

LUIZ JORGE NEGRI



SISTEMAS DINÂMICOS COM VÍNCULOS:
APLICAÇÕES À SISTEMAS NÃO-HOLÔNOMOS
E A TEORIA DOS STRINGS

Tese de
DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro
DEZEMBRO DE 1982

A minha esposa, sem cujo apoio não poderia
ter concluído este trabalho,
aos meus pais,
aos meus filhos

SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
INTRODUÇÃO	iv
CAPÍTULO 1 - SOBRE A DINÂMICA DE SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS	
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - O PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA SISTEMAS COM VÍNCULOS	6
3 - A REDUÇÃO DE VÍNCULOS NÃO-HOLONÔMICOS À FOR- MA HOLONÔMICA	13
4 - MODELO: UM DISCO ROLANDO SOBRE UM PLANO HORI- ZONTAL	16
5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O FORMALISMO HAMILTONIA- NO PARA SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS	23
6 - O FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O DISCO ROLAN- DO NUM PLANO HORIZONTAL	26
CAPÍTULO 2 - A TEORIA CLÁSSICA DOS STRINGS RELATIVÍSTICOS	
1 - INTRODUÇÃO	30
2 - CARACTERIZAÇÃO DO STRING	33
3 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O STRING	35
4 - SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO. SIGNIFICADO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	38

5 - COVARIÂNCIA GERAL: VÍNCULOS	43
6 - O FORMALISMO HAMILTONIANO	47
7 - O GAUGE ORTONORMAL	52
CAPÍTULO 3 - A TEORIA GEOMÉTRICA DOS STRINGS	
1 - INTRODUÇÃO	58
2 - STRINGS COMO UM PROBLEMA DE IMERSÃO	62
3 - STRINGS INFINITOS: O GAUGE ORTONORMAL.....	65
3.1 - Espaço-tempo tridimensional	66
3.2 - Espaço-tempo quadrimensional	71
4 - EVOLUÇÃO DE STRINGS FINITOS NO ESPAÇO-TEMPO.	75
CAPÍTULO 4 - A RELAÇÃO ENTRE STRINGS E CAMPOS DE MAXWELL DE POSTO 2	
1 - INTRODUÇÃO	84
2 - TEORIA DO STRING EM TERMOS DAS COORDENADAS DE PLUCKER	86
3 - STRINGS E CAMPOS DE MAXWELL DE POSTO 2	92
4 - A DENSIDADE DE CORRENTE DO STRING	95
APÊNDICE	
1 - PRELIMINARES.....	101
2 - SUPERFÍCIES NO R^3 : UM POUCO DE GEOMETRIA DI FERENCIAL LOCAL	
A - Preliminares	102
B - As duas formas fundamentais de uma super fície	104
C - Curvatura média e curvatura gaussiana ..	109
D - Sistemas coordenados sobre uma superfície	112
E - O teorema fundamental da teoria de super	

fícies	116
3 - IMERSÃO DE UM V_n EM UM V_m	118
F - Preliminares	119
G - Hipersuperfícies	121
H - Imersão do V_n no V_m - Caso geral	122
I - Sistemas coordenados em V_n	123
Referências	127
BIBLIOGRAFIA	128

AGRADECIMENTOS

- A C.A.P. Galvão, orientador deste trabalho, por sua amizade e dedicação, pelo interesse demonstrado, mormente, a sua grande competência;

- À Clélia Mineiro, pela carinhosa ajuda prestada na fase final de datilografia;

- Ao amigo César Linhares, pela leitura e correções feitas;

- À Valéria, Socorro e Carlos Lopes pelo trabalho datilográfico;

- Aos colegas do C.B.P.F., e em particular, aos companheiros das "peladas", pela amizade e estímulo constantes.

RESUMO

Estabelecemos uma técnica que permite a construção de uma função lagrangiana para sistemas não-holonômicos. Discutimos o formalismo clássico dos strings relativísticos sob o ponto de vista da teoria de Dirac para sistemas singulares e no contexto de um problema de imersão de uma superfície bidimensional no espaço-tempo. Mostramos como resolver o problema correspondente à imersão no caso de strings livres, finitos e abertos, pela especificação de um gauge não convencional. Analisamos ainda a relação entre a teoria dos strings e campos de Maxwell de posto 2 e exploramos as propriedades da "densidade de corrente" do string para obter novas informações sobre o modelo.

O Capítulo 2 inicia a nossa discussão da dinâmica dos strings relativísticos, o modelo que aqui utilizamos como representativo de um sistema mecânico, contínuo, singular. Escolhemos este modelo por suas inúmeras aplicações à Física, constituindo-se hoje em um vastíssimo campo de interesse na pesquisa teórica.

Iniciamos nossa análise imbuídos da idéia original de discutir a dinâmica clássica dos strings sob o ponto de vista da teoria de Dirac para sistemas singulares. Com a evolução de nosso estudo entusiasmos-nos a, assim denominada, teoria geométrica dos strings relativísticos, pela beleza de sua estrutura formal e riqueza em aplicações, resultante da ampla abrangência permitida pela potência do aparato matemático que lhe é peculiar. Como resultado, desvirtuamos-nos de nossa meta original, aprofundando-nos na análise desse formalismo. Obtivemos êxito em nosso trabalho desenvolvendo uma sistematização da teoria dos strings como um problema de imersão e alcançando novos e interessantes resultados, que constituem o Capítulo 3 desta nossa presente contribuição. Em particular, mostramos que a imersão dos strings no espaço-tempo pode ser tratada sem que seja necessário a especificação do gauge a priori e que o caso, "patológico", da imersão de strings livres, finitos e abertos, pode ser considerado atendendo-se às exigências impostas pelas condições de contorno. Construimos soluções completas, uma estacionária e outra não-estacionária, para modelos que especificamos com base no tratamento geral que desenvolvemos.

No Capítulo 4, analisamos o modelos dos strings relativísticos sob o ponto de vista dos campos que lhe podem ser atribuídos. Construímos um formalismo que permite melhor se considerar a análise do modelo de string segundo a ótica de uma teoria de campo e, com detalhes, investigamos o significado físico-geométrico da "densidade de corrente" que se atribui ao string neste contexto.

Apresentamos, em cada Capítulo, na introdução, um resumo esclarecedor de nossos objetivos, desenvolvimentos e resultados obtidos, esperando assim, tornar mais cômoda a leitura do presente trabalho.

CAPÍTULO I

SOBRE A DINÂMICA DE SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS

1- INTRODUÇÃO

A descrição lagrangiana de um sistema clássico é baseada no conhecimento da função lagrangiana da qual se exige que contenha todas as informações físicas relevantes sobre o sistema. Com o conhecimento desta função constrói-se a integral de ação,

$$J \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad , \quad (1.1)$$

e as equações de movimento para o sistema decorrem do princípio de mínima ação:

$$\delta J = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad . \quad (1.2)$$

A passagem ao formalismo hamiltoniano é feita definindo-se as variáveis momenta, p_i , canonicamente conjugadas às coordenadas q_i ,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad , \quad (1.3)$$

e construindo-se a função hamiltoniana, $H(q,p,t)$,

$$H \equiv \dot{q}^i p_i - L(q, \dot{q}(q,p,t), t) \quad . \quad (1.4)$$

Em geral, os sistemas mecânicos que ocorrem na natureza estão submetidos à ação de agentes externos, que determinam restrições ao movimento que são chamadas de vínculos. Para sistemas submetidos a vínculos nem sempre é possível construir-se uma função lagrangiana no sentido de (1.1-2) acima descrito. A existência de vínculos traduz-se na forma de relações entre as coordenadas e velocidades das partículas que são então designadas como as equações de vínculo. Quando é possível usar estas equações para eliminar as coordenadas dependentes, dizemos que os vínculos são holônimos ou holonômicos. Neste caso, as dificuldades introduzidas pela existência das forças de vínculo são facilmente superadas: podemos construir uma função lagrangiana que corretamente descreva o sistema. Por outro lado, quando a eliminação das variáveis dependentes não pode ser levada a efeito, é dizer, quando os vínculos não são holonômicos, o procedimento variacional torna-se complicado e, em geral, não podemos construir uma função lagrangiana com as características desejadas.

Rigorosamente falando, não há uma sistemática bem estabelecida para o tratamento geral destes problemas. De fato, o princípio variacional (1.2) refere-se essencialmente aos sistemas holonômicos. Quando consideramos sistemas com vínculos que não são holonômicos e conhecemos a função lagrangiana que descreveria o sistema na ausência dos vínculos, podemos ainda, em alguns casos(*), tratar o problema via princípio variacio-

(*) Os casos mais "patológicos" são tratados individualmente e, em geral, com um forte apelo à descrição Newtoniana (1-3)

nal, considerando as equações de vínculo como condições subsidiárias; é este o método dos multiplicadores de Lagrange. No entanto, além de não ser este um método geral, devemos ainda considerar problemas específicos que envolvem a técnica variacional a ser empregada; essencialmente, no caso de sistemas com vínculos que não são holônimos, há que se distinguir entre os procedimentos variacionais

$$\delta J \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (1.5)$$

e

$$\delta J \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\delta L) dt = 0. \quad (1.6)$$

A distinção básica entre (1.5) e (1.6) consiste, fundamentalmente, na construção das "trajetórias de comparação" em contraposição à existência dos vínculos representados pelas condições subsidiárias. No caso de sistemas holonômicos ambos os procedimentos, (1.5) e (1.6), conduzem aos mesmos resultados. Isto não ocorre se os vínculos não são holonômicos admitindo-se que o tratamento correto é o correspondente a (1.6). (*)

Classicamente, portanto, o papel desempenhado pela função lagrangiana é de importância básica para o formalismo e a existência de vínculos não holonômicos pode trazer dificuldades consideráveis. Se não podemos construir L , torna-se,

(*)Ver o excelente artigo de L.A. Pars, ref.4, para detalhes.

pelo menos, complicado ⁽⁵⁾ um formalismo hamiltoniano que se baseie apenas em (1.3-4). Por outro lado, mesmo quando conhecemos L, podem ainda ocorrer alguns casos singulares quando in tentamos construir a função hamiltoniana (1.4). Realmente, a obtenção de H pela definição (1.4) pressupõe que as definições (1.3) sejam inversíveis de modo a se obter $\dot{q}^i = \dot{q}^i(q,p,t)$. Matematicamente, a inversibilidade das equações (1.3) exige que,

$$\Delta \equiv \det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0 \quad . \quad (1.7)$$

Se

$$\Delta = 0 \quad , \quad (1.8)$$

teremos que as variáveis canônicas p_i, q^i , não são todas linearmente independentes o que se traduz na existência de relações

$$\phi(q,p) = 0 \quad , \quad (1.9)$$

entre estas variáveis. Estas relações são interpretadas como representativas de vínculos (hamiltonianos) para o sistema. Os sistemas mecânicos que se caracterizam pela condição (1.8) são ditos singulares; devemos a Dirac ^(6,7) a construção de um procedimento canônico para o tratamento destes sistemas. (*).

(*) A teoria de Dirac para sistemas singulares, refs.6,7, será aqui considerada como parte integrante de nossa linguagem. Nas referências (8)-(10) encontra-se uma apresentação clara e precisa desta teoria. Também bastante úteis são as referências (11) e (12).

O aspecto a ser enfatizado é que, se o sistema mecânico considerado não é holonômico, não temos uma função lagrangiana no sentido descrito por (1.1-2). Usualmente aceita-se que não podemos construir uma tal função para estes sistemas (^{2,13}). A existência desta função lagrangiana é obviamente desejável não apenas sob o ponto de vista clássico mas também, e particularmente, sob o ponto de vista quântico posto que o uso de procedimentos canônicos bem conhecidos (^{6,14}) pode permitir a quantização.

Neste capítulo discutiremos a questão de existência de uma função Lagrangiana para sistemas de partículas submetidas a vínculos não holonômicos. Mostraremos, considerando uma dada classe de vínculos não holonômicos, como construir uma função lagrangiana para o sistema. A técnica que desenvolvemos consiste, basicamente, em se transformar um sistema não holonômico em outro holonômico equivalente, e se fundamenta no conhecimento da superfície clássica (no espaço das configurações) onde o movimento do sistema efetivamente ocorre. Verificaremos que a função lagrangiana \bar{L} então construída traz, em si mesma, como desejável, todas as informações dinâmicas necessárias a descrição do sistema, inclusive aquelas concernentes a existência dos vínculos. Resulta que \bar{L} é singular de modo que a teoria de Dirac pode ser aplicada para estabelecer o formalismo hamiltoniano. Obteremos então a correspondente função hamiltoniana discutindo ainda as peculiaridades do método para estes casos.

2- O PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA SISTEMAS COM VÍNCULOS

Existem diversos tipos de vínculos e suas classificações podem ser efetuadas segundo várias características (1, 3, 15-18). Consideramos aqui duas classes muito importantes. Indicando por q^α e \dot{q}^α , $\alpha = 1, \dots, N$, as coordenadas e velocidades generalizadas para um sistema de N partículas, diz-se que os vínculos são holonômicos ou geométricos quando são expressos por $K < N$ equações da forma

$$\phi_i(q, t) \equiv \phi_i(q^1, \dots, q^N, t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, K. \quad (2.1)$$

Denominam-se de vínculos cinemáticos ou dependentes de velocidade aqueles que se traduzem por equações do tipo

$$\psi_i(q, \dot{q}, t) \equiv \psi_i(q^1, \dots, q^N; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N, t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, K. \quad (2.2)$$

Quando as equações (2.2) não podem ser reduzidas à forma (2.1) diz-se que os vínculos são não-holonômicos.

O problema concernente a existência de um princípio variacional para a descrição de um sistema de partículas submetidas a vínculos, é de importância fundamental em Mecânica. Conforme bem estabelecido (1-2), as equações de movimento para estes sistemas podem ser obtidas usando-se técnicas variacionais para ambos os casos: sistemas holonômicos e sistemas não holonômicos. A distinção básica entre as técnicas utilizadas está na escolha das trajetórias de comparação. Os resultados

usualmente aceitos podem ser resumidos como segue.

Designemos por $L \equiv L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) \equiv L(q, \dot{q}, t)$ a função lagrangiana correspondente ao sistema mecânico considerado, na ausência de vínculos. Diremos que L é a função lagrangiana livre do sistema. Associado a L está o vetor de Euler-Lagrange,

$$\Lambda_\alpha \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} . \quad (2.3)$$

A evolução dinâmica do sistema sob a influência dos vínculos, é dada por (2.1) e (*)

$$\Lambda_\alpha = \lambda^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^\alpha} \quad (2.4)$$

se o sistema é holonômico, e por (2.2) e

$$\Lambda_\alpha = \lambda^i \frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (2.5)$$

no caso de sistemas não-holonômicos. Nestas expressões indicamos com λ^i os multiplicadores de Lagrange. Como se sabe ^(1,2) ambos os casos podem ser tratados de forma unificada se consideramos $\dot{\phi}_i = 0$ em lugar de $\phi_i = 0$ como representativos das equações de vínculo no caso holonômico. Na presente formulação, as equações de movimento são obtidas via técnica variacional, mas

(*) Usaremos sempre, ao longo de todo o presente trabalho, a convenção da soma para índices repetidos.

não existe uma função lagrangiana $\bar{L}(q, \dot{q}, t)$ que contenha todas as informações importantes, vínculos inclusive, sobre o sistema. No caso simples em que o sistema é holonômico, é possível construir-se uma tal função (1-2):

$$\bar{L} = L + \lambda^i \phi_i, \quad (2.6)$$

de modo que o correspondente princípio variacional para \bar{L} conduz as corretas equações de movimento para o sistema. Quando o sistema é não-holonômico aceita-se (1-2, 13) que não se pode construir \bar{L} . Este é o problema central do presente capítulo mas posporemos às secções seguintes a sua discussão. Por ora, focalizaremos nossa atenção na seguinte questão:

- Dado um sistema não-holonômico, existe alguma função lagrangiana $\bar{L}(q, \dot{q}, t)$ que conduza, via princípio variacional (c.f., ., equações (1.1-2)), diretamente, às equações de movimento, (2.5), e equações de vínculo, (2.2)? - -

Acreditamos que a melhor maneira de se analisar este problema consiste em sua abordagem via condições de Helmholtz: as condições necessárias e suficientes para que um dado conjunto de equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem, possa ser obtido de um princípio variacional. (13-20). Desse modo, analisaremos a questão proposta sob a luz destas condições.

As equações (2.5) e (2.2) são estabelecidas sob a hipótese de que o sistema mecânico considerado é descrito por uma função lagrangiana livre $L(q, \dot{q}, t)$ e as equações de vínculo $\psi_i(q, \dot{q}, t) = 0$. O vetor de Euler-Lagrange (2.3) associado à

lagrangiana livre L pode ser escrito na forma (*).

$$\Lambda_\alpha \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = B_{\alpha\beta}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}^\beta + C_\alpha(q, \dot{q}, t) , \quad (2.7)$$

onde as funções $B_{\alpha\beta}(q, \dot{q}, t)$ e $C_\alpha(q, \dot{q}, t)$ devem satisfazer as seguintes condições (¹⁹⁻²⁰)

$$B_{\alpha\beta} \equiv B_{\beta\alpha} , \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial \dot{q}^\nu} \equiv \frac{\partial B_{\nu\beta}}{\partial \dot{q}^\alpha} , \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} + \frac{\partial C_\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} \equiv 2 \left(\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t} \right) , \quad (2.8c)$$

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial B_{\nu\beta}}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial^2 C_\nu}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \right) \quad (2.8d)$$

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial C_\beta}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial q^\nu \partial \dot{q}^\beta} - \frac{\partial^2 C_\beta}{\partial q^\nu \partial \dot{q}^\alpha} \right) \dot{q}^\nu + \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial t \partial \dot{q}^\beta} - \frac{\partial^2 C_\beta}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} \right] . \quad (2.8e)$$

Usando as equações (2.7) podemos reescrever as equações de movimento (2.5):

$$B_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + C_\alpha - \lambda^i \frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 . \quad (2.9)$$

(*) No que segue usaremos a seguinte convenção de índices: índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, N$; índices latinos $i, j, k, \dots = N+1, \dots, N+K$ e índices latinos maiúsculos $A, B, C, \dots = 1, 2, \dots, N+K$.

Agora, convencionando indicar o conjunto (q^α, λ^i) por Q^A segundo a correspondência

$$Q^A \equiv q^\alpha, \text{ para } A = \alpha = 1, \dots, N,$$

$$Q^{\bar{A}} \equiv \lambda^i, \text{ para } A = i = N+1, \dots, N+K,$$

definamos uma função lagrangiana $\bar{L} \equiv \bar{L}(Q, \dot{Q}, t)$ tal que

$$\bar{\Lambda}_A \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^A} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q^A} = \bar{B}_{AB}(Q, \dot{Q}, t) \ddot{Q}^B + \bar{C}_A(Q, \dot{Q}, t), \quad (2.10)$$

exigindo das funções $\bar{B}_{AB}(Q, \dot{Q}, t)$ e $\bar{C}_A(Q, \dot{Q}, t)$ que satisfaçam a:

$$\bar{B}_{AB} \equiv \bar{B}_{BA}, \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_{AB}}{\partial Q^C} \equiv \frac{\partial \bar{B}_{CB}}{\partial Q^A}, \quad (2.11b)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \dot{Q}^B} + \frac{\partial \bar{C}_B}{\partial \dot{Q}^A} \equiv 2 \left(\frac{\partial \bar{B}_{AB}}{\partial Q^C} \dot{Q}^C + \frac{\partial \bar{B}_{AB}}{\partial t} \right), \quad (2.11c)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_{AB}}{\partial Q^C} - \frac{\partial \bar{B}_{CB}}{\partial Q^A} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial \dot{Q}^B \partial \dot{Q}^C} - \frac{\partial^2 \bar{C}_C}{\partial \dot{Q}^B \partial \dot{Q}^A} \right), \quad (2.11d)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial Q^B} - \frac{\partial \bar{C}_B}{\partial Q^A} \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial Q^C \partial \dot{Q}^B} - \frac{\partial^2 \bar{C}_B}{\partial Q^C \partial \dot{Q}^A} \right) \dot{Q}^C + \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial t \partial \dot{Q}^B} - \frac{\partial^2 \bar{C}_B}{\partial t \partial \dot{Q}^A} \right]. \quad (2.11e)$$

De acordo com as equações (2.9) e (2.2) poderemos asseverar que \bar{L} é uma função lagrangiana que descreve corretamente o sistema mecânico considerado se impusermos que:

$$\bar{\Lambda}_\alpha \equiv B_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + C_\alpha - \lambda^i \frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

$$\bar{\Lambda}_j = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Estas condições representam, em termos da função lagrangiana \bar{L} , as equações de movimento, equações (2.12), e as equações de vínculo, equações (2.13), e devem ser consideradas como condições a serem impostas sobre as funções \bar{B}_{AB} e \bar{C}_A . Usando a definição (2.10) estas condições se explicitam na forma,

$$\bar{B}_{AB} \equiv B_{\alpha\beta} \quad , \quad (A=\alpha, B=\beta; \alpha, \beta=1, \dots, N) \quad (2.14)$$

$$\bar{B}_{AB} \equiv 0 \quad , \quad (A \text{ ou } B=N+1, \dots, N+K) \quad (2.15)$$

$$\bar{C}_A \equiv C_\alpha - \lambda^i \frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad , \quad (A=\alpha=1, \dots, N) \quad (2.16)$$

$$\bar{C}_A \equiv \bar{C}_j = 0 \quad , \quad (A=j=N+1, \dots, N+K) \quad (2.17)$$

O problema se reduz agora à validade do sistema (2.11a-e) restrito a satisfazer as condições (2.8a-e) e (2.14-17).

As condições (2.11a-b) verificam-se trivialmente e a validade das condições (2.11c) requer

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = 0 \quad , \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_j}{\partial \dot{q}^\beta} = 0 \quad . \quad (2.19)$$

As condições (2.11d) são verificadas sem quaisquer restrições adicionais (*) enquanto que (2.11e) exige,

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \quad , \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_j}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \dot{q}^\beta} = 0 \quad , \quad (2.21)$$

Analisemos estes resultados. As equações (2.19) permitem concluir que as funções \bar{C}_j não dependem das velocidades generalizadas: $\bar{C}_j = \bar{C}_j(q, t)$. As equações (2.18) exigem que as funções ψ_i sejam no máximo lineares em \dot{q}^α . As equações (2.20) são as condições de integrabilidade para as funções $\psi_i(q, \dot{q}, t) = 0$; asseguram a existência de um conjunto de funções $g_i(q, t) = \text{constante}$, tais que $\psi_i \equiv \dot{g}_i$. Finalmente, decorre de (2.21) que $g_i = \bar{C}_i$.

Vemos então, que existirá uma função lagrangiana(**) para um sistema de partículas submetidas a vínculos, se as equações que expressam os vínculos forem, no máximo, lineares nas velocidades generalizadas e puderem ser reduzidas à forma holonômica. Podemos mesmo, nestes casos, ir um pouco mais longe e escrever a forma explícita para a função lagrangiana correspondente. Por exemplo, usando o procedimento descrito em Engels, (ref.19), obtemos

(*) Usamos (2.19) eo fato de que as funções $\bar{C}_j(q, \dot{q}, t)$ devem representar as funções de vínculo para o sistema dado de modo que, não dependem explicitamente de λ^i .

(**) Segundo, obviamente, a aceção considerada. (c.f., equações (1.1-2)).

$$\bar{L} = L + \lambda^i \bar{C}_i . \quad (2.22)$$

3- A REDUÇÃO DE VÍNCULOS NÃO-HOLONÔMICOS À FORMA HOLONÔMICA

Os resultados da secção anterior levam à conclusão de que apenas para sistemas holonômicos é que se pode construir uma função lagrangiana, que conduza, diretamente, via princípio variacional, às equações de movimento e equações de vínculo. Vamos agora discutir esta asserção com um pouco mais de detalhes.

