vetores, pois caso contrário, se torna muito difícil satisfazer à equação (3.1.1). Escrevemos:

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p) \quad (4.2.1)$$

Substituindo (4.2.1) em (3.1.1), obtemos

$$Z_\alpha^\dagger Z_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p \quad (4.2.2)$$

onde

$$Z_\alpha = \begin{pmatrix} Z_{1\alpha} \\ Z_{2\alpha} \\ \vdots \\ Z_{n\alpha} \end{pmatrix}$$

Mas, ao lidarmos com esse problema, descobrimos que a equação (4.2.2) se revela muito restritiva ou seja, ao contrário do que nos parecia à primeira vista, a generalização do modelo  $CP^{n-1}$ , do ponto de vista operacional, é mais restrita em termos de soluções do que o próprio modelo  $CP^{n-1}$ , como veremos a seguir.

Substituindo (4.2.1) nas equações de movimento (3.1.88), obtemos

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - (Z_1 \dots Z_p) \begin{pmatrix} Z_1^\dagger \\ \vdots \\ Z_p^\dagger \end{pmatrix} \right] \left[ \partial_+ \partial_- (Z_1 \dots Z_p) - \left( \partial_+ (Z_1 \dots Z_p) \right) \begin{pmatrix} Z_1^\dagger \\ \vdots \\ Z_p^\dagger \end{pmatrix} \partial_- (Z_1 \dots Z_p) \right. \\ & \left. - \left( \partial_- (Z_1 \dots Z_p) \right) \begin{pmatrix} Z_1^\dagger \\ \vdots \\ Z_p^\dagger \end{pmatrix} \left( \partial_+ (Z_1 \dots Z_p) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_+ \partial_- Z_1 \dots \partial_+ \partial_- Z_p \right] - \left[ (\partial_+ Z_1) Z_1^\dagger \partial_- Z_1 + \dots + (\partial_+ Z_p) Z_p^\dagger (\partial_- Z_1), \right. \\ & \dots, (\partial_+ Z_1) Z_1^\dagger (\partial_- Z_p) + \dots + (\partial_+ Z_p) Z_p^\dagger (\partial_- Z_p) \left. \right] - \left[ (\partial_- Z_1) Z_1^\dagger (\partial_+ Z_1) + \right. \\ & \left. + \dots + (\partial_- Z_p) Z_p^\dagger (\partial_+ Z_1), \dots, (\partial_- Z_1) Z_1^\dagger (\partial_+ Z_p) + \dots + (\partial_- Z_p) Z_p^\dagger \right. \\ & \left. (\partial_+ Z_p) \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

A solução dessa equação de uma maneira geral é muito difícil, portanto vamos introduzir restrições adicionais que pos-

sibilitem a obtenção de soluções particulares. Vamos exigir que, além dos vetores serem mutuamente ortogonais que eles também sejam ortogonais às derivadas.

$$Z_{\alpha}^{\dagger} \partial_{\pm} Z_{\beta} = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha \neq \beta \\ Z_{\alpha}^{\dagger} \partial_{\pm} Z_{\alpha} & , \quad \alpha = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p \quad (4.2.4)$$

Substituindo (4.2.4) em (4.2.3), obtemos

$$\begin{aligned} & \left[ \overline{I-P} \right] \left[ \left( \partial_{+} \partial_{-} Z_1, \dots, \partial_{+} \partial_{-} Z_p \right) - \left\{ \left( \partial_{+} Z_1 \right) Z_1^{\dagger} \left( \partial_{-} Z_1 \right), \dots, \left( \partial_{+} Z_p \right) Z_p^{\dagger} \left( \partial_{-} Z_p \right) \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ \left( \partial_{-} Z_1 \right) Z_1^{\dagger} \left( \partial_{+} Z_1 \right), \dots, \left( \partial_{-} Z_p \right) Z_p^{\dagger} \left( \partial_{+} Z_p \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A maneira mais simples de satisfazer às duas restrições é escolher a base canônica.

Para ilustrar, vamos estudar o caso  $n=3$ ,  $p=2$ . Escrevemos

$$Z = (Z_1; Z_2)$$

onde

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_{\mu}) \\ \lambda(x_{\mu}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x_{\mu}) \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

Escrevendo dessa forma as equações (4.2.2) e (4.2.5), são satisfeitas desde que

$$\begin{aligned} Z_1^{\dagger} Z_1 &= 1 = |f|^2 + |\lambda|^2 \\ Z_2^{\dagger} Z_2 &= 1 = |g|^2 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Vamos ver agora a forma da matriz de projeção

$$P = ZZ^\dagger = \begin{pmatrix} |f|^2 & f\lambda^* & 0 \\ \lambda f^* & |\lambda|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |g|^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

e

$$I-P = \begin{pmatrix} 1-|f|^2 & -f\lambda^* & 0 \\ -\lambda f^* & 1-|\lambda|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

onde foi substituída a equação (4.2.7).

Portanto,  $Z_2$  não contribui para as equações de movimento e o problema  $U(3,2)$  se reduz, nesse caso, a um problema de  $CP^1$  mais uma função arbitrária (normalizada) que, como demonstraremos em seguida, é uma transformada de Gauge. Podemos constatar que  $Z_2$  não traz nenhuma contribuição através da equação (3.1.58) que expressa a Lagrangeana em função de  $P$  e de suas derivadas.

Vamos agora demonstrar que  $Z_2$  é somente uma transformada de Gauge de um estado de "vácuo".

$$A_\mu = iZ^\dagger \partial_\mu Z = i \begin{pmatrix} f^* \partial_\mu f + \lambda^* \partial_\mu \lambda & 0 \\ 0 & g^* \partial_\mu g \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

Sob uma transformação de Gauge  $A_\mu$  se transforma de acordo com

$$A_\mu \rightarrow U^\dagger A_\mu U + iU^\dagger \partial_\mu U$$



Escolhendo a matriz  $U$  como sendo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g(x_\mu) \end{pmatrix}$$

temos que

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |g|^2 \end{pmatrix} \equiv I$$

pois  $|g|^2 = 1$ , que é justamente a condição imposta pelo problema. Portanto, considerando

$$A_\mu = i \begin{pmatrix} f^* \partial_\mu f + \lambda^* \partial_\mu \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com a transformação  $U$  escrita acima

$$A_\mu \rightarrow U^\dagger A_\mu U + iU^\dagger \partial_\mu U = i \begin{pmatrix} f^* \partial_\mu f + \lambda^* \partial_\mu \lambda & 0 \\ 0 & g^* \partial_\mu g \end{pmatrix}$$

$$A_\mu \sim A_\mu .$$

Portanto,  $Z_2$  é uma transformada de Gauge e não traz nenhuma contribuição para a solução.

