

José Martins Salim

EQUAÇÕES QUASE-MAXWELLIANAS DA GRAVITAÇÃO: APLICAÇÃO ÀS
PERTURBAÇÕES DOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN

Tese de

DDUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Agosto de 1982

- A Mario Novello
com quem reencontrei a alegria
de pensar o Universo.

AGRADECIMENTOS

A Mario Novello pela minha formação científica, pela orientação recebida neste trabalho, pelo seu exemplo e incentivo constantes, pelo seu humor e alegria.

A H. Heitzmann pelas conversas e discussões sobre este trabalho e pelas horas alegres que passamos juntos.

A J. Plebanski pelas tardes maravilhosas que me proporcionou falando sobre física e ficção científica.

A José Ronaldo pelo seu interesse, incentivo e amizade, decisivos na realização deste trabalho.

À Helena, pela boa vontade e excelente trabalho de datilografia.

À Carmen, minha mãe, pelo apoio e ajuda recebidos na revisão deste trabalho.

À Mônica por me haver mostrado um outro sentido das estrelas.

A Luiz Alfredo Garcia Rosa pelos comentários e discussões relativos a este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos de forma sistemática a teoria das perturbações de modelos cosmológicos segundo o método das equações quasi-Maxwellianas. O exame é então restrito aos modelos de Friedmann. A generalização das perturbações a fontes imperfeitas (capazes de representarem campos eletromagnéticos, neutrinos,...) é feita de um modo direto, simples e esclarecedor. O método empregado permite uma interpretação física das perturbações do modelo base sem defrontar-se com as dificuldades devidas à invariância de Gauge da teoria. Mostramos que o modelo de Friedmann é instável por perturbações de vorticidade do fluido, para determinadas equações de estado. Mostramos também que o estudo de ondas gravitacionais não pode ser feito independentemente do acoplamento com a matéria. Reencontramos os resultados obtidos por Lifshitz relativos a perturbações da densidade de matéria e mostramos que algumas soluções, consideradas na literatura como fisicamente aceitáveis, são simples transformações de coordenadas.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE TABELAS	vi
<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO I</u> - <i>FORMALISMO MATEMÁTICO</i>	5
<u>CAPÍTULO II</u> - <i>MODELO DE FRIEDMANN</i>	27
<u>CAPÍTULO III</u> - <i>PERTURBAÇÕES</i>	36
<u>CAPÍTULO IV</u> - <i>PERTURBAÇÕES ESCALARES</i>	47
<u>CAPÍTULO V</u> - <i>PERTURBAÇÕES VETORIAIS</i>	61
<u>CAPÍTULO VI</u> - <i>PERTURBAÇÕES TENSORIAIS</i>	70
<u>CONCLUSÃO</u>	86
<u>APÊNDICE A</u> - <i>ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MÉTRICAS TIPO FRIEDMANN</i>	89
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	109

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
2.1 - Quantidades fundamentais do Universo de Friedmann. A constante λ é especificada pela equação de estado, $p = \lambda\rho$, que relaciona a pressão com a densidade de energia. O raio do Universo é dado pela função $a(\eta)$. O fator de expansão θ mede a variação do volume V por unidade de volume. Tomamos o sistema de unidades onde $k = 1$ e $c = 1$	35

Do rigor na ciência

... Naquele Império, a Arte da Cartografia atingiu uma tal Perfeição que o Mapa de uma só Província ocupava toda uma Cidade, e o Mapa do Império, toda uma Província. Com o tempo, esses Mapas Desmedidos não satisfizeram e os Colégios de Cartógrafos levantaram um Mapa do Império que tinha o Tamanho do Império e coincidia ponto por ponto com ele. Menos Apegados ao Estudo da Cartografia, as Gerações Seguintes entenderam que esse extenso Mapa era Inútil e não sem Impiedade o entregaram às Inclemências do Sol e dos Invernos. Nos Desertos do Deste subsistem despedaçadas Ruínas do Mapa, habitadas por Animais e por Mendigos. Em todo o País não resta outra relíquia das Disciplinas Geográficas.

(*Suárez Miranda*, livro quarto).

SPINOZA

Las traslúcidas manos del judío
Labran en la penumbra los cristales
Y la tarde que muere es miedo y frío.
(Las tardes a las tardes son iguales.)
Las manos y el espacio de jacinto
Que palidece en el confin del Ghetto
Casí no existen para el hombre quieto
Que está soñando un claro laberinto.
No lo turba la fama, ese reflejo
De sueños en el sueño de otro espejo,
Ni el temeroso amor de las doncellas.
Libre de la metáfora y del mito
Labra un arduo cristal: el infinito
Mapa de aquél que es todos sus estrellas.

B.L. *Borges*

INTRODUÇÃO

A teoria de perturbações em modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos tem recebido a atenção e esforço de muitos autores desde o trabalho pioneiro de Lifshitz em 1946. Em que pese esse esforço muitas questões permaneceram sem uma solução satisfatória, entre essas as mais notáveis são a interpretação física das perturbações dos modelos e a dificuldade apontada por Geroch relativa à existência do limite de métrica quando a perturbação dessa se anula.

Esses problemas se originam na liberdade de efetuar transformações de Gauge na teoria da gravitação de Einstein. Ao analisar a questão de perturbações somos levados a tratar com dois espaço-tempos: um que denominamos de espaço-tempo base e que no nosso caso é representado pela métrica de Robertson-Walker; outro, o espaço-tempo perturbado que representa a física em questão. As coordenadas dos dois espaço-tempo são identificadas e os pontos de um são relacionados por um mapeamento a pontos do outro espaço-tempo. A uma mudança da relação estabelecida entre os dois espaço-tempos, mantendo as coordenadas fixas, chamamos transformação de Gauge. A perturbação de uma dada quantidade é definida como sendo a diferença entre o valor dessa no espaço-tempo físico e o valor que ela possui no ponto correspondente do espaço-tempo base.

Ainda que uma dada quantidade seja escalar sob transformações de coordenadas, o valor da perturbação dessa quantida-

de não é invariante sob transformações de gauge se a quantidade é não nula e dependente de ponto no espaço-tempo base. Um exemplo é a densidade de matéria. A particular condição de gauge imposta para simplificar a forma da métrica e as demais perturbações deixa uma liberdade de gauge residual, que é responsável pelo aparecimento de soluções não físicas e que devem ser eliminadas. Essa dificuldade, que consiste em encontrar o conteúdo físico das perturbações, é característica do tratamento usual, (Lifshitz, 1946) do problema de perturbações.

Seguimos aqui uma outra abordagem do problema de perturbações e que foi sugerido, já há algum tempo (Hawking, 1966). O método se baseia numa representação das equações de Einstein, particularmente distinta da convencional e tem sua origem nos trabalhos de Jordan e colaboradores ⁽⁶³⁾. Esse método será descrito com detalhes no Capítulo I.

Hawking notou que a formulação de Jordan et al. (que denotaremos representação quasi-Maxwelliana) da Teoria da Relatividade de Einstein possui a vantagem de utilizar apenas quantidades físicas, diretamente mensuráveis. O método torna-se extremamente simples se o tensor de Weyl da métrica do espaço-tempo base é nulo. Esse é precisamente o caso das métricas do tipo -Friedmann (Robertson-Walker). A razão disto é que sendo nulo o tensor de Weyl ($C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, veja Capítulo I) do espaço-tempo base, qualquer quantidade pequena $\delta C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ representa então uma verdadeira perturbação de espaço-tempo e não uma mera transformação de coordenadas. Assim, no método que utilizamos a especificação das quantidades que são invariantes por uma transformação de Gauge é simples e inequívoca. Para convencermo-nos disto, basta verificar os parâmetros cinemáticos do fluido que são nulos no

espaço-tempo base e constituem, juntamente com o tensor de Weyl, as variáveis necessárias para caracterizar o comportamento das perturbações do modelo. Essas variáveis são nulas no modelo base e permanecem nulas sob toda alteração devida a uma transformação de gauge. Esse fato estabelece um critério único para resolver a dificuldade de separar as perturbações não fisicamente significativas. Assim, a dificuldade relativa ao limite da métrica quando as perturbações dessa se anulam, é evitada. O campo gravitacional é representado pelas partes magnéticas e elétricas do tensor de Weyl que são nulas no espaço-tempo base. O modelo não perturbado é reencontrado no limite em que as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl se anulam.

A nossa motivação para desenvolver o presente trabalho é dupla. Vamos generalizar o método de Hawking introduzindo fluidos imperfeitos permitindo o tratamento de perturbações geradas por campos eletromagnéticos e neutrinos, corrigir suas equações, analisar o conjunto completo do sistema quasi-Maxwelliano de perturbações. Essa revisão crítica é necessária uma vez que os resultados anteriores devidos a Hawking (1966) e Olson (1976) são incompletos e contêm alguns erros.

No primeiro capítulo estabelecemos a formulação Quasi-Maxwelliana da Teoria da Gravitação de Einstein. No capítulo II geramos a solução de Friedmann como exemplo da utilização dessa formulação. No terceiro capítulo estabelecemos a teoria geral das perturbações. Escolhemos desenvolver nosso estudo em um sistema de base completa de harmônicos esféricos escalares, vetoriais e tensoriais. Essa decomposição constitui a generalização do espectro de Fourier das perturbações dos modelos tipo-Friedmann

para tri-seções não euclidianas. Nos capítulos IV, V e VI a parte escalar, vetorial e tensorial, respectivamente é analisada.

CAPÍTULO I

FORMALISMO MATEMÁTICO

Neste capítulo fazemos a apresentação sucinta dos conceitos e do formalismo matemático básico utilizado neste trabalho. Muitas das equações aqui apresentadas serão retomadas recebendo um tratamento mais detalhado em outros capítulos, a nossa intenção aqui é apenas estabelecer uma notação unificada e dar ao leitor uma síntese do método utilizado para tratar as equações de Einstein da gravitação.

Seja M_4 uma variedade pseudo-Riemanniana de dim-4 . Adotamos para o tensor métrico a assinatura $(+,-,-,-)$. Os objetos geométricos (tensores) serão representados por suas componentes relativas às bases canônicas $(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e dx^α) onde $\{x^\alpha\}$ ($\alpha = 0,1,2,3$) é um sistema de coordenadas arbitrário.

OBSERVADOR - Assumimos que existe um campo vetorial \vec{V} definido em cada ponto do espaço-tempo e que esse vetor satisfaz a condição

$$g(\vec{V}, \vec{V}) > 0 \tag{1.1}$$

Dado um ponto P da variedade é sempre possível encontrar coordenadas (ct, y^i) tais que P e uma vizinhança desse ponto, sejam determinadas pelas coordenadas (ct_0, y_0^i) e $[\bar{c}(t_0 + \delta t),$

$y_0^i + \delta y^i$]. Essas coordenadas são definidas de tal maneira que o vetor \vec{V} tem por componentes

$$V^\alpha \equiv \delta^\alpha_0 \quad . \quad (1.2)$$

O símbolo * significa que a igualdade só é válida no particular sistema de coordenadas em questão. Essas coordenadas são denominadas coordenadas comoventes locais. O campo de vetores V^α tem associado uma congruência de curvas γ determinadas pela equação diferencial:

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = V^\alpha \quad (1.3)$$

Sendo $\{y^\alpha\}$ o sistema de coordenadas comoventes locais, segue de (1.2) e (1.3) que

$$\begin{aligned} y^0 &= s \\ y^i &= \text{cte} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \end{aligned} \quad (1.4)$$

A constante caracteriza a particular curva da congruência γ .

TENSOR DE PROJEÇÃO - É um tensor construído com o campo \vec{V} e a métrica g pela definição:

$$h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta \quad (1.5)$$

Esse objeto tem as seguintes propriedades:

a) É efetivamente um operador de projeção , isto é:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\gamma = h^\alpha_\gamma \quad . \quad (1.6)$$

b) Projeta ortogonalmente a V

Seja \vec{X} um vetor arbitrário de M_4 e $\perp X^\alpha \equiv \hat{X}^\alpha \equiv h^\alpha_\beta X^\beta$ a sua projeção então:

$$V_\alpha \perp X^\alpha = V_\alpha h^\alpha_\beta X^\beta \quad (1.7)$$

c) O projetor h^α_β determina um sub-espaco $H \subset T_p$ onde T_p é o espaço-tangente gerado pelos vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$.

d) O tensor h^α_β permite separar o espaço-tempo localmente em espaço e tempo:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (V_\alpha dx^\alpha)^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.8)$$

A distância entre dois pontos vizinhos fica dividida em um intervalo de tempo $d\tau = V_\alpha dx^\alpha$ e uma distância espacial $d\ell = \left[h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right]^{1/2}$.

e) Quando $d\tau$ é uma 1-forma exata os espaços locais determinados por $h_{\alpha\beta}$ mesclam-se formando uma hipersuperfície $S \subset M_4$. O tensor $h_{\alpha\beta}$ é a métrica dessa hipersuperfície e determina univocamente uma afinidade em S . A afinidade induzida em S por $h_{\alpha\beta}$ é caracterizada pelas relações:

$$h^\beta_\alpha h^\delta_\gamma V_\beta \perp X_\delta \equiv \hat{V}_\alpha \perp X_\gamma \quad (1.9)$$

$$\hat{V}_\alpha h_{\beta\gamma} = 0 \quad (1.10)$$

$$\hat{V}_\alpha \left[\hat{V}_\beta \right] f = 0 \quad (1.11)$$

onde f é um campo escalar arbitrário.

ELEMENTO DE VOLUME - É o volume elementar associado ao espaço instantâneo perpendicular a \vec{V} :

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\delta \quad (1.12)$$

O tensor totalmente antissimétrico $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é definido por:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.13)$$

O objeto $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é a densidade tensorial conhecida na literatura por símbolo de Levi-Civita (22).

O tensor $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ satisfaz a propriedade:

$$\eta^{\sigma\nu\rho\xi} \eta_{\epsilon\lambda\alpha\beta} = -\delta^{\sigma}_{\epsilon} \delta^{\nu}_{\lambda} \delta^{\rho}_{\alpha} \delta^{\xi}_{\beta} \quad (1.14)$$

O colchete que aparece na expressão (1.14) é o símbolo de anti-simetria total definido por:

$$A_{[\alpha\beta]} = A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}$$

Vamos introduzir também o símbolo de simetria total definido por:

$$A_{(\alpha\beta)} = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} \quad (1.16)$$

POSIÇÃO RELATIVA - Considere dois observadores vizinhos A e B, no sistema de coordenadas comovente associado. Eles serão marcados por y^i e $y^i + \delta y^i$. Definimos vetor conexão como o vetor \vec{Z} de componentes $Z^0 = 0$, $Z^i = \delta y^i$. Esse vetor conecta os observadores A e B. Em um sistema arbitrário de coordenadas as compo-

entes desse vetor serão $Z^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial Y^i} \delta Y^i$.

Por cálculo direto (14) podemos mostrar que:

$$\dot{Z}^\alpha = Z^\alpha_{||\beta} V^\beta = V^\alpha_{||\beta} Z^\beta \quad (1.17)$$

Em geral um vetor conexão não está contido no espaço perpendicular a \vec{V} , isto é, em H. Definimos vetor posição relativa entre A e B, e denotamos $\perp Z^\alpha$, a projeção de Z^α perpendicular ao vetor \vec{V} que caracteriza o observador A. Escrevemos:

$$\perp Z^\alpha = h^\alpha_\beta Z^\beta = (\delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta) Z^\beta \quad (1.18)$$

VELOCIDADE - De (1.3) e (1.8), podemos verificar que ds/c é o tempo do observador caracterizado por V. Definimos velocidade relativa entre A e B como:

$$v^\alpha = h^\alpha_\beta (\perp Z^\alpha)_{||\delta} V^\delta \quad (1.19)$$

Utilizando (1.17) nessa relação segue diretamente que:

$$v^\alpha = v^\alpha_\beta \perp Z^\beta \quad (1.20)$$

onde

$$v_{\alpha\beta} = h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta v_{\gamma||\delta} \quad (1.21)$$

CINEMÁTICA - A expressão (1.20) nos dá que a velocidade relativa de dois observadores é obtida por uma transformação linear sobre o vetor posição relativa desses observadores, sendo a matriz dessa transformação dada por (1.21). Vamos examinar agora

a cinemática desse movimento e para isso, a matriz $V_{\alpha\beta}$.

A matriz $V_{\alpha\beta}$ pode ser decomposta nas suas partes irreduzíveis, a saber:

$$\theta = V_{\alpha}^{\alpha} = V_{\parallel\alpha}^{\alpha} \quad (1.22)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = V_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad (1.23)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = V_{[\underline{\alpha}][\underline{\beta}]} \quad (1.24)$$

Apenas por conveniência de notação vamos definir

$$\theta_{\alpha\beta} = V_{(\alpha\beta)} \quad (1.25)$$

Utilizando essas quantidades podemos escrever o gradiente do vetor \vec{V} sob a forma

$$V_{\alpha\parallel\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \dot{V}_{\alpha} V_{\beta} , \quad (1.26)$$

onde $\dot{V}_{\alpha} = a_{\alpha} = V_{\alpha\parallel\beta} V^{\beta}$.

O vetor posição relativa pode ser decomposto em uma distância relativa $\delta\ell$ e uma direção $\vec{\eta}$:

$$\underline{z}^{\alpha} = \delta\ell \eta^{\alpha} \quad \text{onde} \quad \eta_{\alpha} \eta^{\alpha} = -1 \quad \text{e} \quad (\delta\ell)^2 = h_{\alpha\beta} z^{\alpha} z^{\beta} . \quad (1.27)$$

VARIAÇÃO DA DISTÂNCIA RELATIVA - Das eqs. (1.19) e (1.20) segue diretamente que:

$$\frac{(\delta \ell)^{\cdot}}{\delta \ell} = - \sigma_{\alpha\beta} \eta^{\alpha} \eta^{\beta} + \frac{1}{3} \theta \quad (1.28)$$

$$h^{\alpha}_{\beta} \dot{\eta}^{\beta} = \left[\sigma^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\beta} + (\sigma_{\mu\nu} \eta^{\mu} \eta^{\nu}) h^{\alpha}_{\beta} \right] \eta^{\beta} \quad (1.29)$$

Em cosmologia o observador é identificado com as partículas constituintes do fluido, fonte das equações de Einstein. Aplicando a eq. (1.26) a esse caso podemos definir uma lei de Hubble generalizada, válida para distâncias suficientemente grandes para garantir que o movimento aleatório local das partículas do fluido possa ser desprezado frente ao movimento médio das mesmas. Por outro lado, as distâncias envolvidas têm de ser suficientemente pequenas para que a relação linear da lei de Hubble seja aplicável e a distância dos objetos observados varie pouco durante o tempo despendido pela luz para chegar até ao observador ⁽²³⁾.

A eq. (1.29) nos dá a razão da variação da direção de terminada pelo objeto observado e o observador, em relação ao compasso de inércia. Por compasso de inércia entendemos uma base de vetores $\{\vec{e}_A \quad A = 1, 2, 3\}$, que satisfaz às equações:

$$h^{\alpha}_{\lambda} (h^{\lambda}_{\beta} e^{\beta}_A) \parallel_{\gamma} v^{\gamma} = 0 \quad (1.30)$$

Os vetores e_A podem ser associados à direção do momento angular de três giroscópios ⁽¹²⁾.

QUANTIDADES CINEMÁTICAS

a) Expansão - Segundo a eq. (1.28) $\theta_{\alpha\beta}$ determina a razão de variação de observadores vizinhos (em Cosmologia isso identi

tica-se com partículas do fluido cósmico, i.e., aglomerados de galáxias). A parte isotrópica desta variação é determinada pela expansão θ . É conveniente definir um fator de escala ou comprimento representativo ℓ através da equação:

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{1}{3} \theta . \quad (1.31)$$

O comprimento representativo ℓ , representa completamente o comportamento do volume local do fluido. A constante de Hubble, que mede o fator de expansão isotrópica é definida a partir do fator de escala ℓ como:

$$H = \frac{\dot{\ell}}{\ell} . \quad (1.32)$$

A curva $\ell(\tau)$ representa a média da variação da distância entre os aglomerados de galáxias como uma função do tempo próprio. A curvatura dessa curva é determinada pelo parâmetro de desaceleração q definido como:

$$q = - \frac{\ddot{\ell}}{\ell} H^{-2} . \quad (1.33)$$

Em modelos homogêneos e isotrópicos H e q são os observáveis da teoria.

- b) Tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$ - Mede a distorção que ocorre no fluido independentemente da variação eventual do volume ao longo das linhas de movimento do fluido.
- c) Vorticidade - O tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$ mede a rotação rígida entre dois observadores vizinhos (por exemplo, aglomera

dos de galáxias) com relação ao referencial inercial definido em (1.30). É conveniente introduzir o vetor ω^α definido como

$$\omega^\alpha = - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\beta\gamma} V_\delta \quad (1.34)$$

e conseqüentemente a sua inversa será:

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu\alpha\rho} \omega^\alpha V^\rho \quad . \quad (1.35)$$

A direção desse vetor determina o eixo de rotação de observadores vizinhos. Substituindo (1.34) em (1.29) para o caso em que $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ obtemos:

$$h^\alpha_\beta \dot{\eta}^\beta = \eta^\alpha_{\beta\mu\nu} \omega^\mu V^\nu \eta^\beta \quad . \quad (1.36)$$

O vetor ω^α é do tipo-espaço e seu módulo é determinado por

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} = - \omega^2 \quad . \quad (1.37)$$

DINÂMICA* - A aceleração relativa entre dois observadores vizinhos é obtida aplicando o operador $D/Ds \equiv V^\alpha \nabla_\alpha$ à equação (1.20). Temos:

$$\frac{D}{Ds} (\perp \frac{D}{Ds} \perp z^\alpha) = \frac{D}{Ds} (h^{\alpha\delta} h^{\beta\xi} V_{\delta\parallel\xi} h_{\beta\gamma} z^\gamma) \quad . \quad (1.39)$$

* As equações e os conceitos envolvidos nesta seção foram detalhadamente desenvolvidos na ref.(14). Aqui fazemos uma abordagem completa omitindo porém alguns detalhes de cálculo.

Dessa equação segue que:

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp \frac{D}{Ds} \perp z^\alpha = h^\alpha_\beta \left[R^\beta_{\eta\xi\gamma} v^\eta \perp z^\xi v^\gamma + \dot{v}^\alpha_{\parallel\gamma} \perp z^\gamma - \dot{v}^\alpha \dot{v}_\gamma \perp z^\gamma \right] \quad (1.40)$$

Esta expressão é conhecida na literatura com o nome de equação de Jacobi ⁽²⁵⁾. Ainda da eq. (1.20) obtêm-se a relação

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp \frac{D}{Ds} \perp z^\alpha = \perp (v^\alpha_\beta)^\cdot \perp z^\beta + v^\alpha_\beta v^\beta_\gamma \perp z^\gamma \quad . \quad (1.41)$$

Substituindo essa equação em (1.40) e considerando que o vetor $\perp z^\alpha$ é totalmente arbitrário obtemos:

$$h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta (v_{\gamma\delta})^\cdot + \dot{v}_\alpha \dot{v}_\beta - h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta \dot{v}_{\gamma\parallel\delta} + v_{\alpha\gamma} v^\gamma_\beta = R_{\alpha\lambda\beta\gamma} v^\lambda v^\gamma \quad . \quad (1.42)$$

Essa equação determina a evolução do tensor $v_{\alpha\beta}$ e , conseqüentemente, a evolução das quantidades cinemáticas θ , $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$.

Tomando o traço da eq. (1.39), após algumas simplificações diretas, obtemos:

$$\dot{\theta} - \dot{v}^\alpha_{\parallel\alpha} + 2(\sigma^2 + \omega^2) + \frac{1}{3} \theta^2 = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad . \quad (1.43)$$

Essa equação foi obtida, independentemente, por Landau e Raudhuri ⁽²⁶⁾.

Tomando a parte simétrica da eq. (1.42) e utilizando (1.43) para extrair o traço da equação resultante obtemos:

$$h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta \dot{\sigma}_{\gamma\delta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\rho} \sigma^\rho_\beta + \omega_{\alpha\rho} \omega^\rho_\beta - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} (\omega^2 + \sigma^2) + \dot{v}_\alpha \dot{v}_\beta +$$

$$+ \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \dot{V}^{\mu} \parallel_{\mu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{V}^{\dot{}}_{(\mu\parallel\nu)} = - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + R_{\alpha\gamma\rho\delta} V^{\gamma} V^{\delta} \quad . \quad (1.44)$$

A parte anti-simétrica da eq. (1.42) nos dá:

$$h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} (\omega_{\gamma\delta})^{\dot{}} + \sigma_{\alpha\rho} \omega^{\rho}_{\beta} + \omega_{\alpha\rho} \sigma^{\rho}_{\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} \dot{V}^{\dot{}}_{[\underline{\gamma}\parallel\delta]} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (1.45)$$

Todo o campo vetorial satisfaz ã seguinte equação:

$$V_{\alpha\parallel} [\underline{\beta}\parallel\underline{\gamma}] = R_{\alpha\lambda\beta\gamma} V^{\lambda} \quad . \quad (1.46)$$

Essa equação impõe sobre os parâmetros cinemáticos (θ, σ, ω) equações de vínculo, dado que essas não envolvem derivadas temporais dos parâmetros cinemáticos.

Contraindo os α e γ em (1.46) e projetando o índice livre perpendicularmente a V^{α} encontramos:

$$h_{\mu}^{\beta} \left[(\omega_{\beta}^{\nu} + \sigma_{\beta}^{\nu}) \parallel_{\nu} - \frac{2}{3} \theta \parallel_{\beta} + (\omega_{\beta\nu} + \sigma_{\beta\nu}) \dot{V}^{\nu} \right] = -R_{\beta\lambda} V^{\lambda} h_{\mu}^{\beta} \quad . \quad (1.47)$$

Contraindo (1.46) com o tensor $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e utilizando a identidade

$$\eta^{\rho\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad ,$$

obtemos:

$$\eta^{\rho\alpha\beta\gamma} V_{\alpha\parallel} \parallel_{\beta\parallel\gamma} = 0 \quad . \quad (1.48)$$

Substituindo nessa expressão a eq. (1.24) obtemos

$$\omega^{\beta} \parallel_{\beta} = - 2\omega^{\beta} \dot{V}_{\beta} \quad . \quad (1.49)$$

A eq. (1.46) pode ainda ser contraída com o tensor $\eta_{\epsilon}^{\beta\gamma\nu} V_{\nu}$.

