

WALDIR LEITE ROQUE

UMA SOLUÇÃO EXATA EM EISTEIN-CARTAN

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1982-

Aos meus pais,

Vicente e Dalva

AGRADECIMENTOS

"O meu mais digno agradecimento ao amigo e orientador Prof. Antonio F. da F. Teixeira que com sua sabedoria e humildade soube sempre me ensinar e incentivar a realização deste trabalho".

"Agradeço à Universidade Federal da Paraíba e à Coordenadoria do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela Bolsa de Demanda Social, a qual permitiu minha estada junto ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas no período de agosto de 78 a dezembro de 79".

"Agradeço ao Departamento de Relatividade e Partículas do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelo apoio financeiro na fase final deste trabalho".

RESUMO

A solução exata das equações de campo da teoria de Einstein-Cartan é obtida para uma poeira artificial de spins radialmente polarizados, com simetria esférica e estática. Para melhor avaliação dos efeitos provocados pelo spin, considera-se nulo o tensor métrico de energia-momentum. A dinâmica do campo gravitacional é estudada para diversas intensidades da torção, através do movimento de partículas-teste com massa e de spin nulo; em particular para torção nula reobtemos a solução de Schwarzschild. Observamos que os efeitos gravitacionais associados à torção (spin) ora são atrativos ora são repulsivos, dependendo dos valores da torção, e da posição e velocidade das partículas-teste.

Í N D I C E

Uma solução exata em Einstein-Cartan.

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
NOTAÇÃO	viii
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO II</u> - ESPAÇO-TEMPO DE RIEMANN-CARTAN	4
II.1 - Variedade Diferenciável	4
II.2 - Conexão; Torção	4
II.3 - Métrica	6
II.4 - Derivada Covariante; Contorção; Curvatura	7
II.5 - Curvas em U_4	11
<u>CAPÍTULO III</u> - EQUAÇÕES DE CAMPO DE U_4	13
III.1 - Princípio Variacional	13
III.2 - Densidade Lagrangeana dos Campos	14
III.2.1 - Variação da Ação dos Campos	15
III.2.2 - Tensores Canônicos. Leis de Conservação....	18
III.3 - Densidade Lagrangeana da Gravitação	19
III.4 - Equações de Campo	20
III.4.1 - Variação da Densidade Escalar de Curvatura.	22
<u>CAPÍTULO IV</u> - SOLUÇÃO EXATA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-CARTAN	28
IV.1 - Métrica e Torção com Simetria Esférica	29
IV.2 - Tensor de Einstein da Relatividade Geral	30
IV.3 - Equações de Campo; Solução	34
IV.4 - Análise Qualitativa e Quantitativa do Campo Gravita - cional	36
IV.4.1 - Pontos de Equilíbrio Estático	37

<u>CAPÍTULO</u>	V - EXTREMAS	43
	V.1 - Extremas Equatoriais	45
	V.2 - Extremas Radiais	51
	V.3 - Extremas Circulares	55
	V.4 - CONCLUSÃO	59
<u>APÊNDICE</u>	A - CONEXÃO DE RIEMANN-CARTAN	61
<u>APÊNDICE</u>	B - CURVATURA DE RIEMANN-CARTAN	63
<u>APÊNDICE</u>	C - PROPRIEDADE DA CURVATURA EM U_4	65
<u>APÊNDICE</u>	D - CONEXÃO NAS AUTO-PARALELAS	67
<u>REFERÊNCIAS</u>	68

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
<u>Fig. 1</u> - Potencial gravitacional $\eta(r)$	40
<u>Fig. 2</u> - Horizonte de eventos	41
<u>Fig. 3</u> - Raio de equilíbrio estático	42
<u>Fig. 4</u> - Termo estático de aceleração radial	47
<u>Fig. 5</u> - Termo cinético radial	49
<u>Fig. 6</u> - Termo cinético azimutal	50
<u>Fig. 7</u> - Frequência do movimento harmônico	53
<u>Fig. 8</u> - Velocidade em queda livre radial ($v_\infty = 0$)	54
<u>Fig. 9</u> - Velocidade nos movimentos circulares	57
<u>Fig. 10</u> - Raio de órbita circular para velocidade máxima..	58

NOTAÇÃO

() simetrização: $T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2!} (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$

[] anti-simetrização: $T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2!} (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$

[|] anti-simetrização dos índices entre os colchetes e as barras:
 $T_{[\alpha|\beta|\gamma]} = \frac{1}{2!} (T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\beta\alpha})$

$A_{,\alpha} = \partial A / \partial x^\alpha$ derivada parcial ordinária

$A_{;\alpha} = \nabla_\alpha A$ derivada covariante

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A relatividade geral é há mais de meio século a teoria de gravitação por excelência. Contudo, várias outras teorias para a gravitação tem sido propostas. Dentre as demais, a generalização à relatividade geral proposta por Élie Cartan (1922/23) vem sendo bastante discutida nos últimos anos.

Cartan sugeriu um novo modelo para a geometria do espaço-tempo, no qual as afinidades não mais seriam simétricas e onde a parte anti-simétrica — denominada de torção — estaria de algum modo ligada ao momento angular intrínseco da matéria (spin). De acordo com Cartan, a torção, com suas 24 componentes independentes, deveria ser tratada em pé de igualdade com a métrica.

A idéia de considerar-se o spin das partículas como uma nova variável dinâmica do sistema é bastante razoável, se lembrarmos que na classificação das partículas elementares usa-se dois invariantes das representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, que são massa e spin. Nesta representação, massa está associada à parte translacional do grupo de Poincaré, e spin à parte rotacional.

A noção de espaços-tempo com spin e torção passou alguns anos dormindo, até que em 1961/62 Sciama e independentemente Kibble deram uma nova contribuição, ao mostrarem que a teoria proposta por Cartan é na realidade a teoria de gauge local do

grupo de Poincaré⁽¹⁶⁾. Mais tarde, Hehl (1973/74) através do formalismo de Lagrange, e Trautman (1972/73) através do cálculo com formas diferenciais, vieram contribuir de forma bastante significativa ao obterem resultados semelhantes para a teoria, o que permitiu dar a esta uma forma definitiva.

De acordo com a teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble, uma densidade média de spin não-nula pode produzir efeitos gravitacionais sensíveis. É admissível que, em certos tipos de estrelas onde o campo magnético é muito intenso, o alinhamento dos spins possa ocorrer e deste modo produzir algum efeito de natureza gravitacional^(35a). No entanto, segundo a teoria, fora das distribuições de matéria a torção se anula, conseqüentemente desaparecem os efeitos produzidos diretamente pelo spin. Desta forma, na ausência da torção, como por exemplo no vácuo, as equações da teoria de Einstein-Cartan reduzem-se às da relatividade geral.

O estudo de modelos cosmológicos sob o ponto de vista desta teoria despertou a curiosidade quando Trautman⁽³⁶⁾ apresentou um modelo cosmológico não-singular, no qual a ausência da singularidade no espaço-tempo era devida à interação de contato spin-spin descrita pela teoria de Einstein-Cartan. Outros modelos cosmológicos igualmente livres de singularidade cosmológica foram apresentados por Kopczyński⁽²⁰⁾, Kuchowicz^(22,23) e Tafel⁽³⁴⁾.

No presente trabalho propomos estudar os efeitos gravitacionais causados por uma distribuição esfericamente simétrica de spins polarizados, buscando reduzir a um mínimo as contribuições gravitacionais associadas à matéria propriamente dita.

No capítulo II fazemos uma breve discussão da variedade espaço-temporal de Riemann-Cartan, usando a análise tensorial, com o intuito de dar ao leitor um escôço da geometria de U_4 . No

capítulo III apresentamos a dedução das equações de campo da teoria usando o princípio de Hamilton, culminando com a equação de campo combinada. O sistema específico considerado nesta tese é descrito no início do capítulo IV, e em seguida apresentamos a sua solução exata. No item IV.4 fazemos algumas análises qualitativas e quantitativas da solução obtida. Finalmente, no capítulo V estudamos as extremas de partículas-teste com massa e de spin nulo.

CAPÍTULO II

ESPAÇO-TEMPO DE RIEMANN-CARTAN

II.1 - Variedade Diferenciável

A estrutura do espaço-tempo que suporemos ao longo deste trabalho é a de uma variedade diferenciável 4-dimensional Hausdorff com conexão e métrica ⁽¹¹⁾. Um ponto da variedade — denotada por X_4 —, ou seja, um evento no contínuo espaço-tempo, será representado por um conjunto ordenado de coordenadas reais x^α com $\alpha = 0, 1, 2, 3$, onde x^0 corresponde à coordenada temporal e x^i , com $i = 1, 2, 3$, correspondem às coordenadas espaciais.

Os objetos geométricos que são definidos naturalmente sobre a variedade são os escalares, os vetores, os tensores, e as respectivas densidades.

II.2 - Conexão; Torção

Uma estrutura adicional introduzida na variedade é a conexão afim. A conexão surge quando tomamos um vetor contravariante C^α e o transportamos paralelamente do ponto x^α a um ponto infinitamente próximo $x^\alpha + dx^\alpha$. O vetor C^α varia de acordo com a relação

$$dC^\alpha = - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) C^\gamma dx^\beta . \quad (II.1)$$

Os 64 coeficientes $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ formam o que chamamos de conexão afim.

Uma variedade diferenciável X_4 dotada de uma conexão Γ é denotada por L_4 .

Na base de coordenadas a lei de transformação da conexão é

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) . \quad (II.2)$$

Vemos que, devido à ocorrência do termo $\partial^2 x^\alpha / \partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}$ em (II.2), $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ não se transforma como um tensor. No entanto, se $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ são duas conexões diferentes, a sua diferença será um tensor, i.e., $(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha)$ se transforma como um tensor.

Assim, definimos a torção como o tensor formado pela parte anti-simétrica de uma conexão afim,

$$S_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha = \frac{1}{2} (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) ; \quad (II.3)$$

vemos que a torção é anti-simétrica nos primeiros dois índices:

$$S_{(\beta\gamma)}^\alpha = 0 . \quad (II.4)$$

Temos, portanto, 24 componentes independentes para a torção.

Um tensor que se mostrará particularmente útil mais adiante é o da torção modificada,

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = S_{\beta\gamma}^\alpha + 2 \delta_{[\beta}^\alpha S_{\gamma]}^\rho , \quad (II.5)$$

que difere da torção em seu traço. Notamos que também a torção

modificada \bar{e} anti-simétrica nos primeiros dois índices.

II.3 - Métrica

Uma métrica g \bar{e} definida sobre a variedade como um tensor covariante de 2ª ordem, simétrico, e que \bar{e} responsável pela medida de comprimentos e ângulos localmente sobre a variedade.

Na base de coordenadas a métrica g \bar{e} expressa em termos de suas componentes $g_{\alpha\beta}$ obtidas a partir do comprimento infinitesimal de arco originado pelo deslocamento da coordenada x^α para $x^\alpha + dx^\alpha$. Simbolicamente temos

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (\text{II.6})$$

Suporemos que a matriz $(g_{\alpha\beta})$ \bar{e} não-singular. Desta forma, podemos definir um tensor $g^{\alpha\beta}$ através da relação

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma , \quad (\text{II.7})$$

ou seja, a matriz simétrica $(g^{\alpha\beta})$ \bar{e} a matriz inversa de $(g_{\alpha\beta})$.

Segue, então, que podemos usar a métrica g para definir um isomorfismo entre tensores covariantes e tensores contravariantes, e assim usarmos a métrica para subir e baixar índices. Se A^α são as componentes contravariantes de um tensor, então A_α são as componentes covariantes, associadas entre si da forma

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad \text{e} \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta . \quad (\text{II.8})$$

Uma variedade L_4 com uma métrica g e uma conexão linear definida como em (II.1) será denotada por (L_4, g) .

Uma métrica $g_{\alpha\beta}$ cuja assinatura é dada por $(2-n)$, onde n é a dimensão da variedade, é dita uma métrica de Lorentz. Admitiremos aqui que g tem assinatura -2 , e que é localmente Minkowskiana com diagonal da forma $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

O caráter Lorentziano da métrica permite separar os vetores não-nulos da variedade em três classes de acordo com o sinal de $g(X,X)$, onde X é um vetor da variedade. Dizemos que para $g(X,X) = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta > 0$ o vetor é tipo-tempo, para $g(X,X) = 0$ o vetor é tipo nulo, e para $g(X,X) < 0$ o vetor é tipo-espaço. Os vetores tipo-nulo formam um par de cones sobre a variedade, separando os vetores do tipo-tempo, interiores ao cone, dos vetores do tipo-espaço, exteriores ao cone.

II.4 - Derivada Covariante; Contorção; Curvatura

Seja A_μ um co-vetor definido sobre a variedade. Definimos a sua derivada covariante da forma

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha \quad ; \quad (\text{II.9})$$

do mesmo modo, a derivada covariante de um contra-vetor A^μ é dada por

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv A^{\mu;\nu} = A^{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha \quad , \quad (\text{II.10})$$

onde $A_{\mu,\nu} \equiv \partial A_\mu / \partial x^\nu$ e $A^{\mu,\nu} \equiv \partial A^\mu / \partial x^\nu$.

Tomemos agora a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ da variedade (L_4, g) e derivêmo-la covariantemente:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} \quad . \quad (II.11a)$$

Permutando ciclicamente os índices (μ, ν, α) , temos

$$g_{\nu\alpha;\mu} = g_{\nu\alpha,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} g_{\nu\lambda} \quad , \quad (II.11b)$$

$$g_{\alpha\mu;\nu} = g_{\alpha\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\alpha\lambda} \quad . \quad (II.11c)$$

Subtraindo de (II.11c) as expressões (II.11a) e (II.11b), e impondo que $g_{\alpha\beta;\lambda} = 0$ para que sejam preservados comprimentos e ângulos através do deslocamento paralelo, obtemos após alguns rearranjos (ver Apêndice A)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \{_{\alpha\beta}^{\gamma}\} - K_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad , \quad (II.12)$$

onde $\{_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$ é o símbolo de Christoffel de 2ª espécie e $K_{\alpha\beta}^{\gamma}$ é o tensor de contorção, escrito em termos da torção como

$$K_{\alpha\beta}^{\gamma} = -S_{\alpha\beta}^{\gamma} + S_{\beta\alpha}^{\gamma} - S_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad . \quad (II.13)$$

Podemos ver que a contorção é anti-simétrica nos últimos dois índices,

$$K_{\alpha\beta}^{\gamma} + K_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0 \quad . \quad (II.14)$$

Ao transportarmos paralelamente um vetor ao longo de uma curva fechada, nem sempre obtemos no ponto de chegada o vetor inicial. O deslocamento paralelo depende da curva tomada. Esta não-integrabilidade dos deslocamentos paralelos se deve a que as derivadas covariantes em geral não comutam. A não-comutativi-

dade das derivadas covariantes é medida pelo tensor de curvatura de Riemann. Assim, tomemos um co-vetor A_α e façamos a comutação das suas derivadas covariantes segundas (ver Apêndice B): obtemos

$$A_{\alpha; [\underline{\mu}\underline{\nu}]} = \frac{1}{2} R^\lambda_{\alpha\mu\nu} A_\lambda + S_{\mu\nu}{}^\lambda A_{\alpha;\lambda} \quad , \quad (\text{II.15})$$

onde $A_{\alpha;\mu\nu} \equiv \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha$ e onde o tensor $R^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ é definido na base de coordenadas como

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = 2 \Gamma_{[\underline{\nu}|\alpha],\underline{\mu}}^\lambda + 2 \Gamma_{[\underline{\mu}|\beta}\Gamma_{\underline{\nu}]\alpha}^\beta \quad , \quad (\text{II.16})$$

e denominado de tensor de curvatura de Riemann.

Dessa definição podemos ver que

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = - R^\lambda_{\alpha\nu\mu} \quad , \quad (\text{II.17})$$

i.e., o tensor de curvatura de Riemann é anti-simétrico nos últimos dois índices. Fazendo uso da relação (II.17) obtemos uma outra propriedade para o tensor de curvatura (ver Apêndice C):

$$R^\lambda_{[\underline{\alpha}\underline{\mu}\underline{\nu}]} = 2 S_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]}^\lambda{}_{;\underline{\alpha}} - 4 S_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]}^\beta S_{\underline{\alpha}]\beta}^\lambda \quad . \quad (\text{II.18})$$

Podemos ainda encontrar as identidades de Bianchi para o tensor de curvatura na geometria com torção:

$$R^\lambda_{\alpha[\underline{\mu}\underline{\nu}];\underline{\beta}} = 2 S_{[\underline{\beta}\underline{\nu}]}^\sigma R^\lambda_{\alpha\sigma[\underline{\mu}]} \quad . \quad (\text{II.19})$$

Uma variedade (L_4, g) com conexão do tipo (II.12) é dita uma variedade de Riemann-Cartan U_4 . Assim, numa variedade (L_4, g)

com $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ a geometria \bar{e} a de U_4 ; se a torção for nula em U_4 , teremos a geometria da relatividade geral, V_4 , e por fim se em V_4 tivermos a curvatura de Riemann nula, teremos a geometria de R_4 da relatividade especial. Esquemáticamente escrevemos

$$(L_4, g) \xrightarrow{g_{\mu\nu;\lambda}=0} U_4 \xrightarrow{S_{\alpha\beta}{}^\gamma=0} V_4 \xrightarrow{R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=0} R_4 .$$

Não sō em V_4 mas tambēm em U_4 o tensor de curvatura de Riemann \bar{e} anti-simétrico nos primeiros dois índices. Logo, em U_4 o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, definido abaixo, permanece como a única contração essencial do tensor de curvatura, porém sem a simetria existente em V_4 :

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta} . \quad (II.20)$$

Definimos o tensor de Einstein em U_4 de forma semelhante ao usado na relatividade geral, ou seja:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^\lambda{}_{\lambda} . \quad (II.21)$$

Contudo, \bar{e} importante notar aqui que em geral $G_{\alpha\beta}$ não mais \bar{e} simétrico.