Isso demonstra o fato assinalado acima de que as soluções que podem ser obtidas para o modelo  $U(n,p)$  são, na maioria das vezes, mais restritivas do que para o modelo  $CP^{n-1}$ .

Naturalmente, o caso estudado foi muito simples e, em outros casos pode-se obter maior número de soluções como, por exemplo, no modelo  $U(4,2)$  que, observando-se as condições impostas, pode ser descrito de duas maneiras:

(i)

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ \lambda(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(x_\mu) \end{pmatrix}$$

e

(ii)

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ \lambda(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \end{pmatrix}$$

No primeiro caso o problema se reduz a um problema  $CP^2$  e, como foi demonstrado acima,  $Z_2$  sendo apenas uma transformada de Gauge não traz nenhuma contribuição. No segundo caso temos dois problemas  $CP^1$  desacoplados e, pode ser facilmente demonstrado que a solução é dada pela 'composição' das soluções dos dois problemas  $CP^1$ .

Apresentamos no Apêndice B, uma classificação dessas soluções para os modelos  $U(4,3)$ ,  $U(5,2)$ ,  $U(6,3)$  e  $U(5,4)$ .

É interessante se observar que existe uma simetria ( $P \rightarrow n-p$ ) entre os modelos  $U(n,p)$  e  $U(n,n-p)$  tal que  $S(Z) = S(Z')$  e  $Q(Z) = -Q(Z')$ . Os dois modelos têm o mesmo número de equações:  $(n-p)p$ . Além disso, podemos passar de um modelo para o outro tomando-se o operador projeção para o modelo  $U(n,n-p)$  como o complemento do operador projeção de  $U(n,p)$ , ou seja,

$$P' = I_n - P \tag{4.2.10}$$

onde

rificado.

Para simplificar a demonstração de que  $\hat{z}^{(1)}$  satisfaz às equações de movimento, introduzimos a seguinte notação:

$$P_1 = \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} \quad (4.3.4)$$

$$P_0 = \hat{z}^{(0)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)\dagger} \quad (4.3.5)$$

que se justifica uma vez que essas quantidades são, de fato, operadores de projeção. Além disso, observamos que

$$(I-P_0)\hat{z}^{(0)} \equiv 0 \quad (4.3.6)$$

$$(I-P_1)\hat{z}^{(1)} \equiv 0 \quad (4.3.7)$$

Agora vamos proceder à verificação. Substituindo (4.3.3) em (3.1.88), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[ I - P_1 \right] \left\{ - (I - P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|f|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) (\partial_+ f) - f \frac{1}{|f|^2} (\partial_- f^\dagger) \right. \\ & (I - P_0) \partial_+^2 f + f \frac{1}{|f|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|f|^2} f^\dagger (\partial_+ f) + \\ & + f \frac{1}{|f|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) \left[ (I - P_0) \partial_+^2 f - \right. \\ & \left. - (I - P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|f|^2} f^\dagger (\partial_+ f) \right] + \left[ (I - P_0) \partial_+^2 f - (I - P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|f|^2} f^\dagger \right. \\ & \left. \cdot (\partial_+ f) \right] \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) f \frac{1}{|f|^2} (\partial_- f^\dagger) (I - P_0) \partial_+ f \left. \right\} = \\ & = (I - P_1) \left[ - \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|f|^2} |\hat{z}^{(1)}|^2 - f \frac{1}{|f|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} \partial_+^2 f + f \frac{1}{|f|^2} |\hat{z}^{(1)}|^2 \right. \end{aligned}$$

$$P' = Z'Z'^{\dagger}$$

$Z'$  solução do modelo  $U(n-p)$ .

Substituindo (4.2.10) em (3.1.58) e (3.1.62) obtemos

$$Q(Z) = -Q(Z') \quad (4.2.11)$$

e

$$S(Z) = S(Z') \quad (4.2.12)$$

### 4.3 - Soluções Não Autoduais

Existe uma maneira muito simples de se obter soluções não autoduais para o modelo  $CP^{n-1}$  que consiste em se fazer uma inversão de soluções do modelo  $O(n)$  no modelo  $CP^{n-1}$  (32, 33, 38), mas, uma família inteira de soluções não autoduais pode ser obtida a partir de uma solução tipo (anti) instanton com a vantagem de serem gerais, ou seja, válidas para o modelo  $U(n,p)$  e, em particular, para  $CP^{n-1}$  (34 a 37).

Chamamos de  $\hat{z}^{(0)}$  uma dada solução tipo antiinstanton

$$\hat{z}^{(0)} = f \quad (4.3.1)$$

$$\partial_{-} f = 0 \quad (4.3.2)$$

Como  $f$  é uma solução tipo antiinstanton, tem a forma de um polinômio.

Geramos uma nova função

$$\hat{z}^{(1)} = \left( I - \hat{z}^{(0)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)} \right) \partial_{+} \hat{z}^{(0)} \quad (4.3.3)$$

que, como será demonstrado adiante, satisfaz às equações de movimento além de ser ortogonal a  $\hat{z}^{(0)}$ , como pode ser facilmente ve

$$\begin{aligned} & \cdot \left[ \frac{1}{|f|^2} f^\dagger (\partial_+ f) + f \frac{1}{|f|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} \partial_+^2 f - f \frac{1}{|f|^2} |\hat{z}^{(1)}|^2 \frac{1}{|f|^2} f^\dagger (\partial_+ f) \right] = \\ & = - (I - P_1) \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|f|^2} |\hat{z}^{(1)}|^2 \equiv 0 \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi gerada a solução  $\hat{z}^{(1)}$  ( equação (4.3.3)) podemos gerar uma nova função

$$\hat{z}^{(2)} = (I - P_1) \partial_+ \hat{z}^{(1)} \quad (4.3.8)$$

e, assim sucessivamente

$$\hat{z}^{(k)} = (I - P_{k-1}) \partial_+ \hat{z}^{(k-1)} \quad (4.3.9)$$

onde

$$P_{k-1} = \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)\dagger} \quad (4.3.10)$$

Como será demonstrado adiante todas as funções geradas dessa maneira satisfazem às equações de movimento. Como a função inicial  $f$  tem a forma de um polinômio, podemos gerar um número de funções ortogonais igual ao grau de  $f$ .

