

IGNACIO ALFONSO DE BEDIAGA E HICKMAN

ESTUDOS SOBRE POSSÍVEIS EVIDÊNCIAS  
DE ESTRUTURAS DE DIQUARKS NOS BÁRIONS

*Tese de*  
*Mestrado*

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1 9 8 2

Aos meus pais e,

ã Clara

O conceito de verdade é perigoso, pois permite o dogmatismo. Se abalarmos contudo o conceito de verdadeiro, já não restam mais muradas no cais.

Henri Lefbvre

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Alberto Santoro, pelo seu apoio, estímulo, respeito e liberdade dada como Orientador amigo e, por tudo que me ensinou.

- Ao Grupo de Fenomenologia de Partículas, do C.B.P.F., Adolfo, Caruso, João, Moacir, Narciso e Santoro, pelo incentivo e proveitosas discussões que me deram, como também, pela solidariedade sempre presente.

- Ao Prof. Enrico Predazzi, cuja contribuição foi essencial ao presente trabalho.

- Ao Prof. Jayme Tiomno, como Chefe do Departamento de Relatividade e Partículas e ao Prof. Roberto Lobo, como Diretor do C.B.P.F., pelo apoio que recebi para realização deste trabalho.

- A todos os pesquisadores do C.B.P.F. que participaram direta ou indiretamente, na minha formação.

- A todos os colegas de pós-graduação, que fizeram com que este período de minha vida, fosse importante, tanto no ponto de vista humano como profissional.

- À Da. Clélia Mineiro pelo capricho, dedicação e paciência demonstrada na datilografia desta tese.

- À Myrian C.A. Costa por tantos favores prestados.

- Desejo agradecer ao apoio que me foi dado em alguns momentos difíceis, pelo Prof. Jader, Prof. Olinto, Marta e Marco Aurélio.

- Ao C.N.Pq. pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Ao analisarmos as possíveis subestruturas quark-diquark no bárion charmoso  $\Lambda_c^+$ , obtemos que o equilíbrio dinâmico das duas configurações mais prováveis, pode ser o responsável pela existência de dois estados para esta partícula, um com a massa de  $2.260\text{MeV}/c^2$  e o outro com a massa de  $2.285\text{MeV}/c^2$ .

São feitos estudos sobre os diversos modelos de diquark com algumas das suas aplicações, e propõe-se modificações deste modelo, no que diz respeito a representação do diquark no grupo  $SU(8)$ .

## SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	ii
LISTA DE TABELAS .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	vii
I - INTRODUÇÃO .....	1
II - DIQUARKS, E SUAS APLICAÇÕES .....	10
II-1    MODELOS DE DIQUARK PONTUAL .....	10
II-2    MODELOS DINÂMICOS DE DIQUARK .....	17
II-3    ALGUMAS APLICAÇÕES DO MODELO DE DIQUARK .	21
II-3.i    SUPERMULTIPLÉTOS DOS BÂRIONS .....	21
II-3.ii    MOMENTO MAGNÉTICO DOS BÂRIONS .....	23
II-3.iii    REAÇÕES COM TROCA DE ESTRANHEZA .....	26
II-3.iv    FRAGMENTAÇÃO DO DIQUARK .....	30
II-3.v    CONCLUSÃO .....	35
III - EVIDÊNCIA DA EXISTÊNCIA DO DIQUARK NO BÂRION CHAR-	
MOSO $\Lambda_c^+$ .....	36
III-1    SITUAÇÃO EXPERIMENTAL .....	36
III-2    NOSSO MODELO .....	42
III-3    APLICAÇÃO DO MODELO .....	45
III-4    RESULTADOS .....	57

III-5	FUNÇÃO DE ONDA DO $\Lambda_c^+$ .....	61
IV	- CONCLUSÕES .....	62
APÊNDICE A		
A.1	CÁLCULO DO PRODUTO DAS REPRESENTAÇÕES ...	65
A.2	FUNÇÃO DE ONDA DO $\Lambda_c^+$ .....	68
A.3	CONTEÚDO DOS MULTIPLÉTOS DO SU(2) E DO SU(3) (SU(4)) NAS REPRESENTAÇÕES DO SU(6) (SU(8)) .....	70
APÊNDICE B		
	FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES ....	73
	REFERÊNCIAS .....	82

## LISTA DE TABELAS

Tabelas		Pág.
I-1	Números quânticos dos quarks .....	3
I-2	Alguns resultados de modelos de potenciais para os bárions. Onde $OH^*$ são os resultados obtidos pelo modelo de N. Isgur e G. Karl. $OH$ e $P.L.$ , são os resultados obtidos pelo modelo de J. Abdalla, P. L. Ferreira e N. Zagury para o oscilador harmônico e para o potencial linear respectivamente. $V.E.$ são os valores experimentais .....	8
II-1a	Números quânticos dos díquarks no $SU(4)$ . A notação $d_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) indica os díquarks pertencentes a representação 10 do $SU(4)$ (inclue a representação seis do $SU(3)$ ), e a notação $s_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) indica os díquarks na representação 6 do $SU(4)$ (inclue a representação $\bar{3}$ do $SU(3)$ ) .....	13
II-1b	Funções de ondas dos bárions pertencentes a representação 8 do $SU(3)$ , com o acréscimo dos quatro bárions charmosos de mais baixa massa. $\chi$ representa a função de onda combinada do díquark de spin 1 com o quark de spin 1/2 e $\alpha$ representa a função de onda combinada do díquark de spin zero com o quark de spin 1/2, ambos são funções para um spin total igual a 1/2. $q_1, q_2, q_3, e q_4$ , representam os quarks $u, d, s$ e $c$ respectivamente .....	14



II-2	Números quânticos de quarks no modelo de S. Ono .....	15
II-3	Energia dos multipletos do $SU(6) \times O_3$ , para os bárions não estranhos e não charmosos [ II-9 ] .....	20
II-4	Resultados teóricos do modelo de diquark e do modelo de quark, para o momento magnético dos bárions, comparados aos valores experimentais [ II-14 ] .....	26
II-5	Sistemas de diquarks que ocorrem para diversas reações [ II-21 ] .....	34
III-1	Resultados de diversas experiências com produção de $\Lambda_c^+$ , com valores de massa próximos de 2,260 GeV .....	39
III-2	Resultados de diversas experiências com produção de $\Lambda_c^+$ , com valores de massa próximos de 2,285 GeV .....	39
III-3	Valores do $\Delta E$ de energia e do estado de mais alta massa do $\Lambda_c^+$ , encontrado com o potencial do duplo oscilador, para diversos valores de $2a$ , $\mu$ e $V_0$ .....	59
III-4	Valores do $\Delta E$ de energia e do estado de mais alta massa do $\Lambda_c^+$ , encontrado com o potencial do duplo poço quadrado, para diversos valores de $a + b$ , $\mu$ e $V_0$ .....	59

## LISTA DE FIGURAS

Figuras		Pág.
II-1	Mésos e bárions no modelo de corda .....	17
II-2	Três configurações possíveis para os bárions no modelo de corda .....	18
II-3a	Processo de rearranjo .....	27
II-3b	Processo de aniquilação - criação .....	27
II-4, 5a, 5b	Seções de choque diferenciais para algumas reações com troca de estranheza; resultados comparativos com o modelo de quark. A seção de choque $\vec{\sigma}$ é dada por: $\vec{\sigma} = s(p_i^*/p_j^*)\sigma$ , onde $\sqrt{s}$ é a energia total do centro de massa e $p_i^*$ , $p_j^*$ são os momentos no centro de massa dos estados iniciais e finais respectivamente; $t'$ é definido por: $t' = (t - t_{\min})$ [ II-16 ] .....	30
II-6	Processo A: um dos quarks do bárion (B) (inicial) se combina com pares de quarks, formando hadrons, enquanto o diquark restante vai se combinar com um quark formando um bárion .....	31
II-7	Processo B: os quarks constituintes do diquark vão se combinar, simultaneamente, formando mésons e bárions .....	32
III-1	Distribuição de massa invariante para (a) $\bar{\Lambda}\pi^+\pi^-\pi^-$ e (b) $\bar{\Lambda}\pi^+\pi^+\pi^-$ .....	37
III-2	Espectro de massa para o $\Lambda_c^+$ , com alguns resultados experimentais [ III-18 ] .....	41

<i>Figuras</i>		<i>Pág.</i>
III-3	Diagrama de peso da representação 20 do $SU(4)$ .....	42
III-4	Dois estados possíveis para a molécula de amônia com a mesma energia .....	44
III-5	Potencial de dois osciladores harmônicos acoplados, onde $2a$ é o tamanho do bárion .....	45
III-6a	Função de onda antissimétrica .....	50
III-6b	Função de onda simétrica .....	50
III-7	Gráfico de $v = (E/\hbar\omega) - 1/2$ versus $\sqrt{2\mu\omega/\hbar} a$ para os quatro autoestados mais baixos do duplo oscilador .....	51
III-8	Duplo poço quadrado .....	55

## CAPÍTULO I

### - INTRODUÇÃO -

Desde o surgimento do modelo de diquark, diversas aplicações foram realizadas no sentido de buscar algumas evidências de sua existência, e ao mesmo tempo, tentar explicar determinados fenômenos, para os quais a aplicação do modelo de quarks não apresentava resultados satisfatórios. A diferença básica entre estes dois modelos consiste em que, para um, o bárion é um sistema de três corpos, no caso três quarks, enquanto que para o outro, o bárion é formado por dois corpos; um diquark e um quark, sendo que o diquark é um estado ligado de dois quarks.

Recentemente, experiências com a produção do bárion charmoso  $\Lambda_c^+$ , apresentaram diferenças significativas nos resultados obtidos para a massa desta partícula. Basicamente os resultados ficaram agrupados em duas regiões no espectro de massa: uma em torno de  $2260 \text{ MeV}/c^2$  e a outra em torno de  $2285 \text{ MeV}/c^2$ . Tendo em vista o espectro de definição apresentado com os respectivos erros, que mostraremos mais adiante, e levando em conta que estamos tratando de uma partícula estável, do ponto de vista das interações fortes, nós não achamos, a princípio, que esta diferença no valor da massa seja devido a dificuldades experimentais. A nosso ver, estes resultados indicam uma possível evidência da existência de uma subestrutura com diquark no b̄-

rion  $\Lambda_c^+$ . Acreditamos que estes dois valores encontrados experimentalmente representem dois estados do  $\Lambda_c^+$ , gerados por um efeito quântico. Efeito este, resultante do equilíbrio dinâmico das duas subestruturas mais prováveis de quark-diquark neste bárion. No Capítulo III desenvolveremos este modelo, apresentando os resultados.

O surgimento do modelo de quark, introduzido por Gell-Mann e Zweig, modificou substancialmente a concepção existente da Física de partículas elementares. Os mésons e bárions, que eram as partículas responsáveis pelas interações fortes, deixaram de ser "elementares" no sentido dado por Leucipo e Demócrito aos átomos, isto é, indivisíveis, e passaram a ser constituídos por novos "átomos", que foram chamados de quarks. Os bárions neste modelo seriam constituídos por três quarks, e os mésons por um quark e um antiquark. Na época da formulação deste modelo, acreditava-se que existiam três tipos de quarks: o quark  $u$ , o quark  $d$  e o quark  $s$ .

O grupo de simetria interna dos hadrons, isto é, mésons e bárions, seria o  $SU(3)$ , onde os bárions estariam representados nos multipletos 8 e 10 deste grupo, e os mésons nos multipletos 1 e 8. Os quarks estariam na representação fundamental deste grupo, o multipletto 3; e os antiquarks na outra representação fundamental, a representação conjugada  $\bar{3}$ .

No mesmo ano em que foi proposto o modelo de quark, Bjorken e Glashow [1-1], analisando a simetria entre leptons e quarks nas interações fracas, sugeriram a existência de um quarto quark, que chamaram de charme ( $c$ ). Na tabela 1 colocare

mos os números quânticos dos quatro quarks.

Quark	$I$	$I_3$	$Y$	$S$	$C$	$Q$
$u$	$1/2$	$1/2$	$1/3$	$0$	$0$	$2/3$
$d$	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	$0$	$0$	$-1/3$
$s$	$0$	$0$	$-2/3$	$-1$	$0$	$-1/3$
$c$	$0$	$0$	$-2/3$	$0$	$1$	$2/3$

TABELA 1 - Números quânticos dos quarks.

A introdução deste novo quark implica na substituição do grupo de simetria  $SU(3)$  por um outro, com um grau de liberdade a mais, isto é,  $SU(4)$ . Outra consequência correlata seria a previsão da existência de novos mésons e bárions contendo quarks charmosos. A confirmação desta previsão, só foi se dar dez anos depois, com a descoberta do méson vetorial  $J/\psi$ .

Neste contexto, surge o modelo de diquark, cuja base está no modelo de quark, pois considera, como este, que os bárions são constituídos por três quarks. Sendo que a diferença básica, conforme nos referimos anteriormente, é a redução de um sistema de três corpos a um de dois corpos.

Este modelo teve diversas versões além de muitas aplicações e atualmente é utilizado com relativo sucesso, em diversas áreas da fenomenologia das interações fortes. No Capítulo II faremos um apanhado das diversas versões e de algumas aplica

ções deste modelo.

• Apesar do esforço realizado, para detectar-se experimentalmente partículas com carga elétrica fracionária, que pudessem ser associadas a quarks ou diquarks, nenhum resultado positivo foi encontrado. Por outro lado uma quantidade razoável de dados experimentais tem indicado a presença de partículas dentro dos hadrons.

Uma destas evidências foi obtida nas reações profundamente inelásticas. Os resultados encontrados neste tipo de espalhamento, entre leptons e hadrons, tiveram como consequência, a indicação da existência de objetos que se comportam como se fossem aproximadamente livres dentro dos hadrons. Foi na região cinemática onde o momento transferido entre os leptons é grande, que estes resultados foram obtidos. Estes objetos foram chamados de "partons".

Em seguida a este resultado, encontrado nas reações com espalhamento profundamente inelástico, foi proposta uma teoria para as interações fortes, chamada de Cromodinâmica Quântica (CDQ). Esta, é uma teoria lagrangeana quântica de campos renormalizável, cujos constituintes fundamentais são fermions de spin  $1/2$ , os quarks, e bosons sem massa com spin  $1$ , os gluons. Nesta teoria os gluons interagem com os quarks, bem como entre eles mesmos [1-2].

Na CDQ os números quânticos associados ao  $SU(3)$ , ou ao  $SU(4)$  (o conjunto de números quânticos associados a estes grupos foram chamados de "sabor"), não participam da dinâmica das interações fortes. A dinâmica dos quarks teria como respon

sãvel as "cargas de cor". A cada quark se associou uma destas cargas, e é assumido a existência de três cores, que na nomenclatura usual são conhecidas por  $q_1 = \text{quark vermelho}$ ,  $q_2 = \text{quark branco}$ ,  $q_3 = \text{quark azul}$ . O grupo de simetria usado nesta teoria foi o  $SU(3)_c$  (o índice inferior serve para diferenciar do  $SU(3)$  de sabor), no caso, um grupo de simetria local.

A densidade lagrangeana invariante de calibre na CDQ é:

$$L_1 = i \bar{q}_\alpha^A \not{D}_{\alpha\beta} q_\beta^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

Onde o índice  $A$  representa os sabores dos quarks, que pode variar de 1 a  $N$  para o  $SU(N)$  de sabor. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  representam as cores dos quarks, que variam de 1 a 3. A derivada covariante é dada por:

$$\not{D}_{\alpha\beta} q_\beta^A \equiv (\delta_{\alpha\beta} \partial_\mu - ig\lambda_{\alpha\beta}^a A_\mu^a/2) \gamma^\mu q_\beta^A$$

$\lambda^a$  são as matrizes geradoras do grupo  $SU(3)$ , e os  $A_\mu^a$  são os campos de gluons coloridos, que estão representados no octeto do  $SU(3)_c$ , o índice  $a$ , portanto, varia de 1 a 8. O termo  $F_{\mu\nu}^a$  é dado por:

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$g$  é a constante de acoplamento e  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura do  $SU(3)$ , obtidas através da expressão  $[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$ . O último termo de  $F_{\mu\nu}^a$  contém a auto-interação dos



campos de gluons.

Uma das hipóteses para o confinamento dos quarks, considera que os estados observados são singletes de cor, logo, os mēsons e bārions observados devem pertencer ao singlete do grupo  $SU(3)_c$ . Por outro lado, os quarks e gluons são estados coloridos, não devendo, portanto, ser observados diretamente. Conforme vimos, esta afirmação não foi desmentida até o presente momento. Um estado previsto pela CDQ, são os glueballs, que podem ser os únicos estados de hadrons puros. Estes objetos seriam estados ligados de gluons, singletes de cor, e com todos os números quânticos de sabor iguais a zero. Existe hoje uma intensa busca destes estados, com alguns resultados positivos embora não conclusivos [1-3].

O confinamento das cores, ainda é um dos problemas não resolvidos na CDQ. Um quadro elementar do mecanismo de confinamento baseia-se no caráter auto-interativo dos gluons. Enquanto na Eletrodinâmica o campo eletromagnético se espalha por todo o espaço - uma vez que o fóton não é auto-acoplado - na Cromodinâmica o caráter auto-interativo dos gluons pode implicar que a configuração de mais baixa energia seja um tubo de fluxo colorido entre o quark e o antiquark, no caso de um mēson. Então, desde que a variação da energia potencial para tal configuração do campo seja uma função crescente da distância, obteremos o confinamento.

Antes mesmo da existência de uma teoria para as interações fortes, foram desenvolvidos diversos modelos fenomenológicos para o potencial entre os quarks. A dificuldade de apli-

cação destes modelos residia fundamentalmente, no problema da resolução de sistemas a três corpos, necessários ao tratamento dos bárions, no modelo de quarks.

Um dos potenciais que teve grande sucesso, surgiu logo a seguir à formulação da existência de quarks, qual seja, o potencial do oscilador harmônico. Este modelo de potencial para os bárions tem tido boa aceitação até os dias de hoje, utilizado por muitos autores e em diversos sistemas.

A título de ilustração, apresentaremos dois exemplos de modelos de potenciais distintos utilizados na espectroscopia dos bárions; um não relativístico e outro relativístico. Em ambos os modelos usa-se o potencial harmônico.

N. Isgur e G. Karl na descrição dos espectros de massa dos estados excitados, e das larguras de decaimento de ressonâncias bariônicas, utilizam um modelo não relativístico, cujas interações independem do sabor, para sistemas de quarks leves (u, d e s). O Hamiltoniano deste modelo é dado por [1-4]:

$$H = \sum \left[ m_i + \frac{p_i^2}{2m_i} \right] + E_0 + \frac{1}{2} K \sum_{i>j} |r_i - r_j|^2 + U(r_{ij}) + H'_{ij}$$

$m_i$  é a massa dos quarks,  $E_0$  é um parâmetro,  $U(r_{ij})$  é uma perturbação ao oscilador, e  $H'_{ij}$  é um termo de interação hiperfino. Os resultados deste modelo, obtidos para os bárions de mais baixa energia estão indicados na Tabela 2.