Definindo o operador $\overset{*}{\nabla}_\rho \equiv \nabla_\rho + 2S_{\rho\nu}{}^\nu$ como uma divergência modificada, podemos escrever a parte anti-simétrica do tensor de Einstein em U_4 da forma

$$G_{[\alpha\beta]} = \overset{*}{\nabla}_\rho T_{\beta\alpha}{}^\rho , \quad (II.22)$$

onde $T_{\beta\alpha}{}^\rho$ \bar{e} o tensor de torção modificado definido em (II.5). Note-se que o operador $\overset{*}{\nabla}_\rho$ não \bar{e} distributivo, $\overset{*}{\nabla}_\rho (A^\alpha B^\beta) \neq B^\beta \overset{*}{\nabla}_\rho A^\alpha +$

+ $A^{\alpha}_{\nu} B^{\nu}$, contudo comuta com $g_{\alpha\beta}$, com $g^{\alpha\beta}$, e com g .

II.5 - Curvas em U_4

No espaço-tempo de Riemann-Cartan U_4 devemos inicialmente nos referir a duas classes de curvas da geometria, as auto-paralelas e as extremas; ambas se reduzem às geodésicas do espaço-tempo de Riemann V_4 na ausência da torção.

As curvas denominadas de auto-paralelas são aquelas obtidas em U_4 através do deslocamento paralelo de um vetor tangente, o qual permanece tangente ao longo da curva, sendo Γ a conexão da variedade. A equação diferencial que descreve as curvas auto-paralelas é

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0 \quad . \quad (II.23)$$

Nesta equação observamos que apenas a parte simétrica da conexão contribui, pois a parte anti-simétrica desaparece na contração com o termo simétrico $dx^{\beta} dx^{\lambda}$. Resulta, portanto

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{(\beta\lambda)} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0 \quad , \quad (II.24)$$

onde a parte simétrica da conexão depende explicitamente da torção segundo a relação (ver Apêndice D)

$$\Gamma^{\alpha}_{(\beta\lambda)} = \{^{\alpha}_{\beta\lambda}\} + 2 S^{\alpha}_{(\beta\lambda)} \quad . \quad (II.25)$$

As curvas extremas de U_4 são aquelas de comprimento extremo com respeito à métrica da variedade. De acordo com a equa-

ção (II.6), o comprimento entre dois pontos da variedade depende apenas da métrica, e assim a equação que define as extremas é obtida a partir da variação

$$\delta \int ds = \delta \int (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} = 0 \quad ,$$

por um processo idêntico ao da geometria de Riemann para obtenção das geodésicas. A variação acima nos leva à equação diferencial

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{smallmatrix} \} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad . \quad (II.26)$$

A equação (II.24), que define as auto-paralelas, reduz-se à equação (II.26) para as extremas no caso da torção ser totalmente anti-simétrica, i.e., $S_{\alpha\beta\gamma} = S_{[\alpha\beta\gamma]}$.

Há ainda as curvas denominadas de trajetórias, que são as curvas seguidas por partículas teste dotadas de spin; essas curvas não são em princípio nem auto-paralelas nem extremas, mas devem provir das equações de campo ou de leis de conservação^(12,15). Ao tender a zero o spin da partícula teste, tende a trajetória à curva extrema⁽¹²⁾.

Partículas de massa não-nula e sem spin seguem extremas tipo-tempo, enquanto os ftons seguem extremas nulas.

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES DE CAMPO DE U_4

Vimos até agora o caráter geométrico da variedade U_4 , sem contudo levarmos em conta o caráter físico que traz realidade ao espaço-tempo de Riemann-Cartan U_4 .

O estudo de tais características foi desenvolvido por Hehl (1972/73) e por Trautman (1972/73), independentemente, e usando abordagens diferentes. O primeiro fez uso do método da análise tensorial, enquanto que o segundo usou dos métodos da geometria diferencial moderna através do cálculo com formas diferenciais. Os resultados obtidos são equivalentes no que diz respeito às informações prestadas sobre as equações de campo e leis de conservação.

Exporremos aqui apenas os resultados e desenvolvimentos realizados com a análise tensorial. O tratamento com formas diferenciais pode ser visto em Trautman (1972a,b,c,d), Galvão (1976), e Linhares (1979). No capítulo IV faremos uso do cálculo com formas apenas como técnica para obtenção do tensor de Einstein.

III.1 - Princípio Variacional

As equações de campo são frequentemente derivadas de um princípio variacional. Definiremos a ação A de um sistema como a integral no tempo da função de Lagrange L , i.e.,

$$A = \int L dt \quad . \quad (III.1)$$

Podemos ainda expressar a ação A da forma

$$A = \frac{1}{c} \int dx^0 \int d^3x L = \frac{1}{c} \int d^4x L \quad , \quad (III.2)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, L é a densidade Lagrangeana e d^4x o elemento de volume do espaço-tempo.

A densidade Lagrangeana L é construída com os elementos que descrevem a dinâmica do sistema. Como na relatividade geral, a densidade Lagrangeana na teoria de Einstein-Cartan é separada em duas parcelas $L = L_c + L_g$, onde L_g representa a densidade Lagrangeana da gravitação e L_c a densidade Lagrangeana para os eventuais campos de matéria. Portanto, a integral de ação em U_4 pode ser escrita como

$$A = \frac{1}{c} \int (L_c + L_g) d^4x \quad , \quad (III.3)$$

cujas partes passaremos a descrever separadamente.

III.2 - Densidade Lagrangeana dos Campos

Imaginemos um campo clássico de matéria $\psi(x^\alpha)$ no espaço de Minkowski da relatividade especial. O campo $\psi(x^\alpha)$, que depende da posição, pode ser um tensor ou um espinor; contudo, não trataremos aqui de campos espinoriais.

Na ausência da gravitação, a densidade Lagrangeana da matéria da relatividade especial L_c depende do campo, do seu gradiente e da métrica η do espaço plano:

$$L_C = L_C (\psi, \partial\psi, \eta) \quad . \quad (\text{III.4})$$

Para obtermos a densidade Lagrangeana de matéria em U_4 devemos considerar a presença da gravitação, levando em conta o princípio da equivalência. Então, substituímos a métrica $\eta_{\alpha\beta}$ por $g_{\alpha\beta}$ de U_4 e o gradiente do campo pela derivada covariante, de acordo com o princípio do acoplamento mínimo, ou seja:

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} \quad , \quad \partial\psi \rightarrow \overset{\Gamma}{\nabla}\psi \quad . \quad (\text{III.5})$$

Desta maneira, a densidade Lagrangeana dos campos assume a forma

$$L_C = L_C (\psi, \overset{\Gamma}{\nabla}\psi, g) \quad . \quad (\text{III.6})$$

Como a derivada covariante de ψ depende da derivada parcial do campo, da derivada parcial da métrica, e da torção, a expressão de L_C toma a forma

$$L_C = L_C (\psi, \partial\psi, g, \partial g, S) \quad . \quad (\text{III.7})$$

A integral de ação para os campos fica

$$A_C = \frac{1}{c} \int L_C (\psi, \partial\psi, g, \partial g, S) d^4x \quad , \quad (\text{III.8})$$

que depende do campo ψ , das 10 componentes da métrica $g_{\alpha\beta}$ e das 24 componentes da torção $S_{\alpha\beta}^\gamma$.

III.2.1 - Variação da Ação dos Campos

Escrevemos a variação da integral de ação (III.8) com respeito a variações do campo, da métrica e da torção inde -

pendentemente, encontrando

$$\begin{aligned} \delta A_c = \frac{1}{c} \int (\delta L_c) d^4x = \frac{1}{c} \int \left[\left(\frac{\partial L_c}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L_c}{\partial \psi_{,\alpha}} \delta \psi_{,\alpha} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} \delta g_{\alpha\beta,\gamma} \right) + \frac{\partial L_c}{\partial S_{\alpha\beta}^\gamma} \delta S_{\alpha\beta}^\gamma \right] d^4x . \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Ao fazermos integrações por partes, achamos conveniente definir as seguintes derivadas funcionais (Hehl et al., 1976, pág. 399):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\delta L_c}{\delta \psi} &\equiv \frac{\partial L_c}{\partial \psi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L_c}{\partial \psi_{,\alpha}} \right) , \\ \text{(b)} \quad \frac{\delta L_c}{\delta g_{\alpha\beta}} &\equiv \frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\gamma \left(\frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} \right) , \\ \text{(c)} \quad \frac{\delta L_c}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} &\equiv \frac{\partial L_c}{\partial S_{\alpha\beta}^\gamma} . \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Definimos o tensor métrico de (densidade de) energia-momentum σ e o tensor de (densidade de energia) potencial de spin μ , respectivamente, da forma

$$\frac{\delta L_c}{\delta g_{\alpha\beta}} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma^{\alpha\beta} , \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\delta L_c}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} \equiv \sqrt{-g} \mu_{\gamma}^{\beta\alpha} , \quad (\text{III.12})$$

onde $g = \det(g_{\alpha\beta})$. Notamos que $\sigma^{\alpha\beta}$ é simétrico, e que $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ é anti-simétrico nos últimos dois índices.

Observamos que a definição do tensor métrico de ener -

gia-momentum (III.11) é semelhante àquela da relatividade geral. Neste sentido, o tensor métrico de energia-momentum está relacionado às translações no espaço-tempo. Já em Einstein-Cartan surge a idéia de se relacionar o momento angular intrínseco (spin) às rotações do espaço-tempo. Isto é feito de maneira análoga à definição do tensor de energia-momentum, tomando-se a variação da integral de ação em termos da variação da contorção ao invés da torção.

O tensor de (densidade de) spin τ é definido como

$$\frac{\delta L_c}{\delta K_{\alpha\beta}^\gamma} \equiv \sqrt{-g} \tau_{\gamma}^{\beta\alpha} \quad , \quad (\text{III.13})$$

onde, provisoriamente, são tomados independentes o campo, a métrica, e a contorção (ao invés da torção). É fácil ver que devido à anti-simetria da contorção, expressa em (II.14), o tensor de spin $\tau_{\gamma}^{\beta\alpha}$ possui anti-simetria nos primeiros dois índices,

$$\tau_{\gamma}^{\beta\alpha} = - \tau_{\gamma}^{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{III.14})$$

A definição (III.13) leva-nos à relação (Hehl, 1974)

$$\tau^{\alpha\beta\gamma} = \mu [\bar{\beta}\alpha]_{\gamma} \quad . \quad (\text{III.15})$$

É conveniente, a partir do tensor métrico de energia-momentum e do tensor de spin, definir-se um tensor assimétrico chamado tensor de (densidade de) energia-momentum total, como

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} - \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \mu^{\alpha\beta\gamma} \quad , \quad (\text{III.16})$$

onde o operador $\overset{*}{\nabla}_{\gamma} \equiv \nabla_{\gamma} + 2S_{\gamma\lambda}^{\lambda}$.

No ítem seguinte veremos apenas a título de completeza que os tensores $\Sigma^{\alpha\beta}$ e $\tau^{\alpha\beta\gamma}$ formam os tensores canônicos de energia-momentum e de spin, respectivamente.

III.2.2 - Tensores Canônicos. Leis de Conservação.

Fazendo-se uso das identidades de Rosenfeld (Hehl 1974, pág. 509) podemos mostrar que

$$\sqrt{-g} \Sigma_{\alpha}^{\beta} = L_C \delta_{\alpha}^{\beta} - \frac{\delta L_C}{\delta \psi_{,\beta}} \nabla_{\alpha} \psi, \quad (\text{III.17})$$

$$\sqrt{-g} \tau^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial L_C}{\partial \psi_{,\gamma}} h^{\underline{[\beta\alpha]}} \psi. \quad (\text{III.18})$$

Na expressão (III.18) as quantidades $h^{\underline{[\beta\alpha]}}$ são a representação matricial de uma transformação infinitesimal de coordenadas que depende do caráter do campo ψ .

Podemos observar que o lado direito da expressão (III.17) dá uma generalização para a definição do tensor canônico de energia-momentum em relatividade especial, segundo o teorema de Noether, o que justifica então a definição (III.16) para o tensor de energia-momentum total $\Sigma^{\alpha\beta}$. Da mesma forma, por analogia ã relatividade especial, podemos reconhecer na relação (III.18) o tensor $\tau^{\alpha\beta\gamma}$ como o tensor canônico de spin.

As grandezas canônicas definidas anteriormente possuem as leis de conservação (Hehl et al. 1976)

$$\overset{*}{\nabla}_{\beta} \Sigma_{\alpha}^{\beta} = 2 \Sigma_{\nu}^{\beta} S_{\alpha\beta}^{\nu} + \tau_{\beta\nu}^{\rho} R^{\beta\nu}_{\rho\alpha} \quad (\text{III.19})$$

$$\overset{*}{\nabla}_{\nu} \tau_{\alpha\beta}^{\nu} = \Sigma^{\underline{[\alpha\beta]}}. \quad (\text{III.20})$$

III.3 - Densidade Lagrangeana da Gravitação

Construiremos a densidade Lagrangeana da gravitação para a teoria de Einstein-Cartan em analogia à sua correspondente na relatividade geral, uma vez que na ausência da torção os resultados obtidos devem coincidir com os desta teoria.

Como havíamos comentado anteriormente, o tensor de Ricci é a única contração essencial do tensor de curvatura em U_4 (da mesma forma para a relatividade geral), assim construímos a densidade Lagrangeana da gravitação a partir do escalar de curvatura R . Temos portanto

$$L_g = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} R \equiv \frac{1}{2\kappa} R \quad , \quad (\text{III.21})$$

onde $\kappa = 8\pi c^{-4}G$; G = constante gravitacional de Newton, e $R = \sqrt{-g} R$ é a densidade escalar de curvatura.

A densidade R depende da métrica, de suas derivadas primeiras e segundas, e da torção e suas derivadas primeiras:

$$R = R (g, \partial g, \partial\partial g, S, \partial S) \quad .$$

Portanto, a integral de ação da gravitação fica

$$A_g = \frac{1}{c} \int \frac{1}{2\kappa} R (g, \partial g, \partial\partial g, S, \partial S) d^4x \quad . \quad (\text{III.22})$$

Finalmente, retornamos à ação total definida em (III.3):

$$A = \frac{1}{c} \int \left[L_C(\psi, \partial\psi, g, \partial g, S) + \frac{1}{2\kappa} R (g, \partial g, \partial\partial g, S, \partial S) \right] d^4x \quad . \quad (\text{III.23})$$

Para encontrarmos as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan, fazemos nula a variação da ação total, descrita

em (III.23), com respeito a variações independentes de ψ , g , e S .

III.4 - Equações de Campo

Façamos a variação da ação total (III.23):

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \frac{1}{c} \int \left[\left(\frac{\partial L_c}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L_c}{\partial \psi, \alpha} \delta \psi, \alpha \right) + \left(\frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial L_c}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma}} \delta g_{\alpha\beta, \gamma} \right) + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\partial L_c}{\partial S_{\alpha\beta}^\gamma} \delta S_{\alpha\beta}^\gamma \right) + \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma}} \delta g_{\alpha\beta, \gamma} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma\delta}} \delta g_{\alpha\beta, \gamma\delta} \right) + \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial R}{\partial S_{\alpha\beta}^\gamma} \delta S_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial R}{\partial S_{\alpha\beta}^\gamma, \nu} \delta S_{\alpha\beta}^\gamma, \nu \right) \right] d^4x \\
 &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\delta L_c}{\delta \psi} \delta \psi + \left(\frac{\delta L_c}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} \right) \delta g_{\alpha\beta} + \left(\frac{\delta L_c}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} \right) \delta S_{\alpha\beta}^\gamma \right] d^4x \quad . \quad (III.24)
 \end{aligned}$$

Como a variação da ação total deve ser nula, $\delta A = 0$, e as variações $\delta\psi$, $\delta g_{\alpha\beta}$, e $\delta S_{\alpha\beta}^\gamma$ são independentes, devemos ter nulos os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{\delta L_c}{\delta \psi} = 0 \quad , \\
 (b) \quad & \frac{\delta L_c}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0 \quad , \quad (III.25) \\
 (c) \quad & \frac{\delta L_c}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} + \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\beta}^\gamma} = 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

onde denotamos agora

$$\frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\gamma \left(\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma}} \right) + \partial_\nu \partial_\gamma \left(\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma\nu}} \right) \quad .$$

A equação (III.25a) descreve a dinâmica para os campos de matéria, enquanto que (III.25b e c) são equações independentes, que formarão posteriormente as equações de campo da teoria.