Projetando os índices livres perpendicularmente a V^{μ} e simetrizando o resultado, obtemos:

$$2\eta_{\epsilon}^{\beta\gamma\nu} V_{\nu} \left[\sigma_{\alpha\beta\|\gamma} + \omega_{\alpha\beta\|\gamma} \right] h^{\epsilon}(\theta^h \phi) - 4\dot{V}(\theta^{\omega} \phi) = -h^{\epsilon}(\theta^h \phi) V_{\nu} V^{\mu} \eta^{\beta\gamma\nu}_{\epsilon} R_{\alpha\mu\beta\gamma} \quad (1.50)$$

TENSOR DE CURVATURA - O tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\lambda\nu}$ pode ser decomposto em suas partes irreduzíveis pela relação

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta}) + \frac{1}{6} R (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \quad (1.51)$$

O tensor $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é conhecido na literatura como tensor de Weyl ⁽⁷⁾ ou tensor conforme. Esse tensor representa a parte da curvatura que não é determinada localmente pela distribuição de matéria, visto que a equação de Einstein estabelece uma relação direta, algébrica, somente entre $R_{\mu\nu}$ e o tensor de matéria $T_{\mu\nu}$.

O tensor de Weyl possui as seguintes propriedades:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (1.52)$$

$$C^{\alpha}_{\beta\alpha\delta} = 0 \quad (1.53)$$

Definindo dual à direita e à esquerda, respectivamente pelas expressões

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\varepsilon\xi} \eta_{\gamma\delta}^{\varepsilon\xi} \quad (1.54)$$

$${}^*C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} C_{\varepsilon\xi\gamma\delta} \eta_{\alpha\beta}^{\varepsilon\xi} \quad , \quad (1.55)$$

podemos mostrar (usando as propriedades (1.52) e (1.53) que:

$${}^*C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = - C_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.56)$$

Dadas duas variedades Riemannianas M_n e \bar{M}_n , tais que

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \quad (1.57)$$

onde $\sigma = \sigma(x^\alpha)$ é uma função arbitrária, dizemos que M_n e \bar{M}_n estão conformalmente relacionadas.

O tensor de Weyl de M_n está relacionado ao de \bar{M}_n pela seguinte expressão:

$$C^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \bar{C}^\alpha_{\beta\gamma\delta} \quad . \quad (1.58)$$

Uma variedade Riemanniana M_n ($n > 3$) que possui $C_{\alpha\beta\delta\lambda} = 0$ em todos os pontos pode ser mapeada por uma transformação conforme a um espaço plano de mesma dimensão e métrica de mesma assinatura ⁽²⁸⁾.

A identidade de Bianchi, no caso em que $\dim M_n = 4$, pode ser escrita como ⁽¹⁴⁾

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} \parallel_\delta = R^\gamma \left[\underline{\alpha} \parallel \underline{\beta} \right] + \frac{1}{6} g^\gamma \left[\underline{\beta} \underline{R}^\alpha \right] \quad . \quad (1.59)$$

Essa expressão é utilizada para escrever as equações Quasi-Maxwellianas da gravitação, na formulação -W ⁽²⁷⁾.

As propriedades de simetria desse tensor nos permitem

decompô-lo univocamente em dois tensores, $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, ao longo de uma curva $x^\alpha(s)$. Sendo V^α o vetor tangente a essa curva a parte elétrica do tensor de Weyl é definida como sendo

$$E_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^\gamma V^\delta \quad . \quad (1.60)$$

O tensor $E_{\alpha\beta}$ satisfaz às propriedades:

$$E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha} \quad (1.61)$$

$$E_{\alpha\beta} V^\beta = E^\alpha_\alpha = 0 \quad . \quad (1.62)$$

A parte magnética é definida analogamente como sendo

$$H_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^\delta V^\gamma \quad , \quad (1.63)$$

e satisfaz às propriedades ⁽²⁹⁾,

$$H_{\alpha\nu} V^\nu = 0 \quad (1.64)$$

$$H^\alpha_\alpha = 0 \quad (1.65)$$

$$H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha} \quad . \quad (1.66)$$

Utilizando as definições (1.58) e (1.61) podemos escrever o tensor de Weyl ⁽²⁹⁾ como:

$$C_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 2V_{[\underline{\alpha} E \underline{\beta}]} [\underline{\gamma} V^\delta] + \delta_{[\underline{\alpha} \underline{\beta}]} [\underline{\gamma} E^\delta] - \eta_{\alpha\beta\mu\nu} V^\mu H^\nu [\underline{\gamma} V^\delta] + \\ - \eta^{\gamma\delta\mu\nu} V_\mu H_\nu [\underline{\alpha} V \underline{\beta}] \quad , \quad (1.67)$$

ou, de uma maneira análoga:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\gamma\delta\lambda\rho} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\gamma\delta\lambda\rho})V^{\mu}V^{\lambda}E^{\nu\rho} + \\ + (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\gamma\delta\lambda\rho} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\gamma\delta\lambda\rho})V^{\mu}V^{\lambda}H^{\nu\rho} \quad , \quad (1.68)$$

onde

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} \quad . \quad (1.69)$$

Tomando o dual de $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ em (1.66) obtemos:

$$C_{\alpha\beta\xi\varepsilon}^* = -(g_{\xi\varepsilon\lambda\rho}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} + \eta_{\lambda\rho\xi\varepsilon}g_{\alpha\beta\mu\nu})V^{\mu}V^{\lambda}E^{\nu\rho} + \\ + (\eta_{\lambda\rho\xi\varepsilon}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} - g_{\xi\varepsilon\lambda\rho}g_{\alpha\beta\mu\nu})V^{\mu}V^{\lambda}H^{\nu\rho} \quad . \quad (1.70)$$

Comparando (1.68) com (1.70) segue imediatamente que:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}(E, H) = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^*(H, -E) \quad . \quad (1.71)$$

Os tensores E e H nos permitem estabelecer uma simetria adicional caracterizando um espaço interno onde podemos definir um grupo de transformações duais análogas às transformações duais do eletromagnetismo ^(29,30):

$$\bar{E}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} \cos\phi - H_{\mu\nu} \operatorname{sen}\phi \quad (1.72)$$

$$\bar{H}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \cos\phi + E_{\mu\nu} \operatorname{sen}\phi \quad (1.73)$$

De (1.72) e (1.73) segue diretamente a expressão

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \cos\phi C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \operatorname{sen}\phi C_{\alpha\beta\lambda\delta} \quad . \quad (1.74)$$

TENSOR MOMENTUM ENERGIA - Um observador especificado pelo vetor \vec{V} pode definir, utilizando a massa de repouso m e a velocidade v^α das partículas que ele observa num dado elemento de volume $d\Omega$, a corrente de massa

$$J^\alpha = \left[\frac{1}{d\Omega} \sum_{\text{part. em } d\Omega} m, \quad \frac{1}{d\Omega} \sum_{\text{part. em } d\Omega} m v^\alpha \right]. \quad (1.75)$$

A velocidade média U^α é definida como

$$J^\alpha = \mu U^\alpha \quad ; \quad U^\alpha U_\alpha = 1 \quad (1.76)$$

μ é a densidade de massa de repouso medida pelo observador comovente com o fluido. Daqui para frente tomaremos $\vec{V} \equiv \vec{U}$ ou seja, observadores comoventes.

O tensor momento energia de um fluido arbitrário⁽³¹⁾ ou campo pode ser decomposto na forma:

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + V_{(\alpha} q_{\beta)} + p h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (1.77)$$

onde

$$q_\alpha V^\alpha = 0 \quad (1.78)$$

$$\pi^\alpha_\alpha = 0 \quad (1.79)$$

$$\pi_{\alpha\beta} V^\beta = 0 \quad (1.80)$$

ρ é a densidade total de energia medida por V^α .

q_α é o fluxo de energia relativa a V^α .

p é a pressão isotrópica e

$\pi_{\alpha\beta}$ é a pressão anisotrópica.

A densidade interna de energia ϵ do fluido é definida como $\rho = \mu(1+\epsilon)$.

O tensor momento energia satisfaz a equação de conservação generalizada

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \quad . \quad (1.81)$$

Projetando essa equação paralela e perpendicularmente a V^α obtemos:

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta - \dot{V}_\mu q^\mu + q^\nu{}_{||\nu} + V_\mu \pi^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \quad (1.82)$$

$$-p|_\nu h^{\nu\mu} + (\rho+p)\dot{V}^\mu + (\sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)q^\nu + \frac{4}{3}\theta q^\mu + h^\mu{}_\alpha \dot{q}^\alpha + h^\mu{}_\alpha \pi^{\alpha\nu}{}_{||\nu} = 0 \quad . \quad (1.83)$$

Definimos, em situações próximas do equilíbrio

$$v = \frac{1}{\mu} \quad (1.84)$$

e assumimos que existe uma equação de estado do tipo

$$\epsilon = \epsilon(p, v) \quad . \quad (1.85)$$

Podemos definir $T = T(p, v)$ e $S = S(p, v)$ pela relação:

$$d\epsilon + p dv = T ds \quad (1.86)$$

de onde segue que

$$\mu T \dot{S} = (V_\mu \pi^{\mu\nu}{}_{||\nu} + q^\nu{}_{||\nu} - \dot{V}_\mu q^\mu) \quad . \quad (1.87)$$

Essa equação relaciona a variação da densidade de entropia S , com relação ao Tempo Cósmico, com as quantidades respon-

sãveis pelo afastamento da situação ideal de fluido perfeito.

EQUAÇÕES DE CAMPO - Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein a geometria é determinada pela equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.88)$$

onde Λ é a constante cosmológica ⁽¹⁾.

Contraindo essa equação obtemos

$$-R + 4\Lambda = -\kappa T \quad (1.89)$$

De (1.88) e (1.89) segue a expressão

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \kappa g_{\mu\nu} T + g_{\mu\nu} \Lambda - \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.90)$$

Tomando um sistema de unidades convenientes onde $\kappa = C = 1$ e substituindo (1.86) em (1.47) obtemos:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{3} (T+\Lambda) g_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} \left[g_{\alpha\gamma} T_{\beta\delta} + g_{\beta\delta} T_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta} T_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta} \right] \quad (1.91)$$

Com essa expressão obtemos:

$$h^\epsilon_{(\rho} h^\alpha_{\sigma)} V_\nu V^\mu \eta^{\beta\gamma\nu} \epsilon R_{\alpha\mu\beta\gamma} = 4 H_{\rho\sigma} \quad (1.92)$$

$$R_{\beta\lambda} h^\lambda_\mu V^\beta = -q_\mu \quad (1.93)$$

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -\frac{1}{2} (\rho+3p) + \Lambda \quad (1.94)$$

$$R_{\alpha\gamma\beta\delta} V^\gamma V^\delta = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \rho h_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} p h_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\gamma} + \frac{\Lambda}{3} h_{\alpha\gamma} \quad (1.95)$$

Utilizando esses resultados nas eqs. (1.43), (1.44), (1.45), (1.47) e (1.50) obtemos:

$$\dot{\theta} - \dot{V}^{\alpha}_{\parallel\alpha} + 2(\sigma^2 + \omega^2) + \frac{1}{3} \theta^2 = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} h^{\gamma}_{\alpha} h^{\delta}_{\beta} \dot{\sigma}_{\gamma\delta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\rho} \sigma^{\rho}_{\beta} + \omega_{\alpha\rho} \omega^{\rho}_{\beta} - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} (\omega^2 + \sigma^2) + \\ + \dot{V}^{\alpha}_{\parallel\alpha} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \dot{V}^{\mu}_{\parallel\mu} - \frac{1}{2} h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} \dot{V}_{(\mu\parallel\nu)} = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$h^{\gamma}_{\alpha} h^{\delta}_{\beta} (\omega_{\gamma\delta})^{\cdot} + \sigma_{\alpha\rho} \omega^{\rho}_{\beta} + \omega_{\alpha\rho} \sigma^{\rho}_{\beta} - \frac{1}{2} h^{\gamma}_{\alpha} h^{\delta}_{\beta} \dot{V}_{[\gamma\parallel\delta]} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.98)$$

$$h^{\beta}_{\mu} \left[(\omega^{\nu}_{\beta} + \sigma^{\nu}_{\beta})_{\parallel\nu} - \frac{2}{3} \theta_{\parallel\beta} + (\omega_{\beta\nu} + \sigma_{\beta\nu}) \dot{V}^{\nu\parallel} \right] = q_{\mu} \quad (1.99)$$

$$\frac{1}{2} h^{\epsilon}_{(\rho} h^{\alpha}_{\sigma)} \eta_{\epsilon}^{\beta\gamma\nu} v_{\nu} (\sigma_{\alpha\beta\parallel\gamma} + \omega_{\alpha\beta\parallel\gamma}) - \dot{V}_{(\rho\omega\sigma)} = -H_{\rho\sigma} \quad (1.100)$$

Note que essas equações não são suficientes para determinar a evolução das quantidades cinemáticas. Com efeito, as equações (1.97) e (1.100) envolvem a parte magnética e a parte elétrica do tensor de Weyl. É necessário estabelecermos equações de evolução para esses tensores. Substituindo (1.90) em (1.59) obtemos

$$C_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{\parallel\delta} = -\frac{1}{2} T_{\gamma[\underline{\alpha}\parallel\beta]} + \frac{1}{6} g_{\gamma[\underline{\alpha}^T\parallel\beta]} \quad (1.101)$$

Essa equação pode ser projetada com relação a V^{α} de quatro maneiras diferentes, fornecendo quatro equações independentes. As quatro projeções são:

$$a) \quad v^{\beta} v^{\gamma} h^{\alpha\rho} \quad ,$$

- b) $\eta^{\rho\gamma\alpha\beta} V_\lambda V^\gamma$,
 c) $h^\gamma (\sigma_\eta^\rho) \lambda \alpha \beta V_\lambda$,
 d) $V^\beta h^\gamma (\rho_h^\sigma) \alpha$.

Substituindo em (1.99) $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pela sua expressão em função de $H_{\mu\nu}$ e $E_{\mu\nu}$, e construindo com a), b), c), d), obtemos (64):

$$C_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\parallel\delta} V^\beta V^\gamma h^{\alpha\sigma} = h^{\alpha\sigma} h^{\delta\gamma} E_{\alpha\delta} \parallel_\gamma + \eta^\sigma_{\beta\mu\nu} V^\beta H^{\nu\delta} \sigma^\mu_\delta + 3H^{\sigma\nu} \omega_\nu \quad (1.102)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\parallel\delta} \eta^{\sigma\lambda\alpha\beta} V_\lambda V^\gamma = 2 \left[h^{\alpha\sigma} h^{\delta\gamma} H_{\alpha\delta} \parallel_\gamma - \eta^\sigma_{\beta\mu\nu} V^\beta E^{\nu\delta} \sigma^\mu_\delta - 3E^{\sigma\nu} \omega_\nu \right] \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\parallel\delta} h^\gamma (\sigma_\eta^\rho) \lambda \alpha \beta V_\lambda &= 4\dot{V}_\alpha E_\beta^{(\rho\eta^\sigma)\lambda\alpha\beta} V_\lambda - 4\theta H^{\rho\sigma} - 4h^\rho_\mu h^\sigma_\nu \dot{H}^{\mu\nu} + \\ &- 2E_\beta^\mu \parallel_\alpha h_\mu^{(\sigma_\eta^\rho)\lambda\alpha\beta} V_\lambda + 2H_\nu^{(\rho_h^\sigma)_\mu} V^\mu \parallel^\nu + \\ &+ 4\eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_\mu V_\lambda H_{\delta\alpha} \theta_{\beta\nu} . \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\parallel\delta} V^\beta h^\gamma (\rho_h^\sigma) \alpha &= -4\dot{V}_\alpha H_\beta^{(\rho\eta^\sigma)\lambda\alpha\beta} V_\lambda - 4\theta E^{\rho\sigma} - 4h^\rho_\mu h^\sigma_\nu \dot{E}^{\mu\nu} + \\ &+ 2H_\beta^\mu \parallel_\alpha h_\mu^{(\sigma_\eta^\rho)\lambda\alpha\beta} V_\lambda + 2E_\nu^{(\rho_h^\sigma)_\mu} V^\mu \parallel^\nu + \\ &+ 4\eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_\mu V_\lambda E_{\delta\alpha} \theta_{\beta\nu} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Utilizando a decomposição (1.77) do tensor momento energia o lado direito da eq. (1.101) se escreve:

$$\begin{aligned} K_{\mu\alpha\beta} &= T_{\mu|\underline{\alpha}||\underline{\beta}|} - \frac{1}{3} g_{\mu|\underline{\alpha}|\underline{\beta}|} T = V_\mu V_{|\underline{\alpha}^\rho|\underline{\beta}|} - \frac{1}{3} g_{\mu|\underline{\alpha}^\rho|\underline{\beta}|} + \\ &+ \rho V_{\mu||\underline{\beta}^\nu\underline{\alpha}|} + (\rho+p) (2\omega_{\alpha\beta} + \dot{V}_{|\underline{\alpha}^\nu\underline{\beta}|}) V_\mu + V_\mu V_{|\underline{\alpha}^\rho|\underline{\beta}|} + \\ &+ p V_{\mu||\underline{\beta}^\nu\underline{\alpha}|} - q_{\mu||\underline{\alpha}^\nu\underline{\beta}|} + 2q_\mu \omega_{\alpha\beta} + q_\mu \dot{V}_{|\underline{\alpha}^\nu\underline{\beta}|} + V_\mu q_{|\underline{\alpha}||\underline{\beta}|} + \end{aligned}$$

$$+ V_{\mu} | \parallel \beta \ q_{\alpha} \] + \pi_{\mu} | \underline{\alpha} \parallel \beta \] \quad . \quad (1.106)$$

Com essa expressão e as equações de conservação (1.80) e (1.81) obtemos:

$$K_{\mu\alpha\beta} V^{\mu} V^{\beta} h^{\alpha}_{\epsilon} = - \frac{2}{3} \rho |_{\alpha} h^{\alpha}_{\epsilon} - \frac{2}{3} \theta q_{\epsilon} + (\sigma_{\epsilon\nu} - 3\omega_{\epsilon\nu}) q^{\nu} - \pi_{\epsilon\mu} \dot{V}^{\mu} - h^{\alpha}_{\epsilon} \pi_{\alpha}^{\nu} |_{\nu} \quad (1.107)$$

$$K_{\mu\alpha\beta} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} V^{\mu} = -4(\rho+p) \omega^{\epsilon} + 2\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha} |_{\beta} - 2\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi^{\mu}_{\alpha} \quad (1.108)$$

$$K_{\mu\alpha\beta} h^{\mu\sigma} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} = -4q^{\epsilon} (\sigma_{\omega}^{\epsilon}) + 2\sigma^{\epsilon} (\sigma_{\eta}^{\epsilon}) \alpha\beta\lambda V_{\lambda} q_{\alpha} + 4q_{\alpha} \omega^{\alpha} h^{\epsilon\sigma} - q^{\epsilon} (\sigma_{\omega}^{\epsilon}) + 2h^{\mu} (\sigma_{\eta}^{\epsilon}) \alpha\beta\lambda V_{\lambda} \pi_{\mu\alpha} |_{\beta} \quad (1.109)$$

$$K_{\mu\alpha\beta} h^{\alpha} (\sigma_{h}^{\epsilon})^{\mu} V_{\beta} = \frac{2}{3} h^{\epsilon\sigma} (q^{\mu} |_{\mu} - q^{\mu} \dot{V}_{\mu} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) - 2(\rho+p) \sigma^{\epsilon\sigma} + 2q^{\epsilon} (\epsilon_{\dot{V}}^{\sigma}) - h^{\mu} (\epsilon_{h}^{\sigma})^{\alpha} q_{\mu} |_{\alpha} + 2h^{\epsilon}_{\alpha} h^{\sigma}_{\mu} \pi^{\alpha\mu} + \pi_{\beta} (\epsilon_{\sigma}^{\sigma})^{\beta} - \pi_{\beta} (\epsilon_{\omega}^{\sigma})^{\beta} + \frac{2}{3} \theta \pi^{\epsilon\sigma} \quad (1.110)$$

Finalmente as equações de evolução para a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl reduzem-se às expressões:

$$h^{\epsilon\alpha} h^{\delta\gamma} E_{\alpha\delta} |_{\gamma} + \eta^{\epsilon}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} E^{\nu\delta} \sigma^{\mu}_{\delta} + 3H^{\epsilon\nu} \omega_{\nu} = \frac{1}{3} h^{\epsilon\alpha} \rho |_{\alpha} + \frac{\theta}{3} q^{\epsilon} - \frac{1}{2} (\sigma^{\epsilon}_{\nu} - 3\omega^{\epsilon}_{\nu}) q^{\nu} + \frac{1}{2} \pi^{\epsilon\mu} \dot{V}_{\mu} + \frac{1}{2} h^{\epsilon\alpha} \pi_{\alpha}^{\nu} |_{\nu} \quad (1.109)$$

$$h^{\epsilon\alpha} h^{\delta\gamma} H_{\alpha\delta} |_{\gamma} - \eta^{\epsilon}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} E^{\nu\delta} \sigma^{\mu}_{\delta} - 3E^{\sigma\nu} \omega_{\nu} = 2(\rho+p) \omega^{\epsilon} - \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha} |_{\beta} +$$

$$+ \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi_{\alpha}^{\mu} \quad (1.110)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\rho} h_{\nu}^{\sigma} \dot{H}^{\mu\nu} + \theta H^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} H_{\nu}^{\rho} h^{\sigma}{}_{\mu} V^{\mu\parallel\nu} - \eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} H_{\alpha\delta} \theta_{\nu\beta} - \\ - \dot{V}_{\alpha} E_{\beta}^{\rho} (\sigma_{\eta}^{\rho})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} + \frac{1}{2} E_{\beta}^{\mu}{}_{\parallel\alpha} h_{\mu}^{\rho} (\sigma_{\eta}^{\rho})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} = - \frac{3}{4} q^{\rho} (\sigma_{\omega}^{\rho}) + \\ + \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} q^{\alpha} \omega_{\alpha} + \frac{1}{4} \sigma_{\beta}^{\rho} (\sigma_{\eta}^{\rho})^{\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha} + \frac{1}{4} h^{\mu} (\sigma_{\eta}^{\rho})^{\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} \pi_{\mu\alpha\parallel\beta} . \end{aligned} \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\sigma} \dot{E}^{\mu\nu} + \theta E^{\epsilon\sigma} - \frac{1}{2} E_{\nu}^{\rho} (\epsilon_{h}^{\sigma})_{\mu} V^{\mu\parallel\nu} - \eta^{\sigma\nu\mu\delta} \eta^{\epsilon\lambda\alpha\beta} V_{\mu} V_{\lambda} E_{\alpha\delta} \theta_{\beta\nu} + \\ + \dot{V}_{\alpha} H_{\beta}^{\rho} (\epsilon_{\eta}^{\rho})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} - \frac{1}{2} H_{\beta}^{\mu}{}_{\parallel\alpha} h_{\mu}^{\rho} (\epsilon_{\eta}^{\rho})^{\lambda\alpha\beta} V_{\lambda} = \\ = \frac{1}{6} h^{\epsilon\sigma} (q^{\mu}{}_{\parallel\mu} - q^{\mu} \dot{V}_{\mu} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\rho+p) \sigma^{\epsilon\sigma} + \frac{1}{2} q^{\rho} (\epsilon_{\dot{V}}^{\rho}) - \\ - \frac{1}{4} h^{\mu} (\epsilon_{h}^{\sigma})^{\alpha} q_{\mu\parallel\alpha} + \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\mu}^{\sigma} \pi^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} \pi_{\beta}^{\rho} (\epsilon_{\sigma}^{\rho})^{\beta} + \\ + \frac{1}{4} \pi_{\beta}^{\rho} (\epsilon_{\omega}^{\rho})^{\beta} + \frac{1}{6} \theta \pi^{\epsilon\sigma} . \end{aligned} \quad (1.112)$$

CAPÍTULO II

MODELO DE FRIEDMANN

Neste Capítulo fazemos uma breve revisão dos conceitos envolvidos no modelo de Friedmann e obtemos essa solução cosmológica utilizando o método das equações quasi Maxwellianas.

Suponha uma dada base de vetores z^μ em M_4 . Os vetores dessa base definidos no Capítulo I, e denominados vetores conexão, definem naturalmente um elemento de hiper volume $\delta^{(4)}\Omega$ que denominaremos célula. Denotaremos:

$$\delta^{(4)}\Omega = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} z_{[0]}^\alpha z_{[1]}^\beta z_{[2]}^\gamma z_{[3]}^\delta, \quad (2.1)$$

onde ,

$$z_{[0]}^\alpha z_{[0]\alpha} > 0 \quad ; \quad z_{[i]}^\alpha z_{[i]\alpha} < 0 \quad (2.2)$$

Definamos agora em M_4 uma classe de observadores caracterizados por um campo vetorial \vec{V} , tipo tempo. Com relação a essa classe de observadores a base de vetores $z_{[\alpha]}^\mu$ pode ser decomposta na forma:

$$\tilde{z}_{[A]}^\mu = z_{[A]}^\alpha v_\alpha V^\mu + h_{\beta}^\alpha z_{[A]}^\beta \quad [A] = 0, 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Sem perda de generalidade vamos escolher a base $z^{\mu}_{[A]}$ de forma que:

$$z^{\alpha}_{[A]} V_{\alpha} = \delta^0_{[A]} \cdot |z^{\alpha}_{[0]}| = \delta\tau \delta^0_{[A]} \quad (2.4)$$

$$z^{\alpha}_{[i]} = z^{\beta}_{[i]} h^{\alpha}_{\beta} = \delta\ell \eta^{\alpha}_{[i]} \quad (2.5)$$

onde $\eta^{\alpha}_{[i]} \eta^{\alpha}_{[i]} = -1$.

