

MARCO AURÉLIO DO REGO MONTEIRO

TERMOS EVANESCENTES E O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL  
NA TEORIA DE WEINBERG-SALAM

Tese de  
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1981 -

T  
530.443  
F15

*À minha esposa*

*Cristina*

## AGRADECIMENTO

- Ao Prof. Carlos Guido Bollini por sua orientação e sugestão do tema;
- Aos Profs. Carlos Guido Bollini e Juan José Giambiagi pelo apoio e estímulo;
- A Henrique Lins de Barros pelo valioso trabalho na Coordenação de Ensino;
- A Arthur Carlos Gerhardt Santos por seu permanente incentivo;
- A Anísio A. Contreiras de Carvalho pelo exemplo;
- A Da. Clélia Mineiro pelo caprichoso trabalho de datilografia;
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

No Capítulo I apresentamos a teoria de Weinberg-Salam para os leptons. Em seguida, no Capítulo II, descrevemos o método de Regularização Dimensional na teoria  $\lambda\phi^4$  e Q.E.D.

Mostramos ainda que, se queremos aplicar este método de regularização para teorias com acoplamentos axiais, temos que levar em consideração os termos evanescentes, i.é., termos que vão a zero quando a dimensão do espaço-tempo é a ordinária ( $n = 4$ ), que podem dar contribuição finita quando calculado em diagramas de Feynman divergentes.

No Capítulo III desenvolvemos o lagrangeano de Weinberg-Salam numa dimensão arbitrária,  $n \neq 4$ , o qual contém todos os termos do lagrangeano de Weinberg-Salam usual em 4-dimensões e como termos extras somente termos evanescentes.

Finalmente no Capítulo IV fazemos uma análise dos termos que aparecem no lagrangeano de Weinberg-Salam e calculamos a contribuição do termo evanescente  $a_z \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.Z\}$  e para o cálculo da auto-energia do elétron.

# S U M Á R I O

	Pág.
AGRADECIMENTO .....	iii
RESUMO .....	iv
INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO À TEORIA DE WEINBERG-SALAM	
1.1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.2 - INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DOS CAMPOS DE GAUGE .....	1
1.3 - O MODELO DE HIGGS .....	17
1.4 - O MODELO DE WEINBERG-SALAM .....	19
<u>CAPÍTULO II</u> - O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL	
2.1 - INTRODUÇÃO .....	31
2.2 - A REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL NA TEORIA $\lambda\phi^4$	31
2.3 - A REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL NA Q.E.D. ...	36
2.4 - TEORIAS COM ACOPLAMENTOS AXIAIS .....	42
2.5 - CÁLCULO DA ANOMALIA DE ADLER POR REGULA RIZAÇÃO DIMENSIONAL .....	48
2.6 - UMA ESCOLHA SIMPLES DE $\gamma_5$ EM N-DIMENSÃO..	54

APÊNDICE AO CAPÍTULO II: - DEMONSTRAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS ÚTEIS EM N-DIMENSÃO .....	57
<u>CAPÍTULO III</u> - O LAGRANGEANO DE WEINBERG-SALAM EM N-DIMENSÃO	
3.1 - INTRODUÇÃO .....	64
3.2 - CONSTRUÇÃO DO LAGRANGEANO DE WEINBERG-SALAM EM N-DIMENSÃO .....	64
3.3 - ANÁLISE DO LAGRANGEANO .....	85
3.4 - PROBABILIDADES DIFERENTES AOS TERMOS HERMITEANOS EVANESCENTES DIFERENTES .....	88
APÊNDICE AO CAPÍTULO III: - DEMONSTRAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS DO CAPÍTULO .....	94
<u>CAPÍTULO IV</u> - CONCLUSÕES .....	103
APÊNDICE AO CAPÍTULO IV: - CÁLCULO DE DIAGRAMAS DE AUTO-ENERGIA DO ELÉTRON .....	110
<u>BIBLIOGRAFIA</u> - .....	124

## INTRODUÇÃO

Parece ter sido Oppenheimer<sup>(1)</sup> e Waller<sup>(2)</sup> em 1930 que independentemente primeiro observaram que as teorias quântica dos campos quando calculadas, além da ordem mais baixa de aproximação, produz resultados com divergências ultra-violetas. A posteriori se compreendeu que essas divergências eram independentes do método de aproximação usado e que eram inerentes à estrutura da teoria.

No final da década de 40, Feynman introduziu um procedimento sistemático para calcular qualquer elemento da matriz  $S$  a uma ordem arbitrária de aproximação. Neste procedimento qualquer processo é caracterizado por uma família de diagramas de eventos desenhados em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal com um certo número de linhas externas incidentes e emergentes. Para cada tal diagrama há associado uma expressão analítica bem definida que pode ser escrita com a ajuda das "Regras de Feynman".

Em termos desses diagramas as divergências ultravioletas podem ser identificadas como aparecendo em certos diagramas de Feynman com "loops", i. é., diagramas com pelo menos uma alça desenhada no gráfico do espaço-tempo que pode ser formada, quando por exemplo, um fóton virtual é emitido e mais tarde reabsorvido pelo mesmo elétron.

As divergências encontradas nestas teorias conduziram inicialmente, a predições que não tinham interpretação razoável como quantidades físicas. Por exemplo, toda interação entre elê

trons e ftons conduziam a resultados que divergiam e até mesmo deixava sem significado físico a descrição de um elétron isolado, pois este podendo emitir e reabsorver partículas virtuais teria uma carga e massa infinita.

A solução para este dilema é um procedimento chamado de renormalização. Resumidamente falando, para uma teoria renormalizável, todos os infinitos residem somente na relação entre as massas e constantes do acoplamento, com a qual a teoria começa, e as novas massas e constantes de acoplamento, as quais adquirem agora um significado físico, tendo o valor medido no laboratório.

A interpretação para este procedimento pode ser dada dizendo que quando fazemos uma medida num elétron, por exemplo, o que está sendo medido não é a massa ou a carga da partícula pontual com a qual a teoria começa mas as propriedades do elétron junto com uma nuvem de partículas virtuais que o circunda. Devido a essa interpretação da renormalização é comum chamar as propriedades das partículas pontuais que a teoria começa de nuas, isto é, massa nua e carga nua e para a massa e carga renormalizada de vestidas.

Assim para teorias renormalizáveis a renormalização isola as partes divergentes das integrais em uns poucos parâmetros massas e constantes de acoplamento mas, entretanto, as integrais divergentes tem que ser manipuladas enquanto as partes convergentes estão sendo extraídas, para fazer isto, temos que ter um processo para regularizar essas integrais divergentes.

Diversos métodos de regularização foram desenvolvidos e, em 1972, Bollini e Giambiagi<sup>(3)</sup>, 't Hooft e Veltman<sup>(4)</sup> desen-



volveram um método chamado de Regularização Dimensional que mantinha, não só a covariância relativística, como também a invariância de gauge de teorias de campos de gauge em todos os estágios do cálculo. Como para teorias de campos de gauge a invariância de gauge é necessária para assegurar a equivalência do gauge renormalizável com o gauge unitário, este método mostrou-se o mais adequado na renormalização de teorias que possuem invariância de gauge local.

Neste método a dimensão do espaço-tempo é tomada como um parâmetro de regularização. Os objetos que aparecem na teoria como as matrizes de Dirac, o tensor métrico, são estendidos ao espaço  $n$ -dimensional de tal forma que seja possível manipular esses objetos como em 4-dimensões. As integrais divergentes são calculadas em  $n$ -dimensão e as divergências usuais aparecem então como pólos na dimensão do espaço-tempo físico e as partes finitas podem ser extraídas.

Deve ser dito ainda que tão logo esse método foi desenvolvido observou-se que para teorias não axiais como a eletrodinâmica quântica, esse método era direto e não apresentava dificuldades mas, para teorias em que apareciam acoplamentos axiais algo a mais teria que ser desenvolvido a fim de renormalizar uma teoria com acoplamentos axiais com este método.

Vamos fazer um corte no tempo e voltarmos um pouco atrás para olharmos o desenvolvimento de uma teoria axial, a teoria de Weinberg e Salam que unifica as interações fracas e eletromagnéticas.

Em 1961, Goldstone<sup>(5)</sup> desenvolveu a idéia de quebra espontânea de simetria em teorias de campos, mostrou que através

da escolha do valor esperado do vácuo, de um campo, não nulo era possível gerar partículas sem massa os chamados bosons de Goldstone.

Higgs <sup>(6)</sup> em 1964, aplicando a idéia de Goldstone para uma teoria com simetria de gauge local, mostrou que embora os bosons de Goldstone existam formalmente, eles podem ser "eliminados" por uma transformação de gauge, tal que eles não aparecem como partículas físicas. Os bosons de Goldstone "eliminados" aparecem como estados extra de helicidade do boson vetorial necessário para que este boson vetorial seja massivo. Uma descrição pictórica do processo dada por Salam, diz que o boson vetorial de gauge "come" os bosons de Goldstone, para ganhar massa e os bosons de Goldstone ocultos tornam-se partículas fantasmas.

Em 1967, Weinberg <sup>(7)</sup> e, independentemente, Salam <sup>(8)</sup>, propuseram um modelo para os leptons o qual unificava as interações fracas eletromagnéticas. Essa teoria possui uma invariância de gauge local com grupo de simetria do  $SU(2) \times U(1)$  em que os bosons vetoriais que mediam as interações fracas ganham massa através do mecanismo estabelecido por Higgs.

Uma das façanhas dessa teoria foi a predição de correntes neutras, já especuladas em 1937 por Gamow, e em 1958, por Leite Lopes <sup>(14)</sup>, primeiramente observadas em 1973, no CERN.

Colocava-se então a questão sobre a renormalizabilidade da teoria desenvolvida por Weinberg e Salam. Já se sabia na época pelos trabalhos de Fadeev e outros que teorias de gauge com simetria não quebrada eram renormalizáveis. Sabia-se ainda dos trabalhos de Veltman e Bell que se partíssemos desde o princípio com campos vetoriais massivos a teoria, além de não ser in

variante de gauge, também não era renormalizável.

No período de 1971 a 1972, 't Hooft, Veltman, B. Lee e outros, mostraram que uma teoria de gauge com simetria espontaneamente quebrada era renormalizável.

Estava então a questão sobre a renormalização da teoria de Weinberg - Salam totalmente resolvida? Não. Na teoria originalmente proposta por Weinberg e Salam para os leptons, persistia e ainda persiste, o problema das anomalias de Adler - Bell e Jackiw que aparecem nas teorias axiais quando não são canceladas por algum mecanismo na teoria.

Em 1973, Bollini e Giambiagi<sup>(9)</sup> escolheram para a matriz  $\gamma_5$  uma prescrição em  $n$ -dimensão tal que o anticomutador de  $\gamma_5$  com a matriz de Dirac,  $\gamma_\mu$  seja evanescente, isto é, que vá a zero quando a dimensão do espaço-tempo é a física, i.é.,  $n = 4$ .

Neste trabalho, Bollini e Giambiagi mostraram que com essa prescrição para  $\gamma_5$  além de não termos nenhuma contradição com as identidades desenvolvidas com essas matrizes em 4-dimensões a anomalia de Alder - Bell e Jackiw poderia ser calculada pelo método de Regularização Dimensional.

Isto sugere então que, se queremos aplicar o método de Regularização Dimensional a fim de renormalizar uma teoria com acoplamentos axiais, como é o caso da teoria de Weinberg e Salam, teremos que rederivar o lagrangeano da teoria em  $n$ -dimensão levando-se agora em conta o fato de que o anticomutador de  $\gamma_5$  com  $\gamma_\mu$  não é mais nulo em  $n$ -dimensão mas sim evanescente, i.é., se anula no espaço-tempo físico  $n = 4$ . Com isto para as teorias em que a forma do anticomutador de  $\gamma_5$  com  $\gamma_\mu$  seja importante teremos no lagrangeano  $n$ -dimensional termos evanescentes extras que

deverão ser considerados pois, podem dar contribuição quando inseridos em integrais divergentes.

O objetivo desse trabalho é o de descrever os passos fundamentais que nos leva a considerar os termos que chamamos de evanescentes e derivar o lagrangeano de Weinberg-Salam em  $n$ -dimensão com os termos evanescentes extras a fim de renormalizar a teoria em  $n$ -dimensão fazendo a posteriori o limite para o espaço-tempo físico  $n = 4$ .

No Capítulo I nós discutimos sucintamente alguns pontos importantes das teorias de gauge Abelianas e não-Abelianas, o mecanismo de Higgs para gerar massa aos bosons vetoriais de gauge e derivamos o lagrangeano de Weinberg - Salam em 4-dimensões.

No Capítulo II nós descrevemos o método de Regularização Dimensional na teoria  $\lambda\phi^4$ , na eletrodinâmica quântica, Q.E.D., discutimos também como esse método poderia ser aplicado nas teorias com acoplamentos axiais e calculamos a anomalia de Adler-Bell e Jackiw através do método de Regularização Dimensional.

No Capítulo III nós derivamos o lagrangeano de Weinberg - Salam em  $n$ -dimensão com os termos evanescentes extras e finalmente no Capítulo IV, damos um exemplo do efeito dos termos evanescentes que aparecem no lagrangeano de Weinberg - Salam em  $n$ -dimensão e discutimos o prosseguimento desse trabalho.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO À TEORIA DE WEINBERG-SALAM

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

A fim de derivar a teoria de Weinberg-Salam (7,8), que unifica as interações fracas e eletromagnéticas para o caso dos leptons, descreveremos algumas idéias básicas da teoria clássica de campos de gauge e o mecanismo de Higgs que gera massa aos campos de gauge.

#### 1.2 - INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DOS CAMPOS DE GAUGE

Consideremos o lagrangeano correspondente a um campo escalar complexo de massa  $m$  e sem interação:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.1)$$

Observamos diretamente que este lagrangeano é independente da fase global do campo, i. e.,  $L(\phi, \partial_\mu \phi)$  é invariante perante a transformação  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ , que chamamos de transformação de gauge do primeiro tipo ou transformação de fase.

Esta transformação correspondendo a uma variação infinitesimal de fase ( $\alpha = \epsilon$  infinitesimal) é:

$$\phi' = e^{i\epsilon} \phi = (1 + i\epsilon) \phi \Rightarrow \delta\phi = i\epsilon\phi \quad (1.2)$$

$$e, \quad \phi^{*'} = e^{-i\varepsilon} \phi^* = (1 - i\varepsilon) \phi^* \Rightarrow \delta\phi^* = -i\varepsilon\phi^* \quad (1.2)$$

Como  $L$  é independente de fase,  $\delta_\varepsilon L = 0$ , teremos na igualdade de Noether que:

$$\delta L = \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi^*} \delta\phi^* \right] = 0 \quad (1.3)$$

o que nos dá usando (1.2) a seguinte corrente conservada:

$$j_\mu = i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) \quad (1.4)$$

Podemos ver mais claramente o significado da invariância de fase se introduzimos campos reais segundo a mudança de variáveis:

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{\phi - \phi^*}{i\sqrt{2}}$$

Em termos desses novos campos o lagrangeano (1.1) fica:

$$L = L_1 + L_2 \quad (1.5)$$

onde:

$$L_a = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2} m^2 \phi_a^2 \quad (a = 1, 2) \quad (1.6)$$

$L_a$  é o lagrangeano do campo escalar real e  $L$  é a soma desses lagrangeanos. Por outro lado, a invariância do lagrangeano (1.1) segundo (1.2) se traduz agora na invariância de (1.5) perante:

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1' = \frac{\phi' + \phi^{*'}}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \phi_1 - \sin \alpha \phi_2 \quad (1.7)$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi_2' = \frac{\phi' - \phi^{*'}}{i\sqrt{2}} = \cos \alpha \phi_2 + \sin \alpha \phi_1$$

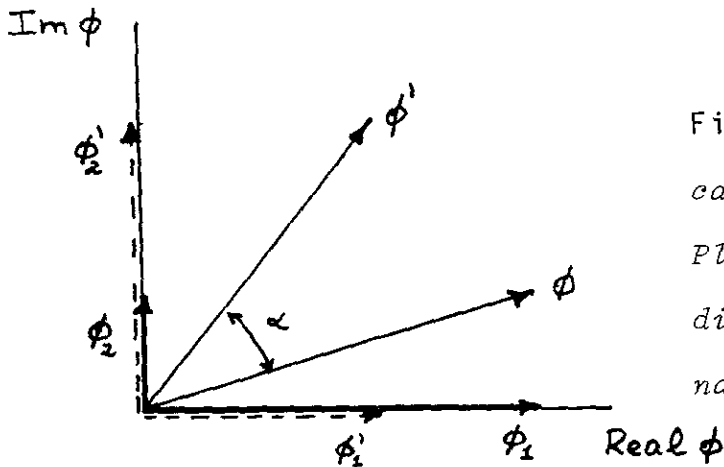


Figura 1.1: Representação Gráfica da Transformação de Fase num Plano em que  $IM(\phi)$  e  $RE(\phi)$  Individualizam dois Eixos Ortogonais.

A transformação (1.7) indica que o grupo de transformação de fase  $\bar{e}$ , para o lagrangeano (1.5), o grupo de rotações no plano em que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  individualizam dois eixos ortogonais como mostrado na figura (1.1). A invariância correspondente implica que para  $L$ , a orientação de  $\phi$  não tem significado físico. Entretanto, essa arbitrariedade, no caso de transformações de fase, está sujeita a seguinte limitação: uma vez escolhida uma orientação,  $(\phi_1, \phi_2)$ , num ponto do espaço-tempo, não estamos mais livres de fazer qualquer outra escolha para outros pontos do espaço-tempo.

Como observaram Yang e Mills<sup>(10)</sup>, se desejamos introduzir interações locais\* a limitação descrita acima nos levaria a

---

\* Esta discussão só é válida no caso de interações locais.

uma inconsistência, pois o conceito de campos e interações locais está associado com uma propagação até pontos vizinhos e com nenhuma influência de pontos "distantes", não haveria então, a possibilidade de através de um ponto do espaço-tempo instantaneamente impormos a orientação do campo num ponto distante.

Então, a fim de introduzir interações locais nesse Lagrangeano, temos que nos libertar dessa limitação examinando a possibilidade de considerar a invariância segundo rotações independentes em pontos diferentes do espaço-tempo.

Consideremos então o que chamamos de transformação de gauge do segundo tipo:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi \quad (1.8)$$

onde agora  $\alpha$  é uma função do espaço-tempo. O termo  $\phi^* \phi$  do Lagrangeano (1.1) mantém-se invariante segundo a transformação (1.8), entretanto, o termo que contém derivadas se transforma em:

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi' = (\partial_\mu - i\alpha_\mu) \phi^* (\partial_\mu + i\alpha_\mu) \phi$$

A presença do termo  $\alpha_\mu$  impede a invariância do Lagrangeano perante a transformação de fase do segundo tipo. Entretanto, se lembrarmos que exatamente o campo eletromagnético  $A_\mu$  está definido a menos de um gradiente, compreendemos que a invariância pode ser restituída se adendamos o campo eletromagnético como "compensador" no termo da derivada:

$$\partial_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi \equiv \mathcal{D}_\mu \phi \quad (1.9)$$



Exigimos agora que perante a transformação (1.8),  $A_\mu$  mude simultaneamente a:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \alpha_\mu \quad (1.10)$$

Assim, o lagrangeano:

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.11)$$

fica invariante perante a transformação de gauge definida por (1.8) e (1.10), onde  $\alpha(x)$  é uma função arbitrária da posição.

Podemos obter a nova corrente conservada simplesmente substituindo (1.9) em (1.4), resultando na soma da corrente livre com a corrente de interação dos campos  $\phi$  e eletromagnético:

$$j_\mu = \underset{\text{livre}}{j_\mu} + \underset{\text{int.}}{j_\mu} = i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) - 2e\phi A_\mu \phi^* \quad (1.12)$$

A fim de completar a descrição do lagrangeano do campo complexo em interação com o campo de gauge identificado como sendo o campo eletromagnético é necessário, ainda, dar o lagrangeano livre do último:

$$L_0 = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.13)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.14)$$

é o tensor das intensidades do campo eletromagnético e ainda podemos ver que  $L_0$  é invariante perante as transformações de gauge.

Tendo discutido algumas das idéias físicas subjacentes

a teoria clássica dos campos de gauge no grupo de simetria abeliano  $U(1)$  nós passaremos agora, a estudar sucintamente a extensão desse assunto para o caso de grupos de simetria não abelianos\*.

Consideremos agora o lagrangeano:

$$L = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.15)$$

onde  $\phi(x)$  é um vetor coluna. Vemos que esse lagrangeano é invariante perante a transformação:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp \{-i \vec{L} \cdot \vec{\theta}\} \phi(x) \equiv U(\theta) \phi(x) \quad (1.16)$$

onde os  $\theta^i$  são constantes e  $L^i$  são os geradores do grupo não-abeliano que obedecem a:

$$[L_j, L_k] = i C_{ijk} L_k \quad (1.17)$$

onde  $C_{ijk}$  são as constantes de estrutura do grupo.

O problema agora é construir uma teoria que seja também invariante segundo transformações de gauge do segundo tipo (ou locais), i.é., com  $\theta^j = \theta^j(x)$ , introduzindo-se campos vetoriais  $A^j(x)$  em analogia com a eletrodinâmica.

Segundo transformações de gauge locais temos:

$$\phi(x) \rightarrow U(\theta) \phi(x) \quad (1.18)$$

---

\* Para aqueles interessados numa discussão mais profunda do assunto, podemos citar o curso de verão dado por C.G. Bollini e J. J. Giambiagi - São Carlos - 1978.

então:

$$\partial_{\mu} \phi(x) \rightarrow U(\theta) \partial_{\mu} \phi(x) + (\partial_{\mu} U(\theta)) \phi(x) \quad (1.19)$$

A idéia é introduzir uma derivada covariante  $D_{\mu} \phi(x)$  que se transforme como  $\phi(x)$ , i.é.,:

$$D_{\mu} \phi(x) \rightarrow U(\theta) D_{\mu} \phi(x) \quad (1.20)$$

pois assim mantemos invariante o termo de derivada no lagrangeano (1.15) perante as transformações (1.18).

A derivada covariante  $D_{\mu} \phi(x)$  é construída introduzindo-se um campo vetorial  $A_{\mu}^j(x)$  para cada dimensão da algebra de Lie, e definindo:

$$D_{\mu} \phi(x) = (\partial_{\mu} - ig \vec{L} \cdot \vec{A}_{\mu}(x)) \phi(x) \quad (1.21)$$

onde a constante de acoplamento "g" análoga a "e", é arbitraria.