Por simplicidade, consideraremos um sistema submetido a apenas uma condição de vínculo, que expressaremos na forma (*)

$$\Omega \equiv X_\alpha(q) dq^\alpha = 0 , \quad (3.1)$$

fixando $N = 3$. A condição de integrabilidade para esta equação é

$$\vec{X} \cdot \text{rot } \vec{X} = 0 , \quad \vec{X} \equiv (X_1, X_2, X_3) , \quad (3.2)$$

e quando esta condição se verifica, dizemos que Ω dado por (3.1) é integrável: existe uma função (o fator de integração), digamos $M(q)$, tal que $M\Omega$ é uma diferencial exata. (**)

(*) A forma da equação (3.1) não introduz qualquer restrição essencial à presente investigação.

(**) Esta conclusão é também válida para $N \neq 3$. Especificamos $N = 3$ por simplicidade, mas os resultados básicos que obteremos são também válidos para o caso geral $N \neq 3$. [Ver ref. 21]

Geometricamente, a validade das condições de integrabilidade traduz-se na existência de pontos, estados do sistema físico considerado, que não são acessíveis, a partir de um estado inicial, ao longo de trajetórias para as quais $\Omega=0$; o resultado inverso - a inacessibilidade de estados, a partir de um estado inicial, garantir que existe um fator de integração para Ω - é também verdadeiro, sendo conhecido como o teorema de Caratheodory (²²).

Fisicamente, a validade de (3.2) é interpretada dizendo-se, simplesmente, que o vínculo representado por (3.1) é holonômico; a interpretação geométrica favorece, então, a inferência de que a existência de vínculos holonômicos conduz a uma decomposição do espaço em classes disjuntas de pontos. (¹³).

Consideremos agora que a condição (3.2) não se verifica: o vínculo representado por (3.1) é não-holonômico. A conclusão imediata é que não existe uma função, digamos $\phi(q)$, tal que $d\phi = N(q)\Omega$, onde $N(q)$ é um fator de integração. Claramente que isto não significa que a equação $\Omega = 0$ não admite soluções. Realmente, é bem conhecido o fato de que se escolhemos uma função arbitrária

$$S(q) = 0 \tag{3.3}$$

é possível determinar outra função

$$R(q) = \text{constante} = c \tag{3.4}$$

tal que (3.3) e (3.4) representem uma solução para equação (3.1).

De fato, a partir de (3.3), podemos escrever

$$dS = 0 \tag{3.3a}$$

tal que, quando especificamos a forma de $S(q)$ podemos usar (3.3) e (3.3a) para, por exemplo, determinar q^1 e dq^1 em termos dos outros q^α e dq^α . Substituindo estas relações em (3.1), resultará uma equação diferencial bidimensional que sempre pode ser integrável à forma (3.4). [Para detalhes ver, por exemplo, refs. 21 e 23]. Se atribuirmos a $S(q)$ todas as formas possíveis, geraremos todas as possíveis soluções de (3.1). Estas soluções constituem uma família de curvas, onde cada membro da família é uma solução de (3.1).

Este resultado admite a interpretação física de que uma equação de vínculo não holonômico pode ser substituída por duas equações de vínculo holonômicos, segundo o procedimento descrito. A dificuldade básica consiste na escolha da função $S(q)$. Matematicamente esta função é arbitrária, mas isto não é verdadeiro segundo um ponto de vista físico: dentre todo o conjunto das funções $S(q)$, que são matematicamente admissíveis, existe apenas uma que corresponde a minimização do funcional, que é a superfície onde ocorre a evolução do sistema. Desse modo, esta deve ser a nossa escolha $S(q) = 0$ de acordo com o postulado básico da Mecânica, o princípio de mínima ação. Uma vez determinada esta função para o problema considerado, seguimos a técnica acima desenvolvida para especificar $R(q)$. Estas duas funções, $S(q)$ e $R(q)$, comportar-se-ão como dois vínculos holonômicos que equivalem ao vínculo não holonômico dado. Como consequência imediata, decorre ser então possível construir uma função lagrangiana \bar{L} para o sistema, que contém, conforme desejá-

vel, todas as informações físicas relevantes, incluindo aquelas concernentes aos vínculos.

Podemos agora indagar sobre as razões de se construir uma função lagrangiana quando já conhecemos o movimento do sistema. O fato que destacamos é que a forma da função \bar{L} é a mesma que em (2.22). Resulta que \bar{L} é uma lagrangiana singular e desse modo a teoria de Dirac pode ser usada para a construção de uma função hamiltoniana para o sistema: um resultado claramente desejável, não apenas classicamente, mas também porque agora podemos pensar em termos de quantização do sistema segundo procedimento padrão. Do nosso ponto de vista estas razões justificam plenamente os esforços a serem desenvolvidos.

Na secção seguinte aplicaremos este método a um sistema não holonômico bem conhecido. Exploraremos o modelo em detalhes.

4- MODELO: UM DISCO ROLANDO SOBRE UM PLANO HORIZONTAL

Discutiremos o movimento de um disco homogêneo, de massa m e raio R , que rola, sem deslizar, obrigado a permanecer verticalmente sobre um plano horizontal perfeitamente áspero. Consideraremos o disco com bordas estreitas (agudas) o que permitirá expressar as equações de vínculo em forma compacta. Este é um problema bastante conhecido na literatura. [Ver, por exemplo, refs. (1)-(2)-(17)-(18)]. As coordenadas generalizadas serão indicadas da seguinte maneira: q_1 e q_2 são

as projeções do centro de massa do disco sobre o plano horizontal; q_3 indicará o ângulo determinado entre o plano do disco e o eixo $-q_1$; com q_4 designaremos um ângulo genérico entre um diâmetro do disco e a linha vertical.

A função lagrangiana livre para o sistema é

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{q}_4^2, \quad (4.1)$$

onde I_0 é o momento de inércia do disco com relação a um eixo passando por seu centro e I_1 representa o momento de inércia com relação a um diâmetro. Os vínculos para o sistema são usualmente expressos pelas equações:

$$\phi_1 = R \dot{q}_4 \cos q_3 - \dot{q}_1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\phi_2 = R \dot{q}_4 \sin q_3 - \dot{q}_2 = 0, \quad (4.3)$$

e as correspondentes condições de integrabilidade não se verificam: as equações (4.2-3) representam dois vínculos não holonômicos. As equações de movimento, obtidas seguindo-se o procedimento indicado na secção 2, são:

$$m\ddot{q}_1 = -\lambda_1, \quad (4.4a)$$

$$m\ddot{q}_2 = -\lambda_2, \quad (4.4b)$$

$$I_1\ddot{q}_3 = 0, \quad (4.4c)$$

$$I_0\ddot{q}_4 = \lambda_1 R \cos q_3 + \lambda_2 R \sin q_3, \quad (4.4d)$$

que devem ser complementadas com os vínculos (4.2-3). Podemos eliminar os multiplicadores de Lagrange nestas equações. Obtemos, $\lambda_1 = m R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \operatorname{sen} q_3$, e, $\lambda_2 = -m R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \operatorname{cos} q_3$. Usando estes valores reescrevemos as equações (4.4a-d) como

$$\ddot{q}_1 = -R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \operatorname{sen} q_3 \quad (4.5a)$$

$$\ddot{q}_2 = R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \operatorname{cos} q_3 \quad (4.5b)$$

$$\ddot{q}_3 = 0 \quad (4.5c)$$

$$\ddot{q}_4 = 0 \quad (4.5d)$$

As soluções para estas equações com as restrições (4.2-3) e correspondentes a dados iniciais arbitrários, $\vec{q}_0 = (q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40})$, $\dot{\vec{q}}_0 = (\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dot{q}_{30}, \dot{q}_{40})$ são

$$q_1 = a + R \frac{\dot{q}_{40}}{\dot{q}_{30}} \operatorname{sen}(\dot{q}_{30} t + q_{30}) \quad (4.6a)$$

$$q_2 = b - R \frac{\dot{q}_{40}}{\dot{q}_{30}} \operatorname{cos}(\dot{q}_{30} t + q_{30}) \quad (4.6b)$$

$$q_3 = \dot{q}_{30} t + q_{30} \quad (4.6c)$$

$$q_4 = \dot{q}_{40} t + q_{40} \quad (4.6d)$$

onde a e b são duas constantes.

Observamos agora que as equações de vínculo para um

dados sistema podem ser expressas, geralmente, em muitas formas diferentes. Por exemplo, para o problema que consideramos pode ser demonstrado (^{1,2}) que o conjunto de equações (não lineares):

$$\phi'_1 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - R^2 \dot{q}_4^2 = 0, \quad (4.7a)$$

$$\phi'_2 = \dot{q}_1 \operatorname{sen} q_3 - \dot{q}_2 \operatorname{cos} q_3 = 0. \quad (4.7b)$$

é igualmente satisfatório. É também possível, no caso considerado, representar os vínculos do sistema por uma única equação (^{1*}):

$$\phi = \dot{q}_1 \operatorname{tg} q_3 - \dot{q}_2 = 0. \quad (4.8)$$

Usaremos (4.8) para expressar os vínculos. As correspondentes equações de movimento são

$$m\ddot{q}_1 = \lambda \operatorname{tg} q_3, \quad (4.9a)$$

$$m\ddot{q}_2 = -\lambda, \quad (4.9b)$$

$$\ddot{q}_3 = 0, \quad (4.9c)$$

$$\ddot{q}_4 = 0, \quad (4.9d)$$

que juntas a (4.8) descrevem a dinâmica do sistema. Exatamente como antes, eliminamos o multiplicador de Lagrange nestas equações. Obtemos

$$\lambda = -m \dot{q}_1 \dot{q}_3 .$$

Usando este valor para λ podemos resolver o sistema (4.9a-d).

Resulta,

$$q_1 = a + \frac{u}{\dot{q}_{30}} \text{sen}(\dot{q}_{30}t + q_{30}) , \quad (4.10a)$$

$$q_2 = b + vt - \frac{u}{\dot{q}_{30}} \text{cos}(\dot{q}_{30}t + q_{30}) , \quad (4.10b)$$

$$q_3 = \dot{q}_{30} t + q_{30} , \quad (4.10c)$$

$$q_4 = \dot{q}_{40}t + q_{40} , \quad (4.10d)$$

onde a, b, u e v são constantes e ainda não usamos a condição (4.8).(*). Introduzindo esta condição, obtemos $v=0$. Assim, do sistema (4.10) resulta:

$$(q_1 - a)^2 + (q_2 - b)^2 = \frac{u^2}{\dot{q}_{30}^2} ,$$

$$\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 = u^2$$

sendo fácil verificar que $u = R \cdot \dot{q}_{40}$ de modo que o disco rola com esta velocidade constante sobre um círculo de raio $R \dot{q}_{40} / \dot{q}_{30}$ com centro em (a, b) .⁽¹⁾. Decorre também, com estes valores para u e v , que as expressões (4.10a-d) reduzem-se às soluções (4.6a-d).

(*)De modo a explicitar o valor de λ usamos apenas $\dot{\phi}=0$ e não $\phi=0$.

Aplicaremos agora o nosso método a este problema. Por simplicidade faremos $a = b = 0$. Considerando as soluções (4.10) é imediato que o movimento do sistema ocorre sobre a superfície definida pela equação

$$\bar{S}(q) \equiv q_1 + q_2 \operatorname{tg} q_3 = 0 \quad . \quad (4.11)$$

Esta superfície deve ser tomada como a nossa função $S(q)$. (c. f., equação (3.3)). Seguindo o método descrito na secção anterior obtemos

$$R(q) = q_2 + c \cos q_3 = 0 \quad , \quad (4.12)$$

onde c é uma constante cujo valor depende das condições iniciais. As equações (4.11-12) são os vínculos holonômicos que substituem o vínculo não-holonômico dado pela equação (4.8). Por outro lado as equações (4.11-12) são equivalentes a:

$$S(q) \equiv q_1 - c \operatorname{sen} q_3 = 0 \quad , \quad (4.11a)$$

$$R(q) \equiv q_2 + c \cos q_3 = 0 \quad , \quad (4.13)$$

e usaremos então este último conjunto como as equações holonômicas correspondentes ao sistema não holonômico considerado (*). A construção da função lagrangiana é imediata:

(*) Escolhemos trabalhar com o conjunto (4.11a) e (4.13) porque, usando este conjunto, muitos cálculos desnecessários são evitados no que segue.

$$\bar{L} = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{q}_4^2 + \lambda_1(q_2 + c \cos q_3) + \lambda_2(q_1 - c \operatorname{sen} q_3) . \quad (4.14)$$

A função lagrangiana (4.14) contém todas as informações relevantes sobre o sistema. Com efeito, considerando os multiplicadores de Lagrange como graus de liberdade adicionais as equações de Euler-Lagrange correspondentes a \bar{L} são

$$m\ddot{q}_1 = \lambda_2 , \quad (4.15a)$$

$$m\ddot{q}_2 = \lambda_1 , \quad (4.15b)$$

$$I_1\ddot{q}_3 = -c(\lambda_1 \operatorname{sen} q_3 + \lambda_2 \cos q_3) , \quad (4.15c)$$

$$\ddot{q}_4 = 0 , \quad (4.15d)$$

$$q_2 + c \cos q_3 = 0 , \quad (4.15e)$$

$$q_1 - c \operatorname{sen} q_3 = 0 . \quad (4.15f)$$

Se agora eliminamos λ_1 e λ_2 ,

$$\lambda_1 = m c \dot{q}_3^2 \cos q_3 , \quad \lambda_2 = -m c \dot{q}_3^2 \operatorname{sen} q_3 ,$$

poderemos reescrever (4.15a-d) na forma:

$$\ddot{q}_1 = -c\dot{q}_3^2 \operatorname{sen}q_3 ,$$

$$\ddot{q}_2 = c\dot{q}_3^2 \operatorname{cos}q_3 ,$$

$$\ddot{q}_3 = 0 ,$$

(4.16)

$$\ddot{q}_4 = 0 .$$

Resolvendo este sistema obteremos as mesmas soluções que as expressas por (4.6a-d) com $a = b = 0$. (*)

5- CONSIDERAÇÕES SOBRE O FORMALISMO HAMILTONIANO PARA SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS.

Uma vez determinada a função lagrangiana associada a um sistema não-holonômico podemos desenvolver o formalismo hamiltoniano. O procedimento a ser seguido é, essencialmente, o preconizado pela teoria de Dirac para sistemas com vínculos (^{6,7}), posto que agora temos uma função lagrangiana singular para descrever o sistema. Ocorrem, no entanto, algumas peculiaridades que julgamos relevante sejam discutidas. Com

(*) Conforme ressaltamos anteriormente, o valor da constante c depende da especificação dos dados iniciais. Para os dados correspondentes às soluções (4.6a-d) é fácil comprovar que c corresponde ao raio $R\dot{q}_{40}/\dot{q}_{30}$ do círculo descrito pelo disco.

este objetivo analisaremos agora o problema razoavelmente geral de se estabelecer o formalismo hamiltoniano para sistemas clássicos descritos por uma função lagrangiana da forma dada por (2.22).

Reescrevemos então,

$$\bar{L} = L(q, \dot{q}, t) + \lambda^i \phi_i(q) \quad . \quad (5.1)$$

Nesta expressão, as funções λ^i são os multiplicadores de Lagrange e $\phi_i(q)$ são as funções de vínculo holonômicos que substituem em os vínculos não-holonômicos do problema original. No entanto, estas interpretações restritivas são desnecessárias. Realmente, os multiplicadores de Lagrange λ^i devem ser tratados como novas coordenadas generalizadas (o que, formalmente, amplia as dimensões do espaço das configurações) e as funções ϕ_i devem ser consideradas como funções arbitrárias no sentido de que não precisamos visualizá-las como vínculos. Esta informação decorre naturalmente como uma consequência da teoria como veremos agora.

De modo a passar ao formalismo hamiltoniano, definiremos os momenta canonicamente conjugados às coordenadas generalizadas (que agora são especificadas pelo conjunto $(q^\alpha, q^i \equiv \lambda^i)$):

$$p_\alpha = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad , \quad (5.2)$$

$$\pi_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\lambda}^i} = 0 \quad . \quad (5.3)$$

A última expressão é uma decorrência direta do fato de que \bar{L}

não depende das velocidades generalizadas $\dot{\lambda}_i$.

As equações (5.3) são os vínculos primários da teoria e devem então ser escritas como equações fracas:

$$\pi_i \approx 0 \quad . \quad (5.4)$$

Assim, os graus de liberdade adicionais introduzidos estão restritos por estas equações. Em geral este resultado tem o significado de que as "coordenadas" λ^i ou são arbitrárias ou são determinadas. Veremos que neste caso são determinadas.

A hamiltoniana canônica para o sistema é

$$\begin{aligned} \bar{H}_c &= p_\alpha \dot{q}^\alpha - \bar{L} \\ &= p_\alpha \dot{q}^\alpha - L - \lambda^i \phi_i = H_c - \lambda^i \phi_i \quad , \quad (5.5) \end{aligned}$$

onde H_c é a hamiltoniana canônica para o sistema na ausência dos vínculos, i.e, a "hamiltoniana livre". De acordo com a teoria de Dirac devemos adicionar à hamiltoniana (5.5) uma combinação linear dos vínculos primários (5.4) e impor as condições de consistência (que correspondem à preservação temporal dos vínculos.). Por outro lado, como é usual em teorias onde alguns momenta são nulos (*) podemos "congelar" os momenta π_i considerando as equações (5.4) como equações fortes.

As condições de consistência para as equações (5.4) conduzem imediatamente a

(*)Por exemplo, este é o caso que ocorre no formalismo canônico da Relatividade Geral com os momenta conjugados às funções "lapse" e "shift". Ver referência 24. [Ver também ref.7].

$$\phi_i(q) \approx 0 \quad , \quad (5.6)$$

e assim recuperamos a informação de que as funções ϕ_i representam os vínculos da teoria. Devemos agora continuar o procedimento: impomos a preservação temporal dos vínculos secundários (5.6); obtidos novos vínculos secundários, repetimos o processo... . Deparar-nos-emos agora com uma situação nova: ocorre, pelo menos nos casos que estudamos, que o segundo passo após (5.6) conduz à determinação das funções λ^i em termos das coordenadas q^α e momenta p^α . Neste ponto o processo deve ser terminado.(7). E ficaremos com um número bem definido de vínculos secundários que, efetivamente, são de segunda classe. O procedimento a ser então seguido é o de usar os parêntesis de Dirac com relação a estes vínculos e escrevê-los como equações fortes. Desse modo, trabalharemos efetivamente com a hamiltoniana canônica livre expressando as equações de movimento em termos dos parêntesis de Dirac:

$$\hat{P} = \{F, H_c\}^* = \{F, H_c\} - \{F, \phi_i\} C_{ij}^{-1} \{\phi_j, H_c\} \quad (5.7)$$

onde C_{ij}^{-1} indica o elemento da matriz inversa a $C = \|\{\phi_i, \phi_j\}\|$.

6- O FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O DISCO ROLANDO NUM PLANO HORIZONTAL

Aplicaremos agora o método descrito na secção anterior ao modelo do disco rolando em um plano horizontal discu-

tido na secção 4.

A função lagrangiana é dada por (c f., expressão (4.14)),

$$\bar{L} = \frac{1}{2} [m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + I_1 \dot{q}_3^2 + I_0 \dot{q}_4^2] + q_5 \theta_1 + q_6 \theta_2, \quad (6.1)$$

onde usamos a seguinte notação:

$$\lambda_1 = q_5, \quad (6.1a)$$

$$\lambda_2 = q_6, \quad (6.1b)$$

$$q_2 + c \cos q_3 = \theta_1, \quad (6.1c)$$

$$q_1 - c \sin q_3 = \theta_2. \quad (6.1d)$$

A hamiltoniana canônica é

$$\bar{H}_c = H_c - q_5 \theta_1 - q_6 \theta_2 \quad (6.2)$$

onde H_c é a hamiltoniana canônica livre

$$H_c = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2I_1} p_3^2 + \frac{1}{2I_0} p_4^2. \quad (6.3)$$

Os vínculos primários são

$$\pi_1 \approx 0, \quad \pi_2 \approx 0, \quad (6.4)$$

com π_i definido pelas equações (5.3). As condições de consistência $\dot{\pi}_i \approx 0$ conduzem a

$$\theta_1 \approx 0 \quad , \quad (6.5a)$$

$$\theta_2 \approx 0 \quad . \quad (6.5b)$$

A imposição da preservação temporal destes vínculos resultará em mais dois vínculos secundários:

$$\theta_3 = \frac{p_2}{m} - \frac{cp_3}{I_1} \text{sen}q_3 \approx 0 \quad , \quad (6.6a)$$

$$\theta_4 = \frac{p_1}{m} - \frac{cp_3}{I_1} \text{cos}q_3 \approx 0 \quad , \quad (6.6b)$$

Agora, impondo a preservação temporal de θ_3 e θ_4 determinaremos q_5 e q_6 :

$$q_5 = \frac{mcp_3^2}{I_1^2} \text{cos}q_3 \quad , \quad (6.7a)$$

$$q_6 = - \frac{mcp_3^2}{I_1^2} \text{sen}q_3 \quad , \quad (6.7b)$$

O processo deve terminar neste ponto conforme vimos. Ficamos então com um conjunto de vínculos secundários que é $\{\theta_i\}, i=1, \dots, 4$. Estes vínculos são de segunda classe:

$$\{\theta_1, \theta_2\} = 0 \quad , \quad \{\theta_2, \theta_3\} = \frac{c^2}{I_1} \text{sen}q_3 \text{cos}q_3 \quad , \quad (6.8)$$

$$\{\theta_1, \theta_3\} = \frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \text{sen}^2q_3 \quad , \quad \{\theta_2, \theta_4\} = \frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \text{cos}^2q_3 \quad ,$$

$$\{\theta_1, \theta_4\} = \frac{c^2}{I_1} \text{sen}q_3 \text{cos}q_3 \quad , \quad \{\theta_3, \theta_4\} = \frac{c^2}{I_1^2} p_3 \quad .$$

Para escrevermos as equações hamiltonianas de movimento precisamos conhecer a matriz C^{-1} que é a matriz inversa de $C = \|\{\phi_i, \phi_j\}\|$. Das equações (6.8) resulta

$$\Delta \equiv \det \|\{\theta_i, \theta_j\}\| = \left(\frac{I_1 + mc^2}{m^2 I_1}\right)^2 \neq 0, \quad (6.9)$$

de modo que podemos determinar C^{-1} . É fácil comprovar então que,

$$= \frac{m^2 I_1}{I_1 + mc^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{c^2 p_3}{I_1^2} & -\left(\frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \cos^2 q_3\right) & \left(\frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen} q_3 \cos q_3\right) \\ -\frac{c^2 p_3}{I_1^2} & 0 & \frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen} q_3 \cos q_3 & -\left(\frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen}^2 q_3\right) \\ \left(\frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \cos^2 q_3\right) & -\left(\frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen} q_3 \cos q_3\right) & 0 & 0 \\ -\left(\frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen} q_3 \cos q_3\right) & \left(\frac{1}{m} + \frac{c^2}{I_1} \operatorname{sen}^2 q_3\right) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Agora os vínculos $\{\theta_i\}$ devem ser postos como fortemente nulos e o parêntesis de Dirac deve ser usado para escrever as equações de movimento. Sendo $F(q,p)$ uma variável dinâmica arbitrária é imediato que,

$$\dot{F} = \{F, H_c\}^* = \{F, H_c\} - \frac{mcp_3^2}{I_1^2} [\{F, \theta_1\} \cos q_3 - \{F, \theta_2\} \operatorname{sen} q_3] \quad (6.11)$$

sendo simples verificar que estas equações representam as mesmas equações de movimento que as obtidas anteriormente. (c f., equações (4.16)).