A cada observador teremos então associada a célula:

$$\delta^{(4)}\Omega = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} z^{\alpha}_{[0]} z^{\beta}_{[1]} z^{\gamma}_{[2]} z^{\delta}_{[3]} = \delta\tau \cdot (\delta\ell)^3 \quad (2.6)$$

Apenas para caracterizar melhor $\delta\Omega$ vamos tomar $\delta\tau$ como:

$$\delta\tau = \frac{1}{c} \delta\ell \quad (2.7)$$

Assim a cada observador teremos associada uma célula caracterizada por:

$$\delta^{(4)}\Omega = \frac{1}{c} (\delta\ell)^4 \quad (2.8)$$

O volume associado a cada célula pelo observador V no intervalo de tempo $\delta\tau$ é então:

$$V = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V^{\alpha} z^{\beta}_{[1]} z^{\gamma}_{[2]} z^{\delta}_{[3]} = (\delta\ell)^3 \quad (2.9)$$

Suponha que (2.9) defina o Universo observável para um dado observador $V(x)$. Vamos considerar este na aproximação de um fluido onde grandezas termodinâmicas podem ser definidas. O caso geral do tensor momento energia está discutido de uma maneira exaus

tiva e didática no trabalho de M. Novello⁽²⁷⁾.

CARACTERÍSTICAS DO FLUIDO

a) Número de Partículas n - Em temperaturas normais n pode ser interpretado como o número de átomos do gás. Em casos extremos teremos de lançar mão às quantidades conservadas no fluido tais como número de barions menos antibarion^(35,36), para interpretar n. No referencial de um observador $V(x)$ que instantaneamente é comoviente com o fluido em um dado ponto x , o vetor corrente J^μ é dado por:

$$J^i = 0 \quad ; \quad J^0 = n \quad . \quad (2.10)$$

Num caso geral o vetor de corrente é

$$J^\alpha = nV^\alpha \quad . \quad (2.11)$$

Esse vetor satisfaz à lei de conservação:

$$J^\alpha_{\parallel \alpha} = 0 \quad . \quad (2.12)$$

Por simplicidade vamos nos fixar daqui para frente no caso particular de um fluido com uma componente⁽⁶⁶⁾ apenas: o caso geral é uma extensão direta deste.

Sendo m_0 a massa de repouso das partículas constituintes do fluido, a densidade μ é definida como:

$$\mu = nm_0 \quad . \quad (2.13)$$

O vetor densidade de corrente de massa é então:

$$I^\alpha = \mu V^\alpha \quad . \quad (2.14)$$

A conservação da massa de repouso implica uma lei de conservação análoga à lei de conservação do número de partículas n :

$$I^\alpha \parallel_\alpha = \dot{\mu} + \mu \theta = 0 \quad . \quad (2.15)$$

A densidade total de energia do fluido medida por V^α é:

$$\rho = \mu(1+\beta) \quad , \quad (2.16)$$

onde β é a densidade de energia interna específica do fluido. Assumimos que existe uma equação de estado para o fluido da forma

$$\beta = \beta(p, v) \quad , \quad (2.17)$$

onde p é a pressão do fluido e v o volume específico do fluido definido como

$$v = \frac{1}{\mu} \quad . \quad (2.18)$$

Na presença de efeitos dissipativos as definições de pressão p , densidade de energia ρ , número de partículas n e velocidade do fluido V são ambíguas. Definiremos essas quantidades no caso geral como

$$V_\alpha V_\beta T^{\alpha\beta} = \rho \quad (2.19a)$$

$$V_\alpha J^\alpha = n \quad (2.19b)$$

$$h_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = p \quad (2.19c)$$

O vetor V^α será especificado como a velocidade de transporte das partículas do fluido ou equivalentemente:

$$h^{\alpha}_{\beta} J^{\alpha} = 0 \quad . \quad (2.20)$$

Definindo temperatura $T(p,v)$ e entropia específica $S(p,v)$ por

$$d\beta + pdv = TdS \quad . \quad (2.21)$$

Da equação de conservação para o tensor $T_{\mu\nu}$ (1.81) segue diretamente a eq. (1.87) que nos dá a variação temporal da entropia do fluido.

No caso de partículas de massa nula a definição de I^{α} tem de ser alterada para densidade de corrente de número de partículas.

Podemos estimar que no presente, em qualquer modelo cosmológico razoável, devemos ter

$$\pi_{\mu\nu} \Big|_{s=0} = q_{\mu} \Big|_{s=0} = 0 \quad , \quad (2.22)$$

uma vez que a velocidade aleatória das galáxias é desprezível no Universo observável. É importante salientar que a existência de fluxo de neutrinos pode alterar drasticamente este resultado.

A adoção do princípio de Copérnico nos permite concluir então que:

$$\dot{V}^{\alpha} = \frac{h^{\alpha\beta} p|_{\beta}}{\rho+p} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Dessa maneira, somos levados a representar o conteúdo material do Universo por um fluido perfeito. Nesse caso a eq. (1.87) se reduz a

$$\dot{S} = 0 \quad , \quad (2.24)$$

ou seja, a entropia é constante ao longo das linhas de fluxo do fluido. As eqs. (2.17) e (2.21) nos dão que o fluido tem apenas uma variável termodinâmica ao longo de cada linha do fluxo. Essa variável pode ser escolhida como $\mu = 1/v$. Ao longo das linhas de fluxo do fluido μ é determinado pela eq. (2.15), e vemos então que a variação do estado termodinâmico, ao longo dessas linhas é determinado pelo comprimento médio ℓ , para uma dada equação de estado. Nesse caso é sempre possível adotar para o fluido uma equação de estado do tipo

$$p = p(\rho) \quad . \quad (2.25)$$

Dessa forma, o Universo observado ou, analogamente, a célula definida em (2.8), é isotrópica e seu conteúdo material representado por um fluido perfeito de equação de estado $p = p(\rho)$.

O Princípio de Copérnico nos leva a estender essa configuração para todo o Universo. Os modelos cosmológicos compatíveis com esse princípio devem ser isotrópicos em relação a cada ponto do espaço-tempo. As possíveis geometrias que satisfazem essas restrições foram estabelecidas por Friedmann e suas simetrias examinadas por Robertson e Walker.

As equações de campo nesse caso particular se reduzem a:

$$\hat{R}_{\mu\nu} = - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{3} \theta^2 - \rho - \Lambda \right]$$

ou

$$\hat{R} = - \frac{2}{3} \theta^2 + 2\rho + 2\Lambda \quad (2.25)$$

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3} \theta^2 = - \frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Lambda \quad . \quad (2.26)$$

As geometrias desta classe possuem a curvatura de tri-superfície ($\rho = \text{cte}$) constante ou seja:

$$\hat{R} = \hat{R}(\tau)$$

Nesse caso particular ⁽³⁷⁾ o tensor da tri-superfície se escreve como

$$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \frac{\epsilon}{\ell^2} (h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta} h_{\beta\gamma}) \quad , \quad (2.27)$$

onde ℓ é o fator de escala ou comprimento representativo, definido em (1.29). Contraíndo essa expressão obtemos:

$$\hat{R} = - 6 \frac{\epsilon}{\ell^2} \quad . \quad (2.28)$$

Com esse resultado e com (2.25) e (2.26) encontramos a relação:

$$\dot{\theta} = - 3 \left[\frac{\epsilon}{\ell^2} + \frac{(1+\lambda)\rho}{2} \right] + 4\Lambda \quad . \quad (2.28')$$

A essas equações temos de acrescentar as equações de conservação (1.80), (1.81), que no caso se reduzem às formas:

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta = 0 \quad (2.29)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} p_{|\mu} = 0 \quad (2.30)$$

Supondo uma equação de estado do tipo

$$p = \lambda\rho \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad (2.31)$$

as eqs. (2.25), (2.26), (2.29), 2.30) podem ser integradas. Imporemos a restrição adicional $\Lambda = 0$ e escreveremos a métrica

da geometria como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[dr^2 + \sigma^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.32)$$

A tri-curvatura expressa em função de σ é dada por:

$$\ell^2 \hat{R} = - 4 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2} - 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 , \quad (2.33)$$

onde $\phi' \equiv d\phi/dr$.

As soluções dessa equação são três. A saber

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(r) = \text{sen } r \quad , \quad \text{que corresponde a} \quad \epsilon = -1 \\ \sigma(r) = r \quad , \quad \text{que corresponde a} \quad \epsilon = 0 \\ \sigma(r) = \text{senh } r \quad , \quad \text{que corresponde a} \quad \epsilon = 1 \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

Utilizando a métrica (2.32), por cálculo direto, obtemos que:

$$\ell = a \quad \text{e} \quad \theta = V_{\parallel \alpha}^{\alpha} = 3 \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.35)$$

Substituindo esses resultados nas eqs. (2.25), (2.26) e (2.29) obtemos:

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{1}{2} (1+3\lambda) \rho \quad (2.36)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{1}{3} \rho \quad (2.37)$$

$$\dot{\rho} + 3(1+\lambda) \rho \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2.38)$$

A solução de (2.38) em função de $a(t)$ é:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\lambda)} \quad (2.39)$$

A equação (2.37) é uma integral primeira da equação

(2.36) e as soluções desta estão reunidas na Tabela 2.1 para os diferentes valores de λ e ϵ .

TABELA 2.1 - Quantidades fundamentais do Universo de Friedmann. A constante λ é especificada pela equação de estado, $p = \lambda\rho$, que relaciona a pressão com a densidade de energia. O raio do Universo é dado pela função $a(\eta)$. O fator de expansão θ mede a variação do volume V por unidade de volume. Tomamos o sistema de unidades onde $k = 1$ e $c = 1$.

ρ	λ	ϵ	θ	$a(\eta)$	$t(\eta)$
$\frac{4}{3} t^{-2}$	0	0	$2t^{-1}$	$a_0 \eta^{2/3}$	η
$\frac{3}{4} t^{-2}$	1/3	0	$\frac{3}{2} t^{-1}$	$a_0 \eta^{1/3}$	η
$\frac{6}{a_0^2} (1-\cos\eta)^{-3}$	0	1	$\frac{3}{a_0} \frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2}$	$a_0 (1-\cos\eta)$	$a_0(\eta-\sin\eta)$
$\frac{3}{a_0^2} \frac{1}{\sin^4\eta}$	1/3	1	$\frac{3}{a^2} \frac{\cos}{\sin^2\eta}$	$a_0 \sin\eta$	$a_0(1-\cos\eta)$
$\frac{6}{a_0^2} \frac{1}{(\cosh\eta-1)^3}$	0	-1	$\frac{3}{a_0} \frac{\sinh\eta}{(\cosh\eta-1)^2}$	$a_0 (\cosh\eta-1)$	$a_0 (\sinh\eta-\eta)$
$\frac{3}{a_0^2} \frac{1}{\sinh^4\eta}$	1/3	-1	$\frac{3}{a_0} \frac{\cosh\eta}{\sinh^2\eta}$	$a_0 \sinh\eta$	$a_0 (\cosh\eta-1)$

CAPÍTULO III

PERTURBAÇÕES

A partir de Einstein o pensamento físico passou a considerar o Universo como uma totalidade⁽³⁾ representada por uma variedade Riemanniana caracterizada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Nesse sentido surge a questão de determinar qual a métrica mais adequada para representar o nosso conhecimento do Universo.

As observações feitas numa distância (δl) que varia de $50M_{PC}$ a $100 M_{PC}$, se referem aos aglomerados de galáxias como elementos fundamentais, verdadeiros átomos do fluido galáctico. Essas observações, de caráter local, são relacionadas às propriedades globais do Universo. A estrutura do espaço-tempo é representada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo tensor momento-energia da matéria $T_{\mu\nu}$, fonte de curvatura desse contínuo. Localmente (strictus sensus) a geometria é plana, sendo sempre possível encontrar um sistema de coordenadas onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e a afinidade se anula. Essa propriedade, faz com que a descrição da física da gravitação seja deslocada para os modos de relação entre as localidades (ou instâncias⁽⁶⁵⁾) da variedade. Em outras palavras, utilizando o elevador de Einstein como recurso, diremos que a gravitação de Einstein fala das relações entre esses elevadores. Um particular elevador pode determinar ρ , p , \hat{v}_α , \hat{q}_α e $\hat{\pi}_{\alpha\beta}$ (veja Cap. I). Com esses objetos, em princípio, o observa

dor, associado ao elevador, representa todos os fenômenos físicos locais (por exemplo, a eletrodinâmica). O modo de relação entre os múltiplos elevadores é determinado por quantidades não locais e que representaremos pelo Tensor de Riemann funcional das derivadas segundas do tensor métrico $R_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}g_{\gamma\delta})$. Assim, dados dois elevadores distintos, a relação entre esses é determinada pela equação de Jacobi generalizada^(*):

$$\frac{D_F}{Ds} \left(\frac{D_F}{Ds} \perp z^{\alpha} \right) = h^{\alpha}_{\delta} (R_{\lambda\beta\gamma}^{\delta} V^{\lambda} V^{\gamma} + a^{\delta}_{\parallel\beta} - a^{\delta}_{\alpha\beta}) \perp z^{\beta} . \quad (3.1)$$

Na Teoria de Einstein a relação entre os elevadores já está contida nas equações de campo. Essas equações, no entanto, não dão a dinâmica da relação entre os elevadores, mas sim especificam o estado de movimento intrínseco de cada um deles. A dinâmica da Teoria de Einstein está contida nas equações

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} , \quad (3.2)$$

e é expressa, no caso de partículas puntiformes, pela equação que daí segue

$$\frac{DV^{\alpha}}{Ds} \equiv \frac{dV^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\beta} V^{\gamma} = 0 . \quad (3.3)$$

Tomando uma tal partícula como um observador, a relação entre dois observadores vizinhos é determinada pela eq. (3.1). O vetor posi

^(*) Para um estudo extensivo dessa equação ver os trabalhos: "Electric and Magnetic Gravitational Monopoles I. The Equation of Motion of Poles", Novello et al., J. Phys., vol. 9, nº 4, pg. 547, 1976; "On Jacobi Fields" Novello et al., GRG, Vol. 8, nº 2, pg. 95.

ção relativa (Z^μ) entre os dois observadores (veja Cap. I) satisfaz identicamente a equação (3.1).

A afinidade métrica $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ é um objeto geométrico dependente do sistema de coordenadas utilizado e não é, portanto, um observável ⁽¹⁴⁾. Em verdade, por uma escolha conveniente de um sistema de coordenadas, é sempre possível anular $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ em um ponto ou mesmo ao longo de uma curva qualquer ⁽⁵⁸⁾. Dessa forma, verifica-se que não é possível obter suficiente informação sobre o campo gravitacional pela análise do movimento de uma partícula nesse campo. Essa peculiaridade da teoria da gravitação pode ser melhor compreendida se fizermos um paralelo com a eletrodinâmica de Maxwell (veja ref. ⁽¹⁴⁾).

Na Teoria Quasi-Maxwelliana da gravitação, a dinâmica dos observadores e a dinâmica do campo gravitacional, são especificadas pelas equações (1.109), (1.110), (1.111), (1.112), (1.43), (1.44), (1.45). As variáveis dinâmicas da teoria são, então, os tensores $\hat{E}_{\mu\nu}$, $\hat{H}_{\mu\nu}$, $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$, $\hat{\omega}_{\mu\nu}$, $\hat{\theta}$, $T_{\mu\nu}(V^\alpha, \hat{q}^\alpha, \hat{\pi}^{\alpha\beta}, \rho, p)$. Todos esses objetos são determinados pelos observadores locais e a extensão dos mesmos para toda a variedade espaço-tempo, é feita utilizando o projetor h^μ_ν (veja Cap. I e ref. ⁽⁶⁴⁾). A identidade de Bianchi impõe sobre as variáveis dinâmicas vínculos expressos pelas equações (1.47), (1.49), (1.50). Para termos uma teoria dinâmica em que os objetos acima referidos sejam caracterizados independentemente, temos de definir esses objetos não em uma variedade Riemanniana mas sim em uma espaço fibrado. No nosso trabalho mantemos a teoria restrita a uma variedade Riemanniana. Dessa forma, os dados de Cauchy desta teoria e, portanto, as variáveis dinâmicas da mesma, permanecem vinculados entre si. Na teoria quasi-maxwelliana da gravitação o número de variáveis inde -

pendentes é 10. A imposição da condição inicial de que a equação (1.88) seja válida sobre uma hipersuperfície tipo-tempo, torna a teoria quasi-maxwelliana equivalente à Teoria da Relatividade de Einstein e reduz o número de variáveis independentes a 6 (59).

A Teoria Quasi-Maxwelliana da gravitação possui o grupo dual como grupo de simetria dessa interação, quando o espaço é vazio ($T_{\mu\nu} = 0$), isto é, só existe gravitação. Analogamente a Teoria Maxwelliana do eletromagnetismo possui esse grupo de simetria quando a corrente é nula. Assim, a Teoria Einstein-Maxwell é invariante sob o grupo dual (veja Cap. I):

$$E^{\mu\nu'} = E^{\mu\nu} \cos\phi + \text{sen}\phi H^{\mu\nu} \quad (3.4a)$$

$$H^{\mu\nu'} = -\text{sen}\phi E^{\mu\nu} + \cos\phi H^{\mu\nu} \quad (3.4b)$$

$$E^\mu = E^\mu \cos\eta + H^\mu \text{sen}\eta \quad (3.5a)$$

$$H^\mu = -\text{sen}\eta E^\mu + \cos\eta H^\mu \quad (3.5b)$$

onde os ângulos ϕ e η são constantes.

Retomemos a teoria de Einstein. O físico E. Lifshitz desenvolveu um método para analisar a estabilidade das soluções cosmológicas das equações de Einstein. Como salientamos no início deste capítulo, as equações de Einstein determinam a métrica $g_{\mu\nu}$ e o tensor $T_{\mu\nu}$ simultaneamente para um dado modelo. Para integrarmos as equações de Einstein é necessário afixar uma gauge (14) (isto é, condições de coordenadas). Lifshitz escolhe o gauge determinado pelas equações

$$g_{0i} = 0 \quad (3.6)$$

$$g_{00} = 1 \quad (3.7)$$

A estabilidade da solução é analisada perturbando o tensor métrico e o tensor momento energia como expressam as equações (3.8) e (3.9)

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

A evolução dessas perturbações e, portanto, a estabilidade da solução em questão, é dada pelas equações (3.10)

$$\delta G^{\mu}_{\nu} = - \delta T^{\nu}_{\mu} \quad (3.10)$$

Essas equações têm como integral primeira a equação de conservação (3.11) abaixo, e que é de utilidade na integração do sistema (3.10)

$$\delta T^{\nu}_{\mu} \parallel_{\nu} = 0 \quad (3.11)$$

A gauge utilizada por Lifshitz para integrar as eqs. (3.10) , (3.11) é dada por:

$$\delta g_{0\alpha} = 0 \quad (3.12)$$

No entanto, permanecem dificuldades relativas à interpretação física das soluções de perturbação. O problema está relacionado à liberdade de fazer transformações de gauge. Ao discutir perturbações, estamos tratando com dois espaços geométricos distintos - um associado ao espaço físico, o espaço-tempo perturbado; o outro, um espaço fictício, o espaço-tempo base (não perturbado). Pontos do espaço-tempo base são marcados pelas coordenadas x^{α} ($\alpha =$

= 0,1,2,3).

Uma correspondência biunívoca entre pontos no espaço - tempo base e pontos no espaço-tempo físico, associa essas coordenadas ao espaço-tempo físico e define uma escolha de gauge. Uma mudança nessa correspondência, mantendo as coordenadas do espaço - tempo base fixas, é denominada transformação de gauge, que deve ser distinguida das transformações de coordenadas que mudam as marcas dos pontos do espaço-tempo base e do espaço-tempo físico simultaneamente.

A perturbação de uma dada quantidade é a diferença entre o valor que ela tem em um dado ponto do espaço-tempo físico e o valor que ela possui no correspondente ponto no espaço-tempo base. Uma transformação de gauge induz uma transformação no espaço-tempo físico e também muda o ponto no espaço-tempo base, que corresponde ao ponto dado no espaço-tempo físico. Assim, mesmo uma quantidade escalar associada à geometria não será uma perturbação invariante sob transformações de coordenadas se a referida quantidade for não nula no espaço-tempo base. Essa dificuldade da teoria de perturbações desenvolvida por Lifshitz tem sido motivo de análise e discussões por diversos autores. Recentemente Bardeen⁽⁴⁸⁾ desenvolveu uma versão da mesma onde as variáveis independentes, tomadas como combinações lineares das variáveis utilizadas por Lifshitz, são invariantes por transformações de gauge. Dessa maneira, a questão da interpretação física das soluções das equações de perturbação fica parcialmente resolvida.

Uma outra dificuldade dessa teoria permanece sem solução. Na aproximação (3.8) a existência do limite da métrica quando $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow 0$ é pressuposto. Esse limite é dado pelo espaço-tempo base $g_{\mu\nu}$. Esse esquema tradicional, em verdade, é por demais

simplicista e podemos questionar sua validade em casos gerais. Toda a questão consiste na idéia de limite. Esta noção requer um critério operacional da vizinhança.

Para podermos utiliza-lo deveríamos considerar um conjunto W (abstrato) constituído de coleções de métricas e introduzir em W uma métrica. Assim a noção de distância entre duas métricas poder-se-ia estabelecer de modo correto. Aparentemente, isto pode parecer um exagero formal. No entanto como demonstrou Geroch em um exemplo simples, a noção usual de limite de uma métrica pode levar a conclusões contraditórias (Novello⁽²⁹⁾). É importante salientar que nesse método de análise da estabilidade das soluções das equações de Einstein, a métrica é tratada como um observável, quando, na realidade, é a curvatura da geometria que tem sentido físico. É talvez essa a razão da dificuldade em definir o limite entre duas soluções, no método introduzido por Lifshitz.

No método da teoria quasi-Maxwelliana, introduzido por Hawking, ambas as dificuldades são evitadas. Segundo essa teoria (veja Caps. I e II) os modelos de Friedmann (Robertson-Walker) são caracterizados pelas seguintes condições: o conteúdo material e energético do Universo é representado por um fluido perfeito com equação de estado $p = p(\rho)$ e

$$\omega_{\mu} = \sigma_{\mu\nu} = a_{\mu} = 0 \quad . \quad (3.13)$$

Essas condições implicam nas condições adicionais

$$\rho = \rho(\tau) \quad , \quad p = p(\tau) \quad ; \quad \theta = \theta(\tau) \quad , \quad (3.14)$$

onde a_{μ} é a aceleração do fluido e $\tau = \text{cte}$ indica as hipersuper

fícies ortogonais ao fluxo do fluido (veja Cap. I e Ap. A). Todas as condições impostas são relativas ao fluido e, em princípio, podem ser observadas diretamente. Utilizamos um sistema de coordenadas onde $t = \tau$ mede o tempo próprio ao longo de cada linha de universo do fluido, e o fator de escala l é função apenas do tempo t . Então, $l(t)$ é precisamente a função $a(t)$ usada para descrever os espaços-tempo do tipo Robertson-Walker (Vol. I II Escola de Cosmologia CBPF, M. Novello).

As equações não triviais que restam, são as equações (2.26), (2.29). As condições (3.13) e (3.14) impõem que a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl são nulas; esse resultado assegura que os espaços-tempo em questão são conformalmente planos. Existe um resultado recíproco a este que permite demonstrar que, sendo o tensor de Weyl nulo, então as condições (3.13) e (3.14) devem ser satisfeitas ⁽⁶⁰⁾.