O campo de gauge  $A_{\mu}^j$  deve se transformar em  $A_{\mu}^{\prime j}$  de tal modo que assegure a validade de (1.20), i.é.:

$$\begin{aligned} D_{\mu}^{\prime} \phi' &= \partial_{\mu} \phi' - ig A_{\mu}^{\prime j} L^j \phi' = (\partial_{\mu} U(\theta)) \phi + U(\theta) \partial_{\mu} \phi - \\ &- ig \vec{A}_{\mu}^{\prime} \cdot \vec{L} U(\theta) \phi \end{aligned} \quad (1.22)$$

deve ser igual a:

$$U(\theta) (\partial_{\mu} - ig \vec{A}_{\mu} \cdot \vec{L}) \phi \quad (1.23)$$

e obtemos que:

$$- ig \vec{A}_{\mu}^{\prime} \cdot \vec{L} U(\theta) \phi = - ig U(\theta) \vec{A}_{\mu} \cdot \vec{L} \phi - (\partial_{\mu} U(\theta)) \phi \quad (1.24)$$

e desde que (1.24) deve ser válido para todo  $\phi$ :

$$\vec{A}'_{\mu} \cdot \vec{L} = U(\theta) \left[ \vec{A}_{\mu} \cdot \vec{L} - \frac{i}{g} U^{-1}(\theta) \partial_{\mu} U(\theta) \right] U^{-1}(\theta) \quad (1.25)$$

Se tomamos agora transformações infinitesimais:

$$U(\theta) = e^{-i\vec{L} \cdot \vec{\theta}} = (1 - iL^j \theta^j) \quad (1.26)$$

Substituindo agora (1.26) em (1.25) obtemos:

$$\begin{aligned} L^j \delta A_{\mu}^j &= -\frac{1}{g} L^j \partial_{\mu} \theta^j + i L^i A_{\mu}^i \theta^j L^j - i \theta^j L^j A_{\mu}^i L^i = \\ &= -\frac{1}{g} L^j \partial_{\mu} \theta^j + i \theta^j A_{\mu}^i [L^i, L^j] = \\ &= -\frac{1}{g} L^j \partial_{\mu} \theta^j - \theta^j A_{\mu}^i C_{ijk} L^k \end{aligned} \quad (1.27)$$

Desde que os  $L^j$  são linearmente independentes:

$$\delta A_{\mu}^i = -\frac{1}{g} \partial_{\mu} \theta^i + C_{ijk} \theta^j A_{\mu}^k \quad (1.28)$$

e vemos que as propriedades de transformação de  $A_{\mu}^j$  não dependem da representação  $L^j$ .

Agora devemos construir o lagrangeano  $L_0$ , dos campos de gauge, que contem sōmente os campos  $A_{\mu}^i$  e suas derivadas tal que seja invariante de gauge. Em analogia ao caso da eletrodinâmica vamos construir esse lagrangeano da seguinte forma:

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \quad (1.29)$$

onde agora o tensor das intensidades dos campos,  $F_{\mu\nu}^i$ , terá uma forma mais complicada devido ao fato de termos um grupo de simetria não abeliano. De fato, de (1.28) vemos que:

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) &= C_{ijk} \theta_j (\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) + \\ &+ C_{ijk} \left[ (\partial_\mu \theta^j) A_\nu^k - (\partial_\nu \theta^j) A_\mu^k \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Então teremos que acrescentar algum termo em  $\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$  a fim de cancelar o segundo termo de (1.30) para que  $L_0$  seja invariante. Ainda de (1.28) temos que:

$$\begin{aligned} C_{ijk} \delta(A_\mu^j A_\nu^k) &= - \frac{C_{ijk}}{g} \left[ (\partial_\mu \theta^j) A_\nu^k - (\partial_\nu \theta^j) A_\mu^k \right] + \\ &+ C_{ijk} C_{jlm} \theta^\ell A_\mu^m A_\nu^k + C_{ijk} C_{klm} \theta^\ell A_\nu^m A_\mu^j \end{aligned} \quad (1.31)$$

o primeiro termo vezes  $g$  cancela exatamente o termo indesejável de (1.30). Os dois últimos termos podem ser reescritos usando-se a antissimetria da constante de estrutura, como:

$$(C_{imk} C_{kjl} - C_{ijk} C_{kml}) \theta^\ell A_\mu^j A_\nu^m \quad (1.32)$$

Pode ser mostrado que as constantes de estrutura do grupo consideradas como matrizes formam o que se chama de representação adjunta do grupo. Então tomando  $(T^i)_{jk} = -iC_{ijk}$ , o parenteses em (1.32) fica:

$$\begin{aligned} C_{imk} C_{lkj} - C_{lmk} C_{ikj} &= \left[ T^\ell, T^i \right]_{mj} = \\ &= i C_{lik} (T^k)_{mj} = C_{ilk} C_{kjm} \end{aligned}$$

Assim,

$$C_{ijk} \delta(A_{\mu}^j A_{\nu}^k) = - \frac{C_{ijk}}{g} \left[ (\partial_{\mu} \theta^j) A_{\nu}^k - (\partial_{\nu} \theta^j) A_{\mu}^k \right] +$$

$$+ C_{ilk} \theta^{\ell} C_{kjm} A_{\mu}^j A_{\nu}^m \quad (1.33)$$

Então definindo:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i + g C_{ijk} A_{\mu}^j A_{\nu}^k \quad (1.34)$$

Podemos ver facilmente usando (1.30), (1.33) e (1.34) que:

$$\delta F_{\mu\nu}^i = C_{ijk} \theta^j F_{\mu\nu}^k \quad (1.35)$$

e  $L_0$  como definido em (1.29)  $\bar{e}$  invariante de gauge. É importante notar que um termo de massa da forma  $m^2 \vec{A}_{\mu} \cdot \vec{A}^{\mu}$  violaria a invariância de gauge.

Então o lagrangeano total invariante perante as transformações de gauge do 2º tipo (ou locais) definidas em (1.18) e (1.25)  $\bar{e}$ :

$$L = -\frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} + \left[ (\partial_{\mu} - igL \cdot \vec{A}_{\mu}) \phi \right]^{\dagger} \left[ (\partial^{\mu} - igL \cdot \vec{A}^{\mu}) \phi \right] -$$

$$- m^2 \phi^{\dagger} \phi \quad (1.36)$$

É importante ainda mencionar que se o lagrangeano  $\bar{e}$  invariante perante a um grupo de simetria  $G$  que  $\bar{e}$  o produto de dois ou mais subgrupos, as constantes de acoplamento associada com cada subgrupo não são necessariamente as mesmas.

### 1.3 - O MODELO DE HIGGS

O lagrangeano do modelo de Higgs<sup>(6)</sup> é:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - h |\phi|^4 \quad (1.37)$$

onde  $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ . Este lagrangeano corresponde, para  $\mu^2 > 0$ , ao de um campo escalar complexo massivo interagindo com um campo vetorial sem massa. Podemos ver que este lagrangeano (1.37) é invariante perante a transformação:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{ie\Lambda} \phi \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \end{aligned} \quad (1.38)$$

Vamos supor que  $h > 0$  a fim de que o espectro de energia esteja limitado por baixo. Isto pode ser visto se interpretamos como energia potencial:

$$V = \mu^2 |\phi|^2 + h |\phi|^4 \quad (1.39)$$

Se supomos que  $\mu^2 < 0$  teremos para o vácuo clássico:

$$|\phi| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad \text{onde } \lambda = \sqrt{-\frac{\mu^2}{h}} \quad (1.40)$$

com uma fase arbitrária. É interessante observar que essas soluções não são invariantes frente as transformações (1.38) do qual o lagrangeano é invariante.

Vamos tomar agora por razão de comodidade a fase como nula e como temos um valor esperado do vácuo diferente de zero é conveniente introduzir campos reais  $\phi_1$  e  $\phi_2$  de tal maneira

que:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \phi_1 + i\phi_2) \quad (1.41)$$

onde

$$\langle \phi_1 \rangle_0 = \langle \phi_2 \rangle_0 = 0 \quad (1.42)$$

Passamos agora para novos campos reais  $X$  e  $\theta$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + X) e^{i\theta/\lambda} \quad (1.43)$$

onde  $X$  e  $\theta$  podem ser obtidos em função de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Quando fazemos a transformação de gauge (1.38) no campo escrito da forma (1.43), obtemos:

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + X) e^{i(\theta + e\lambda\Lambda)/\lambda}$$

então vemos que  $X$  não se modifica e  $\theta$  muda para:

$$\theta \rightarrow \theta + e\lambda\Lambda \quad (1.44)$$

Assim escolhendo-se:

$$\Lambda = \frac{-1}{e\lambda} \theta \quad (1.45)$$

o novo  $\theta$  será zero, e escolhendo ainda,

$$A_\mu = B_\mu + \frac{1}{e\lambda} \partial_\mu \theta \quad (1.46)$$

o Lagrangeano fica independente de  $\theta$  e contém somente os campos  $X$  e  $B_\mu$ . Expressando em função desses campos o Lagrangeano torna-se:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} e^2 \lambda^2 B_\mu^2 - \frac{1}{2} e^2 B_\mu^2 (2\lambda X + X^2) -$$



$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (\mu^2 + 3h\lambda^2) \chi^2 - \frac{1}{4} h (4\lambda\chi^3 + \chi^4) - \\ & - \frac{1}{2} \mu^2 \lambda^2 - \frac{1}{4} h \lambda^4 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Este lagrangeano descreve a interação de um campo vetorial  $B_\mu$  de massa, e  $\lambda$ , com um campo escalar real de massa:

$$\mu^2 + 3h\lambda^2 = -2\mu^2 > 0 \quad (1.48)$$

Observe que a possibilidade de eliminar completamente a fase  $\theta$  depende da não anulação de  $\lambda$ . Se  $\lambda$  é zero a transformação não pode ser feita e  $\theta$  não pode ser eliminado.

Deve ser dito ainda que esse lagrangeano com a simetria espontaneamente quebrada (como é chamado o processo descrito nessa seção), continua sendo renormalizável.

#### 1.4 - O Modelo de WEINBERG-SALAM

A matéria é constituída fundamentalmente por elétrons, prótons e neutrons. Destas partículas, os elétrons parecem ser elementares e forma uma "família leptônica" junto com o muon  $\mu^-$ , o tauon  $\tau^-$ , os neutrinos respectivos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  e as correspondentes antipartículas.

Sabemos ainda que esses leptons interagem somente com os fotons, e com bosons intermediários que mediam essas interações. Parece então tentador construir uma teoria de campos de gauge que unifique as forças fracas e eletromagnéticas para os leptons (7,8).

Nosso ponto de partida será o lagrangeano sem intera-

ção para o elétron e como nas interações fracas eletrônicas sem pre aparece o neutrino do elétron, levaremos em conta também este.

O lagrangeano, sem termos de interação, para campos es pinoriais com massa nula  $\bar{e}$ :

$$L = \bar{\nu} i\gamma \cdot \partial \nu \quad (1.49)$$

Se definimos agora:

$$\nu \equiv \nu_L + \nu_R$$

$$\nu_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu \quad \nu_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu \quad (1.50)$$

onde

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (1.51)$$

podemos provar que:

$$\bar{\nu}_L = \bar{\nu} \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad \bar{\nu}_R = \bar{\nu} \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (1.52)$$

Em termos desses campos:

$$L = \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{\nu}_R i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_R + \bar{\nu}_R i\gamma \cdot \partial \nu_R \quad (1.53)$$

Usando agora a propriedade bem conhecida das matrizes de Dirac:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (1.54)$$

podemos provar sem dificuldades que:

$$\bar{\nu}_R i\gamma \cdot \partial \nu_L = 0$$

$$\bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_R = 0 \quad (1.55)$$

Se lembrarmos agora que na natureza s̄o encontramos neutrinos do tipo esquerdo, podemos então escrever a parte cinética eletrônica e do neutrino como:

$$L_{\text{cine}} = \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_L + \bar{e}_R i\gamma \cdot \partial e_R \quad (1.56)$$

Podemos agora incluir o termo de massa do elétron em função dos campos esquerdo e direito (1.50):

$$m \bar{e} e = m (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (1.57)$$

Então o lagrangeano sem interação fica:

$$L = \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_L + \bar{e}_R i\gamma \cdot \partial e_R + m (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (1.58)$$

Inspirados agora pelo fato de que nas interações fracas o elétron sempre aparece com seu neutrino companheiro e que este s̄o aparece com helicidade esquerda, definamos um novo campo, dublete de spin isotópico como:

$$L = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Entretanto, isto não esgota a descrição do elétron já que este tem uma componente de helicidade direita. Então, torna-se necessário introduzir um singlete de spin isotópico:

$$R = \frac{(1 + \gamma_5)}{2} e \equiv e_R \quad (1.60)$$

Em termos desses novos campos (1.59) e (1.60) podemos

reescrever o lagrangeano (1.58):

$$L = \bar{L} i \gamma \cdot \partial L + \bar{R} i \gamma \cdot \partial R + \bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} R + \bar{R} (0 \ m) L \quad (1.61)$$

Agora como sabemos que os bosons que intermediam as interações fracas são massivos, imaginaremos que o mecanismo responsável para gerar essa massa seja o mecanismo de Higgs, descrito na seção precedente. Imaginaremos ainda, que esse mecanismo seja também, responsável na geração de massa do elétron e não para o neutrino, então fazemos:

$$\bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} R + \bar{R} (0 \ m) L \rightarrow \bar{L} \phi R + \bar{R} \phi^\dagger L \quad (1.62)$$

onde  $\phi$  é um dublete de spin isotópico.

Teremos ainda, que introduzir o lagrangeano desse campo  $\phi$  que suporemos que seja do tipo  $\lambda \phi^4$ , então:

$$L = \bar{L} i \gamma \cdot \partial L + \bar{R} i \gamma \cdot \partial R + G_e (\bar{L} \phi R + \bar{R} \phi^\dagger L) + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.63)$$

Vemos que este lagrangeano é invariante perante a:

$$\begin{aligned} R &\rightarrow e^{i\beta} R \\ \phi &\rightarrow e^{-i\beta/2} \phi \\ L &\rightarrow e^{i\beta/2} L \end{aligned} \quad (1.64)$$

que é o grupo  $U(1)$  de simetria, que gera a corrente conservada da hipercarga.

Mas este lagrangeano também é invariante frente as transformações:

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2} L \\
 \phi &\rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2} \phi \\
 R &\rightarrow R
 \end{aligned}
 \tag{1.65}$$

onde  $\tau^i$  são as matrizes de Pauli, que é o grupo SU(2) de rotações no espaço de isospin. Teremos, portanto, invariância perante o produto direto SU(2) X U(1) com o qual existem quatro correntes conservadas: as três do spin isotópico e a da hipercarga.

Agora estendemos a invariância considerada para o caso de invariância local. Isso implica na introdução de quatro mēsons vetoriais: três correspondentes a um isovetor  $\vec{A}_\mu$  e um isoescalar  $B_\mu$ . O lagrangeano total se obterá, fora a parte livre correspondente aos  $\vec{A}_\mu$  e  $B_\mu$ , mediante a troca imposta pela invariância de gauge:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu L &\rightarrow \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) L \equiv \mathcal{D}_\mu L \\
 \partial_\mu \phi &\rightarrow \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \phi \equiv \mathcal{D}_\mu \phi \\
 \partial_\mu R &\rightarrow \left( \partial_\mu - ig' B_\mu \right) R \equiv \mathcal{D}_\mu R
 \end{aligned}
 \tag{1.66}$$

onde

$$A_\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} = A_\mu^a \tau^a
 \tag{1.67}$$

Com isto o lagrangeano fica da forma:

$$L = \bar{L} i \gamma \cdot \mathcal{D} L + \bar{R} i \gamma \cdot \mathcal{D} R + G_e (\bar{L} \phi R + \bar{R} \phi^\dagger L) +$$

$$\begin{aligned}
 & + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) + |\mu^2| \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 - \\
 & - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

onde como no modelo de Higgs  $\mu^2 < 0$  e,  $B_{\mu\nu}$  e  $G_{\mu\nu}^a$  são os tensores de intensidade dos campos  $B_\mu$  e  $A_\mu$  respectivamente.

A simetria  $\bar{e}$  é quebrada espontaneamente impondo

$$|\langle \phi \rangle_\sigma| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \rightarrow \langle \phi \rangle_\sigma = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

e  $\bar{e}$  esta quebra espontânea que gera, via o mecanismo de Higgs, a massa do elétron. Como no mecanismo de Higgs introduzamos, por conveniência, novos campos com valor esperado do vácuo nulo:

$$\phi = \phi_0 + \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

Pode ser mostrado sem dificuldade que a forma (1.70) é análoga a:

$$\phi = \frac{e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / \lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

onde  $\vec{\theta}$  e  $\xi$  são escritos em função de  $\psi_1, \psi_2, \xi_1$  e  $\xi_2$ . Se agora fazemos uma transformação de gauge:

$$\phi \rightarrow e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / \lambda} \phi \tag{1.72}$$

onde  $\vec{\alpha} = -2\vec{\theta} / \lambda$ . Obtemos para o novo  $\phi$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

Vamos agora passar à análise dos termos do lagrangeano (1.68). O terceiro termo de (1.68) é o que esperamos que forneça as massas correspondentes do elétron e do neutrino, vejamos:

$$G_e (\bar{L}\phi_R + \bar{R}\phi^\dagger_L) = \frac{G_e}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} e_R + \right. \\ \left. + \bar{e}_R (0\lambda + \xi) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] = \frac{G_e}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \bar{e} e \quad (1.74)$$

Então temos massa nula para o neutrino e para o elétron:

$$m_e = \frac{G_e \lambda}{\sqrt{2}} \quad (1.75)$$

e também gera um acoplamento  $\xi \bar{e} e$ .

Vamos analisar o quinto e sexto termo do lagrangeano(1.68):

$$|\mu^2| \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 = \frac{|\mu^2|}{2} (0 \lambda + \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} - \\ - \frac{h}{4} \left[ (0\lambda + \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{|\mu^2|}{2} (\lambda + \xi)^2 - \frac{h}{4} (\lambda + \xi)^4 \quad (1.76)$$

Tomando os termos quadrados em  $\xi$ :

$$\frac{1}{2} \left( |\mu^2| - \frac{3h\lambda^2}{2} \right) \xi^2 = - \frac{1}{2} (2 |\mu^2| \xi^2)$$

pois  $\lambda^2 = |\mu^2|/h$ . Então obtemos para a massa de  $\xi$ , o boson de Higgs:

$$M_{HIGGS} = \sqrt{2} |\mu| \quad (1.77)$$

Vamos analisar agora como se geram as massas dos m̄sons vetoriais, para isto vamos tomar o quarto termo do lagrangeano (1.68):

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \right]^\dagger \left( \partial^\mu - \frac{ig}{2} A^\mu + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{ig'}{2} B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \tag{1.78}
 \end{aligned}$$

onde usamos  $\mathcal{D}_\mu$  de (1.66). De (1.67):

$$\vec{A}_\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} A_\mu^3 & \sqrt{2} \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \frac{A_\mu^1 + iA_\mu^2}{\sqrt{2}} & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

Redefinindo agora novos campos vetoriais em função dos antigos como:

$$\begin{aligned}
 W_\mu &= \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \\
 Z_\mu &= \frac{gA_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv (\text{Sen } \theta_w) B_\mu + (\text{Cos } \theta_w) A_\mu^3 \\
 A_\mu &= \frac{gB_\mu - g'A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv (\text{Cos } \theta_w) B_\mu - (\text{Sen } \theta_w) A_\mu^3
 \end{aligned} \tag{1.80}$$



onde  $\theta_w$  é chamado de angulo de Weinberg. Depois de um pouco de algebra encontramos usando (1.80) em (1.78):

$$\left[ \mathcal{D}_\mu \phi \right]^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{(\lambda + \xi)}{8} \left[ 2g^2 \omega_\mu^* \omega^\mu + (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu \right] \quad (1.81)$$

o qual indica que as massas associadas com os campos vetoriais A, W e Z são:

$$\begin{aligned} M_A &= 0 \\ M_W &= \frac{\lambda g}{2} \\ M_Z &= \frac{\lambda}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Agora para identificar o papel desses campos vetoriais devemos analisar o primeiro e segundo termo do lagrangeano (1.68):

$$\begin{aligned} \bar{L} i \gamma \cdot \mathcal{D} L + \bar{R} i \gamma \cdot \mathcal{D} R &= (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu - \frac{ig' B_\mu}{2} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \\ &+ \bar{e}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R \end{aligned} \quad (1.83)$$

onde foi usado  $\mathcal{D}_\mu L$  e  $\mathcal{D}_\mu R$  de (1.66). Podemos mostrar facilmente usando (1.79) e (1.80) que:

$$i \partial_\mu + \frac{g}{2} A_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu = \begin{pmatrix} i \partial_\mu + \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}} \omega_\mu \\ \frac{g}{\sqrt{2}} \omega_\mu^* & i \partial_\mu + \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{g^2 + g'^2} Z_\mu + \frac{gg'}{g^2 + g'^2} A_\mu \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

E que:

$$g' B_{\mu} = \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_{\mu} + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_{\mu} \quad (1.85)$$

Então substituindo (1.84), (1.85) em (1.83) e utilizando as propriedades (1.50), (1.51) e (1.52), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{L}i\gamma.DL + \bar{R}i\gamma.DR = & \bar{e}i\gamma.\partial e + \bar{v}_e i\gamma.\partial \frac{(1-\gamma_5)}{2} v_e + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{v}_e \gamma.W (1-\gamma_5) e + \bar{e} \gamma.W^* (1-\gamma_5) v_e \right] + \\ & + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{v}_e \gamma.Z (1-\gamma_5) v_e + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{e} \gamma.Z \gamma_5 e + \\ & + \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma.Z e + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma.A e \end{aligned} \quad (1.86)$$

Então podemos ver que o campo vetorial  $A_{\mu}$  além de ter massa nula media a interação entre os elêtrons, podemos assim identifica-lo como o fôton da elêtro dinâmica. A constante de acoplamento e létrica,  $q$ ,  $\bar{e}$ :

$$q = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.87)$$

ou,  $q = g \text{ sen } \Theta_W = g' \text{ cos } \Theta_W \quad (1.88)$

Aos campo vetorias  $W$  e  $Z$  chamamos de bōson vetorial carregado e bōson vetorial neutro respectivamente, estes campos massivos como vemos de (1.86) tem o papel de agentes intermediários da interação fraca assim como  $\bar{e}$  o foton na eletrodinâmica.

Para estimar a massa desses bosons intermediários mostra-se que a constante de Fermi satisfaz:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2\lambda^2} \quad (1.89)$$

Substituindo o valor experimental de  $G_F$ , obtemos:

$$\lambda \approx 246 \text{ GeV} \quad (1.90)$$

E das experiências de neutrino sabemos que:

$$\text{sen}^2 \Theta_W \approx 0.22 \quad (1.91)$$

Então substituindo (1.91), (1.90) e (1.87), encontramos que:

$$\begin{aligned} g &\approx 0.65 & g' &\approx 0.34 \\ \Rightarrow M_W &\approx 80 \text{ GeV} & M_Z &\approx 90 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Agora para completar a discussão desse modelo damos o Lagrangeano completo:

$$\begin{aligned} L = & \bar{e} i \gamma \cdot \partial e + \bar{\nu}_e i \gamma \cdot \partial \frac{(1-\gamma_5)}{2} \nu_e + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_e \gamma \cdot W (1-\gamma_5) \bar{e} + \bar{e} \gamma \cdot W^* (1-\gamma_5) \nu_e \right] + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot A e + \\ & + \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \bar{\nu}_e \gamma \cdot Z (1-\gamma_5) \nu_e + \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot Z e + \frac{G_e}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \bar{e} e + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \\
 & + \frac{(\lambda + \xi)^2}{8} \left[ 2g^2 \omega_\mu^* \omega^\mu + (g^2 + g'^2) Z_\mu Z_\mu \right] + \frac{[\mu^2]}{2} (\lambda + \xi)^2 - \\
 & - \frac{\hbar}{4} (\lambda + \xi)^4 - \frac{1}{4} \beta_{\mu\nu} \beta^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \tag{1.92}
 \end{aligned}$$

Deve ser dito ainda que se quisermos levar em conta o múon e seu neutrino basta substituir em (1.92)  $e \rightarrow \mu$ ,  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  e no caso do táuon fazer a substituição  $e \rightarrow \tau$ ,  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ . E ainda que o lagrangeano para o conjunto dos leptons é a soma do lagrangeano do elétron, múon e táuon.