CAPÍTULO 2

A TEORIA CLÁSSICA DOS STRINGS RELATIVÍSTICOS

1 - INTRODUÇÃO

O surgimento do conceito de string, a teoria a seguir desenvolvida e suas hoje inúmeras aplicações em diferentes ramos da Física Teórica, teve sua origem diretamente relacionada à necessidade de uma teoria para explicar as interações fortes. Realmente, diferentemente das interações gravitacional, fraca e eletromagnética, ainda não foi possível construir uma teoria que englobe os dados experimentais conhecidos sobre as interações hadrônicas ou fortes. Por outro lado, os argumentos teóricos desenvolvidos objetivando uma melhor compreensão da estrutura dos hadrons, permitem obter uma idéia razoável sobre estes objetos. De fato, sabe-se hoje que os hadrons não se comportam como partículas puntais apresentando-se como objetos com extensão e uma dada estrutura interna: um pequeno número de componentes básicos, os "quarks", que se mantêm ligados por campos vetoriais de "gluons" que assim funcionam como intermediários da interação.

Dentre todas as teorias para explicar as interações fortes, os denominados modelos Duais estão, sem dúvida, entre as mais exploradas. Os modelos duais tiveram sua origem na extensão do método da matriz S e constituem hoje um vasto campo da Física Teórica, apresentando, em sua evolução, uma aproximação cada vez maior a uma teoria (local) de campo. Os consecutivos melhoramentos do formalismo dos modelos Duais conduziram à

conclusão de que os resultados básicos obtidos podem ser inteiramente reproduzidos em termos de uma teoria de objetos relativísticos unidimensionais: os strings^(*).

A estrutura do formalismo dos strings relativísticos tem, desde então, mostrado ser muito mais proficiente em informações sobre a estrutura das interações hadrônicas do que os modelos Duais, permitindo, inclusive, melhor se visualizar as razões das dificuldades encontradas com aqueles modelos. De pronto reconheceu-se a necessidade de se aprofundar a análise das propriedades de uma teoria para objetos relativísticos com extensão espacial. Como resultado deparamo-nos hoje com uma teoria extremamente rica em aplicações nos mais diversos ramos da Física. Por exemplo, em super simetria o string pode transportar excitações espinoriais⁽²⁵⁾; na teoria de solitons o string se torna uma excitação que preserva sua forma após as colisões⁽²⁶⁾; em teorias de Gauge de Yang-Mills argumentos são levantados de modo a estabelecer que da teoria resultam soluções clássicas tipo string no limite de acoplamento forte⁽²⁷⁾; destacamos também que na teoria de monopolos magnéticos, proposta por Dirac há já bastante tempo⁽²⁸⁾, ocorre um objeto tipo string, uma linha de campo magnético, que liga dois monopolos [mas que não tem existência física real].

Uma função densidade Lagrangiana para o string foi proposta originalmente por Nambu como proporcional à área da superfície varrida pelo string durante a sua evolução no es-

(*) Cordas. Manteremos nesse trabalho a denominação original.

paço-tempo⁽²⁹⁾. Trabalhos posteriores contribuíram fortemente para o estabelecimento das bases do formalismo⁽³⁰⁻³³⁾. Um método de quantização da teoria foi sugerido por Goddard e outros⁽³⁴⁾. Uma teoria de strings com spin foi desenvolvida^(35,36). O formalismo de strings em interação desenvolvido por Mandelstam⁽³⁷⁾ encontra eco em diversos outros trabalhos^(38,39). Encontramos ainda vários trabalhos de revisão (Review papers) da teoria⁽⁴⁰⁻⁴³⁾. É, no entanto, bem mais recente o interesse pela então chamada teoria geométrica dos strings⁽⁴⁴⁻⁴⁷⁾.

No presente Capítulo consideraremos a teoria dos strings relativísticos sob o ponto de vista da teoria de Dirac para sistemas singulares. Discutiremos, sob esse prisma, as propriedades básicas do sistema físico descrito pela densidade Lagrangiana de Nambu atribuindo-lhes uma nova roupagem, mais condizente aos nossos objetivos. Destacaremos a "covariância geral" da teoria como o aspecto relevante originador da característica liberdade de gauge do sistema e analisaremos, com algum detalhe, a escolha mais simples de gauge que é denominada de o gauge ortonormal para o string.



2 - CARACTERIZAÇÃO DO STRING

O string é um contínuo mecânico-relativístico unidimensional. Matematicamente é uma curva, aberta ou fechada, finita ou infinita, no espaço físico, com forma e posição variáveis como função do tempo; é a extensão do conceito clássico de um objeto tipo ponto. Na teoria da relatividade o movimento de um ponto é descrito por sua linha mundo no espaço-tempo; a evolução do string no espaço-tempo descreve uma superfície curva bidimensional, S , cujo conhecimento é o objetivo de sua descrição dinâmica.

Diremos que S é a superfície de evolução ou superfície mundo do string e a caracterizaremos parametricamente por

$$y^\alpha = y^\alpha(x^i) , \quad (2.1)$$

indicando com y^α as componentes do quadrivetor de posição de S segundo um observador externo, no espaço-tempo(*). As coordenadas internas (parâmetros) x^i especificam o sistema coordenado curvilíneo estabelecido sobre S . Convencionaremos ainda usar $x^2 \equiv \sigma$ para rotular pontos sobre o string e indicaremos com $x^1 \equiv \tau$ o parâmetro correspondente à evolução destes pontos.

Nosso tratamento da dinâmica dos strings relativísticos ater-se-á exclusivamente às considerações relativas a es

(*) Ao longo do presente capítulo adotaremos a convenção de indicar pelos índices gregos $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ os valores 0, 1, 2 e 3. Índices latinos i, j, k, l, \dots assumirão os valores 1 e 2.

paço-tempo plano com assinatura lorentziana, que explicitaremos escrevendo o tensor métrico na forma

$$\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(+1, -1, -1, -1) .$$

A introdução de uma dinâmica para o string é feita com base nas expressões (2.1), que caracterizam S, considerando y^α como as coordenadas generalizadas do sistema. As correspondentes velocidades generalizadas serão indicadas na forma

$$\dot{y} \equiv (\dot{y}^0, \dot{y}^1, \dot{y}^2, \dot{y}^3) \quad , \quad \dot{y}^\alpha \equiv \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau} \equiv y^\alpha_{,1} \quad , \quad (2.2)$$

sendo também necessárias as quantidades

$$y' \equiv (y^{0'}, y^{1'}, y^{2'}, y^{3'}) \quad ; \quad y^{\alpha'} \equiv \frac{\partial y^\alpha}{\partial \sigma} \equiv y^\alpha_{,2} \quad . \quad (2.3)$$

A compatibilidade da descrição dinâmica do string com os princípios básicos da teoria da Relatividade vem exigir que nenhum ponto do string em evolução possa atingir velocidades superiores à velocidade da luz:

$$\dot{y}^2 \equiv \dot{y} \cdot \dot{y} \equiv \eta_{\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta \equiv \dot{y}^\alpha \dot{y}_\alpha \geq 0 . \quad (2.4)$$

Assim, \dot{y} é um vetor tipo tempo (ou luz).

Por outro lado, de acordo com a definição dada, o string é um objeto tipo espaço(*), de modo que, conforme o sig-

(*) Ressaltamos o fato de que podemos identificar a variável τ com o tempo, $\tau = y^0 = t$, particularizando desse modo um referencial lorentziano. Neste caso, para cada instante t , o string é uma curva que se caracteriza pelo conhecimento das funções $y^a = y^a(t, \sigma)$, $a = 1, 2, 3$.

nificado que atribuímos à variável $x^2 \equiv \sigma$ escreveremos também,

$$y'^2 \equiv y' \cdot y' \equiv \eta_{\alpha\beta} y'^{\alpha} y'^{\beta} \equiv y'^{\alpha} y'_{\alpha} < 0. \quad (2.5)$$

As condições (2.4-5) representam restrições a serem impostas, a priori, sobre a natureza de S e se fazem necessárias de modo a permitir a interpretação de S como a superfície de evolução de um objeto unidimensional tipo espaço. Em particular, a condição (2.4) nos assegura que sobre S e em cada um de seus pontos existe um deslocamento infinitesimal que aponta na direção dentro ou sobre o cone de luz local. Diremos então, que S é uma superfície tipo tempo (causal).

3 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O STRING

Para caracterizar o movimento do string no espaço-tempo devemos determinar S; a dinâmica do string é especificada pelo conhecimento de sua superfície de evolução. Por analogia ao caso relativístico da partícula puntual e seguindo proposição de Nambu (²⁹), escreveremos o funcional de ação para o sistema como proporcional à área da superfície limitada pelas configurações inicial, $\tau = \tau_1$, e final, $\tau = \tau_2$, do sistema:

$$J = -N \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma (-g)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Nesta expressão, g é o determinante da matriz constituída dos elementos do tensor métrico induzido sobre S,

$$g = \det || g_{ij} || \quad , \quad g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \quad (3.2)$$

ε N é uma constante com dimensão de inverso de comprimento ao quadrado (em unidades ħ = 1 = c). Em termos das variáveis dinâmicas $y^{\alpha}(x)$, podemos escrever

$$J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \mathcal{L}(\dot{y}^{\alpha}, y^{\alpha'}) \quad (3.3)$$

identificando a densidade lagrangiana para o string

$$\mathcal{L}(\dot{y}^{\alpha}, y^{\alpha'}) \equiv -N (-g)^{1/2} = -N [(\dot{y}^{\alpha} y'_{\alpha})^2 - (\dot{y}^{\rho} \dot{y}_{\rho})(y^{\gamma'} y'_{\gamma})]^{1/2} \quad (3.4)$$

As equações de movimento são obtidas via princípio de mínima ação exigindo que J, dado por (3.3-4), seja estacionário frente às variações infinitesimais da superfície,

$$y^{\alpha}(x) \rightarrow y^{\alpha}(x) + \delta y^{\alpha}(x) \quad (3.5)$$

entre as correspondentes configurações inicial e final do string. Considerando, mais ainda, strings finitos e abertos e fixando em $0 \leq \sigma \leq \pi$ o intervalo de variação para o parâmetro σ com

$$\delta y^{\alpha}(\tau_1, \sigma) = 0 = \delta y^{\alpha}(\tau_2, \sigma) \quad (3.6)$$

teremos (⁴⁰⁻⁴³).

$$\delta J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\alpha'}} \delta y^\alpha \right) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\alpha'}_{,i}} \right) \delta y^\alpha = 0. \quad (3.7)$$

Com exceção das condições (3.6), as variações δy^α de (3.5) são arbitrárias, de modo que de (3.7) resultam

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\alpha'}_{,i}} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\alpha'}} = 0, \quad \text{em } \sigma = 0, \pi. \quad (3.9)$$

As equações (3.8) são as equações de movimento que descrevem a evolução do string no espaço-tempo. As equações (3.9) representam restrições a serem impostas à evolução de strings abertos finitos e, consentindo um pequeno deslize no rigor conceitual, serão doravante referidas como as condições de contorno para o string. Estas condições não existem, com base em argumentos físicos bem conhecidos, quando consideramos strings infinitamente longos, também não ocorrendo quando consideramos strings finitos fechados (*). Em verdade, as condições de contorno (3.9) são bastante restritivas, conforme verificaremos, e decorrem essencialmente do fato de considerarmos strings com massa de repouso nula. Este aspecto e, principalmente, uma interessante discussão sobre a consistência do procedimento usual de obtenção

(*) Se fixarmos em $-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ a faixa de variação de σ para o string fechado, as correspondentes "condições de contorno" exigiriam apenas que $\frac{\partial}{\partial y^{\alpha'}}$ assumam os mesmos valores em $\sigma = \sigma_0, -\sigma_0$. [Para detalhes, ver referência 43].

dos resultados (3.8-9) a partir de (3.3-5) são analisados na referência (48).

4 - SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO. SIGNIFICADO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

O nosso objetivo nesta secção será o de explorar as potencialidades da descrição clássica via princípio variacional, para obter novas informações sobre a dinâmica do string. Essencialmente, nos interessará explicitar as leis de conservação associadas às simetrias da função lagrangiana definida por (3.4) para o string.

A ação para o string é, por construção (c f., equações (3.3-4)), invariante frente ao grupo de transformações de Poincaré. Esta invariância tem o significado físico (Teorema de Noether) de conduzir à existência de quantidades localmente conservadas que estão associadas aos geradores do grupo. Para estabelecermos estas quantidades de forma mais imediata consideraremos a variação funcional da ação (3.3-4) correspondente às variações (3.5) sem, no entanto, restringirmo-nos à validade das condições (3.6). É dizer, não fixaremos as configurações inicial e final do string. Ao invés disso, especializaremos nosso problema variacional impondo a validade das equações (3.8). É então imediato (*)⁽⁴¹⁾ que:

(*) Esta forma de procedimento é bem conhecida, mas aproveitamos a oportunidade para nos referirmos ao excelente trabalho desenvolvido por Hill (ref. 49), sistematizando um procedimento para a obtenção de teoremas de conservação associados às simetrias do sistema. Nossa expressão (4.1) é um caso particular do resultado geral lá obtido (eq. 19 - ref. 49).

$$\delta J = \int_S d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\alpha}_k} \delta y^\alpha \right) . \quad (4.1)$$

Agora, consideremos inicialmente uma "translação pura",

$$\delta y^\alpha \equiv \varepsilon^\alpha , \quad (4.2)$$

com ε^α constantes, arbitrários e infinitesimais. A invariância da ação frente a estas transformações permite concluir, de (4.1), que

$$\varepsilon^\alpha \int_S d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\alpha}_k} \right) = 0 . \quad (4.3)$$

A arbitrariedade dos ε^α e a validade de (4.3) para qualquer escolha da região de integração S conduzem às equações de movimento (3.8). Mais ainda, como às simetrias de translação a quantidade conservada associada é o tensor momentum-energia do sistema, decorre o significado físico das equações de movimento para o string: elas refletem tão somente a conservação local da energia-momentum do sistema. Também, no caso específico de strings finitos abertos, fica claro o significado das condições de contorno: elas garantem que não há fluxo de energia-momentum através dos extremos livres do string. Para precisar, matematicamente, este resultado, procederemos como segue.

Começemos por definir o momentum canonicamente conjugado à variável dinâmica $y^\alpha(x)$:

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha} = -K^2 \mathcal{L}^{-1} \left[y'^2 \dot{y}'_\alpha - (\dot{y} \cdot y') y'_\alpha \right] , \quad (4.4)$$

onde usamos a definição (3.4) para escrever a última igualdade. Definamos também as quantidades,

$$\Pi_{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}^{\alpha'}} = - N^2 \mathfrak{L}^{-1} \left[\dot{y}^2 y'_{\alpha} - (\dot{y} \cdot y') \dot{y}_{\alpha} \right] \quad (4.5)$$

onde novamente fizemos apelo à definição (3.4) para escrever o último membro desta expressão. Observemos que, em termos destas quantidades, as equações de movimento (3.8) e as condições de contorno, equações (3.9), se reescrevem, respectivamente, como

$$\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_{\alpha}}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.8.1)$$

$$\Pi_{\alpha}(\tau, 0) = 0 = \Pi_{\alpha}(\tau, \pi). \quad (3.9.1)$$

Agora, usando as definições (4.4-5), podemos expressar a lei de conservação obtida (cf., equação (4.3)) na forma

$$\int_0^{\pi} d\sigma P_{\alpha} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Pi_{\alpha} \Big|_0^{\pi} = 0, \quad (4.6)$$

o que sugere a definição de

$$\bar{P}_{\alpha} \equiv \int_C d\bar{P}_{\alpha} \equiv \int_C (P_{\alpha} d\sigma + \Pi_{\alpha} d\tau) \quad (4.7)$$

como o fluxo total de energia-momentum do string através de uma curva qualquer C sobre S (4^0-4^1). Desse modo, podemos obter o (quadri) momentum total do string considerando τ fixo em (4.7):

$$\mathcal{P}_\alpha = \int_0^\pi d\sigma P_\alpha(\tau, \sigma), \quad (4.8)$$

onde a integração agora se efetua sobre uma qualquer curva sobre S que ligue um extremo ao outro do string ou, em particular, ao longo do próprio string para o "instante" (τ) fixo considerado. A conservação temporal (τ) de \mathcal{P}_α é uma decorrência imediata da validade das condições de contorno (3.9.1), segundo se depreende facilmente da expressão (4.6):

Consideremos agora uma transformação infinitesimal de Lorentz

$$\delta y^\alpha = \omega^\alpha_\beta y^\beta. \quad (4.9)$$

Usando o resultado (4.1) e a propriedade de invariância da ação (3.3-4) frente a estas transformações, obtemos a lei de conservação

$$\omega^\alpha_\beta \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha_{,k}} y^\beta \right) \right] d\tau d\sigma = 0. \quad (4.10)$$

Lembrando as definições (4.4-5) e integrando por partes resulta

$$\frac{1}{2} \omega^\alpha_\beta \left[\int_0^\pi d\sigma (P_\alpha y_\beta - P_\beta y_\alpha) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\Pi_\alpha y_\beta - \Pi_\beta y_\alpha) \Big|_0^\pi \right] = 0, \quad (4.11)$$

o que nos sugere a definição do momentum angular,

$$\bar{L}^{\alpha\beta} \equiv \int_c \left[(P^\alpha y^\beta - P^\beta y^\alpha) d\sigma - (\pi^\alpha y^\beta - \pi^\beta y^\alpha) d\tau \right]. \quad (4.12)$$

Como antes, o momentum angular total do string se obtêm com τ fixo:

$$L^{\alpha\beta} \equiv \int_0^\pi (P^\alpha y^\beta - P^\beta y^\alpha) d\sigma \quad (4.13)$$

e sua conservação temporal (τ) é uma decorrência das condições de contorno (3.9.1), como se verifica a partir de (4.11).

Encerraremos esta secção estabelecendo uma interpretação geométrica para as restrições impostas pelas condições de contorno. Usando as expressões (4.5), as condições (3.9.1) trazem a exigência:

$$\dot{y}^2 y'_\alpha = (\dot{y} \cdot y') \dot{y}_\alpha, \quad \text{em } \sigma = 0, \pi.$$

Multiplicando-se esta expressão por $y^{\alpha'} = \eta^{\alpha\beta} y'_\beta$ obtemos

$$\dot{y}^2 y'^2 = (\dot{y} \cdot y')^2 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi, \quad (4.14)$$

um resultado que contém a informação de que a densidade lagrangiana, equação (3.4), se anula nos extremos livres do string. Comparando (4.14) com as exigências expressas por (2.4-5), é imediato que

$$\dot{y} \cdot y' = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi, \quad (4.15)$$

$$\dot{y}^2 = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi. \quad (4.16)$$

O significado destas condições é então imediato: os pontos ex-

tremos do string livre, finito e aberto, se movimentam perpendicularmente ao string, equação (4.15), e à velocidade da luz, equação (4.16)

5 - COVARIÂNCIA GERAL: VÍNCULOS.

Nas secções anteriores vimos que a descrição dinâmica do string corresponde, essencialmente, à especificação da superfície S determinada por sua evolução no espaço-tempo. Sobre esta superfície estabelecemos as coordenadas curvilíneas $x^i = (\tau, \sigma)$. Estas coordenadas são arbitrárias no sentido de que S é invariante frente a qualquer transformação geral, não singular,

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i(x^i) \quad , \quad \frac{\partial(\bar{x}^i)}{\partial(x^i)} \neq 0 \quad (5.1)$$

onde $\partial(\bar{x}^i)/\partial(x^i)$ é o jacobiano da transformação. No caso de strings finitos e abertos é necessário ainda garantir

$$\bar{x}^2(\tau, 0) \equiv \bar{\sigma}(\tau, 0) = 0 \quad , \quad \bar{x}^2(\tau, \pi) \equiv \bar{\sigma}(\tau, \pi) = \pi \quad , \quad (5.2)$$

de modo que

$$y^\alpha(x^i) = \bar{y}^\alpha(\bar{x}^i) \quad (5.3)$$

ofereçam representações equivalentes da mesma superfície mundo do string. [Ver apêndice, secção A].

A ação (3.3-4), que é a base para o desenvolvimento da

teoria dos strings, é invariante, por construção, sob as transformações (5.1). Esta propriedade será designada por Covariância Geral da teoria dos strings (*); a flexibilidade do formalismo desenvolvido com base nesta característica permite estabelecer a escolha mais conveniente das coordenadas sobre S , correspondente a cada problema específico que abordemos.

Fisicamente, a covariância geral da teoria dos strings reflete o significado geométrico de S e se apresenta como uma consequência imediata do fato de a densidade lagrangiana, equação (3.4), ser uma função homogênea de primeira ordem nas velocidades generalizadas \dot{y} e em y' . Nesta secção analisaremos mais detalhadamente esta propriedade para obter novas informações sobre a dinâmica dos strings.

Consideremos as transformações infinitesimais

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = x^i + \delta x^i, \quad (5.4)$$

correspondentes às expressões (5.1). Sob estas transformações a variação funcional da ação é nula, de modo que (**)

$$\delta J = \int_s d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\left(\mathcal{L} \delta_j^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\alpha}_{,k}} y^{\alpha}_{,j} \right) \delta x^j \right] = 0. \quad (5.5)$$

(*) Enfatizamos o fato de que Covariância Geral na acepção aqui usada tem sua origem na definição do modelo que estudamos e assim se aparta do significado que usualmente lhe é atribuído em Gravitação.

(**) Observemos que a nossa expressão (5.5) é um caso particular do resultado geral estabelecido por Hill, já citado. [Ref. (49), equação 19]. Ver ref. 9 para uma discussão detalhada da propriedade de covariância geral para uma partícula relativística sem spin.

A arbitrariedade de δx^j conduz aos resultados,

$$t^k_j \equiv \mathfrak{L} \delta^k_j - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y^{\alpha}_{,k}} y^{\alpha}_{,j} = 0 \quad , \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} t^k_j = 0 \quad , \quad (5.7)$$

definindo as quantidades t^k_j sobre a superfície de evolução S .

Os objetos t^k_j definidos por (5.6) comportam-se como as componentes de um tensor frente as transformações de coordenadas (permitidas) em S . Por esta razão e pela maneira específica de obtenção das expressões (5.6), podemos designar t^k_j como tensor momentum-energia associado à invariância por translações no mundo do string. É óbvio que o significado desta designação não deve ser confundido com o seu homônimo no espaço-tempo, equação (4.8). É também proveitoso enfatizarmos que os resultados expressos por (5.6-7) advêm exclusivamente da covariância geral da teoria (na forma anteriormente definida), de modo que se constituem em uma peculiaridade das teorias com esta propriedade.

Para explicitarmos as informações contidas nos resultados (5.6-7), recordemos as definições (4.4-5) para escrever

$$t^1_1 \equiv \mathfrak{L} - P_{\alpha} \dot{y}^{\alpha} = 0 \quad , \quad (5.8)$$

$$t^1_2 \equiv - P_{\alpha} y^{\alpha'} = 0 \quad , \quad (5.9)$$

$$t^2_1 \equiv - \Pi_{\alpha} \dot{y}^{\alpha} = 0 \quad , \quad (5.10)$$

$$t^2_2 \equiv \mathfrak{L} - \Pi_\alpha y^{\alpha'} = 0 \quad . \quad (5.11)$$

As equações (5.8) e (5.11) expressam o fato de que a densidade lagrangiana \mathfrak{L} é uma função homogênea de primeira ordem nas variáveis dinâmicas \dot{y} e y' . [c f., equação (3.4)]. Para examinarmos o significado das outras duas equações recordemos que, de acordo com a definição (4.4), o vetor P é o momentum canonicamente conjugado às variáveis $y(x^i)$ da teoria. Desse modo, a equação (5.9) traduz uma relação entre os momenta e coordenadas generalizadas e será então, correta e convenientemente (⁶⁻⁷), interpretada como uma equação de vínculo. Relativamente à equação (5.10), não podemos inferir o mesmo significado posto que esta expressão envolve velocidades e assim não representa uma equação de vínculo para o sistema. Em verdade, não podemos atribuir um significado dinâmico a esta relação e a entenderemos como meramente expressando o fato de que, localmente, o vetor Π é sempre ortogonal à velocidade generalizada \dot{y} .