A estabilidade desses modelos, é analisada perturbando o campo gravitacional e a fonte desse campo. As perturbações do campo gravitacional são, seguindo Hawking, representadas pelos tensores

$$\delta E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

$$\delta H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

A igualdade foi introduzida para simplificar a notação. No espaço-tempo base esses tensores são nulos logo, essa identificação não introduz confusão na notação. As perturbações da fonte são representadas por:

$$\delta \omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

$$\delta\pi_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

$$\delta a_{\mu} = a_{\mu} \quad (3.20)$$

$$\delta q_{\mu} = q_{\mu} \quad (3.21)$$

$$\delta\theta \quad (3.22)$$

$$\delta\rho \quad (3.23)$$

$$\delta p \quad (3.24)$$

Por cálculo direto verifica-se que a aceleração do fluido é expressa em função da velocidade do fluxo pela eq. (3.25) abaixo

$$\delta(a_{\mu}) = a_{\mu} = (\delta V_{\mu})' + \frac{1}{3} \theta \delta V_{\mu} \quad (3.25)$$

As equações que determinam a dinâmica das perturbações do espaço-tempo base, são as equações quasi-maxwellianas para as perturbações (3.15), ..., (3.24), escritas no espaço-tempo base e considerando apenas termos lineares nas perturbações. As equações são as seguintes:

$$h_{\epsilon}^{\alpha} E_{\alpha\mu\parallel\nu} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} h_{\epsilon}^{\alpha} (\delta\rho)_{|\alpha} - \frac{1}{3} \rho_{|\alpha} \delta(V^{\alpha} V_{\epsilon}) + \frac{1}{3} \theta q_{\epsilon} + \frac{1}{2} h_{\epsilon}^{\alpha} \pi_{\alpha\parallel\nu}^{\nu} \quad (3.26)$$

$$h_{\epsilon}^{\alpha} H_{\alpha\mu\parallel\nu} h^{\mu\nu} = (\rho+p) \omega_{\epsilon} - \frac{1}{2} \eta_{\epsilon}^{\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} q_{\alpha\parallel\beta} \quad (3.27)$$

$$h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\beta}^{\rho} \frac{DE^{\alpha\beta}}{D\tau} - \frac{1}{2} H_{\alpha\mu\parallel\nu} h^{\mu(\rho\epsilon)\lambda\nu\alpha} V_{\lambda} + \theta E^{\epsilon\rho} = -\frac{1}{2} (\rho+p) \sigma^{\epsilon\rho} + \quad (3.28)$$

$$+ \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\mu}^{\rho} \pi^{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \pi^{\epsilon\rho} - \frac{1}{4} h_{\alpha}^{\epsilon} (h_{\mu}^{\rho}) q^{\mu\parallel\alpha} + \frac{1}{6} h^{\epsilon\rho} q_{\parallel\mu}^{\mu}$$

$$h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\beta}^{\rho} \frac{DH^{\alpha\beta}}{D\tau} + \frac{1}{2} E_{\alpha\mu\parallel\nu} h^{\mu(\rho\epsilon)\lambda\nu\alpha} V_{\lambda} + \theta H^{\epsilon\rho} = \frac{1}{4} h^{\mu(\rho\epsilon)\alpha\beta\lambda} V_{\lambda} \pi_{\mu\alpha\parallel\beta} \quad (3.29)$$

$$(\delta\theta)^\cdot - a^\alpha_{\parallel\alpha} + \frac{2}{3} \theta\delta\theta = -\frac{1}{2} (\delta\rho+3\delta p) \quad (3.30)$$

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^\mu_{(\alpha} h^\nu_{\beta)} a_{\mu\parallel\nu} + \frac{2}{3} \theta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^\delta_{\parallel\delta} = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \quad (3.31)$$

$$\dot{\omega}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^\mu_{\alpha} h^\nu_{\beta} a_{\parallel\mu\parallel\nu} + \frac{2}{3} \theta\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.32)$$

$$h^\mu_{\beta} (\sigma^{\beta\nu}_{\parallel\nu} - \omega^{\beta\nu}_{\parallel\nu}) - \frac{2}{3} \delta (h^{\mu\beta}\theta_{\parallel\beta}) = q^\mu \quad (3.33)$$

$$\omega^\alpha_{\parallel\alpha} = 0 \quad (3.34)$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^\alpha_{(\mu} h^\beta_{\nu)} (\sigma_{\alpha\rho\parallel\lambda} + \omega_{\alpha\rho\parallel\lambda}) \eta_\beta^{\epsilon\rho\lambda} V_\epsilon \quad (3.35)$$

$$\delta\dot{\rho} + \theta(\delta\rho+\delta p) + (\rho+p)\delta\theta + q^\alpha_{\parallel\alpha} = 0 \quad (3.36)$$

$$-\delta(p_{\parallel\beta} h^\beta_{\mu}) + (\rho+p)\delta a_\mu + h_{\mu\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{4}{3} \theta q_\mu + h_{\mu\alpha} \pi^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} = 0 \quad (3.37)$$

As propriedades geométricas dos modelos de Friedmann permitem construir nas hipersuperfícies de homogeneidade dos modelos bases completas de auto-funções harmônicas, soluções da equação de Helmholtz generalizada (veja Apêndice A). Essas auto-funções, introduzidas na física por Fock e Lifshitz, permitem expandir as perturbações e classificá-las em escalares, vetoriais e tensoriais. Essa decomposição, que constitui o "espectro de Fourier" das perturbações, permite introduzir o conceito de modos normais de vibração do universo. A seguir apresentamos a decomposição das perturbações representadas por (3.15), ..., (3.24), nas bases dos harmônicos esféricos.

$$E_{\mu\nu} = E_1(\tau) \hat{P}_{\mu\nu} + E_2(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} + E_3(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

$$H_{\mu\nu} = H_1(\tau) \hat{P}_{\mu\nu} + H_2(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^* + H_3(\tau) \hat{U}_{\mu\nu}^* \quad (3.39)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = L_1(\tau) \hat{P}_{\mu\nu} + L_2(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} + L_3(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} V(\tau) F_{\mu\nu} \quad (3.41)$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi_1(\tau) \hat{P}_{\mu\nu} + \pi_2(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} + \pi_3(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (3.42)$$

$$q_\alpha = q_1(\tau) \hat{\pi}_\alpha + q_2(\tau) \hat{S}_\alpha \quad (3.43)$$

$$\delta V_\alpha = V_1(\tau) \hat{\pi}_\alpha + V_2(\tau) \hat{S}_\alpha \quad (3.44)$$

$$\delta\theta = R(\tau) Q \quad (3.45)$$

$$\delta\rho = N(\tau) Q \quad (3.46)$$

Finalizando este capítulo gostaríamos de salientar que no presente método, o modelo base é recuperado no limite em que as quantidades (3.15), ..., (3.24) se anulam. Dessa maneira a dificuldade apontada por Geroch é evitada.

CAPÍTULO IV

PERTURBAÇÕES ESCALARES

Neste capítulo restringimos nossa análise à parte escalar do espectro de Fourier das perturbações. Isso é feito anulando as expressões

$$E_2 = E_3 = H_2 = H_3 = L_2 = L_3 = \pi_2 = \pi_3 = q_2 = V_2 = 0$$

(3.38), ..., (3.46) Cap. III; com isso garantimos que as perturbações são puramente escalares.

Apenas para referência, listamos as perturbações não nulas, que são:

$$\delta\theta = R_{(\tau)} Q \quad (4.1)$$

$$\delta\rho = N_{(\tau)} Q \quad (4.2)$$

$$\delta V_{\mu} = V_{(\tau)} h_{\mu}^{\nu} Q|_{\nu} \quad (4.3)$$

$$E_{\mu\nu} = E_{(\tau)} \hat{P}_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

$$H_{\mu\nu} = H_{(\tau)} \hat{P}_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = L_{(\tau)} \hat{P}_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi_{(\tau)} \hat{P}_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

$$q_{\mu} = q_{(\tau)} h_{\mu}^{\nu} Q|_{\nu} \quad (4.8)$$

Neste capítulo suprimimos o índice 1 da amplitude das perturbações.

A ordem k dos harmônicos esféricos determina a sua periodicidade. Essa periodicidade nos permite definir um comprimento

to de onda m associado às perturbações. Por analogia com o caso plano ($\varepsilon = 0$), o comprimento de onda associado a uma perturbação de ordem k é definido pela expressão (4.9) abaixo:

$$m = \frac{2\pi\ell}{k} \quad (4.9)$$

Por cálculo direto verifica-se que a aceleração das partículas do fluido é expressa em função da velocidade das mesmas pela seguinte equação (Cap. III):

$$a^\alpha = \delta(\dot{V}^\alpha) = (\delta V^\alpha)^\cdot + \frac{1}{3} \theta \delta V^\alpha \quad (4.10)$$

Substituindo em (4.10) δV^α pela expressão (4.3) obtemos o seguinte resultado

$$a_\alpha = (Vh_\alpha^\beta Q_{|\beta})^\cdot + \frac{1}{3} \theta Vh_\alpha^\beta Q_{|\beta} = \dot{V}h_\alpha^\beta Q_{|\beta} \quad (4.11)$$

Tomando a derivada covariante dessa expressão e contraindo com a métrica $h_{\alpha\beta}$ obtemos:

$$h^{\alpha\beta} a_{\alpha||\beta} = \dot{V} \frac{k^2}{\ell^2} \quad (4.12)$$

De maneira semelhante obtemos os seguintes resultados

$$\delta(p_{|\beta} h_\mu^\beta) = \lambda \left[(\delta\rho)_{|\beta} h_\mu^\beta - \dot{\rho} V h_\mu^\nu Q_{|\nu} \right] = \lambda (N - \dot{\rho} V) k^2 \hat{\pi}_\mu \quad (4.13)$$

$$h_{\mu\alpha} \dot{q}^\alpha = \left(\dot{q} - \frac{\theta}{3} q \right) k^2 \hat{\pi}_\mu \quad (4.14)$$

$$\hat{V}_\beta \hat{\pi}_\mu^\beta = \frac{2}{3\ell^2} (3\varepsilon + k^2) \pi \hat{\pi}_\mu \quad (4.15)$$

$$\hat{V}_\alpha \hat{\sigma}_\mu^\alpha = \frac{2}{3} (3\varepsilon + k^2) \frac{L}{\ell^2} \hat{\pi}_\mu \quad (4.16)$$

$$\frac{2}{3} \delta(h^{\mu\beta} \theta_{|\beta}) = \left\{ 2 \left[\frac{\bar{\epsilon}}{\ell^2} + \frac{1+\lambda}{2} \rho \right] \dot{V} - \frac{2}{3} R \right\} k^2 \hat{\pi}_\mu \quad (4.17)$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})^\cdot = \dot{L} \hat{P}_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \theta L \hat{P}_{\alpha\beta} \quad (4.18)$$

$$-\frac{1}{2} h^\mu_{(\alpha} h^\nu_{\beta)} a_{\mu\parallel\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} a^\mu_{\parallel\mu} = -\dot{V} k^2 \hat{P}_{\alpha\beta} \quad (4.19)$$

$$h_\epsilon^\alpha h_\rho^\beta \dot{H}_{\alpha\beta} + \theta H_{\epsilon\rho} = (\dot{H} + \frac{1}{3} \theta H) \hat{P}_{\epsilon\rho} \quad (4.20)$$

$$h_\epsilon^\alpha h_\rho^\beta (E_{\alpha\beta})^\cdot + \theta E_{\epsilon\rho} = (\dot{E} + \frac{1}{3} \theta E) \hat{P}_{\epsilon\rho} \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2} h_\epsilon^\alpha h_\rho^\mu \dot{\pi}_{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \pi_{\epsilon\rho} = \frac{1}{2} (\dot{\pi} + \frac{1}{3} \theta \pi) \hat{P}_{\epsilon\rho} \quad (4.22)$$

$$-\frac{1}{4} h^\alpha_{(\epsilon} h^\mu_{\rho)} q_{\mu\parallel\alpha} + \frac{1}{6} h_{\epsilon\rho} q^\mu_{\parallel\mu} = -\frac{k^2}{2} q \hat{P}_{\epsilon\rho} \quad (4.23)$$

$$\hat{V}_\mu H_\epsilon^\mu = \frac{2}{3} (3\epsilon + k^2) \frac{E}{\ell^2} \hat{\pi}_\epsilon \quad (4.24)$$

$$\hat{V}_\mu E_\epsilon^\mu = \frac{2}{3} (3\epsilon + k^2) \frac{E}{\ell^2} \hat{\pi}_\epsilon \quad (4.25)$$

Utilizando esses resultados, as eqs. (3.38), ..., (3.46) permitem escrever as seguintes equações para as emplitudes das perturbações:

$$E = \frac{k^2 \ell^2}{2(3\epsilon + k^2)} \left[\bar{N} - \dot{\rho} V + \theta q + \frac{3\epsilon + k^2}{\ell^2} \pi \right] \quad (4.26)$$

$$H = 0 \quad (4.27)$$

$$\dot{E} + \frac{1}{3} \theta E + \frac{1}{2} (1+\lambda) \rho \Sigma = \frac{1}{2} (\dot{\pi} + \frac{1}{3} \theta \pi) - \frac{1}{2} k^2 q \quad (4.28)$$

$$\dot{H} + \frac{1}{3} \theta H = 0 \quad (4.29)$$

$$\dot{R} - k^2 \frac{\dot{V}}{\ell^2} + \frac{2}{3} \theta R = -\frac{1}{2} (1 + 3\lambda) N \quad (4.30)$$

$$\dot{\Sigma} - k^2 \dot{V} = -E - \frac{1}{2} \pi \quad (4.31)$$

$$\frac{2}{3} (3\varepsilon + k^2) \frac{\Sigma}{\ell^2} - 2 k^2 \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\ell^2} + \left(\frac{1+\lambda}{2} \right) \rho \right] V - \frac{2}{3} R \right\} = k^2 q \quad (4.32)$$

$$\dot{N} + \theta(1+\lambda)N + (1+\lambda)\rho R + k^2 q / \ell^2 = 0 \quad (4.33)$$

$$- \lambda \left[N - \rho V \right] + (1+\lambda)\rho \dot{V} + \dot{q} + \theta q + \frac{2}{3\ell^2} \left(\frac{3\varepsilon + k^2}{k^2} \right) \pi = 0 \quad (4.34)$$

Supondo que o regime do fluido não é alterado pela perturbação a equação de estado do fluido não muda. Isto é,

$$p = \lambda \rho \quad \text{implica que} \quad \delta p = \lambda \delta \rho \quad (4.35)$$

Nesse caso a equação de conservação do tensor momento energia garante que a divergência do fluxo de calor é nula:

$$q^\alpha{}_{||\alpha} = 0 \quad . \quad (4.36)$$

Substituindo nessa equação o fluxo de calor pela sua decomposição em harmônicos escalares (4.8) concluímos que:

$$q_\alpha = 0 \quad . \quad (4.37)$$

Analogamente podemos mostrar que a condição (4.35) impõe que $\pi_{\mu\nu} = 0$.

Por essa razão vamos centrar o nosso interesse na densidade de contraste χ , definida abaixo, que caracteriza totalmente as perturbações do fluido que satisfazem à condição (4.35). Definimos χ como

$$\chi = \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4.38)$$

Para determinar χ necessitamos utilizar as equações

(4.30), (4.33), (4.34). A equação (4.33) pode ser reescrita sob a forma:

$$R = \frac{-1}{1+\lambda} \left(\frac{N}{\rho} \right) \cdot \quad (4.39)$$

Derivando essa expressão, substituindo o resultado em (4.30) e utilizando (4.34) obtemos:

$$\frac{1}{1+\lambda} \left[(X)'' + \frac{2}{3} \theta \dot{X} \right] - \frac{1+3\lambda}{2} \chi_{\rho} + \frac{k^2}{\ell^2} \dot{V} = 0 \quad (4.40)$$

ou ainda

$$\frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{X})' - \frac{1+3\lambda}{2} \ell^2 \rho \chi + k^2 \dot{V} = 0 \quad (4.41)$$

A eq. (4.34) reduz-se a:

$$\dot{V} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \chi + \lambda \theta V \quad (4.42)$$

Essas duas equações nos permitem calcular χ e V . Substituindo (4.41) em (4.42) e derivando, obtemos:

$$\frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{X})'' - \frac{1+3\lambda}{2} (\ell^2 \rho \chi)' + \frac{k^2 \lambda}{1+\lambda} \dot{X} + k^2 \lambda \theta V + k^2 \theta \lambda \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \chi + \lambda \theta V \right) = 0 \quad (4.43)$$

Isolando V em (4.41) e (4.42) obtemos a seguinte expressão

$$V = \frac{1}{k^2 \lambda \theta} \left[- \frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{V})' + \frac{1+3\lambda}{2} \ell^2 \rho \chi - \frac{k^2 \lambda}{1+\lambda} \chi \right]$$

e então finalmente segue a equação (4.44) abaixo

$$\frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{X})'' - \frac{1+3\lambda}{2} (\ell^2 \rho \chi)' + \lambda \theta \left[- \frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{X})' + \frac{1+3\lambda}{2} \ell^2 \rho \chi \right] +$$

$$+ \frac{\dot{\theta}}{\theta} \left[\frac{1+3\lambda}{2} \ell^2 \rho \chi - \frac{1}{1+\lambda} (\ell^2 \dot{\chi}) \right] + \frac{\lambda k^2}{1+\lambda} \left[\dot{\chi} + \left(-\frac{\dot{\theta}}{\theta}\right) \chi \right] = 0 \quad (4.44)$$

Verifica-se por substituição direta que

$$\chi_s = -(1+\lambda)V_0\theta \quad (4.45)$$

onde $V_0 = \text{cte}$, é solução da eq. (4.44). Essa solução é obtida por uma transformação de coordenadas e não representa nenhuma alteração efetiva do modelo, como mostraremos a seguir. Suponha a transformação

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + V_0$$

A densidade de matéria se transforma como

$$\rho(\tau) \rightarrow \rho'(\tau') = \rho'(\tau) + \dot{\rho}(\tau) V_0 + \dots$$

logo,

$$\delta\rho = -(1+\lambda)\theta\rho V_0 \quad .$$

Para eliminar essas soluções fictícias procedemos da seguinte maneira. O sistema de equações diferenciais que determinam as perturbações é acoplado aos tensores $E_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ que dependem de $\delta\rho$ e δV^μ . O tensor $\omega_{\mu\nu}$ no caso em questão, é identicamente nulo e os tensores $E_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ sendo nulos no modelo base terão de permanecer nulos para toda perturbação gerada por transformação de coordenadas. O caso inverso, que toda solução onde $\omega_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = 0$ é uma transformação de coordenadas, segue da análise direta das equações.

Vamos demonstrar que a solução (4.45) é efetivamente uma transformação de coordenadas. Da eq. (4.26) segue que $E = 0$, isto é, $E_{\mu\nu} = 0$.

A equação (4.27) impõe que $H = 0$ e consequentemente $H_{\mu\nu} = 0$ sempre. A eq. (4.32) por sua vez nos dá que:

$$\Sigma = 0 \quad \text{isto é,} \quad \sigma_{\mu\nu} = 0$$

Um dos méritos deste método é eliminar a solução (4.45), explicando que ela é uma transformação de coordenadas, e esclarecendo uma confusão existente na literatura até então ⁽⁴⁹⁾.

A solução (4.45), por outro lado, é útil permitindo simplificar a eq. (4.44). Substituindo nessa equação χ por

$$\chi = \chi_s \dot{v} \quad ,$$

obtemos

$$\frac{1}{1+\lambda} \left[(\ell^2 \chi_s \dot{v})'' + (\ell^2 \dot{\chi}_s) \cdot \dot{v} + (\ell^2 \dot{\chi}_s \dot{v}) \cdot \right] + \frac{1+3\lambda}{2} (\ell^2 \rho \chi_s \dot{v}) + \\ + \lambda \theta \left\{ - \frac{1}{1+\lambda} \left[\ell^2 \dot{\chi}_s \dot{v} + (\ell^2 \chi_s \dot{v}) \cdot \right] \right\} - \frac{1}{1+\lambda} \frac{\dot{\theta}}{\theta} \left[\ell^2 \dot{\chi}_s \dot{v} + (\ell^2 \chi_s \dot{v}) \cdot \right] + \frac{\lambda k^2}{1+\lambda} \chi_s \dot{v} = 0$$

Definindo $\psi = \dot{v}$ e simplificando convenientemente os termos dessa equação, obtemos:

$$\theta \ddot{\psi} + (2\dot{\theta} + \frac{4}{3} \theta^2 - \lambda \theta^2) \dot{\psi} + \left\{ (1+3\lambda) \rho \left[\frac{\dot{\theta}}{\theta} + (\frac{1}{3} + 2\lambda) \theta \right] + \frac{\lambda k^2}{\ell^2} \theta \right\} \psi = 0 \quad (4.46)$$

Das soluções da eq. (4.46), a densidade de contraste χ é obtida mediante a integração

$$\chi = \chi_0 \left[\int \psi dt + \psi_0 \right] \quad .$$

O caso mais simples em que a eq. (4.46) pode diretamente ser integrada é quando $\rho = \lambda = 0$. Nesse caso a eq. (4.46) pode ser simplificada. Na eq. (4.42), fazendo $\lambda = 0$, obtemos que

$$\dot{v} = 0 \quad .$$

A eq. (4.41) então se reduz a

$$\ddot{\chi} + \frac{2}{3} \theta \dot{\chi} - \frac{1}{2} \rho \chi = 0 \quad .$$

Substituindo nessa equação $\chi = \chi_S v$ e tomando $\dot{v} = \psi$, obtemos:

$$\theta \dot{\psi} - \rho \psi = 0 \quad .$$

Essa equação pode ser integrada diretamente resultando:

$$\psi = \psi_0 \exp \left[\int (\rho/\theta) dt \right] \quad .$$

É importante salientarmos que as soluções para $p=0$ são independentes de k (ordem dos harmônicos). Em outras palavras, o comprimento de onda (m) da perturbação não influencia a sua dinâmica. Esse fato decorre da matéria ter apenas interação gravitacional. No modelo de perturbações em primeira aproximação o campo gravitacional, que interage com a perturbação $\delta\rho$, é devido à distribuição uniforme da matéria $\rho_0(\tau)$ e o comprimento de onda da perturbação é irrelevante. Quando $p \neq 0$, mesmo em primeira ordem, a matéria sofre a ação da perturbação δp e a sua dinâmica depende também da aceleração a^α que nesse caso não é nula e então o comprimento de onda m passa a ser relevante na determinação da evolução da densidade de contraste χ como veremos adiante.

Dividiremos o cálculo das soluções das perturbações da densidade de contraste χ para o caso $p = 0$ em três partes.

a) seção euclidiana, poeira, $\lambda = 0$; $\varepsilon = 0$, nesse caso (veja Tabela 2.1):

$$a(t) \propto t^{3/2} \quad ; \quad \theta(t) = 2t^{-1} \quad ; \quad \rho(t) = \frac{4}{3} t^{-2} \quad .$$

A equação (4.47) se reduz a

$$\dot{\psi} = \frac{2}{3} t^{-1} \psi ,$$

que pode ser integrada sem dificuldade, resultando:

$$\psi(t) = C_0 t^{2/3} . \quad (4.48)$$

A densidade de contraste correspondente é

$$\chi = \chi_0 t^{2/3} + \chi_1 t^{-1} ,$$

onde χ_0 e χ_1 são constantes de integração. O modo (t^{-1}) pode ser eliminado por uma transformação de coordenadas que corresponde a uma redefinição da origem da coordenada t . A solução fisicamente significativa é

$$\chi = \chi_0 t^{2/3} . \quad (4.49)$$

A constante χ_0 deve satisfazer à condição (de pequenez)

$$\mu_0 t_0^{2/3} \ll 1 ,$$

onde t_0 é o instante em que se formou a perturbação.

b) seção fechada, poeira, $\lambda = 0$; $\varepsilon = 1$, (ver Tabela 2.1).

$$a(\eta) \propto (1 - \cos \eta) \quad ; \quad t(\eta) \propto (\eta - \text{senn} \eta)$$

$$\theta = \frac{3 \text{sen} \eta}{a_0 (1 - \cos \eta)^2} \quad ; \quad \rho = \frac{6}{a_0^2} (1 - \cos \eta)^{-3}$$

A equação (4.47) fica,

$$(\text{senn} \eta) \frac{d\psi}{d\eta} - 2\psi = 0$$

e tem por solução

$$\psi = C_0 \text{tg}^2 \frac{\eta}{2} .$$

A densidade de contraste correspondente $\bar{\epsilon}$

$$\chi = 3 \frac{\text{sen } \eta}{a_0 (1 - \text{cos} \eta)^2} \left[\int C_0 \left(\text{tg}^2 \frac{\eta}{2} \right) (1 - \text{cos} \eta) d\eta + \chi_0 \right]$$

de onde segue que

$$\chi = \frac{3 \text{sen } \eta}{a_0 (1 - \text{cos} \eta)^2} \left[\bar{C}_0 (\text{sen} \eta - 3\eta) + \chi_0 \right] + \frac{3 C_0}{a_0 (1 - \text{cos} \eta)} .$$

Eliminando a solução fictícia obtemos:

$$\chi = 3 \bar{C}_0 \left[\frac{\text{sen } \eta}{(1 - \text{cos} \eta)^2} (\text{sen} \eta - 3\eta) + \frac{1}{1 - \text{cos} \eta} \right] . \quad (4.50)$$

A condição sobre a constante \bar{C}_0 é

$$\frac{\bar{C}_0}{\eta_0^2} \ll 1 \quad \text{para} \quad t(\eta_0) \ll 1 .$$

c) seção aberta, poeira ($\lambda = 0$; $\epsilon = -1$). (Ver Tabela 2.1)

$$a(\eta) \propto (\text{cosh} \eta - 1) \quad ; \quad t(\eta) = \text{senh} \eta - \eta$$

$$\theta = \frac{3 \text{senh} \eta}{a_0 (\text{cosh} \eta - 1)^2} \quad ; \quad \rho = \frac{6}{a_0^2} (\text{cosh} \eta - 1)^{-3}$$

A equação (4.47) fica

$$\frac{d\psi}{d\eta} = 2 (\text{senh} \eta)^{-1} \psi$$

e tem por solução:

$$\psi = \psi_0 \text{tanh}^2 \frac{\eta}{2} .$$

A solução fisicamente significativa para a densidade de contraste χ é

$$\chi = 3C_0 \left[\frac{3}{-\sinh^{-2} \frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{\eta}{2} \operatorname{cotgh} \frac{\eta}{2} \right) + 1 \right] . \quad (4.49)$$

A constante C_0 deve satisfazer à condição $C_0 \ll 1$.

Nos três casos analisados as constantes arbitrárias estão relacionadas à escolha do sistema de coordenadas. A escolha feita foi a de um sistema simultaneamente síncrono e comovente. Nesse sistema $\delta V^\alpha = 0$. Na literatura ⁽⁴⁹⁾ a solução fictícia $\chi \propto \theta$ é considerada como fisicamente significativa. Essa confusão é proveniente do fato de que nos esquemas tradicionais de cálculo de perturbações, as soluções fictícias são eliminadas por uma escolha de gauge conveniente ⁽³⁴⁾. Essa particular escolha de gauge permite ainda transformações de coordenadas possibilitando eliminar a solução referida. No método desenvolvido, essa solução é claramente identificada como proveniente de uma transformação de coordenadas pela análise do sistema completo de equações como anteriormente salientamos.

Apenas como conclusão, queríamos notar que no caso aberto e fechado para $\eta \ll 1$ temos $\chi \propto \eta^2$. No caso aberto para $\eta \gg 1$ temos $\chi \rightarrow \text{cte}$. No caso fechado no limite $\eta = \pi$ a perturbação χ cresce.

- Cálculo da densidade de contraste para a equação de estado $p = \frac{1}{3} \rho$.