## CAPÍTULO II

### *O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL*

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

A maior parte dos cálculos perturbativos em teoria dos campos envolvem integrais que são divergentes no limite superior de integração. Nas teorias renormalizáveis, as partes divergentes podem ser isoladas em alguns parâmetros, as massas e constantes de acoplamento.

Entretanto, para realizar-se cálculos, temos que extrair as partes finitas das integrais divergentes e para isso temos que ter em mão um método de regularização da teoria.

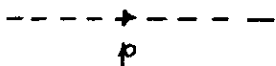
Neste capítulo apresentaremos o método de Regularização Dimensional, desenvolvido recentemente por Bollini e Giambagi<sup>(3)</sup>; t'Hooft e Veltman<sup>(4)</sup>, em teorias com acoplamentos não axiais e discutiremos como ele pode ser implementado em teorias com acoplamentos axiais.

#### 2.2 - A REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL NA TEORIA $\lambda\phi^4$

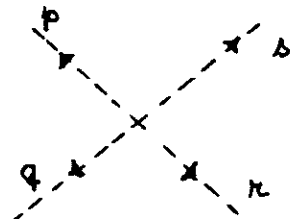
A fim de introduzir as idéias básicas do método de Regularização Dimensional, vamos utilizar primeiramente, a teoria  $\lambda\phi^4$  onde não temos complicações devido à carga, simetria interna ou, spin. O lagrangeano da teoria é:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4!} \quad (2.1)$$

Do lagrangeano podemos derivar as regras de Feynman para a construção de diagramas:

- linha interna   $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

- integração de caminho fechado  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

- vértice  -  $i\lambda$

- fator de simetria  $S$

Vamos agora calcular através do método de Regularização Dimensional as partes finita e infinita do diagrama divergente abaixo na figura 2.1

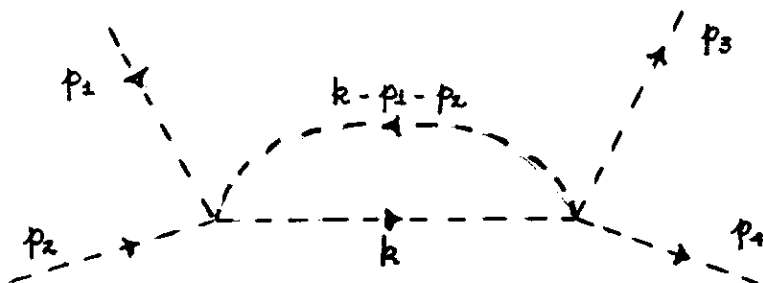


Figura 2.1: Gráfico de 2a. Ordem, Divergente, que aparece na Teoria  $\lambda \phi^4$ .



A integral de Feynman desse gráfico  $\bar{e}$ , segundo as regras colocadas acima:

$$I(p_1, p_2) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - m^2) [(k - p_1 - p_2)^2 - m^2]} \quad (2.2)$$

Consideremos agora essa integral (2.2) sobre um espaço  $n$ -dimensional e não mais no espaço 4-dimensional. Essa integral fica:

$$I(p_1, p_2, n) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m^2) [(k - p_1 - p_2)^2 - m^2]} \quad (2.3)$$

Onde os momentos provenientes das linhas externas, no caso  $p_1$  e  $p_2$ , continuam restritos a 4-dimensões, e os momentos do loop interno são estendidos nesse espaço  $n$ -dimensional de tal modo que a componente de energia fique fixa e a parte espacial seja estendida para uma dimensão  $n$  inteira, i.ê.:

$$k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}); \quad k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_{n-1}^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \quad (2.4)$$

Tomemos agora a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[D_1 x + D_2 (1-x)]^2} \quad (2.5)$$

Usando essa parametrização (2.5) na integral (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
 I(p_1, p_2, n) &= \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d^n k \int_0^1 dx \frac{1}{\{(k^2 - m^2)x + [(k - p_1 - p_2)^2 - m^2]\}^2} \\
 &= \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{\{[k - (1-x)(p_1 + p_2)]^2 + x(1-x)(p_1 + p_2)^2 - m^2\}^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Façamos uma mudança na variável de integração:

$$k \rightarrow k + (1 - x)(p_1 + p_2)$$

obtemos então:

$$I(p_1, p_2, n) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{(k^2 - a)^2} \tag{2.7}$$

onde:

$$a = m^2 - x(1 - x)(p_1 + p_2)^2 \tag{2.8}$$

A fim de evitar a necessidade da discussão de convergência da integral em relação ao sinal de  $k^2$ , nós giramos o eixo de energia do momentum  $n$ -dimensional  $k$  por um ângulo  $\Pi/2$  no plano de energia complexa. Isto tem o efeito de passarmos para uma métrica Euclideana, i.ê.,  $k^2 \rightarrow -k_e^2$ , então:

$$I(p_1, p_2, n) = \frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n k_e \frac{1}{(k_e^2 + a)^2} \tag{2.9}$$



A vantagem é que agora temos a integral no momentum tabelada e com valor:

$$\int d^n k \frac{(k^2)^m}{(k^2+a)^p} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2+m)\Gamma(p-m-n/2)}{\Gamma(p/2) a^{p-m-n/2}} \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma(n)$  é a função gama de Euler. Substituindo (2.10) em (2.9) obtemos:

$$I(p_1, p_2, n) = \frac{i\lambda^2 \pi^{n/2}}{2(2\pi)^4} \Gamma(2-n/2) \int_0^1 dx a^{n/2-2} \quad (2.11)$$

Vemos assim que conseguimos separar o infinito pois o termo em (2.11) divergente em  $n=4$  é a própria função gama que tem polos quando  $2-n/2$  é zero ou inteiro negativo. No caso que nos interessa, no limite físico  $n=4$ , essa função tem a forma:

$$\Gamma(2-n/2) \approx \frac{1}{2-n/2} - \gamma_e \quad \text{para } n \approx 4 \quad (2.12)$$

onde  $\gamma_e = 0,577 \dots$  é a constante de Euler.

Podemos então separar as partes finita e infinita observando que para  $n \approx 4$  temos:

$$a^{n/2-2} = 1 + \left(\frac{n}{2} - 2\right) \ell na + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - 2\right)^2 (\ell na)^2 + \dots \quad (2.13)$$

Substituindo então (2.13), (2.12) em (2.11) e fazendo o limite  $n \rightarrow 4$ , temos que a parte infinita é um polo simples  $(n-4)^{-1}$  com resíduo  $-i\lambda^2 \pi^2 / (2\pi)^4$  e que a parte finita é:

$$\frac{-i\lambda^2 \Pi^2}{(2\Pi)^4} \left[ \gamma_e + \int_0^1 dx \ln a \right] \quad (2.14)$$

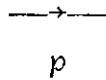
2.3 - A Regularização Dimensional na Q.E.D.

O Lagrangeano da Q.E.D.  $\bar{e}$ :

$$L = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m - e\gamma_\mu A^\mu) \psi \quad (2.15)$$

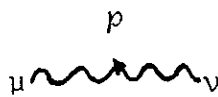
que dão origem as seguintes regras de Feynman as quais usamos para construir diagramas:

- linha interna  
de elétron



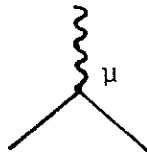
$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

- linha interna  
de fóton



$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

- Vértice



$$-ie\gamma_\mu$$

- loop fechado  
de fermion

- traço

- loop de momentum  $k$

$$\int \frac{dk}{(2\Pi)^4}$$

- linha externa  
de elétron

$$\bar{u}(p, s)$$

emergente

$$u(p, s)$$

incidente

- linha externa  
de fóton

$$\epsilon_{\mu}$$

onde  $\epsilon_{\mu}$  é o vetor de polarização para o fóton e deve ser transverso para fótons reais e  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético usual  $\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ .

A fim de aplicar o método de Regularização Dimensional para a Q.E.D., devemos aprender a lidar em  $n$ -dimensões com as matrizes de Dirac que aparecem nas linhas internas e vértices, com os espinores  $\bar{u}$  e  $u$  das linhas externas eletrônicas e com os traços sobre as matrizes de Dirac que aparecem nos "loops" fermiônicos internos, como é evidente das regras de Feynman apresentadas acima.

O primeiro passo para saber como manejar esses objetos num espaço  $n$ -dimensional é saber se há alguma coisa que seja independente da dimensão do espaço. Se aceitamos a equação de Dirac nesse espaço  $n$ -dimensional ser da forma usual:

$$(\not{p} + m)\psi = 0 \tag{2.16}$$

onde  $\psi$  é o espinor correspondente em dimensão  $n$  e  $\gamma_{\mu}$  são as matrizes de Dirac com representação de dimensão  $d(n)$ , vemos que para a validade da equação de Klein-Gordon, em  $n$ -dimensão, para cada componente  $\psi_{\sigma}$  de  $\psi$  temos que:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

Para  $g_{\mu\nu}$  nós estendemos suas propriedades para  $n$ -dimensão de uma forma natural, ou seja:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} &= g_{\mu\lambda} & g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} \\
 g_{\mu\nu} p^\nu &= p_\mu & g_{\mu\nu} \gamma^\nu &= \gamma_\mu \\
 e \quad g_\mu^\mu &= n & &
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Como foi falado acima para tratar os loops fermionicos internos precisamos calcular os traços sobre as matrizes de Dirac, podemos ver que usando (2.17) e que  $T_\kappa AB = T_\kappa BA$ , podemos agora calcular:

$$T_\kappa \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} T_\kappa (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = g_{\mu\nu} T_\kappa 1 = d(n) g_{\mu\nu}
 \tag{2.19}$$

Podemos agora também, provar facilmente que [ver apendice ao capítulo (A.2)]:

$$T_\kappa (\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) = d(n) \{g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}\}
 \tag{2.20}$$

Permanece ainda o problema de como tratar os espinores no espaço  $n$ -dimensional. Consideremos um elemento de matriz -  $S$  em Q.E.D. com duas linhas externas fermionicas como mostrado na figura 2.2 abaixo:

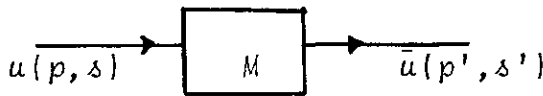


Figura 2.2

O elemento de matriz  $S$  é da forma:

$$S_{fi} = \bar{u}(p', s') M u(p, s)
 \tag{2.21}$$

onde  $M$  é um produto de matrizes  $\gamma$ . A probabilidade de transição é:

$$|S|^2 = S_{fi} (S_{fi})^\dagger = \bar{u}(p', s') M u(p, s) \bar{u}(p, s) \bar{M} u(p', s') \quad (2.22)$$

Se, como geralmente acontece, não observamos a polarização da partícula final e não conhecemos as polarizações iniciais, nós designamos probabilidades iguais a priori para os diferentes estados de polarização inicial. Isto significa que a probabilidade de transição observada será a soma de (2.22) sobre os estados finais de spin e uma média sobre os estados iniciais, isto é:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{+ \\ -}} \sum_{s', s} |S|^2 = \frac{1}{2} T_{\mathcal{L}} \left[ M \frac{(\gamma \cdot p' + m)}{2m} \bar{M} \frac{(\gamma \cdot p + m)}{2m} \right] \quad (2.23)$$

onde usamos o operador de projeção de energia:

$$\sum_{\text{Spins}} \bar{u}(p, s) u(p, s) = \frac{(\gamma \cdot p + m)}{2m}$$

Assim vemos que os espinores tal como aparecem no cálculo dos diagramas pelas regras de Feynman podem ser transformados em traços das matrizes  $\gamma$  e o problema se reduz ao discutido anteriormente.

Como aplicação do método na eletrodinâmica quântica vamos calcular agora o diagrama de polarização do vácuo, figura 2.3, abaixo:

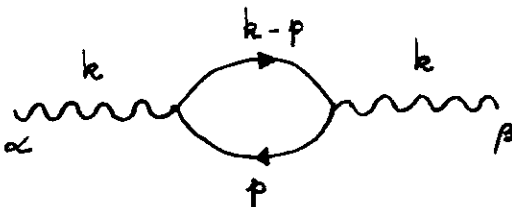


Figura 2.3: Diagrama de Polarização do Vácuo

As regras de Feynman levam à integral:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2}{(2\Pi)^4} \int d^4 p \, T_{\mathcal{L}} \left[ \gamma_{\alpha} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2} \gamma_{\beta} \frac{\gamma \cdot (p-k) + m}{(p-k)^2 - m^2} \right] \quad (2.24)$$

Estendendo essa integral a  $n$ -dimensão:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2}{(2\Pi)^4} \int d^n p \frac{T_{\mathcal{L}} \gamma_{\alpha} (\gamma \cdot p + m) \gamma_{\beta} [\gamma \cdot (p-k) + m]}{(p^2 - m^2) [(p-k)^2 - m^2]} \quad (2.25)$$

Usando (2.19) e (2.20) e que (demonstrado no apêndice ao capítulo item (A.1)):

$$T_{\mathcal{L}} \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \cdots \gamma_{\alpha_{2i+1}} = 0 \quad i = \text{inteiro} \quad (2.26)$$

obtemos para o numerador do integrando:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{L}} \{ \gamma_{\alpha} (\gamma \cdot p + m) \gamma_{\beta} [\gamma \cdot (p-k) + m] \} = & d(n) [ p_{\alpha} (p-k)_{\beta} + p_{\beta} (p-k)_{\alpha} - \\ & - g_{\alpha\beta} p \cdot (p-k) + m^2 g_{\alpha\beta} ] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando ainda a parametrização de Feynman (2.5) e reescrevendo o denominador do integrando; obtemos:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2 d(n)}{(2\Pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n p \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + p_{\alpha} (p-k)_{\beta} + p_{\beta} (p-k)_{\alpha} - g_{\alpha\beta} p \cdot (p-k)}{[(p-kx)^2 + k^2 x(1-x) - m^2]^2} \quad (2.28)$$

Façamos agora uma mudança na variável de integração  $p \rightarrow p + kx$ , então:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-e^2 d(n)}{(2\Pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n p \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + 2p_{\alpha} p_{\beta} + 2x(x-1) k_{\alpha} k_{\beta} - g_{\alpha\beta} p^2 - g_{\alpha\beta} x(x-1) k^2}{[p^2 + kx(1-x) - m^2]^2} \quad (2.29)$$

Como já foi explicado anteriormente vamos passar para uma métrica Euclideana, i.ê.,  $p^2 \rightarrow -p_e^2$ ; além disso com vistas a realizar a integração façamos a seguinte substituição:

$$p_\alpha p_\beta \rightarrow -\frac{1}{n} g_{\alpha\beta} p_e^2 \quad (2.30)$$

Assim com essas modificações e juntando os termos equivalentes no integrando:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-id(n)e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^n p_e \frac{m^2 g_{\alpha\beta} + (1 - \frac{2}{n}) g_{\alpha\beta} p_e^2 + 2x(x-1)(k_\alpha k_\beta - k^2) + g_{\alpha\beta} x(x-1)k^2}{[p_e^2 + k^2 x(x-1) + m^2]^2} \quad (2.31)$$

Usando agora a fórmula (2.10) para o cálculo das integrais e ainda as propriedades bem conhecidas da função gama, obtemos após um pouco de algebra:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-id(n)\pi^{n/2} e^2}{(2\pi)^4} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \Gamma\left[2 - \frac{n}{2}\right] \int_0^1 dx \frac{2x(x-1)}{[m^2 + x(x-1)k^2]^{\frac{n}{2} - 2}} \quad (2.32)$$

Lembrando que para  $n = 4$ :

$$a^{\frac{n}{2} - 2} = 1 + \left[\frac{n}{2} - 2\right] \ell na + \left[\frac{n}{2} - 2\right]^2 \left[\ell na\right]^2 + \dots \quad (2.33)$$

$$\Gamma\left[2 - \frac{n}{2}\right] = \frac{1}{2 - n/2} - \gamma_e \quad (2.33)$$

Substituindo (2.33) em (2.32) obtemos as partes finita e infinita de  $\Pi_{\alpha\beta}$  :

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{-4i\Pi^2 e^2}{(2\Pi)^4} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \left[ e(n) + \Pi_f \right] \quad (2.34)$$

onde:

$$e(n) = \frac{2}{3(n-4)} e,$$

$$\Pi_f = \frac{\gamma_e}{3} - \int_0^1 dx \, 2x(x-1) \ln \left[ m^2 + x(x-1)k^2 \right]$$

#### 2.4 - TEORIAS COM ACOPLAMENTOS AXIAIS

A fim de aplicar o método de Regularização Dimensional em teorias que comparecem as matrizes  $\gamma_5$ , como é o caso por exemplo da teoria que unifica as interações fracas e eletromagnéticas a teoria de Weinberg-Salam, devemos saber como estender essa matriz em  $n$ -dimensão sem que apareçam inconsistências na teoria.

A primeira coisa a ser observada é que essa extensão deve respeitar as propriedades que  $\gamma_5$  e seu produto com as matrizes de Dirac  $\gamma_\mu$ , tenham em 4-dimensões.

Em 4-dimensões  $\gamma_5$  é definido como:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (2.35)$$

onde  $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  e  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  é o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita de 4 índices. Com essa definição é



fácil deduzir que  $(11)$ :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (2.36)$$

Se usamos agora  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} 1$  podemos mostrar ainda em 4-dimensões que  $(11)$ :

$$\begin{aligned} T_\mu \gamma_5 &= 0 \\ T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b &= 0 \\ T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d &= 4i \epsilon_{abcd} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Vamos tentar primeiramente usar uma extensão de  $\gamma_5$  de tal maneira que mantenha em  $n$ -dimensão a propriedade (2.36) válida em 4-dimensões. Vejamos se com esta extensão podemos construir  $T_\mu \gamma_5$ ,  $T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b$  e  $T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d$  em  $n$ -dimensão de tal maneira que restitua os valores (2.37) em 4-dimensão quando tomamos o limite físico  $n \rightarrow 4$ .

Para efeito desses cálculos observemos, primeiramente, que de  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} 1$  obtemos:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g^\mu_\mu = n 1 \quad (2.38)$$

Tomemos então:

$$n T_\mu \gamma_5 = T_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_\mu = T_\mu \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu = - T_\mu \gamma_5 \gamma_\mu \gamma^\mu = - n T_\mu \gamma_5$$

Então:

$$T_\mu \gamma_5 = 0 \quad (2.39)$$

o qual é exatamente o resultado (2.37) em 4-dimensões. Calculemos agora  $T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b$ :

$$\begin{aligned}
 n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b &= T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma^\mu \gamma_\mu = T_{\kappa} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma^\mu = - T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_a \gamma_b \gamma^\mu = \\
 &= - T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_a \gamma_b \gamma^\mu = - T_{\kappa} \gamma_5 (2g_{\mu a} - \gamma_a \gamma_\mu) \gamma_b \gamma^\mu = \\
 &= - 2 T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_b \gamma_a + T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_\mu \gamma_b \gamma^\mu = \\
 &= 2 T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b + T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a (2g_{\mu b} - \gamma_b \gamma_\mu) \gamma^\mu = \\
 &= 4 T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b - n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b
 \end{aligned}$$

Então tomando o primeiro e o último membro da identidade acima obtemos:

$$2 (n-2) T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b = 0 \quad (2.40)$$

Resultado que é consistente com aquele obtido em (1.37) a 4-dimensões. Repetindo o mesmo procedimento usado para calcular (2.39) e (2.40) podemos demonstrar (ver apêndice ao capítulo demonstração (A.3)) que:

$$n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 8 T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d - n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d$$

o que nos dá:

$$2(n-4) T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 0 \quad (2.41)$$

Observemos que este resultado nos aponta uma contradição que é proveniente da escolha que fizemos de  $\gamma_5$  em  $n$ -dimensão, pois para  $n \neq 4$  temos que escolher:

$$T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 0$$

E fazendo o limite  $n \rightarrow 4$  para o espaço físico não obteremos o resultado em 4-dimensões, apresentado em (2.37) que  $\bar{\epsilon} T_n \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \neq 0$ .

Se olharmos para trás vemos que para chegarmos a essa contradição é somente necessário escolher  $\gamma_5$  em  $n$ -dimensão tal que  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ .

Assim, a fim de tentar superar esse problema vamos escolher  $\gamma_5$  tal que:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_5\} &= 0 && \text{se } n = 4 \quad \text{e,} \\ \{\gamma_\mu, \gamma_5\} &\neq 0 && \text{se } n \neq 4 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Chamamos o resultado desse anticomutador de evanescente pois se anula (some) para o espaço físico.

Devido ao importante papel que esses termos evanescentes vão desempenhar em teorias axiais daremos agora um outro exemplo de um termo evanescente que será utilizado num cálculo posterior.

Da álgebra de Dirac em  $n$ -dimensão podemos ver que:

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha \gamma_\mu) \gamma^\mu = (2-n) \gamma_\alpha \quad (2.43)$$

onde usamos (2.38). Com o mesmo procedimento podemos calcular que:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu &= (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\mu \gamma_\mu) \gamma_\beta \gamma^\mu = 2\gamma_\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\mu = \\ &= 2(2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) - (2-n) \gamma_\alpha \gamma_\beta \end{aligned}$$

Então:

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4g_{\alpha\beta} + (n-4) \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (2.44)$$

onde usamos o resultado (2.43). A relação (2.44) mostra mais um exemplo de um termo evanescente, isto é, que desaparece para  $n=4$ , mas que, como veremos, pode dar uma contribuição finita quando inserido numa integral divergente.

Vamos agora escolher  $\gamma_5$  em  $n$ -dimensão como dado na referência (12):

$$\gamma_5 = \alpha \tau^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_4} \quad (2.45)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 0, 1, \dots, n-1$  e  $\tau^{\alpha_1 \dots \alpha_4}$  é um tensor totalmente antissimétrico em  $n$ -dimensão de tal maneira que quando  $n = 4$  obtemos:

$$\tau^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$$

onde  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$  é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita de 4 índices.

Com essa escolha de  $\gamma_5$  podemos provar (ver apêndice ao capítulo demonstrações (A.4), (A.5) e (A.6)) que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} \neq 0 \quad (n \neq 4) \quad (2.46)$$

$$T_\mu \gamma_5 \gamma_a \gamma_b = 0 \quad (2.47)$$

$$T_\mu \gamma_5 \gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{2i+1}} = 0 \quad i = \text{inteiro} \quad (2.48)$$

Destas relações e da algebra de Dirac podemos também, deduzir (ver apêndice ao capítulo demonstrações (A.7), (A.8), (A.9) e (A.10)) que:

$$T_{\mu} \gamma_5 = 0 \quad T_{\mu} \{ \gamma_5, \gamma_{\alpha} \} \gamma_a \gamma_b \gamma_c = 0 \quad (2.49)$$

e que:

$$T_{\mu} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \quad e \quad T_{\mu} \{ \gamma_5, \gamma_{\alpha} \} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \quad (2.50)$$

são completamente antissimétrico nos índices latinos. Assim, como era esperado a escolha de  $\gamma_5$ , em  $n$ -dimensão, não anticomutante, mas tendo  $\{ \gamma_{\mu}, \gamma_5 \}$  evanescente nos livra da contradição descrita acima para  $\gamma_5$  anticomutante.

