CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO

CÓPIAS EM TEORIAS DE GAUGE

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 28 de julho de 1980

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Juan José Giambiagi por sua orientação segura e constante, a quem devo toda a maturidade científica porventura adquirida ao longo desses anos de convivência amiga e fraterna.

- Ao Prof. Carlos Guido Bollini, mestre e amigo, por quem nutro profunda admiração.

- A Valdir Barbosa Bezerra que colaborou intensamente no desenvolvimento deste trabalho.

- A Nivaldo Agostinho Lemos por ter lido o manuscrito e apresentado valiosas sugestões.

- Ao Prof. Carlos Augusto Pinto Galvão pela amizade e consideração com que sempre me distinguiu.

- A D. Nara pela prestimosidade e gentileza durante os anos em que se ocupou da Secretaria de Pós-Graduação.

- A Helena de Souza Ferreira pelo cuidado e paciência no trabalho de datilografia.

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CNPq por me ter acolhido como aluno e onde pude desfrutar de um ambiente cordial e humano.

- À Universidade Federal da Paraiba pelo apoio financeiro, indispensável à conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho considera-se o problema das *cópias* ou *ambigüidades de Wu-Yang* em teoria de campos de gauge, fenômeno recentemente descoberto e que tem sido motivo de várias publicações nos últimos cinco anos, originando uma vasta literatura sobre o assunto. Após uma breve revisão dos conceitos fundamentais das teorias de gauge, passamos a discutir os exemplos e resultados mais significativos concernentes a cópias, cuja existência é característica unicamente de teorias não-abelianas. Damos especial atenção aos trabalhos de Bollini—Giambiagi —Tiomno e de S. Solomon, ao mesmo tempo em que são investigadas algumas conexões entre eles. Finalmente, formula-se o conceito de cópias elétricas não-abelianas e apresenta-se um processo de obtenção deste tipo de ambigüidade.

SUMÁRIO

"In the welter of conflicting fanaticisms, one of the few unifying forces is scientific truthfulness, by which I mean the habit of basing our beliefs upon observations and inferences as impersonal, and as much divested of local and temperamental bias, as is possible for human beings."

(Bertrand Russel)

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
2	última	$\delta L = \partial\nu \left[\dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)}\right] \delta\phi^a_\mu$	$\delta L = \partial_\nu \left[\dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)} \delta\phi^a_\mu\right]$
8	primeira	$\partial_\mu \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \phi\right]$	$(\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \phi$
8	2	$\partial_\mu \left[(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*\right]$	$(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 \phi^*$
28	6	$\vec{C}(\vec{r}) \cdot \Delta(\vec{r})$	$\vec{C}(\vec{r}) \cdot \vec{\Delta}(\vec{r})$
43	2	$\left[A_\mu{}^{(2)}, F_{\mu\nu}\right]$	$\left[\bar{A}_\mu{}^{(2)}, F_{\mu\nu}\right]$
44	4	$\int_{-\infty}^{x_0} d\xi_0 \vec{f}(\ _0, x_1)$	$\int_{-\infty}^{x_0} d\xi_0 \vec{f}'(\xi_0, x_1)$
44	5	$j_\nu\left[A^{(2)}\right]$	$j_\nu\left[\bar{A}^{(2)}\right]$
57	15	$\alpha_{,1} N + \left[a_1 + \alpha_{,1} f(\alpha)\right] M$	$A_1 = \alpha_{,1} N + \left[a_1 + \alpha_{,1} f(\alpha)\right] M$
58	14	$- \int_{-\infty}^{t}$	$- \int_{-\infty}^{t} d\tau$
59	3	$V_f^{-1}(\xi, -\infty)\, \partial_\xi V_f^{-1}(\xi, -\infty)$	$V_f^{-1}(\xi, -\infty)\, \partial_\xi V_f(\xi, -\infty)$

CAPÍTULO I

CAMPOS DE GAUGE

1.1 - Introdução

Em teoria de campos toda a dinâmica de um dado sistema físico se encontra condensada no lagrangeano do sistema. O estudo de certas simetrias exibidas por algumas teorias justifica sua importância devido ao fato de que estas simetrias estão normalmente associadas a leis de conservação da natureza. Se conhecemos o lagrangeano de uma teoria, bem como suas simetrias, o teorema de Noether nos fornece imediatamente as leis de conservação correspondentes.

Seja

$$L = L\,(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

o lagrangeano de um sistema físico(*). Definimos a *ação* do sistema por

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x\; L(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

As equações de Euler-Lagrange para os campos ϕ^a são

(*)Estamos usando "lagrangeano" no sentido de "densidade lagrangeana". Na verdade, o lagrangeano é a integral espacial da densidade lagrangeana.

obtidas através do princípio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \; \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) = 0 \quad ,$$

para t_1 e t_2 instantes quaisquer, onde as variações dos campos são nulas na fronteira da região espacial de integração e em t_1, t_2. Assim, encontramos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)} = 0 \qquad (1.1)$$

$a = 1, \ldots, n =$ nº de campos

$\mu = 0, 1, 2, 3$

Uma variação infinitésima nos campos produz uma variação em $\mathcal{L}$ dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_\mu} \delta \phi^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)} \delta(\partial_\nu \phi^a_\mu)$$

Já que

$$\delta(\partial_\nu \phi^a_\mu) = \partial_\nu(\delta \phi^a_\mu)$$

usando (1.1) temos:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)} \delta \phi^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)} \partial_\nu \delta \phi^a_\mu$$

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a_\mu)}\right] \delta \phi^a_\mu \qquad (1.2)$$

Se L for invariante frente às variações do campo, isto é, $\delta L = 0$, chegamos à seguinte lei de conservação:

$$\partial_\nu j_\nu = 0 \quad ,$$

onde

$$j_\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_\mu^a)} \delta\phi_\mu^a \tag{1.3}$$

é a "corrente" conservada.

1.2 - Transformações de Gauge(1)

Consideremos agora $L_0 = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi$, o lagrangeano livre do campo escalar complexo. É imediato verificar que L_0 é invariante sob a transformação

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) = U(\alpha)\phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x) = U^{-1}(\alpha)\phi^*(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde α é uma constante real. A razão desta invariância de L_0 reside, naturalmente, no fato de as derivadas $\partial_\mu\phi$, $\partial_\mu\phi^*$ se transformarem segundo a mesma lei de (1.4):

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi &\longrightarrow \partial_\mu\phi' = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi = U(\alpha)\partial_\mu\phi \\ \partial_\mu\phi^* &\longrightarrow \partial_\mu\phi^* = e^{-i\alpha}\partial_\mu\phi^* = U^{-1}(\alpha)\partial_\mu\phi^* \end{aligned} \tag{1.5}$$

A versão infinitesimal de (1.4) tem a seguinte forma:

$$\phi'(x) = (1 + i\alpha)\phi(x)$$
$$\phi'^*(x) = (1 - i\alpha)\phi^*(x) \tag{1.6}$$

de onde segue que:

$$\delta\phi(x) = i\alpha\phi(x)$$
$$\delta\phi^*(x) = -i\alpha\phi^*(x) \tag{1.7}$$

Desde que não envolve mudança nas coordenadas do espaço-tempo, (1.4) recebe o nome de *transformação interna*. Dizemos, pois, que L_0 possui *simetria interna*.

Através da equação (1.3) determinamos a corrente conservada j_μ associada à invariância de L_0:

$$j_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\,\delta\phi^* = i(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \quad (*)$$

A "carga" conservada fica dada por

$$Q = \int d^3x\; j_0$$

Como o parâmetro α não é uma função das coordenadas, isto é, $U(\alpha)$ atua da mesma maneira em todos os pontos do espaço-tempo, dizemos que (1.4) representa uma *transformação de gauge de primeira espécie ou global*(**). Em contrapartida, quando α passa a depender das coordenadas ($\alpha = \alpha(x)$) temos uma *transformação de gauge de segunda espécie ou local*. A idéia de se investi-

---

(*) Como α é uma constante arbitrária podemos esquecê-la na expressão para j^μ.

(**) Alguns autores preferem a palavra *calibre* ou *medida* ao invés de *gauge*.

tigar a invariância de uma teoria sob uma transformação de gauge local coube a C.N. Yang e R.I. Mills, inspirados no fato de que a propagação de interações entre campos se realiza com velocidade finita.

Examinemos agora a invariância de $\mathcal{L}_0$ frente a transformações locais, isto é, $U = U(\alpha(x))$. Nesse caso as equações (1.4) mantêm a mesma forma, enquanto que (1.5) se alteram:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi &\longrightarrow \partial_\mu\phi' = e^{i\alpha(x)}\left[\partial_\mu+i\alpha_\mu(x)\right]\phi \\ \partial_\mu\phi^* &\longrightarrow \partial_\mu\phi'^* = e^{-i\alpha(x)}\left[\partial_\mu-i\alpha_\mu(x)\right]\phi^* \quad , \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $\alpha_\mu(x) \equiv \partial_\mu\alpha(x)$.

Portanto, vemos que, quando $\alpha=\alpha(x)$, $U(\alpha)\partial_\mu\phi \neq \partial_\mu\phi'$. Quer dizer: as derivadas do campo ϕ não mais se transformam do mesmo modo que ϕ. Isto é o suficiente para que haja uma quebra da invariância de $\mathcal{L}_0$, pois, apesar do termo com massa $(\mu^2\phi^*\phi)$ continuar invariante, o mesmo não acontece com a parte cinética de $\mathcal{L}_0$, $\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi$.

Para restaurar essa invariância perdida substituimos, em $\mathcal{L}_0$, o operador ∂_μ por um outro operador "derivação", definido(*) por $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$, ao mesmo tempo exigindo que $D_\mu\phi$ se transforme de maneira idêntica a ϕ:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &\longrightarrow (D_\mu\phi)' \equiv (\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi' = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \\ D_\mu\phi^* &\longrightarrow (D_\mu\phi)'^* \equiv (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi'^* = e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* \end{aligned} \tag{1.9}$$

(*) e é uma constante real e A_μ um quadrivetor.

to mínimo)(*).

Para que possamos obter as equações de movimento do campo A_μ é necessário completar (1.11) acrescentando o lagrangeano livre $\mathcal{L}_{elet}$ de A_μ. A extrema semelhança com o campo eletromagnético nos sugere que escolhamos

$$\mathcal{L}_{elet} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad ,$$

onde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

É fácil constatar que $\mathcal{L}_{elet}$ é invariante sob a transformação (1.10), significando que A_μ e A'_μ descrevem a mesma realidade física. De modo que a presença de $\mathcal{L}_{elet}$ em (1.11) não altera sua invariância sob (1.5) e (1.10). Assim, obtemos uma teoria gauge-invariante com um lagrangeano total dado por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad . \qquad (1.12)$$

A esta altura é interessante notar que, antes da interação com o campo A_μ, ϕ e ϕ^* satisfazem exatamente à mesma equação de movimento:

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi = 0$$

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi^* = 0 \quad ,$$

com $\Box \equiv \partial_\mu\partial_\mu$. Quer dizer, não há como fazer distinção entre ϕ e ϕ^*; ambos descrevem precisamente a mesma partícula. Entretanto, depois da interação essas equações se modificam:

(*) Estamos considerando um sistema de unidades no qual $\hbar = c = 1$.

$$\partial_\mu\left[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi\right] + \mu^2\phi = 0$$

$$\partial_\mu\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*\right] + \mu^2\phi^* = 0 \quad .$$

Concluímos, então, que A_μ tem a característica de discernir entre ϕ e ϕ^*, os quais, depois da interação, não mais descrevem a mesma partícula e satisfazem equações diferentes.

Finalmente, é importante observar a ausência de termo de massa do tipo $m^2A_\mu A_\mu$ em (1.12) que, naturalmente, não é invariante de gauge. Isto significa que a partícula representada por A_μ (fóton) é forçada, por razões de invariância, a não ter massa. Vemos, portanto, que o lagrangeano (1.12) descreve precisamente a eletrodinâmica do campo escalar complexo e que o princípio da invariância sob uma transformação interna local "redescobre" o campo eletromagnético.

1.3 - Campos de Yang-Mills Não-Abelianos

Nesta seção estudaremos o aparecimento de campos de gauge quando consideramos o lagrangeano

$$L = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi \quad , \qquad (1.13)$$

em que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

é um triplete de espinores de Dirac, cada um correspondendo a um estado de cor de um campo de quark. Portanto, $\psi(x)$ é uma matriz coluna com doze componentes.

É imediato comprovar que (1.13) é invariante sob a transformação $U = U(\theta)$ definida abaixo:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi' = U(\theta)\psi = e^{i\theta^a G_a}\psi \\ \overline{\psi} &\longrightarrow \overline{\psi}' = \overline{\psi}U^{-1}(\theta) = \overline{\psi}\, e^{-i\theta^a G_a} \quad , \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde $U(\theta) = e^{i\theta^a G_a}$ é um elemento do grupo unitário SU(3) , θ^a são parâmetros constantes reais e G_a $(a = 1,\ldots,8)$ são os geradores do grupo na representação de matrizes 3x3. O grupo SU(3) é um grupo não-abeliano, isto é, seus elementos não comutam entre si; e seus geradores satisfazem à seguinte álgebra (de Lie):

$$\left[G_a, G_b\right] = f_{abc} G_c \quad ,$$

sendo f_{abc} as constantes de estrutura do grupo, anti-simétricas com relação aos índices a e b.

Na forma infinitesimal (1.14) torna-se:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi' = (1 + i\theta^a G_a)\psi \Longrightarrow \delta\psi = i\theta^a G_a \psi \\ \overline{\psi} &\longrightarrow \overline{\psi}' = \overline{\psi}(1 - i\theta^a G_a) \Longrightarrow \delta\overline{\psi} = -i\overline{\psi}\theta^a G_a \end{aligned} \tag{1.15}$$

Aplicando (1.3) encontramos a corrente associada à invariância de (1.13) sob (1.14):

$$j_\mu = - \overline{\psi}\gamma_\mu \theta^a\, G_a\, \psi \, .$$

Como os parâmetros θ_a são arbitrários temos oito quantidades conservadas:

$$j_\mu^a = \overline{\psi}\gamma_\mu G_a \psi \quad . \tag{1.16}$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente, consideremos os parâmetros θ_a como sendo funções do espaço-tempo $\left(\theta_a = \theta_a(x)\right)$. Com isto, novamente L deixa de ser invariante sob (1.14) e para restabelecer a invariância introduzimos oito campos "compensadores". O processo é idêntico ao que seguimos antes e começamos por definir uma derivada covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - B_\mu \quad ,$$

com $B_\mu = gB_\mu{}^a G_a$; g é a constante de acoplamento e $B_\mu{}^a$ são os campos de gauge ou *campos de Yang-Mills*.

Dessa maneira o lagrangeano (1.13) passa a ser:

$$L = \overline{\psi}(i\gamma_\mu D_\mu - m)\psi \tag{1.17}$$

Para encontrar a lei de transformação de B_μ impomos:

$$D'_\mu \psi' = UD_\mu \psi \quad ,$$

ou seja,

$$(\partial_\mu - B'_\mu)\, e^{i\theta^a G_a}\, \psi = e^{i\theta^a G_a}\, (\partial_\mu - B_\mu)\psi \quad -$$

$$B'_\mu\, e^{i\theta^a G_a} = e^{i\theta^a G_a}\, B_\mu + i\partial_\mu \theta^a G_a\, e^{i\theta^a G_a}$$

ou ainda,

$$B'_\mu U = UB_\mu + \partial_\mu U \qquad (1.18)$$

Multiplicando (1.18) à direita por U^{-1}, obtemos:

$$B'_\mu = UB_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (1.19)$$

Também podemos obter de (1.18):

$$B_\mu = U^{-1}B'_\mu U + (\partial_\mu U^{-1})U \quad (*) \qquad (1.20)$$

Se $B'_\mu = 0$ em (1.20) segue que $B_\mu = (\partial_\mu U^{-1})U$ e dizemos que nesse caso B_μ é um *gauge puro*. Concluímos, portanto, que só podemos anular um campo B_μ através de uma transformação de gauge quando B_μ for um gauge puro. Fisicamente isto significa que B_μ corresponde a um estado de vácuo.