Novamente vamos dividir o cálculo em três partes.

a) seção euclidiana, radiação. $\lambda = \frac{1}{3}$; $\epsilon = 0$ (Ver Tab. 2.1)

$$a(t) \propto t^{1/2} ; \quad \rho = \frac{3}{4} t^{-2} .$$

A equação (4.46) se reduz a

$$t^2 \ddot{\psi} - \frac{1}{2} t \dot{\psi} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} k^2 t \right) \psi = 0 \quad ,$$

onde a constante a_0 foi escolhida de maneira conveniente para termos o fator $\frac{1}{4}$ no último termo da equação. As soluções dessa equação são

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} x \operatorname{sen} x \\ x \operatorname{cos} x \end{array} \right\} \quad \text{onde} \quad x = k\sqrt{t} \quad .$$

Eliminando a solução fictícia $\chi \propto \theta$, obtemos para a densidade de contraste a seguinte expressão

$$\chi = A_0 \left[\frac{2 \operatorname{sen} x}{x} + \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) \operatorname{cos} x \right] + A_1 \left[\frac{2 \operatorname{cos} x}{x} + \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) \operatorname{sen} x \right] \quad . \quad (4.50)$$

No limite $k\sqrt{t} \ll 1$ o comportamento de χ é dado por:

$$\chi = \bar{A}_0 t + \bar{A}_1 t^{1/2} \quad . \quad (4.51)$$

No limite $k\sqrt{t} \gg 0$ o comportamento de χ é dada por:

$$\chi = -A_0 \operatorname{cos} k\sqrt{t} + A_1 \operatorname{sen} k\sqrt{t} \quad (4.52)$$

b) seção aberta, radiação, $\lambda = \frac{1}{3}$; $\varepsilon = -1$, (ver Tab. 2.1)

$$a(\eta) = a_0 \operatorname{senh} \eta \quad ; \quad t(\eta) = a_0 (\operatorname{cosh} \eta - 1)$$

A equação (4.46) fica

$$\frac{1}{4} \operatorname{senh}^2 2\eta \psi'' - \operatorname{senh} 2\eta \psi' + \left(2 \operatorname{cosh} 2\eta + \frac{k^2}{12} \operatorname{senh}^2 2\eta \right) \psi = 0 \quad . \quad (4.53)$$

A equação de estado $p = \frac{1}{3} \rho$ está associada, no modelo

padrão do Universo, aos instantes iniciais^(*). É natural então, que a equação acima seja analisada na situação $\eta \ll 1$. Nesse caso, (4.53) se reduz a:

$$\eta^2 \psi'' - 2\eta \psi' + (2 + \frac{k^2}{3} \eta^2) \psi = 0 \quad . \quad (4.54)$$

Para grandes comprimentos de onda, ou seja $k^2 \eta^2 \ll 1$, obtemos

$$\eta^2 \psi'' - 2\eta \psi' + 2\psi = 0 \quad .$$

A solução dessa equação é

$$\psi = C_0 \eta^2 + C_1 \eta$$

e a densidade de contraste correspondente é:

$$\chi = A_0 \eta + A_1 \eta^2 \quad . \quad (4.55)$$

Expressa em função de $t(\eta)$ essa solução fica:

$$\chi = \bar{A}_0 t^{1/2} + \bar{A}_1 t \quad . \quad (4.56)$$

Para $k \gg 1$ temos

$$\eta^2 \psi'' - 2\eta \psi' + (2 + q^2 \eta^2) \psi = 0$$

onde $q^2 = \frac{k^2}{3}$.

A solução dessa equação é:

$$\psi = \eta^{3/2} \left[C_1 J_{1/2}(q\eta) + C_2 Y_{1/2}(q\eta) \right] \quad (4.57)$$

No limite $\eta q \gg 1$ obtemos:

(*) Isso se deve ao fato de que pela conservação de energia $\rho \sim a^{-3(\lambda+1)}$.

$$= A_0 \left[\frac{\text{sen } q\eta}{\eta q^{5/2}} - \frac{\text{cos } q\eta}{q^{3/2}} + \frac{2\text{cos } q\eta}{q^{7/2} \eta^2} \right] + \\ + A_1 \left[\frac{\text{cos } q\eta}{\eta q^{5/2}} + \frac{\text{sen } q\eta}{\eta q^{3/2}} - \frac{2\text{sen } q\eta}{\eta^2 q^{7/2}} \right] .$$

c) seção fechada, radiação, $\lambda = \frac{1}{3}$; $\epsilon = 1$ (ver Tabela 2.1)

É obtido diretamente do caso anterior pelo seguinte ma
peamento

$$a \rightarrow ia \quad ; \quad \eta \rightarrow i\eta \quad ; \quad k \rightarrow ik \quad .$$

CAPÍTULO V

PERTURBAÇÕES VETORIAIS

Neste capítulo vamos restringir o nosso estudo a perturbações onde apenas o estado de movimento do fluido muda, deixando inalterada a densidade de energia. Seguindo o mesmo procedimento utilizado para analisar as perturbações da densidade de energia, iremos desenvolver as perturbações em uma base completa de harmônicos esféricos vetoriais. Esses objetos, que denotamos por \hat{S}^α , são auto-vetores do operador de Laplace tridimensional (veja Apêndice A)

$$h^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \hat{S}^\alpha = \frac{k^2}{l^2} \hat{S}^\alpha \quad . \quad (5.1)$$

Com esses vetores podemos construir os tensores $\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}$ e $\hat{F}_{\alpha\beta}$ tomando a derivada covariante na tri-superfície perpendicular a V^α e simetrizando e antissimetrizando o resultado, respectivamente. Além desses tensores nós construímos os vetores duais ${}^* \hat{S}^\mu$ definidos pela expressão

$${}^* \hat{S}^\mu = \eta^{\mu\rho\beta\lambda} V_\rho \hat{\nabla}_\lambda \hat{S}_\beta \quad . \quad (5.2)$$

Esses vetores duais, introduzidos pela primeira vez por Novello et al. ⁽³²⁾, simplificam consideravelmente o cálculo da evolução temporal das perturbações. Utilizando o vetor dual ${}^* \hat{S}^\mu$ defini

mos o tensor simétrico ${}^*\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}$ pela expressão

$${}^*\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = \hat{V}_\alpha \hat{S}_\beta - \hat{V}_\beta \hat{S}_\alpha \quad . \quad (5.3)$$

Utilizando esses objetos podemos decompor as perturbações na base \hat{S}^μ e na base dual ${}^*\hat{S}^\mu$ como segue:

$$\delta\hat{V}_\mu = V(\tau) \hat{S}_\mu \quad (5.4)$$

$$\hat{q}_\mu = q(\tau) \hat{S}_\mu \quad (5.5)$$

$$\hat{\pi}_{\mu\nu} = \pi(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} \quad (5.6)$$

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} V(\tau) \hat{F}_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} = L(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} \quad (5.8)$$

$$\hat{E}_{\mu\nu} = E(\tau) \hat{\Sigma}_{\mu\nu} \quad (5.9)$$

$$\hat{H}_{\mu\nu} = H(\tau) {}^*\hat{\Sigma}_{\mu\nu} \quad (5.10)$$

Essa decomposição deve ser entendida como uma série , por exemplo $\delta\hat{V}_\mu = \sum_n V(\tau) \hat{S}_\mu$. Escrevemos apenas um termo genérico, deixando implícito o somatório em n pela mesma razão assinalada no caso de perturbações escalares (Cap. IV) . Nas expressões (5.4-10) acima, o parâmetro τ é o tempo próprio do observador comovente definido por V^μ .

Substituindo (5.4) na eq. (3.11), que define a aceleração, encontramos:

$$a_\mu = (\dot{V} + \frac{1}{3} \theta V) \hat{S}_\mu \quad . \quad (5.11)$$

Utilizando esse valor na equação de conservação (3.23), obtemos:

$$\dot{V} + \frac{1-3\lambda}{3} \theta V + \frac{1}{(1+\lambda)\rho} \left[\dot{q} + \frac{4}{3} \theta q + \frac{2\varepsilon+k^2}{\ell^2} \pi \right] = 0 . \quad (5.12)$$

A equação de vínculo (3.19) neste caso se reduz a:

$$h^\mu_\beta (\sigma^{\beta\nu} \parallel_\nu - \omega^{\beta\nu} \parallel_\nu) + \frac{2}{3} \dot{\theta} \delta V^\mu = q^\mu \quad (5.13)$$

O valor de $\dot{\theta}$, obtido da equação de Raychaudhuri, é:

$$\dot{\theta} = -3 \left[\frac{\varepsilon}{\ell^2} + \frac{1+\lambda}{2} \rho \right] . \quad (5.14)$$

Utilizando esse valor de $\dot{\theta}$ na eq. (5.13) obtemos o valor do tensor de cisalhamento e que é

$$L = \frac{\ell^2}{2\varepsilon+k^2} \left[q + (1+\lambda)\rho V \right] + \frac{V}{2} . \quad (5.15)$$

Substituindo a expressão (5.9) na equação de divergência do tensor $E_{\mu\nu}$ (eq. (3.12)) obtemos o valor de E dado por:

$$E = \frac{1}{3(2\varepsilon+k^2)} \ell^2 \theta \left[(1+\lambda)\rho V + q \right] + \frac{\pi}{2} . \quad (5.16)$$

A parte magnética do tensor de Weyl, $H_{\mu\nu}$, é obtida substituindo (5.10) na equação de vínculo (3.2.1). O resultado obtido é

$$H(\tau) \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{2} \left(L - \frac{V}{2} \right) h^\mu_{(\alpha} h^\nu_{\beta)} \hat{V}_\nu \hat{S}_\mu^* .$$

Substituindo nessa expressão o valor de L dado pela eq. (5.15) obtemos:

$$H(\tau) = -\frac{\ell^2}{2(2\varepsilon+k^2)} \left[(1+\lambda)\rho V + q \right] . \quad (5.17)$$

Com esse resultado completamos o cálculo das perturbações vetoriais. As demais equações são identicamente satisfeitas como demonstramos a seguir.

Substituindo (5.11), (5.6), (5.9) na eq. (3.17) obtemos:

$$\dot{L} + \frac{1}{3} \theta L - \frac{1}{2} (\dot{V} + \frac{\theta}{3} V) = -E - \frac{\pi}{2} \quad (5.18)$$

Derivando a expressão (5.15) e utilizando a eq. (5.12) para calcular o termo $\dot{V} + \frac{\theta}{3} V$ e substituindo os resultados encontrados na equação acima, obtemos:

$$\dot{L} + \frac{1}{3} \theta L - \frac{1}{2} (\dot{V} + \frac{\theta}{3} V) = \frac{\ell^2}{2\varepsilon + k^2} \left\{ -\frac{\theta}{3} q - (1 + \lambda) \rho V \frac{\theta}{3} \right\} - \pi \quad (5.19)$$

Comparando esse resultado com a eq. (5.16) vemos que o lado direito de (5.19) se reduz a $-(E + \frac{\pi}{2})$ reproduzindo identicamente a eq. (5.18).

Utilizando as expressões (5.5), (5.7) e (5.10), encontramos para a divergência da parte magnética do tensor de Weyl, para o vetor vorticidade e para o rotacional do fluxo de calor os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon}^{\alpha} h^{\mu\nu} \hat{\nabla}_{\nu} \hat{H}_{\alpha\mu} &= \frac{2\varepsilon + k^2}{\ell^2} H \hat{S}_{\varepsilon}^* \\ \omega_{\varepsilon} &= -\frac{1}{2} \eta_{\varepsilon}^{\beta\gamma\delta} V_{\delta} \omega_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} V S_{\varepsilon}^* \\ \eta_{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} V_{\gamma} \hat{\nabla}_{\beta} \hat{q}_{\alpha} &= q S_{\varepsilon}^* \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na eq. (3.13) obtemos a seguinte expressão

$$H = - \frac{\ell^2}{2(2\varepsilon+k^2)} \left[(1+\lambda)\rho V + q \right] .$$

Essa expressão é idêntica ao resultado obtido através da equação de vínculo (3.21).

Resta-nos verificar as eqs. (3.14) e (3.15). Utilizando as expressões (5.10), (5.9) e (5.6), obtemos por cálculo direto os resultados:

$$(\hat{H}^{\alpha\beta}) \cdot = (\dot{H} - \frac{2}{3} \theta H) \hat{\Sigma}^{*\alpha\beta} .$$

$$\frac{1}{2} \hat{E}_{\alpha\mu\|\beta} h^{\mu(\rho\eta\varepsilon)\lambda\nu\alpha} V_\lambda = \frac{E(\tau)}{2} \hat{\Sigma}_{\alpha\mu\|\nu} h^{\mu(\rho\eta\varepsilon)\lambda\nu\alpha} V_\lambda = - \frac{E}{2} \hat{\Sigma}^{*\rho\varepsilon} .$$

$$\frac{1}{4} \pi_{\mu\alpha\|\beta} h^{\mu(\rho\eta\varepsilon)\alpha\beta\lambda} V_\lambda = \frac{\pi}{4} \hat{\Sigma}_{\mu\alpha\|\beta} h^{\mu(\rho\eta\varepsilon)\alpha\beta\lambda} V_\lambda = \frac{\pi}{4} \hat{\Sigma}^{*\rho\varepsilon} .$$

Substituindo esses resultados na eq. (3.15), obtemos:

$$\dot{H} + \frac{1}{3} \theta H - \frac{1}{2} E = \frac{\pi}{4} . \quad (5.20)$$

Derivando a expressão (5.17) obtemos

$$\dot{H} = - \frac{\ell^2 \theta}{3(2\varepsilon+k^2)} \left[(1+\lambda)\rho V + q \right] - \frac{\ell^2}{2(2\varepsilon+k^2)} \left[(1+\lambda)\dot{\rho} V + (1+\lambda)\rho\dot{V} + \dot{q} \right]$$

Utilizando a equação de conservação da densidade de energia ρ e a expressão (5.12) para eliminar $\dot{\rho}$ e \dot{V} da equação acima, obtemos o seguinte resultado:

$$\dot{H} = E .$$

Substituindo esse resultado na eq. (5.20) e utilizando as expressões (5.16) e (5.17) verificamos que essa equação é identicamente satisfeita.

As expressões (5.5), (5.9), (5.6) e (5.5) nos permitem obter por cálculo direto os resultados:

$$h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\beta}^{\rho} (\hat{E}^{\alpha\beta})^{\cdot} = (\dot{E} - \frac{1}{3} \theta E) \hat{\Sigma}^{\epsilon\rho}$$

$$h^{\mu(\rho} h^{\epsilon)\lambda\nu\alpha} V_{\lambda} \hat{V}_{\nu} \hat{H}_{\alpha\mu} = H(\tau) \hat{\Sigma}_{\alpha\mu}^{*} \parallel_{\nu} h^{\mu(\rho} h^{\epsilon)\lambda\nu\alpha} V_{\lambda} = -H(k^2 - 2\epsilon) \hat{\Sigma}^{\epsilon\rho}$$

$$h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\mu}^{\rho} \dot{\pi}^{\alpha\mu} = (\dot{\pi} - \frac{1}{3} \theta \pi) \hat{\Sigma}^{\epsilon\rho}$$

$$\frac{1}{4} h^{\alpha(\epsilon} h^{\rho)\mu} \hat{V}_{\alpha} q_{\mu} = \frac{1}{4} q \hat{\Sigma}^{\epsilon\rho}$$

Substituindo esses resultados na eq. (3.14) obtemos

$$\dot{E} + \frac{2}{3} \theta E + \frac{1}{2} (k^2 - 2\epsilon) H = -\frac{1}{2} (\rho + p) L - \frac{1}{4} q + \frac{1}{2} \dot{\pi} \quad (5.21)$$

Utilizando a eq. (5.16) encontramos para \dot{E} o resultado

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -\frac{2}{9} \frac{\ell^2 \theta^2}{(2\epsilon + k^2)} \left[(1+\lambda) \rho V + q \right] - \frac{(1+\lambda) \ell^2}{2(2\epsilon + k^2)} \left[(1+\lambda) \rho V + q \right] + \\ & - \frac{\epsilon}{2\epsilon + k^2} \left[(1+\lambda) \rho V + q \right] + \frac{\dot{\pi}}{2} - \frac{\theta}{3} \pi \quad . \end{aligned}$$

Essa expressão juntamente com a expressão (5.15) nos permite obter o seguinte resultado:

$$\dot{E} + \frac{2}{3} \theta E + \frac{1}{2} (1+\lambda) \rho L + \frac{q}{4} - \dot{\pi} = \frac{k^2 - 2\epsilon}{4(2\epsilon + k^2)} \left[(1+\lambda) \rho V + q \right] \quad .$$

Comparando esse resultado com a expressão (5.17) verificamos que a eq. (5.21) é identicamente satisfeita.

As soluções encontradas são expressas em função de $q(\tau)$ e $\pi(\tau)$ que são totalmente arbitrárias. Vamos analisar dois

casos particulares dessas soluções que são de maior interesse.

CASO I: Fluido Perfeito

Impomos que $q = \pi = 0$. Nesse caso a eq. (5.12) pode ser imediatamente integrada, fornecendo a perturbação $V(\tau)$. Esse resultado é

$$V(\tau) = V_0 \ell^{3\lambda-1} . \quad (5.22)$$

Substituindo (5.22) nas expressões (5.15), (5.16) e (5.17), encontramos os seguintes resultados:

$$E = \frac{(1+\lambda)}{3(2\varepsilon+k^2)} \rho_0 V_0 \theta \ell^{-2} \quad (5.23)$$

$$H = -\frac{2}{3} \frac{E}{\theta} \quad (5.24)$$

$$L = \frac{1+\lambda}{2\varepsilon+k^2} \rho_0 V_0 + \frac{1}{2} V_0 \ell^{3\lambda-1} \quad (5.25)$$

Para o caso da equação de estado $p = \frac{1}{3} \rho$ (radiação) a perturbação da velocidade, do tensor de cisalhamento e da vorticidade são constantes, resultado que confirma o anteriormente obtido por Lifshitz et al. (34). A nossa solução, que é válida para toda equação de estado do tipo $p = \lambda \rho$, permite verificar no caso $\frac{1}{3} < \lambda < 1$, que a vorticidade e o tensor de cisalhamento aumentam com o passar do tempo, uma vez que $\ell(t)$ é uma função monotônica crescente.

CASO II: Fluido de Stokes

Vamos considerar que a perturbação é caracterizada por $q = 0$ mas possui uma pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ que é linear -

mente relacionada com o tensor de cisalhamento:

$$\pi_{\mu\nu} = \alpha \sigma_{\mu\nu} \quad (5.26)$$

onde α é uma constante, denominada coeficiente de viscosidade. Nesse caso a eq. (5.12) pode ser integrada fornecendo o seguinte resultado para a perturbação $V(\tau)$,

$$V(\tau) = V_0 e^{-\alpha\tau} e^{-\frac{3}{8} \frac{\alpha}{\rho_0} (2\varepsilon+k^2) \int \ell^2 dt} \quad (5.27)$$

Na expressão acima V_0 é uma constante de integração. Em geral, para um fluido de Stokes definido por (5.26), a única restrição que a constante α deve satisfazer é a de que $\alpha > 0$. Essa imposição garante, mediante o uso adicional do segundo princípio da Termodinâmica, que a entropia apenas aumenta no sentido da seta do tempo (futuro). No caso presente, $\pi_{\mu\nu}$ deve ser considerado como uma perturbação de primeira ordem. A equação de conservação do tensor momento energia, nesse caso, permite que a condição sobre α seja abandonada, uma vez que a contribuição da anisotropia para a variação da entropia é um efeito de segunda ordem. Assim, a instabilidade desse tipo de perturbação que pode ocorrer para $\alpha < 0$ não é proibida.

Vamos fazer um comentário final sobre as perturbações vetoriais. Suponha que nós desejamos considerar uma perturbação puramente elétrica fazendo para isso a imposição de $H = 0$. As eqs. (5.12), (5.15), (5.16) e (5.17) implicam então que $\pi = 0$ e $E = 0$. Esse resultado significa que a geometria perturbada é também conformalmente plana⁽³⁸⁾. Perturbações desse tipo são possíveis apenas se existe um fluxo de calor tal que

$$q = -(1+\lambda) \rho V \quad . \quad (5.28)$$

Nesse caso a vorticidade é dada pela relação

$$L = \frac{1}{2} V \quad . \quad (5.29)$$

Esse resultado mostra que para perturbações desse tipo podemos prescrever arbitrariamente a função $V(\tau)$. O nosso procedimento foi simplesmente o seguinte: considere $L(\tau)$ como uma função dada (teoricamente ou por qualquer tipo de observação) da distorção do fluido cósmico. Obtemos dessa maneira a função $V(\tau)$. Dessa função calculamos o valor do fluxo de calor que é necessário para satisfazer o sistema completo de equações. Esse resultado é completamente independente do comprimento de onda da perturbação. Por essa razão temos apenas de considerar um modelo físico para gerar esse fluxo de calor, o que deve ser feito examinando cada caso particular.

CAPÍTULO VI

PERTURBAÇÕES TENSORIAIS

Neste capítulo analisamos a parte tensorial do espectro de Fourier das perturbações do modelo cosmológico de Friedmann.

Neste caso temos:

$$\omega_{\mu\nu} = q_{\alpha} = \delta V_{\alpha} = \delta\theta = \delta\rho = 0 \quad . \quad (6.1)$$

As qualidades não nulas serão expressas como anteriormente da seguinte forma (veja Cap. III e Apêndice A):

$$E_{\mu\nu} = E(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (6.2)$$

$$H_{\mu\nu} = H(\tau) \hat{U}_{\mu\nu}^* \quad (6.3)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = L(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (6.4)$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi(\tau) \hat{U}_{\mu\nu} \quad (6.5)$$

O campo gravitacional é representado pelas partes elétrica e magnética do tensor de Weyl. Esses tensores, nulos no modelo de Friedmann, aqui representam ondas gravitacionais; perturbações do campo gravitacional que não são originadas por perturbações da densidade de matéria, nem por perturbações de sua velocidade.

As equações de campo para as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl nesse caso se reduzem a:

$$\hat{\nabla}_\nu \hat{E}_\epsilon^\nu = 0 \quad (6.6)$$

$$\hat{\nabla}_\nu \hat{H}_\epsilon^\nu = 0 \quad (6.7)$$

$$h_\epsilon^\alpha h_\rho^\beta \frac{D\hat{E}_{\alpha\beta}}{D\tau} - \frac{1}{2} h^\mu_{(\epsilon} h^\xi_{\rho)} \eta_\xi^{\lambda\nu\alpha} \nabla_\nu H_{\alpha\mu} + \theta \hat{E}_{\epsilon\rho} = C_{\epsilon\rho} \quad (6.8)$$

$$h_\epsilon^\alpha h_\rho^\beta \frac{D\hat{H}_{\alpha\beta}}{D\tau} + \frac{1}{2} h^\mu_{(\rho} h^\xi_{\epsilon)} \eta_\xi^{\lambda\nu\alpha} \nabla_\lambda \nabla_\nu \hat{E}_{\alpha\mu} + \theta \hat{H}_{\epsilon\rho} = D_{\epsilon\rho} \quad , \quad (6.9)$$

onde $C_{\epsilon\rho}$ e $D_{\epsilon\rho}$ são tensores definidos pelas expressões (6.10) e (6.11) abaixo,

$$C_{\epsilon\rho} = -\frac{1}{2} (\rho+p) \sigma_{\epsilon\rho} + \frac{1}{2} h_\epsilon^\alpha h_\rho^\mu \dot{\pi}_{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \pi_{\epsilon\rho} \quad (6.10)$$

$$D_{\epsilon\rho} = -\frac{1}{4} h^\xi_{(\epsilon} h^\mu_{\rho)} \eta_\xi^{\lambda\beta\alpha} \nabla_\beta \pi_{\mu\alpha} \quad . \quad (6.11)$$

A essas equações temos de adicionar as equações de evolução do tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$ e a equação que vincula esse tensor à parte magnética do tensor de Weyl. Essas equações são

$$h_\rho^\alpha h_\epsilon^\beta \frac{D\hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{D\tau} + \frac{2}{3} \theta \hat{\sigma}_{\epsilon\rho} = -\hat{E}_{\epsilon\rho} - \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\epsilon\rho} \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{2} h^\alpha_{(\mu} h^\beta_{\nu)} \eta_\beta^{\epsilon\lambda\rho} \nabla_\epsilon \nabla_\lambda \hat{\sigma}_{\rho\alpha} = \hat{H}_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

As equações (6.12) e (6.13) expressam uma interação entre o campo gravitacional, representado pelos tensores $(\hat{E}_{\mu\nu}, \hat{H}_{\mu\nu})$ e a matéria, representada pelo tensor $(\sigma_{\mu\nu})$. Essa interação não aparece no método de Lifshitz.

Esse fato explicita uma diferença entre o método citado e o empregado no presente trabalho. Nossa análise é mais completa, permitindo tratar em primeira ordem de aproximação, o acoplamento das ondas gravitacionais com a matéria. Reconhecemos

também que uma perturbação que exhibe apenas ondas gravitacionais, sem perturbar de forma nenhuma a fonte da geometria, é impossível. A parte magnética do tensor de Weyl está acoplada ao tensor de cisalhamento (6.13). Assim, perturbações magnéticas são sem - pre acompanhadas de perturbações do tensor de cisalhamento. A equação (6.12) nos permite afirmar a mesma conclusão com relação a excitações da parte elétrica do campo gravitacional. Essa conclusão é contrária à análise de Lifshitz que considera modos de perturbação puramente gravitacionais.

Na geometria não perturbada $(h^{\mu}_{\nu})' = 0$. Utilizando esse resultado e definindo o operador $P_{\alpha\beta}$ pela expressão

$$P_{\rho\epsilon}(\phi) = \frac{1}{2} h^{\mu}_{(\rho} h^{\xi}_{\epsilon)} \eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} \phi_{\alpha\mu} \quad , \quad (6.14)$$

válida para qualquer tensor simétrico $\phi_{\alpha\mu}$, podemos reescrever as equações (6.8), (6.9), (6.12) e (6.13), em uma forma mais compacta como segue:

$$\dot{E}_{\epsilon\rho} + \theta E_{\epsilon\rho} - P_{\epsilon\rho}(H) = C_{\epsilon\rho} \quad (6.15)$$

$$\dot{H}_{\epsilon\rho} + \theta H_{\epsilon\rho} + P_{\epsilon\rho}(E) = D_{\epsilon\rho} \quad (6.16)$$

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} = - E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \quad (6.17)$$

$$H_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}(\sigma) \quad . \quad (6.18)$$

Derivando a equação (6.15) obtemos:

$$(E_{\epsilon\rho})'' + \dot{\theta} E_{\epsilon\rho} + \theta \dot{E}_{\rho\epsilon} - \dot{P}_{\epsilon\rho}(H) = \dot{C}_{\epsilon\rho} \quad . \quad (6.19)$$

Aplicando o operador $P_{\alpha\beta}$ na equação (6.16) encontramos:

$$P_{\alpha\beta}(\dot{H}) + P_{\alpha\beta}(\theta H) + P_{\alpha\beta}[\square P(E) \square] = P_{\alpha\beta}(D) \quad . \quad (6.20)$$

Inicialmente vamos manipular o termo $P_{\alpha\beta}(\dot{H})$.