Introduzindo-se os tensores definidos em (III.11) e (III.12) nas equações (III.25 b e c), respectivamente, tem-se

$$(a) \quad \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} = - \frac{\delta L_c}{\delta g_{\alpha\beta}} = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma^{\alpha\beta} ,$$

$$(b) \quad \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\beta}^{\gamma}} = - \frac{\delta L_c}{\delta S_{\alpha\beta}^{\gamma}} = - \sqrt{-g} \mu_{\gamma}^{\beta\alpha} .$$

(III.26)

Fazendo uso das definições (III.13) e (III.16) para os tensores canônicos, podemos expressar (III.26 a) como sendo

$$\begin{aligned} \frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} &= -\kappa \sqrt{-g} \sigma^{\alpha\beta} = -\kappa \sqrt{-g} (\Sigma^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \mu^{\alpha\beta\gamma}) = \\ &= -\kappa \sqrt{-g} \left[\Sigma^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \left(- \frac{1}{2\kappa\sqrt{-g}} g^{\alpha\lambda} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \right) \right] = \\ &= -\kappa \sqrt{-g} \left[\Sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\kappa} \left(\nabla_{\gamma} \frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \right) - \frac{1}{2\kappa} 2S_{\gamma\rho}^{\rho} \left(\frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \right) \right] \\ &= -\kappa \sqrt{-g} \left[\Sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \nabla_{\gamma} \frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} - \frac{1}{2\kappa} \frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} \left(\nabla_{\gamma} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} + 2S_{\gamma\rho}^{\rho} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \right) \right] \\ &= -\kappa \sqrt{-g} \left[\Sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\kappa} \frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \frac{\delta R}{\delta S_{\gamma\beta}^{\lambda}} \right] , \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \frac{\delta R}{\delta S_{\beta\gamma}^{\lambda}} = -\kappa \sqrt{-g} \Sigma^{\alpha\beta} . \quad (III.27)$$

Igualmente, a (III.26 b) nos dá

$$g^{\lambda\gamma} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\beta}^{\gamma}} = -2\kappa \sqrt{-g} \mu^{\gamma\beta\alpha} ,$$

ou seja,

$$-2\kappa \sqrt{-g} (\mu^{\beta\alpha\gamma} - \mu^{\alpha\beta\gamma}) = g^{\lambda\alpha} \frac{\delta R}{\delta S_{\beta\gamma}^{\lambda}} - g^{\lambda\beta} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\gamma}^{\lambda}} ,$$

que escrevendo de forma reduzida fica

$$g^{\lambda|\bar{\alpha}} \frac{\delta R}{\delta S_{\beta|\gamma}^{\lambda}} = -2\kappa \sqrt{-g} \mu^{|\bar{\beta}\bar{\alpha}}|\gamma} ;$$

lembrando a relação (III.15) entre o tensor de spin e o tensor de potencial de spin, $\tau^{\alpha\beta\gamma} = \mu^{|\bar{\beta}\bar{\alpha}}|\gamma}$, a expressão acima toma a forma

$$\frac{1}{2} g^{\lambda|\bar{\alpha}} \frac{\delta R}{\delta S_{\beta|\gamma}^{\lambda}} = -\kappa \sqrt{-g} \tau^{\alpha\beta\gamma} . \quad (\text{III.28})$$

Obtidas as relações (III.27) e (III.28), buscaremos no próximo item obter as variações $\delta R/\delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta R/\delta S_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

III.4.1 - Variação da Densidade Escalar de Curvatura

A densidade escalar de curvatura R é

$$R = \sqrt{-g} R = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} ;$$

usando a definição (II.16) para o tensor de curvatura e em seguida contraindo, obtemos

$$R = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\partial_{\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} - \partial_{\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho} - \Gamma_{\beta\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\rho}) . \quad (\text{III.29})$$

Para conseguirmos uma expressão mais apropriada para (III.29) escrevemos

$$R = \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda) - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \partial_\beta (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda) + \\ + \partial_\beta (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho) \quad ;$$

fazendo uso de $(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})_{;\lambda} = 0$ na relação acima, e rearranjando os termos, R reduz-se a

$$R = \overset{\vee}{R} + 2\partial_\beta (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda) \quad , \quad (III.30)$$

onde

$$\overset{\vee}{R} = 2 \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\lambda\beta}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda + \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda S_{\beta\rho}^\rho) \quad . \quad (III.31)$$

O segundo termo da expressão (III.30), por ser uma divergência, não contribui para a integral de ação da gravitação, podendo assim ser desprezado. Ficamos então apenas com o termo $\overset{\vee}{R}$ que se caracteriza como uma densidade escalar efetiva.

Portanto, para conhecermos a variação de R é bastante considerarmos $\overset{\vee}{R}$, i.e.,

$$\delta R = \delta \overset{\vee}{R} \quad .$$

Ao fazermos as variações da densidade escalar de curvatura, R , em termos da métrica e da torção independentemente, obtemos (Hehl, 1974)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta R}{\delta g_{\alpha\beta}} = -G^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_\gamma (T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}) \quad , \quad (III.32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta R}{\delta S_{\alpha\beta}^{\gamma}} = -2 (T_{\gamma}^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}_{\gamma} + T^{\beta}_{\gamma}{}^{\alpha}) \quad , \quad (III.33)$$

onde $G^{\alpha\beta}$ é o tensor de Einstein em U_4 e $T^{\alpha\beta\gamma}$ é o tensor de torção modificado. Podemos mostrar que as equações (III.32) e (III.33) possuem, espontaneamente, a simetria dos tensores $g_{\alpha\beta}$ e $S_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Se ao invés da torção $S_{\alpha\beta}^{\gamma}$ em (III.22) tivéssemos tomado a contorção $K_{\alpha\beta}^{\gamma}$, a variação da densidade escalar de curvatura R equivalente a (III.33) seria

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta R}{\delta K_{\alpha\beta}^{\gamma}} = -2 T_{\gamma}^{\beta\alpha} \quad . \quad (III.34)$$

Este resultado é facilmente obtido observando que $S_{\alpha\beta}^{\gamma} = -K[\alpha\beta]^{\gamma}$ e utilizando-se de (III.33).

Substituindo-se (III.32) e (III.33) em (III.27) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} G^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \overset{*}{\nabla}_{\gamma} (T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}) + \\ + g^{\alpha\lambda} \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \left[\sqrt{-g} (T_{\lambda}^{\beta\gamma} - T^{\beta\gamma}_{\lambda} + T^{\gamma}_{\lambda}{}^{\beta}) \right] = \kappa \sqrt{-g} \Sigma^{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (III.35)$$

Lembrando a definição da divergência modificada, $\overset{*}{\nabla}_{\gamma} \equiv \nabla_{\gamma} + 2S_{\gamma\rho}^{\rho}$, o lado esquerdo da equação (III.35) reduz-se a $\sqrt{-g} G^{\alpha\beta}$, e portanto

$$G^{\alpha\beta} = \kappa \Sigma^{\alpha\beta} \quad . \quad (III.36)$$

Esta equação é chamada de 1ª equação de campo da teoria de Einstein-Cartan.

Levando (III.33) em (III.28), obtemos

$$g^{\lambda\alpha} \left[-2 \sqrt{-g} (T_{\lambda}^{\beta\gamma} - T^{\beta\gamma}_{\lambda} + T^{\gamma}_{\lambda}{}^{\beta}) \right] - g^{\lambda\beta} \left[-2 \sqrt{-g} (T_{\lambda}^{\alpha\gamma} - T^{\alpha\gamma}_{\lambda} + T^{\gamma}_{\lambda}{}^{\alpha}) \right] = -4\kappa\sqrt{-g} T^{\alpha\beta\gamma} \quad ,$$

ou simplesmente

$$\tau^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\kappa} T^{\alpha\beta\gamma} \quad , \quad (\text{III.37})$$

que é chamada de 2ª equação de campo da teoria de Einstein-Cartan.

De uma maneira não formal podemos resumir as equações de campo como

Tensor de Einstein em $U_4 = \kappa$ (Tensor de energia-momentum),

Tensor de torção modificada = κ (Tensor de spin).

Embora tenhamos obtido uma equação (1ª equação de campo) semelhante à da relatividade geral, devemos nos lembrar que o tensor de Einstein não mais é simétrico, a conexão não é mais o símbolo de Christoffel, e o tensor de energia-momentum agora depende da torção.

Já a segunda equação de campo apresenta-se como algo totalmente novo, sem análogo na relatividade geral. Esta equação propõe a existência de uma interação que vincula spin à geometria.

É fácil vermos que a equação (III.37) tem um caráter puramente algébrico. Este fato nos permite dizer que spin e torção são sinônimos, de certa forma. Por outro lado, o caráter algébrico da equação não permite que a torção se propague — talvez uma das perdas da teoria de Einstein-Cartan — restringindo assim seus efeitos às regiões do espaço-tempo interiores às distribuições de matéria. Fora das distribuições de matéria a contribuição do spin é sentida apenas via métrica, como veremos a seguir, através da equação de campo combinada.

Devido à equação (III.37), podemos substituir torção por spin, eliminando definitivamente a torção de nossas equações. Desta forma, é possível separar o tensor de Einstein definido em

U_4 numa parte Riemanniana e noutra que depende somente do tensor de spin. Para isso tomemos a relação (II.16) e calculemos o tensor de Ricci usando a conexão (II.12). Em seguida, lembrando da definição do tensor de torção modificada, com algum algebrismo obtêm-se

$$G^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\{ \}) + \overset{*}{\nabla}_{\gamma} (T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}) + 4T^{\alpha\lambda} \underset{[\gamma}{\tau} T^{\beta\gamma}_{\lambda]} + 2T^{\alpha\lambda\gamma} T^{\beta}_{\lambda\gamma} - T^{\lambda\gamma\alpha} T_{\lambda\gamma}^{\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (4T^{\lambda\rho\gamma} \underset{[\gamma}{\tau} T^{\rho\gamma}_{\lambda]} + T^{\rho\lambda\gamma} T_{\rho\lambda\gamma}).$$

Finalmente, usando as relações (III.15), (III.16) e (III.36) chegamos ao elegante resultado

$$G^{\alpha\beta}(\{ \}) = \kappa \overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta}, \quad (III.38)$$

onde

$$\overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} + \kappa \left[-4\tau^{\alpha\lambda} \underset{[\rho}{\tau} T^{\beta\rho}_{\lambda]} - 2\tau^{\alpha\lambda\rho} \tau_{\lambda\rho}^{\beta} + \tau^{\lambda\rho\alpha} \tau_{\lambda\rho}^{\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (4\tau^{\lambda\rho} \underset{[\nu}{\tau} T^{\lambda\nu}_{\rho]} + \tau^{\lambda\rho\nu} \tau_{\lambda\rho\nu}) \right]. \quad (III.39)$$

A equação (III.38), fusão da 1^a equação de campo com a 2^a, é comumente chamada de equação de campo combinada, e o tensor $\overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta}$ de tensor de energia-momentum combinado.

É importante notar que $\overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta}$ é simétrico e satisfaz a lei de conservação $\overset{\{ \}}{\nabla}_{\beta} \overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta} = 0$. A equação (III.38) apresenta-se como uma extensão a equação de Einstein da relatividade geral, reduzindo-se a esta quando anulamos em (III.39) o tensor de spin $\tau_{\alpha\beta\gamma}$.

Apesar de na equação (III.39) termos o spin como fonte

de gravitação, a sua contribuição é em geral muito pequena quando comparada aos efeitos provocados pela matéria. Isto decorre, em parte, do fato de o termo de spin ser proporcional à constante gravitacional ($\kappa \sim 10^{-48}$ cgs) que é muito pequeno, e em parte devido ao spin ter um caráter dipolar, i.e., spins se somam vetorialmente.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO EXATA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-CARTAN

Nos capítulos precedentes apresentamos um esboço da teoria gravitacional de Einstein-Cartan. No presente capítulo trataremos de obter a solução das equações de campo para um problema específico: uma poeira dotada de spin com uma distribuição esfericamente simétrica e em equilíbrio estático.

É sabido que a contribuição gravitacional causada pelo conteúdo material da poeira é muito superior à contribuição dada pelo spin, geralmente desordenado, dessa mesma poeira. No caso dos spins estarem alinhados, sua contribuição gravitacional pode crescer extraordinariamente, podendo mesmo ser comparável à da matéria ordinária, especialmente nas regiões onde a densidade de matéria for extremamente alta (ordem de 10^{48} g/cm³ ou maior)⁽¹³⁾. Conjectura-se que torção possa produzir efeitos observáveis no interior de certos tipos de objetos astronômicos, como estrelas de neutrons, as quais possuem um forte campo magnético acompanhado de uma considerável densidade de spin.

Nesta tese buscamos conhecer os efeitos gravitacionais associados ao spin; assim, é conveniente nos desvencilharmos, tanto quanto possível, da gravitação associada a outras fontes que não o spin. Isso nos leva a idealizar um fluido bastan-

te apropriado para nossos fins: Imaginemos uma poeira dotada de spin intrínseco, na qual a gravitação associada ao spin sobrepujasse em muito a gravitação associada ao conteúdo material.

Com o intuito de se obter uma solução exata das equações diferenciais, ousamos ainda uma pequena extrapolação matemática que simplificou em muito o sistema de equações: Consideramos nula a contribuição gravitacional proveniente do tensor métrico de energia-momentum $\sigma^{\alpha\beta}$.

IV.1 - Métrica e Torção com Simetria Esférica

Considerando a métrica $g_{\alpha\beta}$ estática e com simetria esférica, o elemento de linha ds mais geral, escrito nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) , assume a forma ⁽¹⁾

$$ds^2 = e^{2\eta} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{IV.1})$$

onde $\eta = \eta(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$.

Nas regiões muito afastadas da distribuição de poeira, devem ser válidos os resultados da relatividade especial, i.e., o espaço deve ser plano. Neste caso a métrica $g_{\alpha\beta}$ reduz-se à métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, cujo elemento de linha em coordenadas esféricas é

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{IV.2})$$

Para a torção, tomaremos como não-nulas unicamente as componentes

$$S_{23}^0 = -S_{32}^0 = s(r) \text{sen} \theta. \quad (\text{IV.3})$$

Temos, portanto, 3 funções a serem determinadas através da equação de campo combinada, que são $\eta(r)$, $\lambda(r)$ e $s(r)$.

IV.2 - Tensor de Einstein da Relatividade Geral

Nesta seção estamos interessados em conhecer o lado esquerdo da equação de campo combinada (III.38). Mais especificamente, as componentes não-nulas do tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}(\{ \}) = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$, da relatividade geral.

Apesar de não termos feito um desenvolvimento da teoria de Einstein-Cartan através do cálculo com formas diferenciais, usaremos nesta seção este formalismo como artifício para simplificar os cálculos na procura das componentes não-nulas do $G_{\alpha\beta}(\{ \})$. (Um estudo do cálculo com formas diferenciais pode ser visto em Soares, 1980.) Evidentemente os mesmos resultados seriam obtidos com o uso do cálculo tensorial.

Escolhendo uma base de tetradas adequada, $e^{(A)}_{\alpha}$ [os índices latinos maiúsculos rotulam os vetores da base: $A=0,1,2,3$], podemos expressar o elemento de linha ds como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^{(A)} \theta^{(B)} \quad , \quad (IV.4)$$

onde η_{AB} é a métrica do espaço plano com diagonal $(+1,-1,-1,-1)$ e os $\theta^{(A)}$ são as 1-formas descritas por

$$\theta^{(A)} = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha} \quad . \quad (IV.5)$$

Por comparação direta com (IV.1), podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \theta^{(0)} &= e^{(0)}_0 dx^0 = e^{\eta} dt \quad , \\
 \theta^{(1)} &= e^{(1)}_1 dx^1 = e^{\lambda} dr \quad , \\
 \theta^{(2)} &= e^{(2)}_2 dx^2 = r d\theta \quad , \\
 \theta^{(3)} &= e^{(3)}_3 dx^3 = r \operatorname{sen}\theta d\phi \quad .
 \end{aligned}
 \tag{IV.6}$$

Derivando exteriormente as 1-formas (IV.6), tem-se

$$\begin{aligned}
 d\theta^{(0)} &= -\eta' e^{-\lambda} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} \quad , \\
 d\theta^{(1)} &= 0 \quad , \\
 d\theta^{(2)} &= \frac{1}{r} e^{-\lambda} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} \quad , \\
 d\theta^{(3)} &= \frac{1}{r} e^{-\lambda} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{1}{r} \cotg\theta \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{IV.7}$$

onde a linha superescrita denota d/dr .