Resta-nos, então, determinar mais uma equação de vínculo local de modo que tenhamos completamente explorado o significado da covariância geral da teoria (*). A equação que falta pode ser obtida a partir do sistema (5.8-11). (⁵⁰). Preferiremos no entanto, trilhar aqui um caminho mais direto e conceitual.

(*) Que existem apenas dois vínculos locais é imediato se atentarmos para o fato de que nossa teoria é bidimensional e recordarmos a acepção aqui atribuída à covariância geral.

O fato de \mathfrak{L}_0 , dada por (3.4), ser singular traduz-se na forma,

$$\Delta \equiv \det \left\| \frac{\partial P_\alpha}{\partial \dot{y}^\beta} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_0}{\partial \dot{y}^\alpha \partial \dot{y}^\beta} \right\| = 0 \quad (5.12)$$

Esta condição implica que os momenta P_α não são funções independentes das velocidades \dot{y}^α e prevê assim relações entre as coordenadas e momenta que são os vínculos primários da teoria (6-7). Uma destas relações é a expressa pela equação (5.9). A outra relação pode, no caso que consideramos, ser imediatamente obtida a partir da definição (4.4) dos momenta:

$$P^2 + N^2 y'^2 = 0 \quad (5.13)$$

Na obtenção de (5.13) usamos a forma explícita de \mathfrak{L}_0 dada por (3.4). Este resultado junto com a outra equação de vínculo, equação (5.9), é de extrema relevância na descrição dinâmica da evolução do string, conforme se verificará a partir da secção seguinte.

6 - O FORMALISMO HAMILTONIANO.

Na secção anterior obtivemos a forma explícita dos vínculos locais como uma decorrência da propriedade de covariância geral da teoria. Face a importância desses resultados para o formalismo, os destacaremos aqui denotando-os na forma

$$\phi_1 \equiv P^2 + N^2 y'^2 \approx 0 \quad (6.1)$$

$$\phi_2 \equiv P \cdot y' \approx 0 \quad . \quad (6.2)$$

Nestas expressões usamos a notação convencional de Dirac para igualdades fracas. (6).

Definimos agora os parênteses de Poisson fundamentais sobre S, para um mesmo valor do parâmetro τ :

$$\{P_\mu(\tau, \sigma), y^\nu(\tau, \sigma')\} = -\delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') \quad , \quad (6.3)$$

$$\{P_\mu(\tau, \sigma), P_\nu(\tau, \sigma')\} = 0 = \{y^\mu(\tau, \sigma), y^\nu(\tau, \sigma')\}. \quad (6.4)$$

Pode-se então demonstrar que os vínculos (6.1-2) formam uma álgebra fechada (42, 51):

$$\{\phi_1(\tau, \sigma), \phi_1(\tau, \sigma')\} = 4N^2 [\phi_2(\tau, \sigma) + \phi_2(\tau, \sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (6.5)$$

$$\{\phi_2(\tau, \sigma), \phi_2(\tau, \sigma')\} = [\phi_2(\tau, \sigma) + \phi_2(\tau, \sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (6.6)$$

$$\{\phi_2(\tau, \sigma), \phi_1(\tau, \sigma')\} = [\phi_1(\tau, \sigma) + \phi_1(\tau, \sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0. \quad (6.7)$$

Desse modo, os vínculos primários ϕ_1 e ϕ_2 são de primeira classe e não existem outros vínculos na teoria. Agora, a já referida característica de homogeneidade da função lagrangiana traduz-se também no fato de que a hamiltoniana canônica é identicamente nula

$$H_c \equiv \int_0^\pi d\sigma (P_\mu \dot{y}^\mu - \mathcal{L}) \equiv 0 \quad , \quad (6.8)$$

decorrendo portanto, que a hamiltoniana total coincide com a hamiltoniana estendida ("extended hamiltonian-function". Ver Dirac, ref. 6) e se constrói inteiramente a partir dos vínculos:

$$H_T = H_E \equiv H = \int_0^\pi d\sigma (c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2) \quad , \quad (6.9)$$

onde $c_1 = c_1(\tau, \sigma)$ e $c_2 = c_2(\tau, \sigma)$ são funções inteiramente arbitrárias definidas em S.

Detenhamo-nos um pouco na análise destes resultados. No contexto hamiltoniano, a evolução temporal de uma variável dinâmica, G, é determinada pela equação de movimento,

$$\dot{G} \approx \{G, H\} \quad . \quad (6.10)$$

Agora, como H é dado por (6.9) ocorrerão funções arbitrárias em (6.10). Assim, a evolução temporal de uma variável dinâmica não ficará determinada univocamente pela especificação de seus valores no instante inicial: temos liberdade de gauge, segundo a aceção usual no contexto da mecânica clássica. Na teoria dos strings, esta liberdade de gauge representa-se pela arbitrariedade de escolha das funções $c_i(\tau, \sigma)$ e é uma decorrência manifesta da propriedade de covariância geral da teoria. Escolher as funções $c_1(\tau, \sigma)$ e $c_2(\tau, \sigma)$ corresponde a especificar uma forma definida para H, e equação (6.9), e significa selecionar um gauge para o string.

Temos então atingido um ponto de crucial importância para a teoria posto que uma conveniente escolha do gauge pode favorecer consideravelmente a análise do sistema. Torna-se desse modo bas-

tante relevante, e necessário, ampliar nossos conhecimentos sobre o papel desempenhado pelas funções $c_i(\tau, \sigma)$ no formalismo. Para atingir esta finalidade procederemos a análise das equações (hamiltonianas) de movimento que estabeleceremos a seguir.

A partir da definição (6.9) e nos limitando, como é usual, a variações até a primeira ordem de aproximação nas variáveis hamiltonianas y e P , é fácil obter (⁵⁰):

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_0^\pi d\sigma \{ (2c_1 P + c_2 y') \cdot \delta P - [(2N^2 c_1 y')' + (c_2 P)'] \cdot \delta y \} \\ & + (2N^2 c_1 y' + c_2 P) \cdot \delta y \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Agora, uma vez satisfeitas as condições

$$(2N^2 c_1 y' + c_2 P) \cdot \delta y \Big|_0^\pi = 0 \quad , \quad (6.12)$$

poderemos estabelecer as equações hamiltonianas de movimento:

$$\dot{y} = 2c_1 P + c_2 y' \quad , \quad (6.13)$$

$$\dot{P} = (2N^2 c_1 y')' + (c_2 P)' \quad . \quad (6.14)$$

Com base nestas equações torna-se possível inferir um significado geométrico para as funções arbitrárias $c_i(\tau, \sigma)$. (*).

(*) A análise que segue deve-se essencialmente a Galvão, C.A.P. ref. 50, a quem agradecemos a gentileza de permitir sua inclusão aqui o que esperamos torne mais didática a presente discussão.

Realmente, usando a arbitrariedade destas funções, consideremos inicialmente o gauge $c_1 \equiv 0$, c_2 qualquer. Da equação (6.13) obtemos, em primeira ordem de aproximação

$$\delta y = (c_2 \delta \tau) y' \equiv (\bar{\delta} c_2) y'. \quad (6.15)$$

Podemos interpretar este resultado concluindo que os deslocamentos associados às variações de $c_2(\tau, \sigma)$ ocorrem sobre o string de modo que constituem mapeamentos de pontos do string nele mesmo. Para o gauge $c_2 \equiv 0$, c_1 qualquer, um procedimento inteiramente análogo conduzirá a

$$\delta y = (\bar{\delta} c_1) P. \quad (6.16)$$

Agora os deslocamentos associados às variações de c_1 têm componentes na direção dentro do cone de luz local: o mapeamento correspondente leva pontos do string em pontos do string mas a diferentes valores da coordenada τ . Podemos então atribuir um significado dinâmico às funções $c_1(\tau, \sigma)$: são geradores de transformações que se relacionam com a evolução do string. Com base nestas interpretações, discutiremos, na secção seguinte, o problema da escolha de gauge para o string.

7 - O GAUGE ORTONORMAL

No formalismo hamiltoniano a especificação de cada estado de um sistema é feita pela fixação dos valores assumidos pelas variáveis hamiltonianas, y^α e P_α . Quando consideramos a evolução do string a partir de uma dada configuração inicial, $\tau = \tau_0$, especificamos este estado do sistema por $(y^\alpha(\tau_0, \sigma), P_\alpha(\tau_0, \sigma))$. Claramente, esta especificação não envolve valores das funções arbitrárias $C_i(\tau, \sigma)$. As equações de movimento [c.f. equações (6.10) ou equações (6.13-14)] contêm, no entanto, estas funções arbitrárias. O resultado final é que os estados futuros do sistema não resultam univocamente determinados pela especificação dos dados iniciais: existirão vários conjuntos (y^α, P_α) que servirão igualmente bem para designar um estado (*) do sistema.

Se fixarmos os valores das funções $C_i(\tau, \sigma)$ estaremos escolhendo um gauge para o sistema. Esta liberdade de escolha pode, e deve, ser usada para simplificar a análise do problema. Se nos baseamos na discussão estabelecida na secção anterior, vemos que, em busca desta simplicidade, podemos tomar $C_2 = 0$ sem que isto traga qualquer restrição relevante à generalidade de nossa análise. Com efeito, esta função relaciona-se à reparametrizações em σ o que não se lhe confere maior relevância na discussão da evolução do string. Tal não é o caso, entretanto, no relativo a $C_1(\tau, \sigma)$. Porém, face a sua arbitrariedade, é visível que a escolha mais simples consiste em se

(*) Configuração assumida pelo string após o intervalo $\delta\tau$.

tomar $C_1 = \text{constante}$. Fixaremos, por razões que imediatamente ficarão claras, em $(2N)^{-1}$ o valor desta constante.

Desse modo, discutiremos agora a dinâmica do string para o gauge

$$C_1 = (2N)^{-1} \quad , \quad C_2 = 0 \quad . \quad (7.1)$$

Com esta escolha, as equações hamiltonianas (6.13-14) resultam simplificadas à forma

$$\dot{y} = N^{-1} P \quad , \quad (7.2)$$

$$\dot{P} = N y'' \quad . \quad (7.3)$$

Se agora eliminamos P nestas equações, é imediato que, no "espaço das configurações", a equação de movimento para o string é,

$$\ddot{y} - y'' \equiv \square_x y = 0 \quad . \quad (7.4)$$

Os vínculos, equações (6.1-2), se expressam agora por

$$\phi_1 = \dot{y}^2 + y'^2 \approx 0 \quad , \quad (7.5)$$

$$\phi_2 = \dot{y} \cdot y' \approx 0 \quad , \quad (7.6)$$

e as identidades (5.8-11) verificam-se trivialmente. Também, como uma consequência do gauge (7.1), decorre que o elemento de linha em S assume a forma conformalmente plana,

$$ds^2 = \dot{y}^2 (d\tau^2 - d\sigma^2) \quad . \quad (7.7)$$

A escolha do gauge (7.1) é usualmente referida como o gauge ortonormal para o string. Esta denominação baseia-se, essencialmente, no significado geométrico dos resultados (7.5-6) que especificam a escolha de um sistema coordenado (local) ortonormal sobre S. Observemos, porém, que as coordenadas (τ, σ) sobre S permanecem ainda arbitrárias: a escolha (7.1) não fixa o gauge para o string. Temos ainda liberdade de gauge após a escolha do gauge ortonormal (*). As soluções, bem conhecidas, da equação de movimento (7.4) espelham a arbitrariedade remanescente de gauge, uma vez que se escrevem com um número infinito de constantes arbitrárias; duas por ponto de S! Resulta então, que para estabelecermos uma correspondência um-a-um entre os estados físicos do sistema e as variáveis canônicas é preciso impor restrições adicionais. Estas restrições são usualmente designadas como vínculos de gauge.

Geometricamente, a escolha do gauge ortonormal corresponde a selecionar um sistema coordenado específico entre a classe de sistemas que apresentam as características exigidas pelas condições (7.5-6). Para que sejamos mais precisos, consideremos a transformação de coordenadas (5.1) após a escolha (7.1). O novo sistema de coordenadas será também ortonormal, e as transformações de coordenadas serão ditas então canônicas, se as condições (7.5-6) forem preservadas:

(*) É óbvio que este resultado independe de qualquer escolha que façamos para as funções $C_i(\tau, \sigma)$.

$$\dot{\bar{y}}^2 + \bar{y}'^2 \approx 0 \quad , \quad (7.5.1)$$

$$\dot{\bar{y}} \cdot \bar{y}' \approx 0 \quad , \quad (7.6.1)$$

Como facilmente se comprova [ver, por exemplo, a referência 41.], esta exigência traduz-se na condição

$$\square_x \bar{x}^i = 0 \quad , \quad (7.8)$$

o que significa que as novas coordenadas devem satisfazer uma equação de D'Alembert [c f., equação (7.4)] em termos das coordenadas originais. Desse modo, podemos interpretar o problema da escolha do gauge ortonormal para o string como o de se selecionar um sistema $(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$ específico entre todos aqueles que satisfazem (7.8). Em seguida analisaremos uma forma de procedimento.

Começamos por definir τ pela intersecção de uma família de planos com a superfície de evolução $S, ({}^{41-42}, {}^{50-51})$.

$$\xi_\alpha y^\alpha = \lambda \tau \quad . \quad (7.9)$$

Nesta expressão λ é uma constante a ser determinada e ξ é um vetor unitário, tipo tempo, que especifica a direção normal à família de planos considerada. Com esta escolha fixamos um vínculo de gauge; as equações (7.5-6) e (7.9) constituem-se nos vínculos do sistema. A constante λ em (7.9) pode ser determinada por diferenciação em τ desta expressão e usando-se (7.2). Resulta

$$\lambda = \frac{1}{N} \xi \cdot P \quad , \quad (7.10)$$

que pode ser integrada na forma seguinte:

$$\int_0^\sigma \lambda d\sigma = \lambda\sigma = \frac{1}{N} \xi \cdot \int_0^\sigma P d\sigma \quad . \quad (7.11)$$

Se nos recordamos agora da definição (4.8), concluimos que a coordenada σ está sendo fixada por (7.11) como proporcional ao fluxo de energia-momentum entre um extremo do string e o ponto considerado. É dizer, estamos usando, desse modo, o conteúdo de energia-momentum do string para rotular seus pontos [c f., discussão seguinte à equação (2.1)]. Com a escolha convencional $\sigma = \pi$ para fixar o comprimento do string obteremos de (7.11) o resultado

$$\lambda = \frac{1}{N\pi} \xi \cdot \mathcal{P} \quad (7.12)$$

Onde \mathcal{P} é o conteúdo total de energia-momentum do string [c f., equação (4.8)].

Usando (7.12) em (7.9-10) podemos resumir a fixação do gauge ortonormal pelas condições:

$$\xi \cdot \left(y - \frac{\mathcal{P}_\tau}{\pi N} \right) \approx 0 \quad , \quad (7.13)$$

$$\xi \cdot \left(P - \frac{\mathcal{P}}{\pi} \right) \approx 0 \quad , \quad (7.14)$$

Estas condições especificam, de forma unívoca (⁴²), um sistema coordenado ortonormal sobre S . Devemos, no entanto, observar que o procedimento seguido é restrito no sentido de que as linhas correspondentes a $\tau = \text{constante}$ não estarão em geral contidas em um hiperplano. No capítulo seguinte, quando discutire-

mos a teoria dos strings relativísticos como um problema de imersão, mostraremos como proceder em forma mais geral seguindo passos essencialmente geométricos.

CAPÍTULO 3

A TEORIA GEOMÉTRICA DOS STRINGS

No Capítulo anterior vimos que a descrição dinâmica do string corresponde, basicamente, ao problema de caracterizar a superfície S descrita por sua evolução no espaço-tempo. A análise que desenvolvemos fundamentou-se nos princípios básicos da Mecânica Clássica e, especificamente, na teoria de Dirac para sistemas singulares. A existência de vínculos resultou como uma decorrência da covariância geral do sistema e o gauge ortonormal foi estabelecido como a escolha mais simples de gauge. Neste gauge as equações de movimento para o string são representadas por uma equação de D'Alembert (bidimensional) para as variáveis dinâmicas y^α . Observamos que a simplicidade então decorrente da escolha do gauge ortonormal é apenas aparente, posto que, embora tenhamos a resolver uma equação linear, devemos satisfazer a condições de contorno fortemente não lineares, que são os vínculos do problema [c.f., equações (7.4-6), Cap. 2].

Neste Capítulo pretendemos oferecer uma forma alternativa de descrição que é essencialmente geométrica, coadunando-se, portanto, à idéia de que estabelecer a dinâmica do string significa caracterizar uma superfície. Realmente, do ponto de vista geométrico, cada história S do string pode ser pensada como um subespaço do espaço-tempo e a dinâmica do string assume então as dimensões de um problema de imersão de uma superfície bidimensional nesse espaço. Esta é, conceitualmente, a es-

sência da Teoria Geométrica.

A principal característica do tratamento geométrico dos strings relativísticos consiste em não mais considerarmos $y^\alpha(x^i)$ como as variáveis dinâmicas da teoria. Com efeito, segundo o teorema fundamental da teoria de superfícies, uma superfície fica perfeitamente caracterizada (a menos de deslocamentos rígidos) pelo conhecimento dos dois tensores simétricos que representam suas formas quadráticas fundamentais. As componentes destes tensores são, então, tomadas como as novas variáveis dinâmicas da teoria e as equações de movimento para estas variáveis se representam como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci que garantem a imersão. Mais ainda, devido a forma peculiar do funcional de ação para o string, o princípio de mínima ação conduz a simplificações consideráveis no aparato matemático do formalismo: a superfície S resulta restrita à classe específica das superfícies mínimas.

A formulação da teoria dos strings como um problema de imersão é bastante recente⁽⁴⁵⁻⁴⁷⁾ [e sua sistematização aqui constitui-se em uma de nossas contribuições] e parece favorecer as já múltiplas aplicações do modelo pelo descortinamento de novas idéias e possibilidades resultantes, essencialmente, da abrangente generalidade do tratamento geométrico^(*). Acrescentamos ainda que outra grande vantagem obtida com a for

(*) Como um exemplo particularmente interessante, citamos a recente investigação da possibilidade de descrever strings e campos de gauge bidimensionais a partir de uma estrutura matemática comum. [Ver, Zheltukin, ref.52]

mulação geométrica é a de se poder resolver explicitamente as condições subsidiárias impostas pelos vínculos sobre as funções $y^\alpha(x^i)$.

Neste Capítulo o string será tratado como uma superfície bidimensional S imersa em um espaço-tempo pseudo-Euclidiano. Neste contexto, a liberdade de gauge do sistema representa-se na arbitrariedade dos coeficientes das formas fundamentais de S após imposição das condições de integrabilidade. A escolha do gauge traduz-se na particularização desses coeficientes, o que tem o significado geométrico de especificar um sistema coordenado sobre S . Mostraremos, através de argumentos geométricos, que os sistemas coordenados das linhas de curvatura e das linhas assintóticas de S são as escolhas mais simples de gauge para o string. Contribuiremos também à teoria mostrando, com base em condições necessárias e suficientes, ser sempre possível, face a peculiar natureza de S , a escolha desses sistemas.

A análise correspondente a strings finitos e abertos apresenta dificuldades consideráveis devido a exigência, imposta pelas condições de contorno, de que os extremos evoluam segundo linhas tipo luz. Estas restrições, obviamente, não ocorrem quando consideramos strings infinitamente longos ou fechados. É nesse problema que centralizamos nossa principal contribuição neste Capítulo. Mostraremos como tratar o problema da imersão sem que seja necessário especificar completamente o gauge a priori. Nosso raciocínio desenvolver-se-á com base na argumentação de que as condições de contorno não restringem a dependência em τ dos coeficientes das formas fundamentais, im-

pondo, apenas, condições sobre a dependência em σ . Propomos então um gauge não convencional para o string e construímos dois modelos correspondentes a soluções estacionária e não estacionária, respectivamente, das equações de movimento. Enfatizaremos também que a resultante liberdade de gauge após a imersão pode ser usada para, por exemplo, favorecer a análise de modelos específicos.

Nossa preocupação com a clareza do texto nos levou a escrever um Apêndice em que resumimos os conceitos básicos de Geometria Diferencial que aqui são utilizados.

onde $e_A^2 = 1$, são fatores de sinal com $e_A = +1$ indicando vetor normal tipo tempo e $e_A = -1$ correspondendo a vetor normal tipo espaço. Com estes vetores e os vetores tangentes $y_{;i}$ estabelecemos a base local em S,

$$\{y_{;i}^\alpha, \xi_A^\alpha\} .$$

Podemos então escrever as "equações generalizadas de Frenet-Serret" (53)

$$y^\alpha_{;ij} = \sum_A e_A b_{Aij} \xi_A^\alpha, \quad (2.5)$$

$$\xi^\alpha_{A;j} = \sum_B e_B S_{BA} \xi_B^\alpha - b_{A\ell j} g^{\ell k} y_{;k}^\alpha. \quad (2.6)$$

Nestas expressões, b_{Aij} representam as componentes da segunda forma fundamental de S e S_{ABj} correspondem às componentes dos vetores de torção, definidos por

$$S_{ABj} = -S_{BAj} = \xi_A \cdot \xi_{B;j}. \quad (2.7)$$

As condições de integrabilidade para o sistema de equações (2.5-6) são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente (53,54) [Ver apêndice, secção H]

$$R_{ijkl} = \sum_A e_A (b_{Aik} b_{Ajl} - b_{Ail} b_{Ajk}), \quad (2.8)$$

$$b_{Aij;k} - b_{Aik;j} = \sum_B e_B (S_{BAk} b_{Bij} - S_{BAj} b_{Bik}), \quad (2.9)$$

$$S_{ABj;k} - S_{ABk;j} + g^{\ell i} (b_{A\ell j} b_{Bik} - b_{A\ell k} b_{Bij}) = 0, \quad (2.10)$$

onde R_{ijkl} representam as componentes do tensor de Riemann-Christoffel da superfície S .

Agora, as equações de movimento para o string são obtidas, via princípio de Mínima Ação, usando-se a ação de Nambu [c.f., equações (3.1) e (3.3-4), cap. 2]. Geometricamente, isto tem o significado de determinar, entre as "superfícies de comparação" consideradas, a superfície que tem área mínima entre as configurações inicial e final do string. Matematicamente, traduz-se este fato escrevendo-se

$$h_A \equiv g^{ij} b_{Aij} = 0 \quad (2.11)$$

onde h_A indica a curvatura média de S na correspondente direção normal. (⁵⁴⁻⁵⁵).

Com este resultado completamos a estrutura básica da teoria dos strings como um problema de imersão, o assim chamado tratamento geométrico da teoria dos strings. Fazemos apêlo ao teorema fundamental da teoria de superfícies, para recordarmos que S fica caracterizada, a menos de deslocamento rígidos, pelo conhecimento dos coeficientes g_{ij} e b_{Aij} . Desse modo, em lugar das funções $y^\alpha(x)$, podemos caracterizar S através desses coeficientes, que passam então a serem considerados como as novas variáveis dinâmicas da teoria. As equações de Gauss, Codazzi e Ricci constituem as equações de movimento para o sistema. Estas equações são explicitamente dependentes do gauge e sua forma real fica ainda diretamente afetada pelas condições de minimalidade, equações (2.11).