Esta escolha aparentemente despreziosa de  $\gamma_5$ , como tendo  $\{ \gamma_{\mu}, \gamma_5 \}$  evanescente, introduz mudanças sensíveis se quisermos utilizar o método de Regularização Dimensional a fim de renormalizar uma teoria que contenha acoplamentos axiais.

Do que já discutimos anteriormente podemos ver que, do fato de podermos escolher um  $n$ -dimensão  $\{ \gamma_{\mu}, \gamma_{\nu} \} = 2 g_{\mu\nu} 1$  sem a necessidade de adicionarmos termos evanescentes a essa identidade, segue-se que teremos a equação de Dirac de forma invariante num espaço  $n$ -dimensional.

Agora para a derivação da equação de movimento (ou lagrangeano), em  $n$ -dimensão, de teorias nas quais, desempenham um papel importante o anticomutador de  $\gamma_{\mu}$  com  $\gamma_5$ , como é o caso da teoria de Weinberg-Salam, teremos além do lagrangeano (ou equação de movimento) usual em 4-dimensões, em  $n$ -dimensão termos evanescentes provenientes do fato de que o anticomutador de  $\gamma_{\mu}$  com  $\gamma_5$  é evanescente.

Então, a fim de renormalizar uma teoria com acoplamentos axiais, por exemplo, a teoria de Weinberg-Salam, através do

método de Regularização Dimensional teremos que rederivar o lagrangeano correspondente em  $n$ -dimensão, e isto é exatamente o que faremos no capítulo III.

### 2.5 - Cálculo da Anomalia de Adler por Regularização Dimensional

A fim de mostrar a importância dos termos evanescentes vamos fechar esse capítulo mostrando que somente com uma escolha, (2.46), não anticomutante de  $\gamma_5$  podemos calcular, através de termos evanescentes, o valor exato da anomalia de Adler<sup>(13)</sup> pelo método de Regularização Dimensional<sup>(9)</sup>

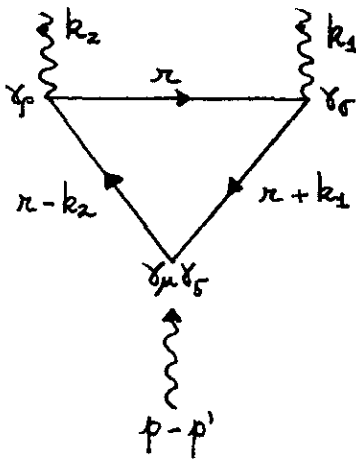


Figura 2.3: Gráfico Triangular Pseudo-vetorial

Tomemos agora a contribuição do gráfico triangular pseudo-vetorial (Figura 2.3) como dado por Adler<sup>(13)</sup>:

$$R_{\sigma\rho\mu} = -2 \int d^4 \kappa T_{\kappa} \left[ \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{(\gamma \cdot \kappa_1 + m)}{(\kappa_1^2 - m^2)} \gamma_{\sigma} \frac{(\gamma \cdot \kappa + m)}{\kappa^2 - m^2} \gamma_{\rho} \frac{(\gamma \cdot \kappa_2 + m)}{\kappa_2^2 - m^2} \right] \quad (2.51)$$

onde  $\kappa_1 = \kappa + k_1$  e  $\kappa_2 = \kappa - k_2$ . Agora para calcular essa contribuição pelo método de Regularização Dimensional, estendemos (2.51) a  $n$ -dimensão:

$$R_{\sigma\rho\mu} = -2 \int \frac{d^n \kappa}{D} T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_5 \left[ (\gamma \cdot \kappa_1 + m) \gamma_{\sigma} (\gamma \cdot \kappa + m) \gamma_{\rho} (\gamma \cdot \kappa_2 + m) \right] \quad (2.52)$$

onde  $D = (\kappa_1^2 - m^2) (\kappa_2^2 - m^2) (\kappa^2 - m^2)$ .

A fim de tomar a divergência de (2.52) multipliquemos por:

$$-k^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = \kappa_1^\mu - \kappa_2^\mu$$

O integrando da divergência de (2.52) é então o traço de:

$$\gamma \cdot \kappa_1 \gamma_5 [\ ] - \gamma \cdot \kappa_2 \gamma_5 [\ ] = \{\gamma \cdot \kappa_1, \gamma_5\} [\ ] - \gamma_5 \gamma \cdot \kappa_1 [\ ] - \gamma \cdot \kappa_2 \gamma_5 [\ ] \quad (2.53)$$

o significado de  $[\ ]$  sendo óbvio de (2.52). Agora escrevemos:

$$\gamma \cdot \kappa_1 [\ ] = m [\ ] + (\gamma \cdot \kappa_1 - m) [\ ] \quad (2.54)$$

A contribuição do segundo termo de (2.54) à divergência de (2.52) é:

$$\begin{aligned} & -2 \int d^n \kappa \frac{T_\kappa \gamma_5 (\gamma \cdot \kappa_1 - m) (\gamma \cdot \kappa_1 + m) \gamma_\sigma (\gamma \cdot \kappa + m) \gamma_\rho (\gamma \cdot \kappa_2 + m)}{(\kappa_1^2 - m^2) (\kappa_2^2 - m^2) (\kappa^2 - m^2)} = \\ & = -2 \int d^n \kappa \frac{T_\kappa \gamma_5 \gamma_\sigma (\gamma \cdot \kappa + m) \gamma_\rho (\gamma \cdot \kappa_2 + m)}{(\kappa_2^2 - m^2) (\kappa^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Podemos mostrar que essa contribuição (2.55) é nula. Se levarmos em conta as propriedades (2.47) e (2.48) vemos que:

$$T_\kappa \gamma_5 \gamma_\sigma (\gamma \cdot \kappa + m) \gamma_\rho (\gamma \cdot \kappa_2 + m) = \kappa^\mu (\kappa^\nu - k_2^\nu) T_\kappa \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \quad (2.56)$$

Agora devido a propriedade (2.50) em (2.56) obtemos que:

$$T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} (\gamma \cdot \lambda + m) \gamma_{\mu} (\gamma \cdot \lambda_2 + m) = -\lambda^{\mu} k_2^{\nu} T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu}$$

E substituindo esse último resultado em (2.55) obtemos:

$$\begin{aligned} & -2 \int d^n \lambda \frac{T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} (\gamma \cdot \lambda + m) \gamma_{\rho} (\gamma \cdot \lambda_2 + m)}{(\lambda^2 - m^2) (\lambda_2^2 - m^2)} = \\ & = 2k_2^{\nu} T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} \int d^n \lambda \frac{\lambda^{\mu}}{[(\lambda - k_2)^2 - m^2] (\lambda^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Usando agora a parametrização de Feynman, descrita em (2.5), em (2.57) obtemos:

$$\begin{aligned} & 2k_2^{\nu} T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} \int d^n \lambda \frac{\lambda^{\mu}}{[(\lambda - k_2)^2 - m^2] (\lambda^2 - m^2)} = \\ & = 2k_2^{\nu} T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} \int_0^1 dx \int d^n \lambda \frac{\lambda^{\mu}}{\{[(\lambda - k_2)^2 - m^2] x + (\lambda^2 - m^2) (1-x)\}^2} = \\ & = 2k_2^{\nu} T_{\lambda} \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} \int_0^1 dx \int d^n \lambda \frac{\lambda^{\mu}}{[(\lambda - k_2 x)^2 - a]^2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde na última passagem de (2.58) reescrevemos o denominador de uma forma mais conveniente, e o valor de "a" é:

$$a = k_2^2 x^2 - (k_2^2 - m^2) x + m^2 (1 - x)$$



Se agora fizermos uma mudança na variável de integração de (2.58)  $\kappa \rightarrow \kappa + k_2 x$ , obteremos:

$$\begin{aligned}
 & 2k_2^\nu T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \int_0^1 dx \int d^n \kappa \frac{\kappa^\mu}{\left[ (\kappa - k_2)^2 - m^2 \right] (\kappa^2 - m^2)} = \\
 & = 2k_2^\nu T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \int_0^1 dx \int d^n \kappa \frac{\kappa^\mu + k_2^\mu x}{(\kappa^2 - a)^2} = \\
 & = 2k_2^\nu k_2^\mu T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \int_0^1 x dx \int d^n \kappa \frac{1}{(\kappa^2 - a)^2} = 0 \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

onde usamos na penultima passagem de (2.59) o fato de que a integral sobre todo o espaço de uma função impar é nula e na última passagem a propriedade (2.50). Então, como prometido, mostramos que a contribuição (2.55) é nula.

Analogamente a (2.54) escrevemos:

$$\left[ \square \right] \gamma \cdot \kappa_2 = m \left[ \square \right] + \left[ \square \right] (\gamma \cdot \kappa_2 - m) \quad (2.60)$$

e agora realizando um raciocínio análogo aquele feito acima, obtemos que a contribuição do segundo termo de (2.60) é novamente nula.

Obtemos então de (2.53), (2.54) e (2.60) que:

$$k^\mu R_{\sigma\rho\mu} = 2 \int \frac{d^n \kappa}{\mathcal{D}} T_{\kappa} \{ (-2m\gamma_5 + \{\gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1\}) \left[ \square \right] \}$$

isto é,

$$k^\mu R_{\sigma\rho\mu} = -2m R_{\sigma\rho} + A_{\sigma\rho}$$

onde  $-2m R_{\sigma\rho}$  é o termo esperado pela identidade de Ward e  $A_{\sigma\rho}$  é a anomalia que é dada por:

$$A_{\sigma\rho} = 2 \int \frac{d^n \kappa}{\mathcal{D}} T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1 \} \left[ \square \right] \quad (2.61)$$

A fim de calcular (2.61), notamos que os termos de massa do traço no integrando de (2.61), devido as propriedades (2.47), (2.48) e (2.49) dão contribuição nula, então obtemos:

$$T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1 \} \left[ \square \right] = T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1 \} \gamma \cdot \kappa_1 \gamma_{\sigma} \gamma \cdot \kappa_2 \gamma_{\rho} \gamma \cdot \kappa_2$$

E devido a propriedade (2.50) obtemos:

$$T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1 \} \left[ \square \right] = -T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa \} \gamma \cdot k_1 \gamma_{\sigma} \gamma \cdot \kappa \gamma_{\rho} \gamma \cdot k_2 \quad (2.62)$$

Agora para fazer a integração na variável  $\kappa$  nós substituímos:

$$\kappa^\mu \kappa^\nu \rightarrow \frac{\kappa^2}{n} g^{\mu\nu} \quad (2.63)$$

Então substituindo (2.63), (2.44) em (2.62) temos:

$$T_{\kappa} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \kappa_1 \} \left[ \square \right] = \frac{-2(n-4)}{n} \kappa^2 k_1^\alpha k_2^\beta T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma_\beta \quad (2.64)$$

Substituindo agora (2.64) em (2.61) obtemos para a anomalia:

$$A_{\sigma\rho} = -4 \frac{(n-4)}{n} T_{\kappa} \gamma_5 \gamma \cdot k_1 \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma \cdot k_2 \int d^n \kappa \frac{\kappa^2}{(\kappa_1^2 - m^2)(\kappa_2^2 - m^2)(\kappa^2 - m^2)} \quad (2.65)$$

Intruduzimos agora como de hábito a parametriza o de Feynman, só que nesse caso temos 3 termos no denominador:

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3} = 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \frac{1}{[D_1 x_2 + D_2 (x_1 - x_2) + D_3 (1 - x_1)]^3} \quad (2.66)$$

Então substituindo (2.66) em (2.65) e reescrevendo o denominador de uma forma adequada, obtemos:

$$A_{\sigma\rho} = -8 \frac{(n-4)}{n} T_{\mu\gamma_5\gamma\cdot k_1\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma\cdot k_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \frac{d^n \kappa \quad \kappa^2}{\{[\kappa + k_1 x_2 - k_2 (x_1 - x_2)]^2 - a\}^3} \quad (2.67)$$

onde

$$a = m^2 - x_2(1-x_2)k_1^2 - (x_1-x_2)(1-x_1+x_2)k_2^2 - 2x_2(x_1-x_2)k_1\cdot k_2$$

Façamos agora uma mudança na variável de integra o:

$$\kappa \rightarrow \kappa + k_2(x_1 - x_2) - k_1 x_2$$

obtendo:

$$A_{\sigma\rho} = \frac{-8(n-4)}{n} T_{\mu\gamma_5\gamma\cdot k_1\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma\cdot k_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int d^n \kappa \frac{[\kappa + k_2(x_1 - x_2) - k_1 x_2]^2}{(\kappa^2 - a)^3}$$

Observando que termos com potência ímpar de  $\kappa$  no numerador dão contribui o nula e passando em seguida para uma métrica Euclidea, obtemos:

$$A_{\sigma\rho} = \frac{8i(n-4)}{n} T_{\mu\gamma_5\gamma\cdot k_1\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma\cdot k_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int d^n \kappa \frac{-\kappa^2 + [k_2(x_1 - x_2) - k_1 x_2]^2}{(\kappa^2 + a)^3} \quad (2.68)$$

Usando agora a fórmula já conhecida e dada em (2.10) obtemos no limite quando  $n \rightarrow 4$  :

$$A_{\sigma\rho} = - 2i \pi^2 T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_{\cdot k_1} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma_{\cdot k_2} \quad (2.69)$$

o qual é exatamente o valor usual da anomalia.

Devemos notar que para essa dedução é essencial não anticomutar  $\gamma_5$  com  $\gamma_{\mu}$ , se anticomutasse teríamos um valor nulo para a anomalia de Adler.

## 2.6 - UMA ESCOLHA SIMPLES EM $\gamma_5$ EM N-DIMENSÃO

Já explicamos que uma escolha geral para  $\gamma_5$  que satisfaz (2.46), isto é, um  $\gamma_5$  não anticomutante em  $n$ -dimensão é:

$$\gamma_5 = ia \tau^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}$$

$$\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.70)$$

onde  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  é um tensor totalmente antissimétrico e "a" é uma normalização para  $\gamma_5$ , tal que escolhido em particular  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  "a" é calculada de tal maneira que:

$$(\gamma_5)^2 = 1$$

A fim de fazer cálculos explícitos utilizando-se o método de Regularização Dimensional, pode ser útil escolher-se um

particular  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  em  $n$ -dimensão. Daremos agora um exemplo de uma escolha muito simples do tensor totalmente antissimétrico em  $n$ -dimensão  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$ . Escolhamos  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  tal que:

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} &= 0 \quad \text{se pelo menos um } \mu, \nu, \alpha, \beta = 4, \dots, n-1 \\ \tau^{\mu\nu\alpha\beta} &= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad \text{se} \quad \begin{aligned} \mu &= 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \\ \nu &= 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \\ \alpha &= 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \\ \beta &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita de 4 índices.

Com esta escolha de  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  dada em (2.71)  $\gamma_5$  é dado por:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad (2.72)$$

E vemos que com essa escolha (2.72) temos:

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (2.73)$$

E ainda, é evidente que, com essa escolha para  $\gamma_5$  em (2.72) que corresponde a um particular  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  dado em (2.71), no limite  $n \rightarrow 4$  obtemos o  $\gamma_5$  usado em 4-dimensões.

Vamos agora por curiosidade calcular o valor, evanescente, do anticomutador  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\}$  para o  $\gamma_5$  escolhido em (2.73). É evidente com essa escolha que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu = 0, 1, 2, 3 \\ 2\gamma_\mu \gamma_5 = 2\gamma_5 \gamma_\mu & \text{se } \mu = 4, 5, 6, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.74)$$

E ainda:

$$\tilde{\gamma}_\mu = \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu = 0, 1, 2, 3 \\ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 = \gamma_\mu & \text{se } \mu = 4, 5, 6, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.75)$$

APÊNDICE AO CAPÍTULO II

DEMONSTRAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS ÚTEIS EM N-DIMENSÃO

$$(A.1) \quad T_{\mu} \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \dots \gamma_{\alpha_{2i+1}} = 0 \quad \text{onde } i = \text{inteiro} \quad (a.1)$$

Em geral para a demonstração desse resultado em 4 dimensões usa-se o fato de que  $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$ . A fim de demonstrar (a.1) em  $n$ -dimensão, como  $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} \neq 0$ , usamos um procedimento alternativo. Já sabemos que:

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma^{\mu} = (2-n) \gamma_{\alpha} \quad e \quad (2.43)$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma^{\mu} = 4g_{\alpha\beta} + (n-4) \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \quad (2.44)$$

Demonstremos agora que:

$$\gamma_{\beta} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma^{\beta} = 4g_{\alpha\mu} \gamma_{\nu} - 4g_{\nu\alpha} \gamma_{\mu} - 4g_{\nu\mu} \gamma_{\alpha} + (6-n) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \quad (a.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\beta} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma^{\beta} &= (2g_{\beta\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\beta}) \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma^{\beta} = \\ &= 2\gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \gamma^{\beta} = \\ &= 2\gamma_{\nu} (2g_{\alpha\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha}) - \gamma_{\mu} \left[ 4g_{\nu\alpha} + (n-4) \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \right] = \\ &= 4g_{\alpha\mu} \gamma_{\nu} - 2\gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} - 4g_{\nu\alpha} \gamma_{\mu} - (n-4) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} = \\ &= 4g_{\alpha\mu} \gamma_{\nu} - 4g_{\nu\alpha} \gamma_{\mu} - 2(2g_{\nu\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}) \gamma_{\alpha} - (n-4) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} = \\ &= 4g_{\alpha\mu} \gamma_{\nu} - 4g_{\nu\alpha} \gamma_{\mu} - 4g_{\nu\mu} \gamma_{\alpha} + 2\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} - (n-4) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} = \end{aligned}$$

$$= 4g_{\alpha\mu}\gamma_\nu - 4g_{\nu\alpha}\gamma_\mu - 4g_{\nu\mu}\gamma_\alpha + (6-n) \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha$$

o qual  $\bar{e}$  o resultado (a.2).

Agora usemos (2.43) para demonstrar (a.1) para  $i = 0$ :

$$n T_{\kappa}\gamma_\alpha = T_{\kappa}\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu = T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu = (2-n) T_{\kappa}\gamma_\alpha$$

$$\Rightarrow 2(n-1) T_{\kappa}\gamma_\alpha = 0 \Rightarrow T_{\kappa}\gamma_\alpha = 0$$

Usemos (a.2) para demonstrar (a.1) para  $i = 1$ :

$$n T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma^\beta\gamma_\beta = T_{\kappa}\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma^\beta = (6-n) T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha$$

$$\Rightarrow 2(n-3) T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = 0 \Rightarrow T_{\kappa}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = 0$$

Assim vemos que como sempre podemos expressar o resultado da contração de um número ímpar  $(2i + 1)$  de matrizes  $\gamma$ , como a soma do produto do tensor métrico vezes um número ímpar  $(2i - 1)$  de matrizes  $\gamma$  somado com todas as combinações possíveis e somado ainda, com um número ímpar  $(2i + 1)$  de matrizes  $\gamma$  de coeficiente  $(4i + 2 - n)$ , obtemos:

$$n T_{\kappa}\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2i+1}} = (4i + 2 - n) T_{\kappa}\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2i+1}}$$

$$\Rightarrow 2(n - 2i - 1) T_{\kappa}\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2i+1}} = 0$$

Então:

$$T_{\kappa}\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2i+1}} = 0 \quad i = \text{inteiro} \quad \text{C.Q.D.}$$



$$(A.2) \quad T_{\kappa} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} = d(n) (g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} - g_{\beta\alpha} g_{\mu\nu}) \quad (a.3)$$

$$\begin{aligned} T_{\kappa} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} &= T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} = T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} (2g_{\nu\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu}) = \\ &= 2g_{\nu\alpha} T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} - T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu} = 2d(n) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - T_{\kappa} \gamma_{\mu} (g_{\beta\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}) \gamma_{\nu} = \\ &= 2d(n) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - 2g_{\beta\alpha} T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} = \\ &= 2d(n) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - 2d(n) g_{\beta\alpha} g_{\mu\nu} + T_{\kappa} (2g_{\mu\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu}) \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} = \\ &= 2d(n) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - 2d(n) g_{\beta\alpha} g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\alpha} T_{\kappa} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} - T_{\kappa} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} \\ &=> \end{aligned}$$

$$T_{\kappa} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} \gamma_{\beta} \gamma_{\nu} = d(n) (g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} - g_{\beta\alpha} g_{\mu\nu}) \quad C.Q.D.$$

$$(A.3) \quad \text{Se } \{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0 \text{ (em } n\text{-dimensão)} \Rightarrow T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 0 \quad (a.4)$$

$$\begin{aligned} n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d &= T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma^{\mu} \gamma_{\mu} = T_{\kappa} \gamma_{\mu} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma^{\mu} = \\ &= - T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_{\mu} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma^{\mu} = - T_{\kappa} \gamma_5 (2g_{\mu a} - \gamma_a \gamma_{\mu}) \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma^{\mu} = \\ &= - 2T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_a + T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_{\mu} \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma^{\mu} \end{aligned}$$

usando agora o resultado (a.2) para o segundo traço e lembrando do resultado (2.40) já demonstrado, obtemos:

$$n T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 2T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d + (6-n) T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d$$

$$\Rightarrow 2(n-4) T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 0$$

$$\text{Então: } T_{\kappa} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d = 0 \quad C.Q.D.$$

$$(A.4) \{ \gamma_\alpha, \gamma_5 \} \neq 0 \quad n \neq 4 \quad \text{onde} \quad \gamma_5 = N \tau^{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4}$$

Podemos separar a soma na definição  $\gamma_5$  numa soma onde o primeiro termo contém um índice bem definido " $\alpha$ " e o outro termo não, isto é:

$$\gamma_5 = N \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_4 \\ \text{pelo menos} \\ \text{um } \mu_i = \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} + N \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_4 \\ \text{todos } \mu_i \neq \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4}$$

ou:

$$\gamma_5 \equiv \gamma_5^{(=\alpha)} + \gamma_5^{(\neq\alpha)} \quad \text{onde} \quad \gamma_5^{(\neq\alpha)} = N \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_4 \\ \text{todos } \mu_i \neq \alpha}} \tau^{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4}$$

$$\Rightarrow \{ \gamma_5, \gamma_\alpha \} = \{ \gamma_5^{(=\alpha)}, \gamma_\alpha \} + \{ \gamma_5^{(\neq\alpha)}, \gamma_\alpha \}$$

Vemos claramente que o 1º termo é nulo e o segundo termo é diferente de zero, o termo evanescente, então:

$$\{ \gamma_5, \gamma_\alpha \} = 2\gamma_\alpha \gamma_5^{(\neq\alpha)} = 2\gamma_5^{(\neq\alpha)} \gamma_\alpha \quad \text{C.Q.D.}$$

$$(A.5) \quad T_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b = 0$$

$$T_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b = N \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_a \gamma_b = N \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_a \gamma_b \gamma_\mu =$$

$$= N \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_a (2g_{b\mu} - \gamma_\mu \gamma_b) =$$

$$= 2N g_{b\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_a - N \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_a \gamma_\mu \gamma_b =$$

$$= 2Ng_{b\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_a} - N\tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta} (2g_{a\mu} - \gamma_\mu\gamma_a)\gamma_b =$$

$$= 2Ng_{b\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_a} - 2Ng_{a\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_b} +$$

$$+ N\tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_\mu\gamma_a\gamma_b}$$

$$\Rightarrow T_{\kappa\gamma_5\gamma_a\gamma_b} = Ng_{b\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_a} - Ng_{a\mu} \tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_b}$$

mas  $T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_a} = d(n) (g_{\nu\alpha}g_{\beta a} + g_{\nu a}g_{\alpha\beta} - g_{\nu\beta}g_{\alpha a})$

e,  $T_{\kappa\gamma\nu\gamma\alpha\gamma\beta\gamma_b} = d(n) (g_{\nu\alpha}g_{\beta b} + g_{\nu b}g_{\alpha\beta} - g_{\nu\beta}g_{\alpha b})$

Então como  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  é um tensor totalmente antissimétrico:

$$T_{\kappa\gamma_5\gamma_a\gamma_b} = 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

$$(A.6) \quad T_{\kappa\gamma_5\gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{2i+1}}} = 0 \quad i = \text{inteiro}$$

$$T_{\kappa\gamma_5\gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{2i+1}}} = N\tau^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\kappa\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_{a_1} \dots \gamma_{a_{2i+1}}} = 0$$

pois já provamos que o traço de um número ímpar de matrizes  $\gamma$  é nulo C.Q.D.

$$(A.7) \quad T_{\kappa\gamma_5} = 0$$

$$T_{\kappa\gamma_5} = N\tau^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} T_{\kappa\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}} = N\tau^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} T_{\kappa\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_1}} =$$

$$= - N_T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_1} T_{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_1} = - T_{\mu} \gamma_5$$

$$\Rightarrow T_{\mu} \gamma_5 = 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

$$(A.8) \quad T_{\mu} \{\gamma_5, \gamma_{\alpha}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c = 0$$

$$T_{\mu} \{\gamma_5, \gamma_{\alpha}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c = N_T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4}, \gamma_{\alpha}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c =$$

$$= N_T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} (T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\alpha} \gamma_a \gamma_b \gamma_c + T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_a \gamma_b \gamma_c) =$$

$$= N_T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} (-T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_{\alpha} + T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_{\alpha}) = 0$$

$$\Rightarrow T_{\mu} \{\gamma_5, \gamma_{\alpha}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c = 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

(A.9)  $T_{\mu} \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d$  é antissimétrico nos índices latinos.