Essa classe de soluções também pode ser escrita como

$$\hat{z}^{(k)} = (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) \partial_+^k f \quad (4.3.11)$$

conforme demonstraremos adiante. Primeiro vamos supor que a forma (4.3.11) é válida e mostrar que, com os  $\hat{z}^{(k)}$  assim definidos  $z^{(k)} = \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|}$  satisfazem às equações de movimento. Para isso, vejamos como escrevemos as derivadas de  $\hat{z}^{(k)}$ .

$$\partial_+ \hat{z}^{(k)} = \partial_+ \left[ (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) \partial_+^k f \right] =$$

$$= (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) \partial_+^{k+1} f - \left[ \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) \right] \partial_+^k f \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_+ \hat{z}^{(k)+} &= \partial_+ \left[ (\partial_-^k f^\dagger) (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) \right] = \\ &= - (\partial_-^k f^\dagger) \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Vamos agora calcular a derivada do operador de projeção:

$$\begin{aligned} \partial_+ P_k &= \partial_+ \left( \hat{z}^k \frac{1}{|\hat{z}^k|^2} \hat{z}^k \right) = \\ &= (I - P_k) (\partial_+ \hat{z}^k) \frac{1}{|\hat{z}^k|^2} \hat{z}^{k+} + \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} (\partial_+ \hat{z}^{(k)+}) (I - P_k) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Substituindo (4.3.12) e (4.3.13) em (4.3.14)

$$\begin{aligned} \partial_+ P_k &= (I - P_0 - \dots - P_{k-1} - P_k) (\partial_+^{k+1} f) \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - (I - P_k) \cdot \\ &\cdot \left[ \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) \right] \partial_+^k f \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} (\partial_-^k f^\dagger) \cdot \\ &\cdot \left[ \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) \right] (I - P_k) \\ \partial_+ P_k &= \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - (I - P_k) \left[ \partial_+ (P_0 + \dots + P_{k-1}) \right] \partial_+^k f \cdot \\ &\cdot \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} (\partial_-^k f^\dagger) \left[ \partial_+ (P_0 + \dots + P_{k-1}) \right] (I - P_k) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Vamos agora mostrar uma forma geral para a derivada de  $P_k$ , usando a equação (4.3.15) e o teorema da indução.

(i) K = 0

$$\partial_+ P_0 = \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)\dagger}$$

(ii) K = 1

$$\begin{aligned} \partial_+ P_1 &= \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} - (I-P_1) (\partial_+ P_0) (\partial_+ f) \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} - \\ &- \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} (\partial_- f^\dagger) (\partial_+ P_0) (I-P_1) = \\ &= \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} - \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)\dagger} \end{aligned}$$

(iii) K = 2

$$\begin{aligned} \partial_+ P_2 &= \hat{z}^{(3)} \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} \hat{z}^{(2)\dagger} - (I-P_2) \left[ \bar{\partial}_+ (P_0 + P_1) \right] \partial_+^2 f \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} \hat{z}^{(2)\dagger} - \\ &- \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} (\partial_-^2 f^\dagger) \left[ \bar{\partial}_+ (P_0 + P_1) \right] (I-P_2) = \\ &= \hat{z}^{(3)} \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} \hat{z}^{(2)\dagger} - \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)\dagger} \end{aligned}$$

(iv) K = 3

$$\begin{aligned} \partial_+ P_3 &= \hat{z}^{(4)} \frac{1}{|\hat{z}^{(3)}|^2} \hat{z}^{(3)\dagger} - (I-P_3) \left[ \bar{\partial}_+ (P_0 + P_1 + P_2) \right] \partial_+^3 f \frac{1}{|\hat{z}^{(3)}|^2} \hat{z}^{(3)\dagger} - \\ &- \hat{z}^{(3)} \frac{1}{|\hat{z}^{(3)}|^2} (\partial_-^3 f^\dagger) \left[ \bar{\partial}_+ (P_0 + P_1 + P_2) \right] (I-P_3) = \\ &= \hat{z}^{(4)} \frac{1}{|\hat{z}^{(3)}|^2} \hat{z}^{(3)\dagger} - \hat{z}^{(3)} \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} \hat{z}^{(2)\dagger} \end{aligned}$$

(v) Se

$$\partial_+ P_k = \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)+}$$

Então

$$\partial_+ P_{k+1} = \hat{z}^{(k+2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} - \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+}$$

Demonstração

Pela equação (4.3.15)

$$\begin{aligned} \partial_+ P_{k+1} &= \hat{z}^{(k+2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} - (I - P_{k+1}) \left[ \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_k) \right] \cdot \\ &\cdot (\partial_+^{k+1} f) \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} - \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} (\partial_-^{k+1} f^+) \cdot \\ &\cdot \left[ \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_k) \right] (I - P_{k+1}) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_+ (P_0 + P_1 + \dots + P_k) &= \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)+} + \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)+} - \\ &- \hat{z}^{(1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(0)}|^2} \hat{z}^{(0)+} + \hat{z}^{(3)} \frac{1}{|\hat{z}^{(2)}|^2} \hat{z}^{(2)+} - \hat{z}^{(2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(1)}|^2} \hat{z}^{(1)+} + \\ &+ \dots + \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} - \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)+} = \\ &= \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Substituindo (4.3.16) em (4.3.17)

$$\partial_+ P_{k+1} = \hat{z}^{(k+2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} - (I - P_{k+1}) \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+}$$



$$\cdot (\partial_+^{k+1} f) \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} \hat{z}^{(k+1)-} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} (\partial_-^{k+1} f^+).$$

$$\cdot \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} (I - P_{k+1})$$

Como  $\hat{z}^{(k)}$  é ortogonal a  $\hat{z}^{(k+1)}$

$$\partial_+ P_{k+1} = \hat{z}^{(k+2)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k+1)}|^2} \hat{z}^{(k+1)+} \hat{z}^{(k+1)-} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)+} \quad (4.3.18)$$

C.Q.D.