Voltando a (1.17) vemos que precisamos ainda acrescentar a parte do lagrangeano que descreve a dinâmica livre dos campos $B_\mu{}^a$. É possível demonstrar sem maiores dificuldades que a imposição de invariância do lagrangeano livre dos campos de Yang-Mills sob a transformação (1.19) requer que $\mathcal{L}_{YM}$ assuma a forma particular $\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{YM}(F_{\mu\nu}{}^a)$, onde

$$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu B_\nu{}^a - \partial_\nu B_\mu{}^a + g\, f^{abc} B_\mu{}^b\, B_\nu{}^c$$

é conhecido como *tensor das intensidades de campo*. Definindo $F_{\mu\nu} \equiv gF_{\mu\nu}{}^a G_a$ temos que

---

(*) Notemos que $(\partial_\mu U)U^{-1} = -U\partial_\mu U^{-1}$.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \left[B_\mu, B_\nu\right] \quad . \tag{1.21}$$

Uma vez que B_μ se transforma segundo a equação (1.19) é fácil verificar que, para $F_{\mu\nu}$, temos:

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{1.22}$$

O lagrangeano invariante L_{YM} mais simples que podemos formar com $F_{\mu\nu}{}^a$ é, naturalmente,

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F_{\mu\nu}{}^a$$

As equações de movimento para ψ e $B_\mu{}^a$ (ou B_μ) serão obtidas do lagrangeano completo

$$L = \overline{\psi}(i\gamma_\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F_{\mu\nu}{}^a \quad . \tag{1.23}$$

Podemos interpretar as partículas sem massa que aparecem neste lagrangeano como sendo os "gluons". A força entre os quarks e, eventualmente, seu confinamento serão devidos a estes "gluons".

De (1.23) podemos extrair as equações de Yang-Mills:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + \left[B_\mu, F_{\mu\nu}\right] = J_\nu \quad , \tag{1.24}$$

onde J_ν representa a fonte dos campos de Yang-Mills. É bastante simples verificar a partir de (1.24) que a lei de transformação de J_ν é idêntica à de $F_{\mu\nu}$:

$$J'_\nu = UJ_\nu U^{-1}$$

É possível mostrar que $F_{\mu\nu}$ satisfaz às " identidades de Bianchi":

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\mu F_{\nu\rho} = 0 \tag{1.25}$$

Se definirmos o dual de $F_{\mu\nu}$ por

$$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} ,$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ é o tensor de Levi-Civita, a equação (1.25) é equivalente a

$$D_\mu F^*_{\mu\nu} = 0 \tag{1.26}$$

A presença de termos de auto-interação entre os campos de Yang-Mills torna a equação (1.24) difícil de se resolver. Esta auto-interação é responsável pela não-linearidade da teoria de Yang-Mills, consequência do fato de estarmos numa teoria não-abeliana, isto é, construída a partir de um grupo de simetria não-abeliano. No caso da eletrodinâmica do campo escalar complexo, que estudamos na seção anterior, o grupo de simetria (ou de gauge) era o U(1), um grupo abeliano. Se considerarmos o campo eletromagnético como sendo essencialmente um campo de gauge, então esse é o motivo da linearidade das equações de Maxwell.

CAPÍTULO II

CÓPIAS DE CAMPOS DE GAUGE

2.1 - O Surgimento das Cópias

Bastante conhecido em eletrodinâmica é o fato de que se dois potenciais(*) A_μ e A'_μ dão origem ao mesmo $F_{\mu\nu}$, então $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Isto é, o campo $F_{\mu\nu}$ determina os potenciais a menos de um gradiente de uma função arbitrária $\alpha(x)$. A demonstração desse resultado é bastante simples. Da definição de $F_{\mu\nu}$ temos:

$$F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\mu \qquad (2.1)$$

e

$$F_{\mu\nu}(A') = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \qquad (2.2)$$

Se $F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(A')$, as equações acima nos dão:

$$\partial_\mu \Delta_\nu - \partial_\nu \Delta_\mu = 0 \quad , \qquad (2.3)$$

onde $\Delta_\mu = A'_\mu - A_\mu$.

(*) A partir de agora ao que vínhamos chamando de *campo* (A_μ) e *intensidade de campo* ($F_{\mu\nu}$) denominaremos, respectivamente, de *potencial* (A_μ) e *campo* ($F_{\mu\nu}$).

Ou seja, Δ_μ é irrotacional; logo existe uma certa função $\alpha(x)$ tal que $\Delta_\mu = \partial_\mu \alpha(x)$. E assim, $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Diremos, então, que em eletrodinâmica todos os potenciais A_μ's associados a um dado $F_{\mu\nu}$ são *gauge-equivalentes*.

Em 1975 T.T. Wu e C.N. Yang[2] mostraram que o mesmo não ocorre em teorias não-abelianas. De fato, exibindo um exemplo em SU(2), eles conseguiram demonstrar que é possível dois potenciais A_μ e A'_μ estarem associados a um mesmo campo $F_{\mu\nu}$ sem, no entanto, serem gauge-equivalentes, i.e., sem haver uma transformação $U(x)$ (elemento do grupo de gauge) tal que $A'_\mu = U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U$. Esse fenômeno, conhecido como *ambigüidade de Wu-Yang* ou também como *cópias de campos de gauge* (abreviadamente cópias de gauge) e cujo significado físico ainda permanece um tanto obscuro, tem merecido a atenção de diversos pesquisadores. De fato, já existe hoje uma considerável literatura sobre o assunto. Entre outros, podemos citar os trabalhos de S. Deser - F. Wilczek[3], M. Calvo[4], R. Roskies[5], S. Coleman[6], M.B. Halpern[7], C.G. Bollini-J.J.Giambiagi-J.Tiomno[8,9], S. Solomon[10], N. Weiss[11] e S. Deser-W.Drechsler[12]. É nosso objetivo discutir os principais resultados de alguns destes trabalhos, nos quais são apresentados novos exemplos dessa ambigüidade, bem como condições necessárias para sua existência.

2.2 - O Exemplo de Wu-Yang[2]

Consideremos dois potenciais $(b_\mu{}^k)_A$ e $(b_\mu{}^k)_C$ em

SU(2) [(*)] dados por:

$$(b_0{}^k)_A = 0 \quad , \quad (b_i{}^k)_A = \varepsilon_{ijk} \frac{x^j}{r^2} (\gamma-1) \quad , \qquad (2.4)$$

$$(b_\mu{}^1)_C = (b_\mu{}^2)_C = (b_0{}^3)_C = (b_r{}^3)_C = (b_\theta{}^3)_C = 0 \quad , \quad (b_\phi{}^3)_C =$$

$$= - \frac{(1-\gamma^2)}{r} \ \mathrm{tg} \frac{\theta}{2} \quad , \qquad (2.5)$$

onde γ é uma constante, $i = 1, 2, 3$; e os índices θ, r, ϕ indicam projeções esféricas[(**)].

Os campos $(f^k_{\mu\nu})_A$ e $(f^k_{\mu\nu})_C$ determinados por $(b^k_\mu)_A$ e $(b^k_\mu)_C$ são dados, respectivamente, por:

$$(f^k_{oi})_A = 0 \quad , \quad (f^k_{ij})_A = \varepsilon_{ij\ell} \frac{x^\ell x^k}{r^4} (1-\gamma^2) \quad , \qquad (2.6)$$

$$(f^k_{oi})_C = (f^1_{ij})_C = (f^2_{ij})_C = 0 \quad , \quad (f^3_{ij})_C = \varepsilon_{ij\ell} \frac{x^\ell}{r^3}(1-\gamma^2) \qquad (2.7)$$

Calculando as fontes dos potenciais (2.4) e (2.5) através de[(***)]

$$j^k_\nu = \partial_\mu F_{\mu\nu}{}^k + \varepsilon_{k\ell m}\, b^\ell_\mu F_{\mu\nu}{}^m \quad ,$$

(*) Estamos tomando como geradores de SU(2) as matrizes $\sigma_k/2i$ (σ_k - matrizes de Pauli), o que significa que as constantes de estrutura são os ε_{ijk}'s.

(**) Os potenciais (2.4) e (2.5) estão definidos sobre uma região do espaço que não contém a origem, nem pontos do semi-eixo negativo Z, excluindo assim o "string" de Dirac, onde o potencial vetor de um monopolo magnético é singular.

(***) Essa equação é a correspondente de (1.24), escrita em termos dos índices do espaço isotópico com g=1, convenção que adotaremos daqui por diante.

encontramos:

$$(j_0^k)_A = 0 \quad , \quad (j_i^k)_A = \varepsilon_{ijk} x^j \gamma(\dot{\gamma}^2-1) \quad , \tag{2.8}$$

$$(j_\mu^k)_C = 0 \quad . \tag{2.9}$$

Podemos realizar uma "rotação de gauge" em $(f_{\mu\nu}^k)_C$ de forma a fazê-lo coincidir com $(f_{\mu\nu}^k)_A$. Um cálculo simples nos mostra que o elemento de SU(2) correspondente a esta rotação será

$$U = e^{-i\frac{\phi}{2}\, SgZ\sigma_3}\, e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_2}\, e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_3} \tag{2.10}$$

Em outras palavras, com a transformação (2.10) temos

$$(F_{\mu\nu})_B = U^{-1}(F_{\mu\nu})_C U = (F_{\mu\nu})_A \quad , \tag{2.11}$$

onde, naturalmente,

$$(F_{\mu\nu})_A=(f_{\mu\nu}^k)_A \frac{\sigma_k}{2i} \quad , \quad (F_{\mu\nu})_C=(f_{\mu\nu}^k)_C \frac{\sigma_k}{2i} \quad , \quad (F_{\mu\nu})_B=(f_{\mu\nu}^k)_B \frac{\sigma_k}{2i} \quad .$$

A transformação do potencial $(B_\mu)_C=(b_\mu^k)_C \frac{\sigma^k}{2i}$ fica dada por

$$(B_\mu)_B = U^{-1}(B_\mu)_C\, U + U^{-1}\partial_\mu U \tag{2.12}$$

A equação (2.11) representa, de fato, uma rotação no espaço isotópico, transformando o isovetor $(f_{\mu\nu}^k)_C$ no isovetor $(f_{\mu\nu}^k)_A$. Por outro lado, a equação (2.12) nos dá a expressão para $(b_\mu{}^k)_B$: (*)

$$(b_0{}^k)_B=0 \quad , \quad (b_i{}^k)_B = \frac{1}{r^2}\,(\varepsilon_{ijk}x^j + \gamma^2\phi^i x^k\ \mathrm{tg}\theta) \quad ,(2.13)$$

onde ϕ^i é a i-ésima componente do vetor $\vec{e}_\phi = (-\mathrm{sen}\phi, \cos\phi, 0)$.

Pela razão de $(j^k_\mu)_C$ ser nulo, $(b^k_\mu)_B$ também não terá fontes(**). Temos, portanto, dois potenciais $(b^k_\mu)_A$, $(b^k_\mu)_B$ gerando o mesmo campo, porém um com fontes e o outro sem fontes. Consequentemente, estes dois potenciais não podem estar relacionados por uma transformação de gauge. Caso contrário, deveria existir $\Omega(x)$ tal que

$$(B_\mu)_A = \Omega^{-1}(B_\mu)_B\Omega + \Omega^{-1}\partial_\mu\Omega \quad ,$$

que implicaria em termos

$$(j_\mu)_A = \Omega^{-1}(j_\mu)_B\Omega = 0 \quad .$$

Ademais, a ausência de fontes para $(b_\mu{}^k)_B$ o torna fisicamente distinto de $(b_\mu{}^k)_A$. Esse fato surpreendente nos indica que, na realidade, o campo $f_{\mu\nu}$ não traz em si toda a informação física necessária: duas distribuições de corrente fisicamente não-equivalentes podem estar associadas a um único $f_{\mu\nu}$.

(*) Uma vez conhecido $(B_\mu)_B$ podemos calcular $(b^k_\mu)_B$ através de $(b_\mu{}^k)_B = -i\mathrm{Tr}(B_\mu\sigma_k)$.

(**) $(j_\mu)_B = U^{-1}(j_\mu)_C U = 0$ (cf. pag. 12).

2.3 - O Exemplo de Wu-Yang Generalizado

Alguns resultados relativos a cópias de campos de gauge foram apresentados recentemente por Bollini - Giambiagi- -Tiomno[8] num trabalho no qual o exemplo estudado por Wu e Yang aparece como caso particular de um exemplo mais geral.

Consideremos um potencial de vácuo $\phi_\mu = \phi_\mu^a G_a$, sendo G_a os geradores do grupo de simetria. Por definição sabemos que ϕ_μ satisfaz à equação

$$\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu + \left[\phi_\mu , \phi_\nu\right] = 0 \qquad (2.14)$$

Se definirmos os potenciais *quase-puros* $A_\mu^{(\alpha)}$ e $A_\mu^{(1-\alpha)}$ por

$$A_\mu^{(\alpha)} = \alpha \phi_\mu \qquad (2.15)$$

$$A_\mu^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)\phi_\mu \quad , \qquad (2.16)$$

onde $\underline{\alpha}$ é um parâmetro constante, então verificamos de imediato que eles geram exatamente o mesmo campo

$$F_{\mu\nu}^{(\alpha)} = -\alpha(1-\alpha)\left[\phi_\mu , \phi_\nu\right] = \alpha(1-\alpha)(\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) \quad . \qquad (2.17)$$

As distribuições de corrente que correspondem a estes potenciais,

$$j_\nu^{(\alpha)} = \partial_\mu F_{\mu\nu}^{(\alpha)} + \left[A_\mu^{(\alpha)} , F_{\mu\nu}^{(\alpha)}\right] \quad ,$$

satisfazem às seguintes relações:

$$j_\nu^{(\alpha)} - j_\nu^{(1-\alpha)} = -\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)\left[\phi_\mu, [\phi_\mu, \phi_\nu]\right] ,$$

$$j_\nu^{(\alpha)} + j_\nu^{(1-\alpha)} = -2\alpha(1-\alpha)\left\{\partial_\mu\,[\phi_\mu, \phi_\nu] + \frac{1}{2}\left[\phi_\mu, [\phi_\mu, \phi_\nu]\right]\right\} .$$

Passamos a indagar neste momento se existe uma conexão entre $A_\mu^{(\alpha)}$ e $A_\mu^{(1-\alpha)}$. via uma transformação de gauge U. Suponhamos inicialmente que haja uma equivalência de gauge, isto é,

$$A_\mu^{(1-\alpha)} = U^{-1}\, A_\mu^{(\alpha)}\, U + U^{-1}\, \partial_\mu\, U \tag{2.18}$$

e

$$F_{\mu\nu}^{(1-\alpha)} = U^{-1}\, F_{\mu\nu}^{(\alpha)}\, U \quad , \tag{2.19}$$

onde $\underline{U}$ é um certo elemento do grupo de gauge.

Substituindo as equações (2.15) e (2.16) em (2.18) , vem:

$$(1-\alpha)\phi_\mu = U^{-1}\alpha\phi_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U \tag{2.20}$$

Combinando (2.17) com (2.19) obtemos:

$$U(\phi_{\nu,\mu}-\phi_{\mu,\nu})U^{-1} = \phi_{\nu,\mu}-\phi_{\mu,\nu} \quad , \tag{2.21}$$

onde estamos adotando a notação $\phi_{\nu,\mu} \equiv \partial_\mu\phi_\nu$

Dado que ϕ_μ é um gauge puro, tem a forma

$$\phi_\mu = U_0^{-1}\,\partial_\mu\, U_0 \quad , \tag{2.22}$$

sendo U_0 um elemento do grupo.

Comparando (2.20) com (2.22) observamos que $U = U_0$

quando $\alpha = 0$. Assim, da equação (2.21) para $U = U_0$ e da equação (2.22) temos:

$$U_{0,\mu}U^{-1}_{0,\nu} - U_{0,\nu}U^{-1}_{0,\mu} = U^{-1}_{0,\mu}U_{0,\nu} - U^{-1}_{0,\nu}U_{0,\mu} \quad . \qquad (2.23)$$

Esta última equação representa uma condição necessária para que $A_\mu^{(\alpha)}$ e $A_\mu^{(1-\alpha)}$ sejam equivalentes de gauge. Basta, então, que escolhamos U_0 não satisfazendo (2.23) para obtermos cópias.