O fato que esse traço é antissimétrico nos índices latinos é imediato por observação direta, o que é necessário demonstrar é que este é diferente de zero. Se fizermos um raciocínio análogo a (A.3), mas só que nesse caso como  $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} \neq 0$ , poderemos provar que este traço é diferente de zero.

$$(A.10) \quad T_{\mu} \{\gamma_5, \gamma_{\mu}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e$$

por (A.4):

$$T_{\mu} \{\gamma_5, \gamma_{\mu}\} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e = 2N \sum_{\substack{\alpha_i \\ \text{todos } \alpha_i \neq \mu}} \tau^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} T_{\mu} \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_4} \gamma_{\mu} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e$$

Agora como sabemos que o traço de matrizes  $\gamma$  é dado como um produto do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , vemos que existe um número restrito de possibilidades de construir a expressão acima com  $\tau \neq 0$ , pois  $\tau$  é antissimétrico, e estas são diferentes entre si, de tal maneira que, a soma é diferente de zero. Então:

$$T_{\mu} \{ \gamma_5, \gamma_{\mu} \} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \neq 0$$

Ainda, esse traço é por observação direta, totalmente antissimétrico nos índices latinos. C.Q.D.

## CAPÍTULO III

### *O LAGRANGEANO DE WEINBERG-SALAM EM N-DIMENSÃO*

#### 3.1 - *INTRODUÇÃO*

Como vimos no capítulo anterior para aplicar o método de Regularização Dimensional na renormalização de uma teoria, temos que saber como estender a  $n$ -dimensão os objetos que aparecem em 4-dimensões de tal maneira que não tenhamos inconsistências na teoria.

Vimos, ainda, que para  $\gamma_\mu$ ,  $p_\mu$  e os espinores a extensão é natural e não apresenta problemas. No entanto, quando temos a matriz  $\gamma_5$ , temos que dar uma prescrição em  $n$ -dimensão de tal modo que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} \neq 0 \quad (\text{evanescente}) \quad (3.1)$$

Como a forma do anticomutador de  $\gamma_\mu$  com  $\gamma_5$  em  $n$ -dimensão é diferente da que encontramos em 4-dimensões, e esta forma é importante para a derivação do lagrangeano de Weinberg-Salam, teremos que rederivar este lagrangeano em  $n$ -dimensão. O objetivo principal desse capítulo é o de calcularmos os termos evanescentes extras, que deverão aparecer no lagrangeano de Weinberg-Salam  $n$ -dimensional, proveniente da escolha (3.1).

#### 3.2 - *CONSTRUÇÃO DO LAGRANGEANO DE WEINBERG-SALAM N-DIMENSIONAL*

Já explicamos no capítulo anterior que uma escolha ge-

ral para  $\gamma_5$  que satisfaz (3.1)  $\bar{e}$ :

$$\gamma_5 = i a \tau^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (3.2)$$

$$\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1$$

onde  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$   $\bar{e}$  um tensor totalmente antissimétrico e "a"  $\bar{e}$  uma normalização de  $\gamma_5$  tal que escolhido um particular  $\tau^{\mu\nu\alpha\beta}$  "a"  $\bar{e}$  calculado de maneira que:

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (3.3)$$

Com (3.2) e (3.3) podemos mostrar sem dificuldade que:

$$\left( \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right)^2 = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}; \quad (\gamma_5)^\dagger = -\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 \quad (3.4)$$

O lagrangeano de campos espinoriais, sem interação e de massa nula  $\bar{e}$ :

$$L = \bar{\psi} i \gamma \cdot \partial \psi \quad (3.5)$$

Definindo como no capítulo I:

$$\psi \equiv \psi_L + \psi_R$$

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi; \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \quad (3.6)$$

Substituindo esses novos campos (3.6) no lagrangeano (3.5):

$$L = \bar{\psi}_L i \gamma \cdot \partial \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma \cdot \partial \psi_R + \bar{\psi}_R i \gamma \cdot \partial \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma \cdot \partial \psi_R \quad (3.7)$$

onde o segundo e terceiro termo de (3.7) são evanescentes, isto  $\bar{e}$ , não existem quando  $n = 4$ .

Em 4-dimensões para mostrar que  $\nu_L$  e  $\nu_R$  tem, respectivamente, helicidade esquerda (ou negativa) e direita (ou positiva), precisamos usar explicitamente que  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ . Se usamos ao invés desta a relação (3.1), vemos que  $\nu_L$  e  $\nu_R$  não são auto-estados do operador helicidade. Então em  $n$ -dimensão, não poderemos eliminar o campo  $\nu_R$  baseado no fato experimental de que não é observado na natureza neutrinos com helicidade direita.

Devemos então escrever a parte cinética do lagrangeano do neutrino e do elétron como:

$$L_{\text{cine}} = \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{\nu}_R i\gamma \cdot \partial \nu_R + \bar{\nu}_R i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_R + \\ + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_L + \bar{e}_R i\gamma \cdot \partial e_R + \bar{e}_R i\gamma \cdot \partial e_L + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_R \quad (3.8)$$

Onde os campos  $e_L$  e  $e_R$  são definidos da mesma maneira do que no caso do neutrino e ainda, analogamente ao caso do neutrino os termos desse lagrangeano que contêm os campos  $e_L$  e  $e_R$  misturados são evanescentes.

O termo de massa eletrônico em função dos campos direito e esquerdo fica:

$$m\bar{e}e = m(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (3.9)$$

Definamos agora o isodoublete e os isosingletes:

$$L = \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}; \quad R_e \equiv e_R; \quad R_\nu \equiv \nu_R \quad (3.10)$$

Se escrevemos agora o lagrangeano cinético mais a parte



massiva como função desses novos campos definidos em (3.10) obtemos:

$$\begin{aligned}
 L = & \bar{L} i\gamma \cdot \partial L + \bar{R}_e i\gamma \cdot \partial R_e + \bar{R}_\nu i\gamma \cdot \partial R_\nu + \bar{R}_e i\gamma \cdot \partial [(01)L] + \\
 & + \bar{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i\gamma \cdot \partial R_e + \bar{R}_\nu i\gamma \cdot \partial [(10)L] + \bar{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i\gamma \cdot \partial R_\nu + \\
 & + m \bar{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R_e + m \bar{R}_e (01) L
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde vemos que os termos evanescentes são o quarto, quinto, sexto e sétimo termo do lagrangeano (3.11).

A fim de gerar massa para os campos de gauge e para o elétron por um mecanismo análogo ao de Higgs, fazamos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \rightarrow \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Então:

$$\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \phi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

onde  $\phi'_1$  e  $\phi'_2$  são determinados levando-se em conta que:

$$\phi^\dagger \phi' = \phi'^\dagger \phi = 0 \tag{3.14}$$

e que  $\phi$  e  $\phi'$  tem a mesma norma, isto é,  $\phi^\dagger \phi = \phi'^\dagger \phi'$ .

Poderíamos escolher dois campos diferentes mas teríamos com isto, uma complicação adicional desnecessária, pois no final teríamos que escolher esses campos de tal forma que nos reproduzisse o lagrangeano físico. Assim é mais fácil escolher desde o princípio um só campo e veremos que no final obteremos o lagrangeano desejado.

Escolhamos para esse campo um lagrangeano do tipo  $\lambda\phi^4$ :

$$L_\phi = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.15)$$

Assim o lagrangeano completo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} L = & \bar{L} i\gamma \cdot \partial L + \bar{R}_e i\gamma \cdot \partial R_e + \bar{R}_v i\gamma \cdot \partial R_v + \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot \partial (\phi R_e) + \right. \\ & + a \bar{R}_e \phi^\dagger i\gamma \cdot \partial L + b \bar{L} \phi i\gamma \cdot \partial R_e + b \bar{R}_e i\gamma \cdot \partial (\phi^\dagger L) \left. \right] + \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot \partial (\phi' R_v) + \right. \\ & + a \bar{R}_v \phi'^\dagger i\gamma \cdot \partial L + b \bar{L} \phi' i\gamma \cdot \partial R_v + b \bar{R}_v i\gamma \cdot \partial (\phi'^\dagger L) \left. \right] + \\ & + G \left[ \bar{L} \phi R_e + \bar{R}_e \phi^\dagger L \right] + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.16) \end{aligned}$$

Em relação aos termos evanescentes entre colchetes em (3.16) existem duas possibilidades distintas de se escolher termos hermiteanos envolvendo L,  $\phi$  e R. Nós assumimos em (3.16) que para uma possibilidade a constante de acoplamento fica multiplicada por "a" e para a outra, a constante de acoplamento fica multiplicada por "b". Faremos de aqui por diante os cálculos assu-

mando que esses distintos termos são identicamente prováveis, isto é,  $a = 1$  e  $b=1$  e no final deste capítulo, seção 3.4, discutiremos o que seria mudado quando assumimos  $a \neq b$ .

Antes de prosseguirmos na construção do lagrangeano  $n$ -dimensional, vamos examinar o que acontece a  $\phi'$  quando aplicamos a  $\phi$  uma transformação de gauge:

$$\phi \rightarrow \phi_u = u\phi \quad (3.17)$$

Como nesta nova gauge queremos manter (3.14)  $\phi'$  deverá também ser transformado a  $\phi'_u$ , tal que:

$$\phi' \rightarrow \phi'_{u'} = u'\phi' \quad (3.18)$$

mas como:

$$\phi_u^\dagger \phi'_{u'} = \phi^\dagger u^{-1} u' \phi' = 0 \Rightarrow u' = e^{\alpha} u$$

então se fazemos  $\alpha = i\beta$  teremos como conclusão:

$$\phi_u = u\phi \Rightarrow \phi'_{u'} = e^{i\beta} u\phi' \quad (3.19)$$

Podemos ver que este lagrangeano (3.16) é invariante perante a seguinte transformação do  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} / 2} L \\ \phi &\rightarrow e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} / 2} \phi \\ R_e &\rightarrow R_e \\ R_v &\rightarrow R_v \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $\tau^i$  são as matrizes de Pauli. Combinada com:

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow e^{i\beta/2} L \\
 \phi &\rightarrow e^{-i\beta/2} \phi \\
 R_e &\rightarrow e^{i\beta} R_e \\
 R_v &\rightarrow R_v
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

que são as transformações de fase. Temos portanto, invariância perante o produto direto  $SU(2) \times U(1)$ .

Deve ser notado entretanto, que a transformação  $U$  da expressão em (3.19) de acordo com (3.20) e (3.21) é:

$$U = e^{-i\beta/2} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}/2} \tag{3.22}$$

Então, perante as transformações (3.20) e (3.21), de acordo com (3.19),  $\phi'$  é transformado em:

$$\phi' \rightarrow e^{i\beta/2} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}/2} \phi' \tag{3.23}$$

E, sô levando em conta isto que o lagrangeano (3.16) mantém-se invariante.

Estendemos agora a invariância considerada para o caso de invariância local. Isso implica na introdução de quatro mésons vetoriais, três correspondentes a um isovetor  $\vec{A}_\mu$  e um isoescalar  $B_\mu$ . O lagrangeano total invariante de gauge se obterá mediante a troca:

$$\partial_\mu L \rightarrow \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) L \equiv D_\mu L$$

$$\partial_\mu R_e \rightarrow (\partial_\mu - ig' B_\mu) R_e \equiv D_\mu R_e$$

$$\partial_\mu R_\nu \rightarrow \partial_\mu R_\nu \equiv \mathcal{D}_\mu R_\nu$$

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \left[ \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu \right] \phi \equiv \mathcal{D}_\mu \phi$$

$$\partial_\mu (\phi R_e) \rightarrow \left[ \partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right] (\phi R_e) \equiv \mathcal{D}_\mu (\phi R_e)$$

$$\partial_\mu (\phi^\dagger L) \rightarrow (\partial_\mu - ig' B_\mu) (\phi^\dagger L) \equiv \mathcal{D}_\mu (\phi^\dagger L)$$

$$\partial_\mu (\phi' R_\nu) \rightarrow (\partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu) (\phi' R_\nu) \equiv \mathcal{D}_\mu (\phi' R_\nu)$$

$$\partial_\mu (\phi'^\dagger L) \rightarrow \partial_\mu (\phi'^\dagger L) \equiv \mathcal{D}_\mu (\phi'^\dagger L) \quad (3.24)$$

$$\text{onde,} \quad A_\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} = A_\mu^a \tau^a \quad (3.25)$$

Introduzindo agora o lagrangeano livre correspondendo aos campos  $\vec{A}_\mu$  e  $B_\mu$ , o lagrangeano total invariante perante transformações de gauge do segundo tipo com grupo de simetria do  $SU(2) \times U(1)$ , é:

$$\begin{aligned} L = & \bar{L} i\gamma \cdot \mathcal{D}L + \bar{R}_e i\gamma \cdot \mathcal{D}R_e + \bar{R}_\nu i\gamma \cdot \partial R_\nu + \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi R_e) + \right. \\ & \left. + \bar{R}_e \phi^\dagger i\gamma \cdot \mathcal{D}L + \bar{L} \phi i\gamma \cdot \mathcal{D}R_e + \bar{R}_e i\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi^\dagger L) \right] + \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi' R_\nu) + \right. \\ & \left. + \bar{R}_\nu \phi'^\dagger i\gamma \cdot \mathcal{D}L + \bar{L} \phi' i\gamma \cdot \partial R_\nu + \bar{R}_\nu i\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi'^\dagger L) \right] + G (\bar{L} \phi R_e + \bar{R}_e \phi^\dagger L) + \\ & + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\rightarrow G^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os termos do lagrangeano (3.26) que aparecem o neutri-

no direito são:

$$\bar{R}_V i\gamma \cdot \partial R_V \quad e,$$

$$\frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot \partial (\phi' R_V) + \bar{R}_V \phi'^{\dagger} i\gamma \cdot \partial L + \bar{L} \phi' i\gamma \cdot \partial R_V + \bar{R}_V i\gamma \cdot \partial (\phi'^{\dagger} L) \right]$$

Vemos que o segundo termo  $\bar{e}$  evanescente e o primeiro termo, que não  $\bar{e}$  evanescente,  $\bar{e}$  cinético.

Escolhamos para o campo  $\phi$  um vácuo conveniente:

$$|\phi_0\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \rightarrow \phi_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Então de (3.14):

$$|\phi'_0\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \rightarrow \phi'_0 = \frac{\lambda e^{-i\beta/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Vamos escolher por conveniência o campo  $\phi$  como função de campos reais com valor esperado do vácuo nulo:

$$\phi = \phi_0 + \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Vemos que a fim de satisfazer (3.14) uma escolha possível de  $\phi'$   $\bar{e}$ :

$$\phi' = \phi'_0 + e^{-i\beta/2} \begin{pmatrix} \xi_1 - i\xi_2 \\ -\psi_1 + i\psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Podemos mostrar sem dificuldade (ver apêndice ao capítulo demonstração B.I) que:

$$\phi = \frac{e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \quad e, \quad \phi' = \frac{e^{-i\beta/2} e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}/\lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Façamos agora a transformação de gauge:

$$\phi \rightarrow e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}/\lambda} \phi \quad (3.32)$$

Vemos de (3.22) e (3.23) que segundo essa transformação (3.32)  $\phi'$  é transformado por:

$$\phi' \rightarrow e^{i\beta/2} e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}/\lambda} \phi' \quad (3.33)$$

Assim na gauge dada por (3.32), obtemos:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \quad e, \quad \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Passamos agora a analisar os termos que aparecem no 1a grangeano (3.26). A massa do elétron aparece do termo:

$$\begin{aligned} G (\bar{L}\phi R_e + \bar{R}_e \phi^\dagger L) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} e_{\nu} + \bar{e}_{\nu} (\lambda + \xi) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) (\bar{e}_L e_{\nu} + \bar{e}_{\nu} e_L) = \frac{G}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \bar{e} e \end{aligned} \quad (3.35)$$

Então obtemos, além do termo  $\bar{e} \xi e$ , para a massa do elétron:

$$m = \frac{G\lambda}{\sqrt{2}} \quad (\text{ver fórmula (1.75)}) \quad (3.36)$$

Vejamos se este lagrangeano  $n$ -dimensional introduz alguma modificação na massa dos bosons vetoriais que mediam as interações fracas e eletromagnéticas. Para isto vamos analisar o termo,  $(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)$ .

Se redefinirmos, como em 4-dimensões, novos campos vetoriais em função dos antigos como:

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ Z_\mu &= \frac{gA_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv (\text{Sen } \theta_w) B_\mu + (\text{Cos } \theta_w) A_\mu^3 \\ A_\mu &= \frac{gB_\mu - g'A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv (\text{Cos } \theta_w) B_\mu - (\text{Sen } \theta_w) A_\mu^3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Obtemos usando (3.24), (3.34) e (3.37):

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{(\lambda + \xi)}{8} \left[ 2g^2 W_\mu^* W^\mu + (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu \right] \quad (3.38)$$

E de (3.38) deduzimos que:

$$M_W = \frac{\lambda g}{2}; \quad M_Z = \frac{\lambda}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}; \quad M_A = 0 \quad (3.39)$$

que são os mesmos resultados obtidos em 4-dimensões (veja fórmulas (1.81) e (1.82)).

Vamos estudar agora os três primeiros termos do lagran



geano (3.26):

$$\begin{aligned} \bar{L}i\gamma.DL + \bar{R}_e i\gamma.DR_e + \bar{R}_\nu i\gamma.\partial R_\nu &= \bar{L}i\gamma.\partial L + \\ + \frac{1}{2} \bar{L}\gamma^\mu (gA_\mu + g'B_\mu)L + \bar{R}_e i\gamma.\partial R_e + \bar{R}_e g'\gamma.BR_e + \bar{R}_\nu i\gamma.\partial R_\nu \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mas podemos mostrar sem dificuldade que:

$$\frac{1}{2} \gamma^\mu (gA_\mu + g'B_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g'^2 + g^2}}{g'^2 + g^2} \gamma.Z & \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma.W \\ \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma.W^* & \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \gamma.Z + \frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \gamma.A \end{pmatrix}$$

e,

$$g'\gamma.B = \frac{g'^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \gamma.Z + \frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \gamma.A \quad (3.41)$$

Substituindo os resultados (3.41) em (3.40) chegamos a:

$$\begin{aligned} \bar{L}i\gamma.DL + \bar{R}_e i\gamma.DR_e + \bar{R}_\nu i\gamma.\partial R_\nu &= \bar{L}i\gamma.\partial L + \bar{R}_e i\gamma.\partial R_e + \\ + \bar{R}_\nu i\gamma.\partial R_\nu + \frac{\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} \bar{\nu}_L \gamma.Z \nu_L + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma.W^* \nu_L + \bar{\nu}_L \gamma.W e_L) + \\ + \frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} (\bar{e}_L \gamma.A e_L + \bar{e}_\nu \gamma.A e_\nu) + \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \bar{e}_L \gamma.Z e_L + \end{aligned}$$

$$+ \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_\kappa \quad (3.42)$$

Vamos passar agora à análise dos termos puramente evanescentes, isto é, aqueles termos evanescentes obtidos durante a construção do lagrangeano. Tomemos primeiramente, o termo evanescente:

$$\frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot D(\Phi R_e) + \bar{R}_e \Phi^\dagger i\gamma \cdot DL + \bar{L} \Phi i\gamma \cdot DR_e + \bar{R}_e i\gamma \cdot D(\Phi^\dagger L) \right] \quad (3.43)$$

Por comodidade vamos calcular (3.43) por partes. Tomemos o termo:

$$\begin{aligned} \bar{L} \Phi i\gamma^\mu D_\mu R_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{v}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_\kappa = \\ &= \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \left[ \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} e_L \gamma \cdot A e_\kappa \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde usamos a relação (3.41). O termo:

$$\begin{aligned} \bar{R}_e i\gamma \cdot D(\Phi^\dagger L) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa \gamma^\mu (i\partial_\mu + g' B_\mu) \begin{bmatrix} (0 \quad \lambda + \xi) \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_L \right] + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \left[ \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot A e_L \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde usamos a segunda relação de (3.41). O termo:

$$\begin{aligned}
 \bar{L} i\gamma \cdot D(\phi R_e) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{v}_L \bar{e}_L) \gamma^\mu \left( i\partial_\mu + \frac{g}{2} A_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{bmatrix} e_\kappa = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{v}_L \gamma \cdot W e_\kappa + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_\kappa \right] + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \xi) \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot A e_\kappa \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

onde usamos a primeira das relações (3.41). O termo:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_e \phi^\dagger i\gamma \cdot DL &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa (0 \ \lambda + \xi) \gamma^\mu \left( i\partial_\mu + \frac{g}{2} A_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot W^* v_L + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L + \\
 &+ \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot A e_L \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Se somamos (3.44), (3.45), (3.46) e (3.47), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i\gamma \cdot D(\phi R_e) + \bar{R}_e \phi^\dagger i\gamma \cdot DL + \bar{L} \phi i\gamma \cdot DR_e + \bar{R}_e i\gamma \cdot D(\phi^\dagger L) \right] &= \\
 &= \frac{G(\lambda + \xi)}{2m\sqrt{2}} (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) + \frac{G}{2m\sqrt{2}} \left( \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_L \right] + \right. \\
 &+ \left. \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_\kappa \right] \right) + \frac{G(\lambda + \xi)}{\sqrt{2} m} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_\kappa \gamma \cdot A e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot A e_\kappa) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{2m\sqrt{2}} \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_\kappa \gamma \cdot z e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot z e_\kappa) + \\
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{2m\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot z e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot z e_L) + \\
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{2m\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{v}_L \gamma \cdot w e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot w^* v_L) \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Vamos agora separar as contribuições para as diversas interações vindo dos termos em (3.42) e (3.48):

*CONTRIBUIÇÃO À INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA*

$$\begin{aligned}
 & \frac{G(\lambda+\xi)}{\sqrt{2} m} \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_\kappa \gamma \cdot A e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot A e_\kappa) + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot A e_L + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot A e_\kappa) = \\
 & = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot A e + \frac{1}{\lambda} \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot A\} e \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

onde usamos a relação (3.36) e as definições (3.6)

*CONTRIBUIÇÃO À INTERAÇÃO FRACA NEUTRA*

Aqui nós apresentaremos somente o resultado no apêndice ao capítulo, resultado (B.II), calculamos detalhadamente:

$$\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \bar{v}_L \gamma \cdot z v_L + \frac{1}{2} \frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot z e_L + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot z e_\kappa +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{m \sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L) + \right. \\
 & + \left. \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa) \right] = \\
 & = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} (\bar{\nu} \gamma \cdot Z \nu + \bar{\nu} \gamma_5 \gamma \cdot Z \nu - \bar{\nu} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu - \\
 & - \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu) + \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot Z e + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} (\bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \\
 & - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) + \frac{1}{\lambda} \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

onde usamos novamente a relação (3.36) e as definições (3.6)

#### CONTRIBUIÇÃO À INTERAÇÃO FRACA CARREGADA

Aqui, novamente, apresentaremos somente o resultado deixando o cálculo detalhado para o apêndice ao capítulo resultado (B.III):

$$\begin{aligned}
 & \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot W^* \nu_L + \bar{\nu}_L \gamma \cdot W e_L) + \frac{G(\lambda+\xi)}{m \sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma \cdot W e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot W^* \nu_L) = \\
 & = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma \cdot W e + \bar{\nu} \gamma_5 \gamma \cdot W e - \bar{\nu} \frac{1}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e - \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e) + \\
 & + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{e} \gamma \cdot W^* \nu + \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot W^* \nu - \bar{e} \frac{3}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu - \\
 & - \bar{e} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu) + \frac{1}{2\lambda} \frac{g}{2\sqrt{2}} \xi \left[ \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma \cdot W, \gamma_5\} e + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \bar{\nu} \left. \frac{1}{2} \{ \gamma \cdot \omega, \gamma_5 \} e + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma \cdot \omega^*, \gamma_5 \} \nu - \bar{e} \frac{1}{2} \{ \gamma \cdot \omega^*, \gamma_5 \} \nu \right\} \quad (3.51)$$

onde também usamos a relação (3.36) e as definições (3.6).