Uma outra aplicação de potenciais do oscilador harmônico, foi desenvolvida por J. Abdalla, P.L. Ferreira e N. Zagury

[ I-5 ], neste modelo, os quarks leves são tratados relativisticamente, baseado na suposição que os quarks obedecem a uma equação de Dirac com um potencial confinante da forma  $1/2(1+\beta)V(\kappa)$ , que é descrito por [ I-4 ]

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m + 1/2 (1+\beta) V(\kappa)\Psi = E\Psi .$$

Na Tabela 2, mostraremos os resultados obtidos por este modelo, tanto com um potencial da forma  $V=V_0+K/2 \kappa^2$ , como para um potencial linear de forma  $V=V_0+\lambda\kappa$ , no cálculo do espectro de massa dos bárions de mais baixa energia [ I-4 ]

Bárions	OH*	OH <sup>†</sup>	P.L.	V.E.
N <sub>1/2</sub>	INPUT	947	948	938
Λ <sub>1/2</sub>	1110	1243	1115	1116
Σ <sub>1/2</sub> <sup>0</sup>	1190	1165	1137	1189
Ξ <sub>1/2</sub> <sup>-</sup>	1325	1332	1335	1315
Δ <sub>3/2</sub>	INPUT	1173	1153	1232
Σ <sub>3/2</sub> <sup>*</sup>	1390	1358	1308	1385
Ξ <sub>3/2</sub> <sup>*</sup>	1530	1525	1506	1530
Ω <sub>3/2</sub> <sup>-</sup>	1675	1674	1746	1672

TABELA 2 - Alguns resultados de modelos de potenciais para os bárions. Onde OH\* são os resultados obtidos pelo modelo de N. Isgur e G. Karl. OH e P.L., são os resultados obtidos pelo modelo de J. Abdalla, P.L. Ferreira e N. Zagury para o oscilador harmônico e para o potencial linear respectivamente. V.E. são os valo-

*res experimentais.*

Podemos observar uma boa concordância entre os valores obtidos por estes modelos e os valores obtidos experimentalmente. É interessante notar, que os resultados alcançados com o potencial harmônico no modelo relativístico, não diferem significativamente, dos valores obtidos com o mesmo potencial no modelo não relativístico. Outra observação interessante refere-se aos valores obtidos pelo potencial linear no modelo relativístico, uma vez que, estes são bem parecidos com os obtidos pelo potencial harmônico, neste mesmo modelo.

Além dos Capítulos II e III aos quais já nos referimos, apresentaremos no Capítulo IV as conclusões da Tese.

Com a finalidade de facilitar a leitura da Tese, acrescentamos dois Apêndices. No Apêndice A, apresentaremos algumas noções sobre simetrias  $SU$  em geral. No Apêndice B, calcularemos as soluções das equações confluentes, e as aproximações destas soluções.

## CAPÍTULO II

### DIQUARK, E SUAS APLICAÇÕES

#### II.1 - Modelos de Diquark Pontual

Logo após o surgimento do modelo de quark, M. Ida e R. Kobayashi [II-1] propuseram um modelo para o bárion, no qual este seria formado por um par de quarks ligados entre si, ou um diquark, e um outro quark movendo-se em torno com momento angular  $L$ . O diquark pertenceria à representação seis do  $SU(3)$  com spin igual a 1. O quark com spin  $1/2$ , seria um para-fermion e estaria na representação fundamental do  $SU(3)$ , como no modelo de quark. Para  $L=0$ , obtiveram o octeto  $1/2^+$  e o decuplete  $3/2^+$  dos bárions, através do produto da representação de seis do diquark com a representação três do quark ( $3 \otimes 6 = 8 \oplus 10$ , ver Apêndice A).

Um modelo com as mesmas características, foi desenvolvido logo a seguir, de uma forma independente, por D.B. Lichtenberg e L.J. Tassie [II-2]. Neste modelo o bárion também seria formado por dois corpos, um quark com spin  $1/2$  (fermion), e um par de quarks ligados entre si, na representação 6 do  $SU(3)$  com spin 1 (bóson). Em um artigo sobre as propriedades eletromagnéticas dos hadrons, P.D. de Souza e D.B. Lichtenberg [II-3], refazem o modelo da ref. [II-2], que foi chamado "modelo bóson-fermion", introduzindo a paraestatística de ordem três para os quarks, proposta por Greenberg [II-4]. Neste artigo os autores testam as duas possibilidades: ser o diquark e o quark derivados de um único campo de quark, com o diquark ten-

do os números quânticos de um estado de dois quarks, ou o diquark e o quark sendo quantas de dois campos diferentes. Os autores concluem que a primeira hipótese de um único campo de quarks é a que traz melhores resultados.

Uma característica do modelo de quark, que não está contido nesta primeira versão do modelo quark-diquark, é que no modelo de quarks os bárions podem ser considerados como pertencentes ao multiplete 56 do  $SU(6)$ . Entretanto, se supusermos este grupo de simetria e esta representação para os bárions, no modelo quark-diquark teremos, que os diquarks devem pertencer ao multiplete 21, enquanto os quarks devem pertencer ao multiplete 6. Mas o conteúdo em diquark nesta representação inclui o sexteto do  $SU(3)$  com spin 1 e um triplete de spin zero, pertencente à representação  $\bar{3}$  do  $SU(3)$ , enquanto no modelo quark-diquark original o diquark pertence somente à representação seis do  $SU(3)$ . (Ver esta discussão no Apêndice A).

D.B. Lichtenberg, L.J. Tassie, P.J. Keleman [11-5] generalizam o modelo quark-diquark, incluindo a invariância aproximada do grupo  $SU(6)$ . Sendo que das duas representações possíveis dos estados de dois quarks no  $SU(6)$ , que são as representações 15 e 21, os autores assumem somente o multiplete 21, já que para eles os diquarks da representação 15, fornecem uma configuração com uma energia muito maior do que os estados de diquark da representação simétrica 21.

Assim, o diquark combina-se com um terceiro quark para formar o bárion, como segue:

$$21 \times 6 = 56 \times 70$$

com os bárions do octeto e do deceto de  $SU(3)$  pertencendo à representação 56. Portanto, neste modelo para o diquark, os bárions pertencentes ao decuplo de  $SU(3)$  são formados pelo sexteto de spin um, e os bárions pertencentes ao octeto de  $SU(3)$ , são compostos por estados mistos de diquark pertencendo ao sexteto de spin um com o triplete de spin zero. Na Tabela 1.a colocaremos os números quânticos dos diquarks, baseado neste modelo e incluindo o charm, e na Tabela 1.b as funções de onda dos bárions do octeto de  $SU(3)$  que estão contidas nas representação 56, incluímos ainda, os quatro bárions charmosos de mais baixa massa.

$D$	$I$	$I_3$	$Y$	$Q$	Spin	Conteúdo em quark
$d_1$	1	+1	2/3	4/3	1	uu
$d_2$	1	0	2/3	1/2	1	ud
$d_3$	1	-1	2/3	-2/3	1	dd
$d_4$	1/2	1/2	-1/3	1/3	1	us
$d_5$	1/2	-1/2	-1/3	-2/3	1	ds
$d_6$	0	0	-4/3	-2/3	1	ss
$d_7$	1/2	1/2	-1/3	4/3	1	uc
$d_8$	1/2	-1/2	-1/3	1/3	1	dc
$d_9$	0	0	-4/3	1/3	1	sc
$d_{10}$	0	0	-4/3	4/3	1	cc
$s_1$	0	0	2/3	1/3	0	ud
$s_2$	1/2	1/2	-1/3	1/3	0	us
$s_3$	1/2	-1/2	-1/3	-2/3	0	ds

$\delta_4$	1/2	1/2	-1/3	4/3	0	uc
$\delta_5$	1/2	1/2	-1/3	1/3	0	dc
$\delta_6$	0	0	-4/3	1/3	0	sc

TABELA 1.a - Números quânticos dos diquarks no SU(4). A notação  $d_i$  ( $i=1,2, \dots, 10$ ) indica os diquarks pertencentes a representação 10 do SU(4) (inclue a representação seis do SU(3), e a notação  $s_i$  ( $i=1,2, \dots, 6$ ) indica os diquarks na representação 6 do SU(4) (inclue a representação  $\bar{3}$  do SU(3)).

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_1 q_2 - d_2 q_1) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_1 q_1 \alpha$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{6}} (d_2 q_2 - \sqrt{2} d_3 q_1) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_1 q_2 \alpha$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} (d_4 q_2 - d_5 q_1) \chi + \frac{1}{2\sqrt{3}} (s_2 q_2 - s_3 q_1 + 2s_1 q_3) \alpha$$

$$\Sigma^+ = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_1 q_3 - d_4 q_1) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_2 q_1 \alpha$$

$$\Sigma^0 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} [2d_2 q_3 - (d_5 q_1 + d_4 q_2)] \chi - \frac{1}{2} (s_3 q_1 + s_2 q_2) \alpha$$

$$\Sigma^- = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_3 q_3 - d_5 q_2) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_3 q_2 \alpha$$

$$\bar{\Sigma}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (d_4 q_3 - \sqrt{2} d_6 q_1) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_2 q_3 \alpha$$



$$\Sigma_c^- = \frac{1}{\sqrt{6}} (d_5 q_3 - \sqrt{2} d_6 q_2) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_3 q_3 \alpha$$

$$\Sigma_c^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_1 q_4 - d_7 q_1) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_4 q_1 \alpha$$

$$\Sigma_c^+ = -\frac{1}{2\sqrt{3}} [2 d_2 q_4 - (d_8 q_1 + d_7 q_2)] \chi - \frac{1}{2} (s_5 q_1 + s_4 q_2) \alpha$$

$$\Sigma_c^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_3 q_4 - d_8 q_2) \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} s_5 q_2 \alpha$$

$$\Lambda_c^+ = \frac{1}{2} (d_7 q_2 - d_8 q_1) \chi + \frac{1}{2\sqrt{3}} (s_4 q_2 - s_5 q_1 + 2 s_1 q_4) \alpha$$

TABELA 1.b - Funções de ondas dos bárions pertencentes a representação 8 do SU(3), com o acréscimo dos quatro bárions charmosos de mais baixa massa.  $\chi$  representa a função de onda combinada do diquark de spin 1 com o quark de spin 1/2 e  $\alpha$  representa a função de onda combinada do diquark de spin zero com o quark de spin 1/2, ambos são funções para um spin total igual a 1/2.  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$ , representam os quarks u, d, s e c respectivamente.

Em um artigo publicado em 1973, Seiji Ono [11-6] modifica o modelo de diquark, supondo que estes são partículas elementares, isto é, não são mais estados ligados de dois quarks. Para o autor o bárion  $\bar{b}$  é composto por um quark ( $q$ ) com spin 1/2,

que obedece a estatística de Fermi e um bõson ( $q'$ ) pertencente ao sexteto de  $SU(3)$  com spin 1. Neste modelo supõe-se ainda, a existência de uma "carga forte" ( $g$ ), sendo que os quarks teriam  $g=1$ , os antiquarks  $g=-1$ , os diquarks  $g=-1$  e os antidiquarks  $g=1$ . Para partículas com cargas fortes de sinais opostos, tem-se forças atrativas, e para partículas com cargas de mesmo sinal tem-se forças repulsivas. Assim, os mēsons seriam um sistema  $q\bar{q}$ , os bārions  $qq'$ . Sendo ainda possível a existência de um estado  $q'\bar{q}'$ , que está previsto pelo autor com uma massa menor que 2 GeV. Os números quânticos deste modelo são dados pela Tabela 2.

quark ( $g=1$ )	carga	hipercarga	nº bariônico
$q_u$	$y$	$2y - 1$	$1 - b$
$q_d$	$y - 1$	$2y - 1$	$1 - b$
$q_s$	$y - 1$	$2y - 2$	$1 - b$
diquark ( $g=-1$ )	carga	hipercarga	nº bariônico
$q'_{uu}$	$2 - y$	$2 - 2y$	$b$
$q'_{ud}$	$1 - y$	$2 - 2y$	$b$
$q'_{dd}$	$- y$	$2 - 2y$	$b$
$q'_{us}$	$1 - y$	$1 - 2y$	$b$
$q'_{ds}$	$- y$	$1 - 2y$	$b$
$q'_{ss}$	$- y$	$- 2y$	$b$

TABELA 2 - Números Quânticos de quarks e diquarks no modelo de S. Ono.

Os índices inferiores de  $q$  e  $q'$  indicam que eles se transformaram como os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  no  $SU(3)$ . Os parâmetros  $y$  e  $b$  podem, em princípio, assumir quaisquer valores. É interessante observar que este modelo, já começa a delinear uma teoria para as interações fortes. Mais adiante veremos que as interações quark-diquark vista pela CDQ, apresenta algumas semelhanças com as propostas por S. Ono.

Com este modelo supera-se dois dos problemas existentes na estatística das subestruturas dos bárions, quais sejam: -  
 $i$ ) as partículas obedecerem a paraestatística em vez da estatística habitual de spin;  
 $ii$ ) o modelo quark-diquark despreza a estatística quark-quark. Além disso, este modelo supera a dificuldade de se imaginar uma força que pode ligar dois quarks e deixar o terceiro distante destes. R.H. Capps [II-7], introduzindo uma quebra de simetria no  $SU(3)_c$ , supera estas mesmas dificuldades. Neste modelo é suposto que os quarks têm os índices do  $SU(3)_c$ , bem como os índices do  $SU(3)$  de sabor, e de spin, e que as forças de ligação dos quarks são transmitidas por troca de um gluon pertencente ao octeto do  $SU(3)_c$  e os bárions são compostos por três quarks com spin  $1/2$  que obedecem à estatística de Fermi.

As cores, neste modelo, são classificadas por A, B e C, e as interações são invariantes no subgrupo  $SU(2)$  das cores A e B. O potencial AB é muito forte, mas tem alcance menor do que os potenciais AC e BC. Como os bárions devem ser singlete

de cor, isto requer que cada bárion contenha um quark A, um quark B e um quark C. Com isto, obtêm-se uma configuração de diquark no bárion, formada pelos quarks com as cores A e B.

## 11.2 - Modelos dinâmicos de diquark

Alguns modelos dinâmicos para os quarks nos bárions, apresentaram um agrupamento de quarks na forma de diquark, como a configuração mais provável. Vamos descrever abaixo alguns destes modelos.

Os mésons, na configuração de "corda", são vistos como sendo um quark e um antiquark ligados por uma corda, e os bárions como sendo compostos por três quarks ligados por cordas com uma junção no centro, como mostramos na Fig. 1.



Figura 1 - Mésons e bárions no modelo de corda

T. Eguchi [11-8], usando a relação entre a energia e o momento angular de rotação da corda

$$E^2 \propto l \quad (1)$$

determina a configuração favorável de três quarks no modelo de corda para os bárions.

Para um dado momento angular, temos a grosso modo

três possíveis configurações de cordas para os bárions, como mostramos na fig. 2.

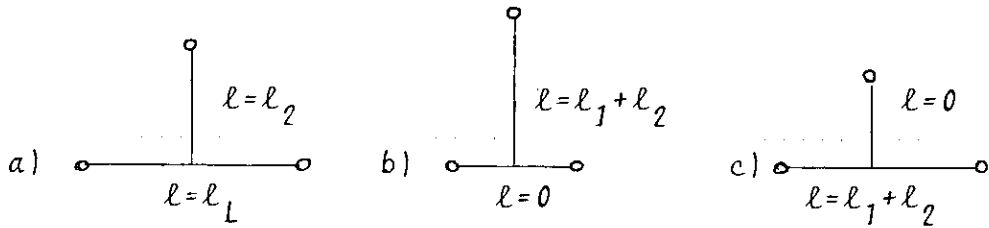


Figura 2 - Três configurações possíveis para os bárions no modo de corda.

De forma simplificada, uma avaliação da energia para os três casos, pode ser feita, introduzindo uma constante de proporcionalidade da eq. (1) igual a um.

caso (a)

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2}$$

caso (b)

$$E = \sqrt{l} = \sqrt{l_1+l_2}$$

caso (c)

$$E = \sqrt{l} = \sqrt{l_1+l_2}$$

mas,

$$\sqrt{l_1+l_2} < \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2}$$

Portanto, a configuração mais provável para os quarks no bárion é a do quark-diquark ou a linear da fig. 1c. Este resultado é válido para bárion com momento angular maior do que a unidade.

Um outro modelo desenvolvido por R. E. Cutkosky [II-9], também baseado no modelo de corda, obtém uma configura-

ração de agrupamento de quarks formando um diquark nos bárions.

Neste modelo os bárions são formados por quatro constituintes, isto é, partículas sem massa: três quarks de valência e uma partícula escalar sem carga, singlete de cor, que os autores chamam de "monade", esta última, representa a energia e o momento dos campos de gluons e dos quarks do mar. O termo principal do potencial é proporcional ao mínimo comprimento da "corda colorida", necessária para juntar os constituintes. Ao menos uma corda é ligada a cada quark, e ao menos duas cordas são ligadas ao monade. Este potencial segundo os autores, favorece uma configuração linear, com dois quarks relativamente juntos, com um raio entre eles que é um parâmetro livre. Além destes termos, foi acrescentado um potencial do tipo Coulombiano, atrativo de curto alcance entre dois quarks, e um potencial estabilizador do sistema de três quarks, a fim de poder descrever todos os multipletos conhecidos. Este potencial tem a forma:

$$U = \frac{1}{2} T \sum_{ij} r_{ij} - g \sum_{ij} r_{ij}^{-1} + U_0$$

O termo  $\frac{1}{2} T \sum_{ij} r_{ij}$  é chamado, pelos autores [II-9], contribuição do comprimento da corda, que contribue significativamente, quando um dos quarks está longe dos outros dois. A tensão da corda  $T$ , é calculada pelas trajetórias de Regge. O termo de Coulomb e a constante  $U_0$  surgiu segundo os autores de potenciais de curto alcance na combinação de dois e três corpos.

Os resultados obtidos com este modelo para os bárions

não estranhos e não charmosos são listados na Tabela 3.

$L^P$	56	70
$0^-$	$1.230^a$	1.759
$1^-$	$2.930^a$	1.716
$2^+$	$1.940^a$	2.046
$3^-$	2.229	2.190
$0^{+b}$	1.902	2.171
$1^{-b}$	2.293	2.090

$a = \text{INPUT}$

$b = \text{Excitação Radical}$

TABELA 3 - Energia dos multipletos do  $SU(6) \times O_3$ , para os bárions não estranhos e não charmosos [II-9].