Para ilustrar com um exemplo consideremos o caso em que o grupo de gauge é SU(2). Neste caso U_0 terá a forma

$$U_0 = e^{i\theta\sigma} = \cos\theta + i\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \qquad (2.24)$$

onde $\theta=\theta(x)$, $\sigma=\vec{\sigma}.\vec{n}$ e $\vec{n}=\vec{n}(x)$ é um vetor unitário.

Uma vez que

$$U_{0,\mu} = i\; U_0\; \sigma\theta_{,\mu} + i\;\mathrm{sen}\,\theta\sigma_{,\mu} \quad , \qquad (2.25)$$

a equação (2.23) passa a ser:

$$(U_{0,\mu}U^{-1}_{0,\nu}-U_{0,\nu}U^{-1}_{0,\mu})-(U^{-1}_{0,\mu}U_{0,\nu}-U^{-1}_{0,\nu}U_{0,\mu}) = 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta(\theta_{,\mu}\sigma_{,\nu}-\theta_{,\nu}\sigma_{,\mu})=0 \qquad (2.26)$$

Ou seja, (2.23) será satisfeita se, e somente se

$$\theta_{,\mu}\sigma_{,\nu} - \theta_{,\nu}\sigma_{,\mu} = 0 \quad . \qquad (2.27)$$

Em três dimensões e escolhendo $\vec{n} = \vec{r}/r$ a equação

(2.27) se reduz a

$$\theta_{,i}\sigma_{,j} - \theta_{,j}\sigma_{,i} = 0 \quad , \tag{2.28}$$

ou ainda,

$$\vec{\nabla}\theta \times \vec{\nabla}\sigma = 0$$

Como

$$\vec{\nabla}\sigma = \frac{\vec{\sigma}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\sigma \quad ,$$

obtemos, então,

$$\vec{\nabla}\theta \times \frac{\vec{\sigma}}{r} - \vec{\nabla}\theta \times \frac{\vec{r}}{r^2}\,\sigma = 0 \tag{2.29}$$

Fazendo o produto escalar de (2.29) com $\vec{r}$ segue que

$$\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\theta \times \frac{\vec{\sigma}}{r}) = 0$$

ou

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla}\theta)\cdot \frac{\vec{\sigma}}{r} = 0$$

Como as matrizes de Pauli são linearmente independentes, vem que

$$\vec{r} \times \vec{\nabla}\theta = 0 \tag{2.30}$$

Agora, voltando para (2.29) e usando (2.30), concluímos que

$$\vec{\nabla}\theta = 0 \quad ,$$

o que implica em θ ser constante.

Resulta daí que se θ não for tomado como constante, então os potenciais $\vec{A}^{(\alpha)}$ e $\vec{A}^{(1-\alpha)}$ gerados por (2.24) não estarão relacionados por nenhuma transformação de gauge, o que quer dizer que são cópias.

Mantendo o mesmo grupo, SU(2), e continuando em três dimensões, tomemos em (2.24) $\theta = \pi/2$. Isto significa que(*)

$$U_0 = i\sigma \tag{2.31}$$

e as equações (2.15), (2.16), (2.17) passam a ser:

$$\vec{A}^{(\alpha)} = \alpha\sigma\vec{\nabla}\sigma \tag{2.32}$$

$$\vec{A}^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)\ \sigma\vec{\nabla}\sigma \tag{2.33}$$

$$F_{ij}^{(\alpha)} = F_{ij}^{(1-\alpha)} = \alpha(1-\alpha)(\sigma_{,i}\sigma_{,j}-\sigma_{,j}\sigma_{,i}) \quad . \tag{2.34}$$

Definindo $\vec{B}$ como sendo o dual de F_{ij} ($B_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}F_{jk}$), segue que(**)

$$\vec{B}^{(\alpha)} = \vec{B}^{(1-\alpha)} = \alpha(1-\alpha)\vec{\nabla}\sigma \times \vec{\nabla}\sigma \quad . \tag{2.35}$$

Além disso, não é difícil verificar que $\vec{\nabla}\cdot(\{\vec{\nabla}\sigma\times\vec{\nabla}\sigma\}\sigma) = 0$, acarretando a existência de um vetor $\vec{a}(\vec{r})$ satisfazendo

$$\vec{\nabla}\sigma \times \vec{\nabla}\sigma = i\sigma\vec{\nabla} \times \vec{a} \tag{2.36}$$

Consequentemente, podemos escrever (2.35) como

(*) É trivial verificar que $U_0 = i\sigma$ leva $\vec{A}^{(\alpha)}$ em $\vec{A}^{(1-\alpha)}$.

(**) Para calcular $\vec{B}$ basta usar a equação $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{A}$.

$$\vec{B}^{(\alpha)} = \vec{B}^{(1-\alpha)} = i\alpha(1-\alpha)\sigma\vec{\nabla} \times \vec{a} \quad . \tag{2.37}$$

Agora definamos um terceiro potencial $\vec{A}'^{(\alpha)}$ da seguinte maneira:

$$\vec{A}'^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\,\sigma\vec{\nabla}\sigma - i(\alpha - \frac{1}{2})^2\,\sigma\vec{a} \tag{2.38}$$

E um cálculo direto nos fornece

$$\vec{B}'^{(\alpha)} = \alpha(1-\alpha)\,\vec{\nabla}\sigma \times \vec{\nabla}\sigma, \tag{2.39}$$

que coincide com (2.35).

As três correntes associadas a $\vec{A}^{(\alpha)}$, $\vec{A}^{(1-\alpha)}$ e $\vec{A}'^{(\alpha)}$ serão, respectivamente:

$$\vec{J}^{(\alpha)} = i\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)\vec{\nabla}\sigma\times\vec{\nabla}\times\vec{a} + i\alpha(1-\alpha)\sigma\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a} \tag{2.40}$$

$$\vec{J}^{(1-\alpha)} = -i\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)\vec{\nabla}\sigma\times\vec{\nabla}\times\vec{a} + i\alpha(1-\alpha)\sigma\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a} \tag{2.41}$$

$$\vec{J}'^{(\alpha)} = i\alpha(1-\alpha)\sigma\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a} \quad . \tag{2.42}$$

Neste ponto temos um resultado fundamental: vamos demonstrar que os dois potenciais $\vec{A}^{(\alpha)}$ e $\vec{A}'^{(\alpha)}$ não estão relacionados por nenhuma transformação de gauge. Para tanto, suponhamos o inverso, isto é, que $\vec{A}^{(\alpha)}$ e $\vec{A}'^{(\alpha)}$ sejam gauge-equivalentes:

$$\vec{A}'^{(\alpha)} = \Omega^{-1}\,\vec{A}^{(\alpha)}\,\Omega + \Omega^{-1}\,\vec{\nabla}\,\Omega^{-}\,, \tag{2.43}$$

para um certo $\Omega \in SU(2)$. Ora, mas então temos também que

$$\vec{B}'^{(\alpha)} = \vec{B}^{(\alpha)} = \Omega^{-1}\,\vec{B}^{(\alpha)}\,\Omega \quad ,$$

significando que Ω comuta com σ (ver eq. (2.37)). Isto nos leva a

$$\vec{j}^{(\alpha)} = \Omega\,\vec{j}'^{(\alpha)}\Omega^{-1} = \vec{j}'^{(\alpha)} \quad ,$$

que é uma contradição. Concluímos, pois, que de fato não existe uma tal Ω que relacione $\vec{A}^{(\alpha)}$ e $\vec{A}^{(1-\alpha)}$. Portanto, estes potenciais são cópias de gauge.

Se tomarmos um vetor $\vec{a}$ tal que $\vec{\nabla}\times\vec{a} = \vec{r}/r^3$, então teremos o exemplo de Wu-Yang que descrevemos na seção anterior.

2.4 - Cópias de Ação e o Método de Halpern

Nesta seção discutiremos alguns resultados importantes obtidos por M.B. Halpern(7), que desenvolveu um método para a obtenção de cópias num gauge axial ($n_\mu A_\mu = 0$) e introduziu o conceito de *cópias de ação*.

2.4.1 - Cópias Num Gauge Axial

Consideremos dois potenciais A_μ e A'_μ, com $A'_\mu = A_\mu + \Delta_\mu$. Uma condição necessária para que A_μ e A'_μ sejam cópias é que

$$F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(A') = F_{\mu\nu}(A+\Delta) \quad , \qquad (2.44)$$

ou seja,

$$F_{\mu\nu}(\Delta) + \left[A_\mu, \Delta_\nu\right] - \left[A_\nu, \Delta_\mu\right] = 0 \quad , \tag{2.45}$$

com

$$F_{\mu\nu}(\Delta) = \partial_\mu \Delta_\nu - \partial_\nu \Delta_\mu + \left[\Delta_\mu, \Delta_\nu\right] .$$

Se nos restringirmos ao gauge temporal, isto é, $A_0 = A_0' = \Delta_0 = 0$, então a equação (2.45) se desdobra em:

$$F_{oi}(\Delta) = 0 \quad , \tag{2.46a}$$

$$F_{ij}(\Delta) + \left[A_i, \Delta_j\right] - \left[A_j, \Delta_i\right] = 0 \tag{2.46b}$$

A equação (2.46a) nos diz que $\partial_0 \Delta_i = 0$, quer dizer, Δ_i não depende do tempo:

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}(\vec{r})$$

Agora vamos tomar como uma condição de contorno

$$\lim_{t \to -\infty} A_i = 0 \ . \tag{2.47}$$

Fazendo $t \to -\infty$ em (2.46b) e usando (2.47), obtemos duas equações separadas:

$$F_{ij}\left[\vec{\Delta}(\vec{r})\right] = 0 \tag{2.48}$$

$$\left[A_i, \Delta_j(\vec{r})\right] - \left[A_j, \Delta_i(\vec{r})\right] = 0 \tag{2.49}$$

Sabemos que a solução de (2.48) tem a forma de um gauge puro, isto é,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \Omega^{\dagger}(\vec{r})\vec{\nabla}\Omega(\vec{r}) \quad ^{(*)} \tag{2.50}$$

A equação (2.49) também pode ser escrita com os índices do espaço interno:

$$\Delta_{ij}^{ab}\, A_j^b = 0 \quad , \tag{2.51}$$

onde

$$\Delta_{ij}^{ab} \equiv \varepsilon_{ijk}\, f^{abc}\, \Delta_k^c \left[\Omega(\vec{r})\right]$$

e f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo.

Portanto, os potenciais que possuem cópias deverão ser auto-vetores da matriz (9x9) $\Delta_{ij}^{ab}\,(\Omega(\vec{r}))$ com autovalor zero. Precisamos, assim, encontrar funções $\Omega(\vec{r})$ para as quais seja válida a equação

$$\det\left[\Delta_{ij}^{ab}\left[\Omega(\vec{r})\right]\right] = 0 \ . \tag{2.52}$$

Feito isto, passamos a resolver o problema de autovalor da eq. (2.51).

Tomemos um exemplo em SU(2). É possível, neste caso mostrar que

$$\det\left[\Delta_{ij}^{ab}\right] = -2\left[\det(\Delta_i^a)\right]^3$$

E dessa maneira (2.52) nos dá:

$$\det \Delta_i^a = 0 \tag{2.53}$$

(*) Estamos considerando um grupo de gauge unitário, i.e., $\Omega^{-1} = \Omega^{\dagger}$.

Isto significa que as linhas (ou colunas) da matriz Δ_i^a não são linearmente independentes, quer dizer, existem C_i's nem todos nulos tais que se verifica a equação

$$C_i(\vec{r})\Delta_i^a(\vec{r}) = 0 \quad ,$$

ou ainda

$$\vec{C}(\vec{r})\cdot\Delta(\vec{r}) = 0 \qquad (2.54)$$

Tendo em vista (2.50), isto é equivalente a

$$\vec{C}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\Omega(\vec{r}) = 0 \quad . \qquad (2.55)$$

Sejam $\phi_1(\vec{r})$, $\phi_2(\vec{r})$ e $\phi_3(\vec{r})$ três funções tais que o Jacobiano $\det[\partial\phi_a/\partial\vec{r}]$ seja diferente de zero em todo o espaço e escolhamos, por exemplo, $\vec{C}(\vec{r}) = \partial\vec{r}/\partial\phi_3$. Então, qualquer função unitária $\Omega(\phi_1,\phi_2)$ será solução de (2.55).

Até o momento não temos um critério para distinguir se A e A' (construído desta maneira) são ou não gauge-equivalentes. É instrutivo examinar essa questão quando escolhemos $\Omega = \Omega(z)$. Nesse caso

$$\Delta_1(\vec{r}) = \Delta_2(\vec{r}) = 0 \qquad (2.56)$$

e

$$\Delta_3(\vec{r}) = \Omega^{\dagger}(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Omega(z) \qquad (2.57)$$

Com essas equações (2.51) torna-se(*)

(*) A seta indica notação vetorial no espaço isotópico.

$$\vec{\Delta}_3 \times \vec{A}_1 = 0$$
$$\vec{\Delta}_3 \times \vec{A}_2 = 0 \quad , \tag{2.58}$$

cuja solução tem a forma

$$\vec{A}_1 = f_1(\vec{r},t)\vec{\Delta}_3 \quad ,$$
$$\vec{A}_2 = f_2(\vec{r},t)\vec{\Delta}_3 \quad , \tag{2.59}$$

e $\vec{A}_3$, arbitrário.

Portanto,

$$A_1' = A_1 = f_1(\vec{r},t)\Omega^\dagger(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Omega(z) \quad ,$$
$$A_2' = A_2 = f_2(\vec{r},t)\Omega^\dagger(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Omega(z) \quad , \tag{2.60}$$
$$A_3' = A_3 + \Delta_3 = A_3 + \Omega^\dagger(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Omega(z)$$

Se $f_1 = f_2 = 0$, teremos

$$A_1' = A_1 = 0 \quad ,$$
$$A_2' = A_2 = 0 \quad , \tag{2.61}$$
$$A_3' = A_3 + \Delta_3 = A_3 + \Omega^\dagger(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Omega(z) \quad ,$$

equações que representam um conjunto infinito de potenciais que geram o mesmo $F_{\mu\nu}$. Observemos, agora, que se tomamos $\Omega(z)$ com $[\Omega(z),A_3] = 0$, A'_μ será a transformada de A_μ por $\Omega(z)$. Caso contrário, teremos cópias.

2.4.2 - Cópias de Ação

Dizemos que dois potenciais não gauge-equivalentes A_μ e A'_μ são *cópias de ação* quando

$$Tr\left[F_{\mu\nu}(A)F_{\mu\nu}(A)\right] = Tr\left[F_{\mu\nu}(A')F_{\mu\nu}(A')\right] , \qquad (2.62a)$$

ou, equivalentemente,

$$F_{\mu\nu}{}^a(A)F_{\mu\nu}{}^a(A) = F_{\mu\nu}{}^a(A')F_{\mu\nu}{}^a(A') \qquad (2.62b)$$

Naturalmente cópias de campo ($F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(A')$) são cópias de ação; todavia a implicação inversa não é válida.