Substituindo (4.3.17) em (4.3.12) e (4.3.13) obtemos

$$\partial_+ \hat{z}^{(k)} = (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) (\partial_+^{k+1} f) - \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)+} (\partial_+^k f) \quad (4.3.19)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_+ \hat{z}^{(k)} &= - (\partial_-^k f^+) \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)+} = - |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \cdot \\ &\cdot \hat{z}^{(k-1)+} \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Tomando o transposto conjugado da eq. (4.3.20) obtemos:

$$\partial_- \hat{z}^{(k)} = - \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 \quad (4.3.21)$$

Tendo calculado as derivadas vamos mostrar agora que os  $z^{(k)} = \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|}$  satisfazem às equações de movimento (eq. (3.1.109)).

Primeiro fazemos:

$$\partial_+ \partial_- \hat{z}^{(k)} = - \partial_+ \left[ \frac{\hat{z}^{(k-1)}}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & -(I-P_{k-1}) (\partial_+ \hat{z}^{(k-1)}) \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 + \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} (\partial_+ \hat{z}^{(k-1)})^\dagger \cdot \\
 & \cdot \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 - \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} (\partial_+ \hat{z}^{(k)})^\dagger \hat{z}^{(k)} - \hat{z}^{(k-1)} \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k)} (\partial_+ \hat{z}^{(k)})
 \end{aligned}$$

Substituindo (4.3.19) e (4.3.20) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \partial_+ \partial_- \hat{z}^{(k)} &= -\hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 + \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \cdot \\
 & \cdot \hat{z}^{(k-1)} (\partial_+^k f) - \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k)} (\partial_+^{k+1} f) \quad (4.3.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_+ \hat{z}^{(k)}) \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)} (\partial_- \hat{z}^{(k)}) &= -(\partial_+ \hat{z}^{(k)}) \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)} + \hat{z}^{(k-1)} \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 = 0 \quad (4.3.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_- \hat{z}^{(k)}) \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \hat{z}^{(k)} (\partial_+ \hat{z}^{(k)}) &= \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k-1)} (\partial_+^k f) - \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \hat{z}^{(k)} \cdot \\
 & \cdot (I-P_0 - \dots - P_{k-1}) (\partial_+^{k+1} f) \quad (4.3.24)
 \end{aligned}$$

Substituindo (4.3.22), (4.3.23) e (4.3.24) na equação (3.1.88), obtemos

$$-(I-P_k) \hat{z}^{(k)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|^2 \equiv 0$$

ficando então demonstrado que os  $z^{(k)}$  como definidos são de fa-

to soluções para o nosso problema.

Vamos agora demonstrar a equivalência das formas (4.3.9) e (4.3.11). Substituindo (4.3.19) em (4.3.9)

$$\hat{z}^{(k)} = (I - P_{k-1}) \left[ (I - P_0 - \dots - P_{k-2}) \partial_+^k f - \hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-2)}|^2} \hat{z}^{(k-2)} + \right. \\ \left. \cdot \partial_+^{k-1} f \right] = (I - P_0 - \dots - P_{k-2} - P_{k-1}) (\partial_+^k f)$$

C.Q.D.

Como já foi dito anteriormente, todos os cálculos foram feitos para o modelo generalizado, a única dificuldade consiste em se encontrar uma matriz  $f$  ( $n \times p$ ) que satisfaça à condição (4.2.2) e cujo módulo ao quadrado seja inversível; como foi mencionado na seção anterior, isso não é muito fácil de ser feito. Quando não for possível esse procedimento, pode ser utilizado o esquema da seção anterior de se considerar  $p$   $n$ -vetores e, como as soluções obtidas são mutuamente ortogonais, pode-se considerar cada um desses  $n$ -vetores como um  $Z^k$  com diferentes valores para  $K$ .

Vamos ver agora como se escreve a ação e a carga topológica dessas soluções.

Pela eq. (3.1.87)

$$D_+ Z^{(k)} = (I - P_k) (\partial_+ \hat{z}^{(k)}) |\hat{z}^{(k)}|^{-1} = \\ = (I - P_k) (I - P_0 - \dots - P_{k-1}) \partial_+^{k+1} f \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} = \\ = (I - P_0 - \dots - P_k) \partial_+^{k+1} f \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} = \hat{z}^{(k+1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|}$$

Então

$$|D+Z^{(k)}|^2 = \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \quad (4.3.25)$$

Utilizando novamente a equação (3.1.87 )

$$D_{-Z}^{(k)} = (I-P_k)(\partial_{-}\hat{z}^{(k)}) |\hat{z}^{(k)}|^{-1} = -\hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|$$

e

$$|D_{-Z}^{(k)}|^2 = |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \quad (4.3.26)$$

Substituindo (4.3.25) e (4.3.26) nas eqs. (3.1.78) e (3.1.79) obtemos:

$$S^{(k)} = 2\text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} + \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \right] d^2x \quad (4.3.27)$$

$$Q^{(k)} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \int d^2x \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} - \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \right] \quad (4.3.28)$$

Para o modelo  $CP^{n-1}$ , o módulo é um número, o que faz com que as expressões se simplifiquem um pouco.

$$S^{(k)} = 2\text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} + |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \right] d^2x \quad (4.3.29)$$

e

$$Q^{(k)} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} - |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \right] d^2x \quad (4.3.30)$$

Uma vez dada a forma funcional da matriz f, todas as outras quantidades são facilmente calculáveis; vamos ilustrar com

$$|D+Z^{(k)}|^2 = \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \quad (4.3.25)$$

Utilizando novamente a equação (3.1.87 )

$$D_{-Z}^{(k)} = (I-P_k)(\partial_{-}\hat{z}^{(k)}) |\hat{z}^{(k)}|^{-1} = -\hat{z}^{(k-1)} \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} |\hat{z}^{(k)}|$$

e

$$|D_{-Z}^{(k)}|^2 = |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} \quad (4.3.26)$$

Substituindo (4.3.25) e (4.3.26) nas eqs. (3.1.78) e (3.1.79) obtemos:

$$S^{(k)} = 2\text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} + \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \right] d^2_x \quad (4.3.27)$$

$$\tilde{Q}^{(k)} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \int d^2_x \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} - \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|} \right] \quad (4.3.28)$$