Um outro resultado interessante foi obtido por Preparata e Szego [II-10] ao estudar um modelo tipo "sacola". Usando essencialmente argumentos geométricos, encontraram que sua equação de onda, pode somente ser resolvida e obter bons resultados, se a natureza suprimir um grau de liberdade interno para os quarks dentro do bárion. A configuração especial do quark-diquark corresponde justamente à supressão procurada.

Um modelo dinâmico baseado na QCD para os quarks foi apresentado por D.B. Lichtenberg et al [II-11]. Estes consideram que a interação entre dois quarks ou de um quark e um anti-quark é suscitada pela troca de um gluon colorido. Esta intera-

ção é atrativa somente para dois quarks, na configuração de cor  $\bar{3}$  e para um quark e um antiquark a interação é atrativa somente para a configuração singlete de cor. O diquark é entendido por estes autores, como um par de quarks ligados na configuração  $\bar{3}$ . Se não forem consideradas as forças dependentes de spin, a interação entre dois tripletes coloridos, ou um triplete e um anti-triplete pode depender unicamente, das suas configurações de cor. Com esta aproximação, a interação entre um quark e um diquark, será a mesma que a interação de um quark com um antiquark, e a interação entre dois diquarks será a mesma que a de dois antiquarks.

### II.3 - Algumas aplicações do modelo de diquark

O desenvolvimento do modelo de diquark sempre esteve vinculado à sua aplicação em problemas concretos, desde sua introdução feita por Ida e Kobayashi, a fim de descrever as trajetórias de Regge para os bárions, até os dias de hoje, com o estudo da fragmentação do diquark. Esse estreito vínculo com a sua aplicação, teve como consequência diversos modelos, que apresentamos nas duas seções precedentes. Nesta seção, procuraremos apresentar algumas aplicações recentes deste modelo, destacando aquelas em que foram apresentados resultados melhores que o modelo de quarks.

#### *i - Supermultipletos dos bárions*

Dos resultados obtidos pelo modelo de diquark, um dos que obtiveram maior sucesso, foi a determinação dos supermulti



pletos dos bárions no  $SU(6)$ .

Este sucesso motivou bastante a pesquisa do modelo de diquark. Para se ter uma idéia os modelos de T. Eguchi [11-8], R.E. Cutkosky et al [11-9] e G. Preparata et al [11-10] tiveram como motivação principal este tema.

Um resultado imediato que diferencia o modelo de diquark do modelo a três quarks, é que para este último, existe a possibilidade de termos bárions no multiplete 20 do  $SU(6)$ , enquanto no outro modelo esta representação não existe, pois ao supor que os diquarks pertencem à representação 21 do  $SU(6)$ , temos que a combinação do diquark com o terceiro quark, representado como se segue

$$6 \times 21 = 56 \times 70$$

somente obtêm-se bárions nas representações 56 e 70. Os resultados experimentais existentes até hoje não indicam a existência de bárions pertencentes ao multiplete 20.

Supõe-se a paridade do quark e do diquark como positiva, com isto temos a regra para a paridade dos bárions  $P=(-1)^L$ , onde  $L$  é o momento angular orbital relativo do sistema quark-diquark. Portanto, somente são permitidos a ocorrência de multipletos do  $SU(6)$  com  $L^P=0^+$ ,  $1^-$ ,  $2^+$  e etc.. Adicionando-se a isto uma força de troca entre o quark e o diquark, que é atrativa para estados de paridade par na representação 56, e atrativa para estados de paridade ímpar na representação 70 [11-12], obtêm-se o assim chamado espectro mínimo que são os [56,  $L^+_{par}$ ] e [70,  $L^-_{ímpar}$ ].

pletos dos bárions no  $SU(6)$ .

Este sucesso motivou bastante a pesquisa do modelo de diquark. Para se ter uma idéia os modelos de T. Eguchi [II-8], R.E. Cutkosky et al [II-9] e G. Preparata et al [II-10] tiveram como motivação principal este tema.

Um resultado imediato que diferencia o modelo de diquark do modelo a três quarks, é que para este último, existe a possibilidade de termos bárions no multiplete 20 do  $SU(6)$ , enquanto no outro modelo esta representação não existe, pois ao supor que os diquarks pertencem à representação 21 do  $SU(6)$ , temos que a combinação do diquark com o terceiro quark, representado como se segue

$$6 \times 21 = 56 + 70$$

somente obtêm-se bárions nas representações 56 e 70. Os resultados experimentais existentes até hoje não indicam a existência de bárions pertencentes ao multiplete 20.

Supõe-se a paridade do quark e do diquark como positiva, com isto temos a regra para a paridade dos bárions  $P = (-1)^L$ , onde  $L$  é o momento angular orbital relativo do sistema quark-diquark. Portanto, somente são permitidos a ocorrência de multipletes do  $SU(6)$  com  $L^P = 0^+, 1^-, 2^+$  e etc.. Adicionando-se a isto uma força de troca entre o quark e o diquark, que é atrativa para estados de paridade par na representação 56, e atrativa para estados de paridade ímpar na representação 70 [II-12], obtêm-se o assim chamado espectro mínimo que são os  $[56, L^+_{par}]$  e  $[70, L^-_{ímpar}]$ .

Existem evidências experimentais, embora não confirmadas, de bárions nos estados  $[56, 1^-]$  [II-13], mas esta existência já estava prevista pelo modelo da ref. [II-9] que apresentamos na seção anterior.

*ii - Momento magnético dos bárions*

O momento magnético do bárion, calculado pelo modelo de diquark por Xie Yicheng [II-14] é dado por:

$$\vec{M} = \vec{M}_D + \vec{M}_q$$

$\vec{M}_D$  é o momento magnético do diquark e  $\vec{M}_q$  é o momento magnético do quark, que é dado por:

$$\vec{M}_q = \mu_q Q \vec{\sigma}$$

Onde  $Q$  é a carga elétrica,  $\vec{\sigma}$  é o operador de spin,  $\mu_q$  é um parâmetro de escala inversamente proporcional às massas dos quarks, de tal forma que:

$$\mu_s = \frac{m_u}{m_s} \mu_u$$

Para o diquark temos que o momento magnético é dado por:

$$\vec{M}_D = \mu_D \sum_{j=1,2} Q^{(j)} \vec{\sigma}^{(j)}$$

Sendo que a massa do diquark é dado por:

$$m_{\mathcal{D}} = \sum_{j=1,2} m_q^{(j)} - \epsilon_{\mathcal{D}}$$

$\epsilon_{\mathcal{D}}$  é a energia de ligação, que será desprezada neste cálculo.

Supondo-se  $m_u = m_d \neq m_s$ , obtêm-se para o parâmetro  $\mu_{\mathcal{D}}$

$$\mu_{d_1} = \mu_{d_2} = \mu_{d_3} = \mu_{s_1} = \mu$$

onde os índices  $d_i$  e  $s_i$  indicam os diquarks (o índice  $\mathcal{D}$  indica um diquark qualquer, enquanto os índices  $d_i$  e  $s_i$ , são empregados para um diquark particular, segundo a classificação dada pela Tab. I.a). Também temos a relação:

$$\mu_{d_4} = \mu_{d_5} = \mu_{s_2} = \mu_{s_3} = \frac{2m_u}{m_u + m_s} \mu_{d_1} = \frac{2R}{R+1} \mu$$

$$\mu_{s_6} = \frac{m_u}{m_s} m_{s_1} = R\mu \quad \text{onde} \quad R = \frac{m_u}{m_s}$$

Calculando o valor esperado de  $\vec{M}$  com relação às funções de onda dos bárions, dados na Tab. 1.b, e usando as relações acima, obtêm-se as seguintes expressões para os momentos magnéticos dos bárions não charmosos  $\mu(B)$ :

$$\mu(P) = \mu$$

$$\mu(N) = -\frac{2}{3} \mu$$

$$\mu(\Lambda) = -\frac{2}{9} \left( R + \frac{R}{R+1} \right) \mu$$

$$\mu (\Sigma^+) = \frac{2}{27} \left[ 8 + 5R + \frac{R}{R+1} \right] \mu$$

$$\mu (\Sigma^0) = \frac{2}{27} \left[ 2 + 2R + \frac{R}{R+1} \right] \mu$$

$$\mu (\Sigma^-) = -\frac{2}{27} \left[ 4 + R - \frac{R}{R+1} \right] \mu$$

$$\mu (\overline{\Sigma}^0) = -\frac{2}{27} \left[ 1 + 4R + \frac{8R}{R+1} \right] \mu$$

$$\mu (\overline{\Sigma}^-) = \frac{1}{27} \left[ 1 - 8R - \frac{4R}{R+1} \right] \mu$$

Introduzindo os valores experimentais  $\mu(P) = 2,793$  e  $\mu(\Lambda) = -0,613$ , obtêm-se, os resultados da Tab. 4.

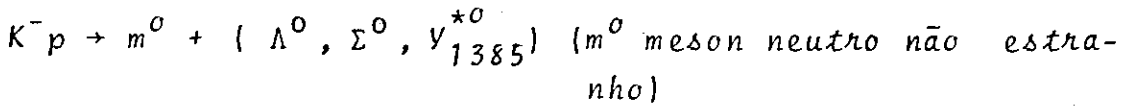
Bárion	Valor experimental	Modelo de quark	Modelo de díquark
P	2,793	2,793*	2,793*
N	-1,91	-1,86	-1,862
$\Lambda$	-0,613 ± 0,005	-0,613*	-0,613*
$\Sigma^+$	2,33 ± 0,13	2,67	2,45
$\Sigma^0$		0,81	0,77
$\Sigma^-$	-1,41 ± 0,25	-1,05	-0,92
$\overline{\Sigma}^0$	-1,20 ± 0,06	-1,39	-1,25
$\overline{\Sigma}^-$	-1,85 ± 0,75	-0,46	-0,50

\* INPUT

TABELA 4 - Resultados teóricos do modelo de diquark e do modelo de quark, para o momento magnético dos bárions, comparados aos valores experimentais [II-14].

iii - Reações com troca de estranheza

O desacordo existente entre as seções de choque, calculadas pelo modelo de quark e os dados experimentais, nas reações do tipo [II-15],



motivou M. Zralek et al [II-16] a utilizar o modelo de diquark objetivando encontrar melhores resultados para este tipo de reação. O fato essencial que levou os autores a aplicar este modelo, foi o de evitar a necessidade de uma simetrização da função de onda dos três quarks, já que pode-se tratar o diquark como um objeto distinguível do quark restante.

Os diagramas utilizados para o cálculo são os mesmos daqueles utilizados no modelo de quark, com dois tipos de processos chamados: processo de rearranjo e o processo de aniquilação-criação, mostrados nas figuras 3a e 3b respectivamente.

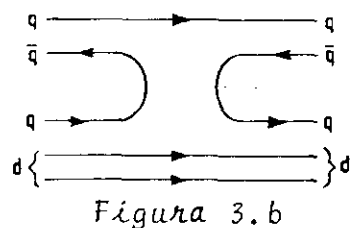
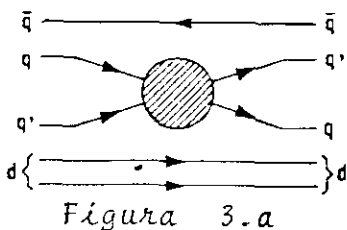


Figura 3a - Processo de rearranjo.

3b - Processo de aniquilação - criação

A amplitude convencional no modelo de quark para processos de interação a quase dois corpos, com momento transferido  $t$  é dado por:

$$H_a(t) = D(t) \sum_{a'} C_a^{a'} h_{a'}(t)$$

Onde  $a$  e  $a'$  representam a helicidade dos hadrons e quarks respectivamente,  $h_{a'}(t)$  representa a amplitude quark-diquark,  $C_a^{a'}$  são os coeficientes derivados das funções de ondas das partículas, e  $D(t)$  é um fator de forma. As amplitudes serão escritas em termos de  $x$ ,  $P_i$  e  $V_i$ . O termo  $x$  é igual a  $\text{sen}^2 \Gamma$  (onde  $\Gamma$  é o ângulo de quebra do  $SU(6)$ , que aparece na função de onda dos bárions. Como exemplo, a função de onda do próton dada pela Tabela 1.b, será escrita com este termo da seguinte forma:  $P = \text{sen} \Gamma \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} d_1 q_2 - d_2 q_1) \chi + \text{cos} \Gamma s_1 q_1 \alpha$ ). Em relação a amplitude acima, os termos dependentes de  $x$  são derivados do coeficiente  $C_a^{a'}$ . Os  $P_i$  e  $V_i$  são as amplitudes transversas do méson-quark, são combinações lineares das amplitudes transversas quark-quark definidas pelas figuras 3a e 3b (a notação  $P$  e  $V$  indicam respectivamente, mésons pseudoescalares e mésons vetoriais). No caso de uma reação do tipo  $K^- p \rightarrow \Pi^+ \dots$ , a amplitude  $P$  é dada por:  $P = \langle \Pi^0 q_3 | K^- q_1 \rangle$ , e para uma reação do tipo  $K^- p \rightarrow \rho^0 + \dots$ , a amplitude  $V$  é dada por:  $V = \langle \rho^0 q_3 | K^- q \rangle$ . As amplitudes  $H_a(t)$  são mostradas nas Tabelas III e IV da referência [II-16], para diversas reações.

Os resultados obtidos com este modelo para as reações com troca de estranheza são de maneira geral muito bons. Nas figuras 4 e 5 mostramos alguns resultados, colocando conjuntamente aqueles obtidos pelo modelo de quark.