Suponhamos que temos um potencial A_μ (com $A_0 \neq 0$) e desejamos levá-lo ao gauge temporal por meio de uma transformação Ω. Para isto Ω deverá satisfazer à seguinte equação diferencial:

$$\Omega^\dagger A_0\Omega + \Omega^\dagger\partial_0\Omega = 0 \qquad (2.63)$$

Vemos, então, que(*) $\Omega = \Omega(A)$. Consideremos agora dois potenciais A_μ e A'_μ, cópias de gauge. Então,

$$F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(A') \qquad (2.64)$$

Suponhamos ainda que A_μ e A'_μ estejam num certo gauge fixo e os levamos para $(\bar{A}_\mu, \bar{A}'_\mu)$ num outro gauge (ver figura 1). Temos, en

---

(*) Quando uma transformação depende do potencial, $\Omega = \Omega(A)$, Halpern a denomina de "operator-gauge transformation".

tão,

$$\bar{A}_\mu = \Omega^\dagger(A)A_\mu\Omega(A) + \Omega^\dagger(A)\partial_\mu\Omega(A) \quad , \qquad (2.65)$$

$$\bar{A}'_\mu = \Omega^\dagger(A')A'_\mu\Omega(A') + \Omega^\dagger(A')\partial_\mu\Omega(A') \quad , \qquad (2.66)$$

$$F_{\mu\nu}(\bar{A}) = \Omega^\dagger(A)F_{\mu\nu}(A)\Omega(A) \quad , \qquad (2.67)$$

$$F_{\mu\nu}(\bar{A}') = \Omega^\dagger(A')F_{\mu\nu}(A')\Omega(A') \qquad (2.68)$$

De (2.67) e (2.68) obtemos

$$F_{\mu\nu}(\bar{A}) = \Omega^\dagger(A)\Omega(A')F_{\mu\nu}(\bar{A}')\Omega^\dagger(A')\Omega(A) \ . \qquad (2.69)$$

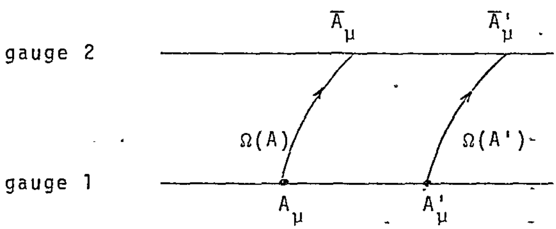

Figura 1

Da equação (2.69) encontramos

$$\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(\bar{A})F_{\mu\nu}(\bar{A})\right] = \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(\bar{A}')F_{\mu\nu}(\bar{A}')\right] . \ ^{(*)} \qquad (2.70)$$

Concluímos, desse modo, que o conceito de cópias de

(*) Estamos usando a propriedade cíclica Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA).

campo não é invariante ao mudarmos de gauge, enquanto que a noção de cópias de ação mantém-se invariante em todos os gauges. Com isso consegue-se um mecanismo capaz de gerar uma infinidade de cópias de ação a partir de cópias de campo em gauges axiais (o gauge temporal é, naturalmente, um gauge axial com $\eta_\mu=(1,0,0,0)$). Explicando: os conjuntos de cópias de campo em todos os gauges são levados a um dado gauge fixo. Como cópias de campo num certo gauge serão cópias de ação em qualquer outro gauge, então cada um destes conjuntos irá contribuir na construção de uma família infinita de cópias de ação.

2.5 - Condições Necessárias para a Existência de Cópias de Gauge

Depois de havermos estudado alguns exemplos simples, porém instrutivos, é de interesse examinar algumas condições necessárias para que um dado campo $F_{\mu\nu}$ admita cópias. Estas condições foram primeiramente obtidas nos trabalhos de R.Roskies [4] e M. Calvo[5].

Consideremos, novamente, dois potenciais A_μ e A'_μ dando origem ao mesmo campo $F_{\mu\nu}$. As equações $D_\mu F^*_{\mu\nu} = 0$ ($F^*_{\mu\nu}$ é o dual de $F_{\mu\nu}$) para A_μ e A'_μ são:

$$\partial_\mu F^*_{\mu\nu} + \left[A_\mu, F^*_{\mu\nu}\right] = 0 \qquad (2.71)$$

e

$$\partial_\mu F^*_{\mu\nu} + \left[A'_\mu, F^*_{\mu\nu}\right] = 0 \qquad (2.72)$$

Em termos dos índices do espaço interno estas equa - ções se escrevem como

$$(\delta^{ac}\partial_\mu + f^{abc}A_\mu{}^b)F^{*c}_{\mu\nu} = 0 \quad , \qquad (2.71)'$$

$$(\delta^{ac}\partial_\mu + f^{abc}A'^{\,b}_\mu)F^{*c}_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.72)'$$

Subtraindo (2.71)' de (2.72)' resulta:

$$f^{abc}\Delta_\mu{}^b F^{*c}_{\mu\nu} = 0 \quad , \qquad (2.73)$$

ou ainda

$$f^{abc}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^c_{\lambda\rho}\Delta^b_\mu = 0 \; , \qquad (2.74)$$

onde

$$\Delta_\mu{}^b = A'^{\,b}_\mu - A_\mu{}^b$$

Definindo $M^{ab}_{\mu\nu}$ por $M^{ab}_{\mu\nu} \equiv f^{abc}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^c_{\lambda\rho}$, temos(*)

$$M^{ab}_{\mu\nu}\,\Delta_\mu{}^b = 0 \quad . \qquad (2.75)$$

Esta última equação representa um sistema de equações algébri - cas lineares e homogêneas. Para que tenhamos solução não-trivi al é preciso que

$$\det\left[M^{ab}_{\mu\nu}\right] = 0 \quad . \qquad (2.76)$$

(*) $M^{ab}_{\mu\nu}$ é uma matriz de dimensão $4(n^2-1)$, onde $\binom{a}{\mu}$ são índices de linha e $\binom{b}{\nu}$ são índices de coluna. Estamos considerando SU(n) como grupo de gauge.

Para finalizar este capítulo investiguemos, em SU(2), condições necessárias para se ter cópias de campo e de corrente ao mesmo tempo. Usando a notação de isovetor temos, nesse caso,

$$\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + (\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu) = \partial_\mu \vec{A}'_\nu - \partial_\nu \vec{A}'_\mu + (\vec{A}'_\mu \times \vec{A}'_\nu) \qquad (2.77)$$

e

$$\partial_\mu \vec{f}_{\mu\nu} + \vec{A}_\mu \times \vec{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{f}_{\mu\nu} + \vec{A}'_\mu \times \vec{f}_{\mu\nu} = \vec{J}_\nu \qquad (2.78)$$

A primeira equação nos permite escrever

$$\partial_\mu \vec{\Delta}_\nu - \partial_\nu \vec{\Delta}_\mu + (\vec{\Delta}_\mu \times A'_\nu - \vec{\Delta}_\nu \times A'_\mu - \vec{\Delta}_\mu \times \vec{\Delta}_\nu) = 0 \quad , \qquad (2.79)$$

que é equivalente a (2.45). A segunda equação nos dá:

$$\vec{\Delta}_\mu \times \vec{f}_{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad (2.80)$$

Essas duas equações, (2.79) e (2.80), formam um sistema de 18 equações diferenciais e 12 equações algébricas. Pondo (2.80) numa forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -f^3_{\mu\nu} & f^2_{\mu\nu} \\ f^3_{\mu\nu} & 0 & -f^1_{\mu\nu} \\ -f^2_{\mu\nu} & f^1_{\mu\nu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^1_\mu \\ \Delta^2_\mu \\ \Delta^3_\mu \end{bmatrix} = 0 \quad . \qquad (2.81)$$

E, mais uma vez, para que (2.81) nos dê uma solução não-trivial $(\Delta^a_\mu \neq 0)$ é necessário que

$$\det\begin{bmatrix} 0 & -f^3_{\mu\nu} & f^2_{\mu\nu} \\ f^3_{\mu\nu} & 0 & -f^1_{\mu\nu} \\ -f^2_{\mu\nu} & f^1_{\mu\nu} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

É possível, ainda, mostrar que o desenvolvimento deste determinante nos dá:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & -f^3_{\mu\nu} & f^2_{\mu\nu} \\ f^3_{\mu\nu} & 0 & -f^1_{\mu\nu} \\ -f^2_{\mu\nu} & f^1_{\mu\nu} & 0 \end{bmatrix} = \left\{\frac{1}{96}\left[\vec{f}_{\mu\nu}\cdot(\vec{f}_{\alpha\beta}\times\vec{f}_{\rho\sigma})\right]\left[\vec{f}^{*}_{\mu\nu}\cdot(\vec{f}_{\alpha\beta}\times\vec{f}_{\rho\sigma})^{*}\right]\right\}^2 \tag{2.82}$$

Assim, se (2.82) for diferente de zero podemos garantir que o campo $\vec{f}_{\mu\nu}$ determina univocamente o potencial $\vec{A}_\mu$, não havendo possibilidade de existência de cópias. Nesse caso a equação

$$\vec{A}_\mu \times \vec{f}_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \vec{f}_{\mu\nu} - \vec{j}_\nu) \equiv \vec{J}_\nu \quad , \tag{2.83}$$

que tem a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -f_{\mu\nu}^{\ 3} & f_{\mu\nu}^{\ 2} \\ f_{\mu\nu}^{\ 3} & 0 & -f_{\mu\nu}^{\ 1} \\ -f_{\mu\nu}^{\ 2} & f_{\mu\nu}^{\ 1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_\mu^{\ 1} \\ A_\mu^{\ 2} \\ A_\mu^{\ 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\nu^{\ 1} \\ J_\nu^{\ 2} \\ J_\nu^{\ 3} \end{bmatrix} , \tag{2.84}$$

pode ser resolvida para $\vec{A}_\mu$

CAPÍTULO III

O MÉTODO DE BOLLINI-GIAMBIAGI-TIOMNO E AS CÓPIAS DE CAMPO QUASE-ABELIANO

Neste capítulo vamos focalizar nossa atenção no exame particular de dois métodos relativos à construção de cópias de campo. O primeiro, desenvolvido por Bollini-Giambiagi-Tiomno[9], faz uma generalização de exemplos já estudados, sem impor restrições quanto à fixação de gauge ou finitude da ação. O segundo, devido a S. Solomon[10], trata do problema geral em duas dimensões, considerando posteriormente as cópias de campo *quase-abeliano*.

3.1 - O Método Construtivo de Bollini-Giambiagi-Tiomno

Consideremos dois potenciais $A_\mu^{(1)}$ e $A_\mu^{(2)}$ dando origem a um mesmo campo $F_{\mu\nu}$. Então, como em (2.45), temos:

$$F_{\mu\nu}(\Delta) + \left[A_\mu^{(1)}, \Delta_\nu\right] - \left[A_\nu^{(1)}, \Delta_\mu\right] = 0 \quad , \qquad (3.1)$$

onde $\Delta_\mu = A_\mu^{(2)} - A_\mu^{(1)}$.

Definindo uma nova variável, $A_\mu = \frac{1}{2}\left(A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)}\right)$, a equação (3.1) passa a ser:

$$\Delta_{\nu,\mu} - \Delta_{\mu,\nu} + \left[A_\mu,\Delta_\nu\right] - \left[A_\nu,\Delta_\mu\right] = 0 \quad . \qquad (3.2)$$

Esta equação possui as seguintes propriedades:

i) Se $(\Delta_\mu;A_\mu)$ é uma solução, então $(c\Delta_\mu;A_\mu)$ também é solução (c = constante arbitrária). Isto equivale a construir um novo conjunto de cópias

$$\left\{A_\mu^{(1)} = A_\mu - \frac{c}{2}\,\Delta_\mu \;;\; A_\mu^{(2)} = A_\mu + \frac{c}{2}\,\Delta_\mu\right\}$$

a partir de

$$\left\{A_\mu^{(1)} = A_\mu - \frac{1}{2}\,\Delta_\mu \;;\; A_\mu^{(2)} = A_\mu + \frac{1}{2}\,\Delta_\mu\right\} .$$

ii) Se Δ_μ é o gradiente de alguma função, i.e., $\Delta_\mu = \partial_\mu\Delta$, então $(\Delta_\mu;A_\mu = 0)$ é uma solução. Esse caso corresponde a termos

$$A_\mu^{(1)} = - A_\mu^{(2)} = - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\Delta \quad ,$$

que é precisamente o exemplo 3 da ref. (3).

iii) Se Δ_μ é um gauge puro $(\Delta_\mu = U^{-1}\partial_\mu U)$ temos a solução $(\Delta_\mu;\ \frac{1}{2}\,\Delta_\mu)$ que corresponde ao caso trivial

$$\left\{A_\mu^{(1)} = 0 \;,\; A_\mu^{(2)} = U^{-1}\partial_\mu U\right\} .$$

Entretanto, usando a propriedade (i) podemos construir uma outra solução $(c\Delta_\mu\ ;\ \frac{1}{2}\,\Delta_\mu)$ que equivale a

$$\left\{A'^{(1)}_{\mu} = \frac{1}{2}(1-c)U^{-1}\partial_{\mu}U \quad ; \quad A'^{(2)}_{\mu} = \frac{1}{2}(1+c)U^{-1}\partial_{\mu}U\right\}$$

Fazendo $c = 2\alpha - 1$, obtemos

$$\left\{A'^{(1)}_{\mu} = (1-\alpha)U^{-1}\partial_{\mu}U \; ; \; A'^{(2)}_{\mu} = \alpha U^{-1}\partial_{\mu}U\right\}$$

que é precisamente um dos exemplos analisados no capítulo precedente.

Podemos separar a equação (3.2) em duas partes:

$$\Delta_{j,i} - \Delta_{i,j} + \left[A_i, \Delta_j\right] - \left[A_j, \Delta_i\right] = 0 \quad , \quad (i,j=1,2,3) \tag{3.3}$$

$$\partial_0 \Delta_i - \partial_i \Delta_0 + \left[A_0, \Delta_i\right] - \left[A_i, \Delta_0\right] = 0 \tag{3.4}$$

Com os índices internos essas duas equações podem ser escritas na forma:

$$B^a_k + \Delta^{ab}_{kj} A^b_j = 0 \tag{3.5}$$

$$\partial_0 \Delta^a_i = \partial_i \Delta^a_0 + f^{abc}\,(A^b_i \Delta^c_0 - A^b_0 \Delta^c_i) \quad , \tag{3.6}$$

onde

$$B^a{}_k \equiv \varepsilon_{ijk}\, \Delta^a_{j,i} \quad \text{e} \quad \Delta^{ab}_{ki} = f^{abc}\, \varepsilon_{ijk}\, \Delta^c_j$$

Podemos observar que, se conhecermos como dados iniciais as funções $\Delta^a_i(\vec{r},t_0)$ e também as funções $\Delta^a_0(\vec{r},t)$, $A^a_0(\vec{r},t)$ para qualquer tempo t, então, em princípio, as equações (3.5) e

(3.6) nos fornecem $\Delta_i^a(\vec{r},t)$ e $A_i^a(\vec{r},t)$.

Se nos restringimos ao gauge temporal ($A_0^a=\Delta_0^a=0$) a equação (3.6) nos dá $\partial_0\Delta_i^a = 0$, i.e., Δ_i^a é independente do tempo $\left[\Delta_i^a(\vec{r},t) = \Delta_i^a(\vec{r},t_0)\right]$. Então, por definição,

$$B_k^a(\vec{r},t) = B_k^a(\vec{r},t_0).$$

Se det $(\Delta_{kj}^{ab}) \neq 0$ (3.5) determina uma única solução A_j^b independente do tempo. Nesse caso, ou temos potenciais do tipo gauge puro ou potenciais cuja ação é infinita(*). Portanto, para termos ação finita é necessário impor que

$$\det\left[\Delta_{kj}^{ab}\right] = 0 \tag{3.7}$$

Se agora fizermos a suposição adicional de que Δ_i é um gauge puro, a equação (3.7) (exatamente análoga à eq. (2.52)) nos leva ao método de Halpern que examinámos anteriormente.

Consideremos como grupo de gauge o SU(2) e $\Delta_\mu=U^{-1}\partial_\mu U$ um gauge puro. É certo que sempre podemos fazer uma transformação de coordenadas de tal maneira que $\Delta_0 = 0$. Já sabemos por (iii) que ($\Delta_i = U^{-1}\partial_i U$, $A_i = \frac{1}{2}U^{-1}\partial_i U$) é uma solução de (3.3) e, portanto, de (3.5). Então, se det $\Delta_{kj}^{ab} \neq 0$ esta solução é única. Por outro lado, se det $\Delta_{kj}^{ab} = 0$, deve existir uma rela-

(*) Sendo S a ação temos

$$S\left[A^{(1,2)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x \; \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}^{(1,2)} F_{\mu\nu}^{(1,2)} \quad .$$

Se $A^{(1,2)} = A^{(1,2)}(\vec{r})$, $S(A^{(1,2)}) = \infty$ ou $S(A^{(1,2)}) = 0$.