Os coeficientes de rotação de Ricci são determinados por

$$\gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) \quad ,$$

onde os C_{ABC} são obtidos por comparação de (IV.7) com a expressão para a derivada exterior de $\theta^{(A)}$,

$$d\theta^{(A)} = \frac{1}{2} C_{ABC} \theta^{(B)} \wedge \theta^{(C)} \quad .$$

Assim, os únicos coeficientes não-nulos são

$$\begin{aligned}
 \gamma^0_{10} &= \gamma^1_{00} = \eta' e^{-\lambda} \quad , \\
 \gamma^1_{22} &= -\gamma^2_{12} = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \quad , \\
 \gamma^1_{33} &= -\gamma^3_{13} = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \quad , \\
 \gamma^2_{33} &= -\gamma^3_{23} = -\frac{1}{r} \cotg\theta \quad .
 \end{aligned}
 \tag{IV.8}$$

As 1-formas de rotação $\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^{(C)}$ não-nulas são

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \omega^1_0 = \eta' e^{-\lambda} \theta^{(0)} \quad , \\ \omega^1_2 &= -\omega^2_1 = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \theta^{(2)} \quad , \\ \omega^1_3 &= -\omega^3_1 = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \theta^{(2)} \quad , \\ \omega^2_3 &= -\omega^3_2 = -\frac{1}{r} \cotg\theta \theta^{(3)} \quad . \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Derivando-as exteriormente, temos

$$\begin{aligned} d\omega^0_1 &= -\left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} \quad , \\ d\omega^1_2 &= \frac{\lambda'}{r} e^{-2\lambda} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} \quad , \\ d\omega^1_3 &= \frac{\lambda'}{r} e^{-2\lambda} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} - \frac{1}{r^2} \cotg\theta e^{-\lambda} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} \quad , \\ d\omega^2_3 &= \frac{1}{r^2} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} \quad . \end{aligned} \tag{IV.10}$$

As 2-formas de curvatura são definidas como

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^{(C)} \wedge \theta^{(D)} \quad .$$

De (IV.9) e (IV.10) podemos calcular as componentes das 2-formas de curvatura, que por sua vez nos levam por intermédio de uma comparação direta às seguintes componentes não-nulas do tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= -\left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} \quad , \\ R^0_{202} &= -\frac{1}{r} \eta' e^{-2\lambda} \quad , \\ R^0_{303} &= -\frac{1}{r} \eta' e^{-2\lambda} \quad , \end{aligned} \tag{IV.11}$$



$$\begin{aligned} R^1_{212} &= \frac{\lambda'}{r} e^{-2\lambda} , \\ R^1_{313} &= \frac{\lambda'}{r} e^{-2\lambda} , \\ R^2_{323} &= \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\lambda}) . \end{aligned} \quad (IV.11)$$

O tensor de Ricci, $R_{BD} = \eta^{AC} R_{ABCD}$, possui as componentes não-nulas

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + \frac{2}{r} \eta' e^{-2\lambda} , \\ R_{11} &= - \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + \frac{2}{r} \lambda' e^{-2\lambda} , \\ R_{22} &= R_{33} = \frac{1}{r} (\lambda' - \eta' - \frac{1}{r}) e^{-2\eta} + \frac{1}{r^2} , \end{aligned} \quad (IV.12)$$

e o escalar de curvatura , $R = \eta^{AB} R_{AB}$, é dado por

$$R = 2 \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + \frac{4}{r} (\eta' - \lambda') e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} e^{-2\lambda} - \frac{2}{r^2} .$$

Finalmente, obtemos as componentes não-nulas de $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} R$:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{2}{r} \lambda' e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} , \\ G_{11} &= \frac{2}{r} \eta' e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} , \\ G_{22} &= G_{33} = \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + \frac{1}{r} (\eta' - \lambda') e^{-2\lambda} . \end{aligned} \quad (IV.13)$$

As componentes do tensor de Einstein em (IV.13) foram calculadas na base de tetradas , porém é nosso interesse tê-las na base de coordenadas, i.ê., na base $\partial/\partial x^\alpha$. Para isso é bastante fazermos a transformação

$$G_{\alpha\beta} = e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} G_{AB} ,$$

e portanto suas componentes não-nulas são

$$\begin{aligned} G_{00} &= e^{2\eta} \left(\frac{2}{r} \lambda' e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} \right) , \\ G_{11} &= e^{2\lambda} \left(\frac{2}{r} \eta' e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \right) , \\ G_{22} &= r^2 \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + r(\eta' - \lambda') e^{-2\lambda} , \\ G_{33} &= \text{sen}^2 \theta G_{22} . \end{aligned} \tag{IV.14}$$

IV.3 - Equações de Campo; Solução

O tensor de torção modificada definido em (II.5) possui em nosso problema as componentes não-nulas

$$\tau_{23}^0 = -\tau_{32}^0 = s(r) \text{sen} \theta ,$$

que levamos em (III.37); resultam para o tensor de spin as componentes

$$\tau_{23}^0 = -\tau_{32}^0 = \frac{1}{\kappa} s(r) \text{sen} \theta , \tag{IV.15}$$

indicando um alinhamento radial da densidade de spin.

Podemos agora calcular o lado direito da equação de campo combinada (III.38) levando em conta a hipótese de trabalho formalizada anteriormente ($\sigma^{\alpha\beta} = 0$). Neste caso o tensor de energia-momentum combinado fica

$$\sigma^{\alpha\beta} = \kappa \left[-4 \tau^{\alpha\lambda} \tau^{\beta\rho} \tau_{\lambda\rho} - 2 \tau^{\alpha\lambda\rho} \tau_{\lambda\rho}^{\beta} + \tau^{\lambda\rho\alpha} \tau_{\lambda\rho}^{\beta} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (4\tau_{\lambda}^{\rho} \underline{v}^{\lambda\nu} \underline{\rho}] + \tau^{\lambda\rho\nu} \tau_{\lambda\rho\nu}) \underline{]} ,$$

e suas componentes não-nulas são

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{00} &= \frac{3}{\kappa} \frac{s^2(r)}{r^4} , \\ \tilde{\sigma}^{11} &= -\frac{1}{\kappa} \frac{s^2(r)}{r^4} e^{2(\eta-\lambda)} , \\ \tilde{\sigma}^{22} &= \frac{1}{\kappa} \frac{s^2(r)}{r^6} e^{2\eta} , \\ \tilde{\sigma}^{33} &= \frac{1}{\sin^2\theta} \tilde{\sigma}^{22} . \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Igualando-se as componentes escritas em (IV.14) às respectivas componentes em (IV.16) chegamos por fim às equações de movimento do nosso problema:

$$\begin{aligned} (a) \quad 2r^3 \lambda' e^{-2\lambda} - r^2 e^{-2\lambda} + r^2 - 3s^2(r) e^{2\eta} &= 0 , \\ (b) \quad 2r^2 \eta' e^{-2\lambda} + r^2 e^{-2\lambda} - r^2 + s^2(r) e^{2\eta} &= 0 , \\ (c) \quad \left[(\eta' e^{-\lambda})' + \eta'^2 e^{-\lambda} \right] e^{-\lambda} + \frac{1}{r} (\eta' - \lambda') e^{-2\lambda} - \frac{s^2(r)}{r^4} e^{2\eta} &= 0 . \end{aligned} \quad (IV.17)$$

Trata-se de um sistema de 3 equações a 3 funções incógnitas (η, λ, s) . Fazendo uso das identidades de Bianchi, $0 \equiv \equiv G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \kappa \tilde{\sigma}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$, concluímos depois de numerosas simplificações que

$$s(r) = \text{constante} \equiv \pm s , \quad \text{com } s \geq 0 . \quad (IV.18)$$

Considerando o resultado acima e somando-se as equações (IV.17 a e b), concluímos facilmente que

$$e^{-2(\eta+\lambda)} = \frac{s^2}{r^2} + C , \quad (IV.19)$$

onde C é uma constante de integração. Para determinarmos o valor dessa constante fazemos uso das condições assintóticas

$$e^{2\eta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad ,$$

$$e^{2\lambda} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad ,$$

que representam a nulidade do campo gravitacional para as regiões do espaço muito afastadas da fonte, i.e., condições de espaço plano. Vemos, imediatamente, de (IV.19) que $C = 1$.

Isolando-se $e^{-2\lambda}$ em (IV.19) e em seguida substituindo-se em (IV.17 b), após vários cálculos e integrações, obtêm-se

$$e^{2\eta} = 1 + \frac{2s^2}{r^2} - \frac{2m}{r^2} \sqrt{r^2 + s^2} \quad ,$$

(IV.20)

$$e^{2\lambda} = \frac{e^{-2\eta}}{1 + s^2/r^2} \quad ,$$

onde m é uma constante de integração que representa a massa do sistema, como veremos na próxima seção.

Os resultados encontrados em (IV.18) e (IV.20) representam a solução exata das equações de campo do problema.

IV.4 - Análise Qualitativa e Quantitativa do Campo Gravitacional

O elemento infinitesimal de linha que descreve o comprimento entre dois eventos x^α e $x^\alpha + dx^\alpha$ de nosso espaço-tempo é portanto

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2s^2}{r^2} - \frac{2m}{r^2} \sqrt{r^2 + s^2} \right) dt^2 -$$

$$\frac{r^2 dr^2}{(1 + s^2/r^2)(r^2 + 2s^2 - 2m \sqrt{r^2 + s^2})} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad . \quad (\text{IV.21})$$

Notamos que na ausência do spin ($s = 0$) este elemento de linha reduz-se a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (\text{IV.22})$$

que é a solução de Schwarzschild.

Para as regiões muito afastadas da fonte ($r \rightarrow \infty$) devemos ter um caráter Newtoniano para a gravitação de tal forma que $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$, onde $\Phi = -Gm/r$ é o potencial gravitacional Newtoniano. Logo, no sistema de unidades em que $c = G = 1$, podemos interpretar a constante de integração m de (IV.21) como a massa da distribuição de poeira.

Quanto ao parâmetro da torção, s , notamos que o seu aparecimento na métrica se dá sempre da forma quadrática (s^2); isto indica serem idênticas as métricas associadas a torções caracterizadas por parâmetros s e $-s$.

IV.4.1 - Pontos de Equilíbrio Estático

Os pontos r_0 de equilíbrio estático para uma partícula-teste sem spin imersa no campo gravitacional correspondem aos pontos de mínimo de

$$g_{00}(r) = 1 + \frac{2s^2}{r^2} - \frac{2m}{r^2} \sqrt{r^2 + s^2} \quad ; \quad (\text{IV.23})$$

assim, calculando dg_{00}/dr e igualando a zero obtemos a equação bi-quadrada

$$r^4 + 4s^2 \left(1 - \frac{s^2}{m^2}\right)r^2 + 4s^4 \left(1 - \frac{s^2}{m^2}\right) = 0, \quad (\text{IV.24})$$

cuja única solução fisicamente aceitável é

$$r_0 = s \left(\frac{s^2}{m^2} - 1\right)^{1/4} \left[\left(\frac{s}{m} + 1\right)^{1/2} + \left(\frac{s}{m} - 1\right)^{1/2} \right] \quad (\text{IV.25})$$

com $s/m \geq 1$. Levando (IV.25) em (IV.23) obtemos

$$g_{00}(r_0) = \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{IV.26})$$

Na Figura 1 apresentamos o gráfico do potencial gravitacional $\eta(r) = \frac{1}{2} \ln g_{00}(r)$ para diversos valores de s/m ($0 \leq s =$ parâmetro da torção, $m =$ massa). Notamos que para $r \rightarrow \infty$ se tem o comportamento Newtoniano $\eta(r) \rightarrow -m/r$, para todos os valores de s/m . Para $s = 0$ se tem $\eta \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 2m$, correspondendo ao raio de Schwarzschild. Para s crescendo de 0 a m , a localização radial da assíntota ($\eta \rightarrow -\infty$) se desloca gradualmente de $r = 2m$ até $r = 0$. (Este deslocamento da assíntota será melhor descrito na Figura 2.) Para os valores de s maiores que m há um poço finito de potencial, com mínimo de valor $\eta(r_0) = \frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right)$. [A localização radial r_0 desse mínimo será apresentada na Figura 3.] Notamos que $\eta(r) \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow 0$ para todos os valores de $s > m$.

A Figura 2 mostra os raios das superfícies de infinito deslocamento para o vermelho ($g_{00} = 0$), quando $s/m < 1$. Analogamente às soluções de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, essas superfícies coincidem como os horizontes de eventos ($g_{11} = -\infty$). Para $s = 0$ (solução de Schwarzschild) encontramos a superfície

em $r = 2m$. Para os valores crescentes de s o raio da superfície diminui, tendendo a zero quando $s \rightarrow m$.

A Figura 3 nos mostra a localização radial r_0 de uma partícula sem spin, em equilíbrio estático, para valores de $s/m > 1$. Essa localização é dada pelo mínimo do potencial gravitacional $\eta(r)$ para os diferentes valores de $s > m$. (Comparar com a Figura 1.) Notamos uma parábola de 4ª ordem $(r_0/m)^4 = 8(s/m - 1)$ quando $s/m \rightarrow 1$, e uma parábola de 2ª ordem $(r_0/m) = 2s^2/m^2$ quando $s/m \rightarrow \infty$, com ponto de inflexão em $s/m=1.255\dots$