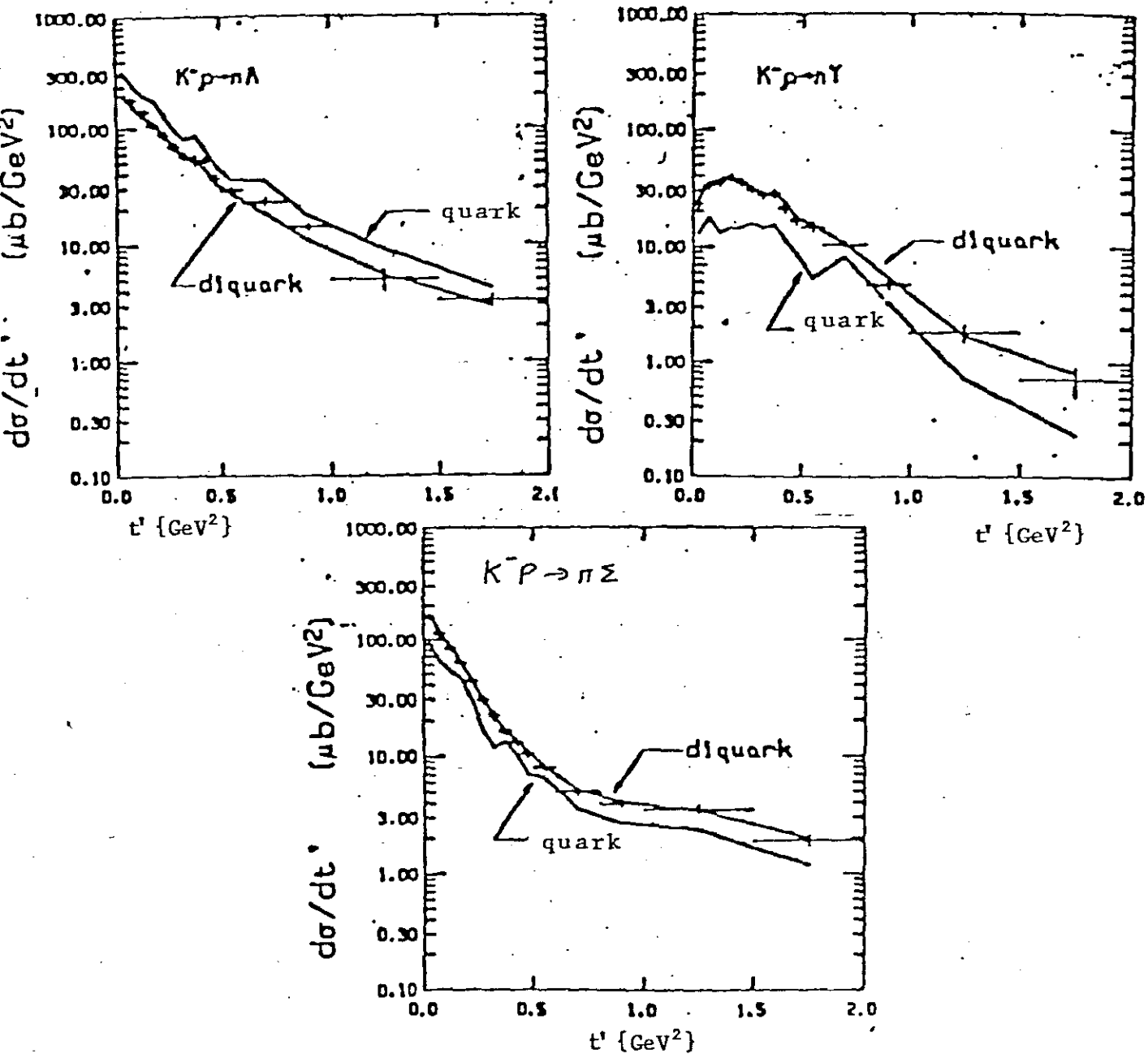


Figura 4



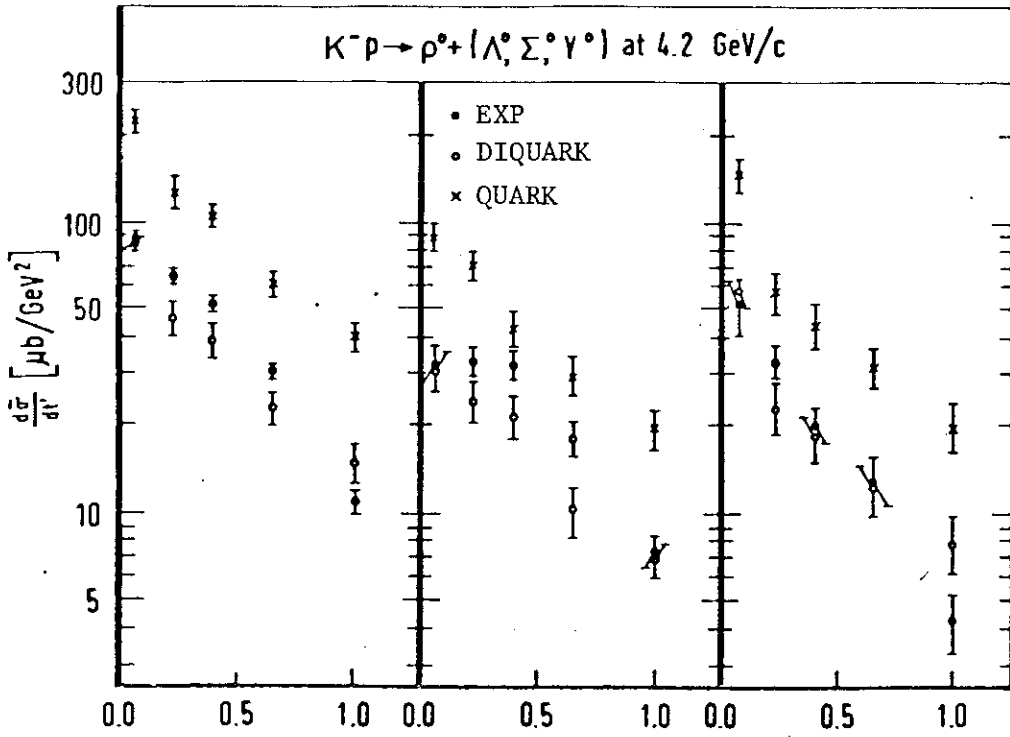


Fig. 5A

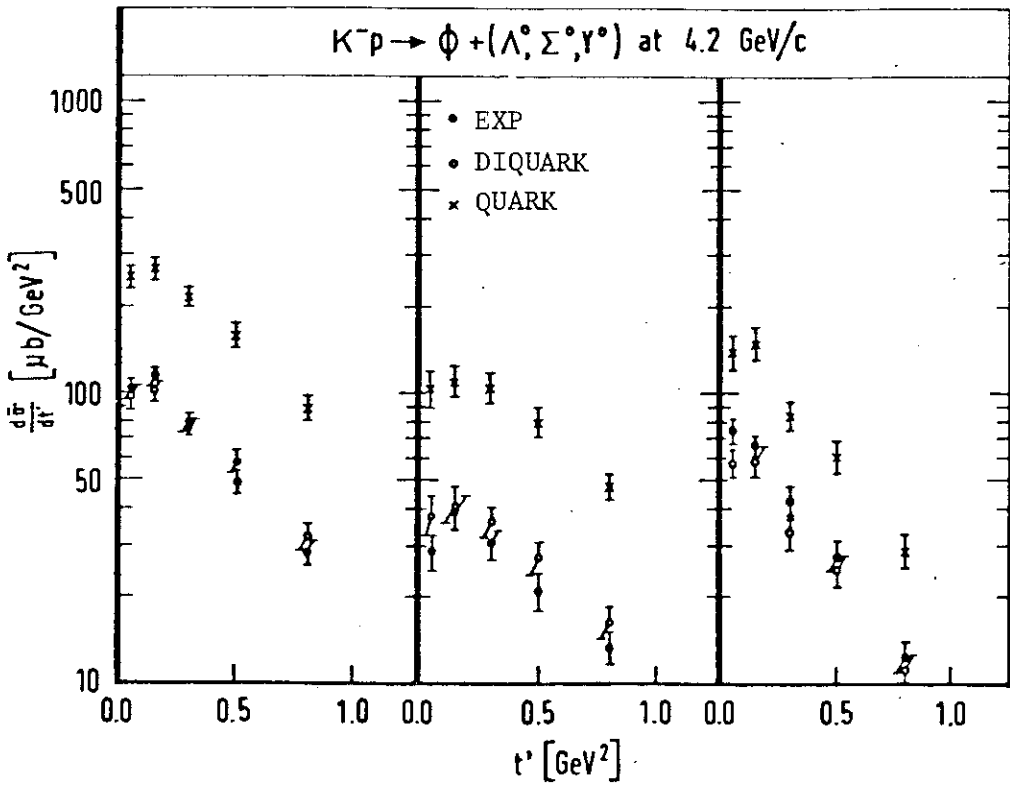


Fig. 5B

Figuras 4, 5a e 5b - Seções de choque diferenciais para algumas reações com troca de estranheza; resultados comparativos com o modelo de quark. A seção de choque  $\bar{\sigma}$  é dada por  $\bar{\sigma} = s(p_i^*/p_j^*)\sigma$ , onde  $\sqrt{s}$  é a energia total do centro de massa e  $p_i^*$ ,  $p_j^*$  são os momentos no centro de massa dos estados iniciais e finais respectivamente;  $t'$  é definido por:  $t' = |t - t_{min}|$  [II-16].

É interessante ressaltar a conclusão a que chegaram os autores, após a análise de uma série de reações, sobre a configuração dos bárions. Para estes o bárion gasta uma fração do seu tempo na configuração de três quarks e o restante numa configuração quark-diquark, sendo que nas reações periféricas a quase dois corpos, são iniciados preferencialmente com um bárion na configuração quark-diquark.

#### iv - Fragmentação do diquark

O Estudo da fragmentação do quark tem sido extensivamente analisadas em processos de aniquilação  $e^+e^-$ , bem como em colisões hadrônicas ou em experiências com espalhamento profundamente inelásticos com produções de léptons. Entretanto, os processos de hadronização do diquark, ou ainda, dos quarks de valência restantes, começaram a ser estudados recentemente (considerando que a interação se passa entre um lépton e um quark do bárion, o diquark é, neste caso, o conjunto dos quarks restantes). Estes estudos foram iniciados por M. Fontannaz et al [II-17]

ao analisarem a região de fragmentação do alvo nos espalhamentos profundamente inelásticos. Se o  $x$  de Bjorken, definido por  $x = Q^2 / (2Mv) (Q^2$  e  $v$  são respectivamente, o momento transferido ao quadrado, e a energia transferida no sistema do laboratório entre os léptons inicial e final, e  $M$  é a massa do nêucleon), é suficientemente grande, espera-se "ver" um jato de diquarks. Dado os experimentais para  $\bar{\nu}p \rightarrow \nu\pi^+ \chi$  e  $\nu p \rightarrow \nu\pi^- \chi$ , na região de fragmentação do alvo, fornecem os primeiros resultados experimentais que propiciam o estudo da fragmentação do diquark [II-17]. A partir disto, diversos outros resultados experimentais fornecerão elementos deste tipo de fragmentação [II-18, II-19, II-20, II-21].

A fragmentação do diquark pode ser descrita por dois tipos de processos: Partindo da hipótese de que no estado final sejam produzidos mēsons e bārions, um destes processos ocorre quando nenhum dos mēsons no estado final contém um dos quarks do diquark, isto é, os quarks do diquark participam na formação de um bārion, é este processo que mostramos na fig. 6, e que chamaremos de processo A.

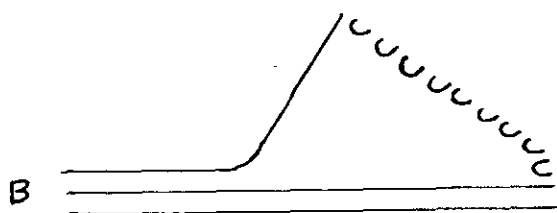


Figura 6 - Processo A: um dos quarks do bārion B (inicial) se combina com pares de quarks, formando hadrons, enquanto o diquark restante vai se combinar com um quark

formando um bárion.

O outro processo, que chamaremos de B, é aquele no qual um dos mésons do estado final contém um dos quarks do diquark, como mostra a figura 7.

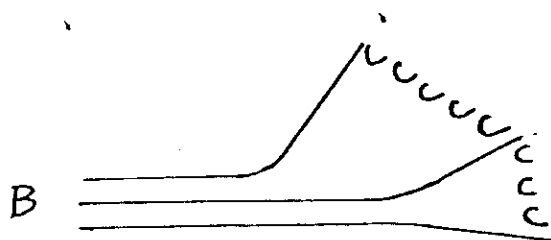
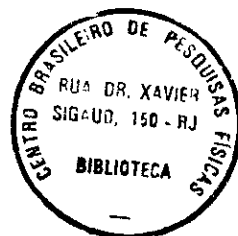


Figura 7 - Processo B: os quarks constituintes do diquark vão se combinar, simultaneamente, formando mésons e bárions.

Uma explicação plausível para o processo A, pode ser dada, supondo o diquark como um estado ligado de dois quarks com carga de cor pertencendo à representação  $\bar{3}$  do  $SU(3)_c$ . Este diquark cria um campo com o quark "emergente", induzindo a criação de pares de quarks. No processo B, a existência de diquarks, como estado ligado de dois quarks, não é tão direta quanto a do processo anterior.

A conclusão sobre a contribuição de cada gráfico é objeto de polêmica que segue até os dias de hoje. Análises de resultados experimentais [11-18, 11-19] concluem que quando os dois quarks restantes tem boa parte do momento dos bárions o



processo A domina no processo de fragmentação do diquark.

Esta conclusão é rebatida por U.P.Sukhatme et al [11-21], com dois exemplos, que citaremos a seguir. 1) Se, ao considerar a fragmentação do diquark ( $uu$ ), somente levarmos em conta o processo A, teremos que a razão de produção  $\Pi^+/\Pi^-$  deve ser igual a 1. Mas os resultados experimentais fornecem uma maior abundância na produção de  $\Pi^+$ . 2) Foram realizadas medidas para a produção de  $\Lambda(uds)$  na região de fragmentação do diquark em interações de correntes carregadas de  $\nu p$  e  $\nu n$ , onde os diquarks fragmentados são ( $ud$ ) e ( $dd$ ) respectivamente. Se o diquark vai diretamente em um bárion como propõe o processo A, espera-se a produção de  $\Lambda$  em interações  $\bar{\nu} p$ , mas não em interações  $\bar{\nu} n$ . Experimentalmente a razão de produção de  $\Lambda$  é comparável nos dois processos. Na Tabela 5, apresentamos os diversos sistemas de diquarks para diferentes tipos de reações, a fim de ilustrar a discussão acima.

<i>Tipo de reação</i>	<i>Exemplos</i>	<i>Sistema de diquark</i>
<i>reações com <math>\nu</math></i>	$\nu p \rightarrow \mu^- x$	$uu$
	$\nu n \rightarrow \mu^- x$	$ud$
<i>reações com <math>\bar{\nu}</math></i>	$\bar{\nu} p \rightarrow \mu^+ x$	$ud$
	$\bar{\nu} n \rightarrow \mu^+ x$	$dd$

	$ep \rightarrow ex$	$\frac{8}{9} ud + \frac{1}{9} uu$
	$\mu p \rightarrow \mu x$	
<i>eletrôn e muon produção</i>		
	$en \rightarrow ex$	$\frac{2}{3} dd + \frac{1}{3} ud$
	$\mu n \rightarrow \mu x$	
<hr/>		
	$\Pi^+ p \rightarrow (\mu^+ \mu^-) x$	$uu$
<i>colisões hadrônicas com</i>		
<i>contagem de <math>\mu^+ \mu^-</math></i>	$\Pi^- p \rightarrow (\mu^+ \mu^-) x$	$ud$
	$p\bar{p} \rightarrow (\mu^+ \mu^-) x$	$\frac{2}{3} ud + \frac{1}{3} uu$
<hr/>		

TABELA 5 - Sistemas de diquarks que ocorrem para diversas reações [II-21]

A conclusão que os autores chegaram sobre a discussão acima, é de que o diquark atua como dois quarks separados e portanto, a contribuição do processo B deve ser dominante, sendo que o processo A contribui somente quando os dois quarks que formam o diquark tiveram o mesmo momento.

D. Beavis e B.R. Desai criticam estas conclusões na ref. [II-22]. O ponto básico deste artigo, é que a razão entre partículas positivas e negativas na experiência utilizada, envolve hadrons, isto é, mésons e bárions; e os autores da ref. [II-21], somente consideram os mésons. Ao serem incluídos os bárions, a situação fica drasticamente alterada, visto que os

bárions devem dominar para  $x \rightarrow 1$ , que é o caso da experiência utilizada na discussão. Os autores concluem, após uma análise dos resultados, que a hipótese segundo a qual, o diquark atua como uma entidade única, permanece consistente com os resultados experimentais.

#### *v - Conclusão*

Tanto os modelos de diquark como as aplicações deste apresentados neste Capítulo, representam parte do que já foi feito sobre os modelos de diquarks. Na parte referente a aplicações deste modelo, deixamos de apresentar alguns resultados importantes obtidos por este modelo, como: o cálculo da seção de choque das reações com excitação difrativa de nucleons [II-23], contribuição à quebra de "escala" em reações profundamente inelásticas [II-24], ou a contribuição do diquark no modelo de fusão de quarks [II-25], que não foram descritas aqui para não estender em demasia este Capítulo.





treito do que qualquer ressonância observada nas proximidade desta região de massa. ( $\lambda\lambda$ ) - Nada de significativo foi encontrado na massa invariante de  $\bar{\Lambda}^0 \pi^+ \pi^+ \pi^-$ . Na fig. 1, mostramos a distribuição de massa obtida para os canais  $\bar{\Lambda}^0 \pi^+ \pi^- \pi^-$  e  $\bar{\Lambda}^0 \pi^+ \pi^+ \pi^-$

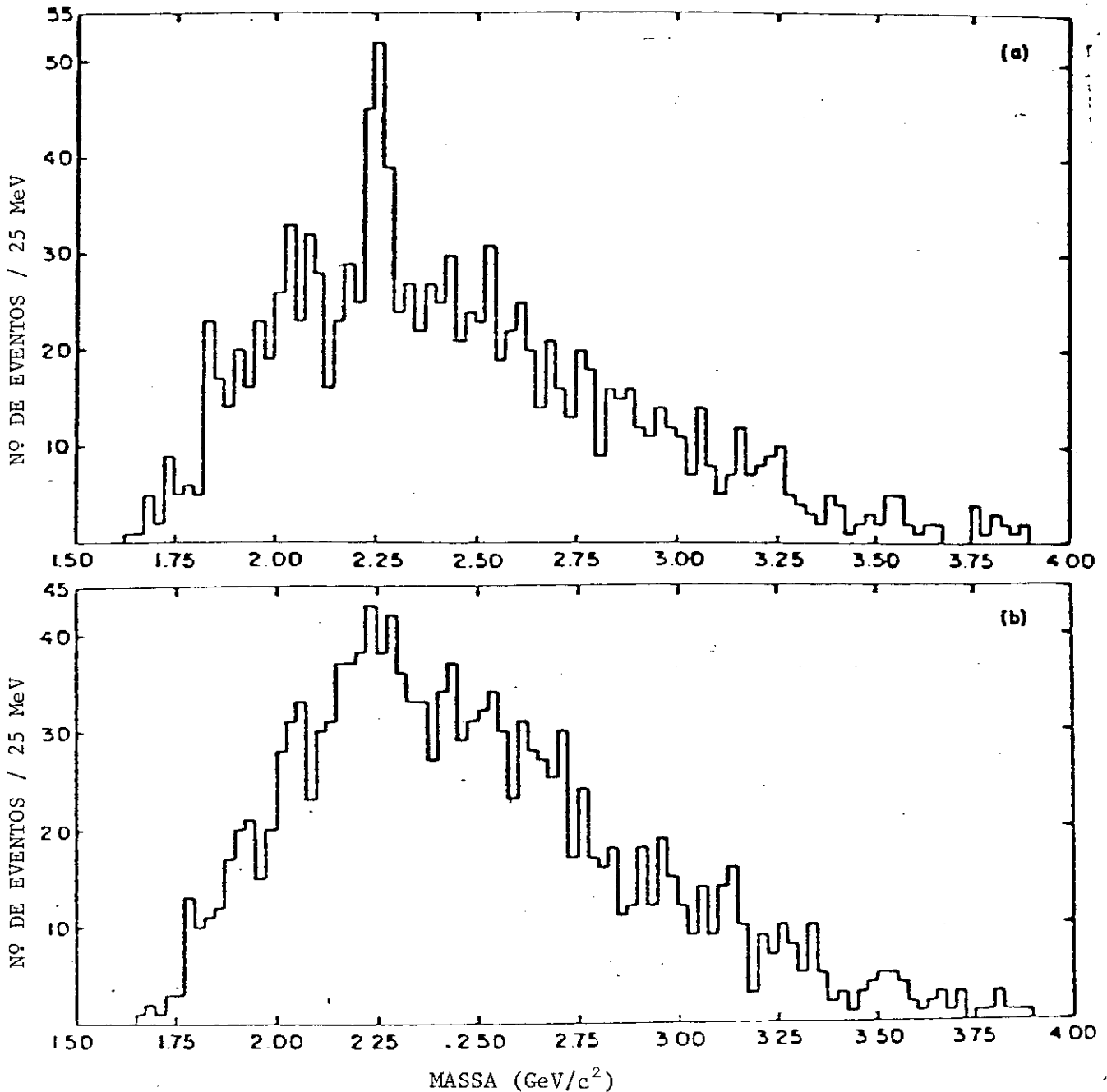


Figura 1 - Distribuição de massa invariante para (a)  $\bar{\Lambda}^0 \pi^+ \pi^- \pi^-$  e (b)  $\bar{\Lambda}^0 \pi^+ \pi^+ \pi^-$

Estas duas características evitam, a interpretação de que o pico encontrado seja devido à ressonância  $\Sigma(2, 255 \text{ GeV}/c^2)$ , que tem uma largura de aproximadamente  $150 \text{ MeV}/c^2$  e isospin igual a um. Esta análise, torna consistente a idéia de associar a este pico, o bárion charmoso  $\Lambda_c^+$ .

Em 1979, inicia-se uma série de experiências, com diferentes tipos de reações, como mostra a Tabela 1 e 2. Os resultados obtidos tornam o  $\Lambda_c^+$  uma partícula bem estabelecida.

Massa (GeV)	Reação	Modos de Decaimentos	Ref.
2,26	$\nu p \rightarrow \mu^- \Lambda \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^-$	$\Sigma_c^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+$ $\hookrightarrow \Lambda \pi^+ \pi^+ \pi^-$	[ III-2 ]
$2,260 \pm 0,010$	$\gamma$ induzido	$\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda \pi^+ \pi^- \pi^+$	[ III-3 ]
$2,254 \pm 0,012$	$\nu n \rightarrow \mu^- \Lambda_c^+$	$\Lambda_c^+ \rightarrow K^{*-} p \pi^+$	[ III-4 ]
2,26	$PP \rightarrow PK^- \pi^+ X$	$\Lambda_c^+ \rightarrow PK^- \pi^+$	[ III-5 ]
$2,255 \pm 0,002$	$PP \rightarrow PX$	$X \rightarrow \Lambda_c^+ + D + n \pi$ $\hookrightarrow K^- p \pi^+$ $\Lambda \pi^+ \pi^+ \pi^-$	[ III-6 ]
$2,257 \pm 0,010$	$\nu p \rightarrow \mu^- \Lambda_c^+$	$\Lambda_c^+ \rightarrow Y^{*+} \pi^+ \pi^-$ $\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda \pi^+$ $\Lambda_c^+ \rightarrow K^0 p$	[ III-7 ]
$2,262 \pm 0,010$	$PP \rightarrow X + \bar{C}_1 + C_2$	$C_2 \rightarrow \Lambda_c^+$ $\hookrightarrow K^- p \pi^+$	[ III-8 ]
$2,245 \pm 0,010$	$PP \rightarrow X + C_1 \bar{C}_2$	$\bar{C}_2 \rightarrow \Lambda_c^+$ $\hookrightarrow K^+ p \pi^-$	III-8

TABELA 1 - Resultados de diversas experiências com produção de  $\Lambda_c^+$ , com valores de massa próximas de 2,260 GeV.