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(\dot{H}) &= \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\gamma} h_{\beta)}^{\delta} \eta_{\delta}^{\lambda\nu\mu} V_{\lambda} V_{\nu} [\square H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} V^{\xi} \square] = \\ &= \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\gamma} h_{\beta)}^{\delta} \eta_{\delta}^{\lambda\nu\mu} V_{\lambda} [\square H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} \parallel_{\nu} V^{\xi} + H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} V^{\xi} \parallel_{\nu} \square] \quad . \quad (6.21) \end{aligned}$$

A ordem de derivação em $H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} \parallel_{\nu} V^{\xi}$ pode ser alterada , utilizando o tensor de Riemann como segue:

$$H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} \parallel_{\nu} V^{\xi} = H_{\mu\gamma} \parallel_{\nu} \parallel_{\xi} V^{\xi} + R_{\mu\phi\xi\nu} H_{\gamma}^{\phi} V^{\xi} + R_{\gamma\phi\xi\nu} H_{\mu}^{\phi} V^{\xi} \quad . \quad (6.22)$$

O tensor de Weyl calculado com a métrica do modelo-base é nulo; logo

$$R_{\mu\phi\nu\xi} = \frac{1}{3} T (g_{\mu\nu} g_{\phi\xi} - g_{\mu\xi} g_{\phi\nu}) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} T_{\phi\xi} + g_{\phi\xi} T_{\mu\nu} - g_{\mu\xi} T_{\phi\nu} - g_{\phi\nu} T_{\mu\xi}) \quad .$$

Com essa expressão obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} R_{\mu\phi\xi\nu} H_{\gamma}^{\phi} V^{\xi} &= -\frac{1}{6} (\rho+3p) H_{\nu\gamma} V_{\mu} \quad , \\ R_{\gamma\phi\xi\nu} H_{\mu}^{\phi} V^{\xi} &= -\frac{1}{6} (\rho+3p) H_{\nu\mu} V_{\gamma} \quad . \end{aligned}$$

Reunindo esses resultados obtemos:

$$H_{\mu\gamma} \parallel_{\xi} \parallel_{\nu} V^{\xi} = H_{\mu\gamma} \parallel_{\nu} \parallel_{\xi} V^{\xi} - \frac{1}{6} (\rho+3p) H_{\nu(\mu} V_{\gamma)} \quad .$$

Substituindo esse resultado em (6.22), encontramos:

$$P_{\alpha\beta}(\dot{H}) = \dot{P}_{\alpha\beta}(H) + \frac{1}{3} \theta P_{\alpha\beta}(H) \quad .$$

Dado que

$$h_{\mu}^{\nu} \theta_{|\nu} = 0,$$

o termo $P_{\alpha\beta}(\theta H)$ se reduz a:

$$P_{\alpha\beta}(\theta H) = \theta P_{\alpha\beta}(H)$$

Utilizando esses resultados a eq. (6.20) se reduz a:

$$\dot{P}_{\alpha\beta}(H) + \frac{4}{3} \theta P_{\alpha\beta}(H) + P_{\alpha\beta} [P(E)] = P_{\alpha\beta}(D) \quad .$$

Isolando $P_{\alpha\beta}(H)$ na eq. (6.15) e substituindo o resultado na equação acima encontramos:

$$\dot{P}_{\alpha\beta}(H) = \frac{4}{3} \theta [C_{\alpha\beta} - \theta E_{\alpha\beta} - \dot{E}_{\alpha\beta}] - P_{\alpha\beta} [P(E)] + P_{\alpha\beta}(D) \quad . \quad (6.23)$$

Substituindo (6.23) em (6.19) encontramos:

$$\ddot{E}_{\epsilon\rho} + \frac{7}{3} \theta \dot{E}_{\epsilon\rho} + (\dot{\theta} + \frac{4}{3} \theta^2) E_{\epsilon\rho} + P_{\epsilon\rho}(P(E)) = \dot{C}_{\epsilon\rho} + \frac{4}{3} \theta C_{\epsilon\rho} + P_{\epsilon\rho}(D) \quad . \quad (6.24)$$

Tratamento análogo deve ser feito para obtermos a equação de $H_{\alpha\beta}$ desacoplada da parte elétrica $E_{\alpha\beta}$. Efetuando esses longos cálculos obtemos:

$$\ddot{H}_{\epsilon\rho} + \frac{7}{3} \theta \dot{H}_{\epsilon\rho} + (\dot{\theta} + \frac{4}{3} \theta^2) H_{\epsilon\rho} + P_{\epsilon\rho} [P(H)] = \dot{D}_{\epsilon\rho} + \frac{4}{3} \theta D_{\epsilon\rho} - P_{\epsilon\rho}(C) \quad . \quad (6.25)$$

O termo que envolve o quadrado do operador $P_{\epsilon\rho}$, tanto em (6.24) como em (6.25) pode ser manipulado e colocado em função do operador de Laplace. Explicitamente, o termo quadrático em $P_{\epsilon\rho}$ na eq. (6.25) se escreve como:

$$P_{\varepsilon\rho} [\underline{P(H)}] = \frac{1}{4} h_{(\varepsilon}^{\gamma} h_{\rho)}^{\delta} \left\{ \frac{\theta}{3} h_{\xi\lambda}^{\nu} V_{\nu} \eta_{\delta}^{\lambda\alpha} \eta_{(\gamma}^{\xi\sigma\tau} h_{\alpha)}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta} + \right. \\ \left. + V_{\eta} V_{\xi} \eta_{\delta}^{\lambda\alpha} \eta_{(\gamma}^{\xi\sigma\tau} (h_{\alpha)}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda \right\} .$$

Por cálculo direto verifica-se que:

$$h_{(\varepsilon}^{\gamma} h_{\rho)}^{\delta} V_{\eta} h_{\xi\lambda}^{\nu} \eta_{\delta}^{\lambda\alpha} \eta_{(\gamma}^{\xi\sigma\tau} h_{\alpha)}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta} = 0$$

$$h_{\varepsilon}^{\gamma} h_{\rho}^{\delta} V_{\eta} V_{\xi} \eta_{\delta}^{\lambda\alpha} \eta_{\gamma}^{\xi\sigma\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda = \\ = h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h^{\beta\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda - h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h^{\sigma\beta} h^{\nu\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda$$

$$h_{\varepsilon}^{\gamma} h_{\rho}^{\delta} V_{\eta} V_{\xi} \eta_{\delta}^{\lambda\alpha} \eta_{\alpha}^{\xi\sigma\tau} (h_{\gamma}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda = \\ = h_{\tau\rho} h_{\varepsilon}^{\gamma} (h_{\alpha}^{\mu} h^{\nu\tau} h^{\beta\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda - h_{\varepsilon}^{\gamma} h_{\rho\sigma} (h_{\gamma}^{\mu} h^{\nu\tau} h^{\beta\sigma} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\tau .$$

Reunindo esses resultados encontramos:

$$P_{\varepsilon\rho} [\underline{P(H)}] = h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h^{\beta\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda - \frac{1}{2} h_{(\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho)}^{\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda .$$

O primeiro termo dessa expressão pode ser reescrito como:

$$h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda = \frac{1}{3} \theta^2 H_{\varepsilon\rho}^{-\rho} H_{\varepsilon\rho} ,$$

logo,

$$P_{\varepsilon\rho} [\underline{P(H)}] = h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} h^{\gamma\lambda} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\gamma}^{\beta} H_{\mu\nu\|\beta}) \|\lambda - \frac{1}{3} \theta^2 H_{\varepsilon\rho} + \rho H_{\varepsilon\rho} . \quad (6.26)$$

O termo $P_{\varepsilon\rho}(C)$, eq. (6.25), pode ser colocado em uma forma mais conveniente como segue:

$$P_{\varepsilon\rho}(C) = -\frac{1}{4}(\rho+p)h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha}V_{\lambda}V_{\nu}\sigma_{\alpha\mu} + \frac{1}{4}h_{(\varepsilon}^{\delta}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\gamma}V_{\nu}\dot{\pi}_{\gamma\delta} + \\ + \frac{\theta}{12}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha}V_{\lambda}V_{\nu}\pi_{\alpha\mu} .$$

Substituindo nessa expressão a eq. (6.13), encontramos:

$$P_{\varepsilon\rho}(C) = -\frac{1}{2}(\rho+p)H_{\varepsilon\rho} + \frac{\theta}{12}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha}V_{\lambda}V_{\nu}\pi_{\alpha\mu} + \\ + \frac{1}{4}h_{(\varepsilon}^{\delta}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\gamma}V_{\lambda}V_{\nu}\dot{\pi}_{\gamma\delta} . \quad (6.27)$$

Utilizando a expressão (6.11) os termos que envolvem $D_{\varepsilon\rho}$ tomam a forma:

$$\dot{D}_{\varepsilon\rho} + \frac{4}{3}\theta D_{\varepsilon\rho} = -\frac{1}{4}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha}V_{\lambda}(\pi_{\mu\alpha}\|_{\beta}) - \frac{\theta}{3}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha}V_{\lambda}\pi_{\mu\alpha}\|_{\beta}$$

Invertendo a ordem de derivação no primeiro termo do lado direito dessa equação obtemos:

$$\dot{D}_{\varepsilon\rho} + \frac{4}{3}\theta D_{\varepsilon\rho} = -\frac{1}{4}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha}V_{\lambda}V_{\beta}\dot{\pi}_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\theta h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha}V_{\lambda}V_{\beta}\pi_{\mu\alpha} .$$

Reunindo esses resultados a eq. (6.25) pode ser reescrita como:

$$\ddot{H}_{\varepsilon\rho} + \frac{7}{3}\theta\dot{H}_{\varepsilon\rho} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{1}{2}(\rho-p)\right]H_{\varepsilon\rho} + h_{\varepsilon}^{\alpha}h_{\rho}^{\tau}h^{\gamma\lambda}(h_{\alpha}^{\mu}h_{\tau}^{\nu}h_{\gamma}^{\beta}H_{\mu\nu}\|_{\beta})\|_{\lambda} = \\ = -\frac{1}{2}h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha}V_{\lambda}V_{\beta}\dot{\pi}_{\mu\alpha} - \frac{1}{3}\theta h_{(\varepsilon}^{\mu}h_{\rho)}^{\xi}\eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha}V_{\lambda}V_{\nu}\pi_{\alpha\mu} . \quad (6.28)$$

A equação para a parte elétrica do tensor de Weyl

(6.24) pode ser desenvolvida de maneira análoga. Vamos nos fixar no lado direito dessa equação. Explicitamente o termo $\dot{C}_{\varepsilon\rho}$ se escreve como:

$$\dot{C}_{\varepsilon\rho} = -\frac{1}{2} (\rho+p) \dot{\sigma}_{\varepsilon\rho} - \frac{1}{2} (\dot{\rho}+\dot{p}) \sigma_{\varepsilon\rho} + \frac{1}{2} h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\mu} \ddot{\pi}_{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \dot{\pi}_{\varepsilon\rho} + \frac{\dot{\theta}}{6} \pi_{\varepsilon\rho}.$$

Utilizando a eq. (6.12) para eliminar o termo $\dot{\sigma}_{\varepsilon\rho}$ encontramos o resultado:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\varepsilon\rho} + \frac{4}{3} \theta C_{\varepsilon\rho} = & \left[-\frac{1}{2} (\dot{\rho}+\dot{p}) - \frac{1}{3} (\rho+p) \theta \right] \sigma_{\varepsilon\rho} + \frac{1}{2} h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\mu} \ddot{\pi}_{\alpha\mu} + \\ & + \frac{5}{6} \theta h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\mu} \dot{\pi}_{\alpha\mu} + \left[\frac{\dot{\theta}}{6} + \frac{1}{4} (\rho+p) + \frac{2}{9} \theta^2 \right] \pi_{\varepsilon\rho} + \frac{1}{2} (\rho+p) E_{\varepsilon\rho} . \end{aligned}$$

Fazendo a hipótese de que

$$h_{\varepsilon}^{\alpha} h^{\mu\nu} \pi_{\alpha\mu} \parallel_{\nu} = 0 \quad , \quad (6.29)$$

o termo $P_{\varepsilon\rho}(D)$, se reduz a

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon\rho}(D) = -\frac{1}{2} P_{\varepsilon\rho} \left[\overline{P(\pi)} \right] = & -\frac{1}{2} h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} h^{\gamma\lambda} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\gamma}^{\beta} \pi_{\mu\nu} \parallel_{\beta}) \parallel_{\lambda} + \frac{\theta^2}{6} \pi_{\varepsilon\rho} + \\ & - \frac{1}{2} \rho \pi_{\varepsilon\rho} . \end{aligned}$$

Reescrevendo o termo $P_{\varepsilon\rho} \left[\overline{\rho(E)} \right]$ em função do operador de Laplace, e utilizando os resultados obtidos, a eq. (6.24) pode ser posta na forma

$$\ddot{E}_{\varepsilon\rho} + \frac{7}{3} \theta \dot{E}_{\varepsilon\rho} + \left[\overline{\dot{\theta} + \theta^2} + \frac{1}{2} (\rho-p) \right] E_{\varepsilon\rho} + h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} h^{\gamma\lambda} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\gamma}^{\beta} E_{\mu\nu} \parallel_{\beta}) \parallel_{\lambda} =$$

$$\begin{aligned}
 = & - \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho} + \dot{p}) + \frac{1}{3} (\rho + p) \theta \right] \sigma_{\epsilon\rho} + \frac{1}{2} \ddot{\pi}_{\epsilon\rho} + \frac{5}{6} \theta \dot{\pi}_{\epsilon\rho} + \\
 & + \left[\frac{\dot{\theta}}{6} + \frac{1}{4} (p - \rho) + \frac{7}{18} \theta^2 \right] \pi_{\epsilon\rho} - \frac{1}{2} h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} h^{\gamma\lambda} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\gamma}^{\beta} \pi_{\mu\nu})_{\parallel\beta} \parallel_{\lambda} . \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

A imposição (6.29) é consistente com os diferentes modelos até hoje estudados em Cosmologia, onde $\pi_{\mu\nu}$ é dado pela expressão:

$$\hat{\pi}_{\mu\nu} = \alpha \hat{\sigma}_{\mu\nu} \quad , \quad \alpha = \text{cte.} \quad (6.31)$$

Utilizando essa expressão a condição (6.29) passa a ser uma consequência da equação de vínculo (1.47) para o caso que estamos analisando.

Substituindo as expressões (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), em (6.28) levando em conta a independência linear dos harmônicos tensoriais $U_{\mu\nu}^{(n)}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \left\{ \ddot{H} + \frac{7}{3} \theta \dot{H} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{1}{2} (\rho - p) \right] H + \frac{k^2}{\ell^2} H \right\} U_{\epsilon\rho} = \\
 = - \dot{\pi} \frac{1}{2} h_{(\epsilon}^{\mu} h_{\rho)}^{\xi} \eta_{\xi}^{\lambda\beta\alpha} \nabla_{\lambda} \nabla_{\beta} U_{\mu\alpha} - \frac{1}{3} \theta \pi h_{(\epsilon}^{\mu} h_{\rho)}^{\xi} \eta_{\xi}^{\lambda\nu\alpha} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} U_{\alpha\mu} \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

De (6.3), (6.4) e (6.13) segue que

$$h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} \eta_{\beta}^{\epsilon\lambda\rho} \nabla_{\epsilon} \nabla_{\lambda} U_{\rho\alpha} = 2 \frac{H}{L} U_{\mu\nu} \quad . \quad (6.33)$$

Finalmente de (6.32) e (6.33) segue que

$$\begin{aligned}
 \ddot{H} + \frac{7}{3} \theta \dot{H} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{1}{2} (\rho - p) + \frac{k^2}{\ell^2} \right] H = \\
 = - \frac{H}{L} \dot{\pi} - \frac{2}{3} \theta \pi \frac{H}{L} \quad . \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

Analogamente a eq. (6.30) pode ser colocada na forma

$$\ddot{E} + \frac{7}{3} \theta \dot{E} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{1}{2} (\rho-p) + \frac{k^2}{2\ell} \right] E = - \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho} + \dot{p}) + \frac{1}{3} (\rho+p) \theta \right] L +$$

$$+ \frac{1}{2} \ddot{\pi} + \frac{5}{6} \theta \dot{\pi} + \left[\frac{\dot{\theta}}{6} + \frac{1}{4} (\rho-p) + \frac{7}{18} \theta^2 - \frac{k^2}{2\ell^2} \right] \pi . \quad (6.35)$$

A equação (6.12), utilizando as expressões (6.4), (6.2), (6.5), pode ser reescrita, como:

$$\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L = -E - \frac{1}{2} \pi \quad (6.36)$$

Utilizando a eq. (6.31) para representar a viscosidade ⁽⁶¹⁾ as equações (6.34), (6.35) e (6.36) ficam:

$$\ddot{E} + \left(\frac{7}{3} \theta + \frac{1}{2} \alpha \right) \dot{E} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{\alpha}{2} \theta + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{2} (\rho-p) + \frac{k^2}{2\ell} \right] E =$$

$$= - \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho} + \dot{p}) + \frac{1}{3} (\rho+p) \theta + \frac{\alpha}{2} \theta^2 + \frac{\alpha^2}{12} \theta + \frac{\alpha}{6} \rho + \frac{\alpha^3}{8} - \frac{k^2}{2\ell^2} \lambda \right] L \quad (6.37)$$

$$\ddot{H} + \frac{7}{3} \theta \dot{H} + \left[\dot{\theta} + \theta^2 + \frac{1}{2} (\rho-p) + \frac{k^2}{\ell^2} \right] H = \left(+ \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha \frac{E}{L} \right) H \quad (6.38)$$

$$\dot{L} + \left(\frac{2}{3} \theta + \frac{1}{2} \alpha \right) L = -E \quad (6.39)$$

Esse método foi sugerido por Hawking ⁽⁴²⁾ para tratar perturbações gravitacionais que não são geradas por perturbações da fonte, isto é, ondas gravitacionais, na aproximação linear. A dificuldade de integração das equações (6.37), (6.38) e (6.39) é evidente. Devemos derivar a eq. (6.37), substituir \dot{L} utilizando

a equação (6.39) e substituir L fazendo uso da equação (6.37) em sua forma original. A equação resultante será uma equação diferencial ordinária de terceira ordem. A eq. (6.37) no caso em que $\pi_{\mu\nu} \neq 0$ permanece acoplada à parte elétrica do tensor de Weyl e para desacoplá-la teremos inevitavelmente de derivar essa equação. Não seguiremos esse procedimento. Utilizaremos a sugestão de M. Novello⁽³²⁾ introduzindo uma base estrela associada à base dos harmônicos esféricos tensoriais. Esse procedimento é análogo ao utilizado no caso de perturbações vetoriais onde uma base estrela correspondente para vetores foi também definida.

Inicialmente vamos decompor o tensor $\sigma_{\mu\nu}$ na base $U_{\mu\nu}$:

$$\sigma_{\mu\nu} = L(t) \hat{U}_{\mu\nu}$$

Substituindo essa expressão na eq. (6.8) obtemos:

$$H_{\mu\nu} = L \frac{1}{2} h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} \eta_{\beta}^{\epsilon\lambda\rho\nu} \hat{V}_{\epsilon}^{\lambda} \hat{U}_{\rho\alpha} \quad (6.40)$$

Definimos o tensor estrela, associado ao tensor $\hat{U}_{\alpha\beta}$, da seguinte maneira:

$$*\hat{U}_{\rho\alpha} = P_{\rho\alpha}(\hat{U}) \quad (6.41)$$

Utilizaremos esses objetos para decompor as perturbações da parte magnética do tensor de Weyl. Assim,

$$H_{\mu\nu} = L P_{\mu\nu}(\hat{U}) \quad (6.42)$$

Utilizando a decomposição (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), a base estrela, definida em (6.41), as equações (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18), se reduzem a:

$$(\dot{E} + \theta E) \hat{U}_{\varepsilon\rho} - L P_{\varepsilon\rho} [\overline{P(\hat{U})}] = \left[-\frac{1}{2} (\rho+p) L + \frac{1}{2} \dot{\pi} + \frac{\theta}{6} \pi \right] \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad (6.43)$$

$$(\dot{L} + \theta L) P_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) + L \dot{P}_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) + E P_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) = -\frac{1}{2} \pi P_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) \quad (6.44)$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L + \frac{1}{2} \pi) \hat{U}_{\varepsilon\rho} = -E \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad (6.45)$$

Utilizando as expressões (A.122) e (A.123) do Apêndice A para substituir $P_{\varepsilon\rho}[\overline{P(\hat{U})}]$ e $\dot{P}_{\varepsilon\rho}(\hat{U})$ em função dos harmônicos tensoriais $\hat{U}_{\varepsilon\rho}$ obtemos:

$$\left[\dot{E} + \theta E - \left(\rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right) L \right] \hat{U}_{\varepsilon\rho} = \left[-\frac{1}{2} (\rho+p) L + \frac{1}{2} \dot{\pi} + \frac{\theta}{6} \pi \right] \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad (6.46)$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L + E) P_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) = -\frac{1}{2} \pi P_{\varepsilon\rho}(\hat{U}) \quad (6.47)$$

$$(\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L + \frac{1}{2} \pi) \hat{U}_{\varepsilon\rho} = -E \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad (6.48)$$

Verifica-se imediatamente que as eqs. (6.47) e (6.48) são equivalentes e assim a dinâmica do sistema reduz-se às seguintes equações:

$$\dot{E} + \theta E - \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] L = \frac{1}{2} \dot{\pi} + \frac{\theta}{6} \pi \quad (6.49)$$

$$\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L + E = -\frac{1}{2} \pi \quad (6.50)$$

Essa forma simples das equações de evolução para as perturbações é uma consequência da decomposição (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) e das propriedades dos tensores ${}^* \hat{U}_{\alpha\beta}$.

O exame das eqs. (6.49) e (6.50) pode ser simplificado

se notarmos que essas correspondem a um sistema dinâmico da forma padrão:

$$E = X(L, E, \tau) \quad (6.51)$$

$$L = W(L, E, \tau) \quad (6.52)$$

Esse sistema não é autônomo (a dependência explícita no tempo pode ser eliminada apenas em casos muito simples), fato que dificulta a sua análise. Quando um dos modos elétrico ou magnético é eliminado a análise é simplificada. Primeiramente vamos analisar o caso em que $L = H = 0$. As eqs. (6.49) e (6.50) se reduzem a:

$$E = -\frac{1}{2} \pi = E_0 a^{-2} \quad (6.53)$$

A energia gravitacional (proporcional a E^2) associada a essa solução decai com a^{-4} como deveríamos esperar. No outro caso simples, quando $E = 0$ o sistema se reduz a:

$$\dot{L} + \frac{2}{3} \theta L = -\pi/2 \quad (6.54)$$

$$\left[\frac{1}{2} (\rho - p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] L = -\frac{1}{2} \dot{\pi} - \frac{1}{6} \theta \pi \quad (6.55)$$

Desacoplando essas duas equações obtemos:

$$\ddot{L} + \theta \dot{L} + \left[\frac{1}{3} \theta^2 - \frac{5}{6} \rho - \frac{p}{2} - \frac{k^2}{\ell^2} \right] L = 0 \quad (6.56)$$

Essa equação é um caso particular da equação (62)

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + p(t) \frac{d\psi}{dt} + g(t) \psi = 0 \quad (6.57)$$

Quando $p(t)$ e $g(t)$ são polinômios inteiros e homogêneos em t , o que acontece quando a triseção do modelo é plana ($\varepsilon = 0$) e o termo $k/l \ll 1$, a solução é expressa como polinômios em t . Como exemplo vamos calcular o caso em que $\varepsilon = \bar{\mu}$, $p = \frac{1}{3}\rho$ e $k/l \ll 1$. A equação (6.56) se reduz a

$$\ddot{L} + \frac{3}{2} t^{-1} \dot{L} - \frac{1}{4} t^{-2} L = 0 \quad , \quad (6.58)$$

cuja solução é

$$L = L_0 t^a + L_1 t^b \quad , \quad (6.59)$$

onde

$$a = -\frac{1}{4} + \sqrt{17}/4 \quad e \quad b = -\frac{1}{4} - \sqrt{17}/4 \quad .$$

No caso geral em que $E_{\mu\nu} \neq 0$ e $H_{\mu\nu} \neq 0$ simultaneamente, é possível desacoplar as (6.49) e (6.50), como segue:

Tomando a derivada covariante (6.49) na direção de v^α obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{E} + \theta \dot{E} + \dot{\theta} E - \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] \dot{L} - \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] L &= \\ = \frac{1}{2} \ddot{\pi} + \frac{\theta}{6} \dot{\pi} + \frac{\dot{\theta}}{6} \pi \quad . \end{aligned}$$

Isolando L em (6.50) e substituindo o resultado na equação acima encontramos:

$$\begin{aligned} \ddot{E} + \theta \dot{E} - \left(\frac{2}{3} \theta^2 + 2p - \frac{k^2}{\ell^2} \right) E - \left\{ \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] \dot{L} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \theta \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{\ell^2} \right] L \right\} = - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\rho-p) - \frac{1}{3} \theta^2 - \frac{\dot{\theta}}{3} + \frac{k^2}{\ell^2} \right] \pi + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\theta}{6} \dot{\pi} + \frac{1}{2} \ddot{\pi} \quad .$$

Isolando L em (6.4) e substituindo o seu valor na equação acima, essa se reduz a:

$$\begin{aligned} \ddot{E} + \left[\frac{\theta}{3} - (\ln B) \cdot \right] \dot{E} - \left[-\theta (\ln B) \cdot + \frac{4}{3} \theta^2 + 2p - \frac{k^2}{\ell^2} \right] E = \\ = \frac{1}{2} \ddot{\pi} + \left[\frac{1}{6} \theta - (\ln B) \cdot \right] \dot{\pi} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} \dot{\theta} + \frac{1}{9} \theta^2 - \frac{\theta}{3} (\ln B) \cdot - \frac{1}{2} (\rho - p) - \frac{k^2}{\ell^2} \right], \end{aligned} \quad (6.60)$$

onde

$$B = \frac{-1}{3} \theta^2 + \frac{1}{2} (\rho - p) + \frac{k^2}{\ell^2} \quad .$$

A equação acima, no caso em que $\pi = 0$, se reduz à equação (6.61) sendo $p(t)$ e $g(t)$ funções do parâmetro t determinadas por θ , ρ , p e ℓ^2 .