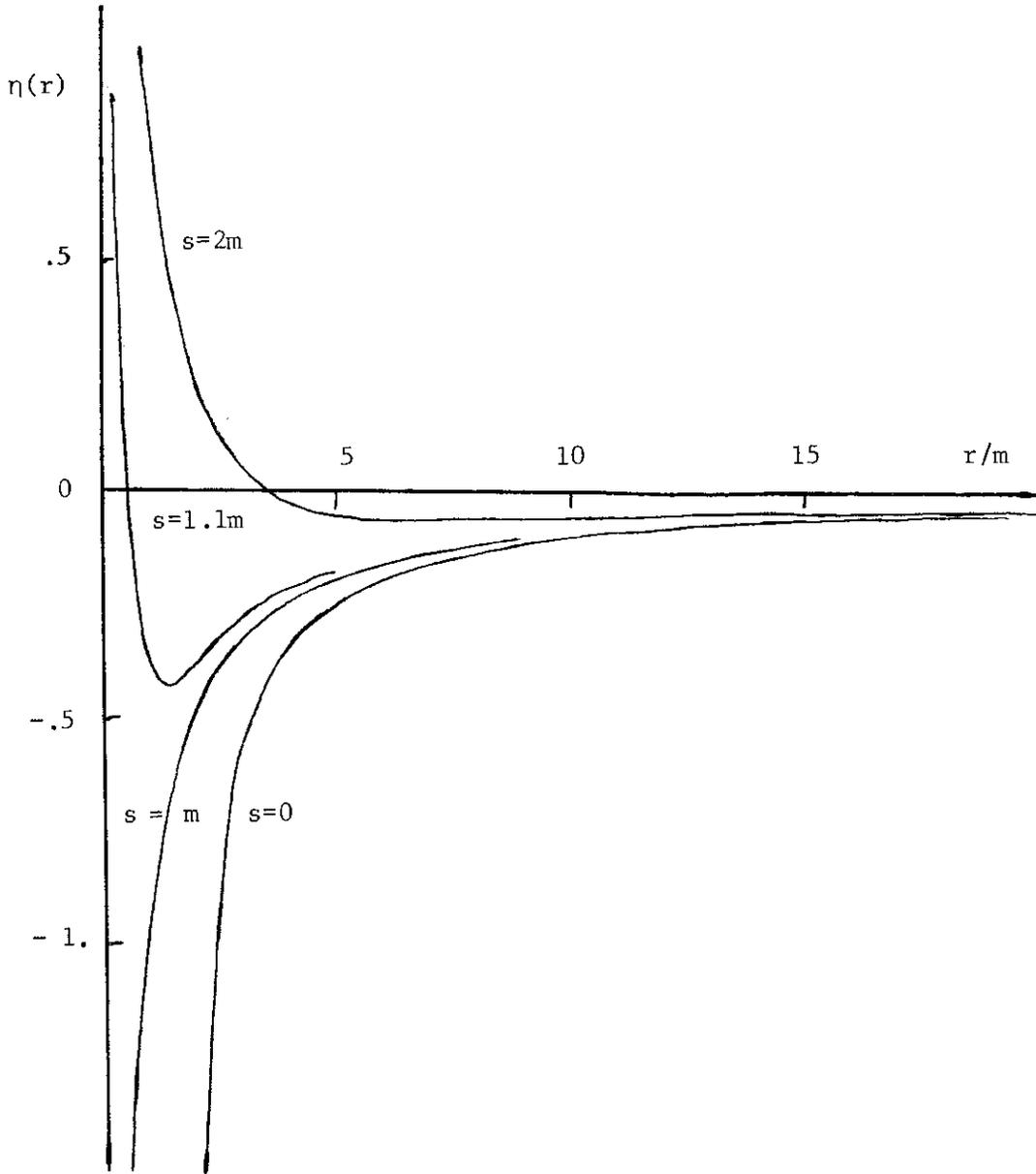


Figura 1 - Potencial gravitacional $\eta(r)$

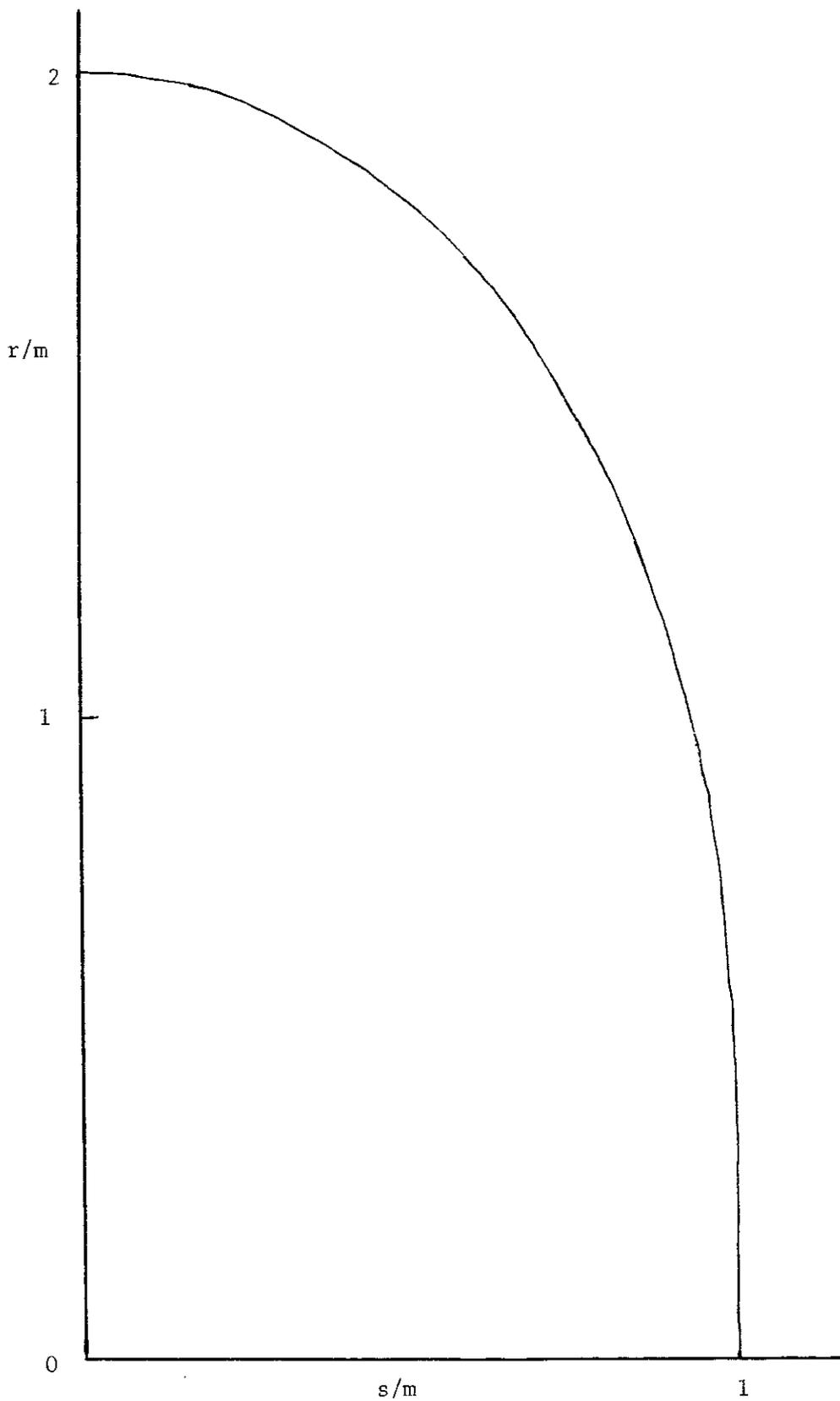


Figura 2 - Horizonte de eventos

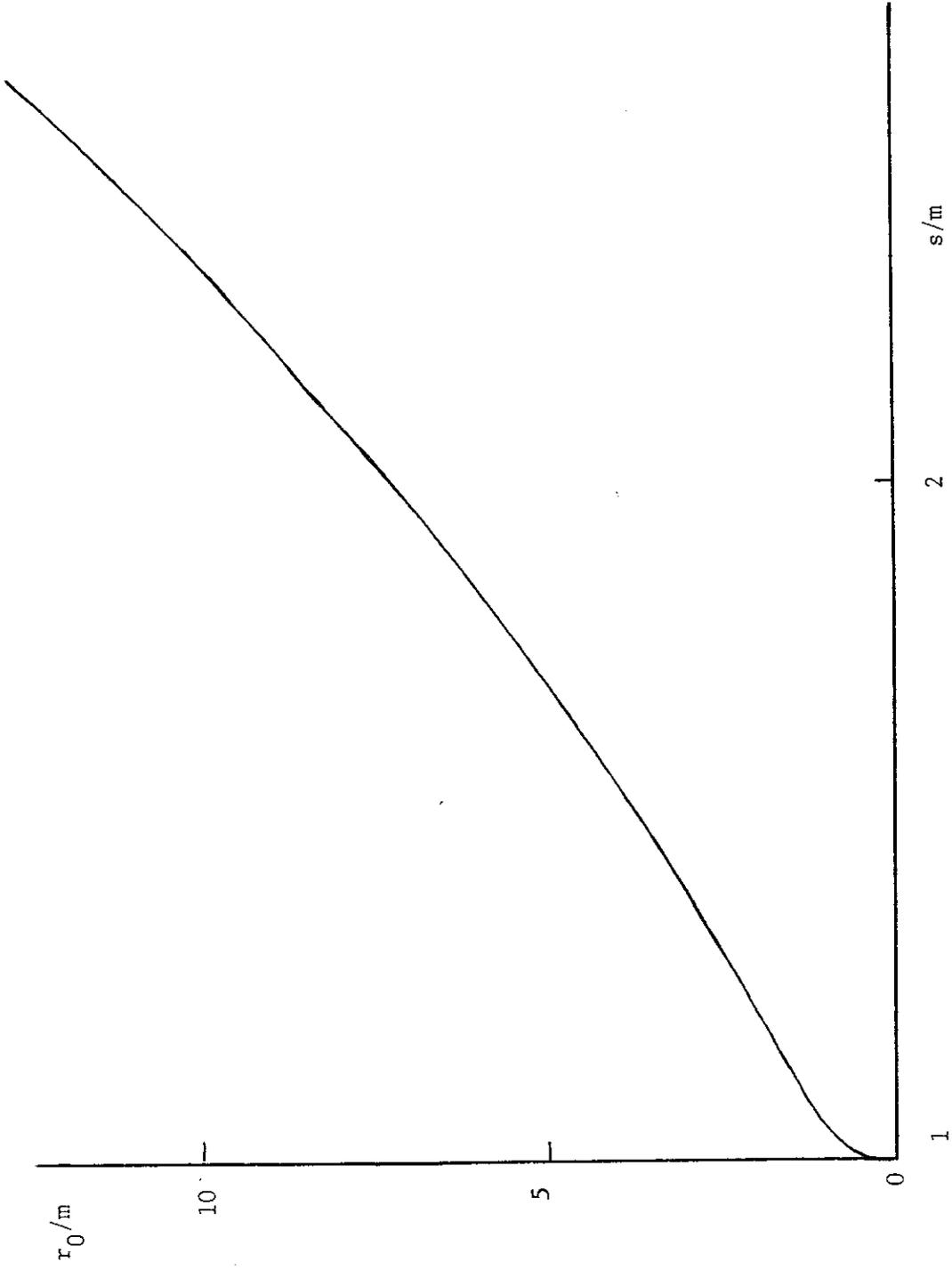


Figura 3 - Raio de equilíbrio estático

CAPÍTULO V

EXTREMAS

Neste capítulo estamos interessados em conhecer o comportamento de partículas-teste com spin nulo, sujeitas ao campo gravitacional. Tais partículas obedecem a equação das extremas (Hehl et al., 1976)

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\alpha\beta\}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad , \quad ds^2 > 0 \quad , \quad (V.1)$$

onde $\{\alpha\beta\}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\beta,\alpha} + g_{\lambda\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\lambda})$ é o símbolo de Christoffel. Semelhantemente, fótons em U_4 seguem extremas nulas (Hehl et al., 1974).

Tomando a métrica $g_{\mu\nu}$ descrita em (IV.1), os únicos símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\begin{aligned} \{01\}^0 &= \eta' & , & \quad \{00\}^1 = \eta' e^{2(\eta-\lambda)} & , & \quad \{11\}^1 = \lambda' & , \\ \{22\}^1 &= -r e^{-2\lambda} & , & \quad \{33\}^1 = -r \sin^2\theta e^{-2\lambda} & , & \quad \{21\}^2 = 1/r & , \\ \{33\}^2 &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta & , & \quad \{31\}^3 = 1/r & , & \quad \{23\}^3 = \cot\theta & , \end{aligned} \quad (V.2)$$

onde a linha superescrita indica d/dr . Assim, as equações para as extremas são

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \ddot{t} + 2\eta' \dot{t}\dot{r} = 0 \quad , \\
 (b) \quad & \ddot{r} + \eta' e^{2(\eta-\lambda)} \dot{t}^2 + \lambda' \dot{r}^2 - re^{-2\lambda} \dot{\theta}^2 - r\text{sen}^2\theta e^{-2\lambda} \dot{\phi}^2 = 0 \quad , \\
 (c) \quad & \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{r} \text{sen}2\theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad , \\
 (d) \quad & \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\phi} + 2 \cot\theta \dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \quad ,
 \end{aligned} \tag{V.3}$$

onde o ponto superescrito indica d/ds .

As equações (V.3 a e d) são facilmente integradas,

$$\dot{t} = \alpha e^{-2\eta} \quad , \tag{V.4}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{r^2 \text{sen}^2\theta} \quad , \tag{V.5}$$

onde α e β são constantes de integração. Não consideraremos valores negativos de α , que representariam uma escolha imprópria na direção do tempo.

Para posterior referência, lembremos que a primeira integral do movimento tipo tempo, $V_\mu V^\mu = 1$, se escreve

$$e^{2\eta} \dot{t}^2 - e^{2\lambda} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \text{sen}^2\theta \dot{\phi}^2 = 1 \quad , \tag{V.6}$$

onde $V^\mu \equiv dx^\mu/ds$.

Neste trabalho, consideraremos a definição de velocidade encontrada em Horedti (1974)

$$V^0 V_0 = \frac{1}{1 - v^2(r)} \quad , \tag{V.7}$$

onde $v(r)$ é a velocidade da partícula. Calculando $V_0 V^0$ e substituindo em (V.7) encontramos a expressão

$$v^2(r) = 1 - \frac{e^{2\eta(r)}}{\alpha^2} . \quad (V.8)$$

Vemos que, para $r \rightarrow \infty$, $v^2(\infty) = 1 - 1/\alpha^2$ e portanto se $\alpha > 1$ a partícula tem velocidade suficiente para tornar-se livre; e se $\alpha < 1$ a partícula não tem velocidade de escape, e permanece presa ao campo gravitacional.

V.1 - Extremas Equatoriais

Sem perda de generalidade podemos estudar as trajetórias de partículas-teste sem spin considerando o movimento no plano do equador, i.e., tomamos para o ângulo polar θ o valor constante $\pi/2$. Neste caso a equação (V.3 b) reduz-se a

$$\ddot{r} + \eta' e^{2(\eta-\lambda)} \dot{t}^2 + \lambda' \dot{r}^2 - r e^{-2\lambda} \dot{\phi}^2 = 0 , \quad (V.9)$$

ou ainda

$$\ddot{r} = -\eta' e^{2\gamma} \alpha^2 + (\eta' + \gamma') \dot{r}^2 + e^{2\eta+2\gamma} \beta^2 / r^3 , \quad (V.10)$$

onde para obtenção desta última fizemos uso de (V.4), (V.5) e chamamos $e^{2\gamma} = 1 + s^2/r^2$.

Substituindo em (V.10) as expressões dos termos η' , γ' , $e^{2\eta}$, $e^{2\gamma}$, após alguns algebrismos obtemos

$$\ddot{r} = f(r)\alpha^2 + g(r)\dot{r}^2 + h(r) \beta^2 / r^3 , \quad (V.11)$$

onde

$$f(r) = \frac{2s^2(r^2+s^2) - m(r^2+2s^2)\sqrt{r^2+s^2}}{r^3(r^2+2s^2 - 2m\sqrt{r^2+s^2})} ,$$

$$g(r) = \frac{m(r^2 - 4s^2) \sqrt{r^2 + s^2} - s^2(3r^2 + 4s^2)}{r(r^2 + s^2)(r^2 + 2s^2 - 2m \sqrt{r^2 + s^2})}$$

$$h(r) = \frac{1}{r^4} (r^2 + s^2)(r^2 + 2s^2 - 2m \sqrt{r^2 + s^2}) .$$

Podemos ver facilmente que (V.10) reduz-se à expressão da aceleração \ddot{r} de Schwarzschild quando $s = 0$:

$$\ddot{r} = - \frac{m}{r^2} \frac{1}{1-2m/r} \alpha^2 + \frac{m}{r^2} \frac{1}{1-2m/r} \dot{r}^2 + (1-2m/r) \frac{\beta^2}{r^3} . \quad (V.12)$$

Investiguemos agora os efeitos gravitacionais associados à torção. Para isso, vamos comparar a aceleração \ddot{r} sentida pela partícula-teste sem spin na geometria espaço-temporal associada a valores não nulos de m e s , (V.10), com a aceleração sentida na geometria com o mesmo valor de m porém com $s = 0$, (V.12). A comparação será feita tomando cada termo de (V.11), individualmente.

Confrontemos inicialmente as contribuições provenientes da parcela $f(r)$. Esta parcela corresponde à gravitação que atua sobre uma partícula em repouso ($\dot{r} = 0$, $\beta = 0$). Na Figura 4 apresentamos os gráficos de $mf(r)$ contra r/m para diversos valores de s/m ; notamos que, para todos os valores de r/m , as curvas com $s/m > 0$ estão posicionadas sempre acima da curva com $s = 0$ (solução de Schwarzschild). Assim sendo, concluímos que a gravitação associada à torção age sobre partículas paradas sempre no sentido de enfraquecer a atração estática Schwarzschildiana, tanto à longa como à curta distância. Ademais, à curta distância os efeitos (estáticos) repulsivos da torção às vezes superam os efeitos (estáticos) atrativos de Schwarzschild daí resul-

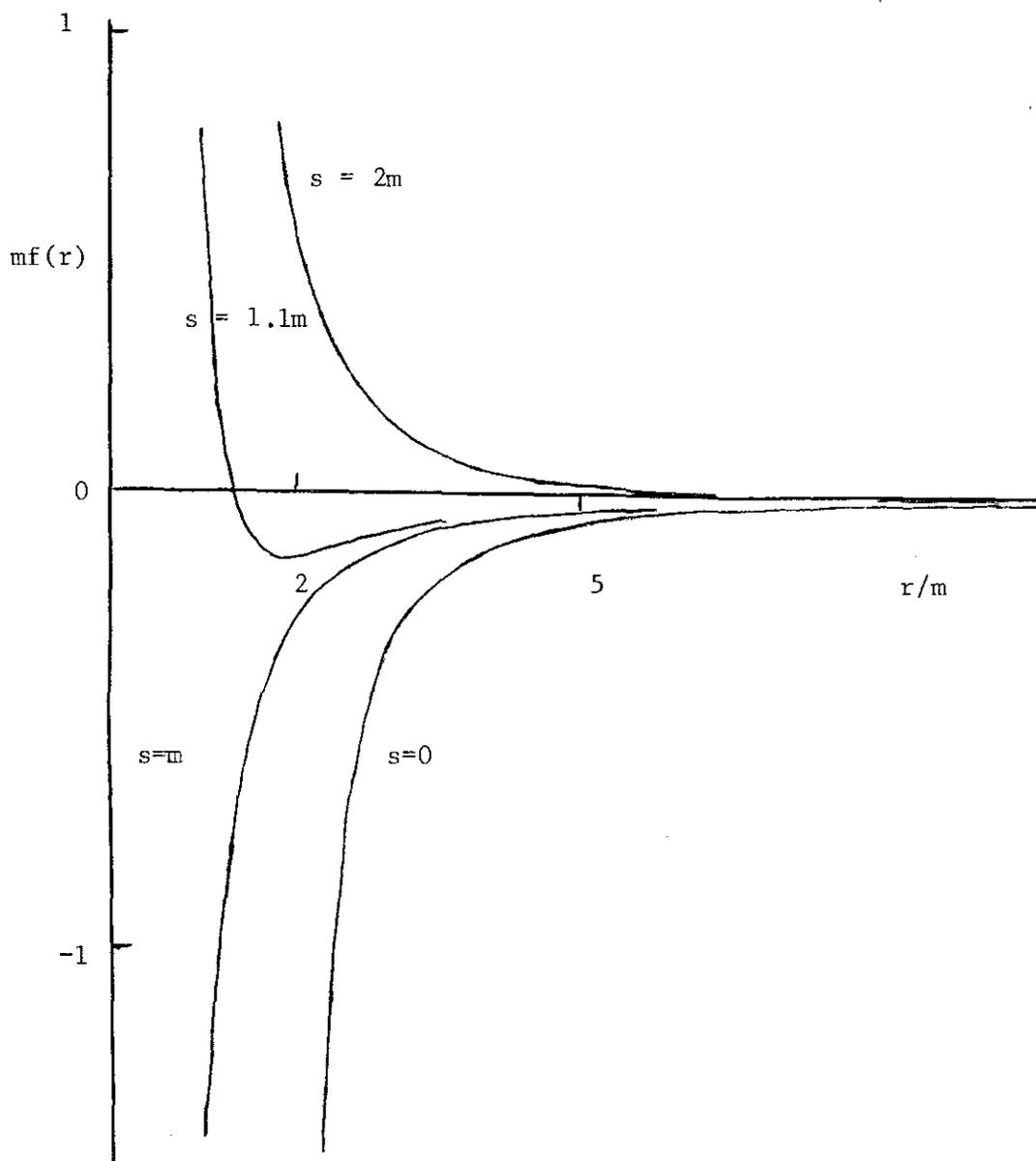


Figura 4 - Termo estático de aceleração radial.

tando um efeito total (estático) repulsivo sobre a partícula-teste.