Massa (GeV)	Reação	Modos de Decaimentos	Ref.
2,280	$PP \rightarrow \Lambda \Pi^+ \Pi^+ \Pi^- + X$	$\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda \Pi^+ \Pi^+ \Pi^-$	[ 111- 9 ]
2,290	$PP \rightarrow \Lambda \Pi^+ \Pi^+ \Pi^- + X$	$\Lambda_c^+ \rightarrow P \Pi^+ K^-$	[ 111- 9 ]
2,295 ± 0,015	$\nu$ induzido	$\Lambda_c^+ \rightarrow P \Pi^+ K^-$	[ 111-10 ]
2,285 ± 0,006	$e^+ e^- \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{\Lambda}$	$\Lambda_c^+ \rightarrow P K^- \Pi^+$ $\Lambda_c^+ \rightarrow P K^+ \Pi^-$	[ 111-11 ]
2,290 ± 0,003	$\nu$ induzido	$\Sigma_c^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \Pi^0$ $\Lambda_c^+ \rightarrow K^- P \Pi^+$	[ 111-12 ]
2,285 ± 0,005	$\nu P \rightarrow \mu^- P K^- \Pi^+ \Pi^+$	$\Lambda_c^+ \rightarrow P K^- \Pi^+$	[ 111-13 ]
2,280 ± 0,003	$\nu P \rightarrow \mu^- P K^- \Pi^+ \Pi^+$	$\Lambda_c^+ \rightarrow P K^- \Pi^+$	[ 111-13 ]
2,284 ± 0,005	$\gamma$ induzido	$\Lambda_c^+ \rightarrow P K_S^0$ $\bar{\Lambda}_c^+ \rightarrow P \bar{K}_S^0$	[ 111-14 ]
2,283 ± 0,003	$\nu P \rightarrow \mu^- P K^- \Pi^+ \Pi^+$	$\Lambda_c^+ \rightarrow P K^- \Pi^+$	[ 111-15 ]

TABELA 2 - Resultados de diversas experiências com produção de  $\Lambda_c^+$ , com valores de massa próximos de 2,285 GeV.

Neste conjunto de experiências, cabe destacar dois aspectos interessantes. O primeiro, diz respeito a reações do tipo

$$PP \rightarrow X + P$$

Onde a observação do  $\Lambda_c^+$ , é feita no decaimento do bárion excitado X. Ou seja, observa-se o decaimento do tipo  $X \rightarrow \Lambda_c^+ + D + n\pi$ , onde n é o número de pions. Sendo que X é produzido difrativamente a altas energias [ III-6 ]. A seção de choque obtida neste processo, apresentou resultados da ordem de dez vezes maiores que os previstos teoricamente, os valores experimentais encontrados foram entre 100 e 500 $\mu$ b [ III-16 ]. Esta dicotomia entre os resultados experimentais e os teóricos, permanece um tema aberto até os dias de hoje.

O segundo aspecto interessante obtido nos resultados experimentais, diz respeito à determinação da massa deste bárion. Ao tomarmos os resultados encontrados, observamos a existência de dois agrupamentos bem definidos para o valor da massa do  $\Lambda_c^+$ , como pode ser observado nas Tabelas 1 e 2. Em um destes agrupamentos observa-se resultados em torno de 2260MeV/c<sup>2</sup> e no outro, os resultados ficam em torno de 2285MeV/c<sup>2</sup>. Um fato interessante, que se pode observar nas Tabelas 1 e 2, é que o tipo de reação não influe em qual agrupamento a partícula pode ser encontrada.

G.H. Trilling et al [ III-17 ] atribuem esta diferença obtida na determinação da massa a problemas experimentais, e atribuem ao valor encontrado pelo seu grupo de 2285 $\pm$ 5MeV/c<sup>2</sup> o resultado mais correto. Nós em contrapartida, achamos que a diferença é bastante grande e bem definida, para partículas estáveis do ponto de vista das interações fortes, para que possa ser explicado como um problema experimental. A título de ilustração do que estamos afirmando, mostramos na fig. 2, a de-

terminação do espectro de massa dado pelo "Particle Data Group" [III-18]. Nela podemos observar os dois agrupamentos de massa, com seus respectivos erros. Os resultados mostrados na fig. 2, são alguns dos obtidos até a publicação da ref. [III-18].

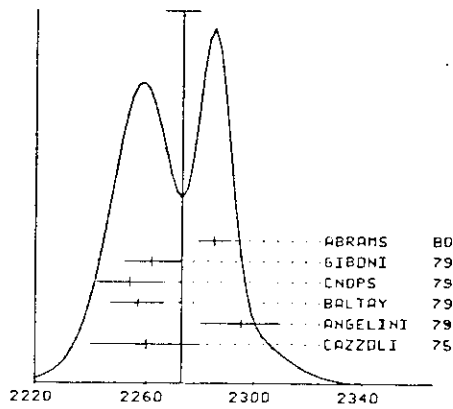


Figura 2 - Espectro de massa para o  $\Lambda_c^+$ , com alguns resultados experimentais [III-18].

O modelo desenvolvido por nós [III-19], que vamos expor a seguir, tem por objetivo mostrar que esta diferença de massa, é resultante do equilíbrio dinâmico das subestruturas possíveis de diquark que compõem o bárion charmoso  $\Lambda_c^+$ .

III.2 - Nosso modelo

A composição de quarks do  $\Lambda_c^+$ , dada pelo  $SU(4)$  e mostrada no diagrama de peso da fig. 3, é de um quark  $u$ , um quark  $d$  e um quark  $c$ . Sendo que a massa do quark charmoso ( $\approx 1,5 GeV$ ) é cerca de cinco vezes maior, que a massa dos quarks  $u$  e  $d$  que por sua vez, vamos considerar como tendo o mesmo valor ( $\approx 350 MeV$ ). Com esta composição de quarks, temos que este bárion pode, em princípio, ter três estados de diquarks: um diquark ( $ud$ ), um diquark ( $uc$ ) e um diquark ( $dc$ ).

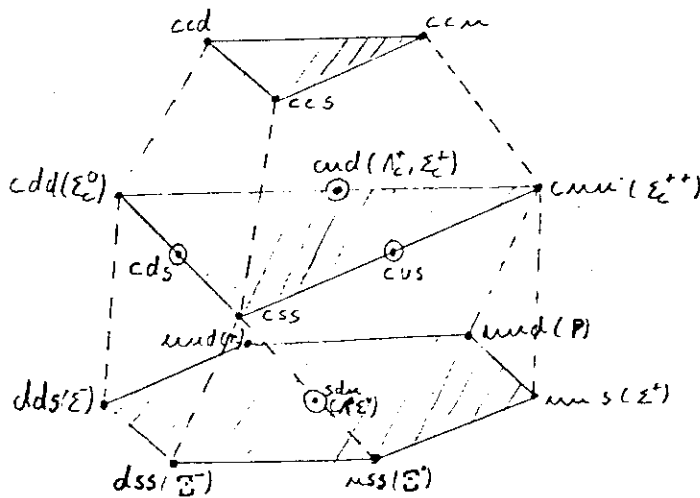


Figura 3 - Diagrama de peso da representação 20 do  $SU(4)$ .

Vimos na introdução que a dinâmica dos quarks era dada por interações que independem do sabor. Com isto duas das configurações possíveis do  $\Lambda_c^+$ , diquark ( $uc$ ) quark ( $d$ ) e diquark ( $dc$ ) quark ( $u$ ), são semelhantes do ponto de vista da dinâmica

do sistema bárion.

O diquark ( $ud$ ) que compõe a outra configuração possível, pode ter em princípio quatro estados:  $(\lambda)$   $I=0$  e  $J=0$ ;  $(\lambda\lambda)$   $I=0$  e  $J=1$ ;  $(\lambda\lambda\lambda)$   $I=1$  e  $J=0$ ;  $(\lambda\nu)$   $I=1$  e  $J=1$ . O modelo de diquark que considera somente os estados pertencentes a representação 21 do  $SU(6)$ , reduz estes quatro estados possíveis para os estados  $(\lambda)$  e  $(\lambda\nu)$ . E o modelo de diquark que considera somente a representação 6 do  $SU(3)$  como a única representação dos diquarks, reduz ao estado correspondente  $\bar{a}$  ( $\lambda\nu$ ) os possíveis estados do diquark ( $ud$ ).

Neste último modelo o diquark ( $ud$ ) não contribui para a formação do  $\Lambda_c^+$ , pois este bárion tem isospin igual a zero e sendo o isospin do quark charmoso ( $C$ ) também igual a zero, não poderemos compor um diquark com isospin igual a um e o quark ( $C$ ) para formar um bárion com isospin igual a zero.

Entretanto, a nossa motivação principal para não incluirmos a subestrutura composta pelo diquark ( $ud$ ) no nosso modelo, foi a de supor bem mais prováveis estados de diquark composto por um quark leve e um pesado, do que estados de diquark formados por dois quarks leves.

Ao considerar somente subestruturas com diquarks charmosos para o bárion  $\Lambda_c^+$ , poderemos fazer uma analogia com a molécula de amônia ( $NH_3$ ), onde temos os três hidrogêneos em um plano e o nitrogênio em um eixo perpendicular a este plano. Existem duas configurações para esta molécula, que são energeticamente idênticas, uma o nitrogênio a direita do plano formado pelos átomos de hidrogênio, e a outra, a esquerda deste mesmo

plano, como mostramos na fig. 4.



Figura 4 - Dois estados possíveis para a molécula de amônia com a mesma energia.

Duas autofunções são obtidas do hamiltoniano que descreve estas duas configurações em equilíbrio dinâmico; uma simétrica e a outra antissimétrica, cuja diferença de energia é responsável pelo efeito conhecido como MASER [III-20].

O nosso modelo consiste basicamente em mostrar, de uma forma quantitativa, que um efeito semelhante ao que ocorre na molécula de amônia pode ser o responsável pelo surgimento de dois estados para o  $\Lambda_c^+$ .

Para isto, na resolução do problema usaremos algumas considerações que nos parecem razoáveis: *i)* Faremos um tratamento não relativista, isto porque utilizaremos diquarks pesados. *ii)* Trataremos o problema a uma dimensão, pois além do  $\Lambda_c^+$  ter momento angular igual a zero, trata-se de um problema a dois corpos. *iii)* Consideraremos que a energia de ligação entre os dois quarks que formam o diquark é próxima de zero. Isto é su



posto pela maioria dos modelos de diquark. iv) Não utilizamos forças de spin.

### III.3 - Aplicação do modelo

Vamos considerar, que as forças que ligam o quark ao diquark, podem ser representadas por um oscilador harmônico simples. Esta hipótese é baseada em alguns modelos potenciais para os quarks nos bárions como nos referimos no Capítulo I. Para representar as duas configurações possíveis, em equilíbrio dinâmico, levando em conta as considerações acima, usaremos o potencial de dois osciladores harmônicos acoplados [III-21]. Podemos escreve-lo como:

$$V(x) = \frac{1}{2} K(|x| - a)^2 \quad (1)$$

A sua forma é mostrada na fig. 5.

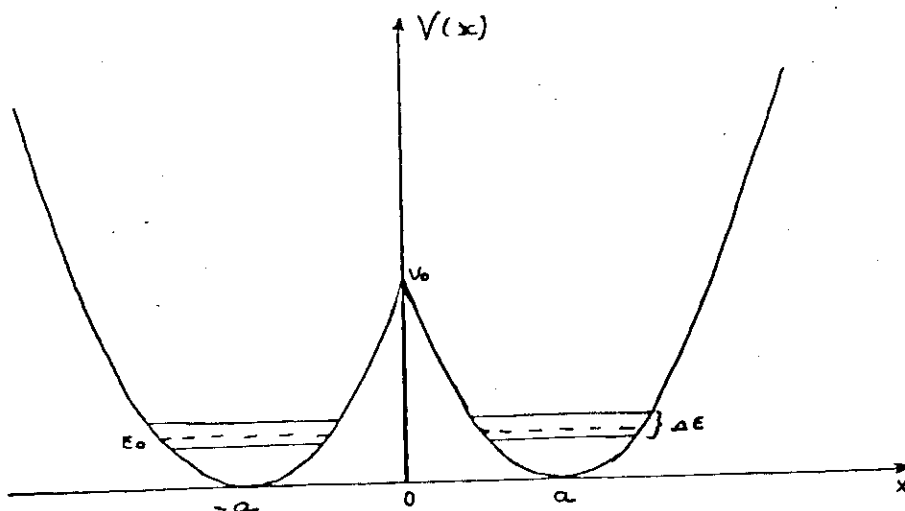


Figura 5 - Potencial de dois osciladores harmônicos acoplados, onde  $2a$  é o tamanho do bárion.

Assim podemos escrever a equação de Schrödinger do sistema, da seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} (x) + \frac{1}{2} K(|x| - a)^2 \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (2)$$

Onde a massa reduzida  $\mu$  é dada por  $\mu = M_d \cdot m_q / M_d + m_q$  ( $M_d$  = massa do diquark e  $m_q$  = massa do quark). A solução desta equação diferencial pode ser obtida dividindo-a em duas regiões distintas, uma para  $x > 0$  e outra para  $x < 0$ , e fazendo uma mudança de variável.

$$z = \left[ \frac{2\mu\omega}{\hbar} \right]^{1/2} (x - a) \quad (x > 0) \quad (3)$$

Sendo  $E = \hbar\omega (v + 1/2)$ , onde  $v$  neste caso não é necessariamente um inteiro, e  $K = \mu\omega^2$  obtemos:

$$\frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} + \left[ v + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] \Psi = 0 \quad (x > 0) \quad (4)$$

que é conhecida como a equação diferencial de Weber. Para  $x < 0$  fazemos:

$$z' = \left[ \frac{2\mu\omega}{\hbar} \right]^{1/2} (x + a) \quad (5)$$

e encontramos a equação,

$$\frac{d^2 \Psi}{dz'^2} + \left[ \nu + \frac{1}{2} - \frac{z'^2}{4} \right] \Psi = 0 \quad (6)$$

que tem a forma da equação (4). Para  $\alpha$  igual a zero, temos o os cilador harmônico simples ( $z = z'$ ), e as duas equações tornam-se idênticas. A condição de que para  $x \rightarrow \pm \infty$  tenhamos  $\Psi \rightarrow 0$ , implica que devemos buscar soluções para estas equações que tendem a zero quando  $z \rightarrow \infty$  e  $z' \rightarrow -\infty$ . A solução particular de (4), que tende a zero para valores grandes e positivos de  $z$ , é chamada função cilíndrica parabólica, que é denotada por  $D_\nu(z)$ , definidas por: (Esta solução se encontra no Apêndice B).

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{(-z^2/4)} \left[ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} \phi\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right] \quad (7)$$

Onde as funções hipergeométricas confluentes ou funções de Kummer  $\phi(a, c; y)$  são dadas por:

$$\phi(a, c; y) = 1 + \frac{a}{c} \frac{y}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{y^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{y^3}{3!} + \dots \quad (8)$$

Colocando (8) em (7) com  $a = -\nu/2$ ,  $c = 1/2$  e  $y = z^2/2$  no primeiro termo da equação (7), e  $a = (1 - \nu)/2$ ,  $c = 3/2$  e  $y = z^2/2$ , para o segundo termo, teremos

$$\begin{aligned}
 D_\nu(z) = & 2^{\nu/2} e^{-(z^2/4)} \left[ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} \left\{ 1 - \frac{\nu z^2}{2} - \right. \right. \\
 & - \frac{\nu(-\nu+2)z^4}{24} - \frac{\nu(-\nu+2)(-\nu+4)z^6}{720} + \dots \left. \right] + \\
 & + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} \left\{ 1 + \frac{(1-\nu)z^2}{6} + \frac{(1-\nu)(3-\nu)z^4}{120} + \right. \\
 & \left. + \frac{(1-\nu)(3-\nu)(5-\nu)z^6}{5040} + \dots \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Para  $z \gg 1$  e  $z \gg |\nu|$ , temos pela aproximação feita no Apêndice B.

$$D_\nu(z) \sim e^{-z^2/4} z^\nu \left[ 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2z^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2 \cdot 4 \cdot z^4} \pm \dots \right] \quad (10)$$

Para  $z$  grande e negativo, isto é,  $z \ll -1$  e  $z \ll -|\nu|$

$$D_\nu(z) \sim e^{(z^2/4)} z^\nu \left[ 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2z^2} \pm \dots \right] -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{i\nu\pi} e^{z^2/4} z^{-\nu-1} \left[ 1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2z^2} + \dots \right] \quad (11)$$

Se  $\mathcal{D}_\nu(z)$  é uma solução da equação diferencial de Weber  $\mathcal{D}_\nu(-z)$  é também solução desta equação. Analizando o comportamento assintótico de (4), temos que a solução que tende a zero para valores grandes e positivos de  $z$  deve ser  $\mathcal{D}_\nu(z)$ . Por outro lado, a solução que tende a zero para valores grandes e negativos de  $z'$  deve ser  $\mathcal{D}_\nu(-z')$ . Com isto temos que as autofunções do duplo oscilador devem ser proporcionais a  $\mathcal{D}_\nu(z)$  para valores positivos de  $x$ , e proporcionais a  $\mathcal{D}_\nu(-z')$  para valores negativos de  $x$ . Portanto, a função de onda, não normalizada terá a forma:

$$\Psi(x) \propto \begin{cases} \mathcal{D}_\nu \left[ \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x-a) \right] & x > 0 \\ \mathcal{D}_\nu \left[ -\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x+a) \right] & x < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Para cada  $\nu$  teremos duas funções de onda como solução da equação de Schrödinger (2), uma simétrica e outra antissimétrica

$$\Psi_S(x) \propto \begin{cases} \mathcal{D}_\nu \left[ \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x-a) \right] & x > 0 \\ +\mathcal{D}_\nu \left[ \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x-a) \right] & x < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\Psi_A(x) \propto \begin{cases} \mathcal{D}_\nu \left[ \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x-a) \right] & x > 0 \\ -\mathcal{D}_\nu \left[ -\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} (x+a) \right] & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Na fig. 6 representamos a função de onda antissimétrica correspondente ao termo superior da energia, e a função de onda simétrica correspondente ao valor mais baixo de energia.