Voltemos à equação (6.49). Dividindo essa equação por L e definindo a nova variável $\phi \equiv E/L$, ela se reduz à uma equação não linear para ϕ . A variável L pode ser obtida pela integral abaixo

$$L = \exp \left[- \int \left(\frac{2}{3} \theta + \frac{g}{2} + \phi \right) dt \right] \quad , \quad (6.61)$$

onde usamos a relação constitutiva $\pi_{\mu\nu} = \alpha \sigma_{\mu\nu}$ (61). A equação para ϕ é então:

$$\dot{\phi} - \phi^2 + \frac{1}{3} \theta \phi = B - \frac{1}{6} \alpha \theta - (\alpha/2)^2 \quad . \quad (6.62)$$

Note que ϕ sendo a razão de duas pequenas quantidades ela não é necessariamente pequena. Assim, não podemos, em geral, desprezar

o termo quadrático ϕ^2 . Esse termo faz o nosso tratamento de perturbações depender de uma equação não linear. Em alguns casos, no entanto, essa dificuldade pode ser superada. Nos casos em que $k/\ell \ll 1$ podemos desprezar o termo $(k/\ell)^2$ na expressão B. Nesse caso obtemos para ϕ a expressão $\phi = \phi_0/t$ onde $\phi_0 = \text{cte}$ e conseqüentemente de (6.61) $L = L_0/t$ onde $L_0 = \text{cte}$. Encontramos aqui novamente a mesma situação assintótica anterior, a saber, para valores de τ muito grande a perturbação gravitacional se torna puramente magnética.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho desenvolvemos de forma sistemática a teoria de perturbações de modelos cosmológicos segundo o método das equações quasi-Maxwellianas (Jordan et al.) sugerido por Hawking. Restringimos nosso exame aqui ao modelo de Friedmann porquanto este parece representar razoavelmente bem nosso Universo acessível. Adotamos, em geral, o princípio de Copérnico para podermos tratar indistintamente perturbações dentro e fora do nosso horizonte observável. Isso não significa uma profissão de fé nesse princípio mas tão somente uma atitude prática. Esperamos voltar ao exame de perturbações de comprimento de onda maior que o horizonte, fora do contexto do Princípio de Copérnico, em outro lugar.

Decidimos voltar a esse problema, já bastante estudado em Astrofísica por duas razões principais. Primeira, porque de acordo com Landau devemos retornar a velhas questões sempre que podemos dar-lhe um tratamento mais elegante, compacto e de fácil apreensão, o que é precisamente o que ocorre aqui. Segunda, porque pretendemos que nesse nosso método a generalização das perturbações a fontes imperfeitas (capazes de representarem campos eletromagnéticos, neutrinos, etc) se faz de um modo direto, simples e bastante esclarecedor. Ademais, o método empregado permite uma interpretação física das perturbações do modelo base sem precisar defrontar-se com as dificuldades usuais devidas à invariância de gauge da teoria.

No capítulo relativo à parte vetorial do espectro de perturbações mostramos que o modelo de Friedmann é instável por perturbações da vorticidade do fluido, para determinadas equações de estado relacionando a pressão p com a densidade de energia ρ . No capítulo de perturbações escalares reencontramos os resultados obtidos por Lifshitz e mostramos que algumas soluções, consideradas na literatura como fisicamente aceitáveis, são simples transformações de coordenadas.

Analizamos a seguir a parte tensorial do espectro de perturbações que correspondem a ondas gravitacionais. Mostramos que o estudo dessas ondas não pode ser feito independentemente do acoplamento com a matéria. Esse acoplamento que consiste na interdependência da evolução da perturbação do tensor de cisalhamento com as perturbações gravitacionais tensoriais de $E_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ só aparece de modo explícito quando a presente análise do sistema completo de equações quasi-Maxwellianas é feita. Em verdade, isso nada mais representa do que a mudança do enfoque convencional particular sobre uma geodésica para um exame da congruência de geodésicas e conseqüentemente da evolução dos seus parâmetros característicos (desvio geodético). Um estudo do processo de interação ondas gravitacionais e matéria pode então ser feito. Uma pergunta aparece: poderíamos considerar esse processo de interação associado à caracterização de particulares comprimentos de onda perturbativo? A resposta afirmativa levaria a uma caracterização das inhomogeneidades de modo direto para cada modelo do fluido (isto é, para cada equação constitutiva relacionando por exemplo pressões anisotrópicas com as deformações do fluido) e as conseqüências observacionais que daí cer

tamente decorreriam.

Finalmente, gostaríamos de terminar com uma observação sobre esse trabalho que parece conduzir-nos necessariamente a uma proposta de equações alternativas da gravitação. Com efeito, nas perturbações do Capítulo III aceitamos as equações de Einstein escolhendo a corrente $J^{\alpha\beta\gamma}$ como idêntica à forma não perturbada. Sabemos, no entanto, que isso é uma escolha arbitrária. Flutuações da geometria podem ser geradas com distintas correntes e conseqüentemente alterar a evolução das perturbações. Não foi nossa intenção desprezar essa perspectiva aqui, mas tão somente deixá-la para uma etapa posterior.

APÊNDICE A

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MÉTRICAS TIPO FRIEDMANN

Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, o espaço-tempo é representado por uma variedade Riemanniana de dim-4 e métrica pseudo-euclidiana. É essa métrica que caracteriza a geometria definindo o elemento de linha pela expressão

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (A.1)$$

As coordenadas $\{x^\mu\}$ constituem um conjunto de funções $\{x^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ que permitem estabelecer mapas para as regiões compactas da variedade. O conjunto de todos esses mapas constitui a carta de variedade^(*). Do ponto de vista geométrico a variedade está definida. Para darmos sentido físico a essa construção é necessário estabelecer um critério de como, a partir das coordenadas $\{x^\alpha\}$, é possível determinar distâncias e intervalos de tempo reais. Para isso seguiremos a idéia de Milne definindo uma classe especial de observadores na variedade. Esses serão representados por um campo vetorial do tipo tempo definido em toda a variedade. Dessa maneira é possível separar, em cada ponto da variedade, a geometria (A.1) em uma parte espacial ($d\ell^2$) e uma parte temporal ($d\tau^2$).

(*) Veja referência (15).

Sendo $\vec{V}(x)$ o campo vetorial, o seu caráter temporal fica assegurado impondo-se que

$$g(\vec{V}, \vec{V}) = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta > 0 \quad .$$

Sem perda da generalidade podemos normalizar esse campo vetorial, impondo

$$g(\vec{V}, \vec{V}) = 1 \quad . \quad (A.2)$$

O campo de vetores determina na variedade uma congruência de curvas que são as linhas de universo de cada observador. A congruência de curvas é definida pela equação diferencial:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = V^\alpha(x) \quad . \quad (A.3)$$

Como cada observador tem associado um referencial local, sendo (x^α) as coordenadas de um dado observador, ele associará a um evento de coordenadas $(x^\alpha + dx^\alpha)$ uma separação espacial $(h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ e uma separação temporal $(|d\tau = |V_\mu dx^\mu|)$. Para esclarecer o sentido físico de $d\ell = (h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ e $d\tau$, vamos examinar como um dado observador determina esses intervalos.

TEMPO PRÓPRIO - Dois eventos infinitesimalmente próximos, vizinhos ao observador $V^\alpha(x)$ e que ocorrem em um mesmo ponto do referencial local deste, estão separados por um intervalo ds . Para o observador V^α esse intervalo será dado por:

$$ds^2 = (V_0 dx^0)^2 \quad . \quad (A.4)$$

Lembre que nas coordenadas comovientes a V^α os dois eventos diferem apenas pela coordenada x^0 .

ELEMENTO DE DISTÂNCIA ESPACIAL - O tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ é função das coordenadas. Esse fato impossibilita que o intervalo $d\ell$ seja determinado tomando-se $dx^0 = 0$ na expressão de ds , dado que não estaríamos garantindo a simultaneidade dos eventos. É necessário então proceder da seguinte maneira. Considere dois observadores vizinhos $A \left[\vec{V}(x^\alpha) \right]$ e $B \left[\vec{V}(x^\alpha + dx^\alpha) \right]$. Suponha que B emite para A um sinal luminoso que se reflete em A e retorna a B. O intervalo ds^2 entre esses dois eventos (emissão e recepção do sinal) é determinado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (V_\mu dx^\mu)^2 + (g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu) dx^\mu dx^\nu = \\ &= (dx^0 V_0)^2 + 2 V_0 V_i dx^0 dx^i + (V_i dx^i)^2 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A trajetória do sinal luminoso na variedade é determinada pela equação

$$ds^2 = 0 \quad . \quad (\text{A.6})$$

As raízes de (A.5) são:

$$\begin{aligned} dx^0_{(1)} &= -V_i dx^i - (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \\ dx^0_{(2)} &= -V_i dx^i + (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O instante $x^0 + dx^0_{(1)}$ corresponde à emissão do sinal luminoso e $x^0 + dx^0_{(2)}$ à recepção desse sinal. O intervalo de tempo medido por B entre os dois eventos é:

$$d\tau = \frac{1}{c} (\dot{dx}_{(2)}^0 - \dot{dx}_{(1)}^0) = \frac{2}{c} (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \quad (\text{A.8})$$

A distância espacial medida por B entre A e B é:

$$d\ell = \frac{1}{2} c d\tau = (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

Os observadores A e B podem sincronizar os seus relógios estabelecendo como simultâneos os eventos

(INSTANTE DA SAÍDA DO SINAL EM B) + (dτ) e (chegada do sinal luminoso em A).

O conceito de distância espacial como foi definido só possui sentido para separações infinitesimais dado que de um modo geral dτ não é uma diferencial exata.

Para que um observador \vec{V} possa determinar unívoca e globalmente o tempo de cada evento é necessário e suficiente que dτ seja uma diferencial exata ou na linguagem de formas

$$d(d\tau) = 0 \quad . \quad (\text{A.10})$$

Segue diretamente dessa expressão e da definição de dτ que

$$dd\tau = d(V_\mu dx^\mu) = V_{\mu||\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = 0 \quad ,$$

ou

$$d(d\tau) = 0 \quad \text{implica que} \quad V_{[\underline{\mu}||\underline{\nu}]} = 0 \quad . \quad (\text{A.11})$$

Essa condição garante que V_μ possa ser expresso na forma:

$$V_\mu = f \phi_{|\mu} \quad , \quad (\text{A.12})$$

onde f e ϕ são funções escalares. Nesse caso os referenciais locais dos observadores se fundem formando uma hipersuperfície S(x).

O tensor de projeção h^{α}_{β} permite induzir sobre $S(x)$ objetos geométricos a partir dos objetos definidos em M_4 . Em particular no caso de um campo vetorial $A^{\mu}(x)$ definido em M_4 o campo induzido em $S(x)$ é dado por:

$$\hat{A}^{\mu} = h^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \quad . \quad (A.13)$$

O tensor métrico da hipersuperfície é:

$$h_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta} \quad . \quad (A.14)$$

Seguindo o mesmo processo obtemos a afinidade induzida sobre $S(x)$:

$$h^{\mu}_{\alpha} h^{\beta}_{\nu} (\hat{A}^{\alpha})_{||\beta} \equiv \hat{\nabla}_{\nu} \hat{A}^{\mu} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\beta}_{\nu} (h^{\alpha}_{\gamma} A^{\gamma})_{||\beta} + h^{\mu}_{\alpha} h^{\beta}_{\nu} \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{smallmatrix} \} h^{\lambda}_{\gamma} A^{\gamma} \quad .$$

Denominando $\hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\gamma}$ a afinidade induzida em $S(x)$ segue diretamente da expressão anterior que:

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\gamma} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\beta}_{\nu} \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{smallmatrix} \} h^{\lambda}_{\gamma} \quad . \quad (A.15)$$

Essa afinidade satisfaz às propriedades da afinidade Riemanniana. A derivada covariante do tensor métrico é nula

$$\hat{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

A torção é nula:

$$\hat{\nabla}_{[\underline{\alpha}} \hat{\nabla}_{\underline{\beta}]} f = 0 \quad ,$$

onde f é uma função escalar.

O tensor de curvatura da hipersuperfície é obtido da maneira usual:

$$\widehat{\nabla}_{\underline{\alpha}} \widehat{\nabla}_{\underline{\beta}} \widehat{A}_{\gamma} = \widehat{R}_{\gamma\lambda\beta\gamma} \widehat{A}^{\lambda} \quad (\text{A.16})$$

Dessa expressão segue diretamente que:

$$\widehat{R}^{\lambda}_{\gamma\alpha\beta} = h^{\lambda}_{\nu} (\widehat{\Gamma}^{\nu}_{\xi\phi|\delta} - \widehat{\Gamma}^{\nu}_{\delta\phi|\xi}) h^{\xi}_{\alpha} h^{\delta}_{\beta} h^{\phi}_{\gamma} + \widehat{\Gamma}^{\xi}_{\gamma\alpha} \widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\xi} - \widehat{\Gamma}^{\xi}_{\gamma\beta} \widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\xi} \quad (\text{A.17})$$

Tendo em conta que \widehat{A}^{μ} é também um vetor de M_4 podemos escrever:

$$\widehat{\nabla}_{\gamma} \widehat{\nabla}_{\beta} \widehat{A}_{\alpha} = h^{\nu}_{\alpha} h^{\xi}_{\beta} h^{\delta}_{\gamma} V_{\xi||\delta} V^{\mu}_{||\nu} \widehat{A}_{\mu} + h^{\phi}_{\alpha} h^{\mu}_{\beta} h^{\delta}_{\gamma} V_{\phi||\delta} V^{\nu}_{||\mu} \widehat{A}_{\nu} + h^{\nu}_{\alpha} h^{\mu}_{\beta} h^{\delta}_{\gamma} \widehat{A}_{\nu||\mu||\delta} \quad .$$

Devido a (A.11) temos que

$$V_{\alpha\nu} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} V_{\mu||\nu} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \quad .$$

Substituindo esse resultado na expressão anterior obtemos:

$$\widehat{\nabla}_{\gamma} \widehat{\nabla}_{\beta} \widehat{A}_{\alpha} = (\theta_{\beta\gamma} \theta_{\alpha\nu} + \theta_{\alpha\gamma} \theta_{\beta\nu}) \widehat{A}^{\nu} + h^{\nu}_{\alpha} h^{\mu}_{\beta} h^{\delta}_{\gamma} \widehat{A}_{\nu||\mu||\delta} \quad .$$

Supondo que A é um vetor arbitrário e perpendicular a V^{μ} , antissimetrizando os índices γ e β na expressão anterior e usando a definição do tensor de Riemann, obtemos:

$$\widehat{R}_{\alpha\lambda\beta\gamma} = \theta_{\alpha\gamma} \theta_{\beta\lambda} - \theta_{\alpha\beta} \theta_{\lambda\gamma} + h^{\nu}_{\alpha} h^{\mu}_{\beta} h^{\delta}_{\gamma} h^{\xi}_{\lambda} R_{\nu\xi\mu\delta} \quad (\text{A.18})$$

Essa expressão, conhecida na literatura por equação de Gauss, relaciona o tensor curvatura da variedade M_4 com o tensor de curvatura em M_3 e a segunda forma diferencial da hipersuperfície $S(x)$.

Contraindo os índices α e β na expressão (A.18), obtemos:

$$\hat{R}_{\lambda\gamma} = \theta_{\gamma}^{\alpha} \theta_{\lambda\alpha} - \theta \theta_{\lambda\gamma} + h_{\gamma}^{\delta} h_{\lambda}^{\xi} R_{\xi\delta} - h_{\gamma}^{\xi} h_{\lambda}^{\delta} R_{\nu\xi\mu\delta} V^{\nu} V^{\mu} . \quad (\text{A.19})$$

Dessa expressão contraindo novamente os índices segue

$$\hat{R} = \theta^{\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} - \theta^2 + R - 2R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} . \quad (\text{A.20})$$

A identidade de Ricci aplicada ao campo vetorial \vec{V} se escreve como

$$V_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} - V_{\alpha\parallel\gamma\parallel\beta} = R_{\alpha\lambda\beta\gamma} V^{\lambda} .$$

Contraindo essa expressão com V^{γ} obtemos:

$$(V_{\alpha\parallel\beta})^{\cdot} - \dot{V}_{\alpha\parallel\beta} + V_{\alpha\parallel\gamma} \dot{V}^{\gamma}_{\parallel\beta} = R_{\alpha\lambda\beta\gamma} V^{\lambda} V^{\gamma} .$$

Tomando o traço dessa equação segue que

$$\dot{\theta} - a^{\alpha}_{\parallel\alpha} + \theta^{\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} . \quad (\text{A.21})$$

Para todo V^{α} da forma (A.12), onde $\phi(x)$ deve ser identificado com a equação da hipersuperfície, vale o seguinte resultado (que demonstraremos mais adiante)

$$a^{\alpha} = V^{\alpha}_{\parallel\beta} V^{\beta} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Com esses resultados podemos afirmar que para a classe de geometrias determinadas por (A.11) vale a relação:

$$R = \hat{R} + 2\dot{\theta} + \theta^2 + \theta_{\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta} . \quad (\text{A.23})$$

No sistema de coordenadas comovente local o vetor V^μ tem por componentes

$$V^\mu \stackrel{*}{=} \delta^\mu_0 \quad ; \quad V_\mu \stackrel{*}{=} g_{\mu 0} \quad . \quad (\text{A.24})$$

O símbolo $\stackrel{*}{=}$ indica que a igualdade é válida apenas nesse sistema de coordenadas.

A eq. (A.11) nesse sistema se reduz a

$$g_{0\mu|v} - g_{0v|\mu} = 0 \quad (\text{A.25})$$

Dessa equação segue que

$$g_{0j} = \phi_{|j} \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad , \quad (\text{A.26})$$

dado que para $v = \mu = 0$ (A.24) é identicamente satisfeita.

Vamos considerar um novo sistema de coordenadas definido por

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow x'^0 = x^0 + \phi(x) \\ x^j &\rightarrow x'^j = \phi^j(x) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A equação (A.11) nos garante que existe uma função τ tal que $d\tau = V_\mu dx^\mu$ ou seja que existe um sistema de coordenadas onde $g_{00} = 1$, identificamos $\{x^\alpha\}$ com esse sistema, no sistema $\{x'^\alpha\}$ g'_{0j} será dado por

$$g'_{0j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + g_{0j} \quad .$$

Tomando $\phi = -\Phi$ demonstramos que a condição (A.11) garante que existe um sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ simultaneamente síncrono e comovente onde V^μ e a métrica assumem a forma:

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (A.28)$$

$$V^\mu = \delta^\mu_0$$

Nesse sistema de coordenadas $h_{ij} = g_{ij}$, a equação da hipersuperfície se escreve $x^0 = \text{cte}$ e os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ ij \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g_{ij|0} \\ \left\{ \begin{matrix} i \\ 0j \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{ik} g_{kj|0} \\ \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} h^{i\ell} (h_{j\ell|k} + h_{\ell k|j} - h_{jk|\ell}) \end{aligned} \quad (A.29)$$

O resultado (A.22) segue trivialmente do fato que $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 00 \end{matrix} \right\} = 0$.

As componentes do tensor de Ricci no caso geral são dadas em função dos símbolos de Christoffel por:

$$R_{\beta\delta} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} |_\delta - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\delta \end{matrix} \right\} |_\alpha + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\delta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \quad (A.30)$$

No caso particular que estamos tratando essa expressão se reduz a:

$$R_{00}^* = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0\alpha \end{matrix} \right\} |_0 + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 0\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu 0 \end{matrix} \right\}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik} \frac{\partial}{\partial t} g_{ik}) + \frac{1}{4} g^{ik} g_{kj|0} g^{j\ell} g_{\ell i|0} \quad (A.31)$$

$$\begin{aligned} R_{ij}^* &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i\alpha \end{matrix} \right\} |_j - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\} |_\alpha + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ i\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\}^* \\ &= -\frac{1}{4} g_{i\ell|0} g^{\ell k} g_{kj|0} - \frac{1}{4} g^{\ell k} g_{ik|0} g_{\ell j|0} + \frac{1}{4} g_{ij|0} g^{k\ell} g_{k\ell|0} + \\ &+ \frac{1}{2} g_{ij|0|0} + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ i\ell \end{matrix} \right\} |_j - \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ji \end{matrix} \right\} |_\ell + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ik \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ \ell j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ \ell k \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (A.32)$$

Essas expressões podem ser postas em uma forma covariante. Na classe de sistemas de coordenadas definida em (A.28) as seguintes expressões são válidas:

$$V^\alpha \stackrel{*}{=} \delta^\alpha_0 \quad ; \quad V_\alpha \stackrel{*}{=} \delta^0_\alpha \quad (A.33)$$

$$h^\alpha_0 \stackrel{*}{=} 0 \quad ; \quad h^i_j \stackrel{*}{=} \delta^i_j \quad (A.34)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} h_i^\alpha h_j^\beta V_{(\alpha\|\beta)} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \quad (A.35)$$

$$\theta_{ij\|\alpha} V^\alpha = \dot{\theta}_{ij} = \theta_{ij|0} - \{i0\}^\alpha \theta_{\alpha j} - \{j0\}^\alpha \theta_{i\alpha} = \frac{1}{2} g_{ij|0} |0^{-2\theta} \theta_{ik} \theta^k_j \quad (A.36)$$

Utilizando essas expressões em (A.31) e (A.32), obtemos:

$$R_{00} = \dot{\theta} + \theta^i_j \theta^j_i \quad (A.37)$$

$$R_{ij} = \dot{\theta}_{ij} + \theta \theta_{ij} + \hat{R}_{ij} \quad (A.38)$$

Dessa maneira demonstramos que para geometrias do tipo $M^4 = R \otimes H$, onde H é uma variedade Riemanniana de dim3 e R o conjunto dos reais, o tensor de Ricci pode ser expresso em função da segunda forma diferencial da hipersuperfície $S(x)$ e do tensor de Ricci dessa hipersuperfície.

Em geometrias desse tipo a equação de Raychaudhuri pode ser simplificada. Das eqs. (1.20) e (1.21) segue a expressão

$$R = 2\dot{\theta} + \theta^2 + \theta_{\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta} + \hat{R} \quad (A.39)$$

Substituindo $\dot{\theta}$ nessa equação obtemos:

$$\theta_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta} = \theta^2 - 2\rho + \hat{R} \quad . \quad (\text{A.40})$$

Dessa maneira explicitamos as propriedades de geometrias que satisfazem à condição (A.11) ou onde um tempo global pode ser definido. É importante salientar que tratamos apenas das propriedades geométricas dessa classe de geometrias. Sobre a questão relativa às propriedades físicas das possíveis fontes dessas geometrias nenhuma especificação foi feita. Em particular, ainda que (A.11) e (A.22) sejam válidas o fluido fonte de geometrias desse tipo, pode ter vorticidade e aceleração ⁽⁵¹⁾.

O nosso interesse recai em uma sub-classe das geometrias cujas propriedades básicas nós estabelecemos. Daqui em diante vamos restringir a nossa análise às métricas do tipo Friedmann (veja Cap. II). A análise do modelo de Friedmann é muito simplificada se as perturbações do modelo forem expandidas na base de auto-funções do operador de Laplace. Vamos estabelecer três tipos distintos de auto-funções desse operador, a saber: harmônicos esféricos escalares quadridimensionais (Q), harmônicos esféricos vetoriais quadridimensionais, (\hat{S}^α), harmônicos esféricos tensoriais quadridimensionais de 2ª ordem ($\hat{U}^{\mu\nu}$). Vamos analisar cada caso separadamente.

Harmônicos Esféricos Escalares

Vamos tomar a métrica associada aos três tipos de modelo em questão na seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[dr^2 + \sigma^2 (\text{sen}^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad , \quad (\text{A.41})$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma = r & \quad \text{tri-seção plana} \\ \sigma = \sinh r & \quad \text{tri-seção aberta} \\ \sigma = \sin r & \quad \text{tri-seção fechada} \end{aligned}$$

Os harmônicos esféricos escalares são funções definidas na hipersuperfície $H(t)$ como soluções do problema de auto-vetores do operador de Laplace:

$$h^{\mu\nu} \hat{\nabla}_{\mu} \hat{\nabla}_{\nu} Q_{(n)} = \frac{K^2}{a^2} Q_{(n)} \quad (\text{A.42})$$

A constante K assume os valores:

$$\begin{aligned} \text{plano} & \quad 0 < |K| < \infty \\ \text{aberto} & \quad K^2 = q^2 + 1, \quad 0 < q < \infty \\ \text{fechado} & \quad K^2 = n^2 - 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

A forma explícita dessas funções de acordo com Fock ⁽⁵²⁾ é a seguinte:

$$Q_{(n)} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{(n)\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \Pi_{n\ell}(r) \quad (\text{A.43})$$

Os coeficientes $A_{(n)\ell m}$ são constantes, $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos construídos com os polinômios de Legendre e as funções $e^{im\phi}$ ⁽⁴⁰⁾ e $\Pi_{n\ell}$ são funções definidas como:

$$\Pi_{n\ell} = (\text{sen}r)^{\ell} \frac{d^{\ell+1}(\text{cos}nr)}{d(\text{cos}r)^{\ell+1}}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.44})$$

No presente trabalho não teremos necessidade da forma explícita das funções harmônicas. Deste ponto em diante por simplicidade de notação suprimiremos o índice (n) .