Agora $S(A^{(1,2)}) = 0$ quer dizer que $F_{\mu\nu}^{(1,2)} = 0$, ou seja , $A_\mu^{(1,2)}$ é gauge puro.

ção entre os três parâmetros α_i do grupo. Isto quer dizer que no máximo dois dos parâmetros são independentes. Seja então $U \equiv U(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)})$. Desse modo,

$$\Delta_i = U^{-1}\partial_i U = U^{-1}\left\{ \frac{\partial U}{\partial\alpha^{(1)}}\,\alpha^{(1)}_{,i} + \frac{\partial U}{\partial\alpha^{(2)}}\,\alpha^{(2)}_{,i} \right\}, \qquad (3.8)$$

ou ainda,

$$\Delta_i = M_{(1)}\alpha^{(1)}_{,i} + M_{(2)}\alpha^{(2)}_{,i} \quad , \quad M_{(A)} \equiv U^{-1}\,\frac{\partial U}{\partial\alpha^{(A)}} \; . \qquad (3.9)$$

Calculando Δ^{ab}_{ki} para o grupo SU(2) (neste caso $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$) temos:

$$\begin{aligned} \Delta^{ab}_{ki} &= \varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}\Delta^c_j \\ &= \varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}\left[M^c_{(1)}\alpha^{(1)}_{,j} + M^c_{(2)}\alpha^{(2)}_{,j}\right] \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Como estamos considerando que det $\Delta^{ab}_{ki} = 0$, vemos que as soluções da equação homogênea associada a (3.5) são exatamente as auto-funções com autovalor nulo de (3.10):(*)

(*) É imediato ver que essas funções, de fato, satisfazem $\Delta^{ab}_{ki}A^b_i = 0$. Tomemos, por exemplo, a primeira delas $A^b_i = M^b_{(1)}\alpha^{(2)}_{,i}$:

$$\begin{aligned} \Delta^{ab}_{ki}A^b_i &= \varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}(M^c_{(1)}\alpha^{(1)}_{,j} + M^c_{(2)}\alpha^{(2)}_{,j})\; M^b_{(1)}\alpha^{(2)}_{,i} = \\ &= \varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}M^c_{(1)}M^b_{(1)}\alpha^{(1)}_{,j}\alpha^{(2)}_{,i} + \varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}M^c_{(2)}M^c_{(1)}\alpha^{(2)}_{,j}\alpha^{(2)}_{,i} = 0 \;, \end{aligned}$$

devido à anti-simetria de $\varepsilon^{abc}, \varepsilon_{ijk}$ e à simetria de $M^c_1 M^b_1, \alpha^{(2)}_{,j}\alpha^{(2)}_{,i}$ em relação aos índices de soma.

$$M^b_{(1)}\alpha^{(2)}_{,i} \quad ; \quad M^b_{(2)}\alpha^{(1)}_{,i} \quad \text{e} \quad M^b_{(1)}\alpha^{(1)}_{,i} - M^b_{(2)}\alpha^{(2)}_{,i} \qquad (3.11)$$

Além disso, qualquer autofunção com autovalor nulo poderá ser escrita como uma combinação linear das três soluções acima. Se tomarmos $U = i\sigma$ (como em (2.31)), $\Delta_i = \sigma\partial_i\sigma$, podemos escrever (3.11) do seguinte modo:

$$\sigma^j n^j_{,i} - \sigma n^j n^j_{,i} \qquad (3.12)$$

(aqui não temos soma em j, j=1,2,3).

Uma solução particular de (3.5) já sabemos que é $A_j = \frac{1}{2}\sigma\partial_j\sigma$, de acordo com (iii). Assim, a solução geral de (3.5) será:

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma\partial_i\sigma + \sum_{j=1}^{3}(\sigma^j\phi^j n^j_{,i} - \sigma n^j\phi^j n^j_{,i}) \quad , \qquad (3.13)$$

ϕ^j = três funções arbitrárias.

Se U é função de um único parâmetro $\underline{\alpha}$, $U = U(\alpha)$, então

$$\Delta_i = M\alpha_{,i} \quad , \quad M = U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\alpha} \qquad (3.14)$$

E as soluções de $\Delta^{ab}_{ki}A^b_i = 0$ terão a forma:

$$M^a b_i \quad , \quad N^a\alpha_{,i} \quad ,$$

onde b_i e N^a são funções arbitrárias. Qualquer autofunção com autovalor zero será combinação de $M^a b_i$, $N^a\alpha_{,i}$.

É fácil verificar que, se tomarmos (quadridimensionalmente)

$$\Delta_\mu = U^{-1}\partial_\mu U = M\alpha_{,\mu} \quad , \qquad (3.16)$$

$$A_\mu = Mb_\mu \quad ; \quad N\alpha_{,\mu} \quad , \qquad (3.14)$$

então Δ_μ e A_μ são soluções de (3.2).

Devido à natureza arbitrária de N^a e b_μ podemos escrever

$$A_\mu^{(1)} = a_\mu(x)M\left[\alpha(x)\right] + \alpha_{,\mu}(x)N(x) \qquad (3.17)$$

Agora, definindo o potencial $\bar{A}_\mu^{(2)}$ por

$$\bar{A}_\mu^{(2)} = \left[a_\mu(x) + f(\alpha)\alpha_{,\mu}\right]M\left[\alpha(x)\right] + \alpha_{,\mu}N(x) \quad , \qquad (3.18)$$

onde $f(\alpha)$ é uma função arbitrária do parâmetro α, é imediato verificar que

$$F_{\mu\nu}\left[\bar{A}^{(2)}\right] = F_{\mu\nu}\left[A^{(1)}\right] \quad .$$

Portanto, temos então que (3.18) representa um conjunto infinito de cópias de campo.

Se tomarmos em (3.17) e (3.18) $a_\mu = 0$ e $N(x) = \psi(x)M(\alpha)$, obtemos

$$A_\mu^{(1)} = \alpha_{,\mu}\psi(x)M(\alpha) \quad , \qquad (3.19)$$

$$\bar{A}_\mu^{(2)} = \alpha_{,\mu}\left[\psi(x) + f(\alpha)\right]M(\alpha) \quad . \qquad (3.20)$$

Para estes dois últimos potenciais verificamos facilmente que:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (\psi_{,\mu}\alpha_{,\nu} - \psi_{,\nu}\alpha_{,\mu})M(\alpha) \\ &\equiv G_{\mu\nu}(x)M(\alpha) \qquad (3.21) \end{aligned}$$

E já que

$$\left[A_\mu^{(1)}, F_{\mu\nu}\right] = \left[A_\mu^{(2)}, F_{\mu\nu}\right] = 0 \quad ,$$

obtemos através de um cálculo simples que às fontes de cada um dos potenciais são iguais, sendo dadas por:

$$j_\nu\left[A^{(1)}\right] = j_\nu\left[A^{(2)}\right] = G\mu\nu_{,\mu} M + G\mu\nu\alpha_{;\mu} \frac{\partial M}{\partial \alpha} \quad . \qquad (3.22)$$

Isto significa que os potenciais (3.19) e (3.20) além de serem cópias de campo são também cópias de corrente.

3.2 - O Problema das Cópias em Duas Dimensões[10]

Consideremos, em duas(*) dimensões, o problema de encontrar potenciais que geram um dado campo $F_{01} = F(x_0, x_1)$

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 + \left[A_0, A_1\right] = F(x_0, x_1) \qquad (3.23)$$

ou, usando a linguagem do espaço isotópico,

$$\partial_0 \vec{A}_1 - \partial_1 \vec{A}_0 + \vec{A}_0 \times \vec{A}_1 = \vec{f}_{01} = \vec{f}(x_0, x_1) \quad . \qquad (3.24)$$

Através de uma transformação V que nos leve ao gauge temporal passamos de $(\vec{A}_0, \vec{A}_1, \vec{f})$ para $(0, \vec{A}_1', \vec{f}')$. E a eq. (3.24) se reduz a

(*) Trabalharemos com o SU(2) como grupo de gauge, embora os resultados obtidos sejam válidos para qualquer grupo.

$$\partial_0 \vec{A}'_1 = \vec{f}'(x_0,x_1) \tag{3.25}$$

Impondo que $\vec{A}'_1$ ($x_0 = -\infty$, x_1) = 0, obtemos como solução de (*) (3.25):

$$\vec{A}'_1 = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi_0 \; \vec{f}(\xi_0,x_1) = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi_0 \; \vec{u}(\xi_0,x_1)|\vec{f}(\xi_0,x_1)| \; , \tag{3.26}$$

onde $\vec{u}$ é um vetor unitário com a direção e sentido de $\vec{f}$. É claro que $\vec{u}|\vec{f}| = \vec{f}'$ pode ser visto como sendo obtido de $\vec{f}$ através de uma rotação no espaço isotópico. Seja $\theta = (\vec{f},\vec{f}')$ o ângulo da rotação inversa, cujo eixo iremos representar pelo vetor unitário $\vec{n}$. A transformação U correspondente à essa rotação será dada por

$$U = U(\vec{f}',\vec{f}) = \cos\frac{\theta}{2} + i\vec{n}.\vec{\sigma}\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \quad . \tag{3.27}$$

Colocando (3.27) em termos de $\vec{f},\vec{f}'$; usando que $\cos\theta = \vec{f}.\vec{f}'/|\vec{f}|^2$ e as identidades trigonométricas

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}$$

$$\mathrm{sen}\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \quad ,$$

podemos escrever (3.27) como

$$U(\vec{f}',\vec{f}) = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\left[1 + \cos\theta + i\vec{n}.\vec{\sigma}\mathrm{sen}\theta\right] =$$

(*) Na verdade isto equivale a fixar univocamente o gauge. Ou seja, neste gauge o potencial fica completamente determinado pelo campo.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\theta}}\left[1 + \cos\theta + i\vec{n}.\vec{\sigma}\,\mathrm{sen}\,\theta\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2}}}\left[1 + \frac{\vec{f}.\vec{f}'}{|\vec{f}|^2} + i\,\frac{(\vec{f}'x\vec{f})}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right] \quad , \qquad (3.28)$$

já que $\vec{f}'x\vec{f} = |\vec{f}'x\vec{f}|\vec{n}$.

Podemos então escrever:

$$A_0 = U^{\dagger}\partial_0 U = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2}}}\left[1 + \frac{\vec{f}.\vec{f}'}{|\vec{f}|^2}\right.$$

$$\left. - i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right]\partial_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2}}}\left[1 + \frac{\vec{f}.\vec{f}'}{|\vec{f}|^2} + i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right]\right) \qquad (3.29)$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\vec{f}.\vec{f}/|\vec{f}|^2}}\left(1 + \frac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2} - \right.$$

$$\left. i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right)\partial_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\vec{f}'.\vec{f}/|\vec{f}|^2}}\left[1 + \frac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2} + i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right]\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2}}}\left(1 + \frac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2} - i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right).$$

$$\left[\int_{-\infty}^{x_0} d\xi_0 F'(\xi_0,x_1)\right]\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2}}}\left(1 + \frac{\vec{f}'.\vec{f}}{|\vec{f}|^2} + i\,\frac{\vec{f}'x\vec{f}}{|\vec{f}|^2}.\vec{\sigma}\right) \qquad (3.30)$$

Pelo fato de podermos levar qualquer configuração (A_0, A_1, f) à forma

$$\left\{0, \int_{-\infty}^{x_0} \vec{u}(\xi_0, x_1)|\vec{f}(\xi_0, x_1)|d\xi_0 \quad , \quad \vec{u}(x_0, x_1)|\vec{f}(x_0, x_1)|\right\} \quad , \tag{3.31}$$

e depois a (3.30), chegamos à conclusão de que todos os potenciais que fornecem o mesmo campo $\vec{f}$ devem estar contidos em (3.30). Cada vetor unitário $\vec{u}(x_0, x_1)$ vai nos dar uma cópia de campo; diferentes $\vec{u}$'s geram potenciais não gauge-equivalentes.

3.3 - Potenciais Quase-Abelianos(*)

Consideraremos um campo que tenha a seguinte forma:

$$\vec{f}'_{\mu\nu} = \vec{f}(x) g'_{\mu\nu}(x) \quad . \tag{3.32}$$

Podemos reescrever esta última expressão como sendo

$$\vec{f}'_{\mu\nu} = \vec{v}(x) g_{\mu\nu}(x) \quad , \tag{3.33}$$

onde

$$\vec{v}(x) \equiv \frac{\vec{f}(x)}{|\vec{f}(x)|} \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu}(x) = |\vec{f}(x)| g'_{\mu\nu}(x) \quad .$$

Agora, por uma rotação de gauge podemos passar de

(*) Continuamos nesta seção com o grupo SU(2).

(3.33) para (3.34)

$$\vec{f}_{\mu\nu} = \vec{u}_3 \; f_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

onde $\vec{u}_3$ é um isovetor constante no espaço-tempo orientado paralelamente ao terceiro eixo de uma base ortogonal do isoespaço.

Este campo, nesta forma, admite um potencial "abeliano" ou "maxwelliano"

$$A_\mu^{Abel} = \vec{u}_3 \; a_\mu^{Abel}(x) \tag{3.35}$$

Se, além disso, $\vec{f}_{\mu\nu}$ admite também potenciais não gauge-equivalentes a (3.35), então diremos que temos um campo *quase-abeliano*. É imediato ver que uma condição necessária para que um certo potencial não seja equivalente a (3.35) é que

$$\vec{A}_\mu \times \vec{u}_3 \neq 0 \quad . \tag{3.36}$$

De fato, se $\vec{A}_\mu = \vec{u}_3 a_\mu$, teremos

$$\vec{f}_{\mu\nu} = (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) \; \vec{u}_3 \quad .$$

Ora, mas $\vec{f}_{\mu\nu}$ calculado a partir de (3.35) nos dá

$$\vec{f}_{\mu\nu} = (\partial_\mu a_\nu^{Abel} - \partial_\nu a_\mu^{Abel}) \; \vec{u}_3 \quad .$$

Igualando as duas expressões para $\vec{f}_{\mu\nu}$ encontramos que

$$a_\mu^{Abel} = a_\mu + \partial_\mu \phi \quad .$$

A identidade de Bianchi escrita em termos dos vetores do espaço interno tem a forma:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu \vec{f}_{\nu\rho} + \vec{A}_\mu \times \vec{f}_{\nu\rho}) = 0 \quad . \tag{3.37}$$

Para $\vec{f}_{\nu\rho}$ dado por (3.34), temos:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ (\vec{u}_3 \partial_\mu f_{\nu\rho} + f_{\nu\rho}\ \vec{A}_\mu \times \vec{u}_3) = 0 \ . \tag{3.38}$$

Segue-se que devemos ter

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_{\nu\rho} \vec{A}_\mu \times \vec{u}_3 = 0 \quad . \tag{3.39}$$

Em detalhes, (3.39) é análoga a

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{23} & -f_{13} & f_{12} \\ -f_{23} & 0 & f_{03} & -f_{02} \\ f_{13} & -f_{03} & 0 & f_{01} \\ -f_{12} & f_{02} & -f_{01} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{A}_0 \times \vec{u}_3 \\ \vec{A}_1 \times \vec{u}_3 \\ \vec{A}_2 \times \vec{u}_3 \\ \vec{A}_3 \times \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Temos, então, um sistema linear e homogêneo na variável $\vec{A}_\mu \times \vec{u}_3$. Como estamos supondo satisfeita a equação (3.36) devemos concluir que

$$\det(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ f_{\nu\rho}) = 0 \quad , \tag{3.41}$$

o que implica em

$$\det f_{\nu\rho} = 0 \quad . \tag{3.42}$$

É possível demonstrar que esta última equação acarreta a existência de um potencial $\vec{A}_\mu$, de $\vec{f}_{\mu\nu}$, com a mesma forma de (3.35) satisfazendo

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, a_\mu^{Abel}\, \partial_\nu\, a_\rho^{Abel} = 0 \; . \tag{3.43}$$