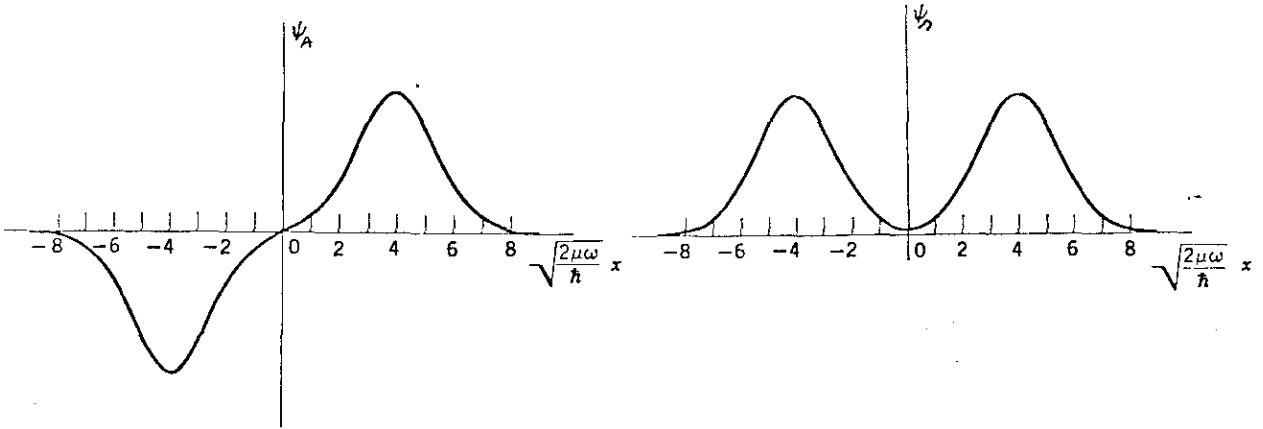


Figura 6 (a) - Função de onda antissimétrica. (b) - simétrica .

Além das condições de que as funções de onda se anularem assintoticamente ( $x \rightarrow \infty$ ), temos ainda duas outras condições, a de continuidade destas e a das suas derivadas em  $x = 0$ . Podemos com isto escrever:

$$\Psi_A(x=0) = 0 \Rightarrow D_V \left[ - \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a \right] = 0 \quad (15)$$

$$\Psi'_\Delta(x=0) = 0 \Rightarrow D'_V \left[ - \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a \right] = 0 \quad (16)$$

Com estas duas equações obtemos a equação transcendental para

$\nu$ . A fig. 7 mostra como os valores mais baixos de  $\nu$  dependem do parâmetro  $\sqrt{2\mu\omega/\hbar} a$ .

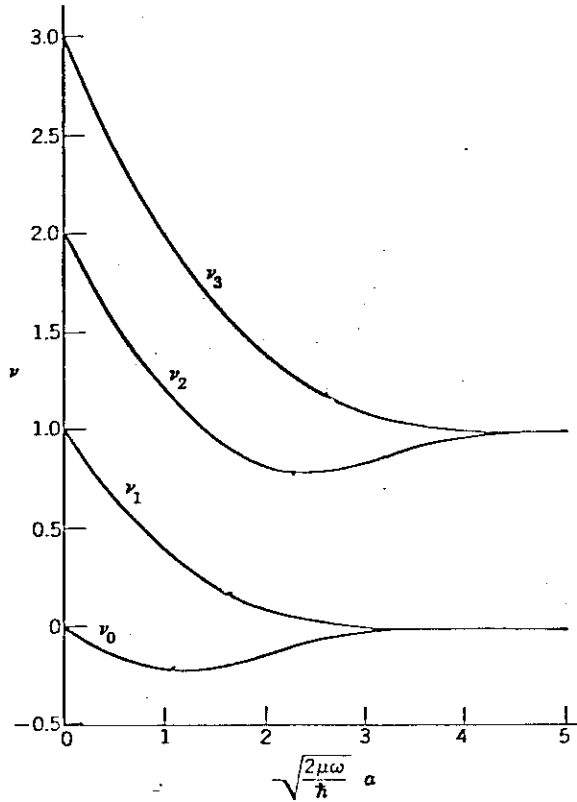


Figura 7 - Gráfico de  $\nu = (E/\hbar\omega) - \frac{1}{2}$  versus  $\sqrt{2\mu\omega/\hbar} a$  para os quatro autoestados mais baixos do duplo oscilador.

Derivando (11) obtemos:

$$D'(z) = -e^{(z^2/4)} z^\nu \left[ \frac{z}{2} - \frac{\nu}{z} \right] - \frac{\sqrt{2\pi} e^{v\pi i} e^{z^2/4} z^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} (\nu+1) \frac{z^{-\nu}}{z^2} e^{z^2/4}$$

Tomando valores de  $\nu \approx 0$ , o que implica que podemos fazer  $z^\nu$  e  $e^{\nu\pi i}$  igual a 1 e  $\Gamma(-\nu) \approx -1/\nu$ , encontramos a expressão para  $\nu$  da equação (16) que chamaremos de  $\nu_\delta$ .

$$\nu_\delta = \frac{z_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_0^2/2}$$

$z_0 = -\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a$  portanto  $\nu_\delta$  poderá ser escrito por:

$$\nu_\delta = -\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}} a \exp\left[-\frac{\mu\omega a^2}{\hbar}\right] \quad (17)$$

Para a função de onda antissimétrica, usamos a condição (15) e com as mesmas aproximações utilizadas na função de onda simétrica, obtivemos

$$\nu_A = -\frac{z_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_0^2/2} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}} a \exp\left[-\frac{\mu\omega a^2}{\hbar}\right] \quad (18)$$

Comparando (17) e (18), concluímos que  $\nu_A = -\nu_\delta$  que é compatível com a fig.(6) na região de  $\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a$  próximo de três. Portanto a diferença entre os autovalores do hamiltoniano correspondente à função de onda antissimétrica e a função de onda simétrica



para valores de  $v \approx 0$  é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \hbar\omega (v_A - v_\Delta) = \\ &= 2 \hbar\omega \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar\Pi}} a \exp\left(-\frac{\mu\omega a^2}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

como  $V(0) \equiv V_0 = \frac{1}{2} \mu\omega^2 a^2$  (19)

obtemos para  $\Delta E$ :

$$\Delta E = 2\hbar\omega \sqrt{\frac{2 V_0}{\hbar\omega \Pi}} \exp\left(-\frac{2 V_0}{\hbar\omega}\right) \quad (20)$$

O cálculo da diferença de energia entre os dois primeiros estados do  $\Lambda_c^+$  segundo o resultado (20), exige a utilização de três parâmetros: a) Massa reduzida  $\mu$ . Considerando que as massas dos quarks tem valores da ordem de  $m_u \approx m_d \approx 350 \text{ MeV}/c^2$  e  $m_c = 1,550 \text{ GeV}/c^2$ , calculamos a massa do diquark, conforme já nos referimos anteriormente,  $M_d = m_{q_1} + m_{q_2} - \epsilon_{12}$ , onde a energia de ligação  $\epsilon_{12}$  é considerada pequena comparada as energias no problema. Assim, a massa reduzida do sistema quark-diquark, dada pela relação:

$$\mu = m_q M_D / (m_q + M_D)$$

é da ordem de  $295 \text{ MeV}/c^2$ . Na ref. [III-22], são encontrados valores para as massas dos quarks (u) e (d) variando de  $330 \text{ MeV}/c^2$  a  $390 \text{ MeV}/c^2$ . Para incluir esta incerteza no nosso modelo, fize

mos variar  $\mu$  de  $280\text{MeV}/c^2$  a  $320\text{MeV}/c^2$ . b) O tamanho do bárion. Considera-se que o tamanho dos bárions seja da ordem do alcance das interações fortes, isto é, em torno de um Fermi. No nosso modelo, este tamanho é dado por  $2a$ , para o qual, tomamos valores entre 0,8 e 0,9 que como vimos, são da mesma ordem de grandeza dos valores estimados para os bárions. c) A barreira de potencial  $V_0$ . Este é o único parâmetro de nosso modelo que não podemos, "a priori", fazer uma boa estimativa. Mas, usando o potencial do duplo oscilador harmônico, podemos utilizar uma condição adicional. Ao tomarmos a situação assintótica  $a \rightarrow \infty$ , onde teremos dois osciladores harmônicos simples desacoplados, a energia do estado fundamental de cada um dos osciladores é dada por  $E = \frac{1}{2} \hbar \omega$ , que deve ser o valor médio dos dois níveis de energia do duplo oscilador, pois  $\nu_A \approx -\nu_B$ . Então podemos escrever:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \approx 2260\text{MeV} + \Delta E/2 \quad (21)$$

Onde a energia de  $2260\text{MeV}$  representa o valor médio das massas do  $\Lambda_c^+$  no seu estado de mais baixa energia. Ao impormos esta condição limitamos os possíveis valores de  $V_0$  na eq. 20. No nosso caso variando os outros dois parâmetros, encontramos que  $V_0$  assume valores entre  $13.000$  e  $16.000\text{MeV}$ .

É importante observar que nenhum dos três parâmetros descritos acima podem ser considerados como verdadeiramente livres. Há evidências experimentais indiretas, que fornecem valores na mesma ordem de grandeza daquelas utilizadas por nós, tanto para a massa dos quarks como para o tamanho do bárion.

Para observar a dependência de nosso modelo com o potencial escolhido, apresentamos um outro potencial, o duplo poço quadrado, que tem as mesmas características necessárias ao nosso modelo e com uma solução bastante simples. A equação de Schrödinger correspondente pode ser escrita:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} (x) + V \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (22)$$

onde

$$V = \begin{cases} I - \infty & \text{para } 0 > x > 2a+b \\ II - 0 & \text{para } a > x > 0 \text{ e } 2a+b > x > a+b \\ III - V_0 & \text{para } a+b > x > a \end{cases}$$

como mostramos na fig. 8.

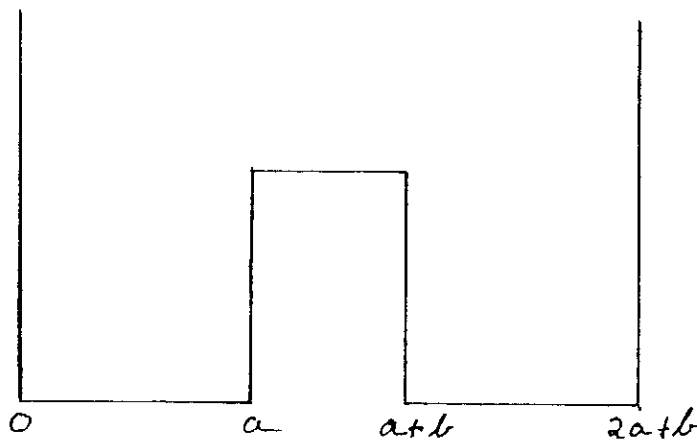


Figura 8 - Duplo poço quadrado.

A função de onda tem a seguinte forma:

$$\Psi_I = A \operatorname{sen} Kx \quad 0 < x < a$$

$$\Psi_{II} = B e^{qx} + (e^{-qx}) \quad a < x < a+b$$

$$\Psi_{III} = D \operatorname{sen} K(2a+b-x) \quad a+b < x < 2a+b$$

onde  $K = \sqrt{2\mu E}/\hbar$                        $q = \sqrt{2\mu(V_0 - E)}/\hbar$

A condição de continuidade das funções de onda e de suas derivadas nos leva à equação transcendental

$$\operatorname{Tan}(ka) = -\frac{K}{q} \pm \frac{2K}{q} e^{-qb}$$

Em primeira aproximação  $q \gg K$ , temos

$$\operatorname{Tan}(ka) = 0 \Rightarrow E_n^{(0)} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2}$$

que corresponde a  $V_0 \rightarrow \infty$ , ou seja, dois poços quadrados separados. Na aproximação de ordem um, fazemos  $Ka \ll 1 \Rightarrow \operatorname{tan}(ka) \approx Ka$  o que implica

$$K = \frac{n\pi}{a} - \frac{K_0}{aq} \pm \frac{2K_0}{aq} e^{-qb} \quad \text{onde} \quad K_0 = \frac{\pi}{a}$$

$$\therefore E_n = E_n^{(0)} - \frac{2 E_n^{(0)}}{aq_0} \pm \frac{4 E_n^{(0)}}{aq_0} e^{-q_0 b}$$

onde  $q_0 = \frac{(\sqrt{2\mu |V_0 - E_n^0|})}{\hbar}$

Portanto, as energias correspondentes a um dado  $n$  podem ser escritas por:

$$E_n^- = E_n^{(0)} - \frac{2 E_n^{(0)}}{aq_0} - \frac{4 E_n^{(0)}}{aq_0} e^{-q_0 b} \quad (23a)$$

$$E_n^+ = E_n^{(0)} - \frac{2 E_n^{(0)}}{aq_0} + \frac{4 E_n^{(0)}}{aq_0} e^{-q_0 b} \quad (23b)$$

e a diferença de energia entre (23b) e (23a) para  $n = 1$  é dada por:

$$\Delta E = \frac{8 E_1^{(0)}}{aq_0} e^{-q_0 b}$$

com a condição adicional que o termo  $E_1^{(0)} - 2 E_1^{(0)}/aq_0$  seja o valor médio dos dois primeiros estados obtidos pela equação (22).

Os parâmetros utilizados são basicamente os mesmos dos usados no outro potencial, com a diferença de que temos de variar  $a$  e  $b$ , de tal forma que  $0,8 < a + b < 0,9 F$ .

### III.4 - Resultados

Na Tabela 3 mostramos os resultados obtidos com o duplo oscilador e na Tabela 4 os resultados obtidos com o duplo poço quadrado. Os resultados obtidos são compatíveis com os resultados experimentais mostrados nas Tabelas 1 e 2. O duplo oscilador apresentou resultados um pouco melhores que o duplo

$2 a(\text{Fermi})$	$\mu(\text{MeV})$	$V_0(\text{MeV}) \times 10^3$	$\Delta E(\text{MeV})$	$E_2 = 2260 + \Delta E(\text{MeV})$
0,80	315	13,45	34	2294
0,80	320	13,60	32	2292
0,80	320	13,65	31	2291
0,82	300	13,45	34	2294
0,82	305	13,65	31	2291
0,82	310	13,87	29	2289
0,84	290	13,62	31	2291
0,84	300	14,07	26	2286
0,84	310	14,47	22	2282
0,86	280	13,77	29	2289
0,86	290	14,25	24	2284
0,86	300	14,67	22	2282
0,88	280	14,35	23	2283
0,88	290	14,85	18	2278
0,88	295	15,10	17	2277
0,90	280	14,97	18	2278
0,90	280	15,00	17	2277
0,90	285	15,25	16	2276

TABELA 3 - Valores do  $\Delta E$  de energia e do estado de mais alta massa do  $\Lambda_c^+$ , encontrado com o potencial do duplo oscilador, para diversos valores de  $2a$ ,  $\mu$  e  $V_0$ .

$a+b$ (Fermi)*	$\mu$ (MeV)	$V_0$ (MeV) $\times 10^3$	$\Delta E$ (MeV)	$E_2=2266+\Delta E$ (MeV)
0,80	315	13,42	41	2307
0,80	320	13,57	37	2297
0,80	320	13,62	36	2296
0,82	300	14,17	33	2293
0,82	305	14,50	27	2287
0,82	310	24,87	22	2282
0,84	290	15,62	20	2280
0,84	295	16,17	16	2276
0,84	300	16,18	13	2273
0,86	280	17,70	12	2272
0,86	285	18,60	9	2269
0,86	290	19,62	7	2267

\* Tomamos  $b$  fixo, igual a 0,4 Fermi, e variamos  $a$ .

TABELA 4 - Valores do  $\Delta E$  de energia e do estado de mais alta massa do  $\Lambda_c^+$ , encontrado com o potencial do duplo poço

quadrado, para diversos valores de  $a+b$ ,  $\mu$  e  $V_0$ .

poco quadrado, que embora não represente nenhuma situação física concreta, mas sim uma aproximação, fornece resultados positivos. Com isto, procuramos mostrar que a escolha do potencial, desde que seja de duplo poço, não modifica muito os resultados. Esta afirmação não é satisfatória quando procura-se obter os estados excitados desta partícula, onde teríamos que usar modelos mais sofisticados como mostrado na ref. [ III-23 ].

Fizemos aplicações para outras partículas como o  $\Sigma_c$ , onde encontramos que este efeito deve ser de ordem de 5MeV, o que dificilmente seria observado, devido a dificuldade existente de se encontrar tal partícula. Aplicamos também, este modelo em um possível bárion com um "bottom", e o resultado estimado foi insignificante, da ordem de  $10^{-4}$  MeV. Para os bárions com quarks estranhos estimamos este efeito entre 100 e 200MeV. Mas não achamos razoável aplicar este modelo para os bárions compostos por quarks leves, já que não levamos em conta os efeitos relativísticos nem as suas implicações na dinâmica quark-diquark.

Uma última questão refere-se à não observação em uma mesma experiência às massas dos dois estados. Acreditamos que isto ocorreu fundamentalmente pela baixa estatística que apresentaram as experiências até hoje, pois se as condições experimentais privilegiam um estado em relação a outro, como aparentam os resultados encontrados até agora, um maior número de eventos apresentaria pelo menos alguns eventos no "estado não privilegiado".



### III.5 - Função de onda do $\Lambda_c^+$

A função de onda total dos bárions são construídas a partir do produto das funções de onda de spin, sabor, espacial e de cor. Esta função de onda deve ser completamente antisimétrica na troca de quaisquer duas partículas consideradas idênticas.

A função de onda referente à cor, é totalmente antisimétrica, já que os bárions por serem singletos de cor, pertencem à representação 1 do  $SU(3)_c$  que é uma representação antisimétrica.

Para a função de onda espacial, os nossos resultados indicam que temos uma função de onda simétrica, referente ao estado  $\Lambda_c^+$  de mais baixa energia, e uma função de onda antissimétrica referente ao outro estado.

Portanto, para que a função de onda total, dos dois estados do  $\Lambda_c^+$ , seja antissimétrica, temos que associar ao estado de mais baixa energia a função de onda simétrica de spin e sabor, mostrada no Apêndice A, equação (5a). E Para o outro estado associamos a função de onda antissimétrica de spin e sabor, mostrada também, no Apêndice A, equação (5a).