Devemos observar que as condições de minimalidade

são obtidas sem qualquer menção ao contorno; são as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao problema variacional que conduz à superfícies de área mínima.⁽⁵⁴⁻⁵⁵⁾. Torna-se, assim, relevante analisar separadamente o caso correspondente a strings abertos finitos e infinitos.

3 - STRINGS INFINITOS: O GAUGE ORTONORMAL

Na secção anterior estabelecemos as bases da teoria geométrica dos strings e apontamos as dificuldades concernentes à imersão de strings finitos e abertos em evolução. Realmente, as condições de contorno [c.f., equações (4.15-16) e conclusão que segue, cap. 2] vem exigir que os extremos do string evoluam segundo linhas mínimas, tipo luz, o que acarreta algumas dificuldades ao formalismo. Não trataremos deste problema agora, pospondo esta tarefa à secção 4. Por ora discutiremos o caso correspondente a strings infinitamente longos e gauge ortonormal (*). Nosso objetivo, em assim procedendo, tem, também, a par das aplicações correspondentes, o carácter didático de melhor explicitar o procedimento formal a ser seguido, evitando que as dificuldades apontadas prejudiquem o perfeito entendimento da técnica. Ainda com vistas à clareza distinguiremos, inicialmente, o tratamento para o espaço-tempo tridimensional pseudo-Euclidiano. Neste caso S é uma hipersuperfície do espaço-tempo de modo que as equações de Ricci não existem o que traz consideráveis simplificações ao problema.

(*) Ressaltamos que strings finitos fechados tem tratamento formal idêntico.

O espaço-tempo quadrimensional será considerado em seguida.

3.1 - Espaço-tempo Tridimensional

Neste caso a base local constitui-se dos vetores $\{y_{;i}^{\alpha}, \xi^{\alpha}\}$ com

$$\eta_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} = -1 \quad (3.1)$$

posto que S é uma superfície tipo tempo [c.f., secção 2-cap 2]. O sistema de equações (2.8-10) reduz-se às equações de Gauss e Codazzi; se explicitarmos apenas as componentes independentes teremos,

$$R_{1212} = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} \quad , \quad (3.2)$$

$$b_{11;2} - b_{12;1} = 0 \quad , \quad b_{21;2} - b_{22;1} = 0 \quad . \quad (3.3)$$

Agora, em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental de S , as condições (7.5-6), capítulo 2, que especificam o gauge ortonormal, traduzem-se na forma [c.f., equações (2.2)]

$$g_{11} + g_{22} = 0 \quad , \quad g_{12} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

o que, geometricamente, significa usar um sistema coordenado "isotérmico" sobre S . Com estas relações a condição de minimalidade [c.f., equação 2.11] se expressa como

$$(g)^{-1} g_{11} (b_{22} - b_{11}) = 0 \quad , \quad (3.5)$$

de modo que, como consideramos strings infinitamente longos (ou strings fechados), esta condição resulta em

$$b_{22} = b_{11} \quad . \quad (3.5.1)$$

Usando este resultado, as equações de Codazzi (3.3) se escrevem na forma simples

$$b_{,2} - \bar{b}_{,1} = 0 \quad , \quad \bar{b}_{,2} - b_{,1} = 0 \quad , \quad (3.6)$$

com a notação simplificada

$$b_{ii} \equiv b \quad , \quad b_{ij} \equiv \bar{b} \quad , \quad i \neq j.$$

Vemos então, a partir das equações (3.6), que \bar{b} e b obedecerão equações bidimensionais tipo onda plana [c.f., equação (7.4) cap. 2], se pressupomos que nenhum desses coeficientes é nulo, cujas soluções gerais são bem conhecidas. Se \bar{b} ou b for nulo o outro será constante, que é nula apenas no caso "plano"; isto é, S uma hipersuperfície totalmente geodésica.

Temos liberdade de gauge e podemos usá-la escolhendo convenientemente b ou \bar{b} . A escolha mais simples consiste, obviamente, em se tomar b ou \bar{b} nulo. Geometricamente, tal escolha, aliada à condição $g_{12} = 0$, significa tomar as linhas de curvatura de S , caso $\bar{b} = 0$, ou as linhas assintóticas de S , caso $b = 0$, como as curvas coordenadas sobre a superfície de evolu-

ção conforme demonstramos no apêndice, secção D. Com relação à virtual existência de pontos umbilícos, a negamos na forma seguinte:

— Usando a definição de curvatura média e curvatura gaussiana em termos das curvaturas principais locais ρ_1 ρ_2 [c.f., apêndice, sec. C] escreveremos

$$h = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = g^{ij} b_{ij} = 0 \quad , \quad (3.7)$$

$$k = \rho_1 \rho_2 = g^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \quad (3.8)$$

A última igualdade em (3.7) é decorrente da condição de minimalidade (2.11) e conduz a

$$\rho_1 = - \rho_2 \quad .$$

Agora, como não consideramos o caso plano ($b_{11} = b_{22}$ ou $b_{12} = b_{21}$ diferente de zero) e $g \neq 0$ por hipótese, decorre de (3.8) que $k \neq 0$, logo

$$\rho_1 = - \rho_2 \neq 0 \quad (3.9)$$

e não teremos pontos umbilícos. Este raciocínio pode ser facilmente estendido a espaço envolvente de dimensão maior que 3. —

Fixaremos nossa análise no sistema coordenado das linhas de curvatura de S. Temos então $\bar{b} = 0$, e das equações de

Codazzi (3.6) resulta

$$b = k_c \quad (3.10)$$

onde k_c é uma constante, que tomaremos não nula. No gauge ortonormal, condição (3.4), a componente R_{1212} do tensor de curvatura de Riemann reduz-se a

$$R_{1212} = \frac{1}{2} g_{11} \square_x \ln g_{11} \quad , \quad \square_x \equiv \partial_1^2 - \partial_2^2 \quad , \quad (3.11)$$

de modo que a equação de Gauss (3.2) assume a forma

$$g_{11} \square_x \ln g_{11} = - 2k_c^2 \quad . \quad (3.12)$$

Esta equação pode ser colocada na forma de uma equação de Liouville (⁴⁵⁻⁴⁷),

$$\square_x \psi = 2k_c^2 e^\psi \quad , \quad g_{11} = e^{-\psi} \quad . \quad (3.13)$$

A solução de (3.13) determina g_{11} e assim completa a descrição da superfície S de evolução do string. Enfatizamos que a ocorrência da equação de Liouville é uma peculiaridade do gauge ortonormal. [c.f., equação (3.11)].

Antes de passarmos ao caso quadrimensional consideremos, mais detalhadamente, a descrição no sistema de coordenadas das linhas de curvatura de S . As linhas de curvatura são determinadas, localmente, pelas direções principais associadas ao tensor simétrico b_{ij} . Indicando os vetores das direções princi

país por suas componentes $\xi_{(h)}^i$, $h = 1, 2$, teremos

$$(b_{ij} - \rho_h g_{ij}) \xi_{(h)}^i = 0, \tag{3.14}$$

onde não há soma em h e, ρ_h , as curvaturas principais de S no ponto considerado, são as raízes da equação [c.f., apêndice, seção C]

$$\det ||b_{ij} - \rho g_{ij}|| = 0. \tag{3.15}$$

A condição de minimalidade assegura a existência de duas raízes distintas desta equação por ponto de S [c.f., equação 3.9] o que nos habilita determinar os vetores $\vec{\xi}_{(h)}$. Procederemos como segue. Sejam $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$ dois vetores unitários, ortogonais, sobre o plano tangente local de S ,

$$g_{ij} \xi_{(h)}^i \xi_{(k)}^j = \delta_{hk} e_h \text{ (não há soma em } h). \tag{3.16}$$

Escolhemos $\vec{\xi}_1$ tipo tempo, $e_1 = +1$, e $\vec{\xi}_2$ tipo espaço, $e_2 = -1$, e tais que

$$b_{ij} \xi_{(h)}^i \xi_{(k)}^j = 0, \quad h \neq k. \tag{3.17}$$

Definimos também dois invariantes, ρ_1 e ρ_2 , da seguinte maneira:

$$\rho_h = e_h b_{ij} \xi_{(h)}^i \xi_{(h)}^j, \quad \text{(não há soma em } h). \tag{3.18}$$

Com estas definições é fácil demonstrar que

$$(b_{ij} - \rho_h g_{ij}) \xi_{(h)}^i \xi_{(k)}^j = 0 \quad (\text{não há soma em } h). \quad (3.19)$$

de modo que, se exigirmos que o determinante da matriz formada com as componentes dos vetores $\vec{\xi}_{(h)}$ seja não nulo, estas equações conduzirão à (3.14). As soluções das equações (3.16-18) no sistema coordenado da linhas de curvatura e gauge ortonormal se escrevem

$$\vec{\xi}_{(1)} = g_{11}^{-1/2} \vec{y}, \quad \vec{\xi}_{(2)} = g_{11}^{-1/2} \vec{y}', \quad (3.20)$$

$$\rho_1 = g_{11}^{-1} k_c, \quad \rho_2 = -g_{11}^{-1} k_c, \quad (3.21)$$

Logo, $\rho_1 = -\rho_2$ de acordo com a condição de minimalidade.

3.2 - Espaço-tempo Quadrimensional

Nosso objetivo agora é o de estender os resultados do parágrafo anterior, considerando espaço-tempo quadrimensional. O procedimento a ser seguido é essencialmente o mesmo, de modo que não mais detalharemos a análise. As condições de minimalidade, equações (2.11), reduzem-se no gauge ortonormal a

$$g^{-1} g_{11} (b_{A22} - b_{A11}) = 0, \quad (3.22)$$

o que, novamente sob a hipótese de strings infinitamente lon

gos (ou strings finitos fechados), permite concluir

$$b_{A22} = b_{A11} \quad (3.23)$$

Estas condições simplificam as equações de movimento, que agora se constituem também das equações de Ricci além das equações de Gauss e Codazzi. Usando a notação simplificada

$$b_{Aii} \equiv b_A, \quad b_{Aij} = b_{Aji} \equiv \bar{b}_A, \quad i \neq j,$$

$$S_{43j} = -S_{34j} \equiv S_j,$$

e já considerando normais tipo espaço (S é tipo tempo), as componentes independentes destas equações se escreverão na forma

$$R_{1212} = (\bar{b}_3^2 - b_3^2) + (\bar{b}_4^2 - b_4^2), \quad (3.24)$$

$$b_3' - \dot{\bar{b}}_3 = S_1 \bar{b}_4 - S_2 b_4, \quad (3.25a)$$

$$\bar{b}_3' - \dot{b}_3 = S_1 b_4 - S_2 \bar{b}_4, \quad (3.25b)$$

$$b_4' - \dot{\bar{b}}_4 = S_2 b_3 - S_1 \bar{b}_3, \quad (3.25c)$$

$$\bar{b}_4' - \dot{b}_4 = S_2 \bar{b}_3 - S_1 b_3, \quad (3.25d)$$

$$\dot{S}_2 - S_1' + \frac{2g_{11}}{g} (\bar{b}_3 b_4 - \bar{b}_4 b_3) = 0, \quad (3.26)$$

A liberdade de Gauge após a escolha (3.4) será agora usada pa-

ra escolher o sistema coordenado sobre S. Com $b_A = 0$ estaremos fixando o sistema coordenado das linhas assintóticas de S e $\bar{b}_A = 0$ corresponde ao sistema coordenado das linhas de curvatura de S. [Ver apêndice, secção I]. Para qualquer uma destas escolhas a equação de Ricci, (3.26), reduz-se a

$$\dot{S}_2 - S'_1 = 0 \quad (3.26a)$$

que tem como solução

$$S_i = \phi_{,i} \quad (3.27)$$

com $\phi = \phi(\tau, \sigma)$, uma função arbitrária.

Consideremos o sistema coordenado das linhas de curvatura, $\bar{b}_A = 0$. As equações de Codazzi assumem a forma simples:

$$b'_3 = -\phi' b_4 \quad (3.25a.1)$$

$$\dot{b}_3 = -\dot{\phi} b_4 \quad (3.25b.1)$$

$$b'_4 = \phi' b_3 \quad (3.25c.1)$$

$$\dot{b}_4 = \dot{\phi} b_3 \quad (3.25d.1)$$

e conduzem a

$$b_3^2 + b_4^2 = k^2 = \text{constante} \quad (3.28)$$

Com este resultado podemos escrever a equação de Gauss novamente na forma de uma equação de Liouville⁽⁴⁵⁻⁴⁷⁾,

$$\square_x \psi = 2k^2 e^\psi \quad , \quad g_{11} \equiv e^{-\psi} \quad . \quad (3.29)$$

As soluções gerais das equações de Codazzi podem ser obtidas em termos das funções arbitrárias $\phi(\tau, \sigma)$; estas soluções e a solução da equação de Liouville (3.29) caracterizam a superfície S de evolução do string.

4 - EVOLUÇÃO DE STRINGS FINITOS NO ESPAÇO-TEMPO

Analisaremos agora a evolução de strings finitos abertos no espaço-tempo quadrimensional. Conforme apontamos anteriormente, este problema merece atenção particular devido a existência de condições de contorno, que exigem que os extremos do string evoluam segundo linhas mínimas, tipo luz, do espaço tempo. Realmente, traduzidas em forma geométrica, as condições de contorno (4.15-16), cap. 2, correspondem a

$$g_{11} = 0 \quad , \quad g_{12} = 0 \quad , \quad \text{em } \sigma = 0, \pi \quad , \quad (4.1)$$

de modo que

$$g = 0 \quad , \quad \sigma = 0, \pi \quad . \quad (4.1a)$$

Agora, na secção anterior, vimos que as condições de minimali-

dade são usadas de modo a simplificar as equações de movimento de Gauss, Codazzi e Ricci. Quando, no entanto, consideramos strings finitos, a condição (4.1a) limita este procedimento de modo que não mais podemos garantir a validade dos resultados para todos os pontos da superfície de evolução do string. Especificamente, não podemos concluir (3.5.1) de (3.5) ou (3.23) de (3.22), para todos os pontos de S . Tecnicamente, portanto, as condições de contorno proibem as simplificações das equações de movimento pelas condições de minimalidade, a menos que especifiquemos o comportamento dos coeficientes b_{Aij} em $\sigma = 0, \pi$, de modo a garantir que os extremos evoluam segundo linhas tipo luz. Outro aspecto que devemos considerar quando analisamos strings finitos abertos no gauge ortonormal, são as peculiares condições de contorno para a solução da equação de Liouville resultante.

Nos propomos, agora, sobrepujar estas dificuldades. Na discussão fundamentar-se-á na liberdade de escolha do gauge para o sistema singular considerado. Exploraremos este aspecto sob o ponto de vista de que, efetivamente, a escolha de gauge para strings finitos não é completamente arbitrária: ela deve ser compatível às condições de contorno que são, a sua vez, uma decorrência direta do princípio variacional de mínima ação. O aspecto importante, que deve ser observado, é que as condições de contorno manifestam-se como restrições apenas na dependência dos coeficientes da primeira forma fundamental de S ; a dependência em τ não é afetada. Podemos então considerar o problema de imersão sem especificar completamente o gauge no início. Assim procederemos, e mostraremos ser então possível superar as dificuldades apontadas e também resolver o problema em forma

mais geral, no sentido de que a escolha completa do gauge só é feita a posteriori, quando quisermos estabelecer modelos particulares.

Começamos escolhendo

$$g_{12} = 0 \quad , \quad g_{22} = -1 \quad , \quad (4.2)$$

e denotando,

$$g_{11} \equiv \lambda(\tau, \sigma) \quad . \quad (4.3)$$

Estas condições são equivalentes a escolhermos $C_1 = -\frac{N^{-i} \lambda^{1/2}}{2}$ e $C_2 = 0$. [c.f. secção 6, capítulo 2], e como não especificamos a função $\lambda(\tau, \sigma)$ o gauge não está completamente caracterizado. A função $\lambda(\tau, \sigma)$ não é completamente arbitrária; decorre de (4.2-3) que $g = -\lambda(\tau, \sigma)$ de modo que $\lambda(\tau, \sigma)$ deve ser uma função definida positiva. Também é necessário que $\lambda(\tau, \sigma)$ se anule em $\sigma = 0, \pi$, de modo a satisfazer as condições (4.1). Realmente, o princípio de Mínima ação conduz às seguintes equações de movimento

$$\ddot{y}^\mu - \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} \dot{y}^\mu - \frac{\lambda'}{2} y^{\mu'} - \lambda y^{\mu''} = 0 \quad , \quad (4.4)$$

e condições de contorno

$$\lambda(\tau, \sigma=0) = 0 = \lambda(\tau, \sigma=\pi) \quad . \quad (4.5)$$

Usando as condições (4.2-3), as condições de minimalidade (2.11)

se escreverão simplesmente

$$b_{A11} = \lambda(\tau, \sigma) b_{A22} . \quad (4.6)$$

Com este resultado, as equações de Gauss-Codazzi-Ricci se escreverão:

$$R_{1212} = -\lambda^{1/2} (\lambda^{1/3})'' = (\bar{b}_3^2 + \bar{b}_4^2) - \lambda(b_3^2 + b_4^2) , \quad (4.7)$$

$$(\lambda b_3)' - \dot{\bar{b}}_3 + \bar{b}_3 \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} = S_1 \bar{b}_4 - \lambda S_2 b_4 , \quad (4.8a)$$

$$(\lambda b_4)' - \dot{\bar{b}}_4 + \bar{b}_4 \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} = \lambda S_2 b_3 - S_1 \bar{b}_3 , \quad (4.8b)$$

$$\bar{b}_3' - \dot{b}_3 + \bar{b}_3 \frac{\lambda'}{2\lambda} = S_1 b_4 - S_2 \bar{b}_4 , \quad (4.8c)$$

$$\bar{b}_4' - \dot{b}_4 + \bar{b}_4 \frac{\lambda'}{2\lambda} = S_2 \bar{b}_3 - S_1 b_3 , \quad (4.8d)$$

$$\dot{S}_2 - S_1' + 2(\bar{b}_4 b_3 - \bar{b}_3 b_4) = 0 , \quad (4.9)$$

Onde usamos a mesma notação da secção anterior, $b_{A22} \equiv b_A$, $b_{A11} = \lambda b_A$, já consideramos normais tipo espaço e, também como antes, explicitamos apenas as componentes independentes. Escolhemos agora o sistema coordenado das linhas assintóticas de S. fazendo,

$$b_{A11} = 0 = b_{A22} . \quad (4.10)$$

As equações de minimalidade verificam-se, então, trivialmente e o sistema de equações (4.7-9) se simplifica para

$$\lambda^{1/2} (\lambda^{1/2})'' = -(\bar{B}_3^2 + \bar{B}_4^2), \quad (4.7.1)$$

$$\dot{\bar{B}}_3 - \bar{B}_3 (\ell u \lambda^{1/2})' = -S_1 \bar{B}_4, \quad (4.8a.1)$$

$$\dot{\bar{B}}_4 - \bar{B}_4 (\ell u \lambda^{1/2})' = S_1 \bar{B}_3, \quad (4.8b.1)$$

$$\bar{B}_3' + \bar{B}_3 (\ell u \lambda^{1/2})' = -S_2 \bar{B}_4, \quad (4.8c.1)$$

$$\bar{B}_4' + \bar{B}_4 (\ell u \lambda^{1/2})' = S_2 \bar{B}_3, \quad (4.8d.1)$$

$$\dot{S}_2 - \dot{S}_1 = 0. \quad (4.9.1)$$

As equações de Codazzi (4.8a.1)-(4.8d.1) conduzem a

$$[\ell n(\bar{B}_3^2 + \bar{B}_4^2) \lambda^{-1}]' = 0 = [\ell n(\bar{B}_3^2 + \bar{B}_4^2) \lambda]'. \quad (4.11)$$

Assim, podemos escrever

$$\lambda(\tau, \sigma) = \lambda_1^2(\tau) \lambda_2^2(\sigma), \quad (4.12)$$

com

$$\bar{B}_3^2 + \bar{B}_4^2 = \lambda_1^2(\tau) \lambda_2^{-2}(\sigma), \quad (4.13)$$

especificando a forma da função $\lambda(\tau, \sigma)$ por compatibilidade das condições de Codazzi. Agora, a equação de Gauss (4.7.1) conduz a uma equação diferencial para a função $\lambda_2(\sigma)$:

$$\lambda_2^3(\sigma) \lambda_2''(\sigma) = -1 \quad . \quad (4.14)$$

Uma solução para esta equação, satisfazendo as exigências impostas sobre $\lambda(\tau, \sigma)$, é

$$\lambda_2^2(\sigma) = \omega^2 U(\sigma) \quad , \quad (4.15)$$

onde

$$\omega^2 = 2\pi^{-1} \quad , \quad U(\sigma) = \sigma(\pi - \sigma) \quad . \quad (4.16)$$

A equação de Ricci (4.9.1) se satisfaz com $S_i = \phi_{,i}$, para qualquer função arbitrária $\phi = \phi(\tau, \sigma)$. Poderíamos, agora, usar este fato nas equações de Codazzi para obter soluções gerais para \bar{b}_3 e \bar{b}_4 ; por simplicidade, no entanto, nos contentaremos em especificar $\phi = \sigma$. Neste caso, é fácil verificar que das equações de Codazzi decorrem

$$\bar{b}_3 = \lambda_1(\tau) V(\sigma) U^{-1/2}(\sigma) \quad , \quad (4.17)$$

$$\bar{b}_4 = -\lambda_1(\tau) V'(\sigma) U^{-1/2}(\sigma) \quad , \quad (4.18)$$

onde $V(\sigma)$ deve satisfazer às equações

$$V'' + V = 0 \quad . \quad (4.19)$$

$$V'^2 + V^2 = \omega^{-2} \quad (4.20)$$

Com base nesses resultados, vemos que os coeficientes das duas formas quadráticas fundamentais de S não estão ainda completamente determinados; S não está ainda completamente caracterizada, o que só ocorrerá após a especificação de $\lambda_1(\tau)$. Resolvemos o problema de imersão associado a strings abertos e finitos sem fixar o gauge, no sentido de que temos ainda as funções $\lambda_1(\tau)$ à nossa disposição. Esta é uma característica da técnica que desenvolvemos e que pode ser usada na construção de modelos particulares que nos interessem, de acordo com o problema que consideremos. Por exemplo, das equações (4.19-20) decorre que $V(\sigma) = \omega^{-1} \cos \sigma$ pode ser selecionada. Se escolhemos então

$$\lambda_1(\tau) = \tau \quad , \quad (4.21)$$

obteremos

$$g_{11} = \omega^2 \tau^2 \sigma(\pi - \sigma) \quad , \quad g_{12} = 0 \quad , \quad g_{22} = -1 \quad , \quad (4.22)$$

$$\bar{b}_3 = \frac{\tau \cos \sigma}{\omega \sqrt{\sigma(\pi - \sigma)}} \quad , \quad \bar{b}_4 = \frac{\tau \sin \sigma}{\omega \sqrt{\sigma(\pi - \sigma)}} \quad , \quad b_3 = 0 = b_4 \quad . \quad (4.23)$$

As equações (4.22-23) correspondem às soluções não estacionárias,

$$\{y^\mu\} = \{a(\sigma) \sinh \chi, a(\sigma) \cosh \chi, \frac{1}{2} k_1 \tau^2, \frac{1}{2} k_2 \tau^2\} \quad . \quad (4.24)$$

onde

$$a(\sigma) = \sigma - \omega^{-2} \quad , \quad \chi = \frac{i\omega\tau^2}{2} \quad , \quad k_1^2 + k_2^2 = -\omega^{-2} \quad (4.25)$$

Destacamos também que com $\lambda_1(\tau) = 1$ obtemos a solução estacionária (um bastão rígido em rotação),

$$g_{11} = \omega^2 \sigma(\pi - \sigma), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = -1 \quad (4.26)$$

$$\bar{b}_3 = \frac{\cos \sigma}{\omega \sqrt{\sigma(\pi - \sigma)}}, \quad \bar{b}_4 = \frac{\sin \sigma}{\omega \sqrt{\sigma(\pi - \sigma)}}, \quad b_3 = 0 = b_4, \quad (4.27)$$

$$\{y^\mu\} = \{\omega^{-1} \tau, k, a(\sigma) \sin \omega \tau, a(\sigma) \cos \omega \tau\}, \quad (4.28)$$

onde $a(\sigma)$ é dado em (4.25) e k é uma constante.