Por sua vez, também se demonstra que (3.43) implica que existe um potencial de $\vec{f}_{\mu\nu}$ com a forma

$$\vec{A}_\mu^{Abel} = X_0(x)\partial_\mu X_1(x)\vec{u}_3 \; . \tag{3.44}$$

Com esse resultado calculamos $\vec{f}_{\mu\nu}(\vec{A}_\mu^{Abel})$ e encontramos

$$\vec{f}_{\mu\nu} = \vec{u}_3(\partial_\mu X_0 \partial_\nu X_1 - \partial_\nu X_0 \partial_\mu X_1) \; . \tag{3.45}$$

Investiguemos agora qual deve ser a forma mais geral dos potenciais que geram campos quase-abelianos, isto é, potenciais que satisfazem

$$\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu = \vec{u}_3\, f_{\mu\nu}(x) \tag{3.46}$$

Em primeiro lugar estamos supondo que $\det f_{\mu\nu} = 0$; caso contrário a forma mais geral de $\vec{A}_\mu$ será

$$\vec{A}_\mu = \vec{u}_3\, (a_\mu + \partial_\mu \phi) \tag{3.47}$$

(potencial abeliano)

Em termos dos isovetores da base ortonormal do espaço interno podemos escrever $\vec{A}_\mu$ como sendo

$$\vec{A}_\mu = a_\mu^i(x)\vec{u}_i \tag{3.48}$$

E agora a equação (3.46) se desdobra em:

$$\partial_\mu a^3_\nu - \partial_\nu a^3_\mu + a^1_\mu a^2_\nu - a^1_\nu a^2_\mu = \partial_\mu X_0 \partial_\nu X_1 - \partial_\nu X_0 \partial_\mu X_1 \quad , \tag{3.49}$$

$$\partial_\mu a^2_\nu - \partial_\nu a^2_\mu + a^3_\mu a^1_\nu - a^3_\nu a^1_\mu = 0 \quad , \tag{3.50}$$

$$\partial_\mu a^1_\nu - \partial_\nu a^1_\mu + a^2_\mu a^3_\nu - a^3_\nu a^2_\mu = 0 \quad . \tag{3.51}$$

Definindo a^0_μ por $a^3_\mu = a^0_\mu + X_0 \partial_\mu X_1$, (3.49) se torna:

$$\partial_\mu a^0_\nu - \partial_\nu a^0_\mu = a^1_\nu a^2_\mu - a^1_\mu a^2_\nu \quad . \tag{3.52}$$

Podemos considerar a^0_μ como um potencial abeliano que dá origem ao campo $h_{\mu\nu} \equiv a^1_\nu a^2_\mu - a^1_\mu a^2_\nu$. Ora, mas como det $h_{\mu\nu} = 0$ identicamente; pelo mesmo argumento usado anteriormente, podemos afirmar que

$$a^0_\mu = X_2(x) \partial_\mu X_3(x) \tag{3.53}$$

(em analogia com (3.44))

e, portanto,

$$a^3_\mu = X_2(x) \partial_\mu X_3(x) + X_0(x) \partial_\mu X_1(x) \tag{3.54}$$

Agora, substituindo a equação (3.53) em (3.52), encontramos:

$$\partial_\mu X_2 \partial_\nu X_3 - \partial_\nu X_2 \partial_\mu X_3 = a^1_\nu a^2_\mu - a^1_\mu a^2_\nu \tag{3.55}$$

Podemos considerar (3.55) como um sistema homogêneo nas variáveis $\partial_\mu X_2$ e a_μ^2. É imediato verificar que uma solução desse sistema será:

$$\begin{aligned} \partial_\mu X_2 &= m(x)\partial_\mu X_3 + n(x)a_\mu^1 \quad , \\ a_\mu^2 &= -n(x)\partial_\mu X_3 + q(x)a_\mu^1 \quad , \end{aligned} \tag{3.56}$$

onde $m(x)$, $n(x)$, $q(x)$ são funções arbitrárias.
Podemos, também, escrever (3.56) como

$$\begin{aligned} a_\mu^1 &= Y_2(x)\partial_\mu X_2 + Y_3(x)\partial_\mu X_3 \quad , \\ a_\mu^2 &= Z_2(x)\partial_\mu X_2 + Z_3(x)\partial_\mu X_3 \quad , \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde tomamos

$$Y_2 = \frac{1}{n(x)} \quad , \quad Y_3 = \frac{-m(x)}{n(x)} \quad , \quad Z_2 = \frac{q(x)}{n(x)}$$

e

$$Z_3 = -\left[n(x) + \frac{q(x)m(x)}{n(x)} \right]$$

Estas funções estão relacionadas através da equação

$$Z_3 Y_2 - Y_3 Z_2 = 1 \quad . \tag{3.58}$$

Desse modo, de (3.48), o potencial $\vec{A}_\mu$ pode ser escrito como

$$\vec{A}_\mu = X_0\vec{u}_3\partial_\mu X_1 + (\vec{u}_1 Y_2 + \vec{u}_2 Z_2)\partial_\mu X_2 + (Y_3\vec{u}_1 + Z_3\vec{u}_2 + X_2\vec{u}_3)\partial_\mu X_3 \quad . \tag{3.59}$$

Vemos, portanto, que na expressão do potencial (3.59) aparecem oito funções: X_0, X_1, X_2, X_3, Y_2, Y_3, Z_2, Z_3. Vamos mostrar que apenas duas dessas oito funções são independentes. Para isso, observemos que se substituimos em (3.50), (3.51) as equações (3.57), (3.58), então obteremos dois sistemas lineares nas variáveis $(\partial_\mu Y_2, \partial_\mu Y_3)$ e $(\partial_\mu Z_2, \partial_\mu Z_3)$. As soluções desse sistema deverão ser do tipo

$$\partial_\mu Y_i = B_{ij}(X,Y,Z)\partial_\mu X_j \tag{3.60}$$

e

$$\partial_\mu Z_i = C_{ij}(X,Y,Z)\partial_\mu X_j \quad , \tag{3.61}$$

onde B e C são funções conhecidas de X,Y,Z.

Calculando dY_i, dZ_i e usando estas duas últimas equações, vem:

$$\begin{aligned} dY_i &= \partial_\mu Y_i dX_\mu \\ &= B_{ij}(X,Y,Z)\partial_\mu X_j dX_\mu \\ &= B_{ij}(X,Y,Z)dX_j \end{aligned} \tag{3.62}$$

Analogamente,

$$dZ_i = C_{ij}(X,Y,Z)dX_j \tag{3.63}$$

Vemos assim que

$$Y_i = Y_i(X_1,X_2,X_3) \quad , \tag{3.64}$$

$$Z_i = Z_i(X_1,X_2,X_3) \quad , \tag{3.65}$$

$$B_{ij} = B_{ij}(X_1,X_2,X_3) \quad , \tag{3.66}$$

$$C_{ij} = C_{ij}(X_1,X_2,X_3) \quad . \tag{3.67}$$

Agora se tomarmos a diferencial da equação (3.58) obteremos:

$$Z_3dY_2 + Y_2dZ_3 - Y_3dZ_2 - Z_2dY_3 = 0 \tag{3.68}$$

Substituindo (3.62), (3.63), (3.64) e (3.65) em (3.68) obtemos a equação diferencial

$$(Z_3B_{2j} + Y_2C_{3j} - Y_3C_{2j} - Z_2B_{3j})dX_j = 0 \quad ,$$

o que implica em

$$X_3 = X_3(X_1,X_2) \tag{3.69}$$

Desse modo encontramos que

$$Y_i = Y_i(X_1,X_2) \quad , \tag{3.70}$$

$$Z_i = Z_i(X_1,X_2) \quad , \tag{3.71}$$

$$B_{ij} = B_{ij}(X_1,X_2) \tag{3.72}$$

$$C_{ij} = C_{ij}(X_1,X_2) \tag{3.73}$$

Comparando $B_{ij}(X_1,X_2)$ com $B_{ij}(X,Y,Z)$ da eq. (3.62), e usando também as equações (3.69), (3.70) e (3.71), observamos uma dependência de X_2 em relação a X_0 e X_1:

$$B_{ij}\left[X_0, X_1, X_2, X_3(X_1,X_2) \quad , \quad Y_i(X_1,X_2) \quad , \quad Z_i(X_1,X_2)\right] = B_{ij}(X_1,X_2), \tag{3.74}$$

ou seja, de fato,

$$X_2 = X_2(X_0,X_1) \tag{3.75}$$

Com isso provamos a afirmação anterior, de que apenas duas das oito funções X, Y, Z são independentes. Quer dizer:

$$X_3 = X_3(X_0,X_1) \quad , \tag{3.76}$$

$$Y_i = Y_i(X_0,X_1) \quad , \tag{3.77}$$

$$Z_i = Z_i(X_0,X_1) \quad . \tag{3.78}$$

Assim, a expressão do potencial (3.59) se reduz a

$$\vec{A}_\mu = \vec{B}_0(X_0,X_1)\partial_\mu X_0 + \vec{B}_1(X_0,X_1)\partial_\mu X_1 \quad , \tag{3.79}$$

onde

$$\vec{B}_0(X_0,X_1) = \left[Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial X_0} + Y_3 \frac{\partial X_3}{\partial X_0}\right]\vec{u}_1 + \left[Z_2 \frac{\partial X_2}{\partial X_0} + Z_3 \frac{\partial X_3}{\partial X_0}\right]\vec{u}_2 + X_2 \frac{\partial X_3}{\partial X_0}\,\vec{u}_3$$

e :

$$\vec{B}_1(X_0,X_1) = \left[Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial X_1} + Y_3 \frac{\partial X_3}{\partial X_1}\right]\vec{u}_1 + \left[Z_2 \frac{\partial X_2}{\partial X_1} + Z_3 \frac{\partial X_3}{\partial X_1}\right]\vec{u}_2 + \left[X_0 + X_2 \frac{\partial X_3}{\partial X_1}\right]\vec{u}_3.$$

Se calculamos agora o campo $\vec{f}_{\mu\nu}$ a partir de (3.79) encontraremos

$$\vec{f}_{\mu\nu} = (\partial_\mu X_0 \partial_\nu X_1 - \partial_\nu X_0 \partial_\mu X_1)\vec{f}(X_0,X_1) \quad , \tag{3.80}$$

com

$$\vec{f}(X_0,X_1) = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial X_0} - \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial X_1} + \vec{B}_0 \times \vec{B}_1 \tag{3.81}$$

Na verdade através de (3.81) não podemos garantir que $\vec{f}_{\mu\nu}$ é paralelo a $\vec{u}_3$. Entretanto, esse fato não traz dificuldades já que isto pode ser conseguido através de uma rotação de gauge. Portanto, a menos de um gauge, (3.79) representa a forma mais geral de um potencial quase-abeliano.

Já que todos os potenciais que geram o mesmo campo quase-abeliano podem ser escritos na forma (3.79), com as mesmas funções (X_0,X_1), nosso problema recai no caso bidimensional estudado na seção 3.2. As funções $\vec{B}_0$ e $\vec{B}_1$ que irão caracterizar os potenciais serão dadas pelas equações (3.29) e (3.30) trocando-se, naturalmente, $(\vec{A}_0,\vec{A}_1)$ por $(\vec{B}_0,\vec{B}_1)$.

Como observação final verifiquemos o que acontece quando submetemos (3.79) a uma transformação de gauge do tipo $U(x) = U\left[X_0(x),X_1(x)\right]$:

$$\begin{aligned}
A'_\mu &= U^{-1}(B_0\partial_\mu X_0 + B_1\partial_\mu X_1)U + U^{-1}\partial_\mu U \\
&= (U^{-1}B_0U + U^{-1}\frac{\partial U}{\partial X_0})\partial_\mu X_0 + (U^{-1}B_1U + U^{-1}\frac{\partial U}{\partial X_1})\partial_\mu X_1 \\
&= B'_0\partial_\mu X_0 + B'_1\partial_\mu X_1
\end{aligned}$$

Isto quer dizer que uma transformação do tipo $U\left\{X_0(x), X_1(x)\right\}$ em (3.79) equivale simplesmente à transformação bidimensional do potencial bidimensional $\left\{B_0(X_0, X_1)\ ;\ B_1(X_0, X_1)\right\}$.

CAPÍTULO IV

RELAÇÕES ENTRE OS POTENCIAIS DE SOLOMON E O EXEMPLO DE BOLLINI-GIAMBIAGI-TIOMNO

4.1 - O Exemplo de Bollini-Giambiagi-Tiomno em Duas Dimensões Como Um Caso Particular da Construção de Solomon

Como vimos no capítulo anterior, S. Solomon desenvolveu um método que nos permite encontrar todos os potenciais geradores de um campo $F(x,t)$ quando consideramos o espaço-tempo bidimensional. Podemos verificar facilmente que é possível enquadrar o conjunto de potenciais definido em (3.18) como um sub-conjunto de (3.29) e (3.30). De acordo com o que foi visto antes, em duas dimensões os potenciais que geram um mesmo campo no exemplo de Bollini-Giambiagi-Tiomno são dados por um conjunto de famílias $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$ com a forma:

$$\Gamma^f(M,N,a_\mu)=\left\{A_0=\alpha_{,0}N + \left[a_0+\alpha_{,0}f(\alpha)\right]M \; ; \; \alpha_{,1}N + \left[a_1+\alpha_{,1}f(\alpha)\right]M\right\} \quad , \tag{4.1}$$

onde $\mu = 0,1$. Para cada escolha particular de (M,N,a_μ) fixamos uma família de potenciais cujos elementos serão caracterizados por $f(\alpha)$ e que estarão associados ao mesmo campo de gauge

$$F(x,t) = \alpha_{,1}N_{,0}-\alpha_{,0}N_{,1}+(a_{1,0}-a_{0,1})M + (a_1\alpha_{,0}-a_0\alpha_{,1})\left(\frac{\partial M}{\partial\alpha} +[N,M]\right) \quad . \tag{4.2}$$

Já no exemplo de Solomon temos que a família de potenciais geradores de F(x,t) fica dada por

$$\Gamma^{sol} = \left\{ A_0 = U^{-1}\partial_0 U \;\; ; \;\; A_1 = U^{-1}\int_{-\infty}^{t} U(x,\tau)F(x,\tau)U^{-1}(x,\tau)d\tau U + U^{-1}\partial_1 U \right\} \tag{4.3}$$

com U(x,t) um elemento arbitrário do grupo. Assim, desejamos mostrar que $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$ deverá corresponder a uma sub-família de Γ^{sol}. Para tanto, como os elementos desta última são caracterizados por diferentes U's, precisamos encontrar a classe de U's que correspondem aos potenciais de $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$.