### OUTROS TERMOS

Apresentaremos também, somente o resultado deixando o cálculo detalhado para o apêndice ao capítulo resultado (B.IV):

$$\begin{aligned} & \bar{L} i \gamma \cdot \partial L + \bar{R}_e i \gamma \cdot \partial R_e + \bar{R}_\nu i \gamma \cdot \partial R_\nu + \frac{G(\lambda + \xi)}{2m\sqrt{2}} (\bar{e}_L i \gamma \cdot \partial e_\nu + \bar{e}_\nu i \gamma \cdot \partial e_L) + \\ & + \frac{G}{2m\sqrt{2}} \left[ \bar{e}_\nu i \gamma \cdot \partial [(\lambda + \xi) e_L] + \bar{e}_L i \gamma \cdot \partial [(\lambda + \xi) e_\nu] \right] = \\ & = \bar{\nu}_\nu i \gamma \cdot \partial \nu_\nu + \frac{1}{2} \left[ \bar{\nu} i \gamma \cdot \partial \nu + \bar{\nu} i \gamma_5 \gamma \cdot \partial \nu - \bar{\nu} \frac{i}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} \partial_\mu \nu - \right. \\ & \left. - \bar{\nu} \frac{i}{2} \gamma_5 \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} \partial_\mu \nu \right] + \bar{e} i \gamma \cdot \partial e + \frac{i}{\lambda} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} \partial_\mu e + \\ & + \frac{i}{2\lambda} (\partial_\mu \xi) \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} e \end{aligned} \quad (3.52)$$

Vamos agora calcular os termos evanescentes vindo do neutrino direito:

$$\frac{G}{2m} \left[ \bar{L} i \gamma \cdot \partial (\phi' R_\nu) + \bar{R}_\nu \phi'^{\dagger} i \gamma \cdot \partial L + \bar{L} \phi' i \gamma \cdot \partial R_\nu + \bar{R}_\nu i \gamma \cdot \partial (\phi'^{\dagger} L) \right]$$

Por comodidade, para calcular (3.53) vamos calcular termo a termo depois fazendo a soma dos termos. O primeiro termo nos dá:

$$\begin{aligned}
 \bar{L} \dot{\lambda} \gamma \cdot \mathcal{D}(\phi' R_{\nu}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \gamma^{\mu} \left[ \dot{\lambda} \partial_{\mu} + \frac{g}{2} A_{\mu} + \frac{g'}{2} B_{\mu} \right] \left[ \begin{pmatrix} (\lambda + \xi) v_{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \dot{\lambda} \gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_{\kappa} \right] + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \bar{\nu}_L \gamma \cdot Z v_{\kappa} + \\
 &+ \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma \cdot W^* v_{\kappa} \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

onde usamos a primeira identidade de (3.41). O segundo termo de (3.53):

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{\nu} \phi'^{\dagger} \dot{\lambda} \gamma \cdot \mathcal{D} L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\lambda + \xi) \bar{\nu}_{\kappa} \ 0 \right] \gamma^{\mu} \left[ \dot{\lambda} \partial_{\mu} + \frac{g}{2} A_{\mu} + \frac{g'}{2} B_{\mu} \right] \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\kappa} \dot{\lambda} \gamma \cdot \partial v_L + \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \bar{\nu}_{\kappa} \gamma \cdot Z v_L + \\
 &+ \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\kappa} \gamma \cdot W e_L \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

onde também usamos a primeira identidade de (3.41). Para o terceiro termo, obtemos:

$$\bar{L} \phi' \dot{\lambda} \gamma \cdot \partial R_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \lambda + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\lambda} \gamma \cdot \partial v_{\kappa} = \frac{(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \dot{\lambda} \gamma \cdot \partial v_{\kappa} \tag{3.56}$$

E para o quarto termo obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{R}_V \dot{\gamma} \cdot \partial (\phi'^{\dagger} L) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_N \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}) \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_N \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_L \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Finalmente, para calcular (3.53), somamos as contribuições (3.54), (3.55), (3.56) e (3.57), obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{G}{2m} \left[ \bar{L} \dot{\gamma} \cdot \partial (\phi' R_V) + \bar{R}_V \phi'^{\dagger} \dot{\gamma} \cdot \partial L + \bar{L} \phi' \dot{\gamma} \cdot \partial R_V + \bar{R}_V \dot{\gamma} \cdot \partial (\phi'^{\dagger} L) \right] &= \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \bar{v}_L \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_N \right] + \bar{v}_N \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_L \right] \right\} + \\ &+ \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{1}{2} (\bar{v}_N \dot{\gamma} \cdot \partial v_L + \bar{v}_L \dot{\gamma} \cdot \partial v_N) + \\ &+ \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} (\bar{v}_L \gamma \cdot Z v_N + \bar{v}_N \gamma \cdot Z v_L) + \\ &+ \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} (\bar{v}_N \gamma \cdot \omega e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot \omega^* v_N) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Vamos calcular agora a contribuição desse termo evanescente (3.58) ou (3.53) à interação fraca carregada, neutra e outros termos que aparecem.



CONTRIBUIÇÃO À INTERAÇÃO FRACA NEUTRA

$$\left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma \cdot Z \nu_\kappa + \bar{\nu}_\kappa \gamma \cdot Z \nu_L) =$$

$$= \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \left[ \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu + \frac{1}{\lambda} \xi \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu \right] \quad (3.59)$$

onde usando as definições em (3.6) este resultado é imediato.

CONTRIBUIÇÃO À INTERAÇÃO FRACA CARREGADA

$$\left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\kappa \gamma \cdot W e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot W^* \nu_\kappa) =$$

$$= \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e - \bar{\nu} \frac{1}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e + \bar{e} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu + \right.$$

$$\left. + \bar{e} \frac{1}{4} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu \right] + \frac{1}{2\lambda} \frac{g}{2\sqrt{2}} \xi \left[ \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e - \bar{\nu} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot W\} e \right.$$

$$\left. + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu + \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot W^*\} \nu \right]$$

onde este resultado sai direto

OUTROS TERMOS

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\lambda} \left[ \bar{v}_L i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_\kappa \right] + \bar{v}_\kappa i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) v_L \right] \right] + \\
 & + \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] \frac{1}{2} (\bar{v}_\kappa i\gamma \cdot \partial v_L + \bar{v}_L i\gamma \cdot \partial v_\kappa) = \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu v + \\
 & + \frac{\xi}{\lambda} \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu v + \frac{(i\partial_\mu \xi)}{2\lambda} \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} v \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

onde usamos novamente as definições de  $v_L$  e  $v_\kappa$  em (3.6).

Agora se somarmos (3.61), (3.60), (3.59), (3.52), (3.51), (3.50) e (3.49), e levando ainda em conta os termos (3.38) e (3.35), obtemos para o lagrangeano em  $n$ -dimensão:

$$\begin{aligned}
 L_{w-d}^n &= \bar{v}_\kappa i\gamma \cdot \partial v_\kappa + \frac{1}{2} \left[ \bar{v} i\gamma \cdot \partial v + \bar{v} i\gamma_5 \gamma \cdot \partial v - \bar{v} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu v + \right. \\
 & + \left. \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu v \right] + \frac{1}{\lambda} \xi \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu v + \\
 & + \frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} v + \bar{e} i\gamma \cdot \partial e + \frac{1}{\lambda} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} i\partial_\mu e + \\
 & + \frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} e + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot A e + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot A \} e + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \left[ \bar{v} \gamma \cdot Z v + \bar{v} \gamma_5 \gamma \cdot Z v \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \bar{\nu} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} \nu + \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \xi \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} \nu + \\
 & + \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot Z e + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \left[ \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \bar{e} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} e \right] + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} e + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu} \gamma \cdot \omega e + \bar{\nu} \gamma_5 \gamma \cdot \omega e - \right. \\
 & \left. - \bar{\nu} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \omega \} e \right] + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{e} \gamma \cdot \omega^* \nu + \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot \omega^* \nu - \bar{e} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \omega \} \nu \right] + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \frac{g}{2\sqrt{2}} \xi \left[ \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \omega \} e + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot \omega^* \} \nu \right] + m \bar{e} e + \\
 & + \frac{G}{\sqrt{2}} \xi \bar{e} e + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{(\lambda + \xi)^2}{8} \left[ 2g^2 \omega_\mu^* \omega^\mu + (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu \right] + \\
 & + \frac{|\mu^2|}{2} (\lambda + \xi)^2 - \frac{\hbar}{4} (\lambda + \xi)^4 - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

3.3. -

ANÁLISE DO LAGRANGEANO

Se fazemos agora o limite  $n=4$  no lagrangeano (3.62), lembrando que para  $n=4$   $\{ \gamma_\mu, \gamma_5 \} = 0$ , obtemos:

$$L_{n=4}^{\omega-s} = \bar{\nu}_\alpha \dot{\gamma} \cdot \partial \nu_\alpha + \frac{1}{2} \left[ \bar{\nu} \dot{\gamma} \cdot \partial \nu + \bar{\nu} \dot{\gamma}_5 \gamma \cdot \partial \nu \right] + \bar{e} \dot{\gamma} \cdot \partial e +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}\gamma.Ae + \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} (\bar{\nu}\gamma.Z\nu + \bar{\nu}\gamma_5\gamma.Z\nu) + \\
 & + \frac{3g'^2-g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}\gamma.Ze + \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \bar{e}\gamma.Z\gamma_5e + \\
 & + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\nu}\gamma.We + \bar{\nu}\gamma_5\gamma.We) + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma.W^*\nu + \bar{e}\gamma_5\gamma.W^*\nu) + \\
 & + m\bar{e}e + \frac{G}{\sqrt{2}} \xi\bar{e}e + \frac{1}{2} \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \\
 & + \frac{(\lambda+\xi)^2}{8} \left[ 2g^2W_\mu^*W^\mu + (g^2+g'^2)Z_\mu Z^\mu \right] + \frac{|\mu^2|}{2} (\lambda+\xi)^2 - \\
 & - \frac{\hbar}{4} (\lambda+\xi)^4 - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu}.\vec{G}^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Se agora comparamos (3.63) com o lagrangeano de Weinberg-Salam (1.92) vemos que (3.63), é exatamente o mesmo lagrangeano de Weinberg-Salam desenvolvido na dimensão física no capítulo I, a menos do termo cinético do neutrino direito que pode ser eliminado, baseado na sua não existência experimental, sem afetar a dinâmica contida no lagrangeano (3.61).

Vamos assinalar ainda, alguns aspectos desse lagrangeano  $n$ -dimensional (3.62).

(i) Como já dito acima, no limite físico,  $n=4$ , ele reproduz o lagrangeano de Weinberg-Salam.

(ii) A todo termo axial não evanescente, cinético ou com interação, está associado um termo axial evanescente, por exemplo:

$$\bar{e}\gamma.Z\gamma_5 e \rightarrow \bar{e}\gamma.Z\gamma_5 e - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.Z\} e$$

(iii) Aos termos usuais, em 4-dimensões, vetoriais com interação não temos associados a eles, termos evanescentes vetoriais, por exemplo, não aparecem:

$$\bar{e}\gamma.Ae \rightarrow \bar{e}\gamma.Ae + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.A\} e$$

(iv) Aparecem termos evanescentes vetoriais, extras, de quatro campos, incluindo o bõson de Higgs, com constante de acoplamento diminuída por um fator  $1/\lambda$ , por exemplo:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \xi \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.Z\} v$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.A\} e$$

(v) Aparecem ainda, termos evanescente, extras, vetoriais do tipo:

$$\frac{1}{\lambda} \xi \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} i\partial_\mu v$$

$$\frac{1}{\lambda} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} i\partial_\mu e$$

$$\frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} v$$

$$\frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} e$$

### 3.4 - PROBABILIDADES DIFERENTES AOS TERMOS HERMITEANOS EVANESCENTES DIFERENTES

Como prometemos na seção 3.2 deste capítulo, vamos calcular as modificações introduzidas se assumimos que os diferentes termos hermiteanos evanescentes em (3.43) e (3.53), tem diferentes pesos, isto é:

$$\frac{G}{2m} \left[ \bar{a} L i \gamma \cdot D(\phi R_e) + \bar{a} R_e \phi^\dagger i \gamma \cdot DL + \bar{b} L \phi i \gamma \cdot DR_e + \bar{b} R_e i \gamma \cdot D(\phi^\dagger L) \right] \quad (3.64)$$

$$\frac{G}{2m} \left[ \bar{a} L i \gamma \cdot D(\phi' R_\nu) + \bar{a} R_\nu \phi'^\dagger i \gamma \cdot DL + \bar{b} L \phi' i \gamma \cdot \partial R_\nu + \bar{b} R_\nu i \gamma \cdot \partial(\phi'^\dagger L) \right] \quad (3.65)$$

Vamos começar analisando o termo (3.64). Se usamos os resultados (3.44), (3.45), (3.46) e (3.47), chegamos a:

$$\begin{aligned} \bar{b} L \phi i \gamma^\mu D_\mu R_e &= \frac{(\lambda + \xi) b}{\sqrt{2}} \bar{e}_L i \gamma \cdot \partial e_\kappa + \frac{(\lambda + \xi) b}{\sqrt{2}} \left[ \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \right. \\ &\left. + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot A e_\kappa \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}R_e \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi^\dagger L) &= \frac{b}{\sqrt{2}} \bar{i}\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_L \right] + \frac{(\lambda + \xi)b}{\sqrt{2}} \left( \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Z e_L + \right. \\ &\left. + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot A e_L \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}L \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi R_e) &= \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{v}_{L\gamma} \cdot W e_\kappa + \frac{a}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \bar{i}\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_\kappa \right] + \\ &+ \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{L\gamma} \cdot Z e_\kappa + \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{L\gamma} \cdot A e_\kappa \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}R_e \phi^\dagger \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}L &= \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \bar{e}_\kappa \bar{i}\gamma \cdot \partial e_L + \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot W^* v_L + \\ &+ \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Z e_L + \frac{a(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot A e_L \end{aligned} \quad (3.69)$$

Somando agora as contribuições individuais dada por (3.66), (3.67), (3.68) e (3.69), obtemos para (3.64):

$$\begin{aligned} \frac{G}{2m} \left[ \bar{a}L \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi R_e) + \bar{a}R_e \phi^\dagger \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}L + \bar{b}L \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}R_e + \bar{b}R_e \bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi^\dagger L) \right] &= \\ &= \frac{G(\lambda + \xi)}{2\sqrt{2} m} (\bar{b} \bar{e}_L \bar{i}\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{a} \bar{e}_\kappa \bar{i}\gamma \cdot \partial e_L) + \frac{G}{2\sqrt{2} m} \left( \bar{b} \bar{e}_{\kappa\gamma} \bar{i}\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_L \right] + \right. \\ &\left. + \bar{a} \bar{e}_L \bar{i}\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda + \xi) e_\kappa \right] \right) + \frac{G(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}} \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot A e_L + \bar{e}_{L\gamma} \cdot A e_\kappa) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{bg'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_{L\gamma} \cdot Ze_{\kappa} + \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Ze_L) + \\
 & \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{a}{2} \frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e}_{L\gamma} \cdot Ze_{\kappa} + \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Ze_L) + \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{ag}{\sqrt{2}} (\bar{v}_{L\gamma} \cdot \omega e_{\kappa} + \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot \omega^* v_L)
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Vemos de (3.70) que a parte da interação eletromagnética será in dependente do valor de "a" ou de "b".

Realizando agora o mesmo raciocínio para o termo evanescente em (3.65), levando em conta agora os resultados (3.54), (3.55), (3.56) e (3.57), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{G}{2m} \left[ aL\bar{i}\gamma \cdot \mathcal{D}(\phi' R_{\nu}) + a\bar{R}_{\nu}\phi'^{\dagger} i\gamma \cdot \mathcal{D}L + bL\bar{\phi}' i\gamma \cdot \partial R_{\nu} + b\bar{R}_{\nu} i\gamma \cdot \partial(\phi'^{\dagger} L) \right] = \\
 & = \frac{Ga}{2\sqrt{2}m} \bar{v}_L i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) v_{\kappa} \right] + \frac{Ga}{2\sqrt{2}m} (\lambda+\xi) \bar{v}_{\kappa} i\gamma \cdot \partial v_L + \frac{Gb}{2\sqrt{2}m} (\lambda+\xi) \bar{v}_L i\gamma \cdot \partial v_{\kappa} + \\
 & + \frac{Gb}{2\sqrt{2}m} \bar{v}_{\kappa} i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) v_L \right] + \frac{Ga(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \bar{v}_{L\gamma} \cdot Z v_{\kappa} + \\
 & + \frac{Ga(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \bar{v}_{\kappa\gamma} \cdot Z v_L + \frac{Ga(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_{L\gamma} \cdot \omega^* v_{\kappa} + \\
 & + \frac{Ga(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{v}_{\kappa\gamma} \cdot \omega e_L
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Vamos passar agora a calcular os termos extras que deverão aparecer no lagrangeano (3.63) assumindo que:



$$a + b = 2 \quad e,$$

$$a \neq b \neq 1$$

Somemos agora as contribuições extras dos termos aparecem em (3.70) e (3.71) no caso que  $a \neq b \neq 1$ .