Para finalizar este capítulo vamos considerar, rapidamente, duas outras alternativas de se abordar o problema da imersão de strings finitos e abertos. Em primeiro lugar observemos que, fisicamente, a origem das dificuldades decorrentes das condições de contorno, está na hipótese assumida que a massa de repouso do string é nula. Tais dificuldades não ocorreriam se ao string atribuíssemos uma massa de repouso. Por exemplo, entre as possíveis alternativas de se atribuir uma massa ao string, consideremos que a seus extremos estão associadas massas pontuais m_0 e m_π . A ação para o sistema deve então ser modificada, acrescentando-se à ação de Nambu os dois termos,

$$- m_a \int d\tau (\dot{y}_a^2)^{1/2},$$

com $a = 0, \pi$ indicando os extremos do string. A possibilidade de que as linhas de evolução desses extremos sejam necessariamente curvas mínimas é excluída exigindo-se (^{48, 56})

$$\dot{y}_a^2 \neq 0.$$

Devemos observar, no entanto, que desta maneira não resolvemos o problema inicial e sim atacamos um outro problema. Pior, com o inconveniente grave de que as soluções gerais para as correspondentes equações de movimento e condições de contorno não são conhecidas.

Mais consistente é a alternativa de se generalizar a ação de Nambu pela adição de um termo correspondente à densidade lagrangiana de Einstein,

$$\mathcal{L}_E = R\sqrt{-g} \quad . \quad (4.29)$$

De fato, recordando que (4.29) é uma divergência em duas dimensões, é imediato que as equações de movimento correspondentes à ação generalizada serão as mesmas que as obtidas com a ação de Nambu. Mais ainda, no caso de strings finitos, as condições de contorno modificar-se-ão; e, no gauge ortonormal, as novas condições de contorno para a equação de Liouville serão finitas.

[Ver Zheltukhin, ref. 57],

CAPÍTULO 4

A RELAÇÃO ENTRE STRINGS E CAMPOS DE MAXWELL DE POSTO 2

1 - INTRODUÇÃO

No capítulo 2, consideramos o formalismo dos strings relativísticos como a teoria de um sistema dinâmico singular; nossa linguagem foi estabelecida de conformidade com a teoria de Dirac para sistemas com vínculos. Em seguida, no capítulo 3, analisamos a teoria geométrica considerando a superfície de evolução S do string como um subespaço do espaço-tempo. Em ambos os casos, a descrição do sistema fundamentou-se, essencialmente, na caracterização de S .

No presente capítulo modificaremos um pouco a abordagem do problema, de modo a favorecer a análise da dinâmica do string sob o ponto de vista de uma teoria de campo. Estendemos nossas considerações anteriores, construindo um formalismo com base nas coordenadas de Plucker de S . Nossa linguagem, como antes, será ainda a da análise tensorial e, agora, faremos apelo ao formalismo de bivectores.

Teremos interesse, particularmente, em discutir a relação entre modelos de string e campos de Maxwell específicos (posto 2). Verificaremos ser, então, necessário atribuir-se uma "densidade de corrente" j^α ao string. Analisaremos este resul-

tado e, da estrutura de j^α , extrairemos as informações relevantes sobre o modelo.

A descrição do string por suas coordenadas de Plucker, tendo a densidade de corrente j^μ como fonte, é, na forma estabelecida, um resultado novo que permite se especule sobre novas, e interessantes, possibilidades de aplicação do modelo. Dentre outros fatos importantes, ressaltamos a questão de se poder construir uma teoria (de campo) para o próprio j^α . Nesse sentido, um resultado curioso é que podemos estabelecer uma função lagrangiana usando j^μ , que corresponde, no gauge ortonormal, à própria função lagrangiana de Liouville.

O presente capítulo é constituído da seguinte maneira: na secção 2, consideramos a descrição do string através das coordenadas de Plucker de S estabelecendo a nossa linguagem. Na secção 3, discutimos a relação entre o modelo de string e campos de Maxwell de posto 2, esclarecendo as razões físicas da analogia. Reservamos a secção 4 para explorar as propriedades da densidade de corrente j^α que é atribuída ao string.

2 - TEORIA DO STRING EM TERMOS DAS COORDENADAS DE PLUCKER

A partir da base local $\{y_{,i}^\alpha, \xi_A^\alpha\}$, [c.f., secção 2, cap. 3], podemos caracterizar um elemento da superfície do string,

$$p^{\mu\nu} = \epsilon^{ij} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu \quad (2.1)$$

onde $\epsilon^{11} = 0 = \epsilon^{22}$, $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$. Estas expressões representam as componentes de um bivector (tensor antissimétrico de 2ª ordem) simples, tipo tempo (⁵⁸, ⁵⁹), que suporemos definido em todos os pontos da superfície de evolução S do string. As quantidades $p^{\mu\nu}$ são denominadas de coordenadas de Plucker de S. (⁶⁰). Estas coordenadas caracterizam-se pela propriedade:

$$p_{\mu\nu}^* p^{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

onde $p_{\mu\nu}^*$ é o dual de $p^{\mu\nu}$ definido na forma usual,

$$p_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\alpha\beta}, \quad \epsilon^{0123} = +1. \quad (2.3)$$

Este resultado decorre diretamente da definição (2.1); é também bastante simples comprovar que

$$\frac{1}{2} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \det ||g_{ij}|| = g. \quad (2.4)$$

Usamos agora os unitários normais ξ_A^α da base local

de S para construir, em cada ponto de S , o bivetor simples, tipo espaço,

$$\Pi^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \xi_A^\mu \xi_B^\nu, \quad (2.5)$$

com $\epsilon^{33} = 0 = \epsilon^{44}$, $\epsilon^{34} = -\epsilon^{43} = 1$. É óbvio que

$$p^{\mu\nu} \Pi_{\nu\beta} = 0, \quad (2.6)$$

sendo também simples estabelecer as relações (locais)

$$p_{\mu\nu}^* = (-g)^{1/2} \Pi_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Em termos das coordenadas de Plucker a ação de Nambu, [c.f., expressões (3.3.4), cap. 2], pode ser reescrita na forma

$$J = -N \int_S dx^1 dx^2 (-\frac{1}{2} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu})^{1/2}. \quad (2.8)$$

As correspondentes equações de movimento para o string resultam agora de

$$\widehat{D}^\mu f_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

onde $(^{38}) \widehat{D}$ é o operador diferencial linear definido por

$$\widehat{D}^\mu \equiv p^{\mu\beta} \partial_\beta \quad (2.10)$$

e $f^{\mu\nu}$ é nossa notação simplificada para,

$$f^{\mu\nu} \equiv (-g)^{-1/2} p^{\mu\nu} \quad . \quad (2.11)$$

Da definição (2.11) e do resultado (2.4) decorre que $f^{\mu\nu}$ está normalizado:

$$f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = - 2 \quad . \quad (2.12)$$

O operador \hat{D}^μ definido em (2.10) será também, indistintamente, usado na forma

$$\hat{D}^\mu \equiv p^{\mu\beta} \partial_\beta = \epsilon^{ij} y_{,i}^\mu y_{,j}^\beta x_{,\beta}^m \partial_m = \epsilon^{ij} y_{,i}^\mu \partial_j \quad (2.10.1)$$

Conforme explicitado na secção anterior, estamos supondo que $g \neq 0$ para todos os pontos de S (strings fechados, por exemplo), de modo que as equações de movimento (2.9) podem ser reescritas como,

$$f^{\mu\beta} \partial_\beta f_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.13)$$

A condição (2.12) e a antissimetria de $f_{\mu\nu}$ permitem manipular esta equação para a forma

$$f^{\mu\beta} \partial_\beta f_{\mu\nu} = \frac{3!}{4} f^{\mu\beta} \partial_{[\beta} f_{\mu\nu]} = 0 \quad ,$$

onde usamos a notação $[\]$ para indicar a antissimetrização total dos índices incluídos. Em termos das componentes duais é então imediato que

$$0 = f^{\mu\beta} \partial_\beta f_{\mu\nu} = -f_{\gamma\nu}^* \partial_\alpha f^{\gamma\alpha} = -\Pi_{\gamma\nu} \partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} ,$$

onde a última igualdade é decorrente da relação (2.7) e da de
 finição (2.11). Coletando estes resultados vemos que as equa-
 ções de movimento podem ser expressas em uma qualquer das for-
 mas seguintes

$$f^{\mu\beta} \partial_\beta f_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.14a)$$

$$f_{\gamma\nu}^* \partial_\alpha f^{\gamma\alpha} = 0 , \quad (2.14b)$$

$$\Pi_{\gamma\nu} \partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} = 0 . \quad (2.14c)$$

Por outro lado,

$$\partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} = x_{,\alpha}^m \partial_m (\varepsilon^{AB} \xi_A^\gamma \xi_B^\alpha) = \varepsilon^{AB} \xi_A^\gamma x_{,\alpha}^m \xi_{B,m}^\alpha$$

uma vez que $x_{,\alpha}^m \xi_B^\alpha = 0$, ($x_{,\alpha}^m$ é um vetor do plano tangente).

Usando este fato e a equação (2.6) secção 2 cap. 3, obtemos

$$\partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} = -\varepsilon^{AB} \xi_A^\gamma h_B = \varepsilon^{BA} \xi_A^\gamma h_B , \quad (2.15)$$

de modo que a expressão (2.14c) pode ser reescrita como

$$\Pi_{\gamma\nu} \partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} = 0 = \varepsilon^{AB} \xi_{A\gamma} \xi_{B\nu} \varepsilon^{CD} \xi_D^\gamma h_C = \sum_A h_A \xi_{A\nu} . \quad (2.16)$$

A independência linear dos vetores ξ_A permite então concluir
 que a superfície mundo do string é uma variedade mínima do es

paço-tempo:

$$h_A \equiv g^{ij} b_{Aij} = 0 \quad . \quad (2.16.1)$$

Com este resultado reescrevemos (2.15)

$$\partial_\alpha \Pi^{\gamma\alpha} = \partial_\alpha [(-g)^{-1/2} p^{\gamma\alpha}] = \partial_\alpha \tilde{f}^{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.17)$$

onde usamos (2.7) e (2.11).

Consideremos agora a forma (2.14a) das equações de movimento. É imediato que

$$\partial_\beta (f^{\mu\beta} f_{\mu\nu}) - f_{\mu\nu} \partial_\beta f^{\mu\beta} = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Por outro lado, usando o operador \hat{D}^μ segue que

$$\partial_\beta f^{\mu\beta} = (-g)^{-1/2} \partial_\beta p^{\mu\beta} + \hat{D}^\mu (-g)^{-1/2} \quad . \quad (2.19)$$

Definamos o vetor

$$j^\mu \equiv \partial_\beta p^{\mu\beta} \quad . \quad (2.20)$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} j^\mu &= x^m_{,\beta} \partial_m (\varepsilon^{ij} y^\mu_{,i} y^\beta_{,j}) \\ &= \varepsilon^{ij} y^\mu_{,i} (x^m_{,\beta} y^\beta_{,jm}) \end{aligned}$$

devido a antissimetria de ϵ^{ij} . Usando a equação (2.5) secção 2, cap. 2, podemos escrever sucessivamente

$$\begin{aligned} j^\mu &= \epsilon^{ij} y^\mu_{,i} x^m_{,\beta} \left[\sum_A e_A b_{Ajm} \xi_A^\beta + \left\{ \begin{matrix} k \\ jm \end{matrix} \right\} y^\beta_{,k} \right] \\ &= \epsilon^{ij} y^\mu_{,i} \left\{ \begin{matrix} m \\ jm \end{matrix} \right\} = \\ &= \epsilon^{ij} y^\mu_{,i} \partial_j \ln(-g)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.20.1)$$

O segundo termo do segundo membro da equação (2.19) resulta (usando a definição (2.10.1)) ser

$$\begin{aligned} \hat{D}^\mu (-g)^{-1/2} &= -(-g)^{-1/2} \epsilon^{ij} y^\mu_{,i} \partial_j \ln(-g)^{1/2} \\ &= -(-g)^{-1/2} j^\mu \end{aligned} \quad (2.21)$$

Com este resultado e a definição (2.20) a equação (2.19) conduz a

$$\partial_\beta f^{\mu\beta} = 0 \quad , \quad (2.22)$$

de modo que a equação de movimento (2.18) permite escrever

$$\partial_\beta T^\beta_\nu = 0 \quad , \quad (2.23)$$

se definirmos

$$T^\mu_\nu \equiv f^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} \quad . \quad (2.24)$$

Vemos assim que as equações de movimento para o string conduzem aos resultados mutuamente relacionados expressos pelas equações (2.17), (2.22) e (2.23). Os passos aqui seguidos podem ser invertidos na forma seguinte. Definimos $T^{\mu\nu}$ pela expressão (2.24) e impomos que sua divergência seja nula, equação (2.23), para obter as equações (2.17) e (2.22) conforme demonstrado por Stachel, ref. 59. Desse modo podemos associar o tensor $T^{\mu\nu}$ ao tensor momentum energia para o string.^(30, 59, 61).

3 - STRINGS E CAMPOS DE MAXWELL DE POSTO 2

Na secção anterior estabelecemos a descrição da evolução do string no espaço-tempo em termos das coordenadas de Plucker da superfície mundo do string. Desenvolvemos um formalismo que é, em verdade, um "híbrido" da teoria geométrica dos strings e o formalismo de bivectores. Esta descrição alternativa favorece a análise da dinâmica do string segundo as características próprias dos campos que lhe podem ser associados. Neste aspecto nos interessará, agora, discutir a analogia à campos de Maxwell específicos.

Em termos das coordenadas de Plucker $p^{\mu\nu}$ as equações (2.17) e (2.22) podem ser expressas como

$$\partial_\beta \overset{*}{p}^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad (3.1)$$

$$\partial_\beta p^{\alpha\beta} = j^\alpha \quad (3.2)$$

A equação (3.1) nos diz que o campo de bivectores $p^{\mu\nu}$ tem dual com divergência nula, o que vem implicar no fato de que $p^{\mu\nu}$ é um tensor fechado. Logo, $p^{\mu\nu}$ é exato, o que significa que existe $A_\mu(y(x))$, o vetor potencial de $p^{\mu\nu}$, tal que

$$p_{\mu\nu} = \partial_{[\nu} A_{\mu]} . \quad (3.3)$$

Este resultado é uma decorrência matemática da validade das equações (3.1) que, de fato, se constituem nas condições de integrabilidade que garantem a existência do campo vetorial $A_\mu(y(x))$. Esta situação é formalmente idêntica àquela correspondente a formulação covariante das equações de Maxwell. Realmente, podemos considerar as equações (3.1-2) como representativas dos dois pares das equações de Maxwell se identificarmos as componentes do tensor intensidade de campo eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, como proporcionais às coordenadas de Plucker de S:

$$F^{\mu\nu} = \lambda p^{\mu\nu} , \quad \lambda = \text{constante} . \quad (3.4)$$

Neste contexto, as equações não-homogêneas (3.2) definiriam uma "densidade de corrente" j^α no mundo do string.

Esta identificação, no entanto, restringe a classe de campos de Maxwell a aquelas que satisfazem a condição expressa pela equação (2.2), que traduz a propriedade característica das coordenadas de Plucker. Assim o invariante $\vec{E} \cdot \vec{B}$ é nulo o que, geometricamente, significa restringir os campos de Maxwell aos de posto 2. (⁶², ⁶³).

A primeira vista pode parecer surpreendente que as equações de movimento obtidas da ação de Nambu, onde $\mathcal{L}_\alpha (-\frac{1}{2} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu})^{1/2}$, correspondam às mesmas equações que descrevem um campo eletromagnético, cuja densidade lagrangiana se expressa como

$$\mathcal{L}_\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \lambda p_{\mu\nu} \quad .$$

Entretanto, se nos recordarmos que a evolução do string no espaço-tempo pode ser igualmente bem descrita considerando-se uma densidade lagrangiana $\mathcal{L}_\alpha p_{\mu\nu} p^{\mu\nu}$, podemos explicar facilmente este aparente paradoxo. Com efeito, usando $\mathcal{L}_\alpha p_{\mu\nu} p^{\mu\nu}$ para descrever a evolução do string, as equações de movimento obtidas, via princípio de mínima ação, englobam as equações (2.14a) contendo ainda um espectro mais amplo de soluções, conforme demonstrado por Schild (6⁵). Quando estabelecemos a equivalência formal da descrição da evolução do string no espaço-tempo com uma classe específica de campos de Maxwell, apoiamo-nos, essencialmente, nos resultados expressos pelas equações de movimento de modo que, neste sentido, é até natural que resultem equações tipo-Maxwell.

A correspondência (3.4) tem sido amplamente discutida na literatura (6²⁻⁶⁴), o ponto básico consistindo na interpretação da densidade de corrente j^α . Na secção seguinte usaremos o formalismo desenvolvido na secção 2 para discutir, com detalhes, as propriedades de j^α .

4 - A DENSIDADE DE CORRENTE DO STRING

Comecemos destacando o duplo papel desempenhado por j^α : com relação a um observador no espaço-tempo representam as componentes contravariantes de um quadrivetor; ao mesmo tempo, as quantidades j^α comportam-se como uma densidade escalar frente as transformações de coordenadas em S (transformações paramétricas permitidas em S). Assim, é natural considerarmos as quantidades

$$J^\mu \equiv (-g)^{-1/2} j^\mu = (-g)^{-1/2} \varepsilon^{ij} y_{,i}^\mu \partial_j \chi \quad , \quad (4.1)$$

onde usamos a expressão (2.20.1) e a notação simplificada

$$\chi \equiv \ln (-g)^{1/2} \quad . \quad (4.2)$$

As quantidades J^μ , definidas em (4.1), representam um conjunto de quatro funções escalares definidas em cada ponto $y^\alpha(x^i)$ de S.

Usando a definição (2.20) é imediato verificar que

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad (4.3)$$

o que podemos interpretar como a "lei de conservação da carga" para o string. Alternativamente, usando (4.1), temos

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad . \quad (4.4)$$

No que segue preferiremos trabalhar, mais precisamente, com as quantidades J^μ em lugar de j^μ .

A aplicação do operador \widehat{D}^μ , definido por (2.10.1), a uma função escalar $\Psi(y^\alpha(x^i)) = \Psi(x^i)$ definida sobre S , resulta em uma densidade escalar no mundo do string. Por essa razão definimos

$$\widehat{D}^\mu \equiv (-g)^{-1/2} \widehat{D}^\mu = (-g)^{-1/2} \epsilon^{ij} y_{,i}^\mu \partial_j . \quad (4.5)$$

A aplicação deste operador a uma função escalar (definida em S) resulta, obviamente, em um escalar sobre S .

Com as definições (4.1) e (4.5) podemos melhor investigar as implicações concernentes a atribuição de uma densidade de corrente ao string. Consideremos inicialmente o escalar $\widehat{D}_\mu J^\mu$ que podemos construir sobre S .

Temos,

$$\begin{aligned} \widehat{D}_\mu J^\mu &= (-g)^{-1/2} \epsilon^{ij} y_{\mu,i} \partial_j [(-g)^{-1/2} j^\mu] = \\ &= (-g)^{-1/2} \epsilon^{ij} \partial_j [(-g)^{-1/2} y_{\mu,i} j^\mu] = \\ &= (-g)^{-1/2} \epsilon^{ij} \partial_j [(-g)^{-1/2} \epsilon^{k\ell} g_{ik} \partial_\ell \chi] , \end{aligned}$$

e usando a identidade (*)

$$g^{ij} = g^{-1} \epsilon^{i\ell} \epsilon^{jk} g_{\ell k} , \quad (4.6)$$

(*) Ver, por exemplo, a referência 30.

obtemos

$$\widehat{D}_{\mu} J^{\mu} = - (-g)^{-1/2} \partial_j [(-g)^{1/2} g^{j\ell} \partial_{\ell} \chi] \quad (4.7)$$

Nesta expressão o termo $g^{j\ell} \partial_{\ell} \chi$ corresponde as componentes contravariantes de um vetor em S. Fazendo

$$V^j \equiv g^{j\ell} \partial_{\ell} \chi \quad , \quad (4.8)$$

a equação (4.7) se torna

$$\widehat{D}_{\mu} J^{\mu} = - \nabla_k V^k \quad , \quad (4.9)$$

onde ∇_k é nossa notação para o operador de derivação covariante em S. Podemos, agora, tirar proveito deste resultado para obter o significado geométrico do escalar $\widehat{D}_{\mu} J^{\mu}$, explicitando (4.9) em um sistema coordenado particular. Consideremos então o gauge ortonormal (*) definido pela expressão (3.4), secção 3, cap. 3. Com $\eta^{ij} \equiv \delta^{ij} (+1, -1)$ temos

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{\mu} J^{\mu} &= - \frac{1}{g_{11}} \eta^{ij} \partial_i \partial_j \ln g_{11} = \\ &= - \frac{1}{g_{11}} \square_X \ln g_{11} = \\ &= \frac{2 R_{1212}}{g} = R \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde usamos a expressão (3.11), secção 3, do cap. 3, e R é

(*) O que equivale a especificar coordenadas harmônicas ortogonais sobre S.
'Ver ref. 30

o escalar de curvatura de S. Vemos assim qual o significado geométrico do escalar $\widehat{D}_\mu J^\mu$, construído a partir da "densidade de corrente" associada a evolução do string no espaço-tempo.

Consideremos agora o outro escalar que podemos construir a partir das componentes J^μ ,

$$\begin{aligned} J^2 &= J_\mu J^\mu = -\frac{1}{g} j_\mu j^\mu = \\ &= -\frac{1}{g} \epsilon^{ij} \epsilon^{kl} g_{ik} \partial_j \bar{X} \partial_l X = \\ &= -g^{j\ell} \partial_j X \partial_\ell X, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde usamos a identidade (4.6). Com este resultado e $\widehat{D}_\mu J^\mu$ construímos a densidade escalar

$$\mathcal{L}_G \equiv (-g)^{1/2} \left[\widehat{D}_\mu J^\mu - \frac{1}{2} J_\mu J^\mu \right]. \quad (4.12)$$

Especificando o gauge ortonormal usamos (4.10) e (4.11) em (4.12). Obtemos,

$$\mathcal{L}_G = R g_{11} + \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_i \ln g_{11}) (\partial_j \ln g_{11}). \quad (4.13)$$

Identificando

$$g_{11} \equiv e^\Psi, \quad (4.14)$$

a expressão (4.13) se escreve

$$\mathcal{L}_G \equiv R e^\Psi + \frac{1}{2} [(\partial_1 \Psi)^2 - (\partial_2 \Psi)^2] , \quad (4.15)$$

que é exatamente a lagrangiana de Liouville que, como vimos, é característica da descrição do string como um problema de imersão, no gauge ortonormal.