Vamos proceder por etapas. Primeiro, levamos toda a família $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$ ao gauge temporal. Naturalmente, para cada potencial de (4.1), $A_\mu = \alpha_{,\mu}N + \left[a_\mu + \alpha_{,\mu}f(\alpha)\right]M$, a transformação que executará tal tarefa será dada por(*)

$$V_f(x,t) = P\; e^{-\int_{-\infty}^{t}\left[\alpha_{;0}(x,\tau)N(x,\tau)+(a_0(x,\tau)+\alpha_0(x,\tau)\, f(\alpha(x,\tau)))M(\alpha(x,\tau)\right]} \; . \tag{4.4}$$

Feito isto, passamos em seguida ao gauge $A_1(x,-\infty) = 0$ (ainda com $A_0 = 0$) por intermédio de

(*)Para determinar a forma de V_f devemos resolver a equação $V_f^{-1}\partial_0 V_f + V_f^{-1}A_0 V_f = 0$, ou seja, $\partial_0 V_f = -A_0 V_f$. Temos, então, como solução

$$V_f = P\; e^{-\int_{-\infty}^{t} d\tau A_0(x,\tau)}$$

onde a letra "P" está sendo usada para designar *produto cronológico* (ver, por exemplo, S.S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", 1ª edição, Harper and Row Publishers (1961), cap. 11). Por outro lado, é imediato ver que a inversa de V_f, V_f^{-1}, é solução de $\partial_0 V_f^{-1} = V_f^{-1}A_0$.

$$W_f(x) = \mathcal{P}\, e^{-\int_{-\infty}^{x} d\xi A_1'(\xi,-\infty)} \tag{4.5}$$

onde

$$A_1'(\xi,-\infty) = V_f^{-1}(\xi,-\infty)\partial_\xi V_f^{-1}(\xi,-\infty) + V_f^{-1}(\xi,-\infty)\Big[\alpha_{,1}(\xi,-\infty)N(\xi,-\infty) + \left\{a_1(\xi,-\infty) + \alpha_{,1}(\xi,-\infty)f\left[\alpha(\xi,-\infty)\right]\right\}M\left[\alpha(\xi,-\infty)\right]\Big]V_f(\xi,-\infty). \tag{4.6}$$

Desse modo, todos os potenciais de $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$ são trazidos ao "super-gauge" $A_0(x,t) = 0$, $A_1(x,-\infty) = 0$. Esta nova família, que denotaremos de $\overset{(0)}{\Gamma}{}^f(M,N,a_\mu)$, é que irá formar a sub-família de Γ^{sol} correspondente a $\Gamma_M^f(M,N,a_\mu)$. Pondo

$$U_f(x,t) = V_f(x,t)W_f(x) \tag{4.7}$$

temos que todos os potenciais de $\overset{(0)}{\Gamma}{}^f(M,N,a_\mu)$ geram um campo

$$\overset{(0)}{F}(x,t) = U_f^{-1}(x,t)F(x,t)U_f(x,t)\ . \tag{4.8}$$

Conclui-se daí que

$$\overset{(0)}{\Gamma}{}^f(M,N,a_\mu) = \left\{A_\mu ;\ \overset{(0)}{A}_0 = 0\ ,\ \overset{(0)}{A}_1 = \int_{-\infty}^{t} U_f^{-1}(x,\tau)F(x,\tau)U_f(x,\tau)d\tau\right\}.$$

Consequentemente, submetendo todos os potenciais de $\overset{(0)}{\Gamma}{}^f$ à transformação inversa $U_f^{-1}(x,t)$, obtemos novamente $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$, que agora aparece na forma:

$$\Gamma^f(M,N,a_\mu^{\cdot\cdot}) = \Big\{ A_\mu^{\cdot\cdot}; A_0 = U_f \partial_0 U_f^{-1} \ ,$$

$$A_1 = U_f \int_{-\infty}^{t} U_f^{-1}(x,\tau)F(x,\tau)U_f(x,\tau)d\tau U_f^{-1} + U_f \partial_1 U_f^{-1} \Big\} \ . \quad (4.9)$$

Comparando (4.9) com (4.3) vemos que, realmente, $\Gamma^f(M,N,a_\mu)$ é uma subfamília de Γ^{sol}, gerada por uma certa classe de elementos do grupo de gauge do tipo

$$U_f^{-1}(x,t) = \left[P\ e^{-\int_{-\infty}^{x} d\xi\ A_1'(\xi,-\infty)} \right]^{-1} \left[P\ e^{-\int_{-\infty}^{t} d\tau A_0(x,\tau)} \right]^{-1} \ , \quad (4.10)$$

com $A_1'(\xi,-\infty)$ e $A_0(x,\tau)$ dados em (4.6) e (4.1).

4.2 - Potenciais de Solomon Gerados a Partir de Uma Equação de Evolução

Já vimos que Bollini-Giambiagi-Tiomno mostraram ser possível obter-se cópias de maneira unívoca quando se tem $\Delta_i^a(\vec{r},t_0)$ como condições iniciais e também as funções $\Delta_0^a(\vec{r},t)$, $A_0^a(\vec{r},t)$. Para isto, basta usarmos alternadamente as equações

$$B_k^a + \Delta_{kj}^{ab} A_j^b = 0 \ , \quad (3.5)$$

$$\partial_0 \Delta_i^a = \partial_i \Delta_0^a + f^{abc} (A_i^b \Delta_0^c - A_0^b \Delta_i^c) \ . \quad (3.6)$$

Com a ajuda de (3.5), (3.6) podemos, em princípio, calcular todas as derivadas de $\Delta_i^a(\vec{r},t)$ e $A_i^a(\vec{r},t)$ em $t = t_0$, e, portanto, encontrar o valor de $\Delta_i^a(\vec{r},t)$, $A_i^a(\vec{r},t)$.

Sucede, porém, que, em duas dimensões, o conhecimento de $\Delta_1^a(x,t_0)$, $\Delta_0^a(x,t)$ e $A_0^a(x,t)$ não é suficiente para a obtenção de $\Delta_1^a(x,t)$, $A_1^a(x,t)$. Esse fato é conseqüência de que, quando $\mu = 0,1$, a equação (3.2) se reduz simplesmente a (3.6) com $i = 1$. Ou seja, em duas dimensões já não existe a equação (3.5). Desse modo, para poder encontrar $\Delta_1^a(x,t)$ é necessário acrescentar a função $A_1^a(x,t)$ como mais um dado conhecido. Em resumo, se temos $A_0(x,t)$, $A_1(x,t)$, $\Delta_0(x,t)$ e $\Delta_1(x,t_0)$, então a equação de evolução

$$\partial_0\Delta_1 = \partial_1\Delta_0 + \left[A_1,\Delta_0\right] - \left[A_0,\Delta_1\right] \qquad (4.11)$$

nos permitirá determinar $\Delta_1(x,t)$.

Por causa da unicidade da solução de Bollini-Giambiagi-Tiomno temos que, dados dois potenciais $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ gerados pelo método de Solomon, é de se esperar, naturalmente, que escolhendo convenientemente $A_0(x,t)$, $A_1(x,t)$, $\Delta_0(x,t)$, $\Delta_1(x,t_0)$, podemos construir $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ a partir de (4.11).

Temos que, por definição,

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2}\left[A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right] \\ A_1 = \frac{1}{2}\left[A_1^{(1)} + A_1^{(2)}\right] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta_0 = A_0^{(2)} - A_0^{(1)} \\ \Delta_1 = A_1^{(2)} - A_1^{(1)} \end{cases} \qquad (4.12)$$

Consideremos dois potenciais de Solomon dados por

$$\begin{cases} A_0^{(1)sol} = W^{-1}(x,t)\partial_0 W(x,t) \\ A_1^{(1)sol} = W^{-1}(x,t)\ {}_1W(x,t)+W^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(x,\tau)|\vec{f}(x,\tau)|d\tau W(x,t), \end{cases} \qquad (4.13)$$

$$\begin{cases} A_0^{(2)sol} = U^{-1}(x,t)\partial_0 U(x,t) \\ A_1^{(2)sol} = U^{-1}(x,t)\partial_1 U(x,t) + U^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(2)}(x,\tau)\,|\vec{f}(x,\tau)|\,d\tau\, U(x,t), \end{cases} \tag{4.14}$$

onde $u^{(A)} = \vec{u}^{(A)}.\vec{\sigma}/2i$ $(A = 1,2)$. Substituindo (4.13) e (4.14) em (4.12) vem:

$$\begin{cases} A_0^{sol} = \frac{1}{2}\left[U^{-1}(x,t)\partial_0 U(x,t) + W^{-1}(x,t)\partial_0 W(x,t)\right] \\ A_1^{sol} = \frac{1}{2}\left[U^{-1}(x,t)\partial_1 U(x,t) + W^{-1}(x,t)\partial_1 W(x,t) + U^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(2)}(x,\tau)\,|\vec{f}(x,\tau)|\right. \\ \qquad \left. d\tau\, U(x,t) + W^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(x,\tau)\,|\vec{f}(x,\tau)|\,d\tau\, W(x,t)\right] \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} \Delta_0^{sol} = U^{-1}(x,t)\partial_0 U(x,t) - W^{-1}(x,t)\partial_0 W(x,t) \\ \Delta_1^{sol} = U^{-1}(x,t)\partial_1 U(x,t) - W^{-1}(x,t)\partial_1 W(x,t) + U^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(2)}(x,\tau) \\ \qquad |\vec{f}(x,\tau)|\,d\tau\, U(x,t) - W^{-1}(x,t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(x,\tau)\,|\vec{f}(x,\tau)|\,d\tau\, W(x,t). \end{cases}$$

(4.16)

O que estamos pretendendo verificar é que, com os seguintes dados iniciais:

$$\begin{cases} A_0^{BGT}(x,t) = A_0^{sol}(x,t) \\ \vdots \\ A_1^{BGT}(x,t) = A_1^{sol}(x,t) \\ \Delta_0^{BGT}(x,t) = \Delta_0^{sol}(x,t) \\ \Delta_1^{BGT}(x,t_0) = \Delta_1^{sol}(x,t_0) \end{cases} \tag{4.17}$$

podemos, a partir da equação de evolução (4.11), determinar $\Delta_1^{BGT}(x,t)$ para qualquer $\underline{t}$ e que, na verdade, $\Delta_1^{BGT}(x,t)$ coincide com $\Delta_1^{sol}(x,t)$.

Desenvolvendo $\Delta_1^{sol}(x,t)$ e $\Delta_1^{BGT}(x,t)$ em torno de t_0(*), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_1^{sol}(x,t) = \Delta_1^{sol}(x,t_0) &+ \partial_0\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} \Delta t + \\ &+ \frac{1}{2!}\,\partial_0^2\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} (\Delta t)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!}\,\partial_0^n\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} (\Delta t)^n + \ldots \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^{BGT}(x,t) = \Delta_1^{BGT}(x,t_0) &+ \partial_0\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} \Delta t + \\ &+ \frac{1}{2!}\,\partial_0^2\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} (\Delta t)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!}\,\partial_0^n\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} (\Delta t)^n + \ldots \end{aligned} \tag{4.19}$$

(*) Naturalmente estamos supondo que Δ_1^{sol} e Δ_1^{BGT} são analíticas em $t = t_0$.

Comparando (4.18) com (4.19) vemos que o primeiro termo de cada série já é idêntico. É preciso, então, mostrar que

$$\partial_0 \Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^{sol} \Delta_1(x,t)\Big|_{t=t_0} \quad ;$$

$$\partial_0^2 \Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^2 \Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} \quad ;$$

$$\partial_0^n \Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^n \Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$$

Demonstração:

1) Calculemos $\partial_0 \Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$ e $\partial_0 \Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0}$

i) De (4.16) temos:

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Delta_1^{sol}(x,t) = {} & \partial_0 U^{-1}(x,t)\partial_1 U(x,t) + U^{-1}(x,t)\partial_0\partial_1(x,t) - \\
& - \partial_0 W^{-1}(x,t)\partial_1 W(x,t) - W^{-1}(x,t)\partial_0\partial_1 W(x,t) + \\
& + \partial_0 U^{-1}(x,t)\int_{t_0}^{t} u^{(2)}(x,\tau)|\vec{f}(x,\tau)|d\tau U(x,t) + \\
& + \underbrace{U^{-1}(x,t)u_2^{(2)}(x,t)|\vec{f}(x,t)|U(x,t)}_{A} + \\
& + U^{-1}(x,t)\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(\dot{x},\tau)|\vec{f}(x,\tau)|d\tau\partial_0 U(x,t) -
\end{aligned}$$

$$-\partial_0 W^{1}(x,t)\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(x,\tau)|\vec{f}(x,\tau)|d\tau W(x,t) -$$

$$-\underbrace{W^{-1}(x,t)u^{(1)}(x,t)|\vec{f}(x,t)|W(x,t)}_{B} -$$

$$-W^{-1}(x,t)\int_{t_0}^{t} u^{(1)}(x,\tau)|\vec{f}(x,\tau)|d\tau\ \partial_0 W^{-1}(x,t) \tag{4.20}$$

Sabemos que $u^{(2)}(x,t)|\vec{f}(x,t)| = U(x,t)f(x,t)U^{-1}(x,t)$ e também que $u^{(1)}(x,t)|\vec{f}(x,t)| = W(x,t)f(x,t)W^{-1}(x,t)$. Assim, os termos (A) e (B) se cancelam.

Em $t = t_0$ a equação (4.20) fica:

$$\partial_0\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0 U^{-1}\Delta_1 U\Big|_{t=t_0} + U^{-1}\partial_0\partial_1 U\Big|_{t=t_0}$$

$$- \partial_0 W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0} + W^{-1}\partial_0\partial_1 W\Big|_{t=t_0} .$$

ii) Agora, calculemos $\partial_0\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0}$ utilizando (4.17) e (4.11):

$$\partial_0\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_1\Delta_0^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} + \left[A_1^{BGT}(x,t_0),\Delta_0^{BGT}(x,t_0)\right] - \left[A_0^{BGT}(x,t_0)\right.,$$

$$\left.\Delta_1^{BGT}(x,t_0)\right] = \partial_1(U^{-1}\partial_0 U - W^{-1}\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} + \frac{1}{2}\left[U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0} + W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0}\right.,$$

$$U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0}\Big] - \frac{1}{2}\Big[U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0}, U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0}\Big] =$$

$$= \partial_1 U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0} + U^{-1}\partial_1\partial_0 U\Big|_{t=t_0} - \partial_1 W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_1\partial_0 W\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ \Big[U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0}, U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0}\Big] + \Big[W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0}, W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0}\Big] =$$

$$= \partial_1 U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0} + U^{-1}\partial_1\partial_0 U\Big|_{t=t_0} - \partial_1 W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_1\partial_0 W\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ U^{-1}\partial_1 U U^{-1}\partial_0 U\Big|_{t=t_0} - U^{-1}\partial_0 U U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0} + W^{-1}\partial_0 W W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0}$$

$$- W^{1}\partial_1 W W^{-1}\partial_0 W\Big|_{t=t_0} =$$

$$= U^{-1}\partial_1\partial_0 U\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_1\partial_0 W\Big|_{t=t_0} + \partial_0 U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0} - \partial_0 W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0} =$$

$$= U^{-1}\partial_1\partial_0 U\Big|_{t=t_0} + \partial_0 U^{-1}\partial_1 U\Big|_{t=t_0} - W^{-1}\partial_1\partial_0 W\Big|_{t=t_0} - \partial_0 W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0} -$$

Vemos, então, que $\partial_0\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$.

Analogamente, podemos fazer um cálculo de $\partial_0^2\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0}$ e de $\partial_0^2\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$. Também, nesse caso, encontraremos valores idênticos para as duas expressões. Explicitamente, esse cálculo nos dá:

$$
\begin{aligned}
\partial_0^2\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^2\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} &= \partial_0^2 U\partial_1 U\Big|_{t=t_0} + \\
&+ 2\partial_0 U^{-1}\partial_0\partial_1 U\Big|_{t=t_0} + U^{-1}\partial_0^2\partial_1 U\Big|_{t=t_0} - \\
&- \partial_0^2 W^{-1}\partial_1 W\Big|_{t=t_0} - 2\partial_0 W^{-1}\partial_0\partial_1 W\Big|_{t=t_0} - \\
&- W^{-1}\partial_0^2\partial_1 W\Big|_{t=t_0} + \left[f, U^{-1}\partial_0 U\right]\Big|_{t=t_0} - \\
&- \left[f, W^{-1}\partial_0 W\right]\Big|_{t=t_0}
\end{aligned}
$$

2) Suponhamos, então, que para a derivada k-ésima tenhamos:

$$
\begin{aligned}
\partial_0^k\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^k\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} &= \partial_0^k(U^{-1}\partial_1 U)\Big|_{t=t_0} - \partial_0^k(W^{-1}\partial_1 W)\Big|_{t=t_0} + \\
&+ \partial_0^k\left(U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\vec{f}|\,d\tau\, U\right)\Big|_{t=t_0} - \partial_0^k\left(W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\vec{f}|\,d\tau\, W\right)\Big|_{t=t_0},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

onde $k \leq n$.