## CAPÍTULO IV

### CONCLUSÕES

O modelo de diquark, embora, tenha tido como base o modelo de quarks, era apresentado, até recentemente, como se lhe fora antagônico. Procurava-se, de maneira geral, dar relevância às vantagens de um sobre o outro, colocando-os em oposição. A visão moderna dos bárions, supera este antagonismo, procurando mostrar os dois modelos de uma forma complementar. Os bárions, dependendo da situação física, teriam uma configuração quark-diquark ou uma configuração a três quarks, podendo também, ter uma configuração mista, isto é, em uma mesma situação física, termos alguns bárions com um tipo de configuração, enquanto os restantes se encontram na outra configuração.

O caso específico do bárion charmoso  $\Lambda_c^+$  com dois quarks leves e um quark pesado, parece favorecer a configuração quark-diquark. A concordância dos valores experimentais com os resultados obtidos pelo nosso modelo, fornecem uma forte evidência da existência de diquark no interior deste bárion. Resta entretanto, conforme afirmamos no Capítulo III, obter em uma experiência os dois estados do  $\Lambda_c^+$ . Sua obtenção nestas condições, forneceria uma evidência bastante forte de subestruturas com diquark no interior do  $\Lambda_c^+$ .

No Capítulo III, vimos que ao estado de maior energia do  $\Lambda_c^+$ , corresponde uma função de onda antissimétrica de spin e sabor. O que implica em dizer que o multiplete do  $SU(8)$ , que pode conter este estado é a representação 56. Esta representa-

ção tem como correspondente no  $SU(6)$  o multiplete 20. Este resultado tem duas consequências imediatas:

i) - Esta partícula no seu estado de maior energia, seria o primeiro bárion a ser observado em uma representação antissimétrica do  $SU(8)$ . Desde que foram estabelecidos os grupos de simetria, formados pelo produto do grupo de sabor pelo grupo de spin, vem se buscando sem sucesso, partículas que possam estar contidas nas suas representações antissimétricas. Esta busca já tem mais de quinze anos, e iniciou-se com a procura de partículas que pertencessem a representação 20 do  $SU(6)$  [IV-1].

ii) - Vimos no Capítulo II que os diquarks eram representados pelo multiplete 21 em todos os modelos que propuseram o  $SU(6)$  como o grupo de simetria interna dos bárions. Por outro lado supunha-se que a representação antissimétrica 15, que também pode conter os diquarks, correspondia a estados de energia elevada, e portanto, não contribuiria na formação dos bárions. Esta hipótese corresponde a considerar que os bárions não estão contidos em representações antissimétricas do  $SU(6)$  e do  $SU(8)$ . Esta hipótese fica refutada pela existência do estado de mais alta energia do  $\Lambda_c^+$ .

Desta forma, concluimos sobre o modelo de diquark os seguintes pontos:

1 - A configuração quark-diquark, não é a única configuração possível no bárion.

2 - Os diquarks pertencem a representação  $3^*$  do  $SU(3)_c$ .

3 - No grupo  $SU(8)$ , os diquarks podem estar representados tanto na representação simétrica 36, como na representação antissimé-

trica 28.

4 - O  $\Lambda_c^+$  tem dois estados com massas diferentes, uma com 2260 MeV/c<sup>2</sup> e o outro com 2285 MeV/c<sup>2</sup>, sendo que os dois com momento angular igual a zero, o primeiro deles pertence a representação simétrica 120 do  $SU(8)$  e o segundo a representação antissimétrica 56 também do  $SU(8)$ .

5 - Finalmente, o assunto diquarks, suas representações e suas aplicações dinâmicas, está longe de ser considerado como bem conhecido, pelo contrário, é necessário aprofundar e desenvolver suas aplicações, para que seu "status" passe de uma possibilidade de interpretação de certos estados para uma possível contribuição à teoria.

## APÊNDICE A

Complementos e aplicações de alguns grupos de simetria unitária.

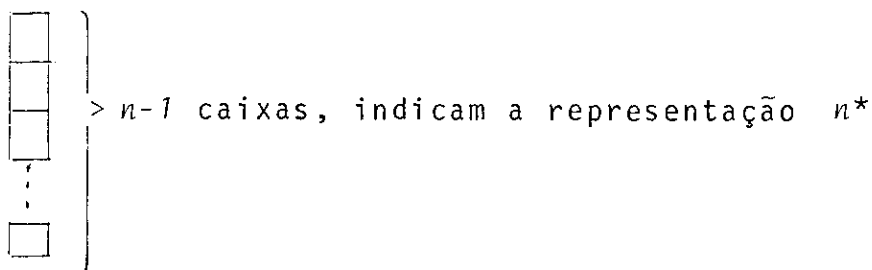
Este apêndice aborda três aspectos das simetrias especiais unitárias  $SU(n)$ , necessárias à compreensão da tese. Inicialmente, apresentaremos um método para calcular o produto de Kronecker entre as representações irredutíveis dos grupos  $SU(n)$ . Em seguida, construiremos a função de onda do  $\Lambda_c^+$ , referente ao  $SU(4)$  e ao  $SU(2)$ . Finalmente, mostraremos o conteúdo das representações do  $SU(3)$  ( $SU(4)$ ) e  $SU(2)$  nas representações irredutíveis do  $SU(6)$  ( $SU(8)$ ). Procuraremos na abordagem de cada um dos temas, dar relevância ao diquark, cada vez que este aparecer.

### A.1 Cálculo do produto das representações

Para encontrar a dimensão das representações irredutíveis, será usado um método elegante e extremamente rápido, a técnica do "diagrama de Young". Para compreensão da técnica faremos um breve resumo, apresentando somente a parte relevante à tópicos particulares do texto da presente tese.

A representação fundamental do  $SU(n)$  é simbolizada por uma "caixa".

$\square$  indica a representação  $n$ . A coluna de  $n-1$  caixas simboliza a representação fundamental conjugada.



Desta forma

$SU(2)$ :  $2 = 2^*$  representada por  $\square$

$SU(3)$ :  $3$  representado por  $\square$  e  $3^*$  por  $\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$

$SU(4)$ :  $4$  representado por  $\square$  e  $4^*$  representado por  $\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$ .

O produto de duas representações fundamentais, pode ser obtido por uma soma de duas outras representações construídas da junção de duas caixas em linha para uma e, de duas caixas em coluna para a outra como simbolizamos abaixo

$$\square \times \square = \square\square \times \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \quad (1)$$

Para fazer o produto de uma representação fundamental com as duas representações resultantes de (1), temos que observar as seguintes regras, ver na ref. [A-1]: tomemos a equação simbólica (1) acima para facilitar a compreensão das seguintes regras. O produto que estamos interessado é

$$\square \times (\square\square \times \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}) = \square \times \square \times \square$$

o resultado nos dá quatro termos:

i) Junta-se em linha a caixa correspondente à representação fundamental às duas caixas em linha da representação resultante da equação (1)



ii) Junta-se em coluna a caixa da representação fundamental às duas caixas em coluna da representação resultante da equação (1),



iii) Junta-se em coluna a caixa da representação fundamental às duas caixas em linha da representação resultante da equação (1), observando-se que o diagrama obtido não deve ser concavo para cima nem para baixo à esquerda



iv) Junta-se em linha a caixa da representação fundamental às duas caixas em coluna da representação resultante da equação (1), observando-se as mesmas condições de concavidade do item *iii*,



Finalmente, podemos escrever a seguinte equação simbólica do produto de três representações fundamentais

$$\begin{aligned} \square \times \square \times \square &= (\square \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \times \square = \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (2)$$

A dimensão de uma certa disposição de caixas envolve a razão de dois números, que são calculados como se segue: O numerador é calculado para um certo diagrama de  $SU(n)$ , inserindo o valor  $n$  em cada uma das caixas diagonais, começando em cima do lado esquerdo. A seguir, inserimos  $n+1$ ,  $n+2 \dots$  na primeira, segunda e seguintes caixas a direita, até ocupar todas as caixas nesta linha. Depois inserimos nas caixas abaixo  $n-1$ ,  $n-2$  e etc., até terminarmos a coluna. O valor do numerador será o produto de todos os números da caixa. Como exemplo calcularemos o valor do numerador para uma dada representação

$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$
$n-1$	$n$		

para o  $SU(3)$  o valor do numerador neste exemplo é 2160 e para  $SU(2)$  é 240.

O cálculo do denominador é feito através do produto dos "ganchos". Cada caixa tem um valor associado, que é encontrado da seguinte forma: tomando uma certa caixa, o valor do gancho é a soma do número de caixas a sua direita na mesma linha, mais a soma das caixas abaixo, na mesma coluna, mais a própria caixa.

5	4	2	1
2	1		

o número dentro da caixa é o valor do gancho

O valor do denominador independe da dimensão do gancho, no caso do diagrama anterior é 80. Portanto, a dimensão desta representação é 3 para o  $SU(2)$  e 27 para o  $SU(3)$ . Calculando a dimensão das representações usadas no texto, temos:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \square & \\ \hline \end{array} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Com isto as representações dos barions formados pelo triplo produto das representações fundamentais, é dado para o  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ,  $SU(4)$ ,  $SU(6)$  e  $SU(8)$  por:

$$SU(2): 2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \quad (3a)$$

$$SU(3): 3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus 3^*) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (3b)$$

$$SU(4): 4 \otimes 4 \otimes 4 = (10 \oplus 6) \otimes 4 = 20 \oplus 20 \oplus 4 \oplus 20 \quad (3c)$$

$$SU(6): 6 \otimes 6 \otimes 6 = (21 \oplus 15) \otimes 6 = 56 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20 \quad (3d)$$



$$SU(8): 8 \otimes 8 \otimes 8 = (36 \otimes 28) \otimes 8 = 12 \oplus 0 \oplus 168 \oplus 56 \oplus 168 \quad (3e)$$

As representações entre parênteses são as possíveis representações de diquarks utilizados no texto.

A.2 Função de onda do  $\Lambda_c^+$

As funções de onda de sabor, correspondendo ao  $SU(3)$  e  $SU(4)$ , podem ser simétricas (S) na troca de quaisquer dos três índices (a cada índice associamos um quark), completamente antissimétrico (A); de simetria mista do tipo " $\lambda$ " e do tipo " $\rho$ ", sendo que a função de onda com simetria  $\lambda$  é simétrica na troca dos índices 1 por 2, e a do tipo  $\rho$  é antissimétrica na troca dos índices 1 por 2. Estas funções são, para três índices diferentes, que chamaremos de x, y e z [A-2]

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|xyz\rangle + |xzy\rangle + |yzx\rangle + |yzx\rangle + |zxy\rangle + |zyx\rangle)$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|xyz\rangle - |xzy\rangle + |yzx\rangle - |yxz\rangle + |zxy\rangle - |zyx\rangle)$$

$$|\lambda\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-2|xyz\rangle - z|yxz\rangle + |zyx\rangle + |yzx\rangle + |xzy\rangle + |zxy\rangle)$$

$$|\rho\rangle = \frac{1}{2} (|xyz\rangle - |yxz\rangle + |xzy\rangle - |zxy\rangle).$$

Para dois índices iguais:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|xxz\rangle + |xzx\rangle + |zxx\rangle)$$

$$|\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2|xxz\rangle + |zxx\rangle + |xzx\rangle)$$

$$|\rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|xzx\rangle - |zxx\rangle)$$

$$|A\rangle = 0.$$

A combinação de dois estados é dada [A-2]

$$|S\rangle |S\rangle = |S\rangle \quad |A\rangle |S\rangle = |A\rangle$$

$$|S\rangle |\lambda\rangle = |\lambda\rangle \quad - |A\rangle |\lambda\rangle = |\rho\rangle$$

$$|S\rangle |\rho\rangle = |\rho\rangle \quad |A\rangle |\rho\rangle = |\lambda\rangle$$

$$|S\rangle |A\rangle = |A\rangle \quad |A\rangle |A\rangle = |S\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda\rangle |\lambda\rangle + |\rho\rangle |\rho\rangle) = |S\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (-|\lambda\rangle |\lambda\rangle + |\rho\rangle |\rho\rangle) = -|\lambda\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda\rangle |\rho\rangle + |\rho\rangle |\lambda\rangle) = |A\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (-|\lambda\rangle |\rho\rangle + |\rho\rangle |\lambda\rangle) = |\rho\rangle$$

Nos diagramas de Young, se as caixas estão em linha, temos uma representação simétrica, se estiverem em coluna, são antissimétricas e, se não forem nenhuma coisa nem outra, têm simetria mista; estas simetrias é claro se referem às funções de onda. Para o  $SU(2)$  temos duas representações com simetria mista e uma totalmente simétrica, que correspondem a estados de spin  $1/2$  e  $3/2$  respectivamente. A partir do exposto acima, temos que as funções de spin são:

$$\chi_{1/2}^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$\chi_{1/2}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$$

$$\chi_{3/2} = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

O  $\Lambda_c^+$  tem os três quarks diferentes, e está nas representações com simetria mista da  $SU(4)$ . Com isso podemos ter duas funções de sabor para esta partícula

$$|\Lambda_c^+\rangle^{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [-2|udc\rangle - 2|duc\rangle + |cdu\rangle + |dcu\rangle + |ucd\rangle + |cud\rangle] \quad (4a)$$

$$|\Lambda_c^+\rangle^{\rho} = \frac{1}{2} (|udc\rangle - |duc\rangle + |ucd\rangle - |cud\rangle) \quad (4b)$$

Portanto, a função produto das funções de sabor e de spin poderá ser construída de quatro formas diferentes:

$$\chi|\Lambda_c^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Lambda_c^+\rangle^{\lambda} \chi_{1/2}^{\lambda} + |\Lambda_c^+\rangle^{\rho} \chi_{1/2}^{\rho}) \text{ totalmente simétrica} \quad (5a)$$

$$\chi|\Lambda_c^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\Lambda_c^+\rangle^{\lambda} \chi_{1/2}^{\lambda} + |\Lambda_c^+\rangle^{\rho} \chi_{1/2}^{\rho}) \text{ simetria mista do tipo } \lambda \quad (5b)$$

$$\chi|\Lambda_c^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Lambda_c^+\rangle^{\lambda} \chi_{1/2}^{\rho} + |\Lambda_c^+\rangle^{\rho} \chi_{1/2}^{\lambda}) \text{ totalmente antissimétrica} \quad (5c)$$

$$\chi|\Lambda_c^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\Lambda_c^+\rangle^{\lambda} \chi_{1/2}^{\rho} + |\Lambda_c^+\rangle^{\rho} \chi_{1/2}^{\lambda}) \text{ simetria mista do tipo } \rho \quad (5d)$$

A.3

Conteúdo dos multipletos do  $SU(2)$  e do  $SU(3)$  ( $SU(4)$ )

nas representações do  $SU(6)$  ( $SU(8)$ ).

Como foi visto no Capítulo II, os bárions são classificados nos multipletos do grupo  $SU(6)$  ( $SU(8)$  incluindo o charm), que contêm o grupo produto do  $SU(3) \times SU(2)$  ( $SU(4) \times SU(2)$ ) para o  $SU(8)$ .

Denominaremos os multipletos de  $SU(3) \times SU(2)$  pelo símbolo  $^{2J+1}N$ , onde  $2J+1$  é a multiplicidade associada e representação  $J$  do  $SU(2)$  e  $N$  é a multiplicidade associada as representações do  $SU(3)$ .

Assim, os multipletos possíveis de representar os diquarks no grupo produto  $SU(3) \times SU(2)$  são representados por:

$${}^3_6 \quad {}^1_6 \quad {}^3_3^* \quad {}^1_3$$

O multipletto  ${}^3_6$  é totalmente simétrico nos índices de  $SU(3)$  e  $SU(2)$ , portanto, deve pertencer à representação 21 do  $SU(6)$ , que é totalmente simétrica. O  ${}^3_3^*$  é antissimétrico em  $SU(3)$  e simétrico nos índices de  $SU(2)$ , desta forma deve pertencer à representação antissimétrica 15 do  $SU(6)$ . O multipletto  ${}^1_6$  também é antissimétrico e pertence à representação 15, enquanto o multipletto  ${}^1_3$  é simétrico e pertence à representação 21, uma vez que seus dois índices são de representações antissimétricas.

Para os multipletos dos bárions podemos utilizar o mesmo raciocínio. Os multipletos possíveis são:

$${}^4_{10} \quad {}^2_{10} \quad {}^4_8 \quad {}^2_8 \quad {}^4_1 \quad {}^2_1$$

O multipletto  ${}^4_{10}$  é totalmente simétrico nos índices de  $SU(3)$  e  $SU(2)$ , portanto deve pertencer à representação 56 do  $SU(6)$ . O multipletto  ${}^4_1$  é antissimétrico na representação do  $SU(3)$  e simétrico na representação do  $SU(2)$ , portanto este multipletto deve pertencer à representação 20 que é totalmente antissimétrica. Os multipletos  ${}^2_{10}$ ,  ${}^2_1$  e  ${}^4_8$  que têm uma parte simétrica ou antissimétrica com uma parte de simetria mista, terão simetria mista e portanto, pertencerão à representação 70 do  $SU(6)$ . Enquanto o multipletto  ${}^2_8$  tem nos dois índices simetria

mista, portanto pode pertencer às representações simétricas, antissimétricas ou mista. Podemos com isto fazer o seguinte quadro:

$$56 \quad {}^4 10 + {}^2 8 \quad (6a)$$

$$70 \quad {}^2 10 + {}^2 1 + {}^4 8 + {}^2 8 \quad (6b)$$

$$20 \quad {}^4 1 + {}^2 8 \quad (6c)$$

Se utilizarmos este mesmo método para a classificação dos multipletos do  $SU(8)$ , encontraremos o seguinte quadro: para as representações dos bárions

$$120 \quad {}^4 20_{\delta} + {}^2 20_u \quad (7a)$$

$$168 \quad {}^2 20_{\delta} + {}^2 4^* + {}^2 20_u + {}^2 20_u \quad (7b)$$

$$56 \quad {}^4 4^* + {}^2 20_u \quad (7c)$$

O subíndice nas representações do  $SU(4)$  indicam a simetria desta representação.

## APÊNDICE B

### FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES

Todas as equações diferenciais da forma

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a_1 z + a_2) \frac{dy}{dz} + (a_3 z^2 + a_4 z + a_5) y = 0 \quad (1)$$

são integráveis em termos finitos mediante soluções da equação [A-3] :

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (c-z) \frac{dy}{dz} - az = 0 \quad (2)$$

que é a equação diferencial das Funções Hipergeométricas confluentes, que chamaremos de equação confluenta.

A solução da equação (2) pode ser encontrada por dois processos diferentes; uma pelo método de Frobenius e a outra pelo método de Laplace. Mostraremos aqui os dois processos.