INTERAÇÃO FRACA NEUTRA

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \xi) \frac{(b-1)g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L) + \\ & + \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \xi) \frac{(a-1)}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L) + \\ & + \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \xi) (a-1) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} (\bar{\nu}_L \gamma \cdot Z \nu_\kappa + \bar{\nu}_\kappa \gamma \cdot Z \nu_L) = \\ & = \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] \frac{(b-1)g'^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} 2\bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + \\ & + \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] (a-1) \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + \\ & + \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] (a-1) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu = \\ & = - (a-1) \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + \\ & + (a-1) \left[ 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right] \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} \nu \end{aligned}$$

INTERAÇÃO FRACA CARREGADA

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \xi) (a-1) \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma \cdot W e_{\kappa} + \bar{e}_{\kappa} \gamma \cdot W^* \nu_L) + \\
 & + \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \xi) (a-1) \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{\kappa} \gamma \cdot W e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot W^* \nu_{\kappa}) = \\
 & = \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) (a-1) \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot W \} e + \\
 & + \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) (a-1) \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot W^* \} \nu
 \end{aligned}$$

OUTROS TERMOS

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{2\lambda} \left[ \partial_{\mu} \xi \right] \left[ (b-1) \bar{e}_{\kappa} \gamma^{\mu} e_L + (a-1) \bar{e}_L \gamma^{\mu} e_{\kappa} \right] + \\
 & + \frac{i}{2\lambda} \left[ \partial_{\mu} \xi \right] \left[ (b-1) \bar{\nu}_{\kappa} \gamma^{\mu} \nu_L + (a-1) \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} \nu_{\kappa} \right] = \\
 & = \frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) (\bar{e}_L \gamma^{\mu} e_{\kappa} - \bar{e}_{\kappa} \gamma^{\mu} e_L) + \frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) (\bar{\nu}_L \gamma^{\mu} \nu_{\kappa} - \bar{\nu}_{\kappa} \gamma^{\mu} \nu_L) = \\
 & = \frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) \bar{e} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma^{\mu} \} e + \frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) \bar{\nu} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma^{\mu} \} \nu
 \end{aligned}$$

Então, colocando junto os termos adicionais, teremos:

$$\frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) \bar{e} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma^{\mu} \} e + \frac{(a-1)}{2\lambda} (i \partial_{\mu} \xi) \bar{\nu} \frac{1}{2} \{ \gamma_5, \gamma^{\mu} \} \nu -$$

$$- (a-1) \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} e +$$

$$+ (a-1) \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot Z \} v +$$

$$+ (a-1) \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot W \} e +$$

$$+ (a-1) \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma \cdot W^* \} v$$

APÊNDICE AO CAPÍTULO III

DEMONSTRAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS DO CAPÍTULO

$$B.I) \quad \phi = \frac{e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / \lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix}; \quad \phi' = \frac{e^{-i\beta/2} e^{i\vec{\theta}' \cdot \vec{\tau} / \lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda + \xi' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos os campos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  e  $\xi$  como infinitesimais, então:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + i \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}{\lambda} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\theta_3 & \theta_2 + i\theta_1 \\ -\theta_2 + i\theta_1 & -i\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ \xi - i\theta_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se comparamos agora com (3.29)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ \xi - i\theta_3 \end{pmatrix} = \phi_0 + \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\theta_1 = \sqrt{2} \psi_2; \quad \theta_2 = \sqrt{2} \psi_1; \quad \theta_3 = -\sqrt{2} \xi_2; \quad \xi = \sqrt{2} \xi_1 \quad (b.1)$$

Se realizamos um raciocínio análogo para  $\phi'$  chegamos a:

$$\phi' = \frac{e^{-i\beta/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{-i\beta/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi' + i\theta_3 \\ -\theta_2' + i\theta_1' \end{pmatrix} = \phi'_0 + e^{-i\beta/2} \begin{pmatrix} \xi_1 - i\xi_2 \\ -\psi_1 + i\psi_2 \end{pmatrix}$$

onde nós comparamos  $\phi'$  com o valor dado em (3.30). Assim,

$$\theta_1' = \sqrt{2} \psi_2; \theta_2' = \sqrt{2} \psi_1; \theta_3' = -\sqrt{2} \xi_2; \xi' = \sqrt{2} \xi_1 \quad (b.2)$$

Comparando agora (b.1) com (b.2) temos que:

$$\theta_1' = \theta_1; \theta_2' = \theta_2; \theta_3' = \theta_3; \xi' = \xi$$

Então:

$$\phi = \frac{e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / \lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \end{pmatrix} \quad e \quad \phi' = \frac{e^{-i\beta/2} e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / \lambda}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c.q.d.}$$

B.II - Devemos desenvolver:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} \bar{v}_{L\gamma} \cdot Z v_L + \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \bar{e}_{L\gamma} \cdot Z e_L + \frac{g'^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Z e_{\kappa} + \\ & + \frac{G(\lambda + \xi)}{\sqrt{2}m} \left[ \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_{L\gamma} \cdot Z e_{\kappa} + \bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Z e_L) + \right. \\ & \left. + \frac{g'^2}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_{\kappa\gamma} \cdot Z e_L + \bar{e}_{L\gamma} \cdot Z e_{\kappa}) \right] \end{aligned}$$

Vamos fazer este cálculo por partes, tomemos primeiramente o termo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \bar{v}_L \gamma \cdot Z v_L &= \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \frac{1}{2} \left[ \bar{v} (1+\gamma_5) \gamma \cdot Z (1-\gamma_5) v \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \frac{1}{2} (\bar{v} \gamma \cdot Z v - \bar{v} \gamma \cdot Z \gamma_5 v + \bar{v} \gamma_5 \gamma \cdot Z v - \bar{v} \gamma_5 \gamma \cdot Z \gamma_5 v) = \\
 &= \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} (\bar{v} \gamma \cdot Z v + \bar{v} \gamma_5 \gamma \cdot Z v - \bar{v} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} v - \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} v) \quad (b.3)
 \end{aligned}$$

Tomemos agora o termo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_L + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_R \gamma \cdot Z e_R &= \\
 = \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{e} \gamma \cdot Z e - \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e + \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot Z e - \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot Z \gamma_5 e) + \\
 + \frac{g'^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e} \gamma \cdot Z e + \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot Z e - \bar{e} \gamma_5 \gamma \cdot Z \gamma_5 e) = \\
 = \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e} \gamma \cdot Z e - \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e - \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e + \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) + \\
 + \frac{g'^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} (2\bar{e} \gamma \cdot Z e - 2\bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + 2\bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \\
 - 2\bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) = \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} (\bar{e} \gamma \cdot Z e - \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} (\bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) \quad (b.4)$$

Tomemos agora:

$$\begin{aligned} & \frac{G(\lambda + \xi)}{\sqrt{2} m} \left[ \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot Z e_R + \bar{e}_R \gamma \cdot Z e_L) + \right. \\ & \left. + \frac{g'^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{e}_R \gamma \cdot Z e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_R) \right] = \\ & = \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \left[ \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{1}{4} [\bar{e}(1 + \gamma_5) \gamma \cdot Z (1 + \gamma_5) e + \bar{e}(1 - \gamma_5) \gamma \cdot Z (1 - \gamma_5) e] + \right. \\ & \left. + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{1}{2} [\bar{e}(1 + \gamma_5) \gamma \cdot Z (1 + \gamma_5) e + \bar{e}(1 - \gamma_5) \gamma \cdot Z (1 - \gamma_5) e] \right] = \\ & = \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \left[ \frac{g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} 2\bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e \right] = \\ & = \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda} \right) \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e = \\ & = \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e + \frac{1}{\lambda} \frac{3g'^2 - g^2}{4\sqrt{g^2 + g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e \quad (b.5) \end{aligned}$$

Finalmente somando (b.3), (b.4) e (b.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \bar{v}_L \gamma \cdot Z v_L + \frac{1}{2} \frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_L + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_\kappa + \\
 & + \frac{G(\lambda+\xi)}{\sqrt{2}m} \left[ \frac{1}{2} \frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L) + \right. \\
 & \left. + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{e}_\kappa \gamma \cdot Z e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot Z e_\kappa) \right] = \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \left\{ \bar{v} \gamma \cdot Z v + \bar{v} \gamma_5 \gamma \cdot Z v - \right. \\
 & \left. - \bar{v} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} v - \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} v \right\} + \frac{3g'^2-g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{e} \gamma \cdot Z e + \\
 & + \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4} (\bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e) + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \frac{3g'^2-g^2}{4\sqrt{g^2+g'^2}} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e \quad \text{C.Q.D.}
 \end{aligned}$$

B.III) Vamos desenvolver agora:

$$\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma \cdot W^* v_L + \bar{v}_L \gamma \cdot W e_L) + \frac{G(\lambda+\xi)}{\sqrt{2}m} \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{v}_L \gamma \cdot W e_\kappa + \bar{e}_\kappa \gamma \cdot W^* v_L)$$

Novamente por comodidade calculemos termo a termo.

Tomemos o termo:

$$\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{v}_L \gamma \cdot W e_L + \bar{e}_L \gamma \cdot W^* v_L) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left[ \bar{v} (1+\gamma_5) \gamma \cdot W (1-\gamma_5) e + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \bar{e} (1+\gamma_5)\gamma.\omega^*(1-\gamma_5)v \Big] = \frac{g}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} (\bar{v}\gamma.\omega e + \bar{v}\gamma_5\gamma.\omega e - \bar{v}\gamma.\omega\gamma_5 e - \\
 & - \bar{v}\gamma_5\gamma.\omega\gamma_5 e + \bar{e}\gamma.\omega^* v + \bar{e}\gamma_5\gamma.\omega^* v - \bar{e}\gamma.\omega^*\gamma_5 v - \bar{e}\gamma_5\gamma.\omega^*\gamma_5 v) = \\
 & = \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{v}\gamma.\omega e + \bar{v}\gamma_5\gamma.\omega e - \bar{v} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e - \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e + \\
 & + \bar{e}\gamma.\omega^* v + \bar{e}\gamma_5\gamma.\omega^* v - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v - \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v) \quad (b.6)
 \end{aligned}$$

Tomando agora o termo:

$$\begin{aligned}
 \frac{G(\lambda+\xi)}{m\sqrt{2}} \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{v}_L\gamma.\omega e_\kappa + \bar{e}_\kappa\gamma.\omega^* v_L) & = \\
 = \left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{v}(1+\gamma_5)\gamma.\omega(1+\gamma_5)e + \bar{e}(1-\gamma_5)\gamma.\omega^*(1-\gamma_5)v \right] & = \\
 = \left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{v} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e + \bar{v} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e + \right. \\
 \left. + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v - \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v \right] \quad (b.7)
 \end{aligned}$$

Então somando (b.6) e (b.7), encontramos:

$$\begin{aligned}
 \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L\gamma.\omega^* v_L + \bar{v}_L\gamma.\omega e_L) + \frac{G(\lambda+\xi)}{\sqrt{2}m} \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{v}_L\gamma.\omega e_\kappa + \bar{e}_\kappa\gamma.\omega^* v_L) & = \\
 = \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{v}\gamma.\omega e + \bar{v}\gamma_5\gamma.\omega e - \bar{v} \frac{1}{4} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e - \bar{v} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma.\omega\} e) + \\
 + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma.\omega^* v + \bar{e}\gamma_5\gamma.\omega^* v - \bar{e} \frac{3}{4} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v - \\
 - \bar{e} \frac{\gamma_5}{4} \{\gamma_5, \gamma.\omega^*\} v) +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\lambda} \frac{g}{2\sqrt{2}} \xi (\bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma \cdot \omega, \gamma_5\} e + \bar{\nu} \frac{1}{2} \{\gamma \cdot \omega, \gamma_5\} e + \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma \cdot \omega^*, \gamma_5\} \nu -$$

$$- \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma \cdot \omega^*, \gamma_5\} \nu) \quad \text{C.Q.D.}$$

BIV) Vamos desenvolver o termo:

$$\bar{L} i\gamma \cdot \partial L + \bar{R}_e i\gamma \cdot \partial R_e + \bar{R}_\nu i\gamma \cdot \partial R_\nu + \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) +$$

$$\frac{G}{2\sqrt{2}m} \left[ \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) e_L \right] + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) e_\kappa \right] \right] =$$

$$= (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \begin{pmatrix} i\gamma \cdot \partial \nu_L \\ i\gamma \cdot \partial e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{\nu}_\kappa i\gamma \cdot \partial \nu_\kappa + \frac{1}{2} (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} \xi (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) + \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} (\bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa) +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) (\bar{e}_\kappa \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_\kappa) = \bar{\nu}_\kappa i\gamma \cdot \partial \nu_\kappa + \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_L +$$

$$+ \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L + \frac{1}{\lambda} \xi (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) (\bar{e}_\kappa \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_\kappa) = \bar{\nu}_\kappa i\gamma \cdot \partial \nu_\kappa + \bar{\nu}_L i\gamma \cdot \partial \nu_L + \bar{e} i\gamma \cdot \partial e +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \xi (\bar{e}_L i\gamma \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa i\gamma \cdot \partial e_L) + \frac{1}{2\lambda} (i\partial_\mu \xi) (\bar{e}_\kappa \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_\kappa) \quad (b.8)$$

Vamos analisar os termos de (b.8) separadamente.

Tomemos o termo:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_L \dot{\gamma} \cdot \partial v_L &= \frac{1}{4} \bar{v} (1+\gamma_5) \dot{\gamma} \cdot \partial (1-\gamma_5) v = \\
 &= \frac{1}{4} (\bar{v} \dot{\gamma} \cdot \partial v + \bar{v} \dot{\gamma} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu v - \bar{v} \dot{\gamma} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu v - \bar{v} \dot{\gamma} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu v) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \bar{v} \dot{\gamma} \cdot \partial v + \bar{v} \dot{\gamma} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu v - \bar{v} \frac{i}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \partial_\mu v - \bar{v} \frac{i}{2} \gamma_5 \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \partial_\mu v \right]
 \end{aligned} \tag{b.9}$$

Tomemos agora o termo:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \xi (\bar{e}_L \dot{\gamma} \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa \dot{\gamma} \cdot \partial e_L) &= \frac{\xi}{\lambda} \frac{1}{4} \left[ \bar{e} (1+\gamma_5) \dot{\gamma} \cdot \partial (1+\gamma_5) e + \right. \\
 &+ \left. \bar{e} (1-\gamma_5) \dot{\gamma} \cdot \partial (1-\gamma_5) e \right] = \frac{1}{\lambda} \xi \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \partial_\mu e
 \end{aligned} \tag{b.10}$$

E o termo:

$$\frac{1}{2\lambda} (i \partial_\mu \xi) (\bar{e}_\kappa \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_\kappa) = \frac{i}{2\lambda} (\partial_\mu \xi) \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} e \tag{b.11}$$

Se agora substituimos (b.9), (b.10) e (b.11) em (b.8) encontramos:

$$\begin{aligned}
 \bar{L} \dot{\gamma} \cdot \partial L + \bar{R}_e \dot{\gamma} \cdot \partial R_e + \bar{R}_v \dot{\gamma} \cdot \partial R_v + \frac{G(\lambda+\xi)}{2\sqrt{2}m} (\bar{e}_L \dot{\gamma} \cdot \partial e_\kappa + \bar{e}_\kappa \dot{\gamma} \cdot \partial e_L) + \\
 + \frac{G}{2\sqrt{2}m} \left( \bar{e}_\kappa \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) e_L \right] + \bar{e}_L \dot{\gamma} \cdot \partial \left[ (\lambda+\xi) e_\kappa \right] \right) = \\
 = \bar{v}_\kappa \dot{\gamma} \cdot \partial v_\kappa + \frac{1}{2} \left[ \bar{v} \dot{\gamma} \cdot \partial v + \bar{v} \dot{\gamma} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu v - \bar{v} \frac{i}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \partial_\mu v - \right.
 \end{aligned}$$

$$- \bar{\nu} \frac{i}{2} \gamma_5 \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} \partial_\mu \nu \Big) + \bar{e} i \gamma \cdot \partial e + \frac{i}{\lambda} \xi \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} \partial_\mu e +$$

$$+ \frac{i}{2\lambda} (\partial_\mu \xi) \bar{e} \frac{\gamma_5}{2} \{ \gamma_5, \gamma^\mu \} e$$

C.Q.D.

## CAPÍTULO IV

### CONCLUSÕES

Para aplicar o método de Regularização Dimensional na regularização de uma teoria em que comparecem acoplamentos do tipo axial, devemos ter em  $n$ -dimensão uma prescrição para a matriz  $\gamma_5$ .

Mostramos no Capítulo II que para não introduzirmos inconsistências na teoria devemos escolher  $\gamma_5$  em  $n$ -dimensão de tal maneira que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} \neq 0 \quad (\text{evanescente}) \quad (4.1)$$

Agora se escolhermos uma prescrição para  $\gamma_5$ , em  $n$ -dimensão, de tal maneira que obedeça a relação (4.1) vimos no Capítulo III que o lagrangeano da teoria desenvolvido num espaço-tempo arbitrário de dimensão  $n$ , onde  $n \neq 4$ , tem além dos termos usuais, em 4-dimensões, termos evanescentes extras.

Com respeito ao lagrangeano de Weinberg-Salam ( $L_{W-S}^n$ ) desenvolvido numa dimensão do espaço-tempo arbitrária,  $n \neq 4$ , podemos ainda dizer que:

i) O lagrangeano  $L_{W-S}^n$  contém como termos não evanescentes, sã os correspondentes ao lagrangeano de Weinberg-Salam em 4-dimensões. Os termos adicionais são evanescentes.

ii) Os termos adicionais evanescentes que aparecem nesse lagrangeano,  $L_{W-S}^n$ , são da forma  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\}$ .

iii) A contribuição de todos os termos evanescentes para os diagramas do tipo "árvore" é nula. Os termos evanescentes só podem dar contribuição quando inseridos em diagramas com "loops" divergentes. Isto quer dizer que, para qualquer processo físico, o cálculo na ordem mais baixa pode efetuar-se tanto com  $L_{w-\delta}^{(n)}$  como com  $L_{w-\delta}^{(4)}$ , com resultados coincidentes.

iv) Os termos evanescentes adicionais tais como:

$$\frac{1}{2\lambda} (\lambda \partial_\mu \epsilon) \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \nu$$

$$\frac{1}{\lambda} \epsilon \bar{\nu} \frac{\gamma_5}{2} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} \lambda \partial_\mu \nu$$

são originados pela invariância de gauge.

v) Não temos no lagrangeano  $L_{w-\delta}^{(n)}$  termos evanescentes puramente eletromagnético (i.ê., sem a presença do bóson de Higgs) isto significa que não há chance de alterarmos a seção de choque por exemplo, elétron-elétron eletromagnética por contribuições em ordem mais alta provenientes de termos evanescentes puramente eletromagnético.

Agora, a fim de contribuir para o esclarecimento do papel desses termos evanescentes extras, que aparecem no lagrangeano  $L_{w-\delta}^{(n)}$ , passaremos a analisar a contribuição do termo evanescente:

$$- q \bar{e} \frac{1}{2} \{\gamma_5, \gamma \cdot Z\} e \quad (4.2)$$

para o cálculo da auto-energia do elétron combinado com o termo

não evanescente:

$$q \bar{e} \gamma \cdot Z \gamma_5 e \quad (4.3)$$

Os termos em (4.2) e (4.3) geram em 2a. ordem, para a auto-energia do elétron, os seguintes diagramas:

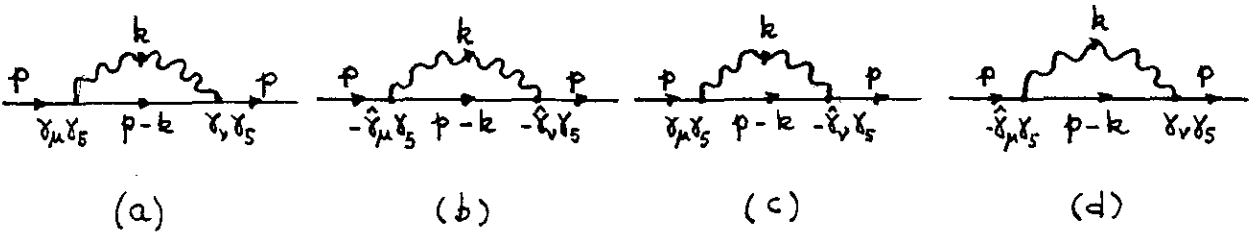


Figura 4.1: Diagramas em 2a. ordem para a auto-energia do elétron gerados pelos termos (4.2) e (4.3).

Das regras de Feynman obtemos qua a contribuição dos gráficos da figura 4.1 é:

$$\Sigma(p, n) = q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} +$$

$$+ q^2 \int d^n k \frac{\tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \tilde{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} -$$

$$- q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \tilde{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} -$$

$$- q^2 \int d^n k \frac{\tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (4.4)$$

onde usamos para  $\gamma_5$  a prescriçãõ simples em  $n$ -dimensãõ dada em (2.72), que nos leva a:

$$\frac{1}{2} \{ \gamma_\mu, \gamma_5 \} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu = 0, 1, 2, 3 \\ \tilde{\gamma}_\mu \gamma_5 = \gamma_5 \tilde{\gamma}_\mu & \text{se } \mu = 4, 5, 6, \dots, n-1 \end{cases}$$

Agora se calculamos (4.4) realizando os passos jã explicados detalhadamente no Capítulo II, encontramos que (ver o apêndice ao Capítulo IV):

$$\begin{aligned} \Sigma^{n.e.}(\not{p}, n) &= \Sigma^{n.e.}(m, n) + A_1(\not{p}-m) + B_1(\not{p}-m)^2 + \\ &+ C_1(\not{p}-m)^3 + \Sigma_{\text{finito}}^{n.e.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

e:

$$\begin{aligned} \Sigma^{ev.}(\not{p}, n) &= \Sigma^{ev.}(m, n) + A_2(\not{p}-m) + B_2(\not{p}-m)^2 + \\ &+ C_2(\not{p}-m)^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde:

$$\Sigma^{n.e.}(\not{p}, n) = q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)}$$



$$\Sigma^{ev.}(p, n) = q^2 \int d^n k \frac{\tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)}$$

$$- q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \tilde{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)}$$

$$- q^2 \int d^n k \frac{\tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)}$$

e ainda  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  são coeficientes divergentes para  $n = 4$  e  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  são finitos com valores:

$$A_1 = i q^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{5m^2}{12M_Z^2} \right) \Pi^{n/2} \Gamma \left( 2 - \frac{n}{2} \right)$$

$$B_1 = - \frac{23 i q^2 m}{12M_Z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left( 2 - \frac{n}{2} \right)$$

$$C_1 = - \frac{7 i q^2}{12M_Z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left( 2 - \frac{n}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= i q^2 \Pi^2 \left( -\frac{4}{3} + \frac{5m^2}{12M_z^2} \right) \\
 B_2 &= \frac{25 i q^2 m}{12M_z^2} \Pi^2 \\
 C_2 &= \frac{11 i q^2}{12M_z^2} \Pi^2
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

como é demonstrado no apêndice ao Capítulo. Então de (4.5) e (4.7) vemos que a contribuição dos diagramas 4.1 (a), (b), (c) e (d) é:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p, n) &= \Sigma^{n.e.}(m, n) + \Sigma^{ev.}(m, n) + (A_1 + A_2) (p-m) + \\
 &+ (B_1 + B_2) (p-m)^2 + (C_1 + C_2) (p-m)^3 + \Sigma_{\text{finito}}^{n.e.}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Vemos então de (4.8) que os diagramas evanescentes apresentados na figura 4.1 (b), (c) e (d) dão uma contribuição finita para a renormalização da massa do elétron, através do termo  $\Sigma_{(m, n)}^{ev.}$ , uma contribuição finita para a renormalização do propagador eletrônico, através do coeficiente  $A_2$  e não dá contribuição observável.

Devemos notar entretanto, que ainda existem outras contribuições para  $\Sigma(p, n)$ , e que podem existir compensações entre elas dado que nas teorias de gauge as constantes dos diferentes processos estão relacionadas entre elas.

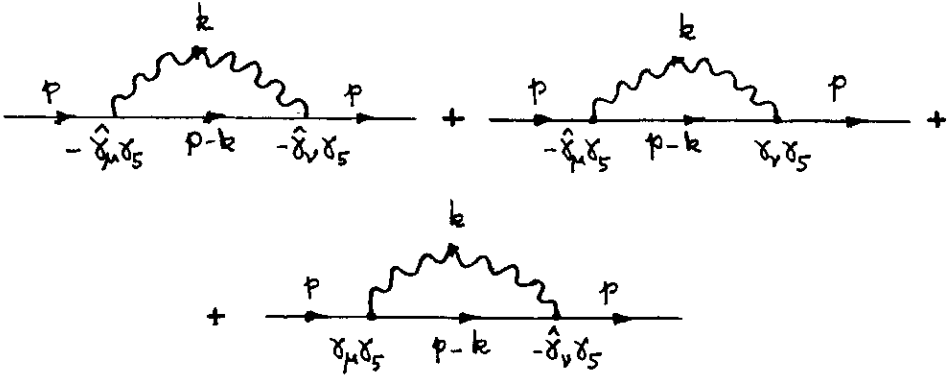
Finalmente, desse último cálculo efetuado, concluímos que sempre quando tivermos os diagramas evanescentes 4.1 (b), (c)

e (d) como subdiagramas de diagramas maiores que representem a interação entre leptons esses diagramas em conjunto, darão uma contribuição observável nula para a interação em questão.