Com as funções Q , podemos construir o vetor:

$$\hat{\pi}_\alpha = \frac{a^2}{k^2} h_\alpha^\beta \hat{\nabla}_\beta Q \quad (\text{A.45})$$

Esse vetor satisfaz às seguintes propriedades:

$$h^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha \hat{\pi}_\beta = Q \quad (\text{A.46})$$

Por cálculo direto verifica-se que $\hat{\nabla}_\mu \pi_\nu = \hat{\nabla}_\nu \pi_\mu$. Com esse objeto simétrico vamos definir o tensor:

$$\hat{P}_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \pi_\nu - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} Q \quad (\text{A.47})$$

Esse tensor satisfaz à relação

$$h^{\mu\nu} \hat{P}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (\text{A.48})$$

que mostra não ser possível construir um escalar utilizando $\hat{P}_{\mu\nu}$. É necessário calcularmos as seguintes expressões: $h^{\alpha\nu} \hat{\nabla}_\alpha \hat{P}_{\mu\nu}$ e $h^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \hat{P}_{\mu\nu}$. Essas derivadas podem ser calculadas reduzindo-as a derivadas que são diretamente determinadas pela eq. (A.45). Nesse processo é necessário trocar a ordem da derivação covariante. Essa troca é feita com o auxílio do tensor de curvatura da hiper superfície $H(t)$. No caso geral esse tensor é dado pela expressão (A.17). Nos três modelos em questão a hipersuperfície $H(t)$ tem curvatura constante

$$\hat{R} = \hat{R}(t) \quad ,$$

e o tensor de Riemann pode ser escrito na forma simples ⁽³⁷⁾:

$$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \frac{\epsilon}{a^2} (h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta} h_{\beta\gamma}) \quad . \quad (\text{A.49})$$

Utilizando a expressão (A.49) obtemos:

$$h^{\alpha\nu} \hat{\nabla}_{\alpha} P_{\mu\nu} = \frac{2}{a} (\epsilon + \frac{1}{3} k^2) \hat{\pi}_{\mu} \quad (A.50)$$

$$h^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_{\alpha} \hat{\nabla}_{\beta} P_{\mu\nu} = \frac{1}{a} (6\epsilon + k^2) \hat{P}_{\mu\nu} \quad (A.51)$$

Harmônicos Esféricos Vetoriais

São vetores \hat{S}_{μ} definidos na trisuperfície $H(t)$ como soluções do problema de autovalores:

$$h^{\mu\nu} \hat{\nabla}_{\mu} \hat{\nabla}_{\nu} \hat{S}_{\alpha} = h^{\mu\nu} \left[h^{\delta}_{\alpha} h^{\gamma}_{\nu} (h^{\sigma}_{\delta} \hat{S}_{\sigma}) \right]_{\parallel \gamma} \parallel_{\mu} = \frac{k^2}{a^2} \hat{S}_{\alpha} \quad (A.52)$$

A constante k tem o seguinte espectro de valores:

plano	$0 < k < \infty$	
aberto	$k^2 = q^2 + 2$	$0 < q < \infty$
fechado	$k^2 = n^2 - 2$	$n = 2, 3, \dots$

O vetor \hat{S}_{μ} deve ainda satisfazer às restrições:

$$V^{\mu} \hat{S}_{\mu} = 0 \quad (A.53)$$

$$\hat{S}_{\alpha} \parallel_{\mu} V^{\mu} = 0 \quad (A.54)$$

$$\hat{S}_{\alpha} \parallel_{\beta} h^{\alpha\beta} = 0 \quad (A.55)$$

A divergência de \hat{S}_{μ} sendo nula (A.55) garante que não é possível construir um escalar utilizando o vetor \hat{S}_{μ} .

Com o vetor \hat{S}_{μ} podemos construir o tensor simétrico

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_{\alpha} \hat{S}_{\beta} + \hat{\nabla}_{\beta} \hat{S}_{\alpha} \quad (A.56)$$

Retirando o traço desse tensor podemos definir um outro tensor pela seguinte expressão

$$\hat{L}_{\mu\nu} = \hat{\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} \hat{\Sigma}^{\alpha}_{\alpha} \quad (A.57)$$

O tensor $\Sigma_{\alpha\beta}$ satisfaz às seguintes propriedades:

$$h^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu \hat{\Sigma}_{\rho\mu} = \frac{1}{a^2} (2\varepsilon + k^2) \hat{S}_\rho \quad (\text{A.58})$$

$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} \parallel^\lambda V^\lambda = -\frac{\theta}{3} \hat{\Sigma}_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.59})$$

É conveniente definirmos os objetos $^* \hat{S}^\mu$, duais e os vetores \hat{S}^μ e que serão os objetos naturais para decompor a vorticidade ω^μ e a parte magnética do tensor de Weyl. O objeto $^* \hat{S}^\mu$ é definido como:

$$^* \hat{S}^\mu = \eta^{\mu\varepsilon\beta\lambda} V_\varepsilon \hat{S}_{\beta\parallel\lambda} \quad (\text{A.60})$$

Com o vetor \hat{S}^μ e com o seu dual podemos construir os objetos:

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_\beta \hat{S}_\alpha - \hat{\nabla}_\alpha \hat{S}_\beta \quad (\text{A.61})$$

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}^* = \hat{\nabla}_{(\alpha} \hat{S}_{\beta)}^* \quad . \quad (\text{A.62})$$

Considerando perturbações gravitacionais teremos necessidade de calcular derivadas covariantes desses objetos. Essas podem ser sempre expressas em função dos objetos anteriormente definidos.

A seguir listamos as expressões que são utilizadas neste trabalho.

$$h^\mu_{(\varepsilon} h^\nu_{\alpha)} \eta_\mu^{\beta\gamma\lambda} V_\lambda \hat{\nabla}_\gamma \hat{F}_{\nu\beta} = + h^\nu_{(\varepsilon} h^\mu_{\alpha)} \hat{\nabla}_\nu \hat{S}_\mu^* \quad (\text{A.63})$$

$$h^\mu_{(\varepsilon} h^\nu_{\alpha)} \eta_\mu^{\beta\gamma\lambda} V_\lambda \hat{\nabla}_\gamma \hat{F}_{\nu\beta} = - h^\nu_{(\varepsilon} h^\mu_{\alpha)} \hat{\nabla}_\nu \hat{S}_\mu^* \quad (\text{A.64})$$

$$h_{\varepsilon}^{\alpha} h^{\gamma\nu} \hat{\nabla}_{\nu} \hat{\nabla}_{\gamma} \hat{S}_{\alpha}^{*} = \frac{k^2}{a^2} \hat{S}_{\varepsilon}^{*} \quad (\text{A.65})$$

$$h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} (\hat{\nabla}_{\mu} \hat{S}_{\nu}^{*})_{\parallel \lambda} V^{\lambda} = -\frac{2}{3} \theta h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} \hat{\nabla}_{\mu} \hat{S}_{\nu}^{*} \quad (\text{A.66})$$

$$h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} \left[\hat{\nabla}_{\mu} \hat{S}_{\nu} \right]_{\parallel \lambda} V^{\lambda} = -\frac{\theta}{3} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} \hat{S}_{\nu \parallel \mu} \quad (\text{A.67})$$

$$h^{\mu(\rho} h^{\varepsilon)\lambda\nu\alpha} V_{\lambda} \hat{\Sigma}_{\alpha\mu \parallel \nu}^{*} = (2\varepsilon - k^2) h^{\mu(\varepsilon} h^{\rho)\nu} \hat{S}_{\nu \parallel \mu} \quad (\text{A.68})$$

$$h_{\varepsilon}^{\alpha} h^{\mu\nu} \Sigma_{\alpha\mu \parallel \nu}^{*} = \frac{2\varepsilon + k^2}{a^2} \hat{S}_{\varepsilon}^{*} \quad (\text{A.69})$$

$$\Sigma_{\alpha\mu \parallel \lambda}^{*} V^{\lambda} = -\frac{\theta}{3} \Sigma_{\alpha\mu}^{*} \quad (\text{A.70})$$

$$(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu})_{\parallel \alpha} V^{\alpha} = -\frac{2}{3} \theta \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \quad (\text{A.71})$$

Harmônicos Esféricos Tensoriais

São tensores simétricos de segunda ordem definidos em $H(t)$ como soluções da equação

$$h^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_{\alpha} \hat{\nabla}_{\beta} \hat{U}_{\mu\nu} = \frac{k^2}{a^2} \hat{U}_{\mu\nu} \quad (\text{A.72})$$

A constante k tem o seguinte espectro de valores

plano	$0 < k < \infty$
aberto	$k^2 = q^2 + 3 \quad ; \quad 0 < q < \infty$
fechado	$k^2 = n^2 - 3 \quad ; \quad n = 3, 4, \dots$

Por definição o tensor $\hat{U}_{\mu\nu}$ satisfaz às seguintes propriedades:

$$\hat{U}_{\mu\nu||\alpha} V^\alpha = 0 \quad (\text{A.73})$$

$$h^{\alpha\mu} \hat{\nabla}_\alpha \hat{U}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.74})$$

$$h^{\mu\nu} \hat{U}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.75})$$

Utilizando o operador $P_{\alpha\beta}$ (veja cap. VI) podemos definir os objetos $\hat{U}_{\mu\nu}^*$ associados aos tensores $\hat{U}_{\mu\nu}$ como:

$$\hat{U}_{\mu\nu}^* = P_{\mu\nu}(\hat{U}) = \frac{1}{2} h_{(\mu}^\alpha h_{\nu)}^\xi \eta_\xi^{\lambda\beta\gamma} V_\lambda V_\beta \hat{U}_{\gamma\alpha} \quad (\text{A.76})$$

Aplicando-se sucessivamente o operador P duas v\u00e9zes sobre $U_{\mu\nu}$ obtem-se:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon\rho} \left[\overline{P(U)} \right] &= \frac{1}{2} h_{(\varepsilon}^\gamma h_{\rho)}^\delta \eta_\delta^{\eta\lambda\alpha} V_\eta V_\lambda \left[\frac{1}{2} h_{(\alpha}^\mu h_{\gamma)}^\nu \eta_\nu^{\xi\sigma\tau} V_\xi V_\sigma \hat{U}_{\tau\mu} \right] = \\ &= \frac{1}{4} h_{(\varepsilon}^\gamma h_{\rho)}^\delta \left\{ \frac{\theta}{3} V_\eta h_{\xi\lambda} \eta_\delta^{\eta\lambda\alpha} \left[\overline{\eta_\gamma^{\xi\sigma\tau} (h_{\alpha}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta})} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \eta_\alpha^{\xi\sigma\tau} (h_{\gamma}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta}) \right] + \\ &\quad \left. + V_\eta V_\xi \eta_\delta^{\eta\lambda\alpha} \left[\overline{\eta_\gamma^{\xi\sigma\tau} (h_{\alpha}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta})} \right]_{||\lambda} + \eta_\alpha^{\xi\sigma\tau} (h_{\gamma}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta})_{||\lambda} \right\} \quad (\text{A.77}) \end{aligned}$$

Por c\u00e1lculo direto mostra-se que:

$$\frac{\theta}{3} V_\eta h_{\xi\lambda} \eta_\delta^{\eta\lambda\gamma} \left[\overline{\eta_\gamma^{\xi\sigma\tau} (h_{\alpha}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta})} \right] + \eta_\alpha^{\xi\sigma\tau} (h_{\gamma}^\mu h_{\tau}^\nu h_{\sigma}^\beta \hat{U}_{\mu\nu||\beta}) = 0 \quad (\text{A.78})$$

O terceiro termo da express\u00e3o (A.77) \u00e9 mais trabalhoso. Inicialmente, devemos substituir o produto dos tensores antissim\u00e9tricos $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ em fun\u00e7\u00e3o dos deltas de Kronecker. Efetuando um c\u00e1lculo obtemos:

$$\begin{aligned}
 & h_{\epsilon}^{\gamma} h_{\rho}^{\delta} v_{\eta} v_{\xi} \eta_{\delta}^{\lambda \alpha} \eta_{\gamma}^{\xi \sigma \tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} = \\
 & = - (h_{\alpha}^{\mu} h^{\tau\nu} h^{\sigma\beta} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} \begin{vmatrix} h_{\epsilon\rho} & 0 & h_{\epsilon}^{\lambda} & h_{\epsilon}^{\alpha} \\ 0 & 1 & v^{\lambda} & v^{\alpha} \\ h_{\rho\sigma} & v_{\sigma} & \delta_{\sigma}^{\lambda} & \delta_{\sigma}^{\alpha} \\ h_{\rho\tau} & v_{\tau} & \delta_{\tau}^{\lambda} & \delta_{\tau}^{\alpha} \end{vmatrix} = \\
 & = h_{\epsilon\rho} (h^{\mu\nu} h^{\lambda\beta} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} - h_{\epsilon}^{\lambda} h_{\rho\sigma} (h^{\mu\nu} h^{\sigma\beta} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} - \\
 & - h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho\sigma} \left[h_{\alpha}^{\mu} h^{\tau\nu} h^{\beta\gamma} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta} \right]_{\|\lambda} + \\
 & - h_{\rho\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h^{\sigma\beta} h^{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} = h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h^{\tau\nu} h^{\beta\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} + \\
 & - h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h^{\sigma\beta} h^{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} .
 \end{aligned}$$

O quarto termo da expressão (A.77) pode ser transformado de maneira análoga. O resultado desse cálculo é:

$$\begin{aligned}
 h_{\epsilon}^{\gamma} h_{\rho}^{\delta} v_{\eta} v_{\xi} \eta_{\delta}^{\lambda \alpha} \eta_{\alpha}^{\xi \sigma \tau} (h_{\gamma}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h_{\sigma}^{\beta} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} & = h_{\tau\rho} h_{\epsilon}^{\gamma} (h_{\gamma}^{\mu} h^{\nu\tau} h^{\beta\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} + \\
 & - h_{\epsilon}^{\gamma} h_{\rho\sigma} (h_{\gamma}^{\mu} h^{\nu\tau} h^{\beta\sigma} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\tau} .
 \end{aligned}$$

Reunindo esses resultados obtemos:

$$P_{\epsilon\rho} \left[\overline{P(U)} \right] = h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h^{\beta\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} - \frac{1}{2} h_{\epsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\sigma} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} \tag{A.79}$$

O primeiro termo do lado direito pode ser posto numa forma mais simples como segue:

$$\begin{aligned}
 h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h^{\beta\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} &= h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta\|\lambda} + \\
 &+ (h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda})_{\|\lambda} h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\sigma} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta} = \\
 &= \frac{4}{9} \theta^2 \hat{U}_{\varepsilon\rho} + h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h^{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta\|\lambda} \quad . \quad (A.80)
 \end{aligned}$$

Utilizando o tensor Riemann a ordem de derivação do se gundo termo pode ser invertida:

$$\hat{U}_{\mu\nu\|\beta\|\lambda} = \hat{U}_{\mu\nu\|\lambda\|\beta} + R_{\mu\theta\beta\lambda} \hat{U}^{\theta}_{\nu} + R_{\nu\theta\beta\lambda} \hat{U}_{\mu}^{\theta}$$

Substituindo o tensor de Riemann pela sua expressão em função do tensor energia e momento e projetando perpendicularmente a V^{α} obtemos:

$$\hat{U}_{\mu\nu\|\beta\|\lambda} h_{\varepsilon}^{\mu} h_{\rho}^{\beta} h^{\nu\lambda} = \hat{U}_{\mu\nu\|\lambda\|\beta} h_{\varepsilon}^{\mu} h_{\rho}^{\beta} h^{\nu\lambda} - \rho \hat{U}_{\varepsilon\rho}$$

A divergência do tensor $\hat{U}_{\mu\nu}$ é nula. Logo, a expressão acima se reduz a

$$\hat{U}_{\mu\nu\|\beta\|\lambda} h_{\varepsilon}^{\mu} h_{\rho}^{\beta} h^{\nu\lambda} = - \left(\frac{\theta^2}{9} + \rho \right) \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad .$$

Substituindo esse resultado na expressão (A.77) obtemos

$$h_{\varepsilon}^{\alpha} h_{\rho}^{\tau} (h_{\alpha}^{\mu} h_{\tau}^{\nu} h^{\beta\lambda} \hat{U}_{\mu\nu\|\beta})_{\|\lambda} = \left(\frac{\theta^2}{3} - \rho \right) \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad .$$

Reunindo esses resultados finalmente obtemos que

$$\begin{aligned}
 P_{\varepsilon\rho} \left[\overline{P(\hat{U})} \right] &= h^{\mu\nu} \hat{V}_{\mu} \hat{V}_{\nu} \hat{U}_{\varepsilon\rho} + \left(\rho - \frac{1}{3} \theta^2 \right) \hat{U}_{\varepsilon\rho} = \\
 &= \left(\rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{a^2} \right) \hat{U}_{\varepsilon\rho} \quad . \quad (A.81)
 \end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que

$$\frac{D}{D\tau} P_{\alpha\beta}(\hat{U}) = -\frac{1}{3} \theta P_{\alpha\beta}(\hat{U}) \quad . \quad (\text{A.82})$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - A. Einstein. The Principle at Relativity, 1^a edição, Dover (1952).
- (2) - M. Novello, L.M.C.S. Rodrigues. Beyond the Cosmological Singularity, Lett. al Nuovo Cimento 13, nº 2 (1975) 135.
- (3) - M. Novello. Algumas Questões Cosmológicas. Rev. Bras. Fis. 10, nº 3 (1980) 599.
- (4) - C.Lanzos. Space Throught the Ages. 1^a edição, Academic Press (1970).
- (5) - H. Weyl. The Theory of Groups and Quantum Mechanics, 1^a Ed. Dover (1950).
- (6) - M. Spivak. Cálculo en Variedades. 1^a Ed., Editorial Rovatê S.A. (1973).
- (7) - H. Weyl. Space-Time and Matter. 1^a Ed., Dover (1952).
- (8) - M. Novello, J.D. Oliveira. On Dual Properties of the Weyl Tensor. G.R.G. 12, nº 11 (1980) 147.
- (9) - Y. Fourès-Bruhat. Théorème d'existence pour certains systêmes d'equations aux derivêes partielles non linêaires. Acta Math. 88 (1952) 141.
- (10) - A. Lichnerowicz. Théories Relativistes de la Gravitation et de l'electromagnetisme. 1^r Ed. Masson, Paris (1954).
- (11) - G.F.R. Ellis. Relativistic Cosmology. Rendiconti della Scuola Internazionale di Física Enrico Fermi. XLVII corso (1971).
- (12) - F.A.E. Pirani, Bull. Acad. Polon. Sci. III, 5 (1956a) 143.
- (13) - I. Damião Soares. Cartan Frames and Rotating Universes. Relatório do Grupo de Cosmologia Relativista, CBPF/Rio (1974).
- (14) - J.M. Salim. Monopulos Gravitacionais. Tese de Mestrado CBPF (1976).
- (15) - J.D. Soares. Notas de Aula. CBPF (1981) (não publicadas).

- (16) - J.P. Plebanski. The Spinorial and Helicity Formalisms of Riemann Structures in Complex or Real Four Dimensions. Comunicaciones Técnicas UNAM Série Verde nº 16 (1979).
- (17) - M. Novello, I.D. Soares. Gödel's Container, CBPF -22290 (1982).
- (18) - Landau, Lifshitz. Teoria Clássica de los Campos, 1^a edição (1966).
- (19) - Landau, Lifshitz. Teoria Clássica de los Campos, 1^a edição, pág. 319 (1966).
- (20) - G.F.R. Ellis, A.R. King. Tilted Homogeneous Cosmological Models. Commun. Math. Phys. 38 (1974) 119.
- (21) - J. Schouten. Ricci Calculus 1^a Ed., Berlin (1954).
- (22) - I.S. Sokolnikoff. Tensor Analysis Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. 2^a Ed., John Wiley (1964).
- (23) - G.F.R. Ellis, R. Martens, S.D. Nel. Observational Cosmology I: Ideal Cosmographic Observations. Preprint of Mathematical Institute, Oxford (1980).
- (24) - F.A.E. Pirani. Lectures in General Relativity, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics (1964).
- (25) - M. Novello, I.D. Soares, J.M. Salim. On Jacob Fields, G.R.G. 8, nº 2 (1977) 95.
- (26) - Rauchaudhuri, Phys. Rev. 98 (1955) 1123.
- (27) - M. Novello. II Escola de Gravitação e Cosmologia CBPF(1980).
- (28) - C.G. Oliveira. Relativity and Gravitation, Monografia XXVI CBPF (1972).
- (29) - M. Novello. Tópicos de Cosmologia Relativista. Monografia XXXIV, CBPF (1974).
- (30) - M. Novello, I.D. Soares, C.A.P. Galvão, J.M. Salim. Electric and Magnetic Gravitational Monopoles I. J.Phys. 9 nº 4 (1976) 547.
- (31) - M. Novello. Stokesian Fluids and Cosmology. Nukleonika 25 nº 11 (1980).

- (32) - M. Novello, J.M. Salim, H. Heitzmann. Perturbations of the Friedmann Universe (a ser publicado).
- (33) - R.K. Sachs and A.M. Wölf. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background . Astrophys. Journ. 147 (1967) 73.
- (34) - E.M. Lifshitz, I.N. Kalatnikov. Investigations in Relativistic Cosmology. Adv. Phys. 12 (1963) 185.
- (35) - W. Weinberg. Gravitation and Cosmology. John Wiley (1972).
- (36) - J.M. Stewart, G.F.R. Ellis, Journ. Math.Phys. 9(1968)1072.
- (37) - I.D. Soares. Técnicas Geométricas em Cosmologia. Trabalhos do Grupo de Cosmologia Relativista. CBPF (1974).
- (38) - G.F.R. Ellis. Relativistic Cosmology. Rendiconti della Scuola Internazionale di Física Enrico Fermi, XLVII Corso,(1971).
- (39) - P. Szekeres. Journal Math. Phys. 7 (1966) 751.
- (40) - J.D. Jackson. Classical Electrodynamics, 1^{rst} Ed. John Wiley (1962).
- (41) - P.D. D'Eath. Ann.Phys. (N.Y.) 98 (1976) 237.
- (42) - S.W. Hawking. Perturbations of an Expanding Universe.Astrophys. Journ. 145 (1966).
- (43) - W.B. Campbell, T. Morgan. Debye Potentials for the Gravitational Field. Physica 53 n° 2 (1971) 264.
- (44) - L.P. Grishchuk, Ya.B.Zeldovich. Long-Wavelength Perturbations of a Friedmann Universe, and Anisotropy of the Microwave Background Radiation. Sov. Astron. 22 n° 3(1978)125.
- (45) - A.R. King, G.F.R. Ellis. Commun. Math.Phys. 31(1973)209.
- (46) - E.M. Lifshitz, J. Phys. (USSR) 10 (1946) 116.
- (47) - K. Sakai. Density Perturbation and Preferential Coordinate Systems in an Expanding Universe. Progress of Theoretical Physics, 41 n° 6 (1969) 1461.
- (48) - J.M. Bardeen. Gauge-Invariant Cosmological Perturbations. Phys. Rev. D 22 n° 8 (1980) 1882.
- (49) - D.W. Olson. Density Perturbations in Cosmological Models.

Phys. Rev. D 14 nº 2 (1976) 327.


- (50) - I.D. Soares. Um Estudo da Interação Gravitação Neutrino . Tese de Doutorado, CBPF (1976).
- (51) - S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. 1^a ed., Cambridge University Press (1974).
- (52) - Fock V.A.. Z. Phys. 98 (1935) 148.
- (53) - J.L. Lopes. Fundamentos da Eletrodinâmica Clássica. Publicação da Fac. Nac. de Filosof. (1960).
- (54) - Wolfgang Rindler. Essential Relativity, 2a. ed. Springer -Verlag (1977).
- (55) - R. Fabbri, F. Melchiori . Towards a Non-Friedmann Universe. G.R.G, Vol. 13 nº 3 (1981) 148.
- (56) - V.A. Belinski, E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov. The Oscillatory Mode of Approach to a Singularity in Homogeneous Cosmological Models with Rotating Axes. Sov.Phys.JETP 60, nº 6 (1971) 1969.
- (57) - W. Rindler. G.R.G. 13 nº 5 (1981) 163.
- (58) - F.K. Manasse, C.W. Misner. Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry. J. Math. Physics, vol. 4 nº 6 (1963) 735.
- (59) - Y. Fourès-Bruhat. Gravitation: An Introduction to Current Research, N. York (1962).
- (60) - M. Trumper. Zeits F. Astrophys. 66 (1967) 125.
- (61) - C.W. Misner. The Isotropy of the Universe, Astrophys. J. 151 (1968) 431.
- (62) - P.M. Morse, H. Feshbach. Methods of Theoretical Physics, 1^a Ed., MacGraw-Hill (1953).
- (63) - P. Jordan, J. Ehlers, W.Kundt. Abh.Akad. Wissund Lit. Maing. Mat. Nat. Kl. nº 2 (1960).
- (64) - M. Novello. I Escola de Gravitação e Cosmologia , CBPF (1978)..

- (65) - M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, 1^a ed. Publish or Perish Inc. (1970).
- (66) - H.B. Callen. Thermodynamics, 1^a ed. John Wiley (1960).

E R R A T A

- na pág. 49, eq. 4.28, onde se lê Σ , leia-se L.
- na pág. 50, eq. 4.31 e 4.32, onde se lê Σ , leia-se L.
- na pág. 53, onde se lê Σ e v , leia-se L e \bar{v} .
- na pág. 57, eq. 4.49, onde se lê \sinh^{-2} , leia-se \sinh^{+2} .
- na pág. 60, leia-se $\mu = A_0 \left[\frac{\sin q r}{n q^{5/2}} - \dots \right] + A_1 \left[\frac{\cos q n}{n q^{5/2}} + \dots \right]$
- na pág. 79, eq.. 6.37, onde se lê λ , leia-se α .
- na pág. 84, linha 8, onse se lê (6.61), lei-se (6.57).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Mario Novello - Presidente



Ívano Damião Soares



Jayme Tiomno



Silvestre Reguza



Murari Mohan Som

Rio de Janeiro, 09 de agosto de 1982