Este resultado, além de bastante curioso, é muito sugestivo. De fato, ao descrevermos o string pelas coordenadas de Plucker, verificamos que as condições para a existência de um vetor potencial são satisfeitas. As equações de movimento para o tensor intensidade de campo construído com este potencial tem a corrente j^μ como fonte, e tal corrente transporta todas as informações sobre a geometria da superfície de evolução do string. Em outras palavras, a geometria é a fonte do vetor potencial $A_\mu(y(x))$. Isto nada mais é do que uma afirmação sobre a relação entre a física e a geometria. É algo semelhante a teoria da relatividade geral, essencialmente restrita pe la dimensionalidade da superfície de evolução. O significado físico do potencial $A_\mu(y)$ ainda se nos parece obscuro. Acreditamos ser possível estabelecer uma descrição alternativa para o string em termos destes potenciais o que, eventualmente, pode le var a um conhecimento mais profundo da teoria dos strings possibilitando assim novas aplicações do modelo. Por exemplo, po demos especular sobre a possibilidade de se construir esquemas de interação entre strings e entre strings e outros sistemas físicos usando o campo $A_\mu(y)$.

Vale a pena observar ainda, que a corrente j^μ que a

parece em nossa teoria tem essencialmente a mesma forma e pro
priedades que as correntes hadrônicas introduzidas por Nambu (⁶⁶).

APÊNDICE

1 - PRELIMINARES

Consideramos neste Apêndice os conceitos básicos de Geometria diferencial que utilizamos no presente texto.

Preocupou-nos, tão somente, a clareza dos conceitos estabelecidos, de modo que optamos por uma exposição simples, objetiva, mas não rigorosa destas noções. Nossa finalidade é específica: favorecer uma mais rápida leitura do Capítulo 3 onde desenvolvemos a teoria geométrica dos strings.

Indicamos, ao final, as principais referências bibliográficas que utilizamos. Nestas fontes os conceitos aqui discutidos são tratados de forma mais precisa e rigorosa. Explicitamos no entanto, que não as entendemos como uma indicação para um estudo mais profundo (posto que, então, seria uma listagem bastante incompleta), mas sim, e apenas, como as obras com as quais estamos mais acostumados.

2- SUPERFÍCIES NO R^3 : UM POUCO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL LOCAL

A- PRELIMINARES

Seguindo a idéia original de Gauss podemos caracterizar uma superfície S no espaço tridimensional Euclidiano, R^3 , na forma paramétrica

$$y^\alpha = y^\alpha(x^i) \quad (\text{A.1})$$

onde (*) $x^i \equiv (x^1, x^2)$, são parâmetros reais. Exigiremos que as funções y_α sejam de classe C^3 pelo menos. Adicionalmente, suporemos também que

$$y_{,1}^\alpha \times y_{,2}^\alpha \neq 0, \quad (\text{A.2})$$

onde usaremos a notação $y_{,i}^\alpha \equiv \partial_i y^\alpha \equiv \partial y^\alpha / \partial x^i$ para indicar derivação ordinária.

Uma curva $y^\alpha = y^\alpha(t)$ estará sobre a superfície S definida por (A.1-2) se

$$y^\alpha(t) = y^\alpha(x^i(t)) \quad , \quad (\text{A.3})$$

o que significa simplesmente que os pontos da curva são pon-

(*) Nesta secção adotaremos a convenção; índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$; índices latinos $i, j, k, \dots = 1, 2$.

tos da superfície.

O vetor tangente a uma curva sobre uma superfície é então definido por

$$\frac{dy^\alpha}{dt} \equiv \dot{y}^\alpha = y^\alpha_{,i} \frac{dx^i}{dt} = y^\alpha_{,i} \dot{x}^i. \quad (\text{A.4})$$

Deste modo, os dois vetores $y^\alpha_{,i}$ constituem uma base (*) para o espaço de todos os vetores tangentes à curva. É dizer, dado um ponto $y^\alpha(t_0) = y^\alpha(x^i(t_0))$ fixo na superfície S, se considerarmos todas as curvas sobre S que passam por esse ponto, as expressões (A.4) nos mostram que os correspondentes vetores tangentes neste ponto apontarão em todas as direções possíveis no plano determinado pelos vetores $y^\alpha_{,j}(x^i(t_0))$. Este plano é denominado de o plano tangente à superfície no ponto considerado.

A representação (A.1) não é unívoca; fazendo $x^i = x^i(\bar{x}^j)$, teremos $y^\alpha(x^i) \rightarrow \bar{y}^\alpha(\bar{x}^j)$, definindo uma transformação paramétrica para (A.1). Em geral, diremos que uma transformação paramétrica,

$$x^i = x^i(\bar{x}) \quad (\text{A.5})$$

é permitida, de classe C^k , se estas transformações (e suas in

(*) De acordo com a hipótese assumida em (A.2). Deve-se também observar que esta base não é, necessariamente, constituída de vetores unitários.

versas) admitirem derivadas contínuas até a ordem k (≥ 3) e o jacobiano da transformação for não singular, isto é,

$$\frac{\partial(x^i)}{\partial(\bar{x}^j)} \neq 0 \quad . \quad (A.5.1)$$

Garantidas estas condições a superfície S será igualmente bem descrita por $y^\alpha(x^i)$ ou $\bar{y}^\alpha(\bar{x}^i)$:

$$y^\alpha(x^i) = \bar{y}^\alpha(\bar{x}^i) \quad . \quad (A.6)$$

A definição (local) do vetor normal, unitário, é imediata com base na hipótese (A.2):

$$\vec{\eta} \equiv \frac{\vec{y}_{,1} \times \vec{y}_{,2}}{|\vec{y}_{,1} \times \vec{y}_{,2}|} \quad . \quad (A.7)$$

B- AS DUAS FORMAS FUNDAMENTAIS DE UMA SUPERFÍCIE

O comprimento de arco de uma curva sobre S é definido pela expressão,

$$s(t) = \int ds = \int^t (\dot{y}^2(\bar{t}))^{1/2} d\bar{t}. \quad (B.1)$$

Usando a expressão (A.4) escrevemos

$$\dot{y}^2 \equiv \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} = (\vec{y}_{,i} \cdot \vec{y}_{,j}) \dot{x}^i \dot{x}^j \equiv g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad , \quad (B.2)$$

definindo os coeficientes métricos g_{ij} da superfície. Comparando (B.1-2) decorre que

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad . \quad (B.3)$$

A forma quadrática definida por (B.3) é denominada de primeira forma fundamental de S. Os coeficientes métricos $g_{ij}(x)$ são inteiramente determinados por medições feitas na superfície; dizemos que estas quantidades são intrínsecas e estendemos esta noção a toda grandeza que possa ser expressa em termos apenas destes coeficientes.

Construindo a matriz $\|g_{ij}\|$ teremos,

$$g \equiv \det \|g_{ij}\| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\vec{y}_{,1} \times \vec{y}_{,2})^2 \neq 0, \quad (B.4)$$

face à hipótese (A.2). A última igualdade em (B.4) é facilmente obtida se lembrarmos da identidade,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \equiv \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{p} & \vec{v} \cdot \vec{p} \\ \vec{u} \cdot \vec{q} & \vec{v} \cdot \vec{q} \end{vmatrix} .$$

Concluimos então pela existência da matriz inversa, cujos elementos indicaremos por g^{ij} , definidos por

$$g^{il} g_{lk} = \delta^i_k \quad . \quad (B.5)$$

Agora, estabeleceremos uma base local em S definindo o triedro fundamental $\{\vec{y}_{,i}; \vec{\eta}\}$ com (c f., eq.(A.7)),

$$\eta^2 = 1 \quad . \quad (B.6)$$

Podemos então expressar as derivadas primeiras dos vetores básicos em termos desta base. Escrevemos,

$$\vec{y}_{,ik} = A_{ik}^j \vec{y}_{,j} + b_{ik} \vec{\eta} \quad , \quad (B.7)$$

$$\vec{\eta}_{,i} = B_i^j \vec{y}_{,j} + C_i \vec{\eta} \quad , \quad (B.8)$$

restando-nos determinar os diversos coeficientes destas expressões, que correspondem às projeções dos vetores do primeiro membro sobre o plano tangente local e na direção normal.

Os coeficientes b_{ik} são as projeções do vetor $\vec{y}_{,ik}$ na direção normal,

$$b_{ik} = b_{ki} = \vec{\eta} \cdot \vec{y}_{,ik} = - \vec{\eta}_{,k} \cdot \vec{y}_{,i} \quad , \quad (B.9)$$

com a última igualdade decorrendo de

$$\vec{\eta} \cdot \vec{y}_{,i} = 0 \quad ,$$

o que conduz, por diferenciação, a

$$\vec{\eta} \cdot \vec{y}_{,ik} = - \vec{\eta}_{,k} \cdot \vec{y}_{,i} \quad .$$

Se multiplicarmos a equação (B.8) por $\vec{y}_{,k}$ e usarmos (B.9) obteremos

$$b_{ik} = - B_i^j g_{jk} ,$$

de modo que

$$B_k^\ell = - g^{\ell j} b_{jk} . \quad (B.10)$$

Também, como

$$\vec{\eta} \cdot \vec{\eta}_{,j} = 0 ,$$

segundo decorre de (B.6), é fácil verificar que

$$C_i = 0 , \quad (B.11)$$

como decorrência imediata de (B.8). Resta-nos, assim, determinar apenas os coeficientes A_{ik}^j . Não entraremos em detalhes [Ver, por exemplo, Laugwitz, D., §4] apresentando apenas o resultado:

$$A_{ik}^j \equiv \{i^j k\} = g^{j\ell} [ik, \ell] \quad (B.12)$$

onde $\{j^i k\}$ e $[ij, k]$ representam os símbolos de Christoffel de segunda espécie e primeira espécie, respectivamente, em S.

Consideremos agora mais detalhadamente as projeções do vetor $\vec{y}_{,ik}$ na direção normal. Observemos inicialmente que sob uma transformação de "coordenadas" (isto é, uma trans

formação paramétrica permitida) os coeficientes $b_{ij}(x)$, a exemplo dos coeficientes métricos $g_{ij}(x)$, se comportam como as componentes covariantes de um tensor simétrico de segunda ordem. Define-se a forma quadrática

$$\phi \equiv b_{ij} dx^i dx^j \quad (B.13)$$

como a segunda forma fundamental da superfície.

Para entendermos o significado geométrico desta definição, procederemos da forma que segue. Seja $\vec{y}(s)$ uma curva de S parametrizada por seu comprimento de arco s . Obviamente,

$$\vec{y}'' = \vec{y}_{,i} x^{i''} + \vec{y}_{,ik} x^{i'} x^{k'}$$

onde (') representa diferenciação com relação a s . Usamos a expressão (B.7) para reescrever,

$$\vec{y}'' = (x^{j''} + \{i^j_k\} x^{i'} x^{k'}) \vec{y}_{,j} + (b_{ik} x^{i'} x^{k'}) \vec{\eta}. \quad (B.14)$$

O vetor \vec{y}'' é, por definição, o vetor de curvatura da curva $\vec{y}(s)$. O módulo da projeção deste vetor sobre o plano tangente local é denominado de curvatura geodésica, k_g , da curva considerada. Por outro lado, o módulo da projeção de $\vec{y}''(s)$ na direção da normal $\vec{\eta}$ define a curvatura normal, k_n , de $\vec{y}(s)$. Deste modo, podemos escrever

$$k_g \vec{t} = (x^{j''} + \{i^j_k\} x^{i'} x^{k'}) \vec{y}_{,j}, \quad (B.15)$$

$$k_n = b_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad (B.16)$$

onde \vec{t} é um vetor unitário no plano tangente local.

O resultado expresso por (B.16), associado à definição (B.13), permite inferir que o valor da segunda forma fundamental de uma superfície para um vetor unitário \vec{x} é localmente igual à curvatura normal de uma curva (regular) que passe pelo ponto considerado e admita \vec{x} como tangente neste ponto. Observemos ainda que todas as curvas sobre S, que têm num dado ponto a mesma linha tangente, admitem nesse ponto a mesma curvatura normal. É este resultado que justifica o considerar-se a curvatura normal ao longo de uma dada direção em um ponto. [Teor. Meusnier; ver CARMO, M.P. do, pg 142]

C- CURVATURA MÉDIA E CURVATURA GAUSSIANA

Reescrevemos a equação (B.16) em termos de um parâmetro arbitrário t

$$k_n = \frac{b_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} = \frac{b_{ik} dx^i dx^k}{g_{ik} dx^i dx^k}. \quad (C.1)$$

Seja p ∈ S um ponto fixo e coloquemos o problema de determinar dentre todas as direções por p sobre S, aquelas direções em que k_n assume valores extremos. Estas direções são obtidas da equação

$$\Delta \equiv \det \begin{vmatrix} b_{1k} dx^k & b_{2k} dx^k \\ g_{1k} dx^k & g_{2k} dx^k \end{vmatrix} = 0, \quad (C.2)$$

e os correspondentes valores da curvatura normal são as raízes de

$$\bar{\Delta} \equiv \det \left\| b_{ik} - \frac{1}{R} g_{ik} \right\| = 0 \quad (C.3)$$

onde $R^{-1} \equiv k_n$ e R é definido como o raio de curvatura normal de S em p . [Ver por exemplo, EISENHART, L.P., (2), §40; LAUGWITZ, D. §5]. As raízes (*) da equação (C.3) são denominadas de curvaturas principais da superfície em p . Denotando por ρ_1 e ρ_2 estes valores, definimos

$$H \equiv \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = g^{ij} b_{ij}, \quad (C.4)$$

$$K \equiv \rho_1 \rho_2 = \frac{b}{g}, \quad (C.5)$$

sendo,

$$b \equiv \det \| b_{ij} \| = b_{11} b_{22} - b_{12}^2. \quad (C.6)$$

Os números H e K definidos em (C.4) e (C.5) representam res-

(*) Entendendo (C.3) como uma equação para R^{-1} . Os correspondentes valores de R são denominados de raios principais da curvatura normal.

pectivamente, a curvatura média e a curvatura gaussiana da superfície no ponto considerado. As direções associadas a ρ_1 e ρ_2 são denominadas de direções principais em p . Se indicarmos por $\vec{\xi}_{(1)}$ e $\vec{\xi}_{(2)}$ estas direções pode-se comprovar que, [DETLEF, L. §5]

$$(\rho_1 - \rho_2) g_{ik} \xi_{(1)}^i \xi_{(2)}^k = 0 \quad (C.7)$$

Este resultado nos diz que se $\rho_1 \neq \rho_2$ em p , as direções principais serão perpendiculares. O caso especial em que $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ conduz à indeterminação das direções principais em p . Neste caso,

$$b_{ik} = \rho g_{ik} \quad (C.8)$$

e qualquer direção em p , sobre S , pode ser denominada de direção principal. Diz-se então que p é um ponto umbílico de S . Outro caso particular, e de especial interesse para a teoria dos strings, corresponde àquele em que $\rho_1 = -\rho_2$ para todos os pontos de S . Neste caso, resulta da definição (C.4) que

$$H = g^{ij} b_{ij} = 0 \quad (C.9)$$

caracteriza a superfície que então é dita ser uma superfície mínima.

D- SISTEMAS COORDENADOS SOBRE UMA SUPERFÍCIE

Consideremos uma superfície S caracterizada na forma paramétrica (A.1). Se nestas equações fixamos $x^1 = \text{constante}$, estaremos definindo uma curva sobre S . Se permitimos que esta constante assumia valores contínuos, obteremos um arranjo contínuo de curvas cuja totalidade constituirá a superfície. Definimos desse modo as curvas $x^1 = \text{constante}$ sobre S . De forma análoga definimos as curvas $x^2 = \text{constante}$. As curvas destas duas famílias são as curvas coordenadas de S . Os parâmetros x^1 e x^2 são denominados de as coordenadas curvilíneas de um ponto sobre S . A direção positiva sobre uma curva coordenada é definida como a direção na qual o parâmetro correspondente cresce.

O vetor tangente à curva coordenada $x^1 = \text{constante}$ é $\vec{y}_{,2}$ e $\vec{y}_{,1}$ é o vetor tangente à curva $x^2 = \text{constante}$. Logo, as curvas coordenadas de S serão ortogonais em um dado ponto se

$$\vec{y}_{,1} \cdot \vec{y}_{,2} = g_{12} = 0 \quad (\text{D.1})$$

A validade de (D.1) em todos os pontos de S garantirá que as linhas coordenadas de S constituem um sistema ortogonal. Escolhendo convenientemente os parâmetros x^i , podemos estabelecer sistemas coordenados específicos em S que satisfaçam a esta condição. Consideraremos a seguir dois sistemas particulares.

SISTEMA COORDENADO DAS LINHAS DE CURVATURA

Na secção (C) vimos como determinar as direções principais locais de uma superfície quando o ponto considerado não é umbílico. No caso de pontos umbílicos temos as restrições (C.8) de modo que da expressão (C.1) resultará

$$k_n = \frac{1}{R} = \rho \quad . \quad (= \text{constante; pontos umbílicos}).$$

Este resultado traduz o fato de que o raio de curvatura normal é o mesmo, independentemente das direções consideradas no ponto; teremos $R = \infty$ no caso de um plano ($\rho = 0$) e $R = \text{constante} = \rho$ no caso de uma esfera. Assim, para qualquer superfície que não um plano ou uma esfera e à exceção de pontos umbílicos, as direções principais de curvatura são determinadas por (C.2). Usando a notação $x^1 \equiv \tau$, $x^2 \equiv \sigma$, reescreveremos (C.2) na forma explícita:

$$(g_{12}b_{11} - g_{11}b_{12})d\tau^2 + (g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22})d\tau d\sigma + (g_{22}b_{12} - g_{12}b_{22})d\sigma^2 = 0.$$

(D.2)

Esta equação define, em cada ponto (não umbílico) de S , duas curvas ortogonais cujas tangentes no ponto determinam as direções principais de S . Estas curvas são denominadas de linhas de curvatura de S .

Agora, se nos fixarmos em um sistema coordenado em

que as curvas coordenadas de S são as suas linhas de curvatura, a equação (D.2) reduzir-se-á necessariamente à forma,

$$(g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22}) dt d\sigma = 0 . \quad (D.3)$$

Assim, para que as linhas de curvatura de uma superfície sejam as suas curvas coordenadas, é necessário que

$$g_{12}b_{11} - g_{11}b_{12} = 0 , \quad (D.4)$$

$$g_{22}b_{12} - g_{12}b_{22} = 0 , \quad (D.5)$$

$$g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22} \neq 0 . \quad (D.6)$$

Este sistema de equações é equivalente a

$$g_{12} = 0 \quad , \quad b_{12} = 0 . \quad (D.7)$$

Inversamente, se impusermos (D.7), a equação (D.2) reduzir-se-á a (D.3). Desse modo, as condições (D.7) são necessárias e suficientes para que as linhas de curvatura de uma superfície sejam as suas curvas coordenadas.

SISTEMA COORDENADO DAS LINHAS ASSINTÓTICAS

Começemos por caracterizar o que se entende por li-

nhas assintóticas de uma superfície. Dadas duas direções em S determinadas pelos incrementos $(d\tau, d\sigma)$ e $(\delta\tau, \delta\sigma)$, diz-se que estas direções são conjugadas quando $b_{11}d\tau\delta\tau + b_{12}(d\tau\delta\sigma + d\sigma\delta\tau) + b_{22}d\sigma\delta\sigma = 0$. Em geral, diz-se que duas famílias de curvas sobre uma superfície constituem um sistema conjugado quando as tangentes no ponto de intersecção de duas curvas, uma de cada família, têm direções conjugadas. As direções auto-conjugadas são denominadas de direções assintóticas. Desse modo, as direções assintóticas em cada ponto de uma superfície satisfazem a uma equação da forma

$$b_{11}d\tau^2 + 2b_{12}d\tau d\sigma + b_{22}d\sigma^2 = 0 . \quad (D.8)$$

Esta equação define duas curvas em cada ponto de S que admitem como tangentes as direções assintóticas no ponto.

Se fixarmos as curvas coordenadas de S como as linhas assintóticas, resultará de (D.8) que

$$b_{11} = 0 \quad , \quad b_{22} = 0 \quad , \quad (D.9)$$

e inversamente. Assim, as condições (D.9) são as condições necessárias e suficientes para que as linhas assintóticas de uma superfície sejam as suas curvas coordenadas. Observemos que se impusermos ainda mais a condição de ortogonalidade (c f. eq. (D.1)), resultará da definição (C.4) que a curvatura média da superfície se anulará em cada um de seus pontos:

$$g^{ik} b_{ik} = 0, \quad (D.10)$$

o que também é válido no sentido inverso. Assim, a condição necessária e suficiente para que as linhas assintóticas constituam um sistema coordenado ortogonal é que a curvatura média da superfície seja nula; uma superfície mínima (c f., eq. (C.9)).

E- O TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE SUPERFÍCIES

As equações (B.7-8) são as equações básicas da teoria de superfícies. De acordo com os resultados estabelecidos em (B.10-12), podemos reescrevê-las

$$\vec{y}_{;ik} \equiv \vec{y}_{,ik} - \{i \quad k\}^r \vec{y}_{,r} = b_{ik} \vec{n}, \quad (E.1)$$

$$\vec{n}_{,k} = -g^{ij} b_{jk} \vec{y}_{,i}, \quad (E.2)$$

onde usamos a notação (;) para indicar o processo de derivação covariante. Estas equações são usualmente referidas como as fórmulas de Gauss, (E.1), e de Weingarten, (E.2). As condições de integrabilidade para o sistema (E.1-2) conduzem às imposições

$$R_{ijkl} = b_{jk} b_{il} - b_{jl} b_{ik}, \quad (E.3)$$

$$b_{ij;k} - b_{ik;j} = 0, \quad (E.4)$$

onde

$$R_{hijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} [ik, h] - \frac{\partial}{\partial x^k} [ij, h] + \{i^{\ell}{}^j\} [hk, \ell] - \{i^{\ell}{}^k\} [hj, \ell]$$

(E.5)

são as componentes do tensor de Riemann-Christoffel de S. As equações (E.3) e (E.4) são conhecidas, respectivamente, como as equações de Gauss e de Mainardi-Codazzi e traduzem as relações existentes entre os coeficientes das duas formas fundamentais de S.

Observemos que no caso bidimensional considerado, o tensor de Riemann-Christoffel tem essencialmente uma única componente independente que tomaremos como R_{1212} . Neste caso, a equação de Gauss, (E.3), traduz então uma única condição,

$$R_{1212} = -b, \tag{E.6}$$

onde usamos a definição (C.6). Se nos referimos agora à definição (C.5), teremos

$$K = - \frac{R_{1212}}{g}, \tag{E.7}$$

Como R_{1212} é uma quantidade intrínseca, decorre que a curvatura gaussiana é uma quantidade intrínseca, o que não deixa de ser surpreendente se nos recordamos que em sua definição, eq.(C.5), se faz um forte apelo a uma quantidade extrínseca, a normal ã S. Es

te fato foi considerado como extraordinário ("egregius") por Gauss, seu descobridor. O resultado (E.7) é a expressão matemática do teorema EGREGIUM de Gauss.

Encerraremos esta breve exposição dos conceitos básicos da teoria de superfícies explicitando o fato de que os coeficientes g_{ij} e b_{ij} caracterizam de forma completa uma superfície, no sentido abordado no teorema seguinte.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE SUPERFÍCIES

- Dados dois tensores simétricos, $\bar{g}_{ij}(x)$, de classe C^2 , e $b_{ij}(x)$, de classe C^1 , que satisfazem as equações de Gauss e de Mainardi-Codazzi e, mais ainda, $\bar{g}_{ik} \xi^i \xi^k > 0$ para $\xi^i \neq 0$, existe uma única superfície $\vec{y}(x)$, a menos de movimentos rígidos, de classe C^3 , cujas formas fundamentais, em um dado sistema coordenado, são $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$ e $b_{ij} = \bar{b}_{ij}$.