Mostremos que teremos, necessariamente, para $k = n+1$:

$$\partial^{n+1}\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^{n+1}\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$$

De (4.11) temos:

$$\partial_0^{n+1}\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^n\partial_1\Delta_0(x,t)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n\Big[A_1(x,t)\ ,$$

$$\Delta_0(x,t)\Big]\Big|_{t=t_0} - \partial_0^n\Big[A_0(x,t),\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big]\Big|_{t=t_0} \tag{4.22}$$

Agora,

$$\partial_0^n\Big[A_0(x,t),\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big]\Big|_{t=t_0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big\{\partial_0^kA_0(x,t)\Big|_{t=t_0}$$

$$\times\ \partial_0^{n-k}\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} - \partial_0^k\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0}$$

$$\times\ \partial_0^{n-k}A_0(x,t)\Big|_{t=t_0}\Big\} \tag{4.23}$$

Usando (4.21), fica:

$$\partial_0^n\Big[A_0(x,t),\Delta_1^{BGT}(x,t)\Big]\Big|_{t=t_0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big\{\partial_0^kA_0(x,t)\Big|_{t=t_0}\partial_0^{n-k}\Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0}$$

$$- \partial_0^k \Delta_1^{sol}(x,t)\Big|_{t=t_0} \partial_0^{n-k} A_0(x,t)\Big|_{t=t_0} \Big\} =$$

$$= \partial_0^n \left[A_0(x,t), \Delta_1^{sol}(x,t)\right]\Big|_{t=t_0} \qquad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.22) segue-se:

$$\partial_0^{n+1} \Delta_1^{BGT}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \partial_0^n \partial_1 (U^{-1}\partial_0 U - W^{-1}\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_0^n \Big[U^{-1}\partial_1 U + W^{-1}\partial_1 W + U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\vec{f}|d\tau U +$$

$$+ W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\vec{f}|d\tau W \; , \; U^{-1}\partial_0 U - W^{-1}\partial_0 W\Big]\Big|_{t=t_0}$$

$$- \frac{1}{2} \partial_0^n \Big[U^{-1}\partial_0 U + W^{-1}\partial_0 W \; , \; U^{-1}\partial_1 U - W^{-1}\partial_1 W +$$

$$+ U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\vec{f}|d\tau U - W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\vec{f}|d\tau \, W\Big]\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \partial_0^n \partial_1 (U^{-1}\partial_0 U - W^{-1}\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n \left[U^{-1}\partial_1 U, U^{-1}\partial_0 U\right]\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ \partial_0^n \left[W^{-1}\partial_0 W, W^{-1}\partial_1 W\right]\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n \Big[U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\vec{f}|d\tau U,$$

$$U^{-1}\partial_0 U\Big]\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ \partial_0^n \left[W^{-1}\partial_0 W, W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\mathfrak{f}|d\tau W \right]\Big|_{t=t_0}$$

$$= \partial_0^n(\partial_1 U^{-1}\partial_0 U)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n(U^{-1}\partial_1\partial_0 U)\Big|_{t=t_0} - \partial_0^n(\partial_1 W^{-1}\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} -$$

$$- \partial_0^n(W^{-1}\partial_1\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n(U^{-1}\partial_1 UU^{-1}\partial_0 U)\Big|_{t=t_0} -$$

$$- \partial_0^n(U^{-1}\partial_0 UU^{-1}\partial_1 U)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n(W^{-1}\partial_0 WW^{-1}\partial_1 W)\Big|_{t=t_0} +$$

$$- \partial_0^n(W^{-1}\partial_1 WW^{-1}\partial_0 W)\Big|_{t=t_0} + \partial_0^n(U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\mathfrak{f}|d\tau\partial_0 U)\Big|_{t=t_0} -$$

$$- \partial_0^n(U^{-1}\partial_0 UU^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\mathfrak{f}|d\tau U)\Big|_{t=t_0} +$$

$$+ \partial_0^n(W^{-1}\partial_0 WW^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\mathfrak{f}|d\tau W)\Big|_{t=t_0} - \partial_0^n(W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\mathfrak{f}|d\tau\partial_0 W)\Big|_{t=t_0}$$

$$= \partial_0^n\Big\{+U^{-1}\partial_1\partial_0 U - W^{-1}\partial_1\partial_0 W + \partial_0 U^{-1}\partial_1 U - \partial_0 W^{-1}\partial_1 W +$$

$$+ U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\mathfrak{f}|d\tau\partial_0 U + \partial_0 U^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(2)}|\mathfrak{f}|d\tau U$$

$$- \partial_0 W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\mathfrak{f}|d\tau\, W - W^{-1}\int_{t_0}^{t} u^{(1)}|\mathfrak{f}|d\tau\partial_0 W\Big\}\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \partial_0^n \left\{ \partial_0 (U^{-1} \partial_1 U - W^{-1} \partial_1 W + U^{-1} \int_{t_0}^{t} u^{(2)} |\vec{f}| d\tau U - \right.$$

$$\left. - W^{-1} \int_{t_0}^{t} u^{(1)} |\vec{f}| d\tau W) \right\} \Bigg|_{t=t_0} .$$

$$= \partial_0^{n+1} \Delta_1^{sol}(x,t) \Bigg|_{t=t_0} .$$

Este resultado demonstra, portanto, que $\Delta_0^{sol}(x,t)$ pode ser obtido através de (4.11) e de (4.17). Em outras palavras, podemos gerar os potenciais de Solomon a partir de uma equação de evolução com adequadas condições de contorno.

CAPÍTULO V

CÓPIAS ELÉTRICAS NÃO-ABELIANAS

Neste capítulo nos propomos a apresentar um método que seja suficiente para obtenção de todas as cópias possíveis de qualquer campo elétrico não-abeliano $\vec{E}$. Denominaremos de *cópias elétricas* os potenciais não gauge-equivalentes que geram o mesmo campo elétrico $\vec{E}$. Essencialmente, o mecanismo no qual se baseia este método nada mais é do que uma extensão para quatro dimensões do que foi feito na seção 3.2, seguindo a indicação de N. Weiss na escolha de um "gauge super-axial" como ponto de partida[11]. Quanto ao grupo de gauge considerado, não há nenhuma restrição a ser imposta e os resultados são completamente gerais.

Por definição, as componentes vetoriais de um campo elétrico não-abeliano $\vec{E}$ são dadas por

$$E_i(\vec{r},t) = F_{0i}(\vec{r},t) = \partial_0 A_i(\vec{r},t) - \partial_i A_0(\vec{r},t) + \left[A_0(\vec{r},t),A_i(\vec{r},t)\right]. \tag{5.1}$$

Se estamos trabalhando no gauge definido pelas equações abaixo,

$$A_0(\vec{r},t) = 0 \quad , \tag{5.2a}$$

$$A_3(\vec{r},-\infty) = 0 \quad , \tag{5.2b}$$

$$A_1(x,y,-\infty,-\infty) = 0 \quad , \tag{5.2c}$$

$$A_2(-\infty,y,-\infty,-\infty) = 0 \quad , \tag{5.2d}$$

então (5.1) toma uma forma mais simples:

$$E_i(\vec{r},t) = \partial_0 A_i(\vec{r},t) \quad . \tag{5.3}$$

Podemos demonstrar que as equações (5.2) especificam univocamente o gauge. Isto quer dizer que, dado um campo $F_{\mu\nu}$, o potencial correspondente estará perfeitamente determinado. Como conseqüência, neste gauge não há possibilidade da existência de cópias de gauge[7]. Vejamos este resultado em detalhes. Sejam A_μ, A'_μ dois potenciais associados ao mesmo $F_{\mu\nu}$ e $\Delta_\mu = A'_\mu - A_\mu$. Da equação $F_{0i}(A) = F_{0i}(A')$ tiramos:

$$\partial_0 \Delta_i(\vec{r},t) = 0 \quad , \tag{5.4}$$

o que implica $\Delta_i = \Delta_i(\vec{r})$. Por outro lado, (5.2b) nos dá que

$$\Delta_3(\vec{r}) = 0 \tag{5.5}$$

De (5.2c) e (5.2d) temos, respectivamente, que

$$\Delta_1(x,y,-\infty) = 0 \tag{5.6}$$

e

$$\Delta_2(-\infty,y,-\infty) = 0 \tag{5.7}$$

Como $F_{i3}(A) = F_{i3}(A')$ $(i = 1, 2)$; vem que, em $t = -\infty$,

$$\partial_3 \Delta_1 = 0 \quad . \tag{5.8}$$

e

$$\partial_3 \Delta_2 = 0 \tag{5.9}$$

Isto é,

$$\Delta_2 = \Delta_2(x,y) \tag{5.10}$$

e, de (5.6) com (5.8), encontramos que

$$\Delta_1 = 0 \tag{5.11}$$

E com $F_{12}(A) = F_{12}(A')$ em $t = -\infty$ e $z = -\infty$, obtemos

$$\partial_1 \Delta_2 = 0 \quad , \tag{5.12}$$

que, juntamente com (5.7), resulta em

$$\Delta_2 = 0$$

Assim, $\Delta_\mu = 0$. Logo, fica demonstrado que no gauge (5.2), o campo $F_{\mu\nu}$ determina univocamente o potencial$^{(*)}$.

A solução da equação (5.3) será dada por

$$A_i(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} E_i(\vec{r},\tau)d\tau + A_i(\vec{r},-\infty) \ . \tag{5.13}$$

Consideremos, agora (ainda no gauge (5.2)), uma família G de potenciais $A_\mu[U]$ definida da seguinte forma:

(*) É fácil ver que a transformação que leva um certo potencial A_μ a (5.2) é única. Portanto, não existem neste gauge dois potenciais distintos que sejam gauge-equivalentes.

$$G = \left\{ A_\mu^{[U]} \;;\; A_0^{[U]} = 0 \;,\; A_i^{[U]} = \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{t} U(\vec{r},\tau)E_i(\vec{r},\tau)U^{-1}(\vec{r},\tau)d\tau + A_i(\vec{r},-\infty) \right\} \;, \qquad (5.14)$$

onde $U(\vec{r},t)$ é um elemento qualquer do grupo de gauge(*). O potencial (5.13) pertence, naturalmente, à esta família (basta tomar $U = I$ = identidade). Isto prova que, dado um campo elétrico $\vec{E}_i(\vec{r},t)$ arbitrário, podemos assegurar a existência de pelo menos um potencial $A \in G$ (e.g. $A_\mu = A_\mu^{[I]}$) que o gera. Da maneira pela qual definimos G decorre que seus potenciais deverão gerar campos elétricos do tipo:

$$E_i^{[U]} = \partial_0 A_i^{[U]} = U(\vec{r},t)E_i(\vec{r},t)U^{-1}(\vec{r},t) \quad . \qquad (5.15)$$

Este é um resultado importante. Na verdade, é a chave de todo processo que nos permite construir as cópias. Realizando uma transformação de gauge U em cada potencial $A_\mu^{[U]}$ (isto é, cada potencial $A_\mu^{[U]}$ sendo transformado pela própria U usada na sua definição), obteremos um novo conjunto de potenciais $\tilde{A}_\mu$. Devido a (5.15), todos estes potenciais serão geradores do mesmo campo elétrico $\tilde{E}_i = E_i$, já que

$$\tilde{E}_i = U^{-1}E_i^{[U]}U = E_i \quad . \qquad (5.16)$$

(*) Afora a exigência de satisfazer às equações (5.2b,c,d), $A_i(\vec{r},-\infty)$ em (5.14) é totalmente arbitrário.

Esta nova família de potenciais, dotados com esta propriedade, será definida, então, por(*)

$$F = \Big\{ A_\mu ; A_0 = U^{-1}(\vec{r},t)\partial_0 U(\vec{r},t)$$

$$A_i = U^{-1}(\vec{r},t) \int_{-\infty}^{t} U(\vec{r},\tau)E_i(\vec{r},\tau)U^{-1}(\vec{r},\tau)d\tau U(\vec{r},t) \; +$$

$$+ \; U^{-1}(\vec{r},t)A_i(\vec{r},-\infty)U(\vec{r},t) + U^{-1}(\vec{r},t)\partial_i U(\vec{r},t)\Big\} \; . \quad (5.17)$$

Convém salientar que, uma vez que não existem dois potenciais distintos $A_\mu^{[U]}$, $A_\mu^{[U']}$, gauge-equivalentes em G (por hipótese os elementos desta família estão todos no gauge (5.2)), então dois potenciais A_μ, A'_μ, pertencentes a F e construídos a partir de $A_\mu^{[U]}$, $A_\mu^{[U']}$, não podem ser gauge-equivalentes.

Para finalizar, vamos mostrar que F, de fato, abrange todos os potenciais geradores de $\vec{E}$, ou seja, que nossa construção é exaustiva. Suponhamos, por exemplo, que $\bar{A}_\mu$ seja um potencial que dá origem a $\vec{E}$. Através de uma transformação V^{-1} podemos levá-lo ao gauge (5.2). Ora, mas acontece que neste gauge o potencial transformado $\bar{A}'_\mu$ tem como campo elétrico

$$\bar{E}'_i = \partial_0 \bar{A}'_i = V E_i V^{-1} \quad (5.18)$$

Temos, portanto, que

(*) Podemos também comprovar de imediato que os potenciais de F dão origem ao mesmo campo elétrico fazendo explicitamente o cálculo a partir de (5.17).

$$\overline{A}'_0 = 0 \quad \text{e} \quad \overline{A}'_i = \int_{-\infty}^{t} V(\vec{r},\tau)E_i(\vec{r},\tau)V^{-1}(\vec{r},\tau)d\tau + \overline{A}'_i(\vec{r},-\infty) \ . \tag{5.19}$$

Com esta forma, vemos que $\overline{A}'_\mu$ pertence realmente à família G definida em (5.14). Desse modo, através da transformação inversa V aplicada em $\overline{A}'_\mu$, recuperamos $\overline{A}_\mu$, com

$$\overline{A}_\mu \doteq V^{-1}\,\overline{A}'_\mu V + V^{-1}\partial_\mu V \quad , \tag{5.20}$$

que, naturalmente, pertence a F, como queríamos demonstrar.

REFERÊNCIAS

(1). C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, "Teoria de Campos de Gauge", Universidade Federal de São Carlos, Curso de Verão,(1978).

E.S. Abers and B.W. Lee, "Gauge Theories", Phys. Reports C9 (1973), 1.

J. Iliopoulos, "An Introduction to Gauge Theories", CERN preprint (1977).

R.P. Feynman, "Gauge Theories", (Les Houches, session XXIX, 1976 - Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy); North-Holland Publishing Company (1977).

P.P. Srivastava "Alguns Aspectos da Teoria de Gauge", (II Escola de Cosmologia e Gravitação, João Pessoa-PB) , CBPF, (1980).

C.N. Yang and R.L. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and isotopic Gauge Invariance", Phys. Rev. 96, (1954),191.

(2). T.T. Wu and C.N. Yang, "Some Remarks About Unquantized Non-Abelian Gauge Fields", Phys. Rev. D12, (1975), 3843.

(3). S. Deser and F. Wilczek, "Non-Uniqueness of Gauge-Field Potenvials", Phys. Lett. B65, (1976), 391.

(4). M. Calvo, "Connection Between Yang-Mills Potentials and Their Field Strengths", Phys. Rev. D15, (1977), 1733.

(5). R. Roskies, "Uniqueness of Yang-Mills Potentials", Phys. Rev. D15, (1977), 1731.

(6). S. Coleman, "Non-Abelian Plane Waves", Phys.Lett.B70,(1977), 59.

(7). M.B. Halpern, "Field-Strength Copies and Action Copies in Quantum Chromodynamics", Nucl.Phys., B139,(1978), 477.

(8). C.G. Bollini, J.J. Giambiagi and J. Tiomno, "On the Relation Between Fields and Potentials in Non-Abelian Gauge Theories", Revista Brasileira de Física, 9 (1979), 229.

(9). C.G. Bollini, J.J. Giambiagi and J. Tiomno,"Gauge Field Copies", Phys. Lett. B83, (1979), 185.

(10). S. Solomon, "On the Field Strength-Potential Connection in Non-Abelian Gauge Theory", Nucl. Phys. B147, (1979), 174.

(11). N. Weiss, "On the Determination of Yang-Mills Potentials From the Field Strengths", University of Illinois (Urbana-champaign) preprint (1979).

(12). S. Deser and W. Drechsler, "Generalized Gauge Field Copies", Phys. Lett. B86, (1979), 189.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Juan José Giambiagi - Presidente

Carlos Marcio do Amaral

João Carlos dos Anjos

Rio de Janeiro, 28 de julho de 1980