Para o modelo  $CP^{n-1}$ , o módulo é um número, o que faz com que as expressões se simplifiquem um pouco.

$$S^{(k)} = 2\text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} + |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \right] d^2_x \quad (4.3.29)$$

e

$$\tilde{Q}^{(k)} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \int \left[ |\hat{z}^{(k)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k-1)}|^2} - |\hat{z}^{(k+1)}|^2 \frac{1}{|\hat{z}^{(k)}|^2} \right] d^2_x \quad (4.3.30)$$

Uma vez dada a forma funcional da matriz  $f$ , todas as outras quantidades são facilmente calculáveis; vamos ilustrar com

um exemplo simples, considerando

$$\hat{z}^{(0)} = f = \begin{pmatrix} x_+^2 + 1 \\ x_+^2 - 1 \\ 2x_+ \end{pmatrix} \quad (4.3.31)$$

Essa solução corresponde a uma solução de 2 anti-instantons para o modelo  $CP^2$  o que pode ser visto substituindo (4.3.31) em (4.3.29) e (4.3.30), obtendo-se:

$$\mathcal{Q}^{(0)} = -2 \quad e \quad S^{(0)} = 4\pi$$

uma vez que

$$\hat{z}^{(1)} = (I - P_0) \partial_+ f = \begin{pmatrix} 2(x_+ - x_-) \\ 2(x_+ + x_-) \\ 2(1 - x_+ x_-) \end{pmatrix} \quad (4.3.32)$$

que, por sua vez, corresponde a

$$\mathcal{Q}^{(1)} = 0 \quad e \quad S^{(1)} = 8\pi$$

com

$$\hat{z}^{(2)} = (I - P_0 - P_1) \partial_+^2 f = 2 \begin{pmatrix} (1 + x_-^2) \\ (1 - x_-^2) \\ -2x_- \end{pmatrix} \quad (4.3.33)$$

que é na verdade uma solução de 2 instantons com

$$\mathcal{Q}^{(2)} = 2 \quad e \quad S^{(2)} = 4\pi$$

#### 4.4 - Soluções Tipo Meron

Merons são configurações de campo localizadas que possuem carga topológica semi-inteira e ação que diverge como o logaritmo do volume do espaço-tempo <sup>(39-40)</sup>.

Para o modelo  $CP^{n-1}$  uma solução não autodual tipo Meron que é uma simples generalização da solução para o modelo  $O(3)$  pode ser escrita como

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \bar{f}(x_\mu) u + v \right] \quad (4.4.1)$$

onde

$$|f|^2 = 1$$

e  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  são vetores constantes que satisfazem

$$u^\dagger u = v^\dagger v = 1$$

e

$$u^\dagger v = 0$$

Substituindo (4.4.1) na eq. (3.1.88) obtemos

$$\partial_- \partial_+ f + \frac{1}{2} \left[ |\partial_+ f|^2 + |\partial_- f|^2 \right] f = 0 \quad (4.4.2)$$

É claro que somente soluções não autoduais podem ser obtidas dessa maneira. Escolhendo, por exemplo

$$f = \sqrt{\frac{(x_+ - \alpha)(x_- - \beta^*)}{(x_- - \alpha^*)(x_+ - \beta)}} \quad (4.4.3)$$

e substituindo nas eqs. (3.1.72) e (3.1.73), encontramos

$$L = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{(x_+ - \alpha)} - \frac{1}{(x_+ - \beta)} \right|^2 \quad (4.4.4)$$

e

$$Q = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{(\vec{x} - \vec{\alpha})}{(\vec{x} - \vec{\alpha})^2} - \frac{(\vec{x} - \vec{\beta})}{(\vec{x} - \vec{\beta})^2} \right] = -\pi \left[ \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}) \right] \quad (4.4.5)$$

onde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e  $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$ .

Para uma configuração de n-merons, podemos escrever

$$f = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{(x_+ - \beta_i)}{(x_- - \alpha_i^*)}} \quad (4.4.6)$$

Podemos estender essa solução para o modelo  $U(n,p)$  adotando o procedimento da seção 4.2 mas, como essa é uma solução obtida para o modelo  $O(3)$  e generalizada para o modelo  $CP^{n-1}$ , ela é de caráter muito particular.



## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Devido ao grande interesse pelos modelos  $\sigma$  não lineares como laboratório teórico para a Q.C.D., apresentamos o modelo  $CP^{n-1}$  generalizado que tem  $U(p)$  como grupo de Gauge. Formalmente, o modelo  $U(n,p)$  é análogo ao modelo  $CP^{n-1}$  sendo que os campos  $Z$  são representados por matrizes retangulares.

Estudamos as relações do modelo  $U(n,p)$  com a teoria de grupos, escrevendo-o como uma realização sobre o espaço quociente.

Derivamos as equações de movimento, escrevendo-as nas diversas formulações existentes, bem como as correntes conservadas de Noether e, a partir dessas, verificamos a existência de um número infinito de correntes conservadas.

De posse das equações de movimento, buscamos soluções para elas. Primeiramente, na Seção 4.1 apresentamos soluções de instanton para o modelo  $CP^{n-1}$ . Na Seção 4.2 verificamos que, apesar de estarmos lidando com um modelo generalizado, tivemos que impor fortes restrições sobre os campos, além das já existentes, para a obtenção de soluções, pela impossibilidade de se resolver no caso geral um sistema de  $n$  equações não lineares acopladas. Esse fato nos impediu de encontrar uma sistemática para a obtenção de soluções gerais de instanton; portanto apresentamos somente soluções particulares.

Na Seção 4.3 apresentamos uma maneira de se gerar uma família de soluções não autoduais com ação finita a partir de soluções de instanton válida para os modelos  $CP^{n-1}$  e  $U(n,p)$ . Enquanto método matemático o procedimento parece-nos eficaz, entretanto do ponto de vista físico é necessário se estudar ainda a contribuição dessas soluções.

Na Seção 4.4 apresentamos uma solução de meron para esses modelos que é de caráter bastante particular pelos mesmos motivos descritos acima.