A seguir, confrontemos as contribuições trazidas pelo termo $g(r)$, contribuições essas associadas à componente radial \dot{r} (quadrada) da velocidade da partícula, e sem análogo Newtoniano. Apresentamos na Figura 5 os gráficos do coeficiente cinético radial $mg(r)$ contra r/m para diversos valores de s/m . Vemos que, para todos os valores de r/m , as curvas com $s/m > 0$ se posicionam sempre abaixo da curva com $s = 0$ (sol. de Schwarzschild); isto significa que a gravitação associada à torção sempre atua no sentido de enfraquecer a repulsão associada ao movimento radial da partícula-teste. Notamos ainda que para $s/m > 1$ aquela repulsão Schwarzschildiana se converte em atração quando a partícula-teste se aproxima suficientemente do centro da simetria.

Finalizando, comparemos as contribuições cinéticas azimutais $h(r) \beta^2/r^3$. Na mecânica Newtoniana essa contribuição vale β^2/r^3 , e é conhecida como repulsão centrífuga. Na Figura 6 apresentamos os gráficos do coeficiente azimutal $h(r)$ contra r/m para diferentes valores de s/m . Notamos que, para todos os valores de r/m , as curvas com $s \neq 0$ se posicionam sempre acima daquela com $s = 0$ (sol. de Schwarzschild); isto indica que a presença da torção induziu um reforço à atuação repulsiva do coeficiente cinético azimutal do campo gravitacional de Schwarzschild.

Desta forma, não podemos afirmar que para uma partícula em movimento a torção atue definitivamente no sentido de reforçar ou enfraquecer o comportamento previsto pela relatividade geral. Só podemos fazer alguma afirmativa se conhecermos o ângulo que a trajetória da partícula faz com o raio vetor.

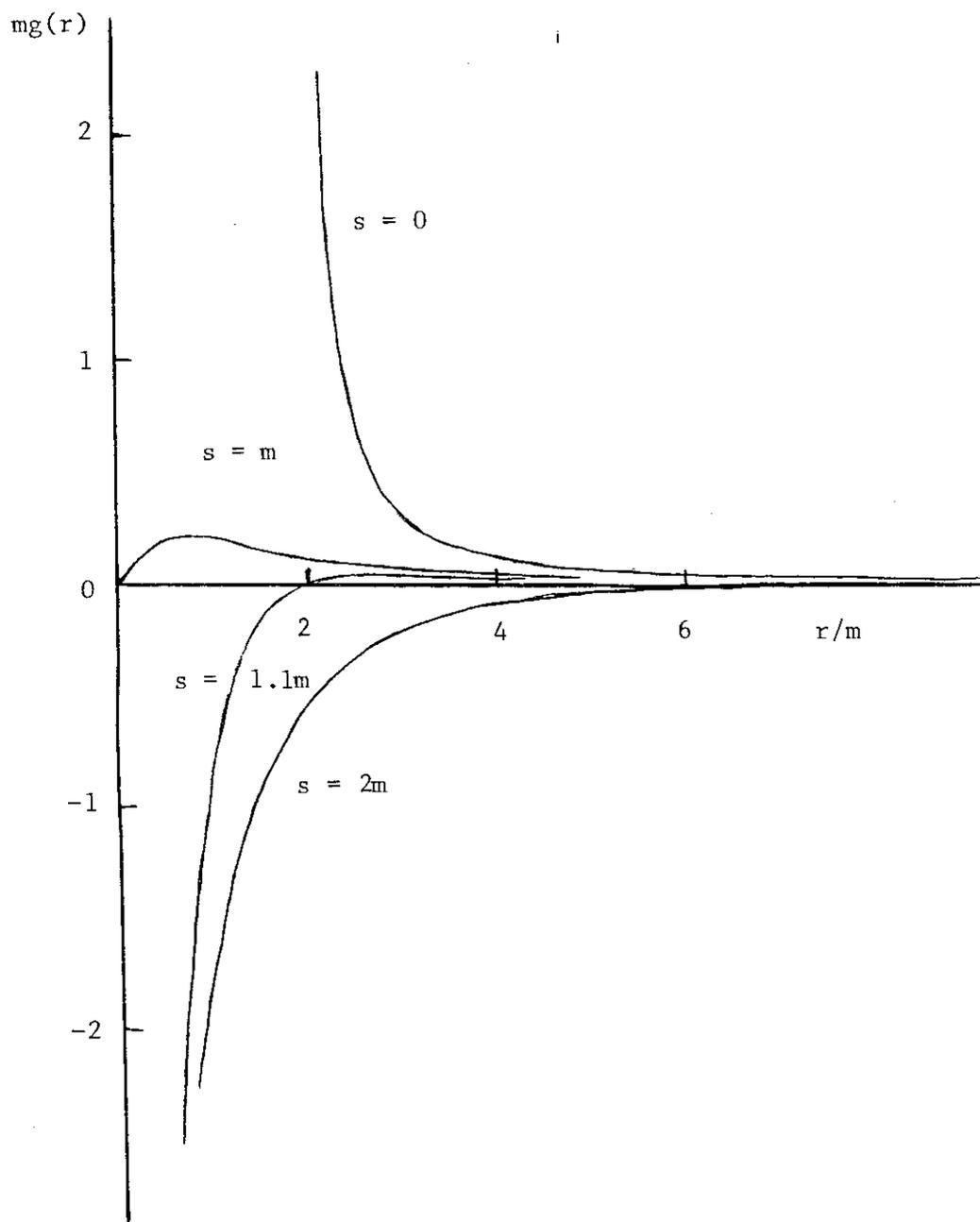


Figura 5 - Termo cinético radial.

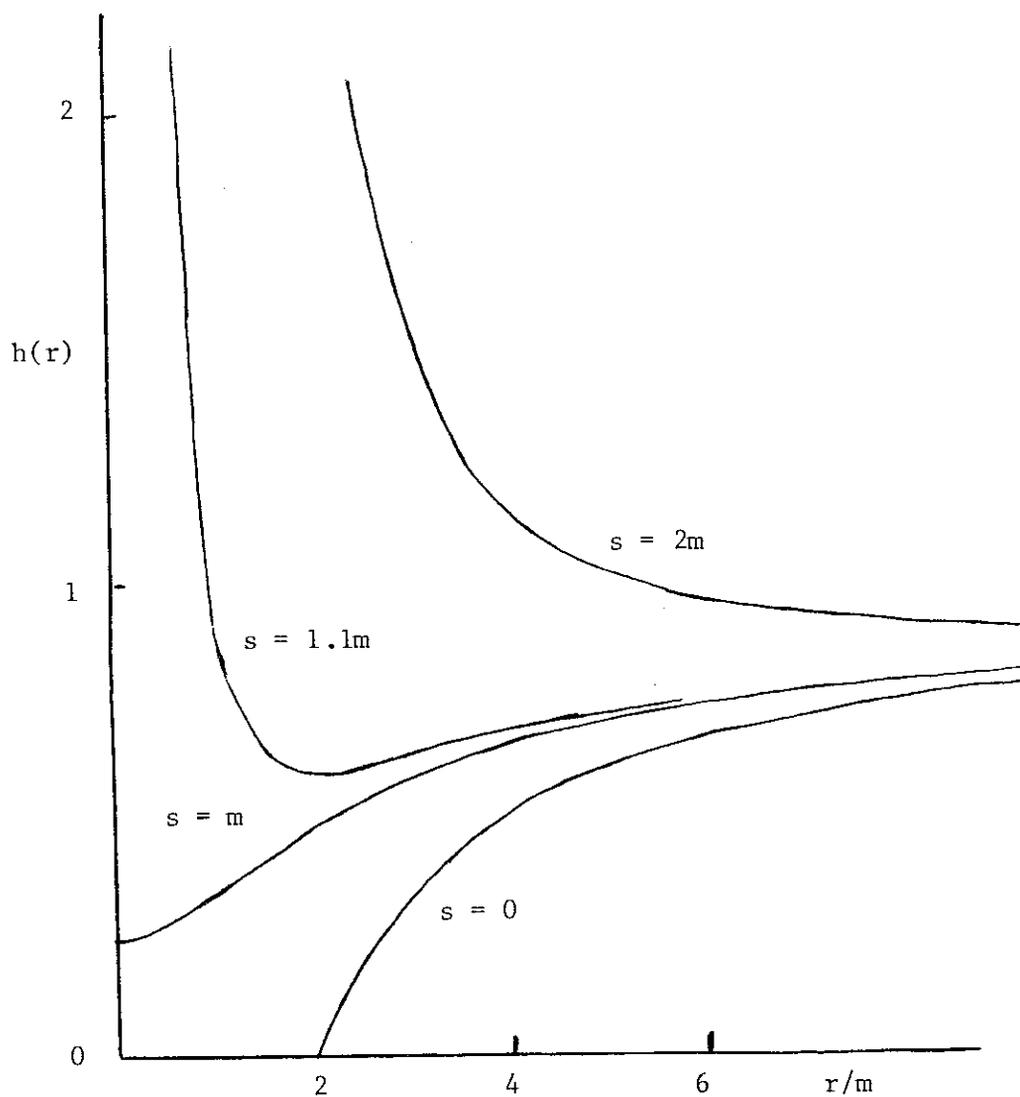


Figura 6 - Termo cinético azimutal

V.2 - Extremas Radiais

Para estudarmos o movimento de partículas-teste sem spin na direção puramente radial tomamos as condições $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$ na equação (V.6); obtemos

$$e^{2\eta} \dot{t}^2 - e^{2\lambda} \dot{r}^2 = 1 \quad ,$$

o que equivale a

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{e^{2\eta}}{\alpha^2}\right)e^{4\eta} \quad , \quad (V.13)$$

após substituirmos $\dot{r} = \dot{t} \frac{dr}{dt}$ e usarmos (IV.20b) e (V.4). A equação (V.13) assume portanto a forma integral

$$t-t_0 = \int e^{-2\eta} \left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \alpha^{-2} e^{2\eta}\right)^{-1/2} dr \quad . \quad (V.14)$$

Na impossibilidade de efetuar a integração acima, resolvemos estudar a equação (V.13) na vizinhança do ponto de mínimo potencial gravitacional, $r = r_0$, para valores de $s > m$.

Voltemos então à equação (V.13) e derivêmo-la com respeito ao tempo t . Isto nos leva à equação diferencial de 2ª ordem

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{e^{2\eta}}{\alpha^2}\right)e^{4\eta} \right] \quad . \quad (V.15)$$

Chamando a expressão dentro do colchete de (V.15) de $f(r)$, a sua derivada na vizinhança do ponto $r = r_0$ é dada por

$$f'(r) = f'(r_0) + (r-r_0)f''(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{2!} f'''(r_0) + \dots \quad (V.16)$$

onde a linha superescrita indica d/dr . Considerando $r(t) = r_0 + \xi(t)$ com $|\xi(t)| \ll 1$, a equação (V.15) fica, em 1ª ordem em $\xi(t)$,

$$\frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + \omega^2 \xi = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{2s^2} (1 - \sqrt{1 - m^2/s^2})^2 \quad , \quad (V.17)$$

indicando um movimento harmônico simples de frequência ω .

Na Figura 7 apresentamos a variação da frequência desse movimento harmônico como função de $s/m > 1$. Notamos que ω (medida em unidades de m^{-1}) vale $1/\sqrt{2}$ quando $s/m \rightarrow 1$, e decresce monotonicamente até zero para valores crescentes de s/m .

Consideremos agora uma partícula-teste em queda livre radial, tendo partido do repouso no infinito: lembrando a definição de velocidade dada em (V.7), a velocidade radial com que essa partícula passa na posição r é

$$v^2(r) = 2 \left[\frac{m}{r} \left(1 + \frac{s^2}{r^2} \right)^{1/2} - \frac{s^2}{r^2} \right] \quad . \quad (V.18)$$

Na Figura 8 apresentamos o gráfico da velocidade (v/c) radial em função da posição (r/m) para diferentes valores de s/m . Nota-se que para grandes valores de r obtêm-se o resultado Newtoniano $v = \sqrt{2m/r}$. O mesmo resultado é obtido na ausência de torção ($s = 0$, solução de Schwarzschild) para qualquer valor de r . Para $s < m$ tem-se $v \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$. Para $s = m$ tem-se $v = c$ quando a partícula atinge $r = 0$. Para $s > m$ a partícula em queda livre aumenta gradualmente a sua velocidade até um valor máximo ($< c$), na posição radial dada pela Figura 3; a seguir, a partícula é freiada e chega momentaneamente ao repouso na posição radial $r = s(s^2/m^2 - 1)^{1/2}$, após o que retorna ao infinito.