APÊNDICE AO CAPÍTULO IV

CÁLCULO DE DIAGRAMAS DE AUTO-ENERGIA DO ELÉTRON

i) Cálculo dos gráficos evanescentes



$$\begin{aligned}
 \Sigma^{ev.}(p, n) = & q^2 \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \hat{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \\
 & - q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \hat{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \\
 & - q^2 \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

Mas por comodidade podemos separar  $\Sigma^{ev}(\not{p}, n)$  em dois termos:

$$\Sigma^{ev}(\not{p}, n) = \Sigma_1^{ev}(\not{p}, n) + \Sigma_2^{ev}(\not{p}, n)$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{ev}(\not{p}, n) &= q^2 \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \hat{\gamma}_\mu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} - \\ &- q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \hat{\gamma}_\mu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} - \\ &- q^2 \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \gamma_\mu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \end{aligned} \quad (C.2)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{ev}(\not{p}, n) &= \frac{q^2}{M_Z^2} \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] (-k_\mu k_\nu) \hat{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} - \\ &- \frac{q^2}{M_Z^2} \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] (-k_\mu k_\nu) \hat{\gamma}^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} - \end{aligned}$$

$$-\frac{q^2}{M_Z^2} \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] (-k_\mu k_\nu) \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.3)$$

Calculamos primeiramente  $\Sigma_1^{e\nu}$ . É evidente que:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \hat{\gamma}_\mu \gamma_5 &= \gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \hat{\gamma}_\mu \gamma_5 = \\ &= \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{e\nu}(p, n) &= -q^2 \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \hat{\gamma}_\mu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} = \\ &= -q^2 \int d^n k \frac{2(n-5) \hat{\gamma} \cdot k + (n-4) \gamma \cdot (p-k) + (n-4)m}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} = \\ &= -q^2 \int_0^1 dx \int d^n k \frac{2(n-5) \hat{\gamma} \cdot k + (n-4) \gamma \cdot (p-k) + (n-4)m}{\{(k^2 - M_Z^2)x + [(p-k)^2 - m^2] (1-x)\}^2} \quad (C.4) \end{aligned}$$

mas:

$$(k^2 - M_Z^2)x + [(p-k)^2 - m^2] (1-x) = [k-p(1-x)]^2 - a \quad (C.5)$$

onde

$$a = p^2 (1-x)^2 - (p^2 - m^2) (1-x) + M_Z^2 x \quad (C.6)$$

Então usando (C.5) em (C.4):

$$\Sigma_1^{ev.}(\not{p}, n) = -q^2 \int_0^1 dx \int d^n k \frac{2(n-5)\hat{\gamma}.k + (n-4)\gamma.(p-k) + (n-4)m}{\{[k-p(1-x)]^2 - a\}^2} \quad (C.7)$$

Fazendo a mudança de variável:

$$k \rightarrow k + p(1-x)$$

e lembrando que termos com número ímpar de  $k$  dão contribuição nula na integral de  $k$  e ainda passando para uma métrica Euclidiana, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{ev.}(\not{p}, n) &= -iq^2 \int_0^1 dx (n-4)(-x\gamma.p+m) \int d^n k \frac{1}{(k^2+a)^2} = \\ &= -i\Pi^{n/2} q^2 (n-4) \Gamma\left[2 - \frac{n}{2}\right] \int_0^1 dx (m-x\gamma.p) a^{\frac{n}{2}-2} \end{aligned}$$

Então:

$$\Sigma_1^{ev.}(\not{p}, n) = \Sigma_1^{ev.}(m, n) - i\Pi^2 q^2 (\gamma.p-m) \quad (C.8)$$

onde,

$$\Sigma_1^{ev.}(m, n) = i\Pi^2 m^2 q^2 \quad (C.9)$$

Passemos agora para o cálculo de  $\Sigma_2^{ev.}$ . Entretanto, antes de passar aos cálculos, é útil fazer uma observação. Tomemos o numerador da primeira integral de (C.3)

$$\gamma_5 \hat{\gamma}^\alpha \left[ \gamma.p - \gamma.k + m \right] k_\alpha k_\beta \hat{\gamma}^\beta \gamma_5 \quad (C.10)$$

No processo de resolução dessa integral fazemos a seguinte mudança de variável

$$k \rightarrow k + p(1-x)$$

Então:

$$k_\alpha k_\beta \rightarrow k_\alpha k_\beta + p_\alpha p_\beta (1-x) + k_\alpha p_\beta (1-x) + k_\beta p_\alpha (1-x)$$

$$\gamma \cdot p - \gamma \cdot k \rightarrow \gamma \cdot px - \gamma \cdot k$$

E como tomamos  $p_\mu$  como o momentum físico, o integrando passa a:

$$\begin{aligned} & \gamma_5 \tilde{\gamma}^\alpha \left[ \gamma \cdot p - \gamma \cdot k + m \right] k_\alpha k_\beta \tilde{\gamma}^\beta \gamma_5 \rightarrow \gamma_5 \tilde{\gamma}^\alpha \left[ \gamma \cdot px - \right. \\ & \left. - \gamma \cdot k + m \right] k_\alpha k_\beta \tilde{\gamma}^\beta \gamma_5 \end{aligned}$$

E como para realizar a integral ainda fazemos:

$$k_\alpha k_\beta \rightarrow - \frac{k_E^2}{n} g_{\alpha\beta}$$

Então o integrando passa a:

$$\begin{aligned} & \gamma_5 \tilde{\gamma}^\alpha \left[ \gamma \cdot p - \gamma \cdot k + m \right] k_\alpha k_\beta \tilde{\gamma}^\beta \gamma_5 \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{k_E^2}{n} \gamma_5 \tilde{\gamma}^\alpha \left[ \gamma \cdot px - \gamma \cdot k + m \right] \tilde{\gamma}^\alpha \gamma_5 \end{aligned} \quad (C.11)$$

Se fazemos o mesmo procedimento para o numerador da segunda integral de (C.3), obtemos:

$$\gamma_\alpha \gamma_5 \left[ \gamma \cdot p - \gamma \cdot k + m \right] k_\alpha k_\beta \tilde{\gamma}^\beta \gamma_5 \rightarrow$$



$$\begin{aligned} &\rightarrow - \frac{k_E^2}{n} \gamma_\alpha \gamma_5 \left[ \gamma \cdot p x - \gamma \cdot k + m \right] \hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 + \\ &+ \frac{(n-4)}{n} (1-x) k_E^2 \gamma \cdot p \end{aligned} \quad (C.12)$$

E para o numerador da terceira integral de (C.3), obtemos:

$$\begin{aligned} &\hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 \left[ \gamma \cdot p - \gamma \cdot k + m \right] k_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma_5 \rightarrow \\ &\rightarrow - \frac{k_E^2}{n} \hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 \left[ \gamma \cdot p x - \gamma \cdot k + m \right] \gamma_\alpha \gamma_5 - \\ &- \frac{(n-4)}{n} (1-x) k_E^2 \gamma \cdot p \end{aligned} \quad (C.13)$$

Então vemos que o segundo termo do segundo membro de (C.12) se anula com o segundo termo do segundo membro de (C.13), e ainda o primeiro termo do segundo membro de (C.11), (C.12) e (C.13) são iguais. Assim:

$$\Sigma_2^{ev} \cdot (p, n) = \frac{-q^2}{M_Z^2} \int d^n k \frac{\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \left[ \gamma \cdot (p-k) + m \right] (-k_\mu k_\nu) \hat{\gamma}^\nu \gamma_5}{\left[ (p-k)^2 - m^2 \right] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.14)$$

Então utilizando os passos que utilizamos para calcular  $\Sigma_1^{ev}$  e usando (C.11), obtemos:

$$\Sigma_2^{ev} \cdot (p, n) = \frac{-iq^2}{n M_Z^2} \int_0^1 dx \gamma_5 \hat{\gamma}^\alpha \left[ x \gamma \cdot p + m \right] \hat{\gamma}_\alpha \gamma_5 \int d^n k \frac{k^2}{(k^2 + a)^2} \quad (C.15)$$

onde:

$$a = p^2(1-x)^2 - (p^2-m^2)(1-x) + M_z^2 x \quad (C.16)$$

Então:

$$\Sigma_2^{ev.}(\not{p}, n) = \frac{-iq^2}{2 M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) (n-4) \int_0^1 dx \left[ x \gamma \cdot p + m \right] a^{\frac{n}{2} - 1} \quad (C.17)$$

Agora:

$$\Sigma_2^{ev.}(m, n) = \frac{iq^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right)}{1 - \frac{n}{2}} \int_0^1 dx m(x+1) \left[ m^2(1-x)^2 + M_z^2 x \right]^{\frac{n}{2} - 1}$$

Então:

$$\Sigma_2^{ev.}(m, n) = \frac{-iq^2 \Pi^2 m}{M_z^2} \int_0^1 dx (x+1) \left[ m^2(1-x)^2 + M_z^2 x \right] \quad (C.18)$$

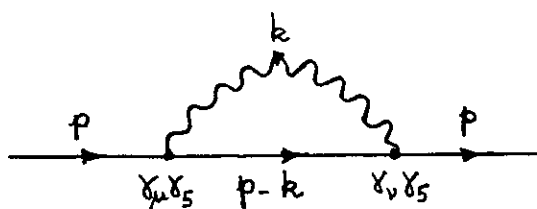
Assim usando (C.17) e (C.18) podemos mostrar sem dificuldade que:

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{ev.}(\not{p}, n) &= \Sigma_2^{ev.}(m, n) - \frac{iq^2 \Pi^2}{M_z^2} (\not{p}-m) \int_0^1 dx x \left[ p^2(1-x)^2 - \right. \\ &- \left. (p^2-m^2)(1-x) + M_z^2 x \right] + \frac{iq^2 m \Pi^2}{M_z^2} (p^2-m^2) \int_0^1 dx (1-x^2) = \\ &= \Sigma_2^{ev.}(m, n) + iq^2 \Pi^2 \left[ -\frac{1}{3} + \frac{5m^2}{12M_z^2} \right] (\not{p}-m) + iq^2 \Pi^2 \frac{25m}{12M_z^2} (\not{p}-m)^2 + \\ &+ iq^2 \Pi^2 \frac{11}{12M_z^2} (\not{p}-m)^3 \end{aligned} \quad (C.19)$$

Então se levamos em conta (C.8) e (C.19) conjuntamente obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma^{ev}(\not{p}, n) &= \Sigma^{ev}(m, n) + iq^2 \Pi^2 \left[ -\frac{4}{3} + \frac{5m^2}{12M_Z^2} \right] (\not{p}-m) + \\ &+ iq^2 \Pi^2 \frac{25m}{12M_Z^2} (\not{p}-m)^2 + iq^2 \Pi^2 \frac{11}{12M_Z^2} (\not{p}-m)^3 \end{aligned} \quad (C.20)$$

ii) Cálculo do diagrama não evanescente



$$\Sigma^{n.e.}(\not{p}, n) = q^2 \int d^n k \frac{\gamma^\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \gamma^\nu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.21)$$

Vamos separar  $\Sigma^{n.e.}$  em duas partes:

$$\Sigma^{n.e.}(\not{p}, n) = \Sigma_1^{n.e.}(\not{p}, n) + \Sigma_2^{n.e.}(\not{p}, n) \quad (C.22)$$

onde:

$$\Sigma_1^{n.e.}(\not{p}, n) = q^2 \int d^n k \frac{\gamma_\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \gamma^\mu \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.23)$$

$$\Sigma_2^{n.e.}(\not{p}, n) = \frac{-q^2}{M_Z^2} \int d^n k \frac{\gamma^\alpha \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] k_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma_5}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - M_Z^2)} \quad (C.24)$$

Vamos passar agora a calcular  $\Sigma_1^{n.e.}$  :

$$\Sigma_1^{n.e.}(\not{p}, n) = q^2 \int d^n k \frac{\gamma_\mu \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] \gamma^\mu \gamma_5}{\{ [(p-k)^2 - m^2] x + (k^2 - M_Z^2) (1-x) \}^2} \quad (C.25)$$

mas

$$\left[ (p-k)^2 - m^2 \right] x + (k^2 - M_Z^2) (1-x) = (k-px)^2 - a \quad (C.26)$$

onde:

$$a = p^2 x^2 - (p^2 - m^2) x + M_Z^2 (1-x) \quad (C.27)$$

Se fazemos a mudança de variável:

$$k \rightarrow k + px$$

Então usando (C.26) e (C.27), fazendo a álgebra de Dirac usual em  $n$ -dimensão e ainda, passando para uma métrica Euclídeana, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{n.e.}(\not{p}, n) &= i q^2 \int_0^1 dx \left[ (n-6)(1-x) \gamma \cdot p + (n-8)m \right] \int d^n k \frac{1}{(k^2 + a)^2} = \\ &= i q^2 \Pi^{n/2} \Gamma \left( 2 - \frac{n}{2} \right) \int_0^1 dx \left[ (n-6)(1-x) \gamma \cdot p + (n-8)m \right] a^{\frac{n}{2} - 2} \quad (C.28) \end{aligned}$$

Se fazemos o procedimento usual encontramos para (C.28):

$$\Sigma_1^{n \cdot e}(\not{p}, n) = \Sigma_1^{n \cdot e}(m, n) + iq^2 \Pi^{n/2} (n-6) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (\not{p}-m) \quad .$$

$$\int_0^1 dx (1-x) \frac{n}{a^2} - 2 - 2iq^2 \Pi^2 m^2 \int_0^1 dx (x-3) \ln \frac{a}{a'}$$

onde:

$$a' = m^2 x^2 + M_Z^2 (1-x)$$

Mas ainda podemos escrever  $\Sigma_1^{n \cdot e}$  como:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{n \cdot e}(\not{p}, n) &= \Sigma_1^{n \cdot e}(m, n) + \frac{iq^2}{2} \Pi^{n/2} (n-6) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (\not{p}-m) + \\ &+ 2iq^2 \Pi^2 (\not{p}-m) \int_0^1 dx (1-x) \ln a + 2iq^2 \Pi^2 m \int_0^1 dx (3-x) \ln \frac{a}{a'} \quad (C.29) \end{aligned}$$

onde  $\Sigma_1^{n \cdot e}(m, n)$  e o coeficiente de  $(\not{p}-m)$  são divergentes para  $n = 4$  e os dois últimos termos são finitos. Calculemos  $\Sigma_2^{n \cdot e}$ :

$$\Sigma_2^{n \cdot e}(\not{p}, n) = \frac{-q^2}{M_Z^2} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{\gamma^\alpha \gamma_5 [\gamma \cdot (p-k) + m] k_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma_5}{\{[(p-k)^2 - m^2]x + (k^2 - M_Z^2)(1-x)\}^2} \quad (C.30)$$

mas:

$$\left[ (p-k)^2 - m^2 \right] x + (k^2 - M_Z^2) (1-x) = (k-px) - a \quad (C.26)$$

onde:

$$a = p^2 x^2 - (p^2 - m^2)x + M_Z^2 (1-x) \quad (C.27)$$

Fazendo a mudança de variável:

$$k \rightarrow k + px$$

usando (C.26) e (C.27), fazendo a álgebra de Dirac em  $n$ -dimensão e passando para uma métrica Euclideana, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{n.e.}(\not{p}, n) &= \frac{-iq^2}{M_z^2} \int_0^1 dx \{ [x(n+2)+6-n] \gamma.p-(n-8)m \} \int d^n k \frac{k^2}{(k^2+a)^2} - \\ &- \frac{iq^2}{M_z^2} \int_0^1 dx x^2 p^2 [(1-x)\gamma.p-m] \int d^n k \frac{1}{(k^2+a)^2} = \\ &= \frac{-iq^2}{2M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \{ [x(n+2)+6-n] \gamma.p-(n-8)m \} a^{\frac{n}{2}-1} - \\ &\frac{-iq^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx x^2 p^2 [(1-x)\gamma.p-m] a^{\frac{n}{2}-2} \end{aligned} \quad (C.31)$$

Vamos separar  $\Sigma_2^{n.e.}(\not{p}, n)$  em duas partes,  $I_1(\not{p}, n)$  e  $I_2(\not{p}, n)$ , onde  $I_1$  designa a primeira integral e  $I_2$  a segunda da última identidade de (C.31).

Se o procedermos como de hábito para o cálculo de  $I_2(\not{p}, n)$ , encontramos:

$$\begin{aligned} I_2(\not{p}, n) &= I_2(m, n) - \frac{iq^2 \Pi^{n/2} m^2}{12 M_z^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (\not{p}-m) - \\ &- \frac{iq^2 \Pi^{n/2} m}{6 M_z^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (\not{p}-m)^2 - \frac{iq^2 \Pi^{n/2}}{12 M_z^2} (\not{p}-m)^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i q^2 \Pi^{n/2}}{M_Z^2} p^2 (\rho-m) \int_0^1 dx x^2 (1-x) \ln a - \\
 & - \frac{i q^2 m \Pi^{n/2}}{M_Z^2} p^2 \int_0^1 dx x^3 \ln \frac{a}{a'} \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

onde  $a$  está indicado em (C.27) e:

$$a' = m^2 x^2 + M_Z^2 (1-x)$$

Vamos calcular agora  $I_1(\rho, n)$ . Procedendo como de hábito, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_1(\rho, n) &= I_1(m, n) + \frac{i q^2}{M_Z^2} \Gamma^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} m \int_0^1 dx \left[ x(n+2) + \right. \\
 & + 2(7-n) \left. \right] \left[ a^{\frac{n}{2}-1} a'^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
 & + \frac{i q^2}{M_Z^2} \Pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\rho-m) \int_0^1 dx \left[ x(n+2) + 6-n \right] a^{\frac{n}{2}-1} \tag{C.33}
 \end{aligned}$$

Mas podemos escrever  $a^{\frac{n}{2}-1}$  e  $a'^{\frac{n}{2}-1}$  como:

$$a^{\frac{n}{2}-1} = a + \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] a \ln a + \frac{1}{2} \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] a (\ln a)^2 + \dots$$

$$a'^{\frac{n}{2}-1} = a' + \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] a' \ln a' + \frac{1}{2} \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] a' (\ln a')^2 + \dots \tag{C.34}$$

Então usando (C.34) em (C.33), obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_1(\not{p}, n) &= I_1(m, n) + \frac{i q^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\not{p}-m) \int_0^1 dx \left[ x(n-2)+6-n \right] a - \\
 &- \frac{i q^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{(2-n/2)\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\not{p}-m) \int_0^1 dx \left[ x(n+2)+6-n \right] a \ln a + \\
 &+ \frac{i q^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} m(p^2-m^2) \int_0^1 dx \left[ x(n+2)+2(7-n) \right] x(x-1) - \\
 &- \frac{i q^2}{M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{(2-n/2)\Gamma(2-n/2)}{n-2} m \int_0^1 dx \left[ x(n+2)+2(7-n) \right] (a \ln a - a' \ln a')
 \end{aligned} \tag{C.35}$$

E com um pouco de álgebra podemos escrever  $I_1(\not{p}, n)$ , como:

$$\begin{aligned}
 I_1(\not{p}, n) &= I_1(m, n) + i q^2 \left[ 1 - \frac{m^2}{M_z^2} \right] \Pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\not{p}-m) - \\
 &- \frac{7 i q^2 m}{2 M_z^2} \Pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\not{p}-m)^2 - \frac{i q^2 \Pi^{n/2}}{M_z^2} \frac{\Gamma(2-n/2)}{n-2} (\not{p}-m)^3 - \\
 &- \frac{i q^2 \Pi^2}{2 M_z^2} (\not{p}-m) \int_0^1 dx (6x+2) a \ln a - \frac{3 i q^2 \Pi^2 m}{M_z^2} \int_0^1 dx (x+1) (a \ln a - a' \ln a')
 \end{aligned} \tag{C.36}$$

Então juntando (C.32) com (C.36), obtemos para  $\Sigma_2^{n.e.}$  :



$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{n.e.}(\rho, n) &= \Sigma_2^{n.e.}(m, n) + iq^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{5m^2}{12M_z^2} \right] \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m) - \\
 &- \frac{23iq^2 m}{12M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m)^2 - \frac{7iq^2}{12M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m)^3 + \\
 &+ \frac{iq^2}{M_z^2} \Pi^2 p^2 (\rho-m) \int_0^1 dx x^2 (1-x) - \frac{iq^2}{M_z^2} m \Pi^2 p^2 \int_0^1 dx x^3 \ln \frac{a}{a'} - \\
 &- \frac{iq^2}{M_z^2} \Pi^2 (\rho-m) \int_0^1 dx (3x+1) a \ln a - \frac{3iq^2 m}{M_z^2} \Pi^2 \int_0^1 dx (x+1) (a \ln a - a' \ln a')
 \end{aligned} \tag{C.37}$$

Agora levando em conta (C.37) e (C.29) podemos calcular  $\Sigma^{n.e.}$  através de (C.22), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{n.e.}(\rho, n) &= \Sigma^{n.e.}(m, n) - iq^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{5m^2}{12M_z^2} \right] \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m) - \\
 &- \frac{23iq^2 m}{12M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m)^2 - \frac{7iq^2}{12M_z^2} \Pi^{n/2} \Gamma \left[ 2 - \frac{n}{2} \right] (\rho-m)^3 + \\
 &+ \Sigma_{\text{finito}}^{n.e.}
 \end{aligned} \tag{C.38}$$

onde  $\Sigma_{\text{finito}}^{n.e.}$  é dado da soma das partes finitas de (C.29) e (C.37). E vemos que  $\Sigma^{n.e.}(m, n)$  e os coeficientes de  $(\rho-m)$ ,  $(\rho-m)^2$  e  $(\rho-m)^3$  são divergentes para  $n = 4$ .

BIBLIOGRAFIA

- 1) - Oppenheimer - *Phys. Rev.* 35, 461 (1930)
- 2) - Waller - *Z. Physik* 62, 673 (1930)
- 3) - Bollini e Giambiagi - *Phys. Lett.* 40B, 566 (1972)  
- Bollini e Giambiagi - *Nuovo Cim.* 12B, 20 (1972)
- 4) - 't Hooft e Veltman - *Nucl. Phys.* B44, 189 (1972)
- 5) - Goldstone - *Nuovo Cimento* 19, 154 (1961)
- 6) - Higgs - *Phys. Lett.* 12, 132 (1964)  
- Higgs - *Phys. Rev. Lett.* 13, 508 (1964)
- 7) - Weinberg - *Phys. Rev. Lett.* 19, 1264 (1967)  
- Weinberg - *Phys. Rev. Lett.* 27, 1688 (1971)
- 8) - Salam - *Proceeding of the eighth Nobel Symposium*,  
John Willey, New York (1968)
- 9) - Bollini e Giambiagi - *Acta Physica Austriaca* 38,  
211 (1973)
- 10) - Yang e Mills - *Physical Review* 96, 191 (1954)
- 11) - Veja qualquer texto clássico de Teoria de Campos, por  
exemplo: Bjorken, Drell: *Relativistic Quantum Mechanics*  
New York: Mc Graw-Hill (1964)  
Bollini - *Teoria de Campos* (a ser lançado)
- 12) - Akyeampong e Delbourgo - *Il Nuovo Cimento* 17A, 578 (1973)
- 13) - Adler - *Physical Review* 177, 2426 (1969)
- 14) - Leite Lopes - *Nuclear Physics* 8, 234 (1958)  
- Leite Lopes - *Les Interactions faibles: une introduction:*  
*cours à l'Ecole d'Eté de Physique des Particules Elementaires*  
de Gif - sur - Yvette, Septembre 1974

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



CARLOS GUIDO BOLLINI - Presidente



KLAUS DIETER ROTHE



JOSÉ LEITE LOPES

RIO DE JANEIRO, 27 de julho de 1981