## APÊNDICE A

### O MODELO $U(n,p)$ ESCRITO EM TERMOS DE CAMPOS PROJETORES

Definimos o campo projetor complexo como

$$P = ZZ^\dagger \quad (\text{A.1})$$

Para escrever a densidade Lagrangeana em termos desses campos, notamos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} P(\partial_\mu P)(\partial_\nu P) &= ZZ^\dagger(\partial_\mu ZZ^\dagger)(\partial_\nu ZZ^\dagger) = \\ &= ZZ^\dagger(\partial_\mu Z)Z^\dagger(\partial_\nu Z)Z^\dagger + ZZ^\dagger(\partial_\mu Z)(\partial_\nu Z^\dagger) + \\ &+ Z(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\nu Z)Z^\dagger + Z(\partial_\mu Z^\dagger)Z(\partial_\nu Z^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Quando  $\mu = \nu$

$$P(\partial_\mu P)(\partial_\mu P) = Z(Z^\dagger\partial_\mu Z)^2Z^\dagger + Z(\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z)Z^\dagger \quad (\text{A.3})$$

Tomando o traço da eq. (A.3) obtemos

$$\text{Tr } P(\partial_\mu P)(\partial_\mu P) = \text{Tr} \left\{ (Z^\dagger\partial_\mu Z)^2 + (\partial_\mu Z^\dagger)(\partial_\mu Z) \right\}$$

Comparando com a eq. (3.1.4):

$$L = \text{Tr } P (\partial_\mu P) (\partial_\mu P) \quad (\text{A.4})$$

A densidade Lagrangeana pode também ser escrita de outra maneira mais conveniente para a obtenção das equações de movimento.

Observando que

$$\begin{aligned} (\partial_\mu P) (\partial_\nu P) &= \partial_\mu (ZZ^\dagger) (\partial_\nu ZZ^\dagger) = \\ &= (\partial_\mu Z) Z^\dagger (\partial_\nu Z) Z^\dagger + (\partial_\mu Z) (\partial_\nu Z^\dagger) + Z (\partial_\mu Z^\dagger) (\partial_\nu Z) Z^\dagger + \\ &\quad + Z (\partial_\mu Z^\dagger) (Z \partial_\nu Z^\dagger) \end{aligned}$$

Quando  $\mu = \nu$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu P) (\partial_\mu P) &= (\partial_\mu Z) Z^\dagger (\partial_\mu Z) Z^\dagger + (\partial_\mu Z) (\partial_\mu Z^\dagger) + Z (\partial_\mu Z^\dagger) (\partial_\mu Z) Z^\dagger + \\ &\quad + Z (\partial_\mu Z^\dagger) Z (\partial_\mu Z^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Tomando o traço da equação (A.5) obtemos

$$\text{Tr} (\partial_\mu P) (\partial_\mu P) = 2 \text{Tr} \left\{ (Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 + (\partial_\mu Z^\dagger) (\partial_\mu Z) \right\}$$

Portanto

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu P) (\partial_\mu P) \quad (\text{A.6})$$

Agora vamos derivar as equações de movimento seguindo o mesmo procedimento da Seção 3.1; como  $P$  é um projetor, o vínculo é escrito como:

$$p^2 = p \quad (\text{A.7})$$

A Lagrangeana modificada escrita em termos das componentes fica:

$$\begin{aligned} L'(P) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu P_{ab})(\partial_\mu P_{ba}) + \lambda_{ab} (P_{bc}P_{ca} - P_{ba}) = \\ &= P_{ab}(\partial_\mu P_{bc})(\partial_\mu P_{ca}) + \lambda_{ab}(P_{bc}P_{ca} - P_{ba}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Portanto,

$$\frac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu P_{fg})} = \frac{1}{2} (\partial_\mu P_{ba}) \delta_{af} \delta_{bg} + \frac{1}{2} (\partial_\mu P_{ab}) \delta_{bf} \delta_{ag} = \partial_\mu P_{gf} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial P_{fg}} &= \lambda_{ab} P_{ca} \delta_{bf} \delta_{cg} + \lambda_{ab} P_{bc} \delta_{cf} \delta_{ag} - \lambda_{ab} \delta_{bf} \delta_{ag} = \\ &= \lambda_{af} P_{ga} + \lambda_{gb} P_{bf} - \lambda_{gf} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu \lambda_{ab})} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_{ab}} = P_{bc}P_{ca} - P_{ba} \quad (\text{A.12})$$

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_{ab}} - \partial_\mu \frac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu \lambda_{ab})} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial P_{ab}} - \partial_\mu \frac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu P_{ab})} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.11) e (A.12) em (A.13) recuperamos o vínculo; a substituição de (A.9) e (A.10) em (A.14) dá:

$$\square P = P\lambda + \lambda P - \lambda \quad (\text{A.15})$$

Para eliminar  $\lambda$ , multiplicamos a eq. (A.15) por  $P$ , primeiro à direita e depois à esquerda:

$$(\square P)P = P\lambda P \quad (\text{A.16})$$

$$P\square P = P\lambda P \quad (\text{A.17})$$

Igualando as expressões (A.16) e (A.17), obtemos as equações de movimento:

$$[P, \square P] = 0 \quad (\text{A.18})$$

que podem ser reescritas como

$$\partial_\mu [P, \partial_\mu P] = 0 \quad (\text{A.19})$$

As equações de movimento dadas pela eq. (A.19) nos permite a identificação das correntes de Noether

$$J_\mu = [P, \partial_\mu P] \quad (\text{A.20})$$

Naturalmente, a expressão (A.20) para a corrente, também poderia ter sido calculada utilizando-se o procedimento da Seção 2.1. Vamos agora calcular o tensor momento-energia: a expressão geral é

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu P_{ab})} \partial_\nu P_{ab} - \delta_{\mu\nu} L \quad (\text{A.21})$$

Substituindo a eq. (A.9), obtemos

$$\tau_{\mu\nu} = (\partial_{\mu} P_{ba})(\partial_{\nu} P_{ab}) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\partial_{\mu} P_{ab})(\partial_{\mu} P_{ba}) \quad (\text{A.22})$$

Para escrever a densidade de carga topológica, multiplicamos a eq. (A.2) por  $\epsilon_{\mu\nu}$  e tomamos o traço:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr } P(\partial_{\mu} P)(\partial_{\nu} P) &= \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} \left\{ Z^{\dagger}(\partial_{\mu} Z)Z^{\dagger}(\partial_{\nu} Z) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\mu} Z^{\dagger})(\partial_{\nu} Z) \right\} = \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr}(D_{\mu} Z)^{\dagger}(D_{\nu} Z) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Comparando (A.23) com a eq. (3.1.53)

$$Q(x) = i \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr } P(\partial_{\mu} P)(\partial_{\nu} P) \quad .$$

## APÊNDICE B

### CLASSIFICAÇÃO DE ALGUMAS SOLUÇÕES DO MODELO $U(n,p)$

Na Seção 4.2 vimos que podemos escrever algumas soluções para o modelo  $U(n,p)$  considerando  $p$   $n$ -vetores que sejam ortonormais e que obedecem à relação (4.2.4); vimos também que a forma mais simples de satisfazer essas restrições é escolher a base canônica. Nesse Apêndice vamos escrever soluções para alguns valores de  $n$  e  $p$  nesta base.