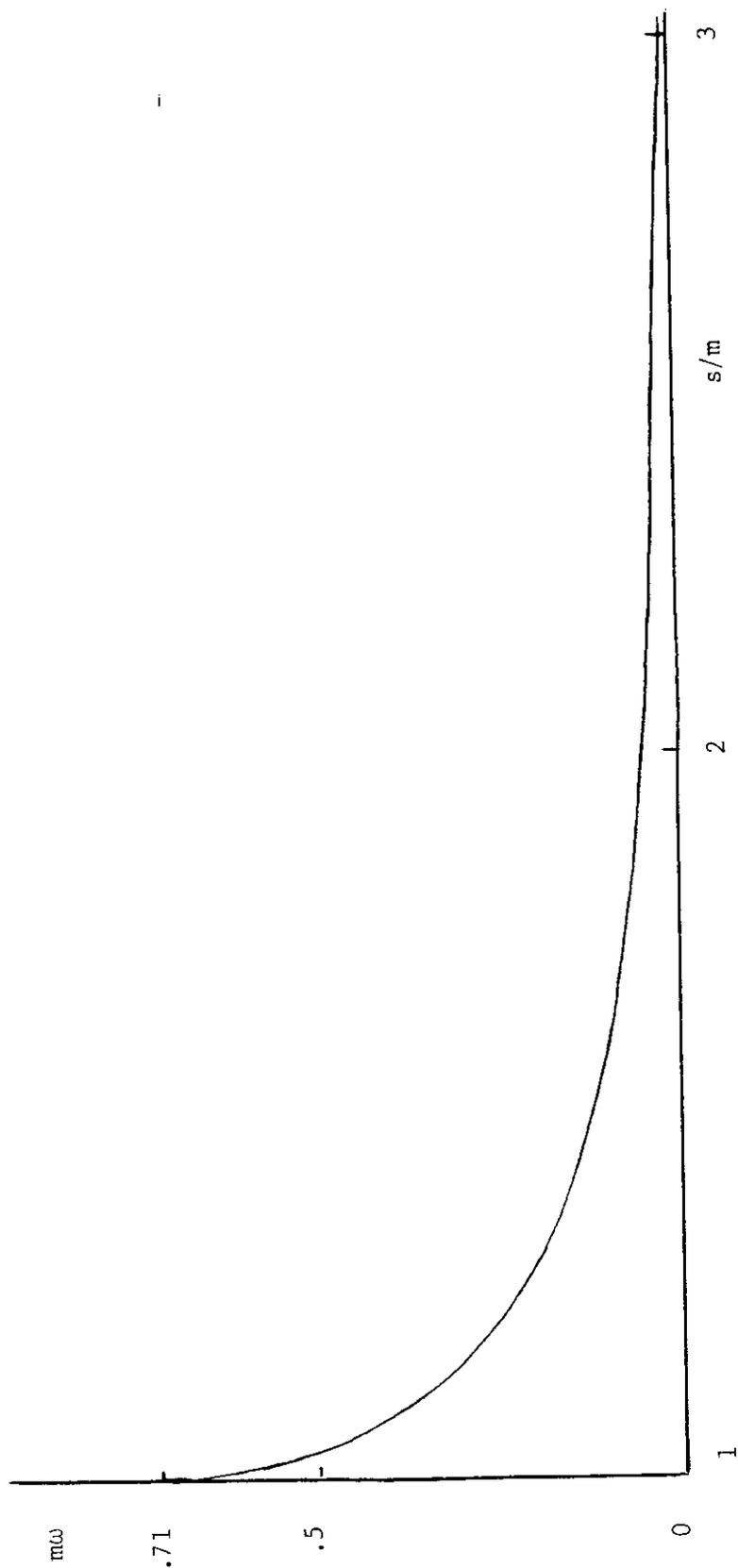


Figura 7 - Frequência do movimento harmônico

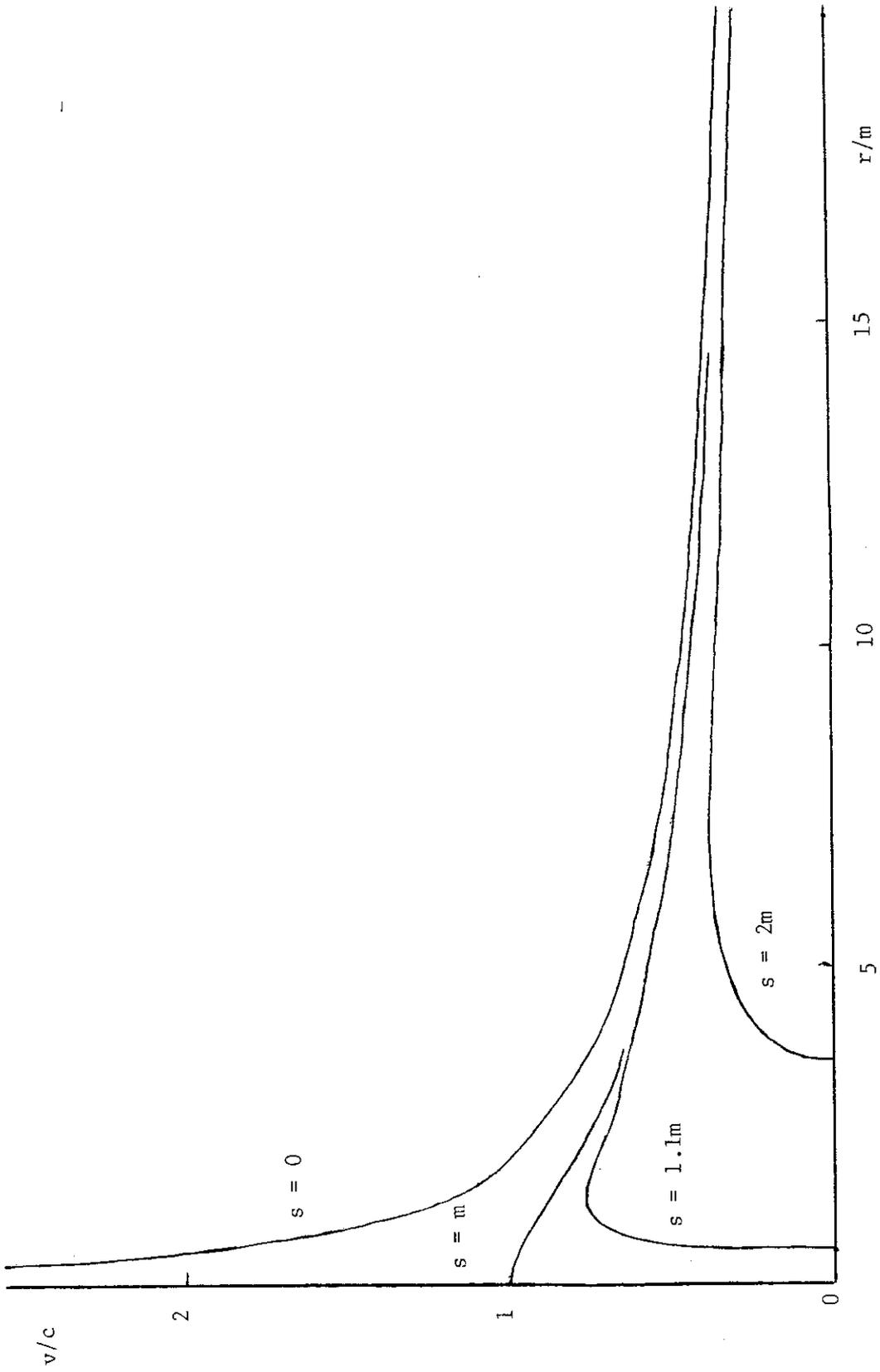


Figura 8 - Velocidade em queda livre radial ($v_{\infty} = 0$).

A seguir consideremos uma partícula largada do repouso num ponto arbitrário $r = r_{\text{m\`a}x} > r_0$, com $s > m$; ela cai radialmente até o ponto $r = r_{\text{m\`i}n} < r_0$, onde $r_{\text{m\`i}n}$ é dado por $g_{00}(r_{\text{m\`i}n}) = g_{00}(r_{\text{m\`a}x})$, ou equivalentemente

$$r_{\text{m\`i}n} = \frac{s(s^2 - m^2)^{1/2}}{m(r_{\text{m\`a}x}^2 - s^2)^{1/2} - s^2} r_{\text{m\`a}x} \quad (\text{V.19})$$

A Figura 1 dá uma idéia da situação. Quando $s > m$, observamos que uma partícula largada do repouso no infinito ($r_{\text{m\`a}x} = \infty$) atinge o ponto $r_{\text{m\`i}n} = s(\frac{s^2}{m^2} - 1)^{1/2}$, e a seguir retorna ao infinito.

V.3 - Extremas Circulares

Para estudarmos o movimento circular de uma partícula teste sem spin admitiremos que ela esteja orbitando no plano do equador ($\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$) e imporemos as condições de circularidade $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$.

Assim, de (V.3b) vem

$$\eta' e^{2(\eta-\lambda)} \dot{t}^2 - r e^{-2\lambda} \dot{\phi}^2 = 0 \quad ,$$

que usando (V.4) e (V.5) nos dá

$$\beta^2/r^2 = r \eta' \alpha^2 e^{-2\eta} \quad ; \quad (\text{V.20})$$

de (V.6) temos

$$e^{2\eta} \dot{t}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1 \quad ,$$

que usando (V.4) e (V.5) fica

$$\alpha^2 e^{-2\eta} - \beta^2/r^2 = 1 \quad . \quad (\text{V.21})$$

De (V.20) e (V.21) tiramos então que

$$\alpha^2 e^{-2\eta} = \frac{1}{1-r\eta'} \quad . \quad (V.22)$$

Por outro lado, já vimos em (V.8) que

$$\frac{1}{1-v^2(r)} = \alpha^2 e^{-2\eta} \quad ; \quad (V.23)$$

comparando (V.27) com (V.23) vemos que

$$v^2(r) = r\eta' \quad , \quad (V.24)$$

ou seja

$$v^2(r) = \frac{m(r^2+2s^2) - 2s\sqrt{r^2+s^2}}{\sqrt{r^2+s^2}(r^2+2s^2 - 2m\sqrt{r^2+s^2})} \quad . \quad (V.25)$$

A Figura 9 apresenta a velocidade (de Horedti) com que uma partícula deverá estar animada para descrever trajetórias circulares com o raio indicado, para diversos valores de s/m . Notamos que para $r \rightarrow \infty$ se tem sempre $v^2 \rightarrow m/r$, que é o resultado Newtoniano. No problema de Schwarzschild ($s = 0$) a velocidade circular cresce ao nos aproximarmos de $r = 2m$: vale $v = c$ (fóton) na posição $r = 3m$, e deve ultrapassar c (táquions) para $r < 3m$. Para $s = m$ a partícula precisa ter velocidade próxima à da luz (c) para orbitar circularmente nas vizinhanças de $r = 0$. Para $s > m$ a velocidade circular cresce do valor zero, na posição radial infinita, até um valor máximo na posição dada pela Figura 10 (descrita a seguir); para valores menores do raio a velocidade diminui, chegando a zero nas posições radiais em que $g_{00} = 1$ (ver Figura 3).

Na Figura 10 ilustramos, para cada valor de $s > m$, o

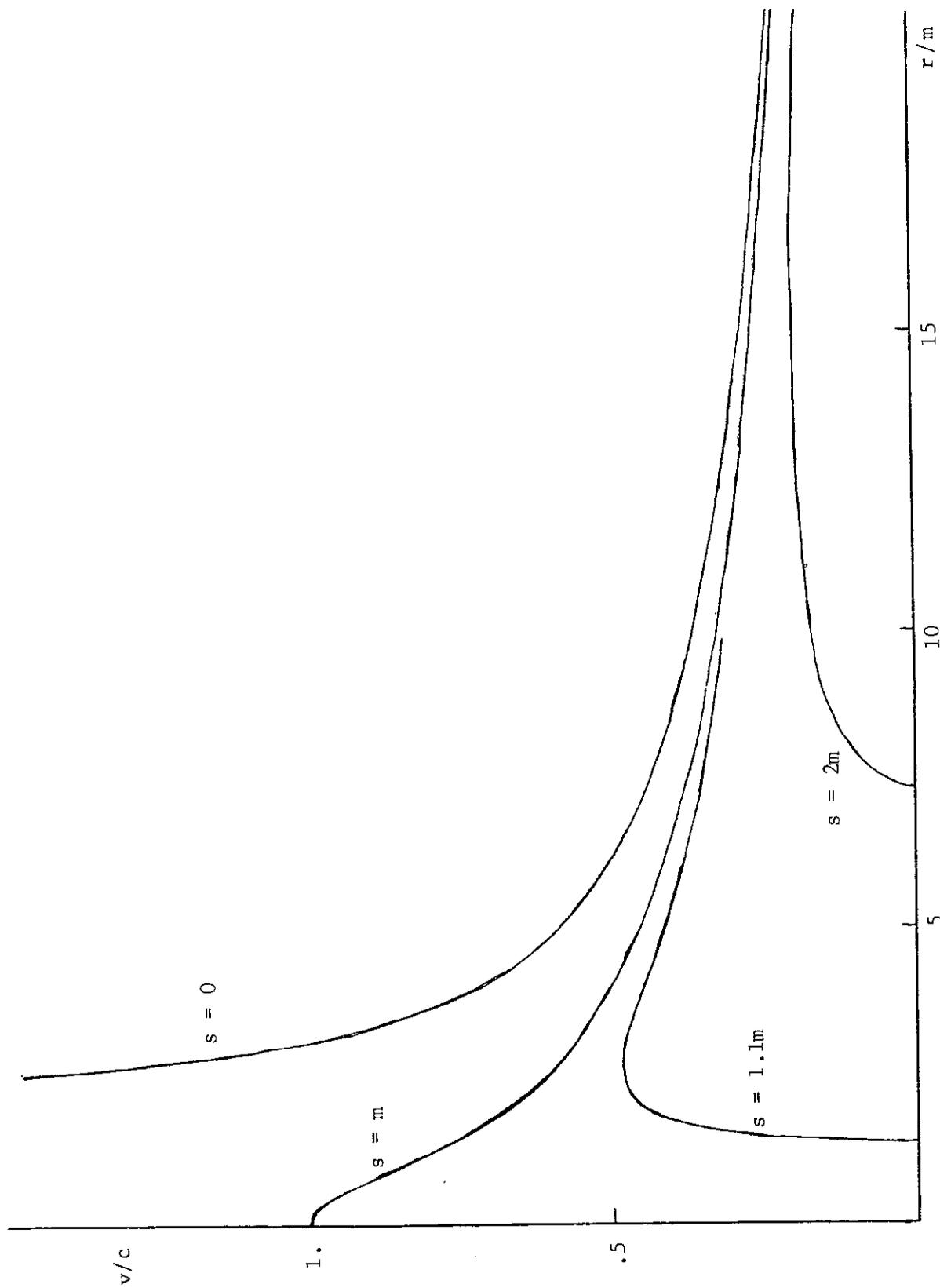


Figura 9 - Velocidade nos movimentos circulares.

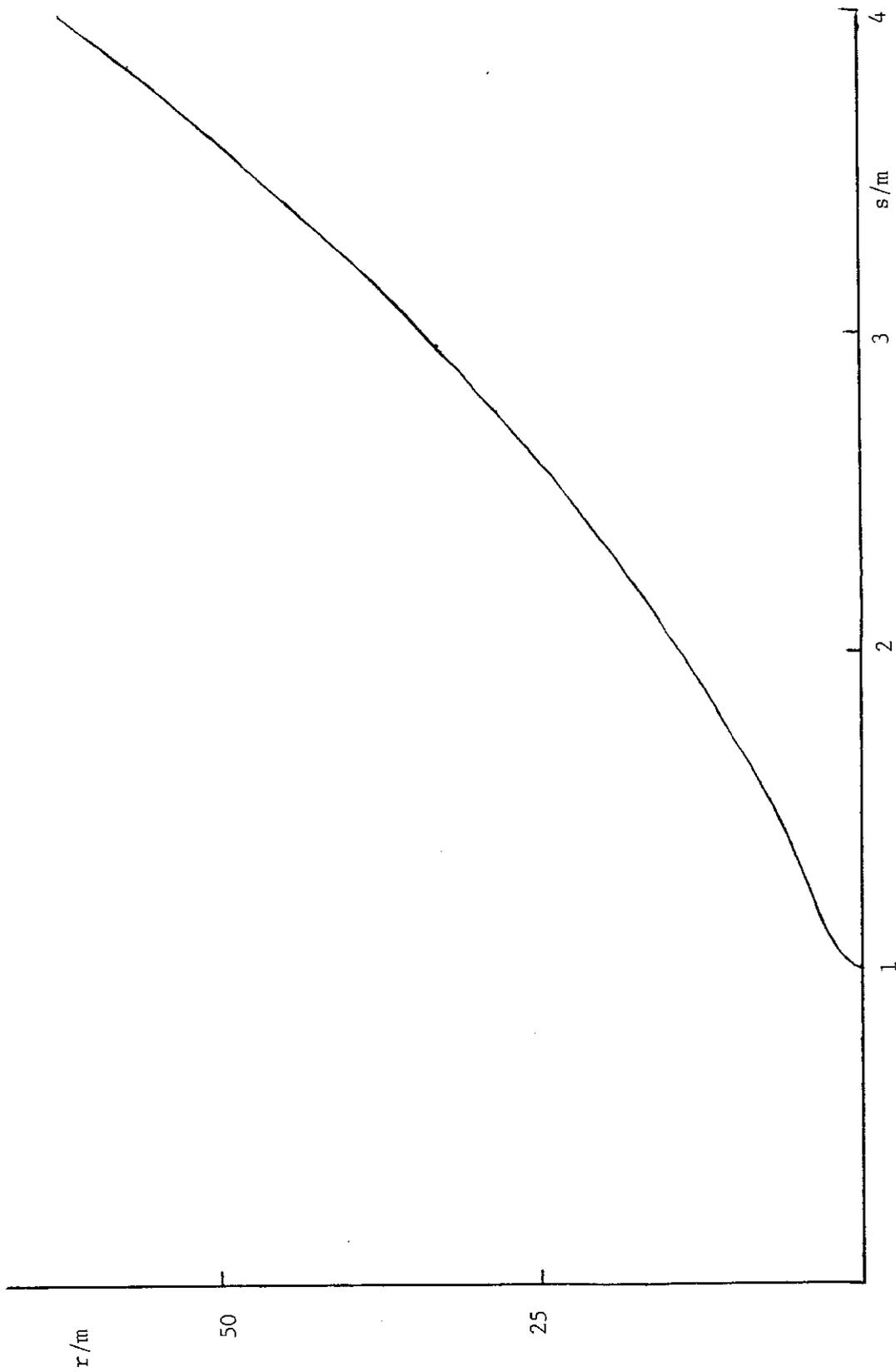


Figura 10 - Raio de órbita circular para velocidade máxima.

valor do raio da órbita circular em que a partícula sem spin percorre com máxima velocidade (de Horedti). Esses valores de r são obtidos a partir da (V.25), com a condição $dv(r)/dr = 0$; a equação satisfeita por r^2 é de 4º grau,

$$4s^2(r^2+s^2)^{1/2} (m^2+r^2+s^2) = m \left[r^4 + 8s^2(r^2+s^2) \right] . \quad (V.26)$$

Nesta equação notamos que quando $s \gg m$ se tem $r \rightarrow 4s^2/m$, e que quando $r \rightarrow 0$ se tem $s/m \rightarrow 1 + (r/2m)^6$.

V.4 - CONCLUSÃO

Como direta consequência da equação de campo combinada, a solução gravitacional obtida nesta tese é invariante pela inversão na orientação de todos os spins que contribuem para gravitação. Observamos que sempre que o valor do parâmetro s , que representa a torção, for maior que o de m , que representa a massa, os efeitos da gravitação com torção se tornam sensivelmente diferentes daqueles da gravitação Einsteineana. É importante notar que nossa análise da solução restringiu-se às regiões físicas do espaço-tempo ($g_{00} > 0$, $g_{11} < 0$).

No item V.1, onde estudamos a aceleração \ddot{r} , pudemos ver que a torção atuou no sentido de produzir ora uma atração ora uma repulsão a ser adicionada à gravitação da relatividade geral. Convém lembrar que esses efeitos adicionais foram originados por uma única componente de torção, S_{23}^0 . Nossos resultados podem ser comparados aos de Bedran (1980), que estudou um problema com simetria axial com outras componentes de torção pre

sententes; seus estudos confirmaram que a gravitação adicionada pela torção atua ora atrativamente ora repulsivamente. Igualmente pudemos comparar com os resultados obtidos por Sandes (1981), que admitiu como únicas componentes não-nulas da torção com simetria esférica $S_{01}^0 = S_{21}^0 = S_{31}^0 = f(r)$; estas componentes, para partículas-teste sem spin em queda livre radial, atuaram sempre no sentido de aumentar a atração gravitacional comparativamente à solução de Reissner-Nordström, enquanto que a contribuição azimutal diminuiu a atração de Reissner-Nordström.

As curvas extremas apresentadas no capítulo V representam o movimento de partículas-teste (com massa e de spin nulo) submetidas ao campo; no entanto, para ter um conhecimento mais preciso do campo gravitacional as partículas-teste a se utilizar devem possuir spin não-nulo, e portanto obedecer à equação de movimento oriundas de leis de conservação ^(3,12), ao invés de satisfazer à equação das extremas.