(O. Bonnet-1867). [Ver DETLEF, L.]

3- IMERSÃO DE UM V_n EM UM V_m

No parágrafo anterior, consideramos o problema de caracterizar uma superfície como imersa em um espaço tridimensional Euclidiano. Nos interessa agora generalizar este problema. Designaremos por V_n um sub-espaço de um espaço Riemanniano V_m , $n < m$, e procederemos de forma sucinta a caracteriza

ção geométrica de V_n , segundo um observador de V_m . Pretendemos, desse modo, atingir dois objetivos principais: o de favorecer o completo entendimento do formalismo geométrico dos strings como um problema de imersão de uma superfície no espaço-tempo, e o de explicitar que este formalismo é imediatamente generalizável a espaços envolventes com dimensão maior que quatro.

F- PRELIMINARES

Caracterizaremos V_n pelo conhecimento das funções

$$y^\alpha = y^\alpha(x) \quad . \quad (F.1)$$

Usaremos a seguinte convenção: índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, m$; índices latinos $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$; índices latinos maiúsculos $A, B, C, \dots = (n+1), \dots, m$, e entenderemos mais ainda que estes índices explicitarão de forma unívoca as quantidades relativas a cada espaço. Assim, por exemplo, $\{uv\}^\alpha$ e $\{j^i k\}$ representarão, respectivamente, os símbolos de Christoffel de segunda espécie de V_m e de V_n , sem ambiguidades.

Os coeficientes da primeira forma fundamental de V_n serão indicados por g_{ij} e $a_{\alpha\beta}$ será a nossa notação para os correspondentes coeficientes de V_m . Estes coeficientes relacionam-se por meio de

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{;i} y^{\beta}_{;j} \quad , \quad (F.2)$$

onde justificamos a notação de derivação covariante pelo fato de $y^{\alpha}(x)$, definidos em cada ponto de V_n , constituírem um conjunto de m funções escalares nesse espaço e desejarmos estabelecer uma descrição covariante.

Fundamentaremos nossa discussão no teorema que segue que utilizaremos sem demonstração. [Ver EISENHART, L.P.(3). §42]

TEOREMA 1 -

Com $g \equiv \det ||g_{ij}|| \neq 0$, é possível determinar $(m-n)$ vetores reais, mutuamente ortogonais e normais a V_n em cada ponto, nenhum dos quais é um vetor nulo.

Denotaremos os vetores normais por suas componentes ξ_A^{α} de modo que escrevemos a base local em V_n como a m -upla de vetores

$$\{y^{\alpha}_{;i}, \xi_A^{\alpha}\} \quad , \quad (F.3)$$

com

$$\eta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{;i} \xi_A^{\beta} = 0 \quad , \quad (F.4)$$

$$\eta_{\alpha\beta} \xi_A^{\alpha} \xi_B^{\beta} = e_A \delta_{AB} \quad , \quad (\text{n\~ao h\~a soma em A}). \quad (F.5)$$

Nestas expressões e_A são fatores de sinal ($e_A^2 = 1$) que caracterizarão as normais como tipo espaço ($e_A = -1$) ou tipo tempo ($e_A = +1$). (*)

O caso particular correspondente a $m = n + 1$ é usualmente referido dizendo-se que o V_n é uma hipersuperfície de V_m . Desse modo, a análise desenvolvida no parágrafo anterior é um caso simples da teoria geral de hipersuperfícies que, por sua vez, é um caso particular do problema geral em que $m > n + 1$. Notemos, no entanto, que os conceitos básicos lá discutidos não se modificam de forma essencial, de modo que não nos detemos em detalhes na exposição que segue.

G- HIPERSUPERFÍCIES

Seguindo o procedimento discutido no parágrafo anterior, começamos por expressar as equações fundamentais da teoria de hipersuperfícies escrevendo as derivadas primeiras dos vetores básicos em termos da base (F.3). Não entraremos em detalhes [Ver EISENHART, L.P., (3), §43] apresentando apenas os resultados:

$$y_{;ij}^\alpha = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} y_{;i}^\beta y_{;j}^\gamma + e b_{ij} \xi^\alpha \quad (G.1)$$

(*) Estamos considerando V_m com métrica de assinatura Lorentziana, (+-----).

$$\xi^{\alpha}_{;j} = -b_{\ell j} g^{\ell m} y^{\alpha}_{;m} - \{^{\alpha}_{\beta \gamma}\} y^{\beta}_{;j} \xi^{\gamma} \quad (G.2)$$

Nestas equações, ξ^{α} representam as componentes do vetor normal a V_n [c. f., teor.1]. As correspondentes condições de integrabilidade,

$$R_{ijkl} = e (b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}) + R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{;i} y^{\beta}_{;j} y^{\gamma}_{;k} y^{\delta}_{;l} \quad (G.3)$$

$$b_{ij;k} - b_{ik;j} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{;i} y^{\gamma}_{;j} y^{\delta}_{;k} \xi^{\beta} \quad (G.4)$$

são as equações de Gauss, (G.3), e Codazzi, (G.4), para uma hipersuperfície. [c. f., equações (E.3-4)].

H- IMERSÃO DO V_n NO V_m - CASO GERAL

Consideremos agora o caso mais geral em que $m > n + 1$.

As equações básicas da teoria são:

$$y^{\alpha}_{;ij} = - \{^{\alpha}_{\beta \gamma}\} y^{\beta}_{;i} y^{\gamma}_{;j} + \sum_A e_A b_{Aij} \xi^{\alpha}_A \quad (H.1)$$

e,

$$\xi^{\alpha}_{A;j} = -b_{A\ell j} g^{\ell m} y^{\alpha}_{;m} - \{^{\alpha}_{\beta \gamma}\} y^{\beta}_{;j} \xi^{\gamma}_A + \sum_B e_B S_{BAj} \xi^{\beta}_B \quad (H.2)$$

onde b_{Aij} são os coeficientes da segunda forma fundamental de V_n , agora definida como uma forma diferencial biquadrática:

$$\phi \equiv \sum_A e_A b_{Aij} b_{Akl} dx^i dx^j dx^k dx^l \quad (H.3)$$

Anotemos que as componentes dos vetores de torção,

$$S_{ABj} = -S_{BAj}$$

se anulam sempre que $m = n + 1$. [EISENHART, L.P., (3), §47. GOENNER, H.F., G.R.G. (1977)]. As condições de integrabilidade para o sistema (H.1-2) são,

$$R_{ijkl} = \sum_A e_A (b_{Aik} b_{Ajl} - b_{Ail} b_{Ajk}) + R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{;i} y^{\beta}_{;j} y^{\gamma}_{;k} y^{\delta}_{;l} \quad , \quad (H.4)$$

$$b_{Aij;k} - b_{Aik;j} = \sum_B e_B (S_{BAk} b_{Bij} - S_{BAj} b_{Bik}) + R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{;i} y^{\beta}_{;j} y^{\gamma}_{;k} \xi^{\delta}_{\beta A} \quad , \quad (H.5)$$

$$S_{ABj;k} - S_{ABk;j} + \sum_c e_c (S_{CAj} S_{CBk} - S_{CAk} S_{CBj}) + g^{\ell h} (b_{A\ell j} b_{Bhk} - b_{A\ell k} b_{Bhj}) + R^{\beta}_{\lambda\mu\nu} y^{\mu}_{;j} y^{\nu}_{;k} \xi^{\lambda}_{\beta} \xi_{A\beta} = 0 \quad . \quad (H.6)$$

Estas equações são denominadas de equações de Gauss, (H.4), Codazzi, (H.5), e de Ricci, (H.6), para o problema de imersão considerado.

I- SISTEMAS COORDENADOS EM V_n

Objetivando exclusivamente a aplicação ao formalismo geométrico dos strings desenvolvido no texto, discutimos a

gora como estabelecer o sistema coordenado das linhas de curvatura e o das linhas assintóticas para um V_2 imerso em um V_4 .

SISTEMA COORDENADO DAS LINHAS ASSINTÓTICAS

O conceito de direções conjugadas, introduzido no estudo de superfícies imersas no R^3 [c. f., secção D] é facilmente generalizado; duas direções definidas pelos incrementos dx^i e δx^i são ditas conjugadas quando

$$\sum_A e_A b_{Aij} b_{Akl} dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l = 0 . \quad (I.1)$$

As direções auto-conjugadas são ditas assintóticas e resultam de

$$\sum_A e_A b_{Aij} b_{Akl} dx^i dx^j dx^k dx^l = 0 . \quad (I.2)$$

Agora, especificando o caso de nosso interesse como sendo correspondente a $n=2$, $m=4$, $e_A = -1$, e usando a notação simplificada $x^1 \equiv \tau$, $x^2 \equiv \sigma$, é fácil comprovar que (I.2) reduz-se a

$$b_{A11} d\tau^2 + 2b_{A12} d\tau d\sigma + b_{A22} d\sigma^2 = 0 . \quad (I.3)$$

Se nos fixarmos em um sistema coordenado em que as linhas assintóticas do V_2 são tomadas como suas curvas coordenadas, a equação (I.3) assumirá a forma

$$b_{A12} d\tau d\sigma = 0 . \quad (I.4)$$

Desse modo, para que as curvas coordenadas de V_2 sejam suas linhas assintóticas, é necessário que

$$b_{A11} = 0 = b_{A22} \quad ; \quad b_{A12} \neq 0 . \quad (I.5)$$

Inversamente, impondo (I.5), a equação (I.3) reduz-se a (I.4), de modo que as condições (I.5) são também suficientes.

SISTEMA COORDENADO DAS LINHAS DE CURVATURA

Correspondentemente a cada um dos $(m-n)$ tensores de componentes b_{Aij} relativos ao conjunto ξ_A^α de normais unitárias, podemos determinar (localmente) as direções principais e assim definir uma n -upla de congruências ortogonais, que são as linhas de curvatura do V_n associadas às normais ξ_A^α . A curvatura normal [c f., (C.1)] se generaliza para.

$$\frac{1}{R} = \frac{b_{Aij} dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j} , \quad (I.6)$$

estando, então, associada a cada direção normal ξ_A^α . Usando a notação $x^1 \equiv \tau$, $x^2 \equiv \sigma$ e definindo

$$\lambda \equiv \frac{d\sigma}{d\tau} , \quad (I.7)$$

podemos reescrever (I.6) como

$$\frac{1}{R} = \frac{b_{A11} + 2b_{A12}\lambda + b_{A22}\lambda^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2} \quad , \quad (I.8)$$

onde particularizamos para o caso de interesse mencionado anteriormente. As linhas de curvatura são determinadas como aquelas curvas em cujas direções R assume seus valores extremos [c.f., secção D]. Usando as expressões (I.8), estas direções são obtidas por diferenciação em λ e igualando a zero o resultado, isto é,

$$(g_{11}b_{A12} - g_{12}b_{A11})d\tau^2 + (g_{11}b_{A22} - g_{22}b_{A11})d\tau d\sigma + (g_{12}b_{A22} - g_{22}b_{A12})d\sigma^2 = 0 \quad . \quad (I.9)$$

As curvas de (I.9) serão as curvas coordenadas $\tau = \text{constante}$ e $\sigma = \text{constante}$ se, respectivamente,

$$g_{12}b_{A22} - g_{22}b_{A12} = 0 \quad . \quad (I.10)$$

$$g_{11}b_{A12} - g_{12}b_{A11} = 0 \quad . \quad (I.11)$$

Garantido que $g_{11}b_{A22} - g_{22}b_{A11} \neq 0$, ou seja, excluindo pontos umbílicos, o sistema (I.10-11) se reduz às condições

$$g_{12} = 0 \quad , \quad b_{A12} = 0 \quad . \quad (I.12)$$

Estas condições são necessárias e suficientes para que se estabeleça o sistema coordenado das linhas de curvatura sobre o V_2 .

REFERÊNCIAS

- CARMO, M. P. do - Differential Geometry of Curves and
and Surfaces , Prentice Hall , 1976
- EISENHART, L. P. - 1 - A Treatise on the Differential Ge-
ometry of Curves and Surfaces , Dover.
- 2 - An Introduction to Differential Ge-
ometry , Princeton University Press,
1964.
- 3 - Riemannian Geometry - Princeton Uni
versity Press - 1949.
- GOENNER, H. F. - em General Relativity and Gravitation,
vol.8, nº2, 139 - 1977.
- LAUGWITZ, D. - Differential and Riemannian Geometry-
Academic Press - 1965.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - E.J. Saletan and A.H. Cromer - "Theoretical Mechanics" - J. Wiley - (1970)
- 2 - E.J. Saletan and A.H. Cromer - "Am. J. Phys.", 38, 892 - (1970)
- 3 - H. Goldstein - "Classical Mechanics" - Addison-Wesley - 6a. Ed. - (1959)
- 4 - L.A. Pars - "Quart. J. Mech. Appl. Math." - Vol. VII - Pt. 3 - 338 - (1954)
- H. Jeffreys - "Quart. J. Mech. Appl. Math." - Vol. VII - Pt. 3 - 335 - (1954)
- 5 - R.J. Eden - "Proc. Roy. Soc. London" - Ser. A. 205 - 564 - (1951)
- J.W. Campbell - "Bull. Am. Math. Soc." - 42 - 82 - (1936)
- A.E. Taylor - "Bull. Am. Math. Soc." - 40 - 735 - (1934)
- 6 - P.A.M. Dirac - "Lectures on Quantum Mechanics" - Yeshiva University, N.Y. - (1964)
- 7 - P.A.M. Dirac - "Can. J. Math." - Vol. 2 - 129 - (1950)
- 8 - E.C.G. Sudarshan dan N. Mukunda - "Classical Dynamics: A Modern Perspective" - Wiley, N.Y. - (1974)
- 9 - C.A.P. Galvão - "Dinâmica Hamiltoniana de Sistemas com Vínculos" - Notas de curso - CBPF - 1982
- 10 - A. Mercier - "Variational Principles of Physics" - Dover .
- 11 - P.A.M. Dirac - "Proc. Camb. Phil. Soc." - Vol. 29 - 389 - (1933)
- 12 - P.G. Bergmann and I. Goldberg - "Phys. Rev." Vol. 98 - 2 - 531 - (1955)
- N. Mukunda and E.C.G. Sudarshan - "J. Math. Phys." - Vol. 9 - 3 - 411 - (1968)

- S. Shanmugadhasan - "J. Math. Phys." - Vol. 16 - 6 - 677- (1973)
- M.J. Gotay, J.M. Nester and G. Hinds - "J. Math. Phys." - Vol. 19 - 11 - 2388 - (1978)
- R. L. Shcaffir - "J. Phys. A" - 15 - L 331 - L 336- (1982)
- N. Mukunda - "Ann. of Phys." - 99 - 408 - (1976)
- L. Lusanna - "Il Nuovo Cimento" - 65 B, 1 - 135 - (1981)
- K. Kamimura - "Il Nuovo Cimento" - 68 B - 1 - 33 - (1982)
- 13 - L.C. Gomes and R. Lobo - "Rev. Bras. Fis." - Vol. 9 - 2 - 459 - (1979)
- 14 - E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky - "Quantization of Relativistic systems with constraints" - CERN preprint (1977)
- L.D. Faddeev - "Theor. and Math. Phys.1" - 1 - (1970)
- 15 - F. Gantmacher - "Lectures in Analytical Mechanics" - MIR.
- 16 - C.W. Kilmister and J.E. Reeve - "Rational Mechanics" - Longmans - (1966)
- 17 - J.I. Neimark and N.A. Fufaev - "Dynamics of Nonholonomic Systems" - Translations of Mathematical Monographs - Vol. 33 - American Mathematical Society - (1972)
- 18 - E.T. Whittaker - "A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies" - Dover
- 19 - E. Engels - "Il Nuovo Cimento B" - 26 - 481 - (1975)
- 20 - P. Havas - "Supp. al Nuovo Cimento" - 5 - 363 - (1957)
- 21 - A.R. Forsyth - "A Treatise on Differential Equations" - 3rd Ed. - MacMillan - (1903) - Chap. VIII - Art. 150 a - 163
- 22 - H.A. Buchdahl - "Am. J. Phys." - Vol. 17 - 1 - 41 - (1949)
- "Am. J. Phys." Vol. 17 - 1 - 44 - (1949)
- 23 - I.N. Sneddon - "Elements of Partial Differential Equations" - Mac-Gram Hill - (1957) - Cap.1 §§ 5-8

- 24 - C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler - "Gravitation"
- W.H. Freeman and Co., San Francisco - (1973)
- 25 - P. Ramon - "Phys. Rev." - D 3 - 2415 - (1971)
- 26 - A. Neveau and J.H. Schwartz - "Nucl. Phys." B31 - 86 -
(1971)
- 27 - S. Mandelstam - "Phys. Reports" - 13 - nº 6 - (1974)
- 28 - P.A.M. Dirac - "Proc. Roy. Soc. London" - A 133 - 60 -
(1931)
- "Phys. Rev. 74" - 817 - (1948)
- 29 - Y. Mambu - "Lecture at Copenhagen Symposium" - (1970)
- 30 - T. Takabayasi - "Progr. Theor. Phys." - Vol. 52 - 6 -
1910 - (1974)
- 31 - T. Takabayasi - "Progr. Theor. Phys." - Vol. 43 - 1117 -
(1970)
- "Progr. Theor. Phys." - Vol. 44 - 1429 -
(1970)
- "Progr. Theor. Phys." - Vol. 46 - 1528 -
(1971)
- 32 - O. Hara - "Progr. Theor. Phys." - 46 - 1549 - (1971)
- 33 - G. Goto - "Progr. Theor. Phys." - 46 - 1960 - (1971)
- 34 - P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C.B. Thorn - "Nucl.
Phys." - B56 - 109 - (1973)
- 35 - Y. Ywasaki and K. Kikkawa - "Phys. Rev." - D8 - 440-(1973)
- 36 - C.A.P. Galvão and C. Teitelboim - "Supersymmetric Strings"
- a ser publicado
- 37 - S. Mandelstam - "Nucl. Phys." - B64 - 205 - (1973)
- "Phys. Lett." B46 - 447 - (1973)
- 38 - M. Kalb and P. Ramond - "Phys. Rev." - D9 - 2273 - (1974)
- 39 - P.S. Letelier - "Phys. Rev." - D15 - nº 4 - 1055 - (1977)
- "Phys. Rev." - D18 - nº 2 - 359 - (1978)
- "J.Math Phys." - 19 - nº 9 - 1898 - (1978)

- 40 - C. Rebbi - "Phys. Reports" - 12C - n^o 1
- 41 - J. Scherk - "Rev. Mod. Phys." - 47 - n^o 1 - 123 - (1975)
- 42 - A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim - "Constrained Hamiltonian Systems" - Academia Nazionale dei Lincei - (1976)
- 43 - M.S. Marionov - "Sov. Phys. Usp" - Vol. 20 - 3 - 179 - (1977)
- 44 - F. Lund and T. Regge - "Phys. Rev." - D14 - 6 - 1524 - (1976)
- 45 - R. Omnès - "Nucl. Phys." - B149 - 269 - (1979)
- 46 - B.M. Barbashov, V.V. Nesterenko and A.M. Chervyakov - "Theor. Mat. Fiz." - 40 - 1 - 15 - (1979)
- B.M. Barbashov and V.V. Nesterenko - "Commun. Math. Phys." - 78 - 499 - (1981)
- 47 - B.M. Barbashov and A.L. Koshkarov - "Theor. Mat. Fiz." - 39 - 1 - 27 - (1979)
- 48 - D.C. Salisbury and K. Sundermeyer - "Nucl. Phys." - B191-260 - (1981)
- 49 - E.L. Hill - "Rev. Mod. Phys." - 23 - 3 - 253 - (1951)
- 50 - C.A.P. Galvão - "Teoria Clássica dos Strings Relativísticos" - Notas de Curso - CBPF - 1982
- 51 - C. Rebbi - "Phys. Reports" - 12C - n^o 1
- 52 - A.A. Zheltukhin - "Sov. J. Nucl. Phys." - 33 - 6 - 927 - (1981)
- 53 - H.F. Goenner - "Gen. Rel. Grav." - Vol. 8 - 2 - 139 - (1977)
- 54 - L.P. Eisenhart - "Riemannian Geometry" - Princeton University Press - (1949)
- 55 - R. Osserman - "A Survey of Minimal Surfaces" - Van Nostrand - (1969)
- 56 - A. Chodos and C. B. Thorn - "Nucl. Phys." - B72 - 509 - (1974)

- 57 - A.A. Zheltukhin - "Letters in Math. Phys." - 5 - 213 -
(1981)
- "Sov. J. Nucl. Phys." - 34 - 2 - 311 -
(1981)
- 58 - J.A. Schouten - "The Ricci Calculus" Springer Verlag - Ber
lin - 1954
- 59 - J. Stachel - "Phys. Rev." D21 - 2171 - (1980)
- "Phys. Rev." D21 - 2182 - (1980)
- 60 - W. Pauli - "Theory of Relativity - Pergamon" - Oxford -
(1958) - p̄ag. 30
- 61 - M. Gürses and F. Gursey - "Phys. Rev." D11 - 967 - (1975)
- 62 - H.A. Kastrupp - "Phys. Lett." - 78B - 4 - 433 - (1978)
- "Phys. Lett." - 82B - 2 - 237 - (1979)
- 63 - M. Rinke - "Commun. Math. Phys." - 73 - 265 - (1980)
- 64 - Y. Nambu - "Effective Abelian Gauge Fields" - Enrico Fer
mi Institute - preprint - EFI 81-06
- "Phys. Rev. Lett." - Vol. 47 - 6 - 399 - (1981)
- Y. Hosotani - "Phys. Rev. Lett." - Vol. 47 - 6 - 399 -
(1981)
- A.P. Balachandran and A. Stern - "Phys. Rev." D - Vol.26-
6 - 1436 - (1982)
- 65 - A. Schild - "Phys. Rev." D - Vol. 16 - 6 - 1722 - (1977)
- T. Eguchi - "Phys. Rev. Lett." - Vol. 44 - 3 - 126 - (1980)
- 66 - Y. Nambu - "Phys. Rev" D - Vol. 4 - 4 - 1193 - (1971)



CONSELHO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
CIENTIFICO E TECNOLÓGICO

Ilmo. Sr. Coordenador de Formação Científica do CBPF

A Banca Examinadora constituída pelos Professores Carlos Augusto Pinto Galvão (CBPF), Marcos Duarte Maia (UnB), Bruto Max Pimentel Escobar (IFT/SP), Carlos Guido Bollini (CBPF) e Roberto Leal Lobo e Silva Filho (CBPF), no dia 17 de dezembro de 1982, em reunião que precedeu a exposição da Tese de Doutorado "Sistemas Dinâmicos com Vínculos: Aplicações a Sistemas Não-Holônomos e à Teoria dos Strings", por LUIZ JORGE NEGRI, considerou a Tese apta para defesa imediata.

Rio de Janeiro, 17 de dezembro de 1982

Carlos A. P. Galvão
Carlos Augusto Pinto Galvão

Marcos Duarte Maia
Marcos Duarte Maia

Bruto Max Pimentel Escobar
Bruto Max Pimentel Escobar

Carlos Guido Bollini
Carlos Guido Bollini

Roberto Leal Lobo e Silva Filho
Roberto Leal Lobo e Silva Filho



Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Carlos A.-P. Galvão

CARLOS AUGUSTO PINTO GALVÃO
Presidente

Marcos Maia

MARCOS DUARTE MAIA

Bruto Pimentel

BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR

C. G. Bollini

CARLOS GUIDO BOLLINI

Roberto Leal

ROBERTO LEAL LOBO E SILVA FILHO

Rio de Janeiro, 17 de dezembro de 1982