Observamos que quando  $n-p = 1$ , somente um vetor, do tipo  $CP^1$ , contribui para solução enquanto todos os outros são transformadas de Gauge. Isso se deve ao fato de um  $n$ -vetor ser representante de um espaço  $n$ -dimensional, portanto,  $n$  vetores linearmente independentes (L.I.) formam a base desse espaço. Como queremos representar  $n-1 = p$  vetores ortonormais na base canônica desse espaço  $n$ -dimensional, vemos que somente um vetor envolverá duas funções enquanto todos os outros envolverão apenas uma função cada. Mas, quando  $n-p=1$ , existe também uma solução  $CP^{n-1}$  devido à simetria existente entre os modelos  $U(n,p)$  e  $U(n,n-p) = U(n,1) = CP^{n-1}$ , respeitando-se a relação (4.2.10) existente entre  $P$  e  $P'$ . No Capítulo 4 mostramos o caso  $U(3,2)$ . Vejamos agora, como exemplo, o modelo  $U(4,3)$ . Num espaço a quatro dimensões a base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como queremos descrever três vetores nesta base, escolhemos por exemplo:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 = |\lambda|^2 = |h|^2 = 1$$

Todas as outras escolhas são equivalentes.  $Z_1$  é solução de  $CP^1$  enquanto que  $Z_2$  e  $Z_3$  não contribuem para a solução do problema.

Nos outros casos, para os quais  $n-p > 1$ , temos maior variedade de soluções. Vamos apresentar aqui alguns exemplos:

a)  $U(5,2)$  - Na base canônica, podemos descrever esse modelo de duas maneiras

$$(i) \quad Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \\ j(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 + |h|^2 = |\lambda|^2 + |j|^2 = 1$$

$Z_1$  descreve uma solução de  $CP^2$  enquanto  $Z_2$  descreve uma solução de  $CP^1$ .



(ii)

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ \lambda(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 + |\lambda|^2 + |h|^2 = |j|^2 = 1$$

$Z_1$  descreve uma solução de  $CP^3$ , enquanto que  $Z_2$  não contribui nas equações de movimento.

b)  $U(5,3)$  - Novamente, esse modelo pode ser escrito de duas maneiras utilizando-se a base canônica:

(i)

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(x_\mu) \\ j(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 = |h|^2 + |j|^2 = |\lambda|^2 = 1$$

$Z_1$  e  $Z_2$  descrevem soluções de  $CP^1$  e  $Z_3$  não contribui para a solução.

(ii)

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 + |h|^2 = |j|^2 = |\lambda|^2 = 1 \quad .$$

$Z_1$  descreve uma solução de  $CP^2$  enquanto que  $Z_2$  e  $Z_3$  não contribuem para a solução.

c)  $U(6,3)$  - Na base canônica, esse modelo pode ser escrito de três maneiras diferentes:

$$(i) \quad Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ \lambda(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 + |h|^2 + |\lambda|^2 = |k|^2 = |j|^2 = 1$$

$Z_1$  descreve uma solução do modelo  $CP^3$  e  $Z_2$  e  $Z_3$  não contribuem para a solução.

$$(ii) \quad Z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \\ j(x_\mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 + |h|^2 = |\lambda|^2 + |j|^2 = |k|^2 = 1$$

$Z_1$  descreve uma solução de  $CP^2$ ,  $Z_2$  descreve uma solução de  $CP^1$  e  $Z_3$  não contribui para a solução.

$$(iii) \quad z_1 = \begin{pmatrix} f(x_\mu) \\ g(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda(x_\mu) \\ h(x_\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j(x_\mu) \\ k(x_\mu) \end{pmatrix}$$

$$|f|^2 + |g|^2 = |\lambda|^2 + |h|^2 = |j|^2 + |k|^2 = 1$$

$z_1, z_2$  e  $z_3$  descrevem soluções de  $CP^1$ .

Essa classificação pode ser feita para qualquer valor de  $n$  e  $p$ .

## REFERÊNCIAS

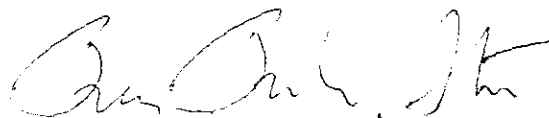
- (1) - Gell-Mann, M.; Lévy, M. - The Axial Vector Current in Beta Decay - Nuovo Cimento 16 (1960) 705.
- (2) - Ebert, D.; Volkov, M.K. - Meson Interactions within Nonlinear Chiral Theories - Fortschritte Der Physik 29(1981)35.
- (3) - Itzykson, C.; Zuber, J.B. - Quantum Field Theory - McGraw-Hill Inc. (1980), Cap. 11.
- (4) - Coleman, S.; Wess, J.; Zumino, B. - Structure of Phenomenological Lagrangians, I - Physical Review 177 (1969) 2239.
- (5) - Callan Jr., C.G.; Coleman, S.; Wess, J.; Zumino, B. - Structure of Phenomenological Lagrangians, II - Physical Review 177 (1969) 2247.
- (6) - Zumino, B. - Non-Linear Realization of Supersymmetry in De Sitter Space - CERN Pre-Print Ref. TH.2316 (1977).
- (7) - Salam, A.; Strathdee, J. - Nonlinear Realizations, I and II - Physical Review 184 (1969) 1750.
- (8) - Barbashov, B.M.; Nesterenko, V.V. - Differential Geometry and Nonlinear Field Models - Fortschritte Der Physik, 28 (1980) 427.
- (9) - D'Adda, A.; Lüscher, M. - Topology and Higher Symmetries of the Two-Dimensional Non-Linear  $\sigma$  Model - Physics Reports 49(1979)239.
- (10) - Alfaro, V. De; Fubini, S.; Furlan, G. - Nonlinear  $\sigma$  Models and Classical Solutions - Il Nuovo Cimento 48A(1978)485.
- (11) - Gross, D.J. - Meron Configurations in the Two-Dimensional  $O(3)$   $\sigma$  Model - Nuclear Physics, 132B(1978)439.
- (12) - D'Adda, A.; Lüscher, M.; Di Vecchia, P. - A  $1/n$  Expandable Series of Non-Linear  $\sigma$  Models with Instantons, Nuclear Physics, 146B(1978)63.