Recentemente a torção tem sido usada no estudo de modelos cosmológicos para fluidos de matéria com spin na presença de campos magnéticos ⁽³⁷⁾ numa simulação de possíveis estados iniciais do universo. Também tem sido usada no intuito de evitar singularidades cosmológicas e colapsos gravitacionais ⁽⁹⁾. Finalmente, convém mencionar que o conceito de torção vem sendo empregado em outras teorias que não possuem um caráter puramente gravitacional.

APÊNDICE A

CONEXÃO DE RIEMANN-CARTAN

Para obtermos a conexão da variedade de Riemann-Cartan U_4 , imporemos que a métrica $g_{\mu\nu}$ seja covariantemente constante, i.e.,

$$g_{\mu\nu;\alpha} \equiv g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} g_{\beta\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} g_{\beta\nu} = 0 \quad . \quad (A .1)$$

Fazendo uma permutação cíclica nos índices (μ, ν, α) tem-se

$$g_{\nu\alpha;\mu} = g_{\nu\alpha,\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} g_{\beta\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} g_{\beta\alpha} = 0 \quad , \quad (A .2)$$

$$g_{\alpha\mu;\nu} = g_{\alpha\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\beta} g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} g_{\beta\mu} = 0 \quad . \quad (A .3)$$

Subtraindo (A .3) da soma de (A .1) com (A .2), tem-se

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\alpha} + g_{\nu\alpha;\mu} - g_{\alpha\mu;\nu} &= g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} g_{\beta\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} g_{\beta\nu} + \\ &\quad - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} g_{\beta\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} g_{\beta\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^{\beta} g_{\beta\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} g_{\beta\mu} = 0 \quad , \end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu} + (\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}) g_{\beta\mu} + (\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}) g_{\beta\alpha} - \\ - (\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}) g_{\beta\nu} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão acima por $\frac{1}{2} g^{\rho\nu}$, tem-se

$$\frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu}) + g^{\rho\nu} g_{\beta\mu} S_{\nu\alpha}^{\beta} + g^{\rho\nu} g_{\beta\alpha} S_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{(\alpha\mu)}^{\rho} = 0 ,$$

ou então

$$\{\alpha\mu\}^{\rho} + g^{\rho\nu} g_{\beta\mu} S_{\nu\alpha}^{\beta} + g^{\rho\nu} g_{\beta\alpha} S_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{(\alpha\mu)}^{\rho} = 0 . \quad (A .4)$$

Por outro lado,

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} = \Gamma_{(\alpha\mu)}^{\rho} + \Gamma_{[\alpha\mu]}^{\rho} = \Gamma_{(\alpha\mu)}^{\rho} + S_{\alpha\mu}^{\rho} . \quad (A .5)$$

Substituindo $\Gamma_{(\alpha\mu)}^{\rho}$ em (A .4) pela expressão obtida de (A .5) , vem que

$$\{\alpha\mu\}^{\rho} + g^{\rho\nu} g_{\beta\mu} S_{\nu\alpha}^{\beta} - g^{\rho\nu} g_{\beta\alpha} S_{\mu\nu}^{\beta} + S_{\alpha\mu}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} = 0 ,$$

portanto

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} = \{\alpha\mu\}^{\rho} - K_{\alpha\mu}^{\rho} , \quad (A .6)$$

que \bar{e} é a conexão de U_4 , e

$$K_{\alpha\mu}^{\rho} = -S_{\alpha\mu}^{\rho} + S_{\mu\alpha}^{\rho} - S_{\alpha\mu}^{\rho}$$

é o tensor de contorção.

APÊNDICE B

CURVATURA DE RIEMANN-CARTAN

A não-comutatividade da derivada covariante segunda de um co-vetor em U_4 é medida em termos da torção e da curvatura, como veremos a seguir. Seja A_α um co-vetor e tomemos a sua derivada covariante

$$\nabla_\mu A_\alpha \equiv A_{\alpha;\mu} = A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta A_\beta \quad . \quad (B .1)$$

A derivada covariante segunda de A_α é obtida derivando-se (B.1),

$$(A_{\alpha;\mu})_{;\nu} \equiv A_{\alpha;\mu\nu} = (A_{\alpha;\mu})_{,\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta A_{\beta;\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_{\alpha;\sigma} \quad . \quad (B .2)$$

Depois de alguns cálculos a expressão (B .2) torna-se

$$A_{\alpha;\mu\nu} = A_{\alpha,\mu\nu} + (\Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\lambda) A_\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta A_{\beta,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_{\alpha,\sigma} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta A_{\beta,\mu} \quad . \quad (B .3)$$

Trocando-se os índices $\mu \leftrightarrow \nu$ em (B .3), tem-se

$$A_{\alpha;\nu\mu} = A_{\alpha,\nu\mu} + (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda - \Gamma_{\nu\alpha,\mu}^\lambda) A_\lambda - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta A_{\beta,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_{\alpha,\sigma} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta A_{\beta,\nu} \quad . \quad (B .4)$$

Portanto, fazendo-se a comutação das derivadas covariantes segundas (B .3) e (B .4),

$$A_{\alpha; [\underline{\mu}\underline{\nu}]} = \frac{1}{2} (A_{\alpha; \mu\nu} - A_{\alpha; \nu\mu}) ,$$

obtêm-se

$$\begin{aligned} A_{\alpha; [\underline{\mu}\underline{\nu}]} &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\alpha, \mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda}) A_{\lambda} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) (A_{\alpha, \sigma} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\lambda} A_{\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} A_{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\sigma} A_{\alpha; \sigma} \end{aligned} \quad (B.5)$$

que é a relação apresentada em (II.15), e

$$R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = 2(\Gamma_{[\underline{\nu}|\alpha|, \underline{\mu}]}^{\lambda} + \Gamma_{[\underline{\mu}|\beta| \underline{\nu}]}^{\lambda} \Gamma_{\nu]}^{\beta})$$

é o tensor de curvatura de Riemann em U_4 .

APÊNDICE C

PROPRIEDADE DA CURVATURA EM U_4

Na geometria de Riemann o tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}$ satisfaz a relação $R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0$. Em Riemann-Cartan, esta anti-simetria nos três últimos índices não mais existe. Vamos aqui mostrar como $R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]}$ depende da torção e de suas derivadas. Partimos da identidade

$$R^\lambda_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{6} (R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\alpha\mu} + R^\lambda_{\mu\nu\alpha} - R^\lambda_{\mu\alpha\nu} - R^\lambda_{\nu\mu\alpha} - R^\lambda_{\alpha\nu\mu}) \quad . \quad (C.1)$$

Devido à propriedade $R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = -R^\lambda_{\alpha\nu\mu}$, (C.1) reduz-se a

$$R^\lambda_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{3} (R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\alpha\mu} + R^\lambda_{\mu\nu\alpha}) \quad . \quad (C.2)$$

Substituindo-se em (C.2) a definição do tensor de curvatura,

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = 2\partial_{[\underline{\mu}}\Gamma^\lambda_{\underline{\nu]}\alpha} + 2\Gamma^\lambda_{[\underline{\mu}|\beta}\Gamma^\beta_{\underline{\nu]}\alpha} \quad ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} R^\lambda_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{2}{3} (\partial_{[\underline{\mu}}\Gamma^\lambda_{\underline{\nu]}\alpha} + \Gamma^\lambda_{[\underline{\mu}|\beta}\Gamma^\beta_{\underline{\nu]}\alpha} + \partial_{[\underline{\alpha}}\Gamma^\lambda_{\underline{\mu]}\nu} + \Gamma^\lambda_{[\underline{\alpha}|\beta}\Gamma^\beta_{\underline{\mu]}\nu} + \\ + \partial_{[\underline{\nu}}\Gamma^\lambda_{\underline{\alpha]}\mu} + \Gamma^\lambda_{[\underline{\nu}|\beta}\Gamma^\beta_{\underline{\alpha]}\mu}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \left[\partial_{\mu} (\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}) + \partial_{\nu} (\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}) + \partial_{\alpha} (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) + \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}) + \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\beta}) \right] \\
 &= \frac{2}{3} (\partial_{\mu} S_{\nu\alpha}^{\lambda} + \partial_{\nu} S_{\alpha\mu}^{\lambda} + \partial_{\alpha} S_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} S_{\nu\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} S_{\alpha\mu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} S_{\mu\nu}^{\beta}) . \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

Como

$$S_{\nu\alpha}^{\lambda} ; \mu = \partial_{\mu} S_{\nu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} S_{\beta\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} S_{\nu\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} S_{\nu\alpha}^{\beta} , \quad (C.4)$$

podemos substituir (C.4) em (C.3), resultando

$$\begin{aligned}
 R^{\lambda} \left[\bar{\alpha}\mu\nu \right] &= \frac{2}{3} \left[S_{\mu\nu;\alpha}^{\lambda} + S_{\alpha\mu}^{\lambda} ; \nu + S_{\nu\alpha}^{\lambda} ; \mu + S_{\alpha\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}) + \right. \\
 &\quad \left. + S_{\nu\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}) + S_{\mu\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}) \right] \\
 &= \frac{2}{3} (S_{\mu\nu}^{\lambda} ; \alpha + S_{\alpha\mu}^{\lambda} ; \nu + S_{\nu\alpha}^{\lambda} ; \mu - 2S_{\alpha\beta}^{\lambda} S_{\mu\nu}^{\beta} - 2S_{\nu\beta}^{\lambda} S_{\alpha\mu}^{\beta} - 2S_{\mu\beta}^{\lambda} S_{\nu\alpha}^{\beta}) ,
 \end{aligned}$$

ou

$$R^{\lambda} \left[\bar{\alpha}\mu\nu \right] = 2S \left[\bar{\mu}\nu ; \bar{\alpha} \right]^{\lambda} - 4S \left[\bar{\mu}\nu \right]^{\beta} S_{\bar{\alpha}}^{\lambda} , \quad (C.5)$$

que é a propriedade expressa em (II.18).

APÊNDICE D

i

CONEXÃO NAS AUTO-PARALELAS

A parte simétrica da conexão Γ da variedade de Riemann-Cartan U_4 não é apenas o símbolo de Christoffel, mas depende também da torção; para ver isso, partimos de

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]}^\alpha ; \quad (D.1)$$

substituindo em (D.1) as expressões de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ e $\Gamma_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]}^\alpha$, vem que

$$\begin{aligned} \Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha &= \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} - K_{\mu\nu}^\alpha - S_{\mu\nu}^\alpha \\ &= \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} + S_{\mu\nu}^\alpha - S_{\nu\mu}^\alpha + S_{\mu\nu}^\alpha - S_{\mu\nu}^\alpha \\ &= \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} + S_{\nu\mu}^\alpha + S_{\mu\nu}^\alpha \\ &= \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} + 2S_{(\mu\nu)}^\alpha , \end{aligned} \quad (D.2)$$

que é a parte da conexão que contribui na equação das auto-paralelas (II.24).

REFERÊNCIAS

- (1) - Adler, R., Bazin, M. e Schiffer, M., 1975, "Introduction to general relativity", McGraw-Hill Book Company.
- (2) - Adamowicz, W., 1975, "Equivalence between the Einstein-Cartan and general relativity theories in the linear approximation for classical model of spin", Bull. Acad. Pol. Sci. , Ser. Sci. Math. Astro. Phys. XXIII, 1203.
- (3) - Adamowicz, W., e Trautman, A., 1975, "The principle of equivalence for spin", Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astro. Phys. XXIII, 339.
- (4) - Arkuszewski, W., Kopczyński, W., e Ponomariev, V.N., 1974, "On the linearized Einstein-Cartan theory", Ann.Inst. Henri Poincaré, XXI, 89.
- (5) - Bedran, M.L., 1980, "Um estudo da gravitação de Einstein-Maxwell-Cartan", Tese de Mestrado - UFRJ.
- (6) - Cartan, É., 1922, "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion", C.R.Acad.Sci. (Paris) 174, 593.
- (7) - Cartan, É., 1923, 1924, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée I, I(suite)", Ann.Ec.Norm.Sup. 40, 325, 41, 1.
- (8) - Cartan, É., 1925, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée II", An. Ec. Norm. Sup. 42, 17.
- (9) - Demianski, M., 1977, "Spin may prevent formation of small black holes", Acta Physica Polonica B8, 591.
- (10) - Galvão, C.A.P., 1976, "Gravitação e cosmologia em espaços com torção", Tese de Doutorado - CBPF.
- (11) - Hawking, S.W., e Ellis, G.F.R., 1973, "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press, Cambridge.
- (12) - Hehl, F.W., 1971, "How does one measure torsion of space-time", Phys. Letters 36A, 225.

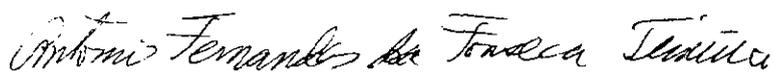
- (13) - Hehl, F.W., e von der Heyde, P., 1973, "Spin and the structure of space-time", Ann.Inst. Henri Poincaré XIX, 179.
- (14) - Hehl, F.W., 1973, 1974, "Spin and torsion in general relativity: I, II", G.R.G. 4, 333; 5, 491.
- (15) - Hehl, F.W., von der Heyde, P., e Kerlick, G.D., 1974, "General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory", Phys. Rev. D10, 1066.
- (16) - Hehl, F.W., et al., 1976, "General relativity with spin and torsion: foundations and prospects", Rev.Mod.Phys. 48, 393.
- (17) - Horedti, Gp., 1974, "Constancy of the local velocity of light in general relativistic gravitational fields", G.R.G. 5, 475.
- (18) - Kerlick, G.D., 1975, "Cosmology and particle production via spin-spin interaction in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble theory of gravity", Phys. Rev. D12, 3004.
- (19) - Kibble, T.W.B., 1961 "Lorentz invariance and gravitational fields", J. Math. Phys. 2, 212.
- (20) - Kopczyński, W., 1972, "A non-singular universe with torsion", Phys. Letters 39A, 219.
- (21) - Kopczyński, W., 1973, "An anisotropic universe with torsion", Phys. Letters 43A, 63
- (22) - Kuchowicz, B., 1975, "Non singular homogeneous universe with four-parameter Lie groups", Phys. Letters 54A, 13.
- (23) - Kuchowicz, B., 1978, "Friedmann-like cosmological models without singularity", G.R.G 9, 511.
- (24) - Linhares, C.A., 1979, "Modelos estelares na teoria gravitacional de Einstein-Cartan", Tese de Mestrado - CBPF.
- (25) - Nester, J.M., 1977, "Effective equivalence of the Einstein-Cartan and Einstein theories of gravity", Phys. Rev. D16, 2395.
- (26) - Prasanna, A.R., 1975a, "Static fluid spheres in Einstein-Cartan theory", Phys. Rev. D11, 2076.
- (27) - Prasanna, A.R., 1975b, "Static cylinder of perfect fluid with non-zero spin density", Phys. Rev. D11, 2083.

- (28) - Prasanna, A.R., 1975c, "Maxwell's equations in Riemann-Cartan space U_4 ", Phys. Letters 54A, 17.
- (29) - Raychaudhuri, A.K., 1979, "Theoretical cosmology", Clarendon Press, Oxford.
- (30) - Sandes, C.S., 1981, "Problema de Reissner-Nordström em espaço com torção", Tese de Mestrado, IF-UFRJ.
- (31) - Sciama, D.W., 1964, "The physical structure of general relativity", Rev. Mod. Phys. 36, 463; 1103.
- (32) - Soares, I.D., 1980, "O cálculo com formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços curvos", em 2^a Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, vol. 1, editado por M. Novello.
- (33) - Suh, Y.B., 1978, "Remarks on the static spherically symmetric solutions in Einstein-Cartan theory", Prog. Theoretical Phys. 59, 1852.
- (34) - Tafel, J., 1973, "A non-singular homogeneous universe with torsion", Phys. Letters 45A, 341.
- (35) - Trautman, A., 1972a,b,c,d, "On Einstein-Cartan equations", Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astro. Phys. XX, 185; 503; 895; XXI, 345.
- (36) - Trautman, A., 1973, "Spin and torsion may avert gravitational singularities", Nature (Phys. Sci.) 242, 7.
- (37) - Tsoubelis, D., 1981, "Einstein-Cartan-Sciama-Kibble cosmological models with spinning matter and magnetic field", Phys. Rev. D23, 823.

Ilmo. Sr. Coordenador de Ensino

A Banca Examinadora constituída pelos Professores Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira (CBPF), Murari Mohan Som (UFRJ) e Carlos Augusto Pinto Galvão (CBPF), no dia 26 de março de 1982, em reunião que precedeu a exposição da Tese de Mestrado "Uma Solução Exata em Einstein-Cartan", por Waldir Leite Roque, considerou a Tese apta para defesa imediata.

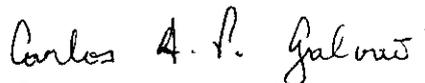
Rio de Janeiro, 26 de março de 1982



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Murari Mohan Som



Carlos Augusto Pinto Galvão

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

Antonio Fernando F. Teixeira
Presidente

Murari Mohan Som

Murari Mohan Som

Carlos A. P. Galvão

Carlos Augusto Pinto Galvão

Rio de Janeiro, 26 de março de 1982