Pelo método de Frobenius fazemos:

$$y = \sum_{n=1} C_n z^n$$

com isto obtemos equação de recorrência

$$(n+1) (n+c) C_{n+1} = (n+a) C_n .$$

Se colocarmos  $C_0 = 1$  obteremos:

$$C_n = \frac{a (a+1) \dots (a+n-1) 1}{c (c+1) \dots (c+n-1) n!}$$

Chegamos assim a uma das soluções de (2), que chamamos de  $\phi(a, c; z)$ :

$$\phi(a, c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a (a+1) \dots (a+n-1) z^n}{c (c+1) \dots (c+n-1) n!} \quad (3)$$

Esta função é conhecida como a função de Kummer. Para determinar uma segunda solução linearmente independente, faz-se uma substituição do tipo [A-4] :

$$y = z^{\rho} n$$

Substituindo em (2) obtêm-se:

$$z \frac{d^2 n}{dz^2} + (2\rho + c - z) \frac{dn}{dz} - \left[ a + \rho - \frac{\rho(\rho+c-1)}{z} \right] n = 0$$

para o caso em que  $\rho=1-c$ , a equação transformada fica:

$$z \frac{d^2 \eta}{dz^2} + (2 - c - z) \frac{d\eta}{dz} - (a - c + 1) \eta = 0$$

Se substituirmos  $a-c+1$  por  $a$  e  $1-c$  por  $c$  nesta equação, obtaremos (2). Portanto, a equação 2 permite a solução,

$$z^{1-c} \phi (a - c + 1, 2 - c; z)$$

que é linearmente independente se  $c$  é diferente de um inteiro. Portanto, podemos escrever  $\Psi$  como uma combinação linear destas soluções.

$$y = A\phi (a, c; z) + Bz^{1-c} \phi (a - c + 1, 2 - c; z) \quad (4)$$

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes arbitrarias.

A fim de podermos encontrar estas constantes arbitrarias e obtermos as aproximações necessárias, usaremos o método de Laplace para encontrar a solução da equação 2.

Então faremos:

$$y(z) = \int_c e^{-zt} \gamma(t) dt \quad (5)$$

e obtendo suas derivadas, primeira e segunda

$$y'(z) = - \int_c e^{-zt} t \gamma(t) dt$$

$$y''(z) = \int_c e^{-zt} t^2 \gamma(t) dt$$

encontramos

$$\begin{aligned} zy'(z) &= \int_c t \gamma(t) \frac{d}{dt} (e^{-zt}) dt = \\ &= [e^{-zt} t \gamma(t)]_c - \int_c e^{-zt} [t\gamma'(z) + \gamma(t)] dt \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} zy''(z) &= - \int_c t^2 \gamma(t) \frac{d}{dt} (e^{-zt}) dt = \\ &= - [e^{-zt} t^2 \gamma(t)]_c + \int_c e^{-zt} [t^2 \gamma'(t) + 2t\gamma(t)] dt \end{aligned}$$

Substituindo na equação confluyente (2).

$$\begin{aligned} \int_c e^{-zt} \{ (t^2+t)v'(t) + [(2-c)t + 1-a] \gamma(t) \} dt - \\ - [e^{-zt} (t^2+t) \gamma(t)]_c = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Quando a curva  $c$  é tal que satisfaça a condição

$$[e^{-zt} (t^2+t) \gamma(t)]_c = 0$$

A equação (6) será satisfeita se:



$$(t^2+t) \gamma'(t) + [(2-c)t + 1-a] \gamma(t) = 0$$

o que implica

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{a-1}{t} + \frac{c-a-1}{1+t}$$

Se não levarmos em conta a constante de integração, obteremos:

$$\gamma(t) = t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \quad (8)$$

Portanto, a condição (7) toma a forma

$$\left[ e^{-zt} t^a (1+t)^{c-a} \right]_a = 0 \quad (9)$$

Desta forma a solução da equação confluyente (2) será:

$$y(z) = \int_c e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt$$

Para determinar um caminho de integração  $c$  satisfazendo a condição (9), observamos que, se a curva se estende ao infinito, o fator  $e^{-zt}$  tende a zero, prevalecendo sobre qualquer potência de  $t$ , desde que, a partir de um certo ponto  $\text{Re}(zt) > 0$ . Por outro lado, se tomarmos o início da curva na origem, com  $\text{Re } a > 0$  para não haver divergências, teremos a condição (9) satisfeita. Desta forma, a solução da equação confluyente, pode ser escrita por:

$$y(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt$$

Que pode ser escrita como uma integral de Laplace

$$y(z) = L_z \left[ t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \right] \text{ com } \text{Re } z \text{ e } \text{Re } a > 0$$

Mas se  $\text{Re } x < 0$ , poderemos salvar a condição  $\text{Re}(zt) > 0$ , recor-

rendo a uma transformada de Laplace obl̄iqua  $L^{(\ell)}$ , isto ẽ, fa-  
zemos o caminho de integraçãõ ao longo de uma semi reta no pla-  
no complexo  $t$  com um ângulo  $\phi \neq 0$ . Escreveremos esta transformada  
da seguinte maneira,

$$y(z) = L_z^{(\phi)} [t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}] \equiv \int_0^\infty e^{i\phi_\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt \quad (10)$$

de tal forma que na escolha do ângulo  $\phi$  o termo  $\text{Re}(zt) > 0$  como mostramos abaixo

$$\begin{aligned} t &= u (\cos \phi + i \sin \phi) \\ z &= r (\cos (\arg z) + i \sin (\arg z)) \\ tz &= ur \cos (\phi + \arg z) + i u r \sin (\phi + \arg z) \end{aligned}$$

Com isto, a condiçãõ  $\text{Re}(zt) > 0$  assume a forma

$$-\frac{\pi}{2} < \phi + \arg z < \frac{\pi}{2}$$

Dividindo (10) por  $\Gamma(a)$  [A-5], chegamos a segunda soluçãõ da equaçãõ confluyente, que representaremos por  $\Lambda(a, c; z)$ .

$$\Lambda(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} L_z^{(\phi)} [t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}] \quad (11)$$

Tanto (4) como (11) sãõ soluções da mesma equaçãõ diferencial, portanto podemos igualar as mesmas. Ao igualarmos estas duas equações obteremos, atravẽs de uma anãlise assintõtica, as constantes  $A_0$  e  $B_0$ , como ẽ feito na ref. [A-6]. Obtem-se:

$$\Lambda(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \phi(a, c; z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \phi(a-c+1, 2-c; z) \quad (13)$$

Uma relação importante que obtêm-se diretamente de (13) é dada por:

$$\Lambda(a, c; z) = x^{1-c} \Lambda(a-c+1, 2-c; z) \quad (14)$$

Nosso objetivo neste apêndice inclui além das soluções da equação confluyente, mostrar o comportamento assintótico das mesmas. Assim, fazemos primeiramente uma substituição de  $x$  por  $u e^{i\phi}$  na equação 11, obtemos:

$$\Gamma(a) \Lambda(a, c; z) = \int_0^\infty e^{i\phi} e^{-zue^{i\phi}} u^{a-1} e^{i\phi(a-1)} (1+ue^{i\phi})^{c-a-1} e^{i\phi} du$$

ou

$$\therefore \Gamma(a) \Lambda(a, c; z) = e^{ia\phi} L_{e^{i\phi}z} [x^{a-1} (1+e^{i\phi}u)^{c-a-1}]$$

Desenvolvendo  $u$  em torno de zero temos:

$$u^{a-1} (1+e^{i\phi}u)^{c-a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} e^{in\phi} u^{n+a-1}$$

onde

$$\binom{c-a-1}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} (a-c+1)_n$$

$$e \quad (a-c+1)_n = (a-c+1) (a-c+1+1) \dots (a-c+1+n).$$

Com isto podemos escrever a eq. 11 da seguinte forma:

$$\Lambda(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} L_z^{(\phi)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} z^{n+a-1} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{i\phi_{\infty}} e^{-zt} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} t^{n+a-1} dt$$

Para fazer a aproximação usamos o Lema de Watson [A-7]. Obtemos para  $z \rightarrow \infty$ .

$$\Lambda(a, c; z) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} \frac{\Gamma(n+a)}{z^{n+a}} \quad (15)$$

### EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE WEBER

A equação diferencial de Weber  $\bar{e}$  escrita por:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left( \nu + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z^2 \right) \psi = 0 \quad (16)$$

que tem a forma da equação 1 com  $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ , e  $a_3 = \frac{1}{4}$   $a_5 = \nu + \frac{1}{2}$ .

Portanto pode ser escrita mediante soluções da equação (2), isto é, mediante as funções confluentes (13), na forma [A-8]

$$D_{\nu}(z) = 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \Lambda \left( -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right) \quad (17)$$

Usando (14) obtemos outra forma desta função.

$$D_{\nu}(z) = 2^{(\nu-1/2)} e^{-z^2/4} z \Lambda \left( \frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-z^2}{2} \right) \quad (18)$$

Que também podem ser escritas pelas funções  $\phi$  como segue:

$$D_{\nu}(z) = 2^{\nu/2} e^{z^2/4} \left[ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} \phi \left( -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} \frac{z}{\sqrt{2}} \phi \left[ \frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right] \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_\nu(z) = 2^{(\nu-1)/2} e^{-z^2/4} \left[ \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} \phi \left[ \frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right] + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1-\nu/2)} z^{1-1/2} \phi \left[ -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right] \right] \quad (20)$$

Uma propriedade destas funções é que para uma outra solução da equação (16),  $\mathcal{D}_\nu(-z)$  se relaciona com  $\mathcal{D}_\nu(z)$  por [A-9]

$$\mathcal{D}_\nu(-z) = \mathcal{D}_\nu(z) e^{\pm i\pi} \quad (21)$$

Para obter a expansão assintótica destas funções, utilizaremos a equação (15) em (17), observando os limites de validade da função  $\Lambda(a, c; z)$ , obtendo-se [A-10]

$$\mathcal{D}_\nu(z) \sim e^{-z^2/4} z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_{2n}}{n!} \left( \frac{-1}{2z^2} \right)^n \quad (22)$$

$$\left[ -\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right]$$

Para  $\mathcal{D}_\nu(-z)$  obtem-se:

$$\mathcal{D}_\nu(-z) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-z^2/4} z^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_n}{n!} \left( \frac{1}{2z^2} \right)^n \quad (23)$$

$$\left( -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right)$$

Com estas duas expressões varremos todo o plano complexo  $z$ .

## REFERÊNCIAS

### - CAPÍTULO I

- [ 1 ] - J.D.Bjorken e S.L.Glashow - P.L. 11 (1964) 255.
- [ 2 ] - W.Marciano e H.Pagels - P.R. 36C (1978) 137.
- [ 3 ] - A.F.S.Santoro - "Fenomenologia Hadrônica" - III Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - Cambuquira (1981) SBF.
- [ 4 ] - N.Isgur e G.Karl - P.R. 18D (1978) 4187 - P.R. 19D (1979) 2653 - P.R. 20D (1979) 1191 - P.R. 23D (1981) - 155.
- [ 5 ] - N.Zagury - "Espectroscopia de Hadrons" - Nota Didática nov. 1981 - PUC/RJ.

### - CAPÍTULO II

- [ 1 ] - M.Ida e R.Kobayashi - Prog. Theor. Phys. 36 (1966) 846
- [ 2 ] - D.B.Lichtenberg e L.J.Tassie - P.R. 155 (1967) 1601
- [ 3 ] - P.D.De Souza e D.B.Lichtenberg - P.R. 161 (1967) 1513
- [ 4 ] - O.W.Greenberg - P.R.L. 13 (1964) 598
- [ 5 ] - D.B.Lichtenberg, L.J.Tassie e P.J.Keleman - P.R. 167 (1968) 1535
- [ 6 ] - S.Ono - Prog. Theor. Phys. 48 (1972) 964
- [ 7 ] - R.H.Capps - P.R.L. 33 (1974) 1637
- [ 8 ] - T.Eguchi - P.L. 59B (1975) 457
- [ 9 ] - R.E.Cutkosky, R.E.Hendrick e R.L.Kelly - P.R.L. 37 - (1976) 645  
- R.E. Cutkosky e R.E.Hendrick - P.R. 16D (1977) 786 -  
P.R. 16D (1977) 793 - P.R. 16D (1977) 2902
- [ 10 ] - G.Preparata e K.Szeżł - P.L. 68B (1977) 239

- [ 11 ] - D.B.Lichtenberg, E.Predazzi, D.H.Weingarten e J.G.Wills  
- P.R. 18D (1978) 2569
- [ 12 ] - D.B.Lichtenberg - P.R. 178 (1969) 2197
- [ 13 ] - R.E.Cutkosky et al - P.R. 20D (1979) 2839
- [ 14 ] - Xie Yicheng - "Do the baryon magnetic moments exhibit  
a quark-diquark configuration?" - HD-THEP - 81-12 . W.  
Germany
- [ 15 ] - E.Hirsch et al - P.L. 36B (1971) 139
- [ 16 ] - M.Zralek et al - P.R. D19 (1979) 820
- [ 17 ] - M.Fontannaz, B.Pire e D.Schiff - P.L. 77B (1978) 315
- [ 18 ] - D.Hanna et al - P.R.L. 46 (1981) 398
- [ 19 ] - D.Beavis e B.R.Desai - P.R. 23D (1981) 1967
- [ 20 ] - Alexander NG, K.E.Lassila e V.P.Sukhatme-"Understading  
inclusive  $pp \rightarrow ph^{\pm}X$  data with Parton fragmentation  
and structure functions" - Prē-print Fermilab-Pub 80/  
90 - THY (USA)
- [ 21 ] - U.P.Sukhatme, K.E.Lassila e R.Orava - "Diquark fragmen  
tation" - Prē-print Fermilab - Pub. 81/20 - THY (USA)
- [ 22 ] - D.Beavis e B.R.Desai - "Diquark fragmentation in lepto  
production of Hadrons" - Prē-print IC (81)150 (Trieste  
Italy)
- [ 23 ] - S.V.Mukhin e V.A.Tsarev - S.J.N.P. 30 (1979) 873
- [ 24 ] - L.E.Abbot, E.L.Berger, B.Blankenbecler e G.L.Kanne -  
P.L. 88B (1979) 157; F.E. Close e R.G.Roberts - Z.P.C.  
8 (1981) 57; S.Fredriksson, M.Jändel e T.Larsson - "A  
new diquark model for deep inelastic structure func  
tions" - Trinta - TFY - 81-20 (Sweden)
- [ 25 ] - Yu.A.Gobukow, Yu.P.Nikitin e R.V.Konoplich - "Model  
for Baryon Production in hadron-hadron collisions" -  
Prē-print I.N.F.N. - Sezione di Roma 245 (1981)



- CAPÍTULO III

- [ 1 ] - J.J.Aubert et al - P.R.L. 33 (1974) 1404  
- J.E.Augustin et al - P.R.L. 33 (1974) 1406
- [ 2 ] - E.G.Cazzoli et al - P.R.L. 34 (1975) 1125
- [ 3 ] - B.Knapp et al - P.R.L. 37 (1976) 882
- [ 4 ] - A.M.Cnops et al - P.R.L. 42 (1979) 197
- [ 5 ] - D.Drijard et al - P.L. 85B (1979) 452
- [ 6 ] - K.L.Giboni et al - P.L. 85B (1979) 437
- [ 7 ] - C.Baltay et al - P.R.L. 42 (1979) 1721
- [ 8 ] - J.Irion et al - P.L. 99B (1981) 495
- [ 9 ] - W.Lockman et al - P.L. 85B (1979) 443
- [ 10 ] - C.Angelini et al - P.L. 84B (1979) 150
- [ 11 ] - G.S.Abrams et al - P.R.L. 44 (1980) 10
- [ 12 ] - M.Calicchio et al - P.L. 93B (1980) 521
- [ 13 ] - H.Grüssler et al - P.L. 99B (1981) 159
- [ 14 ] - J.J.Russell et al - P.R.L. 46 (1981) 799
- [ 15 ] - P.C.Bosetti et al - P.L. 109B (1982) 234
- [ 16 ] - S.J.Brodsky, P.Hoyer, C.Peterson e N.Sakai - P.L. 93B  
(1980) 451
- [ 17 ] - G.H.Trilling et al - P.R. 75C (1981) 58
- [ 18 ] - Particle Data Group - Rev Mod. Phys. 52 (1980) S105
- [ 19 ] - I.Bediaga, E.Predazzi e A.F.S.Santoro - P.L.105B(1981)  
- 71
- [ 20 ] - R.P.Feynman, R.B.Leighton e M.Sands - "The Feynman le-  
ctures on Physics" - Vol. II (Addison-Wesley, New York  
1965) Ch. 9
- [ 21 ] - E.Merzbacher - "Quantum Mechanics" - 2 nd.ed. - (Wiley  
1970)
- [ 22 ] - D.B.Lichtenberg - "Unitary symmetry and elementary

particles" - 2nd. ed. (Academic Press 1978)

- [ 23 ] - M.G.do Amaral - "Estados bariônicos radialmente excitados" - Tese de Mestrado - (PUC/RJ 1981)

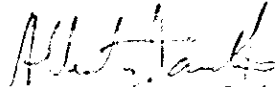
- CAPÍTULO IV

- [ 1 ] - Z.Dziembowski, W.J.Metzger e R.T.Van de Walle - Z.P.10C - (1981) 231

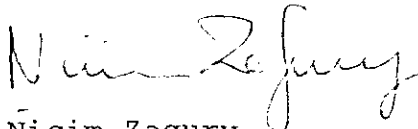
- APÊNDICES

- [ 1 ] - M.Hamermesh - "Group Theory" - Addison-Wesley - Reading Massachusetts (1963)
- [ 2 ] - N.Zagury - "Espectroscopia de hadrons" - Nota Didática PUC/RJ (1981)
- [ 3 ] - F.G.Tricomi - "Funzioni Ipergeometriche Confluenti" - Edizioni Cremonese - Roma (1954) Pág. 11
- [ 4 ] - Ibidem - pág. 13
- [ 5 ] - Ibidem - pág. 56
- [ 6 ] - Ibidem - pág. 62
- [ 7 ] - G.N.Watson - "A treatise on the theory of Bessel functions" - University Press - 2ª Ed - Cambridge (1945) Pág. 236
- [ 8 ] - Ibidem ref. 3, pág. 223
- [ 9 ] - H.Buchholz - "The Confluent Hypergeometric Function" - Springer-Verlag - Berlin Heideberg N.Y. (1969) pág. 40
- [ 10 ] - Ibidem, ref. 3 - pág. 236

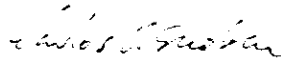
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



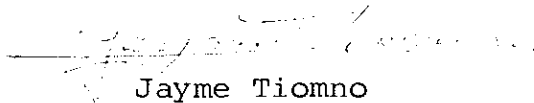
Alberto Franco de Sá Santoro  
Presidente



Nicim Zagury



Carlos Ourivio Escobar



Jayme Tiomno

Rio de Janeiro, 08 de junho de 1982