- (13) - Eichenherr, H. - SU(N) Invariant Non-Linear  $\sigma$  Models, Nuclear Physics 146B(1978)215.
- (14) - Eichenherr, H.; Forger, M. - On the Dual Symmetry of the Non-Linear Sigma Models - Nuclear Physics 155B(1979)381.
- (15) - Eichenherr, H.; Forger, M. - More About Non-Linear Sigma Models on Symmetric Spaces - Nuclear Physics 164B(1980)528.
- (16) - Witten, E. - Instantons, The Quark Model, and the  $1/n$  Expansion - Nuclear Physics 149B(1979)285.
- (17) - Lüscher, M. - The Secret Long Range Force in Quantum Field Theories with Instantons - Physics Letters 78B(1978)465.
- (18) - Golo, V.L.; Perelomov, A.M. - Solution of the Duality Equations for the Two-Dimensional SU(N) - Invariant Chiral Model - Physics Letters 79B(1978)112.
- (19) - Srivastava, P.P. - Instanton and Meron Solutions for Generalized  $CP^{n-1}$  Model - Lettere al Nuovo Cimento 31(1981)375.
- (20) - Aoyama, S. - The Supersymmetric  $U_{N,r}$   $\sigma$ -Model and Its  $O_2$  Extended Supersymmetry - Il Nuovo Cimento 57A(1980)176.
- (21) - Duane, S. - Generalizations of  $CP^{n-1}$  with Non-Abelian Gauge Symmetry in  $2+\epsilon$  Dimensions - Nuclear Physics B168(1980)32.
- (22) - Brézin, E.; Hikami, S.; Zinn-Justin, J. - Generalized Non-Linear  $\sigma$ -Models with Gauge Invariance - Nuclear Physics B165(1980)528.
- (23) - Perelomov, A.M. - Instantons and Kähler Manifolds - Commun. Math. Phys. 63(1978)237.
- (24) - MacFarlane, A.J. - The SU(N+1) Model or  $CP^N$  Model as a Non-Linear Realization of SU(N+1) Symmetry - Nuclear Physics B152(1979)145.
- (25) - MacFarlane, A.J. - Generalizations of  $\sigma$ -Models and  $CP^N$  Models, and Instantons - Physics Letters 82B(1979)239.

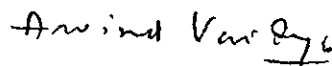
- (26) - Gilmore, R. - Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications - John Wiley & Sons, Inc. (1974). Caps.1-9.
- (27) - Maia, M.D. - II Escola de Cosmologia e Gravitação, Volume I - Editado por M. Novello - CBPF (1980).
- (28) - Naïmark, M.; Stern, A - Théorie des Représentations des Groupes, Éditions MIR (1979) - Cap. I.
- (29) - Wybourne, B.G. - Classical Groups for Physicists - John Wiley & Sons, Inc. (1974) - Caps. 3 - 6, 9 e 16.
- (30) - Dubois-Violette, M.; Georgelin, Y. - Gauge Theory in Terms of Projector Valued Fields - Physics Letters 82B(1979)251.
- (31) - Brézin, E.; Itzykson, C.; Zinn-Justin, J.; Zuber, J.B - Remarks About the Existence of Non-Local Charges in Two-Dimensional Models - Physics Letters 82B(1979)442.
- (32) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - Stability Properties of Classical Solutions to Non-Linear  $\sigma$  Models - Nuclear Physics B168(1980)173.
- (33) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - Embeddings of Classical Solutions of  $O_{2p+1}$  Nonlinear  $\sigma$ -Models in  $CP^{n-1}$  Models - Lettere al Nuovo Cimento 28(1980)121.
- (34) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - General Classical Solutions in the  $CP^{n-1}$  Model - Nuclear Physics B174(1980)395.
- (35) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - Properties of General Classical  $CP^{n-1}$  Solutions - Physics Letters 95B(1980)419.
- (36) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - Interpretation and Further Properties of General Classical  $CP^{n-1}$  Solutions - Nuclear Physics B182(1981)151.
- (37) - Din, A.M.; Zakrzewski, W.J. - Classical Solutions in Grassmanian  $\sigma$ -Models - unpublished.
- (38) - Borchers, H.J.; Gärker, W.D. - Local Theory of Solutions for the  $O(2k+1)$   $\sigma$ -Model - Commun. Math.Phys. 72(1980)77.

- (39) - Butera, P.; Cicutta, G.M.; Enriotti, M. - Singular Classical Solutions of Euclidean Field Theories - Physical Review D 20 (1979) 456.
- (40) - Alfaro, V. De; Fubini, S.; Furlan, G. - A New Classical Solution of the Yang-Mills Field Equations - Physics Letters 65B(1976)163.
- (41) - Porteous, I.R. - Topological Geometry - Van Nostrand Reinhold Company - 1a. Ed. (1969), Cap. 12, pg. 231-232.
- (42) - Lüscher, M.; Pohlmeyer, K. - Scattering of Massless Lumps and Non-Local Charges in the Two Dimensional Classical Non-Linear  $\sigma$ -Model - Nucl. Phys. B137 (1978) 46.

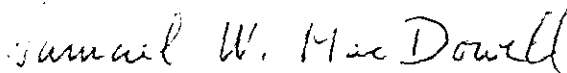
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



PREM PRAKASH SRIVASTAVA  
Presidente



ARVIND NARAYAN VAIDYA



SAMUEL WALLACE MAC DOWELL

Rio de Janeiro, 22 de abril de 1982